UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROFMAT

GABRIEL HENRIQUE MOREIRA GOMES

O USO DO ERRO COMO FERRAMENTA PARA MELHORIA DO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Orientador:
Prof. Dr. ANDRÉ GUSTAVO CAMPOS PEREIRA

Natal – RN
Fevereiro de 2026

GABRIEL HENRIQUE MOREIRA GOMES

O USO DO ERRO COMO FERRAMENTA PARA MELHORIA DO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Natal – RN
Fevereiro de 2026

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Gomes, Gabriel Henrique Moreira.
O uso do erro como ferramenta para melhoria do ensino de análise combinatória / Gabriel Henrique Moreira Gomes. - 2026.
65f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2026.
Orientação: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

1. Análise combinatória - Dissertação. 2. Educação matemática - Dissertação. 3. Erros - Dissertação. 4. Investigação - Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Título.

RN/UF/BSCCET CDU 519.1/.2

Elaborado por Elaine Paiva de Assunção - CRB-15/492

O uso do erro como ferramenta para melhoria do ensino de Análise Combinatória

por

Gabriel Henrique Moreira Gomes

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

André Gustavo Campos Pereira

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira - UFRN (Orientador)

Fágner Lemos de Santana

Prof. Dr. Fágner Lemos de Santana - UFRN (Membro Interno)

Otto Augusto de Morais Costa

Prof. Dr. Otto Augusto de Morais Costa - IFRN (Membro Externo)

Fevereiro/2026

Dedico este trabalho a Deus, por criar algo melhor em mim todas as vezes que parei de me culpar por meus erros e, acolhendo-me, comecei a aprender com eles.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder a oportunidade de realizar este trabalho e prover tudo o que é necessário para superar os meus desafios e alcançar os meus objetivos. Sem a Sua presença em minha vida, nada disso seria possível.

Sou profundamente grato aos meus pais, Eudenise e André, pelo amor, apoio e incentivo durante toda a minha vida. Também sou grato aos meus irmãos que torcem por mim em tudo o que me proponho a fazer. Minha família é a minha base maior.

Sou agradecido por ter amigos que me ajudam a trilhar esse caminho, tornando tudo mais cômico e fácil. Em especial, agradeço à Julianna por ir atrás de mim quando pensei que não daria conta e me convencer de que sou, sim, capaz e à Rosy por me ensinar que por trás de toda a sabedoria que uma pessoa pode adquirir, existe um coração que pulsa por viver coisas lindas e que não devo desistir delas. O título de mestre será uma conquista, mas o real presente foi ter conhecido vocês.

Agradeço ao corpo docente do programa, que contribuiu imensuravelmente para o meu crescimento na área matemática. Especialmente, agradeço ao professor André Gustavo, que confiou em mim e gentilmente aceitou me orientar neste trabalho, compartilhando as suas ideias e conhecimentos. Foi uma honra tê-lo como orientador.

Por fim, quero agradecer a mim mesmo por não desistir e acreditar que consigo superar qualquer obstáculo que Deus permita que surja em minha vida. Tenho orgulho da história que estou escrevendo para mim.

“Perder-se também é caminho”
Clarice Lispector

Resumo

Os erros são parte inerente do processo de ensino e aprendizagem e são inevitáveis. O ato de errar pode trazer consigo uma gama de repercussões negativas tanto interna (no sentido de despertar emoções como vergonha, raiva, frustração, etc), quanto externamente no convívio do aluno com seus pares e seus professores. Dito isso, os desacertos podem ser vistos como uma evidência de um processo que fracassou ou (como dizia Thomas Edison) como um aprendizado de uma forma de não proceder. Esse trabalho trata dessa segunda opção, ou seja, de utilizar o erro no ensino da Matemática como uma ferramenta de aprendizado, tirar lições com o erro, investigando-o cuidadosamente para prevenir que ele se repita. Existem classificações para diversos tipos de erro. Aqui tratamos dos seguintes tipos: erros de interpretação, de cálculo, de estratégia e de conceito matemático. Ao longo deste trabalho, tratamos desses temas, de como fazer o uso da investigação do erro para melhorar o entendimento de alguns tópicos da disciplina Análise Combinatória. Esse trabalho resulta em um produto educacional intitulado "Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos", que aplica de forma prática o que foi debatido ao longo do trabalho, além de apresentar uma sequência didática como norte para o uso de tal produto educacional em sala de aula.

Palavras-chave: Educação matemática; Análise combinatória; Erros; Investigação.

Abstract

Mistakes are an inherent and unavoidable part of the teaching and learning process. The act of making mistakes can bring about a range of negative repercussions, both internal (in the sense of arousing emotions such as shame, anger, frustration, etc.) and external, in the student's interactions with peers and teachers. However, mistakes can be viewed either as evidence of a failed process or (as Thomas Edison once put it) as a way of learning how not to proceed.This work focuses on the latter perspective—that is, on using errors in Mathematics teaching as a learning tool, drawing lessons from mistakes by carefully investigating them to prevent recurrence. There are classifications for various types of errors; here, we will address the following: interpretation errors, calculation errors, reasoning errors, and conceptual (mathematical) errors. Throughout this study, we will discuss these themes and explore how investigating mistakes can improve the understanding of certain topics within combinatorial analysis. This work culminates in an educational product titled "Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos", which practically applies the ideas discussed here in and presents a didactic sequence to guide the use of this educational resource in the classroom.

Keywords: Mathematics Education; Combinatorial Analysis; Errors; Investigation.

Sumário

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO

No ensino de matemática é comum que os professores submetam os seus alunos à resolução de problemas. Em sala de aula, ao longo da resolução de um problema é necessário que os discentes interpretem a situação proposta no enunciado e recorram aos seus conhecimentos prévios e ao repertório matemático recém-ministrado pelo docente para estabelecer uma estratégia de resolução, até chegar em um resultado final.

É comum que nem sempre um estudante consiga, de imediato, selecionar uma linha de raciocínio que o direcione a uma solução completamente correta de uma atividade. Bianchini e Vasconcelos (2015) apontam que possíveis causas para esse equívoco sejam o não entendimento do enunciado ou não domínio do conteúdo. Além desses, é possível elencar a interpretação equivocada dos comandos, a associação precipitada da situação-problema com operações matemáticas, proposições, teoremas, entre outros, ou ainda, a aplicação incorreta de tais conhecimentos matemáticos no raciocínio empregado como alavanca para esse equívoco.

Assim como Bianchini e Vasconcelos, ao longo do século XX muitos cientistas da psicologia e da educação dedicaram suas pesquisas a entender quais são as possíveis origens dos erros em questões matemáticas e como classificá-los para, a partir disso, traçar caminhos eficientes de intervenção que conduzissem o estudante ao real entendimento de dado conteúdo.

Correia (2010) discorre que no período entre guerras, pesquisadores do erro na Alemanha, como Weiner, Kiessling e Seseman, investigaram as possíveis causas para equívocos frequentes e a possibilidade de existirem pessoas com uma predisposição ao erro, considerando três tipos de erros: mecânicos, associativos e funcionais.

Já na União Soviética, por volta dos anos 60, Correia (2010) informa que pesquisadores como Kuzmitskaya e Menchinskaya categorizaram os equívocos como: erro por memória de curto prazo insuficiente, erro mecânico, erro associativo, erro por incompreensão do problema e erro por distração (o que resulta em erros mecânicos).

Nos Estados Unidos, ao longo do século XX, os pesquisadores da análise do erro, como Reisman, Lankford, Engelhard, Ashlock e Cox, voltaram-se a estudar erros frequentes na aritmética, entendendo-os como "não acidentais", mas resultado de esquemas equivocados desenvolvidos a partir de conceitos básicos iniciais. Esses buscavam formas de ensino que reduzissem os erros frequentes.

Resnick e Ford (1990) registram que no século passado, a análise dos erros limitou-se em algumas pesquisas a anotar quais foram os erros cometidos por alunos em cálculos aritméticos básicos, contabilizar quantas vezes precisavam interferir na resolução do estudante até que este apresentasse a resposta correta e observar o tempo gasto para completar a tarefa corretamente. Também era comum a organização de escalas de dificuldades para auxiliar o docente nas correções.

Em linhas gerais, errar significa deixar de acertar, isto é, dentre tantos significados que pode possuir, é não atingir um alvo pré-estabelecido ou alcançar um resultado incoerente com a realidade do contexto.

É certo que o objetivo de qualquer professor ao propor um exercício em sala de aula é que os seus alunos apliquem corretamente os conhecimentos obtidos para acertarem a resposta. Todavia, errar é uma oportunidade em potencial de aprender. De acordo com Dewey (1959), quando o erro é analisado com intencionalidade pedagógica, torna-se parte importante e natural no processo de aprendizagem.

No ensino de matemática, uma prática docente fundamentada no acerto tende a priorizar um algoritmo de resolução que conduza o estudante ao êxito (ALRO; SKOVSMOSE, 2006), e a evitar a incidência de erros (BESSOT, 1983), desconsiderando questões importantes a direcionar ao executor da questão como "a partir de que ponto a sua resolução ficou errada?", "por que o seu raciocínio está incorreto?", "matematicamente, o que você desconsiderou para chegar a essa conclusão?", "a resposta que você obteve é coerente?", "o seu equívoco te distanciou muito da resposta correta?", dentre outras reflexões que podem tornar um simples erro na consolidação de um aprendizado.

Saber onde se quer chegar é extremamente importante, mas saber onde não chegar ou onde é incoerente chegar é sinal de que estamos lidando com uma questão de maneira crítica e consciente. Por isso é preciso permitir o erro. Dewey (1959) argumenta que é papel do docente criar em sala de aula um ambiente ideal para que os alunos explorem, cometam erros, reavaliem rotas e, assim, essa se torne uma ótima forma de assimilarem os conteúdos abordados.

Ao verificar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento essencial que norteia a educação básica do Brasil, é nítido o oferecimento de um currículo que auxilie os discentes no desenvolvimento de competências e habilidades e na formação de atitudes e valores, para intervirem nos diversos contextos da vida com soluções eficazes e decisões lúcidas (BRASIL, 2018).

Isso evidencia o objetivo de, na escola, o professor contribuir para a formação de pessoas autônomas em suas vidas. Cometer um erro em sala de aula, detectá-lo e, em seguida, apagá-lo sem qualquer reflexão, é desconsiderar que as pessoas cometem erros fora da escola e que, esses, não podem ser simplesmente apagados.

Diante desse raciocínio, determinamos como questão de pesquisa para este estudo: a partir da identificação de um erro e da reflexão sobre ele é possível estabelecer uma estratégia pedagógica que otimize o processo de ensino-aprendizagem e preencha a lacuna causadora do erro?

Para responder a essa indagação, esta dissertação possui como objetivo geral discutir sobre uma estratégia pedagógica que contribua para que o estudante assimile o conteúdo e desenvolva um pensamento crítico, pautada na investigação do erro e aplicada na análise combinatória, objeto de conhecimento previsto pela BNCC para ser ministrado da 1ª série à 3ª série do Ensino Médio.

Diante desse objetivo geral, estabelecemos como objetivos específicos: (1) compreender de que formas o erro pode impactar a mente humana, para estabelecer uma possível relação entre a falta de afinidade das pessoas com a disciplina de matemática e a metodologia à qual essas pessoas foram expostas durante a vida escolar, para então (2) entender como o docente pode intervir a partir do erro de um estudante em sala de aula, de maneira que o professor consiga encontrar possibilidades de converter uma possível frustração em estímulo ao recomeço e ao desenvolvimento de um pensamento crítico frente aos problemas, melhorando a performance do discente.

Após entender esses dois primeiros tópicos será possível (3) propor uma estratégia pedagógica de investigação do erro que contribua com a aprendizagem no estudo da análise combinatória, e, por fim, aplicar essa estratégia ao (4) elaborar um Produto Educacional (PE) nomeado como "Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos", que consistirá em um pequeno livro com problemas de análise combinatória previamente solucionados (alguns itens com mais de uma solução proposta), entretanto, de maneira incorreta, cujo objetivo do público será identificar o erro cometido, raciocinar o que foi desconsiderado na linha de raciocínio, de que forma a solução encontrada se distancia da realidade e como reparar a incoerência, chegando à resposta correta.

Esta dissertação estrutura-se em cinco etapas. A primeira etapa trata-se da presente introdução que contextualiza o tema do estudo, apresenta a questão de pesquisa e aborda os objetivos geral e específicos que este trabalho busca alcançar.

A segunda etapa refere-se ao Capítulo 1, em que abordamos os aspectos educacionais envolvidos no ato de errar em práticas na disciplina de Matemática, sobre a tendência de reprodução de algoritmos propostos pelo professor quando o único foco do estudante é o de acertar e sobre como a investigação do erro cometido pode estimular o desenvolvimento de senso crítico no educando.

Seguindo para a terceira etapa, entramos no Capítulo 2, em que nos aprofundamos na discussão sobre como a investigação dos erros pode funcionar como estratégia pedagógica no estudo da análise combinatória, entendendo como ocorre o contato entre os estudantes e esse objeto de conhecimento e quais as dificuldades mais recorrentes no estudo desse.

Na quarta etapa, o Capítulo 3 apresenta uma caso prático que relata os principais resultados da aplicação de uma atividade de análise combinatória pelos autores em uma turma de 1ª série do Ensino Médio. Nesse ponto é feita uma análise estatística descritiva sobre a incidência dos erros em diferentes tipos de problemas, apontando quais foram os tipos de erros mais comuns em cada caso.

Por fim, na última etapa, apresentamos as considerações finais sobre este estudo, em que analisamos se os objetivos foram atingidos com sucesso e finalizamos refletindo sobre a possibilidade de aprofundar este estudo com desenvolvimentos futuros.

Essa dissertação possui dois apêndices. O primeiro apresenta e explica o Produto Educacional (PE) desenvolvido, o livreto de problemas matemáticos chamado "Descombinados, um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos", um material que possibilita a prática da investigação do erro para auxiliar na assimilação de conceitos da análise combinatória. O segundo sugere uma sequência didática com recomendações sobre como aplicar algumas atividades propostas no produto em questão.

Capítulo 1

O erro na disciplina de matemática: aspectos educacionais

Durante o ano letivo os alunos se deparam, particularmente nas disciplinas de matemática, com os erros. Os erros podem se dar em diversos níveis, desde os erros de cálculo até o erro no entendimento do que o problema pede. Esses primeiros são mais fáceis de detectar porque são explícitos, os últimos precisam ser investigados mais profundamente para detectar em qual estágio do entendimento o aluno parou. Será que ele não compreendeu o que a questão pedia ou não soube qual tópico da matéria deveria usar para resolver o problema ou, ainda, foi de uma fórmula que ele não lembrou? Esse trabalho discute como aproveitar a oportunidade que esses erros cometidos oferecem para o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem.

Primeiro, devemos entender que o fato de errar provoca efeitos diversos no aluno. Temos os efeitos na esfera intrapessoal, ou seja, os efeitos que o erro pode causar no próprio aluno, e na esfera interpessoal, no ambiente de sala de aula, isto é, com os professores e os outros alunos, na forma que estes lidam com o equívoco cometido.

1.1 O que geralmente acontece quando um aluno erra?

Os efeitos que o erro pode causar na dinâmica de uma sala de aula e, até mesmo, em uma escola, estão diretamente associados à forma com a qual a instituição, os professores e os próprios alunos consideram os erros como parte do processo educativo. Há defensores da ideia de que erros devam ser evitados ao longo do processo de ensino-aprendizagem por associarem a sua incidência com a ineficiência do processo educativo, a ignorância, o desinteresse ou a desatenção por parte de um aluno (BESSOT, 1983).

Esse tipo de raciocínio acaba por corroborar a ideia de que os erros são evidências de um insucesso educativo e, logo, é iniciada a busca por possíveis culpados por tais equívocos.

"Quando a escola falha nesta perspectiva da eficácia, a razão do erro é buscada em muitas fontes: ora é considerado um problema do professor, ora da escola, ora da criança, etc. Mas há sempre um culpado na história." (MACEDO, 1990, p. 353).

Ao invés de tentar apagar os erros, não seria possível utilizá-lo como ferramenta para melhorar o ensino?

Bianchini e Vasconcelos (2015) refletem que muitos professores de matemática acreditam que sua atribuição é a de detectar e apontar acertos e erros nas produções dos educandos, sem perceberem que os equívocos cometidos possuem várias origens, como falta de domínio sobre o conteúdo, engano ou até mesmo um erro construtivo, que, segundo Piaget, é evidência de que o estudante está a criar uma nova forma de pensar, isto é, acomodando o novo saber.

A seguir apresentamos um experimento feito por Bianchini e Vasconcelos (2015) que ilustra como ainda não estamos preparados para desenvolver o erro como ferramenta de aprendizado e que para utilizar o erro como auxiliar do processo de ensino, algumas preparações prévias se fazem necessárias para desenvolver um ambiente propício a tal implementação.

Os autores realizaram um experimento em que, durante um mês, alunos de diferentes turmas do 6º ano de uma escola reuniram-se para realizar práticas matemáticas. Nesse experimento, ao sugerir atividades, esses notaram que os educandos preferiam organizar-se individualmente ou, no máximo, em duplas, o que já sugere uma certa resistência em abrir-se a uma aprendizagem colaborativa na disciplina de matemática.

Nas situações em que o erro estava presente, a conduta de antipatia entre eles era ainda pior, pois trocavam xingamentos entre si, apontando o colega como "burro", comentando "você não sabe nada", "como pode errar nas atividades tão fáceis que dão aqui", etc. Quando o professor propunha atividades em dupla, não cooperavam entre si, mas um deles acabava fazendo pelo outro e, quando o colega errava, novamente trocavam xingamentos hostis entre si (BIANCHINI; VASCONCELOS, 2015).

Vemos que o ambiente encontrado não era propício para utilizar o erro como ponto inicial de uma nova abordagem. O erro foi motivo de discussões desrespeitosas entre os discentes.

Os autores analisaram os efeitos do erro causados em três tipos de situações: relação aluno-aluno, relação aluno-professor e aluno sozinho. Na primeira relação, os autores registraram a presença de conflitos interpessoais (com xingamentos e desestímulos) após a ocorrência de erros. Isso mostra que o olhar dos alunos sobre o erro ainda é carregado de rótulos negativos, ou seja, os estudantes não entendem o poder que o erro tem de ajudá-los a assimilar conteúdos, o que é compreensível, visto que é preciso criar um ambiente em que os desacertos sejam bem-vindos, o que implica na desconstrução dessa visão pessimista.

Na segunda relação foi notado que os alunos se sentiam intimidados pelo professor, visto que se trata de uma relação considerada assimétrica pelos autores. Isto é, por mais que, de fato, um professor possua mais tempo de contato e maior profundidade com um tema, a relação professor-aluno pode ser colaborativa, todavia, talvez os discentes não tenham essa perspectiva. Na ocorrência de erros, foi percebido que o professor apresentou a resposta certa, sem registro de uma correção ou reflexão sobre o método de resolução escolhido pelo estudante. Esse fato mostra que é possível que nem o próprio professor, que adota tal método de intervenção, tenha a completa noção do potencial que a relação professor-aluno tem de contribuir com uma aprendizagem colaborativa, em que o aluno autorregula-se.

A terceira situação analisada refere-se a como os erros podem influenciar na performance do educando. Do experimento de Bianchini e Vasconcelos (2015), foram percebidas algumas reações diante das dificuldades surgidas ao longo da execução das atividades propostas:

> Diante de qualquer dificuldade, não realizavam esforço em prosseguir e, quando erravam, não buscavam refazer a atividade por autorregulação, mas apresentavam estratégias como copiar de alguém que sabia ou enrolar para depois copiar do quadro a correção do professor ou, ainda, pedir para ir ao banheiro e, no caminho, buscar a ajuda de colegas de outras salas. Ou seja, era muito pouco o engajamento dos alunos nas atividades propostas pelo professor. (BIANCHINI; VASCONCELOS, 2015).

Essas atitudes são reflexos de como os estudantes estão lidando com seus desacertos, mas não comunicam o que, de fato, sentem emocionalmente. É preciso considerar a esfera emocional dos alunos, visto que questões emocionais podem atuar como obstáculos para o conhecimento (GUSMÃO; EMERIQUE, 2000).

Culpa, desânimo, medo, raiva, vergonha, nervosismo e tristeza são sentimentos comuns relatados entre os alunos após perceberem que erraram a execução de uma atividade, bem como vontade de esconder o erro (BIANCHINI; VASCONCELOS, 2015). Tais sensações podem estar relacionadas com a crença, por parte dos estudantes, de que devem agradar o professor com um bom desempenho em atividades (GUSMÃO; EMERIQUE, 2000). Além disso, a forma como os instrumentos avaliativos são abordados pela comunidade escolar pode influenciar diretamente na incidência de tais sentimentos frustrantes. Por vezes, a comunidade escolar corrobora a cultura de competição e classificação de alunos por meio de avaliações (HOFFMANN, 1998).

Para tentar implementar o erro como ferramenta de aprimoramento do ensino teremos que mudar a forma de correção das atividades avaliativas, como sugere:

> “Avaliações, atividades e suas respectivas correções não devem ser utilizadas como meios de punição, classificação ou censura, mas podem ser transformadas em oportunidades de dar continuidade no processo de aprendizagem” (CHAKUR; SILVA; MASSABNI, 2016).

Vemos então que é preciso preparar um ambiente diferente do que foi encontrado no experimento de Bianchini e Vasconcelos (2015) para poder utilizar o erro como recurso de aprendizado. Tem que ser possível estabelecer, em sala de aula, um ambiente em que haja espontaneidade ao tentar, liberdade para errar, motivação para consertar, estímulo para colaborar e possibilidade de aprender sem medos, frustrações e culpas. Algumas possibilidades para organizar esse ambiente estão discutidas na próxima seção.

1.2 O que poderia acontecer quando um aluno erra?

Analisamos que quando o erro não é considerado como uma etapa legítima do processo de ensino-aprendizagem, comportamentos como apatia, rejeição, xingamentos e desestímulos são notados entre os estudantes. Além disso, no tocante ao professor, pode ser notada uma certa falta de paciência de lidar com a incorreção e, então, esse prontamente fornece o raciocínio correto ou, até mesmo, a resposta da atividade, na tentativa de “corrigir” o erro cometido pelo estudante.

Em pesquisas realizadas por Spinillo, Pacheco, Gomes e Cavalcanti (2014), no campo da Psicologia Cognitiva, foi sugerido inserir o erro como uma forma de pensar o conteúdo, isto é, diante de um determinado problema, o professor pode apresentar aos alunos linhas de raciocínio comumente utilizadas por eles, não necessariamente corretas, e refletir em cima delas, traçando questionamentos como “por que pensar ou por que não pensar dessa forma?”, “como ter certeza de que este raciocínio nos conduz à resposta correta?”, “esse modo de pensar não está completamente correto, mas até que ponto está coerente?”, dentre outras questões. Com as respostas dos estudantes, é possível que esses entendam formas de agir diante do problema em questão e sintam-se à vontade para questionar procedimentos e sugerir novos caminhos.

Além dos benefícios aos alunos, esse tipo de debate também confere ao professor um retorno positivo: uma clareza sobre os erros que tendem a surgir e sobre como os alunos tendem a interpretar tais questões em um primeiro contato. Em resumo, teorizar sobre os erros é permitir que a dinâmica de sala de aula parta de “apática” para “colaborativa”.

Esse retorno positivo é importante, pois o professor é um criador de situações que facilitam a aprendizagem de um conteúdo. Dessa forma, se os professores abandonarem o lugar de corretor de erros e passarem também a estudá-los (e gerenciarem os alunos de modo que esses também reflitam sobre tais incorreções), então se desprenderão do ato de sugerir linhas de raciocínios (CHAKUR; SILVA; MASSABNI, 2016) e pararão de gastar suas energias em fazer os educandos entenderem tais linhas.

Na prática, no que diz respeito aos professores, isso poderia acontecer da seguinte forma: ao propor um problema matemático, o docente pode ceder um tempo para que os alunos lidem com a interpretação da situação. Em seguida, oferecer um momento para que haja diálogo sobre o problema. Assumir o papel de mediadores e deixar que os alunos lancem raciocínios de resolução, que podem ser registrados no quadro da sala, independente de estarem corretos ou não. Após esse processo, pode propor que os educandos argumentem sobre quais raciocínios parecem coerentes e quais não parecem.

Essa etapa de exposição de ideias e deliberação sobre os raciocínios mais coerentes, possibilita que, aos poucos, cada estudante sinta-se à vontade para sugerir e argumentar, pois é um momento em que não há reprovação de opiniões em razão de erros. Assim, passa a não existir mais motivos para desrespeito e rejeição entre os pares.

Após a seleção dos raciocínios mais "coerentes" pelos alunos, a turma pode tentar solucionar a questão, seja em grupos ou individualmente, enquanto os professores se detêm a retirar dúvidas que possam surgir no processo.

Nesse contexto, os professores não precisam se preocupar em analisar a quantidade de acertos ou erros que os educandos cometem, mas, sim, perceber quanta ajuda estão precisando para desenvolver a atividade e quanta ajuda estão oferecendo uns aos outros (CHAKUR; SILVA; MASSABNI, 2016).

O professor pode provocar o aluno a refletir mais sobre o que o próprio produziu, ao lançar questionamentos como "Observe o seu ponto de partida; Você desenvolveu cada etapa do seu raciocínio corretamente? Revise-as!" ou "De fato, a solução possui alguns erros, mas esses são de cálculo, de interpretação ou por você não saber mais como proceder a partir desse ponto específico?", e, assim, ir intervindo na prática do aluno até o acerto, sem sobrepor o seu pensamento experiente em detrimento do pensar em construção do educando.

A Figura 1.1 ilustra a proposta acima por meio de um esquema para facilitar a sua visualização.

Figura 1.1: Sugestão de como favorecer em sala de aula um ambiente não intimidador frente aos problemas matemáticos

Fonte: Autoria própria

A estratégia acima é uma sugestão do que poderia acontecer frente às resoluções de problemas matemáticos, porém, é possível elaborar outras estratégias que valorizem a potencialidade do erro e a colaboração entre os alunos no intercâmbio de repertórios e linhas de raciocínios.

O ambiente de sala de aula pode passar progressivamente a ser um lugar confortável, para que o menos experiente em matemática dos discentes se dê ao menos o direito de tentar compreender, sem temer sentimentos de culpa ou de frustração.

Vemos então que os erros em sala de aula são oportunidades pedagógicas para que com métodos adequados, colaboração e paciência conhecimentos sejam adquiridos.

Todavia, os erros abrangem outros questionamentos, como sugerem Casávola et al. (1988, p. 32):

> Os erros cometidos pelas crianças durante a aquisição de conhecimentos suscitam uma grande problemática. Por um lado, trata-se de uma questão pedagógica, no que tange a relacioná-los com o tipo de atitude que o docente deve assumir diante do erro e a maneira de corrigi-los. Por outro lado, é uma questão psicológica na medida em que é pertinente perguntar se os erros são fatos aleatórios da aprendizagem ou se têm suas razões no mecanismo de aquisição dos conhecimentos. (CASÁVOLA et al., 1988, p. 32)

Para os autores, o erro possui a sua vertente psicológica, na qual o docente deve questionar-se sobre se a origem do erro é marcada pela aleatoriedade (ou seja, o equívoco mostra-se como um indício de incompreensão do tema) ou pelo traço de que está havendo um entendimento gradual do conteúdo.

Os professores poderiam permitir que o estudante participasse do processo de entendimento do desacerto, adentrando a vertente pedagógica do erro, ao perguntar "você está entendendo o motivo dos passos que está dando?" ou "por que você acha que está errado?" e a partir das respostas falar "esse erro é sinal de que você já compreendeu boa parte do que deve ser feito, falta apenas esse ajuste" ou "o seu erro mostra que devemos voltar uns passos e tentar entender o problema mais uma vez, talvez de uma outra forma".

Desse modo, conscientizar o aluno de que o erro ensina é uma forma de parar de tratá-lo como se fosse o fim de um processo marcado pelo fracasso e promover criticidade, mudanças de abordagens nas resoluções de problemas matemáticos e momentos de reflexão e debate, conforme defende DAMASCENO (2020).

Pode parecer que essa preocupação com o âmbito emocional do aluno não é uma atribuição do professor de matemática, que deveria deter-se apenas a ministrar os conteúdos de sua disciplina, mas a questão das emoções em razão dos erros tem sido obstáculo para a compreensão do aluno (GUSMÃO; EMERIQUE, 2000).

A influência das emoções no processo de ensino-aprendizagem não deveria ser ignorada e os docentes não deveriam evitar qualificar-se para lidar com tal interferência. Goldberg et al., (2019) apontam que a qualificação de profissionais por meio de Programas de Educação Emocional (PEE), além de muito indicado, é um anseio verificado entre a própria categoria.

Ambientes escolares em que há a inclusão de um PEE registram melhoria tanto na aprendizagem dos alunos, quanto nos relacionamentos interpessoais em sala de aula (FURLAN; DELLA MÉA, 2024).

> A criança que tenta e que tem a sorte de ter adultos que não inibem suas tentativas pode se construir, e construindo-se constrói a humanidade. Se tem a chance de superar frustrações, superar desafios, e não ser premiado por isso, mas sentir a alegria da conquista, então ela desenvolve coragem, um senso de moral que não depende de aprovação externa, uma motivação que tem a ver com o aprendizado, a superação, e fazer a coisa certa. (SALOMÃO, 2017)

Percebemos, então, que muitos fatores influenciam no processo da aprendizagem humana, como o bem-estar emocional, o meio, as relações interpessoais. Além desses fatores, o "aprender humano" tem as suas etapas e é primordial que os docentes saibam o que oferecer aos estudantes em cada uma dessas.

1.3 Em que etapa do desenvolvimento cognitivo propor problemas e exercícios matemáticos?

Nesta seção vamos abordar dois tipos de atividades matemáticas comumente usadas em sala de aula: o exercício e o problema. Os dois possuem as suas potencialidades, todavia quando utilizados sem atentar para suas intencionalidades pedagógicas, podem ser empregadas em momentos inadequados nas etapas da aprendizagem, visto que apresentam naturezas e objetivos diferentes.

Antes de definir tais tipos de atividades e explicitar suas diferenças, relembremos os processos fundamentais para o desenvolvimento cognitivo segundo o psicólogo Jean Piaget: a assimilação, a acomodação e a equilibração.

Para Piaget, a assimilação pode ser definida como:

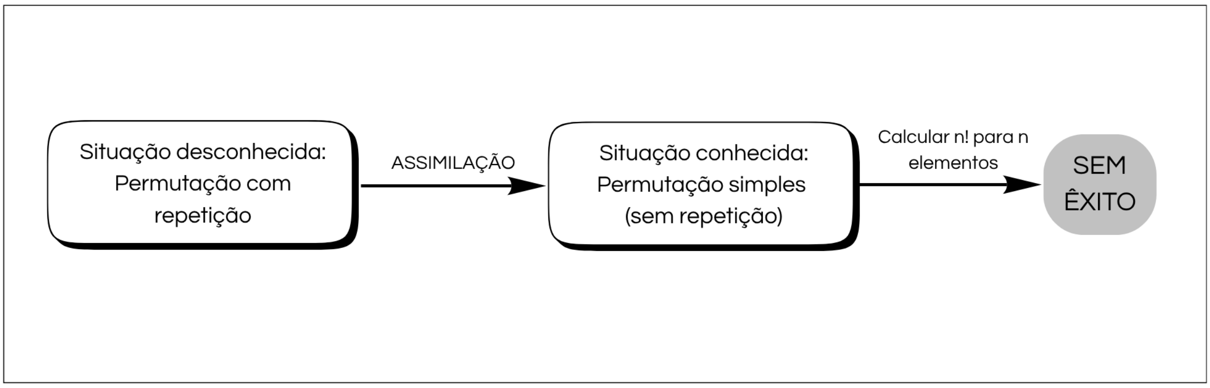
> [...] uma integração à estruturas prévias, que podem permanecer invariáveis ou são mais ou menos modificadas por esta própria integração, mas sem descontinuidade com o estado precedente, isto é, sem serem destruídas, mas simplesmente acomodando-se à nova situação. (PIAGET, 1996, p. 13)

Ou seja, para o autor, a assimilação é o processo em que o estudante entra em contato com uma situação desconhecida e busca similaridade entre esse e o que já conhece, por exemplo: um estudante do Ensino Médio que já tem conhecimento sobre permutação simples se depara com a questão "Quantos anagramas podemos formar com a palavra CASA?". Como o aluno já resolveu problemas que exijam o conhecimento de permutar elementos, responderá com facilidade que a resposta para a questão é "podemos formar 24 anagramas, pois como a palavra 'casa' possui quatro letras, só é preciso calcular 4! (quatro fatorial), que resulta em 24 possibilidades".

O raciocínio utilizado pelo aluno se aplica à situação, visto que se trata de uma questão de permutação, porém existe um detalhe a ser observado: a palavra "casa" possui repetição de letras e o estudante ainda não lidou com tais casos.

A Figura 1.2 ilustra, por meio de um diagrama, o esquema de assimilação realizado pelo estudante.

Figura 1.2: Esquema de assimilação ocorrido no exemplo em questão



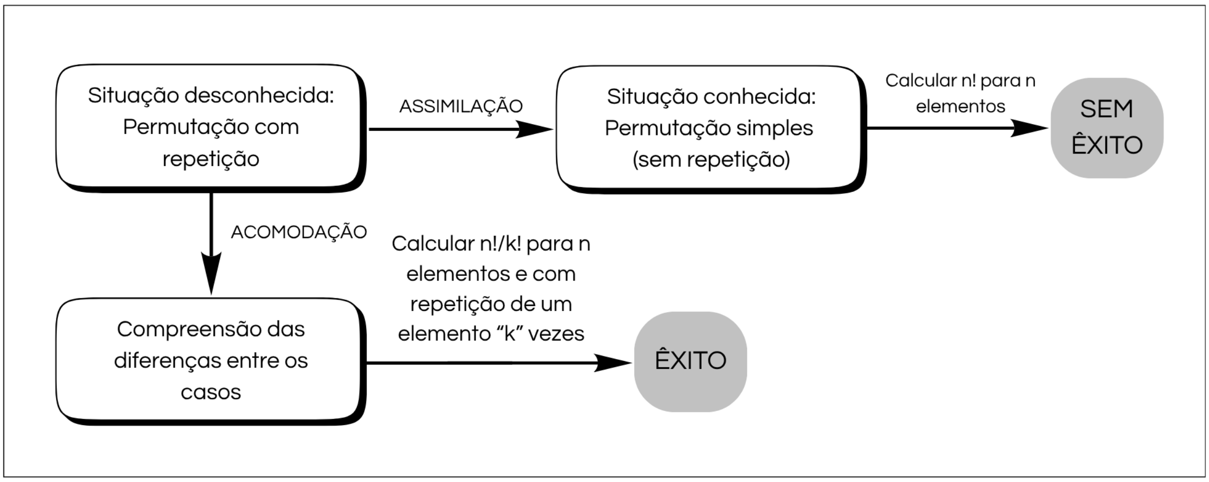
Fonte: Autoria própria

Em resumo, o estudante tenta adaptar as novas questões aos esquemas já existentes em si, sem reconhecer a diferença entre os casos. A percepção dessa diferenciação pode ser provocada pelos professores ao indagar: "ao realizar uma permutação simples entre quatro elementos, sendo que um deles está repetido, você percebe que contabiliza um mesmo anagrama duas vezes?" e, assim, inicia-se o processo de acomodação, definido como "toda modificação dos esquemas de assimilação sob a influência de situações exteriores (meio) ao quais se aplicam" (PIAGET, 1996, p. 18).

Dessa forma, quando o estudante não consegue aplicar o que já conhece à nova situação, busca (por meio do professor, de materiais, entre outros) um novo esquema que se adeque à situação, no exemplo em questão: a permutação com repetição.

A Figura 1.3 ilustra, por meio de um diagrama, o esquema de acomodação realizado pelo estudante.

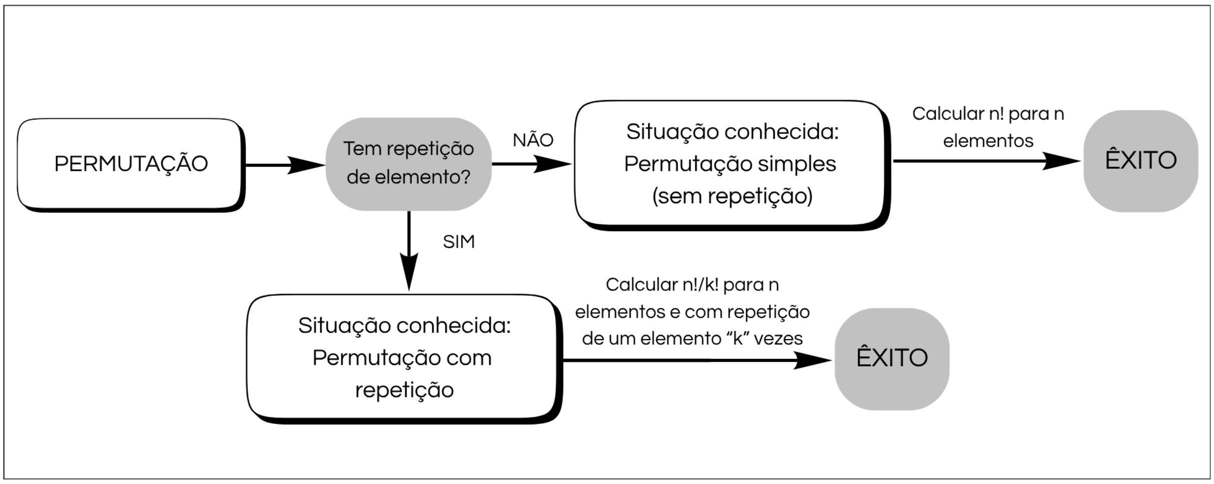
Figura 1.3: Esquema de acomodação ocorrido no exemplo em questão



Fonte: Autoria própria

O aluno encaixa a nova informação ao esquema já existente (assimilação) ou modifica os esquemas atuais para incorporar o novo repertório (acomodação), indo em direção à equilibração, isto é, a coexistência entre esquemas (PIAGET, 1975). A Figura 1.4 é um diagrama que representa o esquema de equilibração em referência ao exemplo dado.

Figura 1.4: Esquema de Equilibração ocorrido no exemplo em questão



Fonte: Autoria própria

Compreendendo os processos do desenvolvimento cognitivo, a seguinte questão surge: em que momento pode ser mais adequado o professor propor problemas matemáticos e em que momento sugerir exercícios matemáticos?

Um problema matemático pode ser entendido como uma situação que requer análise e interpretação de informações por quem vai resolvê-lo e a invenção de estratégias que auxiliem o resolvedor a alcançar o seu objetivo (SILVEIRA, J. F. Porto da, 2001).

> Os problemas exigem reflexão, questionamentos e tomadas de decisão. Trata-se de uma situação na qual se procura algo desconhecido e o aluno não tem nenhum algoritmo prévio que garanta a sua resolução. Por isso, a atividade propõe uma invenção ou criação significativa do estudante, que deve construir uma solução, explicando o que pensou. (MASSUCATU, MAYRINK, 2015)

De acordo com Resnick e Collins (1996), os problemas matemáticos possuem algumas características como a não algoritmização, os múltiplos pontos de vista, a busca por informações implícitas no enunciado, a necessidade de reflexão, entre outros. Polya (2006) aponta que as etapas de solução de um problema são: a compreensão do problema, a observação dos dados, a idealização de um raciocínio de resolução, a execução e análise do resultado obtido.

O exercício matemático, por sua vez, é uma atividade de aplicação de conhecimentos já equilibrados pelo estudante. Sua realização é dada de forma mais objetiva e mecânica.

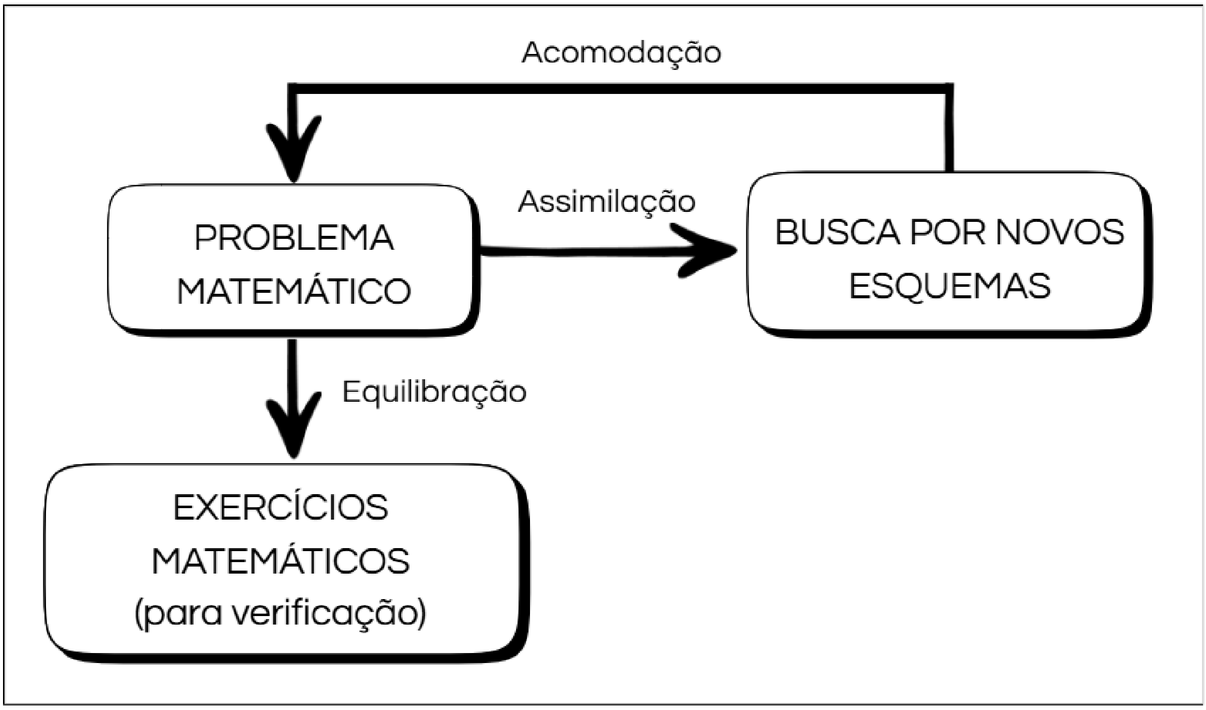
> O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de um algoritmo conhecido, de uma fórmula conhecida, etc. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa. (SILVEIRA, J. F. Porto da, 2001)

Dessa forma, pode ser inadequado propor exercícios matemáticos nos primeiros contatos de um estudante com um tema, visto que ainda não possui o repertório necessário para a sua execução.

São os problemas matemáticos que farão o aluno buscar informações que pareçam familiares, analisar o que já conhece, tentar compreender o tema e elaborar um plano de ação. Isto é, os problemas matemáticos são adequados em todos os processos de desenvolvimento cognitivo, começando pela assimilação, visto que permitem vastos pontos de vista (RESNICK; COLLINS, 1996), investigação e admitem uma reflexão perante aos erros cometidos. Dessa forma, é no contexto do problema matemático que o erro tem a sua potencialidade maximizada e é na resolução de tais problemas que a prática sugerida na seção anterior é bem sucedida.

Os exercícios podem ser utilizados como uma forma de reforçar o que foi descoberto, auxiliando na incorporação dos novos conceitos ao que já era dominado, isto é, na etapa de equilibração. No exercício pode ser que não caiba muito diálogo, mas o que está certo e o que está errado, o que deve ser mantido e o que deve ser apagado, é um pouco de "saber ou não saber fazer". A figura 1.5 exibe um esquema que sugere em quais etapas do desenvolvimento cognitivo submeter o aluno aos problemas e aos exercícios matemáticos.

Figura 1.5: Problemas e exercícios matemáticos nas etapas de desenvolvimento cognitivo



Fonte: Autoria própria

O exercício matemático não vai estimular o estudante a refletir e investigar soluções plausíveis. O que vai ocorrer é a tentativa de aplicação de um algoritmo de resolução conhecido pelo aluno que, por vezes, é simples reprodução dos métodos adotados por seu professor. A seguir, esse processo de "algoritmização" será analisado com mais detalhes.

1.4 A tentativa de reprodução de algoritmos de resolução em problemas matemáticos

Vemos que é comum entre os estudantes a busca de um algoritmo para resolução de questões. Uma vez encontrado um que resolva uma questão específica, tentam sua reprodução nas demais atividades na esperança de que o mesmo algoritmo sirva em todas as situações. Vimos na Seção 1.3 que isso em geral não é possível em todos os problemas matemáticos que abordem um mesmo tema.

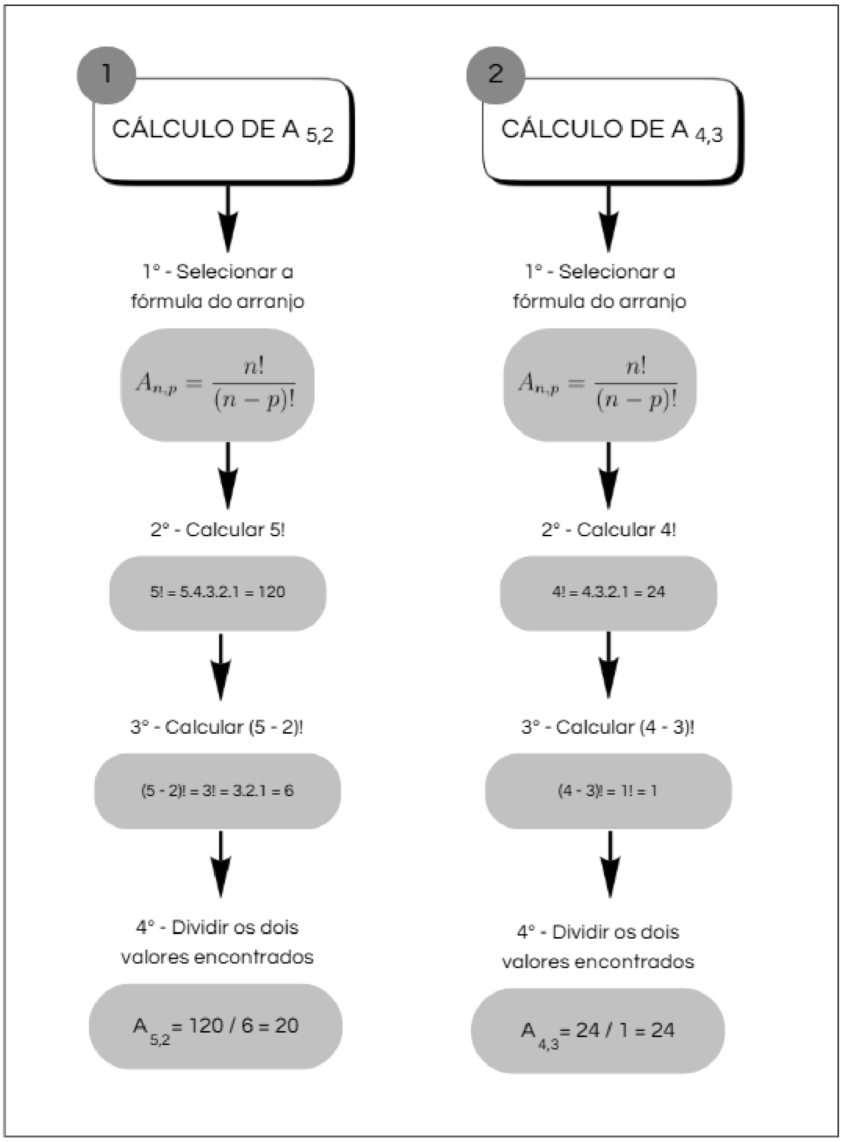
Comecemos com uma ilustração. Ao pedir para que uma criança pegue um pacote de biscoitos no armário da cozinha, os comandos que provavelmente ela realizará são: (1) andar até a cozinha, (2) localizar o armário, (3) ir em direção ao armário, (4) abrir o armário, (5) localizar o pacote do biscoito, (6) pegá-lo, (7) fechar o armário e (8) voltar ao ponto inicial. Note que se a criança conseguir entender o pedido, só precisaremos dizer “você pode trazer um pacote de biscoitos?”. Caso contrário precisaremos, necessariamente, dar esses oito comandos à criança.

De maneira análoga, a busca por algoritmos de resolução de questões matemáticas está intimamente relacionada com a falta de senso crítico frente às atividades matemáticas.

Acostumar os estudantes com algoritmos de resolução é colaborar com o não desenvolvimento das suas criticidades e isso é totalmente possível quando os professores se limitam ao emprego de exercícios matemáticos.

Imagine uma primeira situação em que um professor propôs aos alunos os seguintes exercícios: calcule (1) o arranjo de 5 elementos tomados 2 a 2 e (2) o arranjo de 4 elementos tomados 3 a 3. A Figura 1.6 ilustra o algoritmo utilizado pelo aluno para resolver a questão.

Figura 1.6: Resolução de exercício com uso de algoritmo



Fonte: Autoria própria

Essa algoritmização possibilita a resolução do exercício de maneira mecânica, sem que o discente, necessariamente, tenha entendido o tema. Dado esse exemplo, imagine uma segunda situação em que o mesmo professor proponha os seguintes problemas: (1) Dentre cinco alunos serão escolhidos dois para compor o cargo de líder e vice-líder de uma turma. De quantas maneiras diferentes essa escolha poderá ser feita? e (2) Quatro pessoas estão participando da última partida de um jogo. Ao final da partida, será montado o pódio. De quantas maneiras diferentes pode ser formado o pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares)?

Por mais que os cálculos necessários para resolver os casos das duas situações sejam os mesmos, enquanto na primeira situação foi possível a aplicação de um mesmo algoritmo em ambos exercícios, sem a necessidade de muita reflexão, a segunda situação requer que cada problema seja resolvido de maneira individual, que haja a compreensão dos enunciados e observação dos dados e que sejam feitas algumas reflexões como "tal problema trata sobre combinação ou arranjo? Por quê?", para, a partir disso, selecionar uma fórmula, inserir valores e realizar cálculos.

Os algoritmos de resolução, mais uma vez, aplicáveis aos exercícios matemáticos, desconsideram o processo entre a compreensão de uma situação-problema e a execução de uma solução eficaz e limitam-se a estabelecer passos corretos e errados, corroborando a ideia de que professores apontam caminhos corretos e corrigem caminhos errados e de que os alunos obedecem comandos, sem precisão de análise (ALRO; SKOVSMOSE, 2006).

> O que se deseja é que o professor deixe de ser apenas um conferencista e que estimule a pesquisa e o esforço, ao invés de se contentar com a transmissão de soluções já prontas (...) Seria absurdo imaginar que, sem uma orientação voltada para a tomada de consciência das questões centrais, possa a criança chegar apenas por si a elaborá-las com clareza. (PIAGET, 1977, p.18)

Quando permitimos a reflexão, a criatividade e o erro por parte dos alunos, permitimos que esse possa se construir, "e construindo-se, constrói a humanidade" (SALOMÃO, 2017). Essa permissão implica na não priorização de transmissão de algoritmos e na valorização dos problemas como atividades matemáticas no cotidiano escolar.

Isso não significa que exercícios matemáticos e uso de soluções já prontas não tenham o seu valor em alguma etapa do ensino-aprendizagem, mas importa ter a noção de que a escola prepara pessoas para que tenham autonomia em suas vidas e nem sempre um adulto consegue resolver os problemas da vida com "macetes" e atalhos.

Agora que contextualizamos as perspectivas do cotidiano de um professor de matemática em sala de aula, efeitos que o erro pode causar nos alunos e nos professores, procedimentos que podemos adotar para conferir um ambiente mais propício a aprender frente aos erros, tipos de atividades matemáticas mais adequadas para cada etapa do desenvolvimento cognitivo e impactos da algoritmização nas resoluções, vamos focar, no próximo capítulo, em um tema mais específico da matemática presente no ensino básico brasileiro, a saber: análise combinatória.

Capítulo 2

Investigando erros frequentes em Análise Combinatória

Depois de contextualizar sobre como os estudantes podem se sentir diante dos erros, sobre como proporcionar uma sala de aula segura para promover tentativas e refletir sobre os desacertos e sobre qual tipo de atividade matemática é mais adequada para valorizar a criatividade, argumentação e senso crítico dos alunos, este capítulo propõe a investigação dos erros como uma estratégia pedagógica, dialogando de forma mais específica sobre o objeto de conhecimento: análise combinatória.

2.1 Análise combinatória no Ensino Médio e os erros mais frequentes

A análise combinatória é um ramo da matemática que se destina a elaborar métodos de contagem que visam facilitar a contagem de possibilidades de uma situação específica acontecer. Nesse âmbito, esses métodos de contagem variam de acordo com as mais diversas situações, como por exemplo, se há repetição de elementos, se a estrutura que estamos montando é em fila (onde o primeiro elemento não é adjacente ao último) ou circular (onde o último elemento é adjacente ao primeiro), se a ordem dos agrupamentos é importante ou não, entre outros.

Resumidamente, a análise combinatória desenvolve métodos de contagem que evitam o trabalho exaustivo de listar todos os possíveis resultados, um a um.

No cenário da educação básica brasileira, o ensino desse ramo ocorre tanto nos anos finais do ensino fundamental, isto é, no oitavo e nono ano, começando com a abordagem de conceitos de princípio fundamental da contagem, construção de árvore de possibilidades e problemas com anagramas, até o final do ensino médio, momento em que são desenvolvidos conceitos mais aprofundados da análise combinatória como, por exemplo, cálculos envolvendo o fatorial de um número natural, permutação simples e com elementos repetidos, bem como arranjo e combinação.

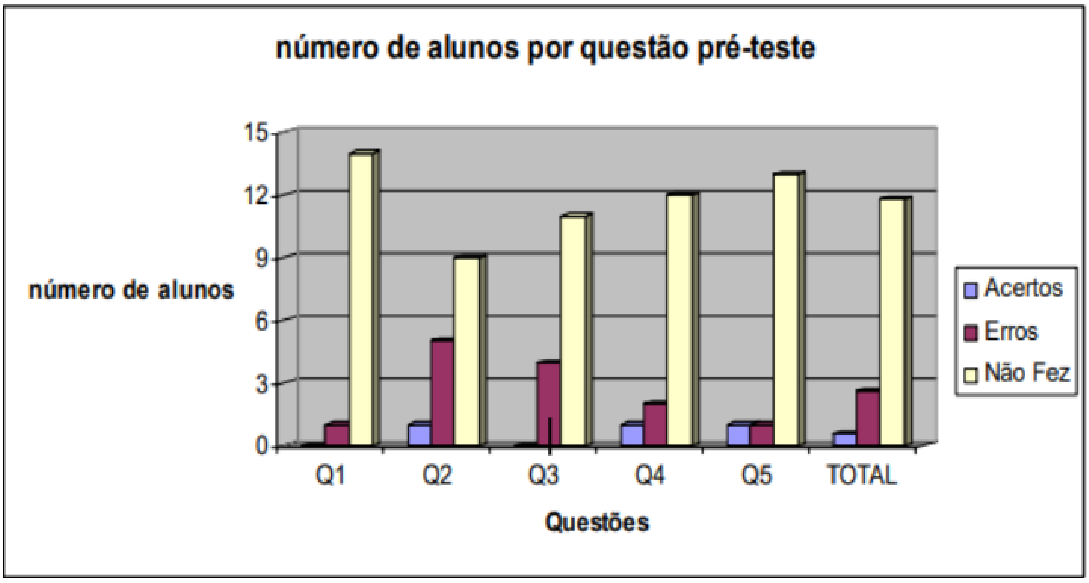
Algumas habilidades previstas para serem alcançadas no ensino desse tema pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) são:

> Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (...) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (BRASIL,2018)

É muito comum a incidência de erros decorrentes da interpretação equivocada dos enunciados ou da má interpretação dos conceitos, como no exemplo dos anagramas, em que o aluno não observa a ocorrência de letras repetidas ou ainda não tem conhecimento de que esse fato leva a um outro modo de resolução; ou quando na escolha de um subconjunto de objetos, percebe se a ordem dos elementos é essencial ou não no que está sendo pedido. Um estudo realizado por Pinheiro, Abar e Sá (2012) teve como objetivo compreender se uma sequência de ensino com foco na resolução de problemas matemáticos era favorável para o aprendizado desses conceitos básicos da análise combinatória.

Foram realizados sete encontros com uma turma da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública do estado do Pará. No primeiro encontro foi aplicado um préteste com cinco questões, do segundo ao sexto encontros foram ministrados conteúdos da análise combinatória citados anteriormente e, por fim, no sétimo encontro foi realizada a aplicação de um pós-teste com cinco questões.

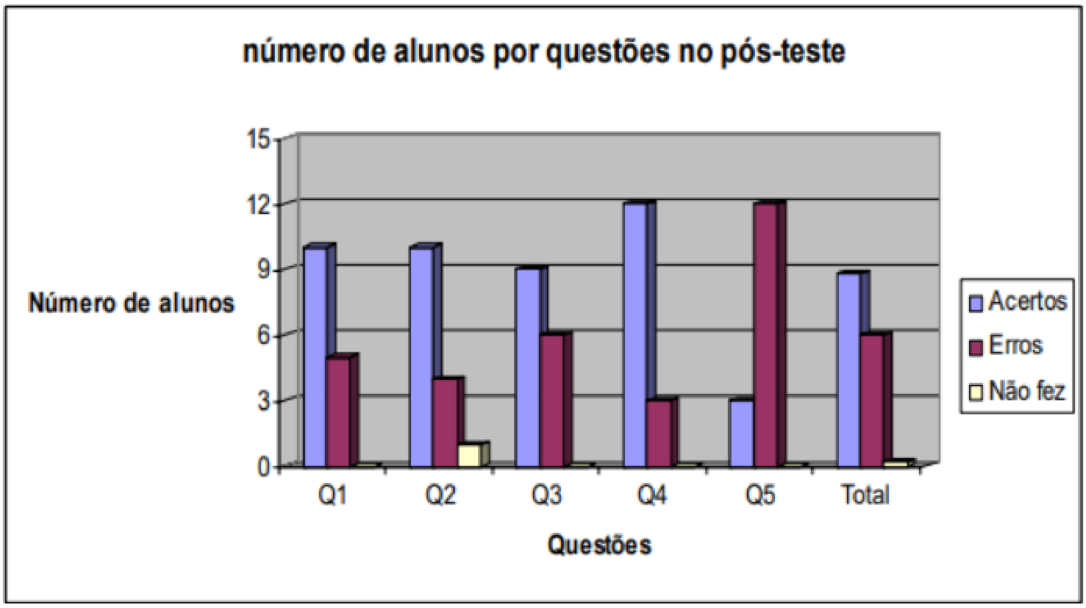
Figura 2.1: Resultados do pré-teste



Fonte: Pinheiro, Abar e Sá (2012)

Os resultados do pré-teste mostraram que a maioria dos casos se concentraram entre estudantes que não resolveram os problemas ou, dos que tentaram, cometeram erros em problemas envolvendo permutação com elementos repetidos e em problemas envolvendo combinação e arranjo. É importante salientar nesse momento que os alunos ainda não tinham tido aulas sobre tais temas.

Figura 2.2: Resultados do pós-teste



Fonte: Pinheiro, Abar e Sá (2012)

Após o conteúdo ser ministrado (do segundo ao sexto encontros) e o pós-teste ser aplicado, foi percebido um aumento significativo de tentativas dentre os estudantes que desistiram da atividade no pré-teste, o que expressa a intenção dos alunos de acertar, segundo os autores. Dentre os assuntos apresentados, o principal erro detectado foi a dificuldade de diferenciação entre combinação e arranjo na interpretação dos enunciados das questões, porém, os autores acreditam que se tivesse sido possível ter mais aulas de resolução de problemas antes da aplicação do pós-teste, o êxito teria sido ainda maior.

A discussão do erro é tão importante quanto a resolução de mais problemas matemáticos, para que os alunos alcancem o domínio desses conteúdos, pois é através da discussão sobre os erros que o professor vai tentar encontrar o que foi perdido, ignorado ou confundido na compreensão da atividade. Quando os professores identificarem o erro de um aluno, ao invés de avançar para mais uma questão, poderiam despender um tempo para discutir o erro cometido, com intuito de buscar corrigir as interpretações errôneas e buscar o procedimento correto. O professor poderia começar discutindo que a resolução errada está resolvendo alguma coisa, tentar encontrar a questão que está sendo resolvida pela resolução equivocada e depois comparar a questão resolvida com a questão inicial, para ver se estão perguntando a mesma coisa.

Pacheco e Medeiros (2009) também relatam a confusão dos alunos entre os conceitos de arranjo e combinação que, em alguns casos, decorre da dificuldade da interpretação dos enunciados e da proximidade conceitual entre esses dois tipos de situações. Enquanto em um a ordem importa, no outro a ordem não importa.

Apresentamos um exemplo para tornar mais clara a diferenciação entre os casos em que a combinação ou o arranjo é o método de contagem mais adequado. Em um primeiro caso, imagine que dentre dez funcionários de uma escola, três serão escolhidos para compor a nova gestão escolar. Ao perguntar "de quantas formas essa escolha poderá ser feita?" é correto utilizar a combinação para resolver o caso, pois não existe diferença entre os três escolhidos, por exemplo, as opções "Ana, Beto e Carla" e "Beto, Carla e Ana" representam uma mesma escolha.

Em um segundo caso, imagine que dentre os dez funcionários da mesma escola, três serão escolhidos para compor a nova gestão nos cargos de diretor, vice-diretor e coordenador. Agora "Ana, Beto e Carla" e "Beto, Carla e Ana" não representam uma mesma escolha, pois, a depender da ordem com a qual os elementos são selecionados, obtemos novos agrupamentos. Nesse caso, é correto utilizar o arranjo para resolver a situação. Portanto, existe uma diferença sutil entre os casos, que vão levar à escolha de métodos de contagens diferentes.

Isso significa que é preciso que o educador auxilie os seus discentes na interpretação de cada problema proposto, investigando os erros cometidos até que todos compreendam integralmente do que se trata a situação-problema, como resolvê-la e como não resolvê-la. Algumas possibilidades de como investigar esses erros estão discutidas na próxima seção.

2.2 A investigação do erro como estratégia pedagógica

Ao lidar com resolução de problemas matemáticos é preciso ter em mente que erros vão aparecer durante o processo e que podem ter diversas origens. A origem de um erro não reside apenas em cálculos incorretos, mas pode residir em dificuldades no entendimento de um enunciado ou comando, interpretações incoerentes, falta de repertório matemático, entre outros.

Existem diversos trabalhos que sugerem a análise do erro como uma prática pedagógica, entretanto, é preciso refletir sobre a forma com a qual esse erro está sendo analisado. A análise do erro vem sendo estudada por diversos pesquisadores ao redor do mundo desde o início do século passado. Cury (1994) afirmou que nas primeiras décadas do século XX a análise do erro se voltava aos erros de cálculos, mais precisamente sobre erros frequentes em atividades sobre as quatro operações matemáticas.

Correia (2010) discorre que no período entre guerras, pesquisadores do erro na Alemanha, como Weiner, Kiessling e Seseman, investigaram as possíveis causas para equívocos frequentes e a possibilidade de existirem pessoas com uma predisposição ao erro, considerando três tipos de erros: mecânicos, associativos e funcionais - em outras palavras, erro de cálculo, erro de conceito e erro por uma possível "deficiência no cálculo", respectivamente.

Já na União Soviética, por volta dos anos 60, Correia (2010) informa que pesquisadores como Kuzmitskaya e Menchinskaya categorizaram os equívocos como: erro por memória de curto prazo insuficiente, erro mecânico, erro associativo, erro por incompreensão do problema e erro por distração (o que resulta em erros mecânicos).

Nos Estados Unidos, ao longo do século XX, os pesquisadores da análise do erro, como Reisman, Lankford, Engelhard, Ashlock e Cox, voltaram-se a estudar erros frequentes na aritmética, entendendo-os como "não acidentais", mas resultado de esquemas equivocados desenvolvidos a partir de conceitos básicos iniciais. Esses buscavam formas de ensino que reduzissem os erros frequentes.

Mediante o exposto, no século XX os erros eram estudados com o intuito de entender suas causas, para criar estratégias de ensino que pudessem, de certo modo, evitá-los.

Resnick e Ford (1990) registram que, no século passado, a análise dos erros se limitou em algumas pesquisas a anotar quais foram os erros cometidos por alunos em cálculos aritméticos básicos, contabilizar quantas vezes precisavam interferir na resolução do estudante até que este apresentasse a resposta correta e observar o tempo gasto para completar a tarefa corretamente. Também era comum a organização de escalas de dificuldades para auxiliar o docente nas correções.

Em outras palavras, por um tempo, analisar um erro significava medir o tempo que demorava para que este desaparecesse e contabilizar quantas vezes ele acontecia. Para facilitar a detecção de que um aluno estava utilizando um método errôneo, alguns professores solicitavam que seus estudantes "pensassem em voz alta" enquanto resolviam os problemas propostos (CURY, 1994).

Os professores que adotam tais métodos correm o risco de não enxergar o erro, isto é, não o investigar, mas dar comandos na expectativa de que os erros desapareçam. Essa conduta já é criticada há tempos por diversos pesquisadores, por exemplo, Annie Bessot:

> Certas teorias consideram o reforço externo como principal mecanismo desse desenvolvimento: sob esse ponto de vista, os erros são o efeito da ignorância ou da desatenção e dessa forma devem ser evitados em todo o processo de aprendizagem."(BESSOT, 1983, p. 474).

De acordo com Casávola et al. (1988, p. 43), quando um erro é investigado, é capaz de promover um efeito ainda melhor que um acerto imediato, isto porque a comparação entre linhas de raciocínio utilizadas durante uma resolução é capaz de produzir novos conhecimentos e ideias. Portanto, a questão que se levanta é: De que forma é possível um professor investigar o erro de um estudante?

É comum que os professores saibam quais erros são mais prováveis de surgir durante a resolução de um problema matemático que aborda determinado conteúdo. Segundo Spinillo, Pacheco, Gomes e Cavalcanti (2014), existe uma certa previsibilidade ligada ao erro e é possível incorporar isso aos planejamentos, ou seja, se é sabido que existe uma grande probabilidade de um estudante utilizar a fórmula de combinação em um problema de arranjo simples, então uma possibilidade é provocar situações para que esse erro se manifeste, para que o aluno possa também enxergá-lo e saber que aquele é um erro frequente e comum, e que por isso deve se atentar às diferenças sutis entre tais conceitos.

Essa prática ajuda o discente a criar uma espécie de alerta para que, das próximas vezes que ele tiver que lidar com problemas semelhantes (ainda que em outros contextos), possa se lembrar da primeira vez que errou, como errou e porque errou.

Borasi (1996) sugere que os professores tenham um repertório de erros para apresentar aos alunos ou que crie situações que gerem tais erros, objetivando um momento de debate sobre quais raciocínios seriam mais adequados para resolver uma situação-problema. Xu (2023) argumenta que se o professor tiver um "banco de questões erradas", os alunos podem utilizá-lo para investigar as questões, compreender os erros mais profundamente e criar novas conexões e esquemas.

Um estudo prático realizado por Lima e Cunha (2024) submeteu alunos de uma turma do ensino fundamental ao contato com questões erradas sobre equação do primeiro grau e obteve como resultado que:

> As atividades permitiram que os estudantes corrigissem suas falhas, questionassem suas práticas matemáticas e ressignificassem seus processos de aprendizagem, promovendo uma reorganização cognitiva e a construção de novos significados. (LIMA; CUNHA, 2024)

Neste trabalho exploramos a possibilidade de investigar os erros como prática pedagógica, assim como na pesquisa de Lima e Cunha (2024), desenvolvendo problemas matemáticos já resolvidos incorretamente e, após ministrar os conceitos básicos necessários para a compreensão do conteúdo, colocar os estudantes na posição de corretores de tais atividades.

Os estudantes entram em contato com as resoluções já sabendo que estão incorretas, porém, sem saber qual é o erro envolvido. Neste trabalho vamos considerar quatro classificações para os erros: erro de interpretação, de cálculo, de estratégia e de conceito.

Observe o seguinte problema: Maria tinha uma nota de 20 reais e comprou 5 maçãs a um preço de 3 reais cada. Qual foi o valor total gasto por Maria?

O erro de interpretação ocorre quando o enunciado não foi total ou parcialmente compreendido. No exemplo acima, o erro de interpretação aconteceria se uma pessoa calculasse o "troco" recebido por Maria, ou seja, acabou empregando propriedades matemáticas corretamente, mas para responder uma pergunta diferente da proposta pelo enunciado.

Erro de cálculo, que ocorre quando a estratégia está correta, mas existe algum erro no(s) cálculo(s). Tal erro aconteceria se uma pessoa calculasse que 3 reais $\times$ 5 = 13 reais, ou seja, interpretou corretamente e selecionou a operação matemática correta, mas calculou errado.

Erro de estratégia, que ocorre quando o enunciado foi compreendido, mas a estratégia de resolução não foi bem empregada. Esse erro aconteceria no problema exemplificado se a pessoa respondesse "3 reais + 3 reais + 3 reais + 3 reais = 12 reais", pois ela interpretou e calculou corretamente, mas apresentou um erro na estratégia de cálculo, quando esqueceu de contar uma maçã.

Erro de conceito matemático, que ocorre quando se utiliza um conceito matemático inadequado ao contexto do problema. Esse tipo de erro aconteceria no exemplo acima se a pessoa calculasse "20 reais $\div$ 5 reais = 4", ou seja, utilizou um conceito matemático que não se aplica à situação-problema proposta. Geralmente um indicativo de que esse erro pode vir a acontecer é quando o aluno pergunta "essa questão é de somar, subtrair, multiplicar ou dividir?", sinalizando que não compreendeu o problema e vai utilizar, de maneira aleatória, algum conceito matemático que conhece para tentar resolvê-lo.

Assim, o objetivo de apresentar questões resolvidas incorretamente é o aluno analisar o que foi desenvolvido e se questionar "por que essa solução não pode ser considerada correta?", "o tipo de erro envolvido foi de interpretação do enunciado, de cálculo, de estratégia incorreta ou por ter faltado repertório matemático?", "De 0 a 100, qual porcentagem de acerto proporcional é possível conferir a essa resolução?", dentre outras questões.

Após esse momento de investigação e reflexão, o aluno pode tentar resolver o problema da forma correta, pois agora já terá uma noção mais clara de quais caminhos seguir e quais caminhos não seguir.

Para fazer essa investigação, o aluno precisa revisitar tudo o que aprendeu sobre o tema ou ir atrás de novos conceitos que ainda não havia aprendido. Como benefícios dessa prática, Lima e Cunha (2024) relatam que:

> A análise de erros intencionais [...] facilita a construção de modelos mentais mais precisos, ao mesmo tempo que contribui para a regulação autorreflexiva das estratégias de aprendizagem. [...] Quando adequadamente explorados, os erros promovem a detecção, correção e prevenção de equívocos futuros. (LIMA; CUNHA, 2024)

A análise do erro contribui, não apenas para a equilibração de conhecimentos e estabelecimentos de novos modelos mentais, mas para o desenvolvimento de novas aptidões como a metacognição.

Flavell (1987) define a metacognição como a habilidade de uma pessoa pensar sobre os seus próprios pensamentos, avaliando, monitorando e autorregulando os seus processos cognitivos. Durante a resolução de um problema, pensar sobre o que se está pensando pode destravar linhas de raciocínio fundamentais, gerando a chance de não apenas aprender um assunto, mas de consolidar mais profundamente um conhecimento.

Vejamos um exemplo prático de como pode acontecer a investigação do erro na situação-problema a seguir.

Figura 2.3: Situação-problema e resolução incorreta

PROBLEMA

Alicia e Bento compraram um kit com 6 chocolates diferentes. De quantas formas podem dividir os chocolates entre si, de modo que cada um fique com 3 chocolates?

SOLUÇÃO 1

Para resolver a situação acima precisamos utilizar o conceito de combinação, visto que não existe diferença entre as possibilidades "chocolates A, B e C" e "chocolates C, B e A".

Como são 6 chocolates para serem divididos entre duas pessoas, façamos C6,2:

C6,2 = 6! / (4!.2!) = 15 formas de dividir os chocolates.

Fonte: Autoria própria

Ao observar a solução 1 atribuída ao problema acima, essa pode parecer coerente, porém apresenta um erro sutil que vamos investigar agora.

"Por que a resolução não pode ser considerada correta e qual é o tipo de erro em questão?": A parte inicial do argumento está correta, pois realmente não existe diferença entre o agrupamento dos chocolates "A, B e C" e "C, B e A". Dessa forma, o erro da resolução não é um erro de interpretação de enunciado.

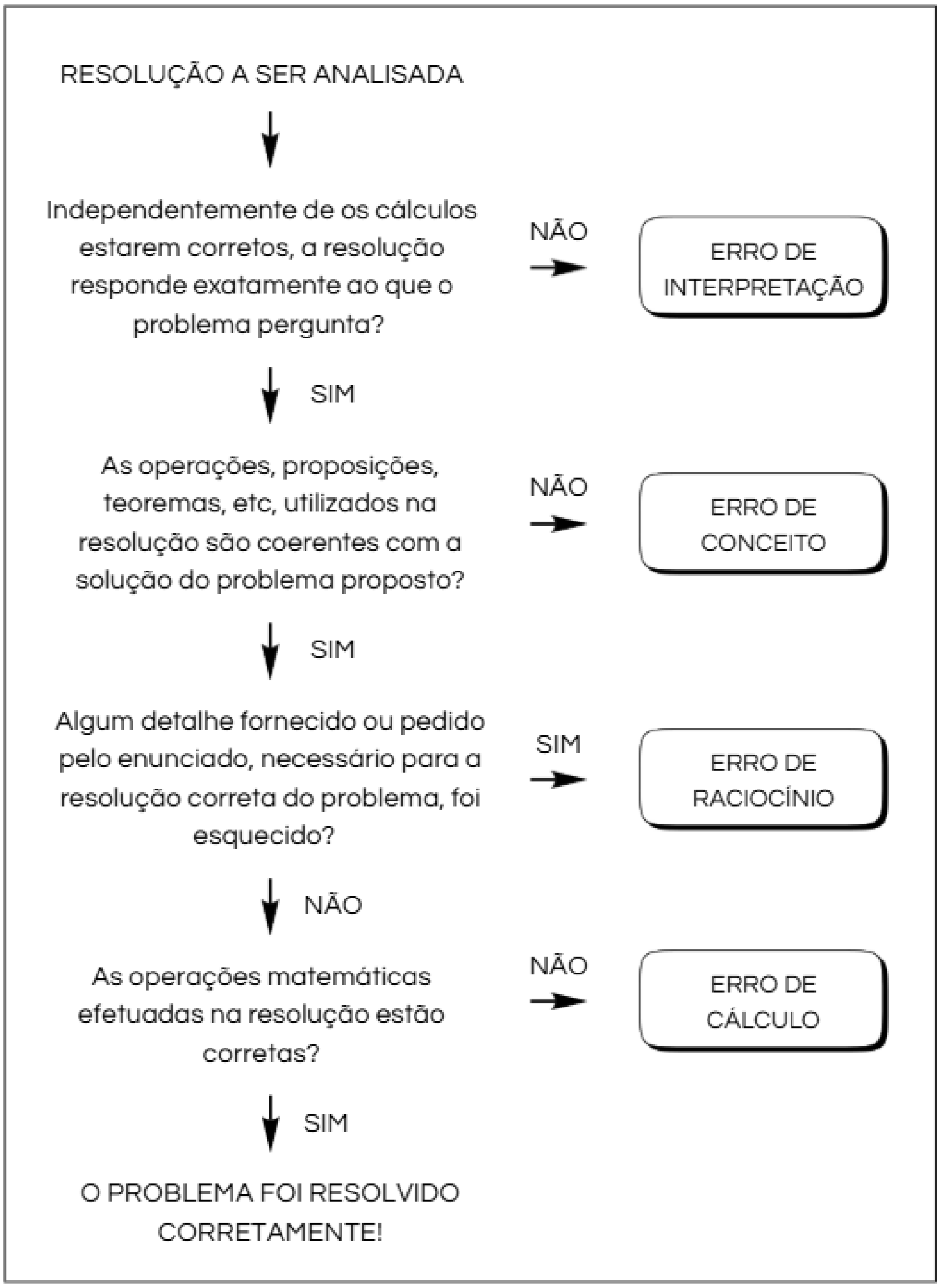
De fato, utilizaremos a fórmula da combinação para solucionar a situação, assim, o erro envolvido na resolução também não foi um erro de conceito matemático. O cálculo foi realizado de maneira correta, excluindo a possibilidade de ter sido erro de cálculo, porém, a forma com a qual a combinação foi aplicada está equivocada.

Ao calcular combinação de 6 tomados 2 a 2, estamos calculando as possibilidades de tomar dois chocolates para uma pessoa, sobrando quatro chocolates para outra pessoa e o objetivo da questão é dividir os chocolates de modo que cada pessoa fique com três doces, assim, a estratégia ideal é calcular combinação de 6, tomados 3 a 3, que resulta em 20 possibilidades, pois escolhendo três chocolates para uma pessoa, automaticamente a outra pessoa fica com os três chocolates restantes. Desse modo, o erro envolvido no problema foi um erro de estratégia.

Essa investigação, por mais que seja simples, tem um grande potencial de ajudar no desenvolvimento do senso crítico de nossos alunos frente às questões matemáticas. A

Figura 2.4 apresenta um esquema de como identificar o tipo de erro (dentre os quatro sugeridos por esse trabalho) ao analisar uma resolução.

Figura 2.4: Esquema para análise do erro em uma resolução de problema



Fonte: Autoria própria

É importante observar que o esquema representa um ponto de partida para a análise de resoluções e tem como objetivo ajudar o leitor a diferenciar e identificar cada tipo de erro. Todavia, é bem possível que em uma mesma resolução ocorra mais de um tipo de erro, isto é, erro de interpretação integrado ao erro de cálculo, entre outras possibilidades. Sendo assim, a Figura 2.4 não abrange todas as possibilidades da incidência de erros em resoluções de problemas.

Isso expressa ainda mais o potencial que a análise do erro tem de fazer o professor entender como o aluno está aprendendo e o aluno compreender o seu próprio pensar. Assim, a investigação dos erros pode ser uma grande estratégia pedagógica para o ensino de Matemática.

Outros exemplos de investigação de erros em problemas de análise combinatória estão dispostos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Caso prático da detecção de erros de Análise Combinatória

Após a ministração de aulas sobre princípio fundamental da contagem, conceitos de permutação sem repetição, fatorial e suas propriedades, combinação e arranjo, nós aplicamos uma atividade avaliativa em uma turma de 1ª série do Ensino Médio com 13 alunos, cujo tema era "análise combinatória". Para além do objetivo de avaliação para compor parte da nota do bimestre em vigor, a atividade objetivou confirmar a incidência dos erros mais frequentes em Análise Combinatória discutidos na Seção 2.1.

Das questões aplicadas, apresentamos agora quatro questões sobre as quais fazemos uma estatística descritiva dos resultados.

Primeira questão: Quantos anagramas diferentes podemos formar com as letras da palavra "PORTA"?

O problema em questão trata da permutação sem repetição das letras que compõem a palavra "PORTA". Como são 5 letras possíveis, para a primeira escolha, 5 possibilidades, para a segunda escolha, 4 possibilidades, e assim sucessivamente, de modo que, pelo princípio fundamental da contagem, tem-se 5 x 4 x 3 x 2 x 1 $= 5! = 120$ anagramas possíveis. Um outro raciocínio possível seria calcular $A_{5,5}$, visto que é desejado selecionar 5 elementos de um conjunto de 5 elementos, de maneira que a ordem de seleção importa. Assim, $A_{5,5}$ é igual a 120.

Das respostas analisadas, 30,8% (4 pessoas) resolveram a situação corretamente, também 30,8% tentaram registrar manualmente todas as possibilidades de anagramas, mas não tiveram êxito devido à quantidade elevada de anagramas possíveis, registrando parcialmente tais possibilidades, o que aponta um erro de estratégia, uma vez que a estratégia selecionada é coerente, mas não foi desenvolvida de maneira a conduzir o aluno à resolução completa da questão; e 38,5% (5 pessoas) apresentaram algum erro de cálculo relacionado às multiplicações sucessivas.

Segunda questão: Identifique se o cálculo correto a ser realizado nas situações abaixo trata-se de combinação ou arranjo:

a) Maneiras diferentes de formar uma comissão com 3 de 8 candidatos.

b) Maneiras distintas de premiar os 3 vencedores com ouro, prata e bronze.

c) Possibilidades de selecionar 4 dentre 8 alunos para um evento.

d) Maneiras diferentes de criar senhas de 6 letras distintas do alfabeto.

A questão apresentava como objetivo verificar apenas se os alunos conseguiam diferenciar os conceitos entre arranjo e combinação.

No primeiro caso temos uma situação que pode ser resolvida por meio de combinação, visto que a ordem de seleção de três candidatos específicos não vai importar, isto é, "João, Maria e José" e "José, João e Maria" representam uma mesma escolha.

No segundo caso temos uma situação a ser resolvida por cálculo de arranjo, uma vez que, a ordem de escolha dos três elementos vai importar, pois por mais que sejam três vencedores, esses ocupam posições diferentes no pódio, assim "José - 1º lugar, Maria - 2º lugar e João - 3º lugar" e "João - 1º lugar, Maria - 2º lugar e José - 3º lugar" são configurações distintas.

No terceiro caso temos a seleção de quatro elementos de um conjunto que possui oito elementos, sem que haja qualquer diferenciação entre os escolhidos. Desse modo, a situação retrata um problema a ser resolvido por combinação, uma vez que a ordem com a qual os elementos são escolhidos não influencia, tal qual o primeiro caso.

Por fim, no quarto caso, é preciso escolher 6 elementos dentre 26 elementos de um conjunto, de maneira que cada mudança na ordem de seleção consegue gerar uma senha distinta. Assim, a situação retrata um problema a ser resolvido por meio de arranjo, como no segundo caso.

Dentre as 52 respostas analisadas, 36,5% (19 respostas) apresentaram erros de conceito, isto é, de confusão entre os conceitos de combinação e arranjo e 63,5% (33 respostas) estavam corretas. Apesar da porcentagem de acerto ser maior que a de erros, a porcentagem de erros é expressiva, visto que essa questão tratou apenas de identificar situações de arranjo ou combinação, sem necessidade de elaboração de estratégias ou cálculos.

Terceira questão: De um grupo de 6 pessoas na plateia, um repórter vai escolher 4 para uma entrevista rápida, de modo que o primeiro escolhido será o primeiro entrevistado, o segundo escolhido será o segundo entrevistado, e assim sucessivamente. De quantas formas distintas esse repórter pode fazer essa escolha?

Agora de uma maneira mais prática, a questão tinha como objetivo não apenas testar o domínio conceitual do aluno, mas também a sua capacidade de interpretar e calcular corretamente. Como é necessário escolher 4 elementos dentre 6 elementos de um conjunto, de maneira que a ordem de escolha indica exatamente a ordem em que a entrevista acontecerá, a situação envolve um problema de arranjo, pois a ordem de seleção importa. Assim $A_{6,4} = 360$ formas.

Das respostas analisadas, 15,4% (2 pessoas) apresentaram erros de cálculo presentes nos cálculos dos fatoriais, 53,8% (7 pessoas) apresentaram erros de conceito, em decorrência da seleção da fórmula de combinação em vez de arranjo; ou seja, 69,2% (9 pessoas) das respostas apresentaram algum tipo de erro e 30,8% (4 pessoas) estavam completamente corretas.

Quarta questão: Dentre 15 jogadores de uma equipe, 8 precisam ser selecionados para compor uma dinâmica. De quantas formas distintas é possível fazer essa seleção?

Ao escolher oito jogadores dentre 15 possíveis, de modo que todos os escolhidos exercem o mesmo papel, a ordem de seleção não vai influenciar em qualquer detalhe ou restrição, estamos combinando jogadores. Para resolver tal problema, é preciso calcular $C_{15,8}$, que é igual a 6435.

Ao aumentar os valores numéricos em questões de análise combinatória é notável que o nível de dificuldade também se eleva. Das respostas analisadas, 61,5% (8 pessoas) apresentaram erros de cálculo referentes às multiplicações sucessivas, o que sugere uma dificuldade de multiplicar dois fatores e utilizar a sua resposta para a próxima multiplicação; 46,2% (6 pessoas) apresentaram erros de conceitos ao argumentar que "15! = 8! + 7!", por exemplo; 30,7% (4 pessoas) apresentaram erro de estratégia, por acabar esquecendo de registrar todos os fatores de um fatorial, por exemplo, "7! = 7 x 6 x 4 x 3 x 2 x 1"(o número 5 não foi considerado no fatorial em questão); e 38,5% (5 pessoas) responderam a questão corretamente.

Vemos que, apesar do número de provas analisadas ser bastante reduzido, nos temas abordados nas questões, os erros mais incidentes foram: os erros de conceito, na diferenciação entre arranjo e combinação, que tornou-se mais expressivo quando o problema partiu da teoria e passou a envolver cálculos; os erros de cálculo, expressos na dificuldade de acumular resultados em multiplicações sucessivas em fatoriais (exemplo: para calcular 4! = 4 x 3 x 2 x 1, podemos resolver primeiro 4 x 3 = 12 e esse resultado vamos multiplicar por 2, ou seja, 12 x 2 = 24 e, por fim, multiplicar 24 x 1, que resulta em 24. Em algumas respostas foi percebida a seguinte estratégia: 4! = 4 x 3 x 2 x 1, então: 4 x 3 = 12, 3 x 2 = 6 e 2 x 1 =2, logo, 4! = 12 x 6 x 2 = 144) e os erros de estratégia, expressos em questões de anagramas em que, apesar de compreenderem bem o que se quer saber, o método mais eficiente encontrado por alguns alunos foi o registro manual dos anagramas que, por serem muitos, culminou na desistência dos registros, ou seja, a estratégia empregada não foi eficiente para a solução do caso.

A ausência de erros de interpretação, que poderiam ser expressos em questões deixadas em branco e em respostas que respondem questões diferentes da proposta, sugere que os estudantes conseguiram compreender bem os conceitos iniciais da análise combinatória e o que se pede nos diferentes contextos em que esses podem ser aplicados.

Por meio dessa prática foi possível verificar que, de fato, há uma certa previsibilidade de quais erros podem surgir em disciplinas de Matemática, conforme afirmado por Spinillo, Pacheco, Gomes e Cavalcanti (2014).

Mediante o encerramento do ano letivo não foi possível prosseguir com essa mesma prática, porém, um caminho possível para introduzir a investigação dos erros em sala de aula nesta atividade seria expor no quadro (sem identificar o estudante) algumas resoluções referentes aos problemas três e quatro, por exemplo, e perguntar "Por que essa resolução está incorreta?". Verificar se há a participação dos estudantes no diálogo ou se há timidez.

No caso de haver timidez, apresentar uma resolução correta para um dos problemas e modificar a pergunta: "Por que essa resolução está correta?". Em seguida, avaliar se a mudança confere uma maior adesão ao debate, confirmando se o desconforto de falar sobre o erro, principalmente em público, decorre da rotulagem que ele carrega.

É possível que seja proveitoso exibir a Figura 2.4 (Capítulo 2) aos discentes como forma de apresentar os tipos de erros que podem surgir no caminho das resoluções, como diferenciá-los e como aprender com eles, para assim, exibir novamente as resoluções incorretas e perceber se há participação no debate "Por que essa resolução está incorreta?" não apenas pelos discentes que responderam ao problema corretamente, mas também pelos que se equivocaram.

Acredita-se que essa introdução da investigação do erro é capaz de suavizar debates sobre erros nas relações professor-aluno e aluno-aluno, gerar menos frustração do aluno consigo mesmo ao se deparar com um erro e promover um ambiente seguro e leve para aprender, entendendo a investigação de erros não como exposição, mas como etapa de construção.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou compreender algumas maneiras de valorizar o erro como um estágio da aprendizagem por meio da recapitulação das etapas do desenvolvimento cognitivo segundo Piaget (para entender que existe um ritmo a ser respeitado na aprendizagem), da diferenciação entre exercícios e problemas matemáticos (para entender que cada atividade tem sua potencialidade otimizada quando aplicada no momento adequado), da investigação sobre como o erro em aulas de matemática foi considerado nos últimos 100 anos ao redor do mundo (para entender que o erro é um acontecimento que inevitavelmente teremos que lidar, então é preciso buscar uma forma eficiente de não temê-lo, mas considerá-lo), do estudo de formas de promover um ambiente de sala de aula seguro para pensar, testar, errar e corrigir (para entender que quando um aluno se sente seguro diante de seus pares e de seu professor, ele se permite gastar a energia necessária para equilibrar conhecimentos) e da submissão dos estudantes a situações de investigação e correção de erros cometidos em problemas matemáticos.

Durante o desenvolvimento desta dissertação, apresentamos possibilidades de como essa valorização poderia acontecer na prática. Um primeiro exemplo é registrar todas as ideias para a resolução de um dado problema matemático, independente dessas serem corretas ou não, e a discussão em grupo sobre a coerência das resoluções propostas, na qual o professor atuaria como um mediador e não um solucionador. Um segundo exemplo é a criação de um banco de questões resolvidas incorretamente, prática sustentada por alguns autores citados nesse trabalho, e a submissão dos discentes à investigação desses erros, para que compreendam quais são os erros comuns de acontecerem em determinado tema, quais são os tipos desses erros, o que fazer para evitá-los e, assim, incorporar um novo conhecimento ao seu repertório matemático, não necessariamente entregue pelo docente, mas conquistado por eles próprios.

Esse estudo culminou no desenvolvimento de um produto educacional chamado "Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos", que conta com quatro problemas de análise combinatória, soluções incorretas e fichas de investigação para a análise dos estudantes. Além disso, apresentamos uma sequência didática de três aulas que explicitam como a aplicação desse produto educacional pode acontecer na prática no ensino de permutação simples e com repetição.

Ressaltamos que, apesar do trabalho ter se desenvolvido com foco em análise combinatória, essa ótica sobre o erro pode ser aplicada nos demais conteúdos ministrados nas aulas de matemática. Essa pesquisa nos fez perceber que a prática realizada no Capítulo 3 pode ser aplicada em um grupo com número maior de participantes e com um número maior de problemas, para que seja possível realizar uma análise estatística quantitativa, e que esse tipo de abordagem pode ser o ponto inicial para investigações em outros temas como:

- "Como a investigação dos erros pode auxiliar na detecção de pessoas com transtornos globais de desenvolvimento ou de aprendizagem (como a discalculia)";

- "Como a investigação do erro pode contribuir para que os alunos recuperem os temas não compreendidos (lacunas) de séries anteriores";

- "Estratégias de procedimento para intervenção do professor quando o estudante não consegue detectar os erros cometidos nas resoluções, mesmo após a ministração de todos os conceitos necessários".

Mediante ao exposto nesse trabalho, ilustramos que a investigação do erro nos mostra que saber qual caminho seguir é tão importante quanto saber qual caminho não se deve seguir, e que é importante não apenas saber, mas também entender os porquês.

Referências Bibliográficas

[1] ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

[2] BECKMANN, Ana Raquel; PEIXOTO, Sandra Cadore. *TAPETE PEDAGÓGICO: um recurso didático para introduzir o ensino de ciências e matemática na educação infantil*. 2021. 32 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2021. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/601940/2/PRODUTO

[3] BESSOT, Annie. Analyse d'erreurs dans l'utilisation de la suite des nombres par les enfants de la 1.ére anée de l'enseignément obligatoire en France au cours preparatoire (enfants de 6 a 7 ans). In: *International Congress on Mathematical Education*, 4., 1980, Berkeley: Proceedings. Boston: Birkhauser, 1983. p. 474-476.

[4] BIANCHINI, Luciane Guimarães Batistella; VASCONCELOS, Mario Sergio. Significação e sentimentos dos alunos quando erram na matemática. *Psicologia da Educação: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados PUC-SP*, São Paulo, v. 38, n. 38, p. 63-71, abr. 2015. Semestral. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/psicoeduca/article/view/22800. Acesso em: 26 abr. 2025.

[5] BORASI, Raffaella. Sbagliando s'impara: alternative per un uso positivo degli errori nella didattica della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, v. 11, n. 4, p. 365-404, apr. 1988.

[6] BORASI, Raffaella. *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

[8] CASÁVOLA, H. M. et al. O papel construtivo dos erros na aquisição dos conhecimentos: contribuição para uma teoria das aprendizagens. In: CASTORINA, J.A. e cols. (Orgs.) *Psicologia genética: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988, p. 32-44.

[9] CHAKUR, Cilene Ribeiro de Sá Leite; SILVA, Rita de Cássia da; MASSABNI, Vânia Galindo. O construtivismo no ensino fundamental: um caso de desconstrução. GT 20 – Psicologia da Educação: aspectos da sua história e organização atual, São Paulo, n. 20, 2016. Disponível em: https://anped.org.br/biblioteca/o-construtivismo-no-ensino-fundamental-um-caso-de-desconstrucao/. Acesso em: 30 abr. 2025.

[10] CORREIA, Carlos Eduardo Felix. Os Erros no Processo Ensino/Aprendizagem em Matemática. *Educ@*, Rio Claro, São Paulo, v. 18, n. 34, p. 169-186, jan. 2010. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/pdf/eduteo/v20n34/v20n34a11.pdf. Acesso em: 18 set. 2025.

[11] CURY, Helena Noronha. As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. 1994. 276 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/257714. Acesso em: 28 abr. 2025.

[12] DAMASCENO JÚNIOR, J. A. O papel do erro no processo de ensino e aprendizagem de ciências e matemática: Contributos da neurociência. *Revista Prática Docente*, 5(2), 1171–1190, 2020.

[13] DEWEY, John. *Como pensamos. Como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição*. Companhia Editora Nacional, 1959.

[14] FLAVELL, John Hurley. Speculations about the nature and development of metacognition. In: WEINERT, F.; KLUWE, R. (Orgs.), *Metacognition, motivation and understanding*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum, 1987, p. 21-29.

[15] FURLAN, Natália Pozzan; DELLA MÉA, Cristina Pilla. Percepção de professores sobre um programa de educação emocional: um estudo qualitativo. *Revista Brasileira de Educação*, v. 29, e290001, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1413-24782024290001.

[16] GOLDBERG, Jochem M.; SKLAD, Marcin; ELFRINK, Teuntje R.; SCHREURS, Karlein M. G.; BOHLMEIJER, Ernest T.; CLARKE, Aleisha M. Effectiveness of interventions adopting a whole school approach to enhancing social and emotional development: a meta-analysis. *European Journal of Psychology of Education*, [S.l.], v. 34, n. 4, p. 755-782, out. 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10212-018-0406-9.

[17] GUSMÃO, Tânia Cristina Rocha Silva; EMERIQUE, Paulo Sérgio. Do Erro Construtivo ao Erro Epistemológico: um espaço para as emoções. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, São Paulo, v. 14, n. 13, 2000. Disponível em:

https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10634. Acesso em: 01 maio 2025.

[18] HOFFMANN, Jussara Ma. L. *Avaliação Mediadora: Uma Prática em Construção Da Pré-Escola à Universidade.* 13ª ed. Porto Alegre: Educação Realidade, 1998.

[19] LIMA, Luciano Feliciano de; CUNHA, Maria Francisca da. Utilizando Erros para Promover a Reflexão Crítica e o Diálogo em Aulas de Matemática. IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Natal, nov. 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/434/283. Acesso em: 27 ago. 2025.

[20] MACEDO, Lino de. Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar. In: SÃO PAULO. Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Coletânea de Textos de Psicologia: psicologia da educação.* São Paulo, 1990. v.1. p. 346-362.

[21] MASSUCATO, Muriele; MAYRINK, Eduarda Diniz. Qual a diferença entre problema e exercício? 2015. Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1504/qual-a-diferenca-entre-problema-e-exercicio. Acesso em: 01 maio 2025.

[22] PACHECO, A. B.; MEDEIROS, C. F. Uma investigação sobre as dificuldades no uso de estratégias para a resolução de problemas verbais no campo da análise combinatória. In: MARANHÃO, C. (Org.) *Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio: pesquisa e perspectivas.* São Paulo: Musa Editora, 2009, p. 76-98.

[23] PAIS, L. C.*D*idática da Matemática: uma análise da influência francesa. [S.l.]: Autêntica Editora, 2019.

[24] PIAGET, Jean. Como se desarolla a mente do menino. In: PIAGET, Jean et al. *Os anos postergados: a primeira infância.* Paris: UNICEF, 1975.

[25] PIAGET, Jean. *Para onde vai a educação?* Rio de Janeiro: Livraria José Olympio Editora, 1977.

[26] PIAGET, Jean. *Biologia e Conhecimento.* 2ª Ed. Petrópolis: Vozes, 1996.

[27] PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda; ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; SÁ, Pedro Franco de. APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PONTO DE PARTIDA. *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 2012. Disponível em: https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/434/submission/director/434.pdf. Acesso em: 24 ago. 2025.

[28] POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

[29] RESNIK, L.; COLLINS, Allan. Cognición y Aprendizaje. En *Anuario Psicología*, Nº 69, p. 189-197. Barcelona: Grafiques 92, S.A, 1996.

[30] RESNICK, Lauren B.; FORD, Wendy W. *La ensenanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós, 1990.

[31] SALOMÃO, Gabriel Merched. Educar para a Sobrevivência ou Educar para a Vida. 2017. Disponível em: https://larmontessori.com/2017/12/16/educacao-para-a-vida/. Acesso em: 02 maio 2025.

[32] SILVEIRA, J. F. Porto da. O que é um problema matemático? 2001. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/resu1.html. Acesso em: 01 maio 2025.

[33] SPINILLO, Alina Galvão; PACHECO, Auxiliadora Baraldi; GOMES, Juliana Ferreira; CAVALCANTI, Luciano. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso?. *Errar é preciso?*, 2014. Disponível em: https://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2015.005. Acesso em: 28 abr. 2025.

[34] XU, Y. The importance of "sorting out wrong questions" in high school mathematics learning. *The Educational Review*, USA, v. 7, n. 10, p. 1605-1609, 2023.

Apêndice A: Produto educacional

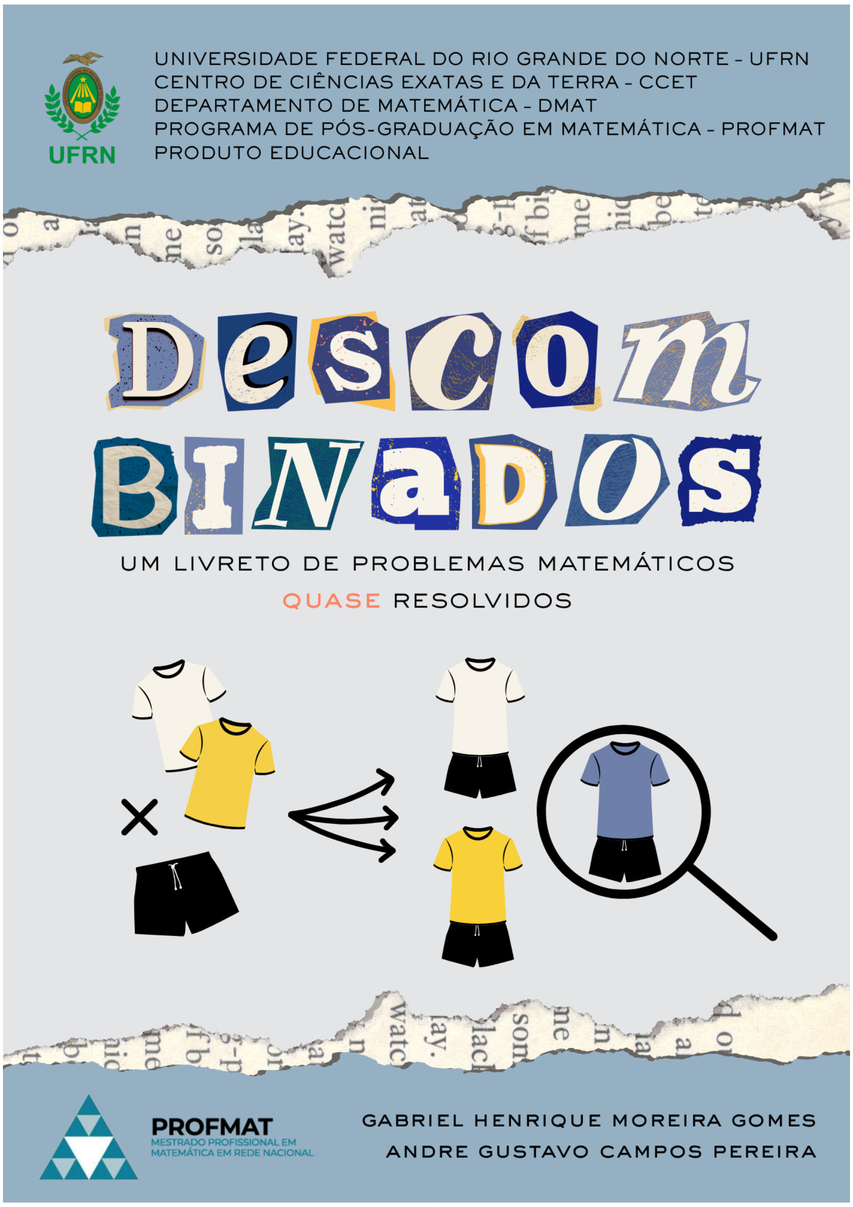
Para a obtenção do título de mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), esse trabalho deve resultar em um produto educacional.

"O produto educacional apresenta-se como uma forma de tornar pública a pesquisa realizada durante o mestrado profissional e caracteriza-se como um recurso com estratégias educacionais que favorecem a prática pedagógica" (BECKMANN; PEIXOTO, 2021).

O produto educacional desenvolvido neste trabalho tem como público-alvo os professores de Matemática e tem como finalidade servir como um ponto de partida para que os docentes compreendam como utilizar a investigação dos erros como forma de valorizar o raciocínio do aluno (bem como o potencial de aprender por meio do erro) e elaborar o seu próprio banco de questões erradas, conforme sugere Xu (2023).

"Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos" é um pequeno livro que propõe quatro problemas comumente abordados no ensino de análise combinatória durante o Ensino Médio nas escolas brasileiras. A seguir, uma breve descrição de seus elementos.

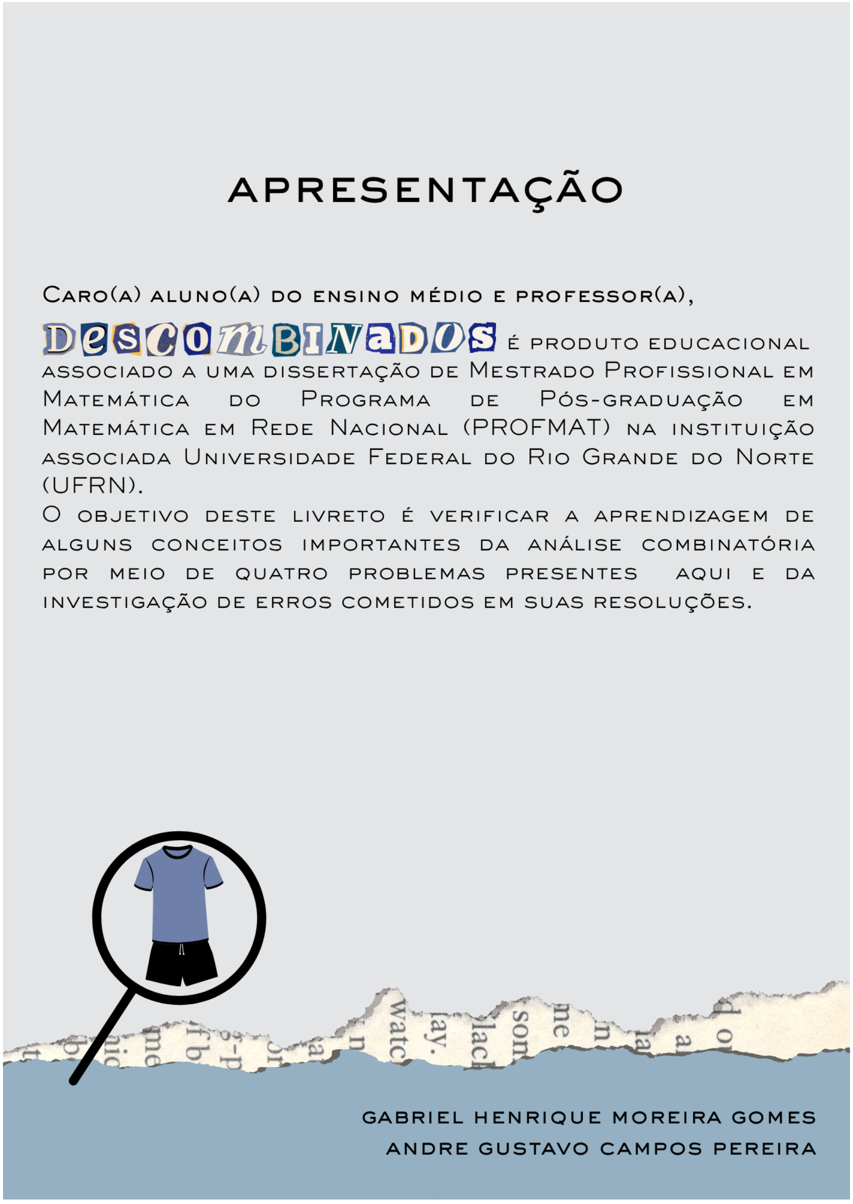
Figura 3.1: Capa do livreto



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A capa desse produto traz a ideia de combinação em seu título, uma vez que as letras aparentam ser recortes selecionados de fontes diferentes e combinados para formar a palavra "Descombinados". A ilustração presente na capa exprime a ideia de "investigação de erros" que será abordada no livreto, pois ao combinar dois tipos de camisas com um tipo de bermuda, é possível formar dois tipos de *looks* distintos, todavia, a imagem apresenta três tipos de *looks*, em que a terceira combinação está evidenciada por uma lupa, que exprime a ideia de investigação do erro cometido.

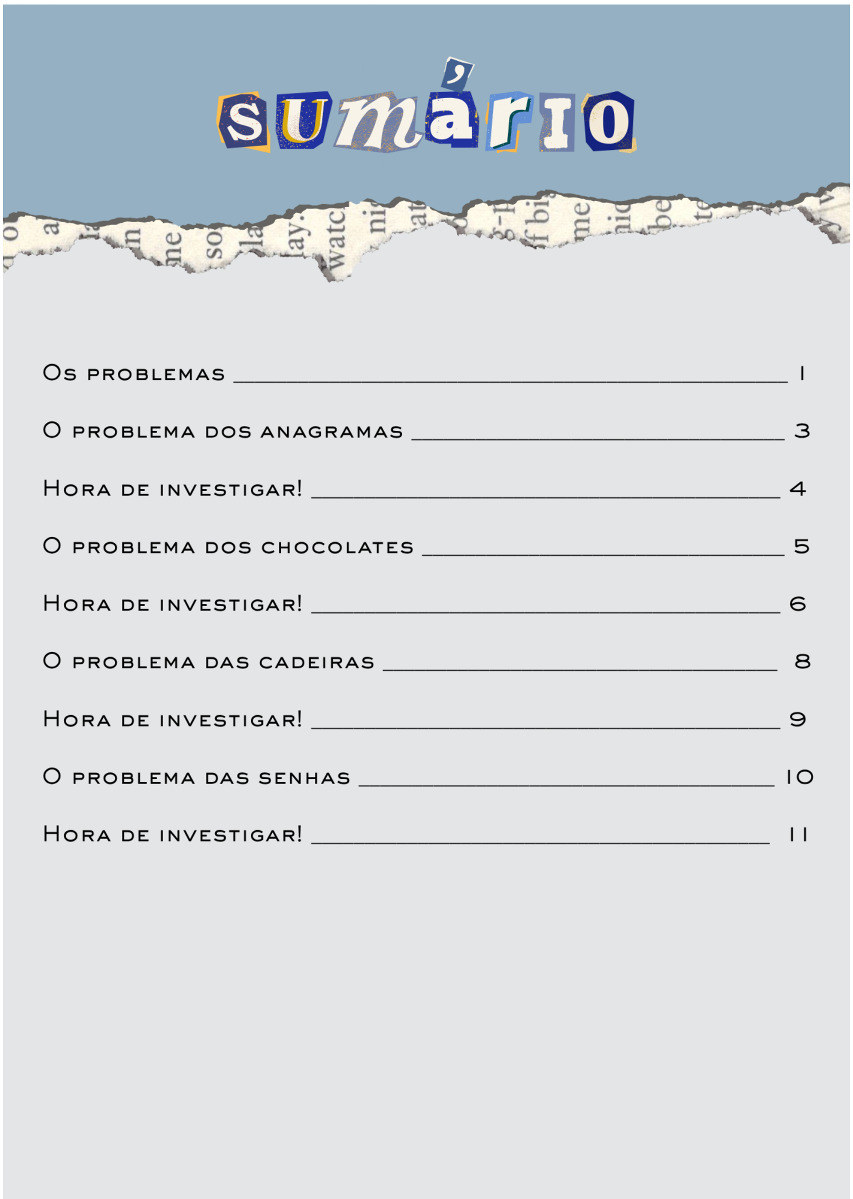
Figura 3.2: Apresentação



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Em seguida, encontra-se a apresentação do livro como produto educacional associado a essa dissertação de mestrado, vinculado ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) oferecido na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), bem como o objetivo geral desse produto: verificação da aprendizagem de conceitos importantes da análise combinatória por meio da investigação dos erros cometidos nas resoluções dos problemas.

Figura 3.3: Sumário

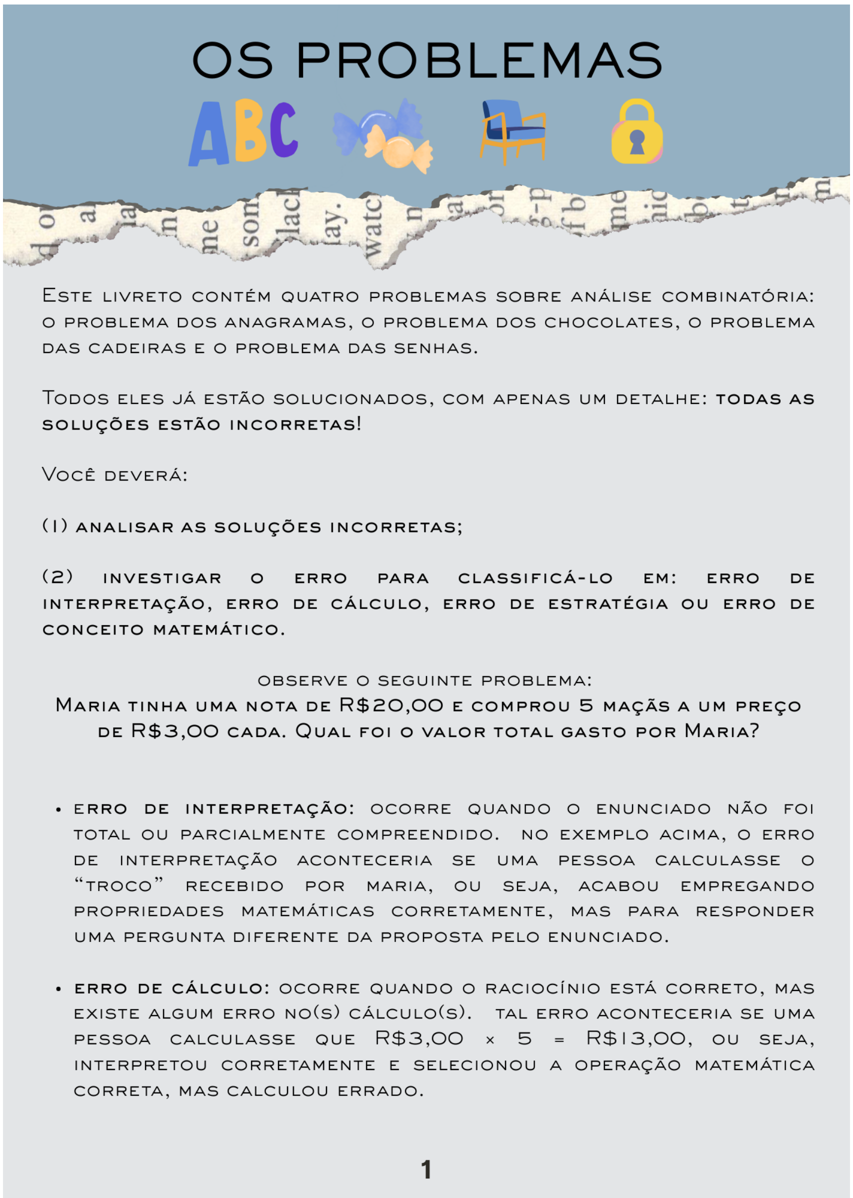


Sumário

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O sumário explicita a forma com a qual o livreto foi dividido. Ao todo, o material conta com 11 páginas divididas em uma breve explicação sobre a dinâmica do produto educacional, os quatro problemas propostos com as respectivas soluções incorretas, seguidas de fichas de investigação para os alunos - uma para cada solução proposta.

Figura 3.4: Dinâmica do livreto - parte I



OS PROBLEMAS

Este livreto contém quatro problemas sobre análise combinatória: o problema dos anagramas, o problema dos chocolates, o problema das cadeiras e o problema das senhas.

Todos eles já estão solucionados, com apenas um detalhe: **todas as soluções estão incorretas!**

Você deverá:

(1) analisar as soluções incorretas;

(2) investigar o erro para classificá-lo em: erro de interpretação, erro de cálculo, erro de estratégia ou erro de conceito matemático.

observe o seguinte problema:

Maria tinha uma nota de R$20,00 e comprou 5 maçãs a um preço de R$3,00 cada. Qual foi o valor total gasto por Maria?

- **erro de interpretação:** ocorre quando o enunciado não foi total ou parcialmente compreendido. No exemplo acima, o erro de interpretação aconteceria se uma pessoa calculasse o "troco" recebido por Maria, ou seja, acabou empregando propriedades matemáticas corretamente, mas para responder uma pergunta diferente da proposta pelo enunciado.

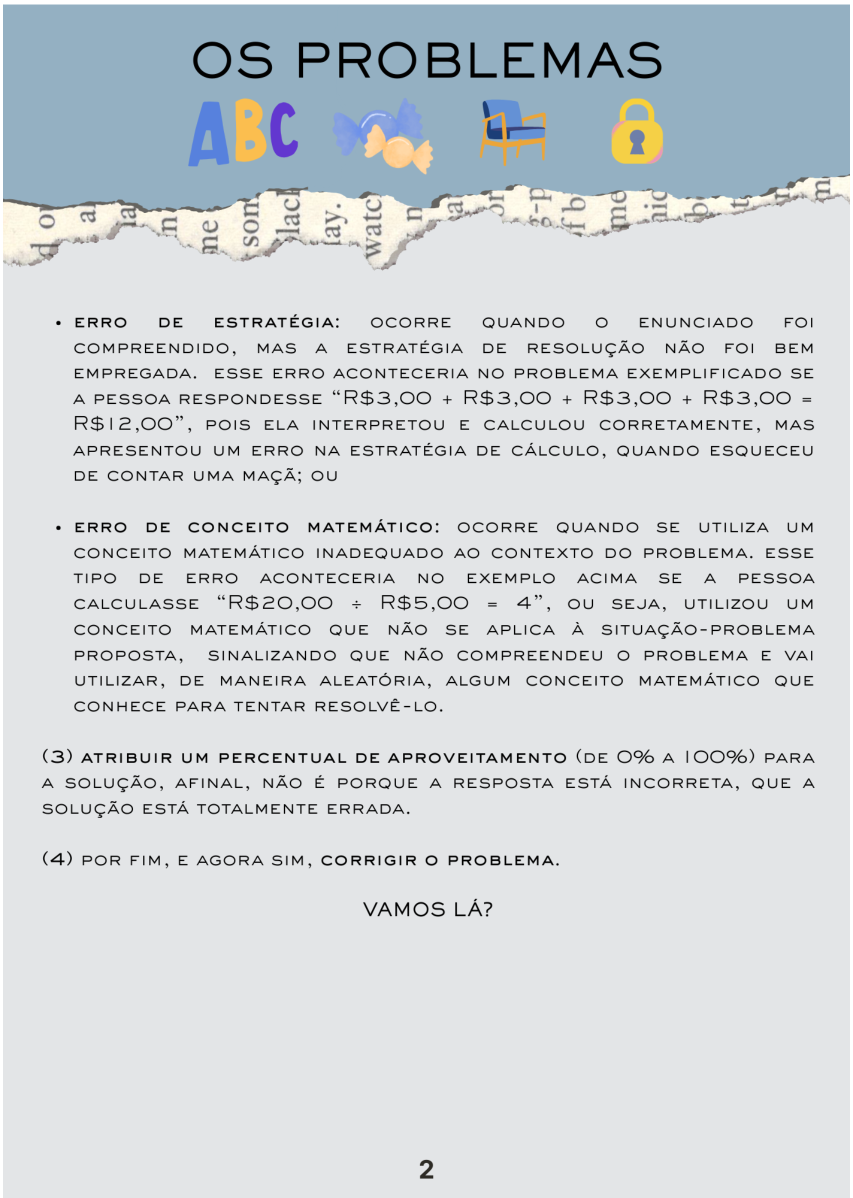
- **erro de cálculo:** ocorre quando o raciocínio está correto, mas existe algum erro no(s) cálculo(s). Tal erro aconteceria se uma pessoa calculasse que R$3,00 × 5 = R$13,00, ou seja, interpretou corretamente e selecionou a operação matemática correta, mas calculou errado.

1

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A Seção "Os problemas"vai explicar o funcionamento do produto educacional, em que logo no princípio o leitor é avisado de que as resoluções estão incorretas e seu trabalho deverá ser analisar as soluções incorretas, investigar o erro detectado para classificá-lo de acordo com a classificação já sugerida na Seção 2.2 desse trabalho, atribuir uma porcentagem de aproveitamento da resolução incorreta e, por fim, correção do trabalho.

Figura 3.5: Dinâmica do livreto - parte II



OS PROBLEMAS

- **ERRO DE ESTRATÉGIA:** OCORRE QUANDO O ENUNCIADO FOI COMPREENDIDO, MAS A ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO NÃO FOI BEM EMPREGADA. ESSE ERRO ACONTECERIA NO PROBLEMA EXEMPLIFICADO SE A PESSOA RESPONDESSE "R$3,00 + R$3,00 + R$3,00 + R$3,00 = R$12,00", POIS ELA INTERPRETOU E CALCULOU CORRETAMENTE, MAS APRESENTOU UM ERRO NA ESTRATÉGIA DE CÁLCULO, QUANDO ESQUECEU DE CONTAR UMA MAÇÃ; OU

- **ERRO DE CONCEITO MATEMÁTICO:** OCORRE QUANDO SE UTILIZA UM CONCEITO MATEMÁTICO INADEQUADO AO CONTEXTO DO PROBLEMA. ESSE TIPO DE ERRO ACONTECERIA NO EXEMPLO ACIMA SE A PESSOA CALCULASSE "R$20,00 ÷ R$5,00 = 4", OU SEJA, UTILIZOU UM CONCEITO MATEMÁTICO QUE NÃO SE APLICA À SITUAÇÃO-PROBLEMA PROPOSTA, SINALIZANDO QUE NÃO COMPREENDEU O PROBLEMA E VAI UTILIZAR, DE MANEIRA ALEATÓRIA, ALGUM CONCEITO MATEMÁTICO QUE CONHECE PARA TENTAR RESOLVÊ-LO.

(3) **ATRIBUIR UM PERCENTUAL DE APROVEITAMENTO** (DE 0% A 100%) PARA A SOLUÇÃO, AFINAL, NÃO É PORQUE A RESPOSTA ESTÁ INCORRETA, QUE A SOLUÇÃO ESTÁ TOTALMENTE ERRADA.

(4) POR FIM, E AGORA SIM, **CORRIGIR O PROBLEMA.**

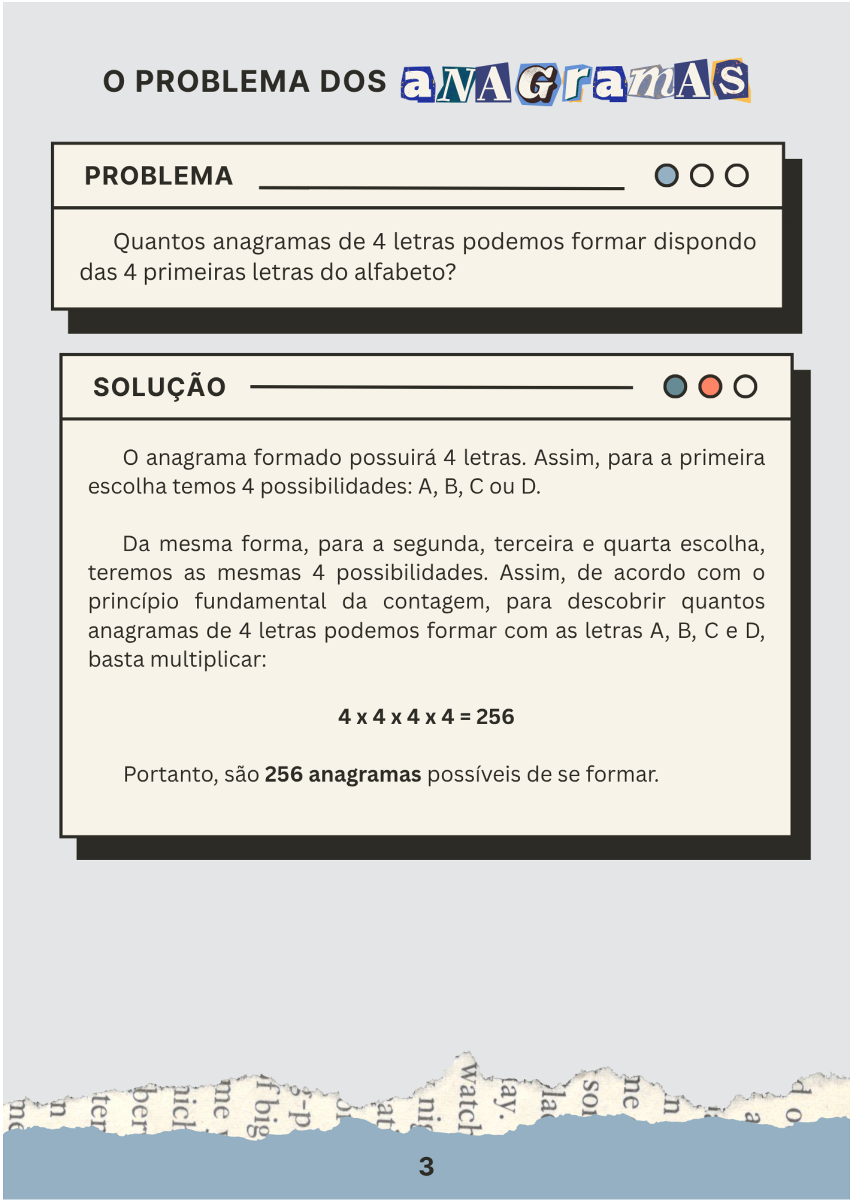
VAMOS LÁ?

2

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A partir do problema das maçãs apresentado na Seção 2.2, o livreto vai caracterizar os quatro tipos de erros considerados nesse trabalho: erro de interpretação, erro de cálculo, erro de estratégia e erro de conceito, como forma de orientar o estudante na investigação dos equívocos expostos mais adiante.

Figura 3.6: O problema dos anagramas e solução



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

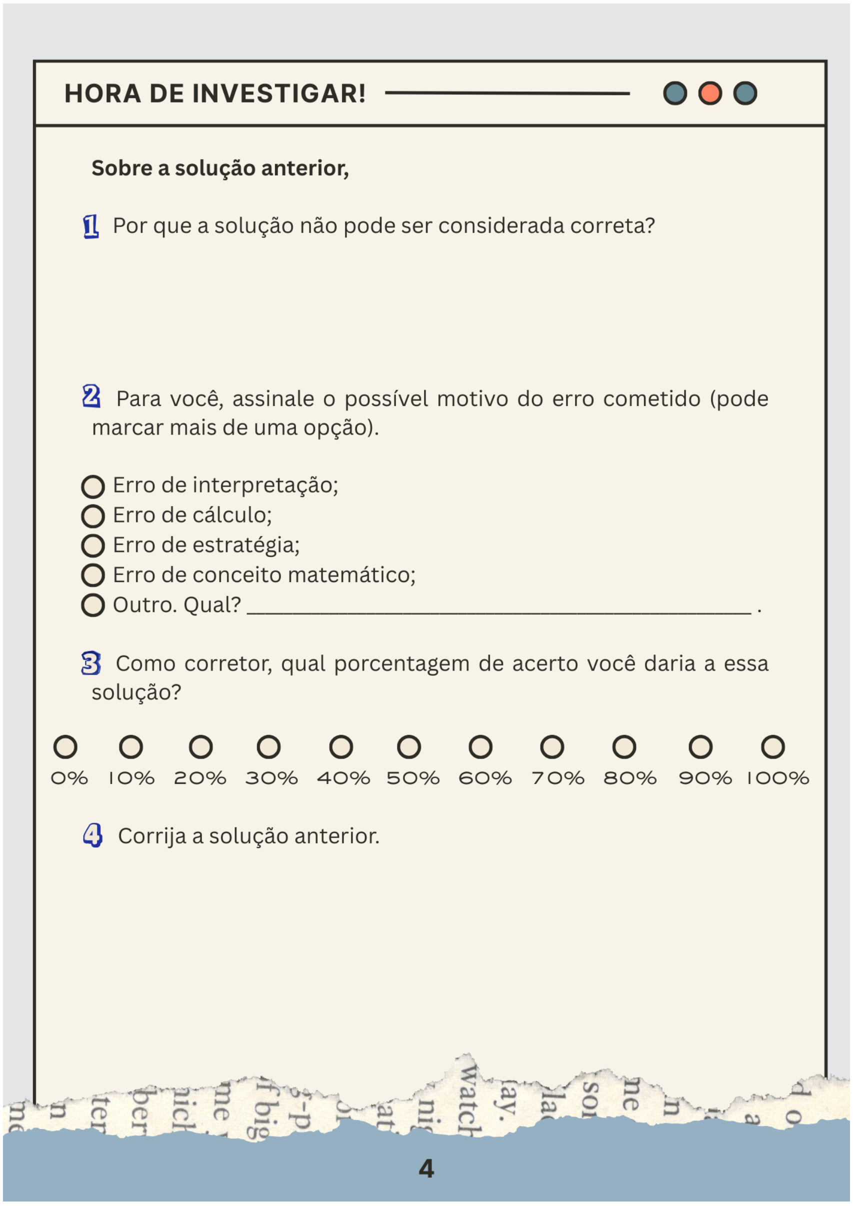
Esse é um problema clássico de permutação, comum de surgir nos primeiros contatos dos estudantes com a análise combinatória. Trata-se da reorganização de um dado número de letras distintas entre si, isto é, a reordenação de elementos de um conjunto.

Vale lembrar que tal solução está incorreta e o estudante, que entra em contato com essa, já sabe disso, pois seu objetivo é justamente analisar o que foi sugerido, detectar o erro cometido com base em sua “bagagem” matemática e propor uma solução correta.

O caso acima trata de um erro de estratégia, pois seleciona as operações matemáticas adequadas ao problema (ou seja, não é erro de conceito), calcula as operações que propõe corretamente (não é erro de cálculo), entende o que a questão espera como resposta (não é erro de interpretação), mas seleciona uma estratégia de resolução inadequada quando sugere que para cada escolha existem 4 possibilidades de letras. Na verdade, por se tratar de um anagrama com as letras A, B, C e D, ao escolher uma letra dentre as quatro, na segunda escolha sobram três opções de letras e assim sucessivamente, resultando como resposta: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 anagramas possíveis.

É importante que o estudante analise qual tipo de erro foi cometido, quão distante a resposta sugerida se encontra da resposta correta, entre outros. Por isso, após cada problema existe uma ficha de investigação a ser preenchida pelo discente, conforme mostra a figura a seguir:

Figura 3.7: Ficha de investigação


HORA DE INVESTIGAR!

Sobre a solução anterior,

1 Por que a solução não pode ser considerada correta?

2 Para você, assinale o possível motivo do erro cometido (pode marcar mais de uma opção).

- ○ Erro de interpretação;
- ○ Erro de cálculo;
- ○ Erro de estratégia;
- ○ Erro de conceito matemático;
- ○ Outro. Qual? ______________________ .

3 Como corretor, qual porcentagem de acerto você daria a essa solução?

○ 0% ○ 10% ○ 20% ○ 30% ○ 40% ○ 50% ○ 60% ○ 70% ○ 80% ○ 90% ○ 100%

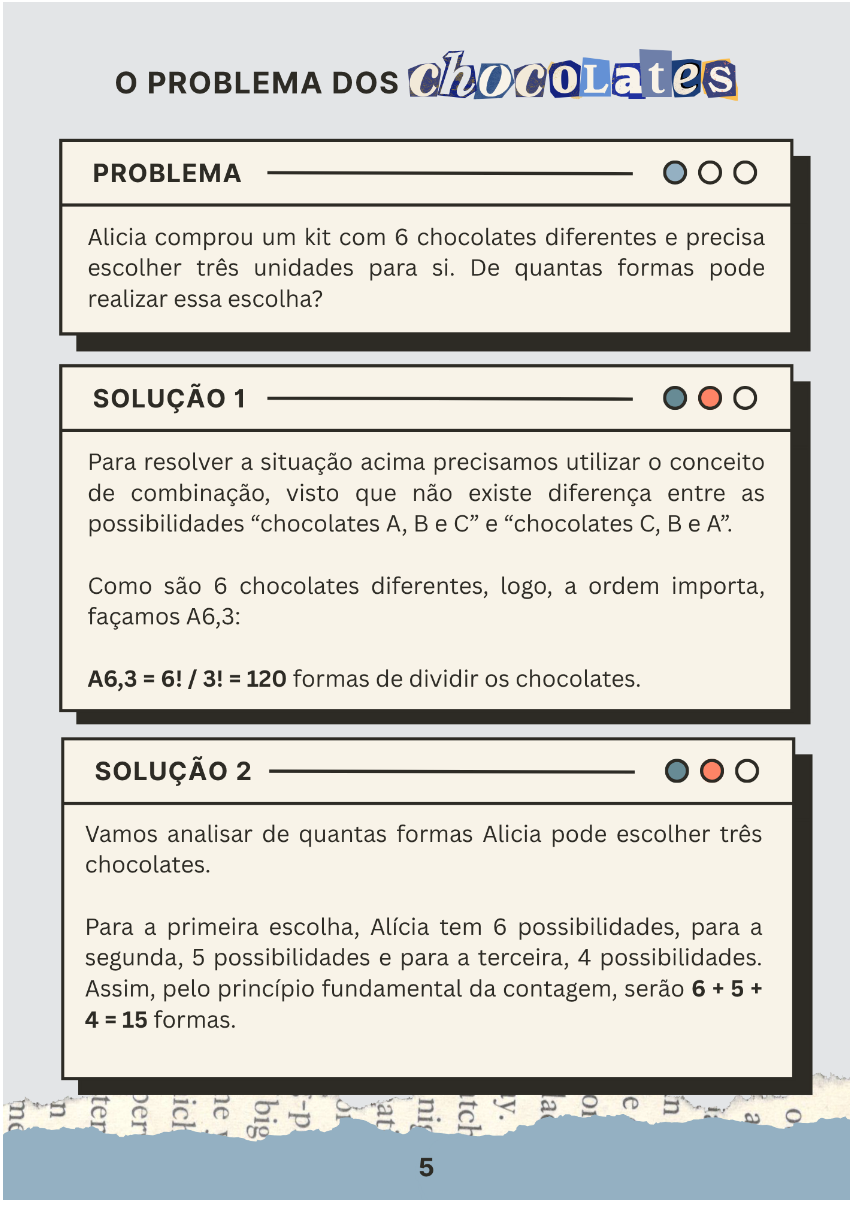
4 Corrija a solução anterior.

4

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A ficha de avaliação aparecerá após cada problema, inclusive, nos problemas em que são propostas duas soluções incorretas haverá duas fichas de investigação.

Figura 3.8: O problema dos chocolates e soluções



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O problema dos chocolates é um problema de combinação em que Alícia deve escolher três doces para si, ou seja, não importa a ordem com a qual será feita a escolha, tal qual argumenta a "solução 1", demonstrando que o erro cometido não foi do tipo de interpretação. Todavia, essa resolução utiliza a fórmula de arranjo para solucionar o caso, o que representa um erro de conceito, uma vez que os conceitos de arranjo e combinação foram confundidos no decorrer da resolução. Assim, a resposta correta para a questão seria $C_{6,3} = 20$ formas.

A "solução 2", por sua vez, também apresenta um erro de conceito, quando aplica o conceito de "adição" a uma situação que envolve o princípio multiplicativo.

Figura 3.9: O problema das cadeiras e soluções

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O problema das cadeiras trata de uma situação de permutação em que o primeiro e o último elementos não são adjacentes, com uma restrição. A resolução indica que uma parte do problema não foi bem interpretada, indicando erro de interpretação, pois Ester deverá sentar, obrigatoriamente, na primeira cadeira para atender ao enunciado, mas o resolvedor desconsiderou esse fato e entendeu que ela seria a primeira garota a realizar a escolha.

Ainda que a interpretação estivesse correta e Ester fosse a primeira a escolher a cadeira para sentar, podendo sentar-se em qualquer assento, ela teria 6 possibilidades de escolha e não 5, ou seja, o resolvedor também cometeu um erro de estratégia em sua resolução, pois em sua estratégia, esqueceu um detalhe, trocando 6 por 5 nos cálculos.

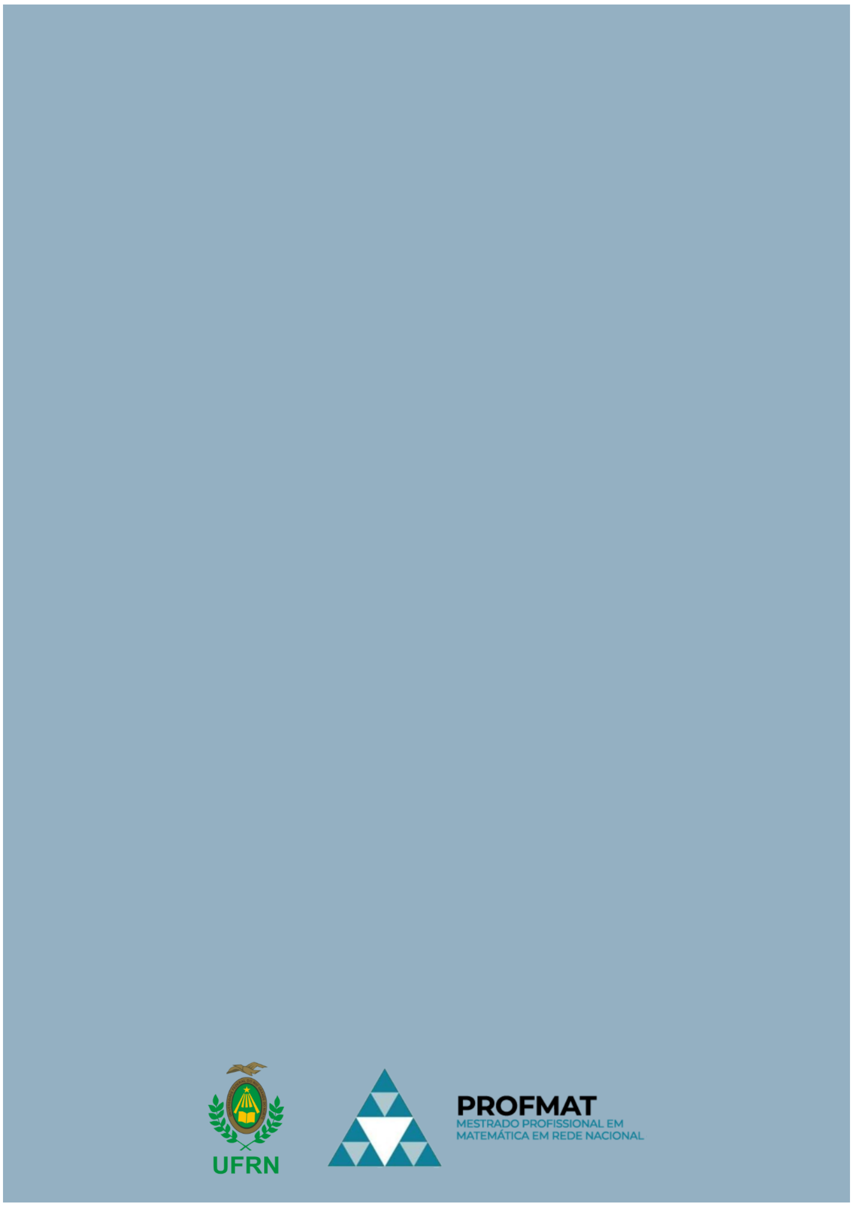
Por fim, o resolvedor também cometeu um erro de cálculo ao afirmar que 5x5! é igual a 240, quando, na verdade, é igual a 600.

Figura 3.10: O problema das senhas e soluções

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O problema da senhas retrata a situação em que é necessário escolher 6 elementos de um conjunto de 10 elementos de maneira a formar uma senha, ou seja, a ordem de seleção importa, pois "012345"é diferente de "543210". Os erros cometidos foram tanto de cálculo, pois $C_{10,6}$ é igual a 210, quanto de conceito, pois, apesar do resolvedor ter compreendido a situação-problema, o conceito de arranjo foi confundido com o conceito de combinação.

Figura 3.11: Contracapa



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Esse livreto possibilita uma investigação que é capaz de desenvolver senso crítico e argumentação no estudante. Na prática, de que forma aplicar tais problemas em sala de aula? A seguir, um exemplo de sequência didática para aplicação de um dos problemas de "Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos" em sala de aula.

Apêndice B: Sequência didática

O termo sequência didática possui um tom autoexplicativo. A palavra "sequência" sugere progressão, desenvolvimento, enquanto que a palavra "didática" refere-se à parte técnica e eficiente da transmissão de conceitos. Assim, uma sequência didática é um conjunto de aulas que foram elaboradas com o objetivo de favorecer o processo de ensino-aprendizagem de um conceito, conforme Pais (2019, p. 157).

No estudo da análise combinatória numa turma de terceira série do Ensino Médio, é comum abordar situações de permutação com restrições, por exemplo: maneiras de quatro pessoas sentarem-se enfileiradas, de modo que duas delas não se sentem lado a lado. Antes de chegar nesse nível de complexidade, é preciso passar pela aprendizagem de contextos mais simples em que a permutação se aplica.

A tabela a seguir expõe um exemplo de sequência didática para a aplicação do produto educacional desenvolvido neste trabalho em sala de aula.

Sequência Didática: Ensino de Permutação com Restrição	
Componente curricular:	Matemática
Tema:	Permutação simples e permutação com restrição
Série:	3ª série do Ensino Médio
Duração:	3 aulas de 50 minutos cada
Habilidade da BNCC contemplada:	(EF03EM09) – Resolver e elaborar problemas que envolvam contagem, aplicando os princípios multiplicativo e aditivo, e os conceitos de permutação, arranjo e combinação, em contextos diversos.
Objetivo geral:	Entender o conceito de permutação e aplicá-lo corretamente em diferentes contextos em que há ou não há restrição.

Objetivos específicos:	- Entender o que é uma permutação simples; - Reconhecer situações em que a permutação simples se aplica; - Calcular o número de permutações de n elementos distintos; - Compreender situações em que há restrição (elementos fixos, juntos ou separados); - Resolver problemas contextualizados que envolvam permutações com e sem restrição; - Identificar erros que possivelmente possam ser cometidos durante a resolução de tais problemas.
Recursos didáticos:	Quadro, pilotos, livreto *"Descombinados: um livreto de problemas matemáticos quase resolvidos"*, fichas de investigação (na quantidade dos alunos) e folhas A4 com impressão de problemas (na quantidade dos alunos).
Primeira aula	O objetivo é preparar o aluno para entender a lógica da permutação. (10 min) Relembrar o princípio multiplicativo com situações simples, como anagramas da palavra "MAR". (10 min) Propor problemas de contagem mais complexos e permitir exposição dos raciocínios. (5 min) Solicitar que os alunos criem situações-problema. (5 min) Dialogar sobre as soluções. (15 min) Listar manualmente os anagramas de "OLÁ" e "BOLA". (5 min) Apresentar o conceito de permutação de n elementos distintos ($n!$).
Segunda aula:	O objetivo é investigar erros na resolução de problemas de permutação. (10 min) Recapitular a fórmula $P = n!$ com três problemas simples. (10 min) Distribuir fichas de investigação e apresentar o problema das senhas do livreto *Descombinados*. (15 min) Alunos analisam e preenchem as fichas. (10 min) Mediar diálogo sobre percepções. (5 min) Recolher as fichas e propor problema com restrição.

Terceira aula:	O objetivo é aplicar os conhecimentos em problemas mais complexos. (5 min) Partilha de experiências com mediação do professor. (2 min) Retomar o problema da aula anterior. (10 min) Registrar estratégias de resolução no quadro. (10 min) Apresentar situações práticas com restrições (elementos fixos, juntos ou separados). (20 min) Resolver problemas em duplas ou trios, com observação docente. (3 min) Recapitular os conceitos aprendidos.
Avaliação:	Participação nas discussões; observação das fichas de investigação; correção das atividades em grupo.

Tabela 3.1: Sequência didática sobre o ensino de permutação com restrição

Essa sequência didática é um exemplo que possibilita o ensino de permutação, partindo do contexto mais simples a um mais complexo, valorizando a discussão e o trabalho em grupo, promovendo um ambiente de sala de aula saudável para propor, arriscar, errar e corrigir, considerando os múltiplos caminhos para seguir e não seguir na resolução de algumas questões e permitindo que os erros sejam oportunidades para situações de aprendizagem. Vale ressaltar que uma abordagem próxima a essa pode ser estendida a qualquer outro objeto de conhecimento no ensino e no estudo de Matemática.