



André Aparecido Franco

**Equações Diferenciais e Crescimento  
Populacional: Uma Abordagem Interdisciplinar  
com a Geografia e as Teorias Demográficas**

Maringá-PR, Brasil

26/02/2026

**ANDRÉ APARECIDO FRANCO**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CRESCIMENTO POPULACIONAL:  
UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR COM A GEOGRAFIA E AS  
TEORIAS DEMOGRÁFICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

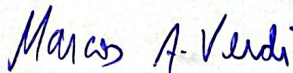
**COMISSÃO JULGADORA:**



**Profª Drª. Patricia Hilario Tacuri Córdoba**  
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MANUEL FRANCISCO ZULOETA JIMENEZ  
Data: 19/03/2026 23:39:04-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Manuel Francisco Zuloeta Jimenez**  
UTFPr - Universidade Tecnologia Federal do Paraná - Londrina



**Prof. Dr. Marcos Andre Verdi**  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 26 de fevereiro de 2026  
Local de defesa: E90 – Sala 134

André Aparecido Franco

# **Equações Diferenciais e Crescimento Populacional: Uma Abordagem Interdisciplinar com a Geografia e as Teorias Demográficas**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Universidade Estadual de Maringá - UEM

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Patrícia Hilário Tacuri Córdova

Maringá-PR, Brasil

26/02/2026

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

F825e

Franco, André Aparecido

Equações diferenciais e crescimento populacional : uma abordagem interdisciplinar com a geografia e as teorias demográficas / André Aparecido Franco. -- Maringá, PR, 2026.

73 f. : il. color., figs., tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Hilário Tacuri Córdova.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Mestrado Profissional, 2026.

1. Modelagem matemática. 2. Educação matemática. 3. Crescimento populacional - Modelos matemáticos. 4. Geografia humana - Estudo e ensino. 5. Interdisciplinaridade na educação. I. Córdova, Patrícia Hilário Tacuri, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Mestrado Profissional. III. Título.

CDD 23.ed. 510.71

Vanessa de Souza Pianovski - CRB 9/1804

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Modelo de Crescimento Populacional Exponencial . . . . .	14
Figura 2 – Modelo de Crescimento Populacional Logístico . . . . .	15
Figura 3 – Urbanização da População Mundial . . . . .	17
Figura 4 – Projeção Modelo de Malthus para Etiópia . . . . .	22
Figura 5 – Projeção do Modelo Logístico do Paquistão . . . . .	24
Figura 6 – Curva de Gompertz em porcentagem do valor limite, com destaque para o ponto de inflexão. . . . .	27
Figura 7 – Modelo de Gompertz para População da Alemanha . . . . .	29
Figura 8 – Modelo de Montroll para População de Portugal . . . . .	33
Figura 9 – Evolução estimada da população do Brasil (1800–2025). . . . .	36
Figura 10 – Evolução Histórica e Projeção da População Brasileira. . . . .	39
Figura 11 – População do Brasil [1900-2050]. . . . .	41
Figura 12 – Modelo Logístico da População Brasileira (1900-2050) . . . . .	43
Figura 13 – Modelo Logístico com Retardo - Brasil (1900-2050) . . . . .	45
Figura 14 – População do Paraná (1900-2022) . . . . .	46
Figura 15 – Modelo Logístico - Paraná (1900-2100) . . . . .	47
Figura 16 – Modelo Logístico com Retardo do Estado do Paraná . . . . .	49
Figura 17 – Modelo Logístico com Retardo de Sta. Cruz de Mte. Castelo-PR . . . . .	51
Figura 18 – Pirâmide Etária de Sta. Cruz de Mte. Castelo 2010 . . . . .	53
Figura 19 – Projeção da Pirâmide Etária de Sta. Cruz de Mte. Castelo 2030 . . . . .	54
Figura 20 – População Mundial 1-2050 . . . . .	58
Figura 21 – Modelo de Crescimento Populacional Logístico . . . . .	60

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Evolução da população mundial e principais acontecimentos históricos (Ano 1–2050) . . . . .	59
---	----



# Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ONU	Organização das Nações Unidas
ODS	Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

## RESUMO

Esta dissertação aborda o crescimento populacional por meio de uma perspectiva interdisciplinar entre Matemática e Geografia, articulando conceitos teóricos e modelos matemáticos aplicados à dinâmica demográfica. O estudo fundamenta-se na análise de teorias demográficas clássicas, como a teoria malthusiana, o neomalthusianismo e a teoria da transição demográfica, associando-as à modelagem matemática baseada em equações diferenciais. São apresentados e discutidos modelos clássicos de crescimento populacional, como o modelo exponencial, logístico, de Gompertz e de Montroll, com aplicações a dados reais de diferentes países e regiões. Além da abordagem teórica, o trabalho propõe uma aplicação pedagógica voltada ao Ensino Médio, com foco na utilização da modelagem matemática como ferramenta para promover a aprendizagem significativa e o pensamento crítico dos estudantes. Como produto educacional, é apresentado um Atlas Populacional, que integra dados demográficos, análises matemáticas e interpretação geográfica. Os resultados evidenciam que a integração entre áreas do conhecimento contribui para uma compreensão mais ampla e contextualizada dos fenômenos populacionais, fortalecendo o ensino interdisciplinar e a formação cidadã.

**Palavras-chave: crescimento populacional; modelagem matemática; equações diferenciais; Geografia; teorias demográficas.**

## ABSTRACT

This dissertation addresses population growth through an interdisciplinary approach between Mathematics and Geography, integrating theoretical concepts and mathematical models applied to demographic dynamics. The study is based on the analysis of classical demographic theories, such as Malthusian theory, Neo-Malthusianism, and the demographic transition theory, relating them to mathematical modeling using differential equations. Classical population growth models are presented and discussed, including exponential, logistic, Gompertz, and Montroll models, with applications to real data from different countries and regions. In addition to the theoretical approach, the study proposes a pedagogical application for high school education, focusing on the use of mathematical modeling as a tool to promote meaningful learning and critical thinking among students. As an educational product, a Population Atlas is presented, integrating demographic data, mathematical analysis, and geographical interpretation. The results indicate that the integration between different fields of knowledge contributes to a broader and more contextualized understanding of population phenomena, strengthening interdisciplinary teaching and citizenship education.

**Keywords: population growth; mathematical modeling; differential equations; Geography; demographic theories.**

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>O CRESCIMENTO POPULACIONAL E AS TEORIAS DEMOGRÁFICAS.</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1	<b>Teorias Demográficas: Malthus, Neomalthusianismo e Transição Demográfica</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2	<b>Modelagem Matemática do Crescimento Populacional</b> . . . . .	<b>12</b>
1.2.1	Taxa de crescimento e taxa relativa de crescimento . . . . .	12
1.2.2	Modelo Exponencial . . . . .	13
1.2.3	Modelo Logístico . . . . .	14
1.3	<b>Tendências Contemporâneas e desafios do Crescimento Populacional</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b> . . . . .	<b>19</b>
2.1	<b>Modelo Exponencial de Crescimento Populacional</b> . . . . .	<b>20</b>
2.2	<b>Modelo Logístico ou Modelo de Verhulst</b> . . . . .	<b>22</b>
2.3	<b>Modelo de Gompertz</b> . . . . .	<b>25</b>
2.4	<b>Modelo de Montroll</b> . . . . .	<b>29</b>
2.5	<b>Modelo com Retardo</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>MODELOS, DADOS E EDUCAÇÃO: EXPLORANDO O CRESCIMENTO POPULACIONAL NA PRÁTICA</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	<b>Evolução da População Brasileira no Período (1900-2050)</b> . . . . .	<b>41</b>
3.2	<b>Evolução da População do Estado do Paraná (1900-2050)</b> . . . . .	<b>45</b>
3.3	<b>Evolução da População de Santa Cruz de Monte Castelo (1961-2030)</b> . . . . .	<b>50</b>
3.3.1	<b>Pirâmide Etária e Transição Demográfica em Santa Cruz de Monte Castelo</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>O AUMENTO DA POPULAÇÃO MUNDIAL SOB A ÓTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA</b> . . . . .	<b>57</b>
4.1	<b>Panorama quantitativo do crescimento histórico</b> . . . . .	<b>57</b>
4.2	<b>Causas da Redução Populacional e o Envelhecimento Demográfico: Desafios Econômicos e Sociais</b> . . . . .	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>ROTEIRO DE ATIVIDADES (ALUNO)</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>GUIA DOCENTE</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1	<b>Produto Educacional – Atlas Populacional</b> . . . . .	<b>67</b>
6.2	<b>Fundamentação e propósito pedagógico</b> . . . . .	<b>67</b>

<b>6.3</b>	<b>Público-alvo</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>6.4</b>	<b>Objetivos de aprendizagem</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>6.5</b>	<b>Competências da BNCC envolvidas</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>6.6</b>	<b>Estratégia didática sugerida</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>6.7</b>	<b>Recursos</b> . . . . .	<b>68</b>
6.7.1	Avaliação sugerida (critérios) . . . . .	69
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>73</b>

# Introdução

O crescimento populacional é um fenômeno de ampla repercussão social, ambiental e econômica, exigindo uma abordagem que transcenda os limites de uma única área do conhecimento. Questões como o aumento da demanda por recursos naturais, a expansão urbana e as desigualdades socioespaciais estão diretamente relacionadas à dinâmica demográfica, constituindo objeto de análise tanto da Geografia quanto da Matemática, ainda que sob perspectivas distintas.

A Geografia, ao interpretar o espaço geográfico como produto das interações entre sociedade e natureza, oferece instrumentos conceituais para compreender os efeitos do crescimento populacional sobre o território. Por sua vez, a Matemática contribui com ferramentas quantitativas capazes de modelar, representar e projetar o comportamento de populações ao longo do tempo. Assim, o diálogo entre essas áreas favorece uma leitura mais crítica e fundamentada da realidade, articulando explicações qualitativas e análises quantitativas.

No contexto escolar, essa articulação amplia as possibilidades de interdisciplinaridade, permitindo que o estudante compreenda fenômenos sociais e espaciais com apoio de modelos matemáticos. Em particular, a modelagem aplicada à análise demográfica possibilita relacionar funções e equações a situações concretas, conectando padrões de crescimento a interpretações teóricas, como as perspectivas malthusiana, neomalthusiana e a teoria da transição demográfica. Nesse sentido, a modelagem matemática pode contribuir para atribuir significado à Matemática escolar ao vinculá-la a problemas reais e socialmente relevantes, conforme destaca Bassanezi (2002).

Diante desse cenário, esta dissertação propõe uma abordagem interdisciplinar entre Matemática e Geografia, com foco na modelagem do crescimento populacional a partir de dados reais e na análise crítica de teorias demográficas. Além do desenvolvimento conceitual e matemático, o trabalho também explora possibilidades pedagógicas para o uso da modelagem no Ensino Médio, priorizando práticas que favoreçam aprendizagens com sentido e relacionadas à realidade social dos estudantes.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentam-se fundamentos do crescimento populacional e as principais teorias demográficas, articulando-as com noções iniciais de modelagem. No Capítulo 2, discutem-se equações diferenciais e modelos clássicos aplicados ao crescimento populacional, evidenciando hipóteses, limitações e interpretações. No Capítulo 3, são descritos os procedimentos de seleção de dados e de ajuste dos modelos, bem como possibilidades de integração didática do tema. O Capítulo 4 amplia a discussão para o panorama do crescimento populacional mundial sob a ótica da

modelagem, destacando tendências e desafios contemporâneos. Na sequência, apresentam-se o Roteiro de atividades (aluno) (Capítulo 5) e o Guia docente, com o produto educacional (Capítulo 6). Por fim, o Capítulo 7 reúne as considerações finais e encaminhamentos para pesquisas futuras.

# 1 O Crescimento Populacional e as Teorias Demográficas.

O crescimento populacional é um dos principais vetores de transformação social e espacial. Sua análise exige uma abordagem que considera tanto os aspectos quantitativos quanto qualitativos das dinâmicas demográficas. Segundo Demétrio (2012), "a população não cresce indefinidamente, mas está condicionada a fatores ambientais, econômicos e sociais que afetam diretamente seu comportamento ao longo do tempo".

Nesse sentido, a Geografia contribui para a compreensão das relações entre população e espaço, ao passo que a Matemática permite quantificar essas mudanças e prever possíveis cenários futuros, tornando possível um planejamento mais eficaz das políticas públicas.

## 1.1 Teorias Demográficas: Malthus, Neomalthusianismo e Transição Demográfica

A primeira grande teoria sobre o crescimento populacional foi proposta por Thomas Malthus (1798), que afirmava que a população crescia em progressão geométrica, enquanto os recursos alimentares em progressão aritmética. Para ele, a escassez de recursos inevitavelmente levaria à fome, guerras e epidemias. Como destacou Malthus:

"A capacidade de crescimento da população é infinitamente maior do que a capacidade da Terra de produzir subsistência para o homem". (MALTHUS, 1798)

Mais tarde, os neomalthusianos retomaram essa preocupação, enfatizando a necessidade de controle da natalidade como forma de mitigar os efeitos da superpopulação, principalmente nos países em desenvolvimento (NAVARRO, 2014).

Em contraposição, a teoria da transição demográfica propõe uma interpretação baseada em fases, nas quais o crescimento populacional passa por diferentes estágios à medida que ocorrem mudanças socioeconômicas. Segundo (MONTEIRO; OLIVEIRA, 2004), "a transição demográfica é um processo histórico associado à modernização das sociedades, com profundas implicações para a estrutura etária e as políticas públicas".

## 1.2 Modelagem Matemática do Crescimento Populacional

A modelagem matemática permite descrever o crescimento populacional de forma sistemática, relacionando hipóteses demográficas a expressões quantitativas. Nesta seção, apresentam-se, em caráter introdutório, dois modelos clássicos — exponencial e logístico — que serão retomados e fundamentados por meio de equações diferenciais no Capítulo 2.

### 1.2.1 Taxa de crescimento e taxa relativa de crescimento

Como a população  $P$  varia ao longo do tempo, pode-se considerá-la como uma função temporal, isto é,  $P = P(t)$ . Nesse contexto, é importante distinguir diferentes noções de crescimento populacional, pois, embora relacionadas, elas não são equivalentes.

Em um primeiro sentido, a **taxa média de crescimento** em um intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  é dada pela razão entre a variação da população e a variação do tempo, ou seja,

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Essa quantidade mede o crescimento absoluto médio da população por unidade de tempo.

Por exemplo, se uma população passa de 10 000 para 14 000 habitantes em 4 anos, então sua taxa média de crescimento é

$$\frac{14\,000 - 10\,000}{4} = 1\,000 \text{ habitantes por ano.}$$

Nesse caso, trata-se de uma medida **absoluta**, expressa em habitantes por ano.

Por outro lado, muitas vezes é mais informativo analisar o crescimento em relação ao tamanho inicial da própria população. Surge, assim, a **taxa relativa de crescimento**, definida no intervalo  $[t_1, t_2]$  por

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{P(t_1)}.$$

No exemplo anterior, obtém-se

$$\frac{14\,000 - 10\,000}{10\,000} = 0,4,$$

isto é, um crescimento relativo de 40% ao longo de 4 anos.

Se for desejável expressar esse crescimento em termos de uma taxa anual equivalente, pode-se determinar  $i$  por meio da relação

$$(1 + i)^4 = 1,4,$$

de onde segue que

$$i = 1,4^{1/4} - 1 \approx 0,0878,$$

ou seja, aproximadamente 8,78% ao ano.

Além da distinção entre crescimento absoluto e relativo, também é importante diferenciar a noção de **taxa média** da de **taxa instantânea**. Enquanto a taxa média é calculada em um intervalo de tempo, a taxa instantânea descreve a rapidez de variação da população em um instante específico. No contexto do cálculo diferencial, essa taxa é dada pela derivada

$$P'(t) = \frac{dP}{dt}.$$

A partir dela, define-se a **taxa relativa instantânea de crescimento** por

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP}{dt},$$

que representa o crescimento da população por unidade de tempo relativamente ao seu tamanho no instante considerado. Em muitos modelos demográficos, essa é a quantidade mais significativa, pois permite comparar populações de tamanhos diferentes em bases proporcionais.

No **modelo exponencial**, assume-se que a taxa relativa instantânea de crescimento é constante. Isto é,

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = r,$$

em que  $r$  é uma constante. Equivalentemente, pode-se escrever

$$\frac{dP}{dt} = rP.$$

Essa equação mostra que a taxa de crescimento absoluta  $\frac{dP}{dt}$  é proporcional à população existente: quanto maior a população, maior tende a ser o acréscimo absoluto por unidade de tempo. Assim, no modelo exponencial, a grandeza constante não é o crescimento absoluto, mas sim a **taxa relativa instantânea de crescimento**.

Desse modo, para evitar ambiguidades terminológicas, convém reservar a expressão **taxa de crescimento** para a variação absoluta da população no tempo, e utilizar **taxa relativa de crescimento** ou **taxa intrínseca de crescimento** para a razão entre essa variação e o tamanho da população. Essa distinção é especialmente importante em modelagem matemática, pois a equação diferencial do modelo exponencial envolve precisamente a taxa relativa instantânea.

### 1.2.2 Modelo Exponencial

Assume-se uma taxa intrínseca de crescimento constante, adequada para descrever populações em condições ideais e/ou em fases iniciais de crescimento e pode ser descrita pela equação:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt} \quad (1.1)$$

onde  $P(t)$  é a população no tempo,  $P_0$  é a população inicial,  $r$  é a taxa intrínseca de crescimento,  $e$  é a base do logaritmo natural, e  $t$  o tempo em anos. O modelo exponencial pressupõe que a taxa de crescimento é proporcional à população existente. Essa característica gera um crescimento acelerado ao longo do tempo, como ilustrado na figura abaixo:

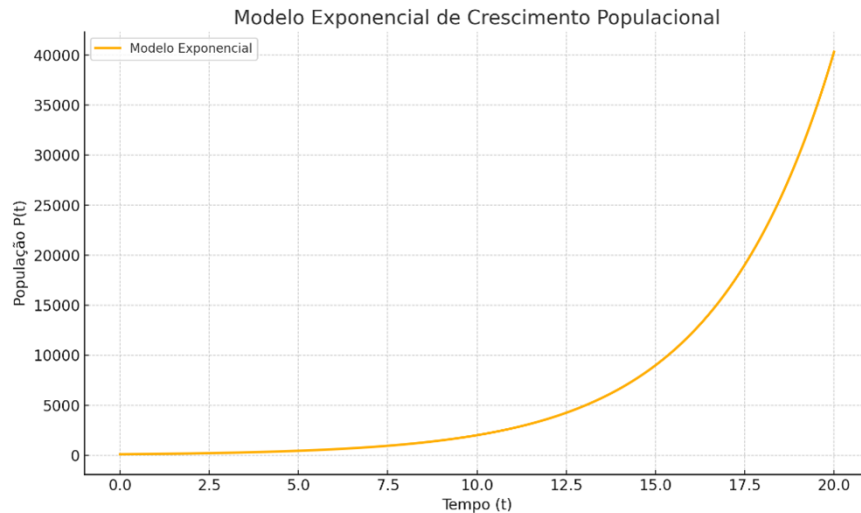


Figura 1 – Modelo de Crescimento Populacional Exponencial

Do ponto de vista matemático, esse modelo está diretamente relacionado à função exponencial estudada na Educação Básica. De fato, quando o tempo é considerado em intervalos discretos e a população cresce sempre por uma mesma taxa percentual, a sequência dos valores populacionais forma uma progressão geométrica (PG). Já quando o tempo é tratado como variável contínua, essa mesma ideia de crescimento multiplicativo é descrita por uma função exponencial, dada por  $P(t) = P_0 e^{rt}$ . Assim, a PG pode ser vista como uma versão discreta do crescimento exponencial, enquanto a função exponencial representa sua formulação contínua.

Esse modelo está relacionado à visão malthusiana e serve como ponto de partida para análises mais realistas. Como explica (BASSANEZI, 2002), "o modelo exponencial é adequado para representar o início do crescimento de uma população, mas precisa ser ajustado para comportar as limitações reais do ambiente".

### 1.2.3 Modelo Logístico

Este modelo incorpora a limitação ambiental por meio da capacidade de suporte ( $K$ ), representando um crescimento que desacelera à medida que  $P(t)$  se aproxima de  $K$ . A equação é dada por:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) \cdot e^{-rt}} \quad (1.2)$$

Esse modelo é atribuído a Pierre Verhulst (1845), que o propôs para corrigir o crescimento ilimitado do modelo exponencial. Segundo (OLIVEIRA, 2019), “o modelo logístico é mais apropriado para representar populações reais, que tendem à estabilização à medida que os recursos se tornam escassos”. Esse modelo apresenta uma taxa de crescimento que diminui à medida que a população se aproxima de um limite máximo  $K$ . A seguir, apresenta-se o comportamento gráfico do modelo logístico:



Figura 2 – Modelo de Crescimento Populacional Logístico

### 1.3 Tendências Contemporâneas e desafios do Crescimento Populacional

A dinâmica demográfica contemporânea constitui um dos eixos centrais para compreender transformações sociais, econômicas e ambientais em escala global. Em pouco mais de dois séculos, a população mundial passou por forte aceleração, impulsionada por avanços sanitários, ampliação do acesso a serviços de saúde, redução da mortalidade infantil e aumento da expectativa de vida. Ao mesmo tempo, as projeções indicam desaceleração do crescimento nas próximas décadas, com tendência de estabilização ao longo da segunda metade do século, embora esse processo ocorra de modo heterogêneo entre regiões e países (ONU, 2022).

As assimetrias regionais evidenciam que a dinâmica populacional está vinculada a fatores históricos, culturais e socioeconômicos. Em diversas economias de alta renda,

observa-se queda sustentada da fecundidade e envelhecimento populacional, com impactos sobre a composição etária, a força de trabalho e sistemas de proteção social. Em contraste, regiões que ainda apresentam elevadas taxas de fecundidade enfrentam pressões mais imediatas sobre oferta de serviços básicos, geração de emprego, infraestrutura urbana e garantia de direitos sociais, especialmente em contextos marcados por desigualdades estruturais.

Além das dimensões socioeconômicas, os desafios ambientais tornam-se mais complexos à medida que cresce a demanda por alimentos, energia, água e habitação, exigindo planejamento e governança orientados pela sustentabilidade. Nesse cenário, a urbanização ocupa lugar central: atualmente, mais da metade da população mundial vive em áreas urbanas, e a proporção tende a aumentar nas próximas décadas, alcançando cerca de 7 em cada 10 habitantes até 2050 (ONU, 2018). O avanço urbano, quando desordenado, amplia desigualdades socioespaciais e pressiona sistemas de mobilidade, saneamento e moradia; por outro lado, cidades bem planejadas podem favorecer eficiência de serviços, inclusão social e redução de impactos ambientais.

Enfrentar tais desafios requer políticas públicas integradas — planejamento urbano, gestão ambiental, justiça social e ampliação de oportunidades — em consonância com a Agenda 2030 e seus Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, especialmente aqueles relacionados a saúde, educação, igualdade de gênero, cidades sustentáveis e ação climática (ONU, 2015). No contexto educacional, a discussão sobre crescimento populacional ganha relevância quando articulada à leitura geográfica do território e ao uso da modelagem matemática, permitindo que estudantes interpretem dados reais, comparem cenários e avaliem criticamente decisões públicas e coletivas. Assim, a temática demográfica não se restringe à descrição de tendências, mas se torna um campo fértil para promover análise crítica, argumentação e aprendizagem interdisciplinar, preparando o terreno para os modelos matemáticos desenvolvidos nos capítulos seguintes.

Para lidar com esses desafios, torna-se fundamental a formulação de políticas públicas que articulem planejamento urbano, gestão ambiental, acesso equitativo a recursos e promoção de justiça social. Essas políticas precisam estar alinhadas com os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Agenda 2030 da ONU, em especial aqueles que tratam de saúde (ODS 3), educação de qualidade (ODS 4), igualdade de gênero (ODS 5), cidades sustentáveis (ODS 11) e ação contra a mudança global do clima (ODS 13).

No contexto educacional a abordagem do crescimento populacional, associada ao uso da modelagem matemática e à leitura geográfica dos espaços, permite aos estudantes compreenderem os impactos reais das dinâmicas demográficas sobre suas vidas e comunidades. Essa compreensão vai além da simples leitura de gráficos ou cálculos de crescimento: ela forma cidadãos capazes de interpretar fenômenos complexos, avaliar políticas públicas e refletir sobre seus próprios papéis na construção de um futuro mais justo e sustentável.

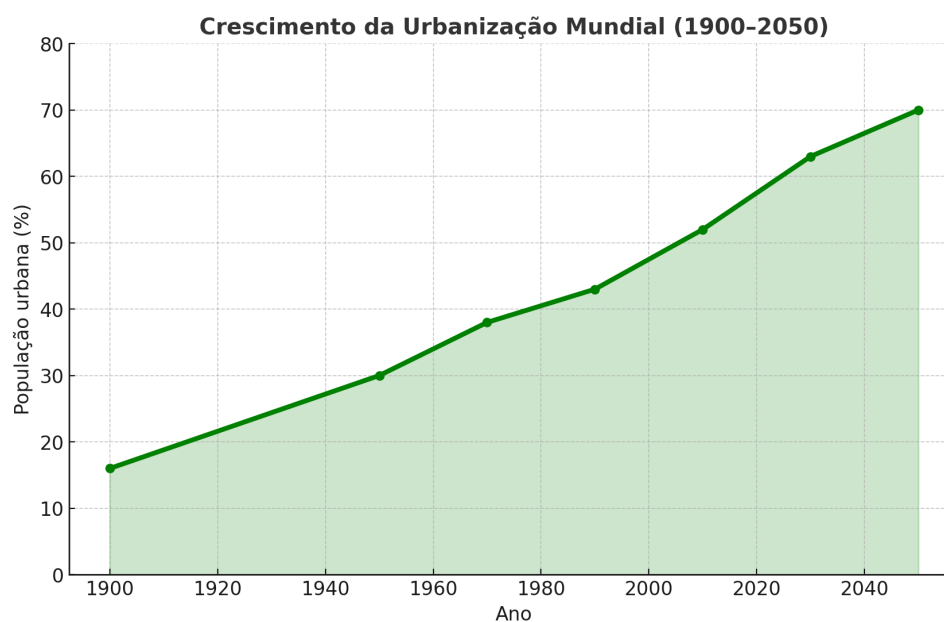


Figura 3 – Urbanização da População Mundial

Como ressalta o biólogo Paul Ehrlich, em sua seminal obra "The Population Bomb" (1968), o crescimento populacional exponencial configura-se como um processo na iminência de gerar graves rupturas, com potenciais impactos devastadores sobre a disponibilidade e a sustentabilidade dos recursos naturais e a capacidade de sustentação do planeta, demandando ações urgentes em educação para promover o planejamento familiar e a conscientização ambiental. Essa perspectiva científica reforça a importância de integrar discussões sobre demografia nos currículos educacionais, não apenas como dados estatísticos, mas como ferramentas para fomentar o pensamento crítico sobre consumo e sustentabilidade. O estatístico e educador Hans Rosling, em suas análises sobre tendências demográficas globais, argumenta que o pico populacional pode ser gerenciado de forma positiva ao elevar o padrão de vida dos mais pobres, por meio de investimentos em saúde e educação, especialmente para mulheres, o que naturalmente reduz as taxas de fecundidade e promove um equilíbrio mais equitativo. Assim, a educação emerge como um vetor transformador, capaz de mitigar os desafios contemporâneos do crescimento populacional ao empoderar indivíduos para decisões informadas.

No âmbito pedagógico, o educador Paulo Freire defende uma educação libertadora que posicione o ser humano em uma nova postura diante dos problemas de seu tempo e espaço, o que se alinha perfeitamente à educação ambiental crítica necessária para enfrentar as dinâmicas demográficas. Segundo Freire, o processo educativo deve ser dialógico e prático, incentivando a reflexão sobre questões como o envelhecimento populacional e a urbanização, para formar cidadãos ativos na construção de sociedades sustentáveis. Essa abordagem interdisciplinar, inspirada em Freire, pode ser complementada pelas visões de cientistas como William Rees, criador do conceito de pegada ecológica, que alerta para os limites

biofísicos impostos pelo crescimento demográfico e econômico, exigindo uma educação que priorize a justiça intergeracional e a redução do consumismo. Dessa forma, ao incorporar essas perspectivas na sala de aula, a educação não apenas informa, mas transforma, preparando as novas gerações para os desafios multifacetados do crescimento populacional global.

## 2 Equações Diferenciais

As equações diferenciais configuram um dos principais ramos da matemática aplicada, desempenhando um papel central em diversos processos de modelagem de fenômenos naturais e sociais. Dentre suas múltiplas aplicações, destacam-se especialmente os modelos que buscam descrever o crescimento de populações. A utilização de equações diferenciais nesse contexto permite representar a dinâmica populacional de forma quantitativa, possibilitando a realização de inferências sobre tendências futuras e o embasamento de ações de planejamento estratégico.

Com o avanço das pesquisas e o desenvolvimento tecnológico, esses modelos vêm sendo continuamente refinados, oferecendo descrições cada vez mais precisas dos comportamentos populacionais. A incorporação de recursos computacionais, em particular, tem potencializado a capacidade de simular cenários complexos e de ajustar os modelos matemáticos a dados reais com maior precisão, tornando a análise populacional uma ferramenta cada vez mais indispensável para diversas áreas do conhecimento.

Sugerimos ao leitor que, antes de avançar para a discussão de modelos populacionais baseados em equações diferenciais e suas soluções numéricas, consolide os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. Em particular, os conceitos de limite, continuidade, derivada e integral são indispensáveis para compreender (i) o significado geométrico e analítico das taxas de variação, (ii) a interpretação de derivadas como “velocidade de crescimento” de uma grandeza ao longo do tempo e (iii) a reconstrução de uma função a partir de sua taxa de variação por meio de integrais. Além disso, resultados centrais como o Teorema do Valor Médio e o Teorema Fundamental do Cálculo oferecem a base teórica para justificar aproximações, estimativas e procedimentos numéricos frequentemente empregados na modelagem.

No contexto específico desta pesquisa, tais noções permitem interpretar com clareza os termos presentes nas equações diferenciais (por exemplo, a taxa de crescimento proporcional ao tamanho populacional em modelos exponenciais, ou a taxa limitada por fatores ambientais em modelos logísticos), bem como compreender como condições iniciais determinam trajetórias e previsões. Do ponto de vista computacional, uma formação sólida em Cálculo também facilita a leitura de métodos de discretização e integração numérica (como métodos de Euler e Runge–Kutta), pois esses procedimentos se apoiam diretamente em ideias de variação infinitesimal e aproximação por incrementos. Assim, a revisão desses conteúdos torna-se um passo importante para que o leitor acompanhe, com maior rigor e autonomia, as etapas de formulação, ajuste e interpretação dos modelos apresentados.

Para esse aprofundamento, recomendamos a consulta a obras clássicas e ampla-

mente utilizadas em cursos de graduação, como Stewart, Cálculo; Thomas, Cálculo; Anton, Cálculo; Leithold, O Cálculo; e Guidorizzi, Um Curso de Cálculo. Para uma abordagem mais teórica e demonstrativa, especialmente útil quando se deseja maior rigor conceitual, indicamos Apostol, Calculus, e Spivak, Calculus.

## 2.1 Modelo Exponencial de Crescimento Populacional

Thomas Robert Malthus foi um dos primeiros estudiosos a propor uma formulação matemática para o crescimento da população mundial. Em sua obra publicada em 1798, ele sugeriu que a taxa de crescimento populacional, em determinado momento, seria diretamente proporcional ao tamanho da população naquele instante. Ou seja, quanto maior a população, maior seria sua taxa de crescimento. Seu modelo não considera fatores limitantes, como escassez de recursos ou mudanças ambientais, assumindo que todos os indivíduos se comportam de maneira uniforme.

Nesse sentido, é possível estabelecer uma aproximação didática com conteúdos já trabalhados no Ensino Médio: mesmo sem formalizar o conceito de derivada, a ideia de taxa de variação pode ser observada e interpretada de modo geométrico a partir do comportamento de funções em gráficos. Quando analisamos o crescimento de uma grandeza ao longo do tempo, comparamos variações em intervalos pequenos e interpretamos a inclinação da reta que “acompanha” o gráfico naquele trecho. Essa inclinação está diretamente associada ao coeficiente angular (inclinação) de retas secantes e, por aproximação, ao da reta tangente. Assim, a noção intuitiva de limite surge como o processo de considerar intervalos cada vez menores, permitindo compreender a derivada como uma medida local da variação — exatamente a interpretação necessária para ler modelos como o de Malthus, em que a taxa de crescimento, em cada instante, depende do tamanho da população.

Segundo (MALTHUS, 1798), enquanto os meios de subsistência cresceriam de forma aritmética, a população aumentaria segundo uma progressão geométrica, o que levaria inevitavelmente a desequilíbrios. Essa formulação é representada por uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dP}{dt} = \beta P(t) \quad (2.1)$$

Com condição inicial  $P(0) = P_0$ , em que  $P(t)$  representa a população no tempo  $t$ ,  $P_0$  é a população inicial e  $\beta$  é a taxa de crescimento intrínseca da população. A solução dessa equação é obtida da seguinte maneira:

Separando os termos que envolvem  $P$  e  $t$ :

$$\frac{dP}{P} = \beta dt \quad (2.2)$$

Agora integramos os dois lados da equação:

$$\int \frac{1}{P} dP = \int \beta dt \Rightarrow \ln |P| = \beta t + C \quad (2.3)$$

Como  $P(t)$  representa população e é positiva, podemos remover o valor absoluto:

$$\ln P = \beta t + C, \quad (2.4)$$

Como a função exponencial é a inversa da função logarítmica, obtemos:

$$P(t) = e^{\beta t + C} = e^C \cdot e^{\beta t} \quad (2.5)$$

Utilizando a condição inicial  $e^C = P_0$  temos a solução geral da equação:  $P(t) = P_0 e^{\beta t}$ , (2.6)

caracterizando um crescimento exponencial ao longo do tempo. Embora o modelo de Malthus seja frequentemente criticado por sua simplicidade e por não considerar fatores socioeconômicos ou ambientais, ele é de grande importância histórica. Sua formulação abriu caminho para o desenvolvimento de modelos mais sofisticados e realistas, tornando-se um marco na modelagem matemática de fenômenos populacionais.

Vamos aplicar o modelo exponencial para estimar o crescimento populacional da Etiópia, país que, segundo o Banco Mundial, tinha aproximadamente 120 milhões de habitantes em 2022. Suponhamos, com base em dados históricos, que a taxa média anual de crescimento populacional da Etiópia nos últimos anos seja de 2,5% ao ano, com base em estimativas da ONU (ou seja,  $\beta = 0,025$ ). Qual será a população Etíope no ano de 2032?

**Resolução:** Vamos aplicar a equação de Malthus, ou seja,

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}, \quad (2.7)$$

temos que:

- População inicial:  $P_0 = 120$  milhões de habitantes
- Taxa de crescimento:  $\beta = 0,025$
- Período:  $t = 10$  anos

Substituindo os valores dados temos:

$$P(10) = 120 \cdot e^{0,025 \cdot 10} \Rightarrow 120 \cdot e^{0,25} \quad (2.8)$$

$$P(10) = 120 \cdot 1,284025 \dots \Rightarrow P(10) \approx 154,08 \text{ milhões de habitantes.} \quad (2.9)$$

Representando graficamente esse problema obtemos:

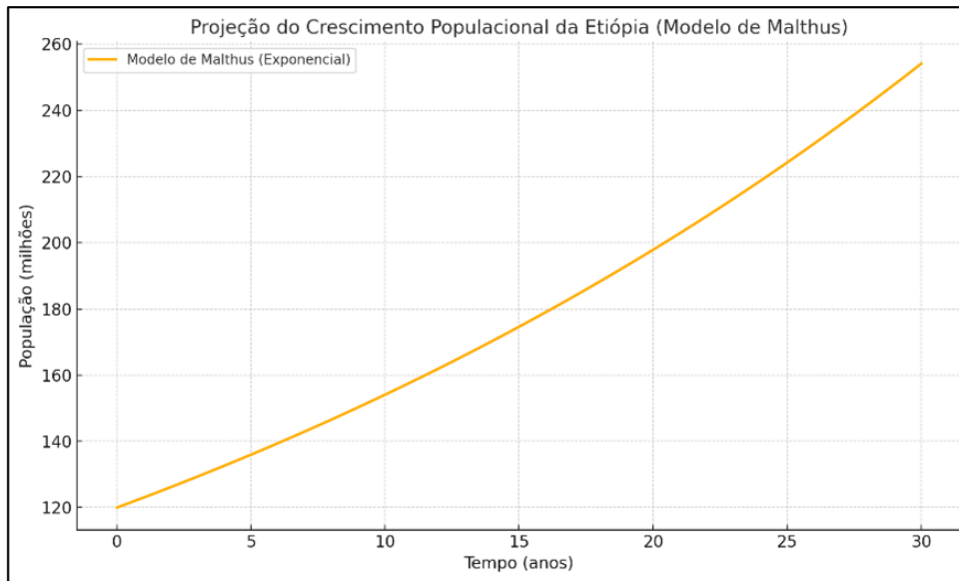


Figura 4 – Projeção Modelo de Malthus para Etiópia

## 2.2 Modelo Logístico ou Modelo de Verhulst

Com o avanço das ciências naturais e sociais, percebeu-se que o modelo proposto por Malthus, embora pioneiro, apresentava limitações importantes. Isso porque ele desconsiderava fatores ambientais e sociais que afetam diretamente a taxa de crescimento de uma população. Em resposta a essas limitações, o matemático belga Pierre François Verhulst propôs, em 1837, um modelo mais realista, conhecido como modelo logístico.

Esse modelo parte da ideia de que o crescimento populacional, inicialmente rápido, tende a desacelerar à medida que a população se aproxima de um limite máximo sustentável, denominado capacidade de suporte  $K$ . Esse limite representa a quantidade máxima de indivíduos que o meio ambiente pode sustentar, considerando recursos como alimento, espaço e condições sanitárias. O modelo logístico é, portanto, uma evolução do modelo exponencial, pois considera que a taxa de crescimento não é constante, mas decrescente ao longo do tempo.

A equação diferencial que descreve esse modelo é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{K}\right) P \quad (2.10)$$

em que:

- $P(t)$  representa a população no tempo  $t$ ,

- $r$  é a taxa intrínseca de crescimento,
- $K$  é a capacidade máxima de população que o ambiente comporta.

Essa equação é uma equação de variáveis separáveis. Podemos resolvê-la da seguinte forma, inicialmente vamos separar as variáveis:

$$\frac{dP}{P(1 - \frac{P}{K})} = r dt \Rightarrow \frac{K}{P(K - P)} dP = r dt \quad (2.11)$$

Dessa forma obtemos as seguintes frações parciais:

$$\frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \quad (2.12)$$

E fazendo a integração:

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \int r dt \Rightarrow \ln \left( \frac{P}{K - P} \right) = rt + C \quad (2.13)$$

Isolando  $P(t)$ :

$$\frac{P}{K - P} = C_1 e^{rt} \Rightarrow P(t) = \frac{C_1 K e^{rt}}{1 + C_1 e^{rt}} \quad (2.14)$$

Aplicação da condição inicial  $P(0) = P_0$  obtemos:

$$P(0) = \frac{C_1 K}{1 + C_1} = P_0 \Rightarrow C_1 = \frac{P_0}{K - P_0} \quad (2.15)$$

Substituindo  $C_1$  na solução obtemos a equação logística de Verhulst:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K - P_0}{P_0} \right) e^{-rt}} \quad (2.16)$$

O modelo logístico apresenta duas soluções de equilíbrio:  $P = 0$ , que representa a extinção populacional, e  $P = K$ , que representa a estabilização da população em um patamar sustentável. Diferentemente do modelo de Malthus, que prevê crescimento ilimitado, o modelo de Verhulst descreve uma população que cresce rapidamente no início, mas que desacelera à medida que se aproxima do limite imposto pelo meio ambiente.

**Exemplo:** Vamos aplicar o modelo logístico ao caso do Paquistão, um país cuja população estimada em 2022 era de aproximadamente 231 milhões de habitantes. Consideraremos:

- *População inicial:*  $P_0 = 231$  milhões

- Capacidade de suporte estimada:  $K = 350$  milhões
- Taxa de crescimento:  $r = 0,02$  (ou seja, 2% ao ano)
- Período de projeção: 30 anos

Conforme demonstrado na Equação de Verhulst (2.14):

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

Substituindo os valores  $K = 350$ ,  $P_0 = 231$ ,  $r = 0,02$  e  $t = 30$ :

$$P(30) = \frac{350}{1 + \left(\frac{350-231}{231}\right) e^{-0,02 \cdot 30}}$$

$$P(30) = \frac{350}{1 + \left(\frac{119}{231}\right) e^{-0,6}}$$

$$P(30) = \frac{350}{1 + (0,5151)(0,5488)}$$

$$P(30) = \frac{350}{1 + 0,2827}$$

$$P(30) = \frac{350}{1,2827}$$

$$P(30) \approx 272,86 \text{ milhões.}$$

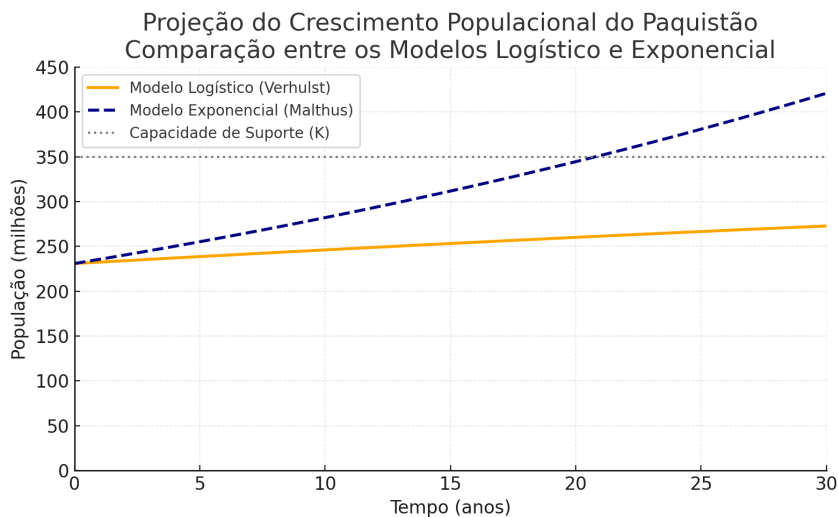


Figura 5 – Projeção do Modelo Logístico do Paquistão

Segundo o modelo logístico, a população do Paquistão continuará crescendo, mas em ritmo desacelerado. Em 30 anos, a população chegaria a aproximadamente 273 milhões, se aproximando gradualmente da capacidade de suporte de 350 milhões. Diferente do modelo de Malthus, que prevê crescimento ilimitado, o modelo logístico prevê uma estabilização natural da população.

A análise gráfica evidencia as diferenças fundamentais entre os modelos de crescimento populacional propostos por Malthus e Verhulst. Enquanto o modelo de Malthus assume um crescimento ilimitado e constante da população, resultando numa curva exponencial ascendente, o modelo de Verhulst introduz a ideia de limites ambientais, refletidos na capacidade de suporte  $K$ . Essa inclusão leva a um comportamento mais realista, no qual o crescimento é inicialmente rápido, mas se desacelera gradualmente à medida que a população se aproxima de  $K$ , até estabilizar-se.

No caso específico do Paquistão, observa-se que, segundo o modelo exponencial, a população ultrapassaria facilmente os 400 milhões de habitantes em 30 anos. Já o modelo logístico projeta um crescimento mais moderado, convergindo para aproximadamente 273 milhões nesse mesmo período, respeitando a capacidade máxima estimada do ambiente. Assim, o modelo logístico apresenta-se como uma ferramenta mais adequada para análises de longo prazo, pois considera restrições naturais e econômicas ao crescimento populacional.

## 2.3 Modelo de Gompertz

Outro modelo amplamente utilizado nas ciências biológicas para descrever processos de crescimento populacional é o modelo de Gompertz, proposto em 1825. Diferentemente dos modelos de Malthus e Verhulst, que consideram uma taxa de crescimento constante ou linearmente decrescente, o modelo de Gompertz pressupõe que a taxa de crescimento diminui de forma logarítmica à medida que a população se aproxima de seu limite superior.

Esse modelo é especialmente sensível ao comportamento inicial do crescimento: ele prevê que a taxa de aumento populacional é mais acentuada no início e desacelera progressivamente com o tempo, resultando em um crescimento mais lento à medida que a população se aproxima de um valor máximo. A equação diferencial que expressa o modelo de Gompertz é:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) \quad (2.17)$$

onde:

- $P(t)$  representa a população no tempo  $t$ ,
- $\lambda$  é a taxa de crescimento relativa quando  $P$  é pequena,

- $P_\infty$  é o valor limite (assintótico) da população.

Assim como o modelo de Verhulst, o modelo de Gompertz apresenta um comportamento assintótico, aproximando-se gradualmente do valor de equilíbrio sem ultrapassá-lo. A análise dos pontos de equilíbrio mostra que o crescimento populacional tende a zero e se estabiliza à medida que  $P \rightarrow P_\infty$ .

Além disso, a equação da segunda derivada de  $P(t)$  permite identificar o ponto de inflexão da curva, isto é, o momento em que o crescimento deixa de ser acelerado para tornar-se desacelerado:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda^2 P \ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) \left(\ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) - 1\right) \quad (2.18)$$

Esse ponto de inflexão ocorre quando:

$$P_m = \frac{P_\infty}{e} \quad (2.19)$$

onde  $P_m$  é a população no ponto de inflexão, e  $e$  é o número de Euler. Isso indica que a máxima taxa de crescimento ocorre quando a população atinge aproximadamente 36,8% de seu valor limite

Partindo da equação diferencial do modelo de Gompertz,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right),$$

deriva-se novamente em relação ao tempo. Definindo  $L(t) = \ln\left(\frac{P_\infty}{P(t)}\right)$ , tem-se  $P'(t) = \lambda P(t)L(t)$  e, pela regra do produto,

$$P''(t) = \lambda(P'(t)L(t) + P(t)L'(t)).$$

Como  $L(t) = \ln(P_\infty) - \ln(P(t))$ , segue que  $L'(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}$ . Assim,

$$P''(t) = \lambda(P'L - P') = \lambda P'(L - 1).$$

Substituindo  $P' = \lambda PL$ , obtém-se

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda^2 P \ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) \left(\ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) - 1\right).$$

O ponto de inflexão ocorre quando  $P''(t) = 0$ . Como  $\lambda^2 > 0$  e  $P > 0$ , tem-se  $\ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) = 1$ , o que implica

$$P_m = \frac{P_\infty}{e}.$$

Logo, a máxima taxa de crescimento ocorre quando a população atinge aproximadamente  $1/e \approx 0,368$  do valor limite  $P_\infty$ .

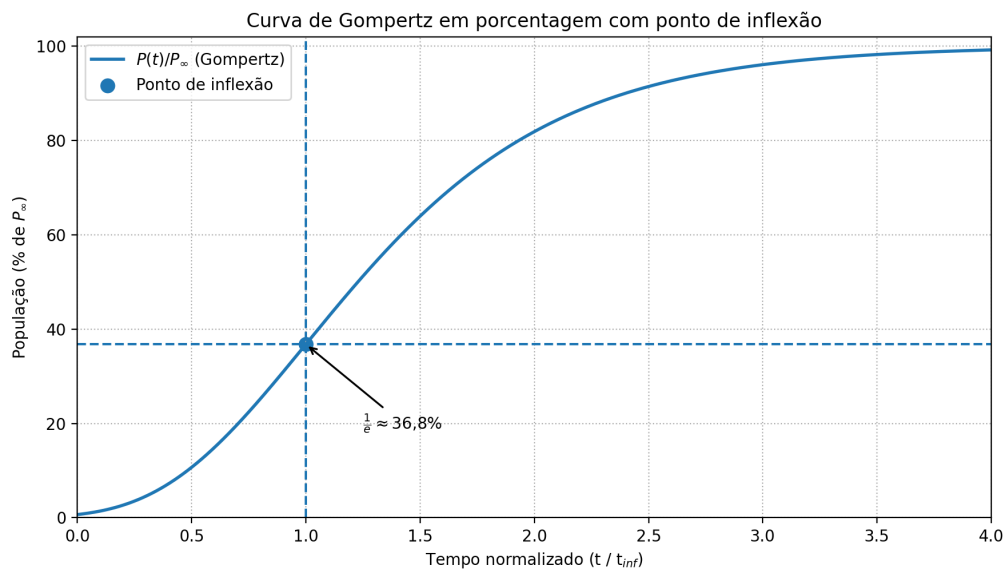


Figura 6 – Curva de Gompertz em porcentagem do valor limite, com destaque para o ponto de inflexão.

O modelo de Gompertz, embora menos utilizado em contextos demográficos puros, é especialmente eficaz na modelagem de dados biológicos, como crescimento de tumores ou mortalidade humana. No final do século XIX, Gompertz analisou tabelas de vida de diversos países europeus e observou que o aumento da idade estava relacionado a uma taxa de mortalidade crescente em ritmo exponencial. Enquanto Malthus centrava sua análise na fertilidade, Gompertz buscava descrever um padrão geral para o envelhecimento e mortalidade da população.

“Os modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz, embora distintos em suas formulações matemáticas, compartilham o objetivo comum de descrever o crescimento de populações. O modelo malthusiano pressupõe crescimento ilimitado e proporcional à população existente, o logístico introduz um limite ambiental que desacelera o crescimento à medida que a população se aproxima da capacidade de suporte, e o modelo de Gompertz sugere uma desaceleração mais precoce, com base em uma taxa de crescimento decrescente de forma logarítmica. Juntos, esses modelos representam diferentes níveis de sofisticação na tentativa de compreender e prever dinâmicas populacionais.” (MURRAY, 2002)

**E como podemos estimar a capacidade de suporte do ambiente ( $K$ ) a partir dos dados populacionais e do modelo de Gompertz?**

O ponto de inflexão ocorre quando  $P''(t) = 0$ . Como  $\lambda^2 > 0$  e  $P(t) > 0$ , a condição relevante é

$$\ln\left(\frac{K}{P}\right) - 1 = 0 \implies \ln\left(\frac{K}{P}\right) = 1 \implies \frac{K}{P} = e \implies P_m = \frac{K}{e}.$$

Portanto, a partir do valor da população no ponto de inflexão  $P_m$ , obtém-se

$$K = e P_m.$$

**Exemplo:** Vamos aplicar o modelo de Gompertz ao caso da Alemanha, cuja população estimada em 2022 era de aproximadamente 83 milhões de habitantes.

Consideraremos:

- População inicial:  $P_0 = 83$  milhões
- População limite estimada:  $P_\infty = 90$  milhões
- Taxa de crescimento relativa:  $\lambda = 0,05$
- Período de projeção: 10 anos

**Resolução:**

Calculando  $\frac{P_\infty}{P_0}$  temos

$$\frac{90}{83} \approx 1,0843 \implies \ln(1,0843) \approx 0,0809$$

Calculando agora  $\ln(0,0809) \approx -2,5136$ . Substituindo na equação de Gompertz:

$$P(t) = P_\infty \cdot e^{\left[ -e^{\left( -\lambda t + \ln\left( \ln\left( \frac{P_\infty}{P_0} \right) \right) \right)} \right]}$$

Para  $t = 50$ :

$$P(50) = 90 \cdot e^{\left[ -e^{(-0,05 \cdot 50 + (-2,5136))} \right]}$$

$$P(50) = 90 \cdot e^{\left[ -e^{(-3,016)} \right]}$$

$$P(50) = 90 \cdot e^{-0,0486}$$

$$P(50) = 90 \cdot 0,9526$$

$$P(50) \approx 85,73 \text{ milhões de habitantes}$$

Com base nos parâmetros estimados para a população da Alemanha, foi gerada a curva de crescimento segundo o modelo de Gompertz. A equação utilizada leva em consideração uma taxa de crescimento que decresce logaritmicamente ao longo do tempo, o que representa um comportamento mais realista para populações de países com altas taxas de urbanização e envelhecimento. O gráfico a seguir ilustra a evolução populacional ao longo de 50 anos, mostrando que a população tende a se estabilizar gradualmente, aproximando-se do limite superior estimado de 90 milhões de habitantes.

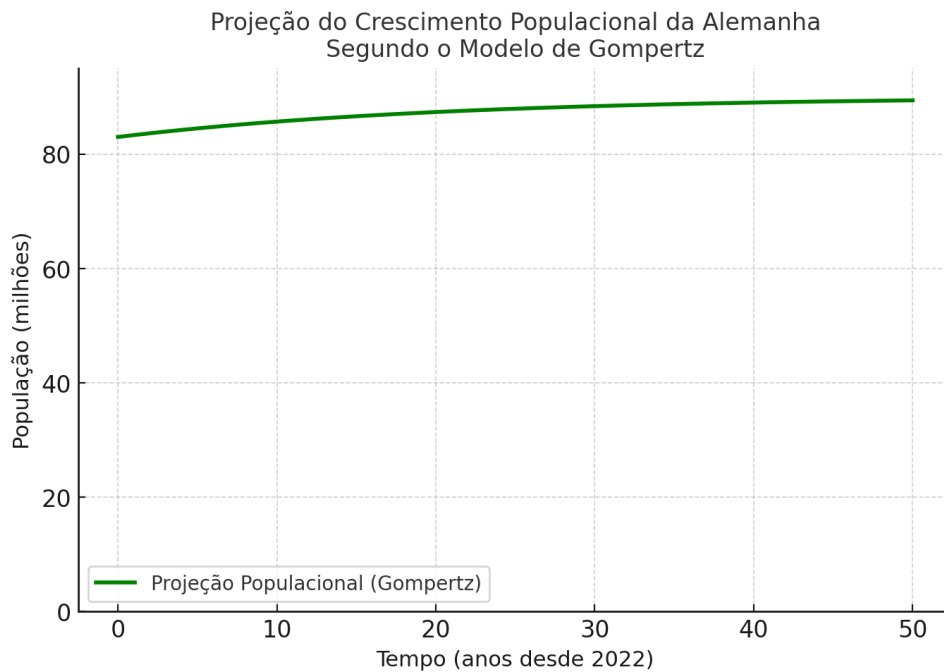


Figura 7 – Modelo de Gompertz para População da Alemanha

## 2.4 Modelo de Montroll

Em 1971, o físico *Elliott Montroll* propôs um modelo matemático geral para descrever o crescimento assintótico de populações, considerando a possibilidade de que o ponto de inflexão da curva, ou seja, o momento em que a taxa de crescimento deixa de aumentar e começa a desacelerar, não precise ocorrer em um ponto fixo, como nos modelos anteriores, mas pode variar entre  $P_0$  e  $P_\infty$ . Este modelo é uma generalização do modelo logístico de *Verhulst* e introduz um novo parâmetro,  $\alpha$ , responsável por deslocar esse ponto de inflexão ao longo da curva.

A equação diferencial do modelo de *Montroll* é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \quad \text{com } \lambda, \alpha > 0 \quad (2.20)$$

Essa equação descreve um crescimento mais flexível do que o previsto por *Verhulst*, pois permite que a intensidade da desaceleração varie conforme o parâmetro  $\alpha$ . Quando  $\alpha = 1$ , o modelo de *Montroll* se reduz ao modelo logístico clássico.

A seguir resolveremos a Equação 2.20, usando o método de separação de variáveis:

$$\frac{dP}{P \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right)} = \lambda dt. \quad (2.21)$$

Aplicando a substituição

$$y = \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \implies \frac{dP}{P} = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{y}. \quad (2.22)$$

Então,

$$\int \frac{dP}{P \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right)} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dy}{y(1-y)}. \quad (2.23)$$

Por frações parciais,

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}. \quad (2.24)$$

Logo,

$$\frac{1}{\alpha} \int \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \frac{1}{\alpha} (\ln |y| - \ln |1-y|) = \lambda t + C. \quad (2.25)$$

Reescrevendo:

$$\ln \left| \frac{y}{1-y} \right| = \alpha \lambda t + C_1. \quad (2.26)$$

Como a Função Exponencial é a função inversa da Função logarítmica, obtemos:

$$\frac{y}{1-y} = C e^{\alpha \lambda t}. \quad (2.27)$$

Isolando  $y$ :

$$y = \frac{C e^{\alpha \lambda t}}{1 + C e^{\alpha \lambda t}} = \frac{1}{1 + A e^{-\alpha \lambda t}}, \quad A = \frac{1}{C}. \quad (2.28)$$

Voltando para  $P$  (pois  $y = (P/P_\infty)^\alpha$ ):

$$\left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha = \frac{1}{1 + A e^{-\alpha \lambda t}} \implies P(t) = P_\infty \left( 1 + A e^{-\alpha \lambda t} \right)^{-1/\alpha}. \quad (2.29)$$

Com condição inicial  $P(0) = P_0$ :

$$P_0 = P_\infty (1 + A)^{-1/\alpha} \implies A = \left( \frac{P_\infty}{P_0} \right)^\alpha - 1. \quad (2.30)$$

Portanto, a solução explícita é

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left[1 + \left(\left(\frac{P_\infty}{P_0}\right)^\alpha - 1\right) e^{-\alpha\lambda t}\right]^{1/\alpha}}. \quad (2.31)$$

Para determinar o ponto de inflexão da curva, basta considerar a segunda derivada no instante em que ela admite valor zero. A equação resultante leva ao seguinte ponto de inflexão  $P_m$ :

$$P_m = P_\infty \left(\frac{1}{\alpha + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.32)$$

Assim, o valor de  $P_m$  depende exclusivamente de  $\alpha$  e do valor limite  $P_\infty$ , permitindo adaptar o modelo a diferentes comportamentos de crescimento com base em dados empíricos.

A partir do valor de  $P_m$  apresentado na Equação 2.32, pode-se determinar o instante  $t_m$  em que ocorre o ponto de inflexão. Para isso, utiliza-se a solução explícita do modelo, dada por

$$P(t) = P_\infty \left(1 + A e^{-\alpha\lambda t}\right)^{-1/\alpha}, \quad (2.33)$$

em que  $A$  é uma constante definida pela condição inicial  $P(0) = P_0$ , isto é,

$$A = \left(\frac{P_\infty}{P_0}\right)^\alpha - 1. \quad (2.34)$$

No ponto de inflexão, vale  $P(t_m) = P_m$ . Substituindo  $t = t_m$  na Equação (2.33) e utilizando a Equação 2.32, obtém-se

$$P_\infty \left(1 + A e^{-\alpha\lambda t_m}\right)^{-1/\alpha} = P_\infty \left(\frac{1}{\alpha + 1}\right)^{1/\alpha}, \quad (2.35)$$

o que implica

$$1 + A e^{-\alpha\lambda t_m} = \alpha + 1 \implies A e^{-\alpha\lambda t_m} = \alpha. \quad (2.36)$$

Assim, o instante do ponto de inflexão é expresso por

$$t_m = \frac{1}{\alpha\lambda} \ln\left(\frac{A}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha\lambda} \ln\left(\frac{\left(\frac{P_\infty}{P_0}\right)^\alpha - 1}{\alpha}\right). \quad (2.37)$$

Com isso, o parâmetro  $\alpha$  assume papel central na interpretação do modelo: além de determinar o valor populacional no ponto de inflexão (Equação 2.32), ele também desloca no tempo o instante  $t_m$  em que ocorre a mudança de concavidade (Equação (2.37)). Em termos práticos, tal dependência permite representar cenários nos quais a desaceleração do crescimento ocorre mais cedo ou mais tarde, conforme o comportamento observado nos dados.

Nesse contexto, como destacam os autores do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – Nordeste 2012, p. 352, o modelo de Montroll apresenta uma vantagem em relação ao modelo de Verhulst, uma vez que possibilita ajustar o ponto de inflexão por meio da escolha de  $\alpha$ , tornando o ajuste mais adequado a fenômenos de naturezas diversas.

Essa flexibilidade torna o modelo de *Montroll* particularmente útil na modelagem de fenômenos populacionais em contextos em que a desaceleração do crescimento ocorre mais cedo ou mais tarde do que o previsto pelos modelos tradicionais.

**Exemplo:** Em 2022, a população de Portugal era estimada em aproximadamente 10,3 milhões de habitantes. Suponha que, com base em estudos demográficos e fatores socioeconômicos, a população tende a estabilizar-se em torno de 11,5 milhões. Admitindo que o crescimento segue o modelo de *Montroll*, cuja equação diferencial em (2.18) é:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right]$$

e considerando os seguintes parâmetros:

- $P_0 = 10,3$  milhões de habitantes
- $\lambda = 0,04$  (taxa de crescimento relativa)
- $\alpha = 2$  (parâmetro do modelo)
- $t = 10$  anos (tempo após 2022)

Calcule a população estimada de Portugal após 10 anos, segundo o modelo de *Montroll*.

**Resolução:** Para resolver essa questão, usamos a solução analítica aproximada do modelo de *Montroll*, Equação 2.31:

$$P(t) = \frac{P_\infty}{[1 + A e^{-\alpha \lambda t}]^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \text{onde } A = \left( \frac{P_\infty}{P_0} \right)^\alpha - 1$$

Substituindo os valores, temos que:

$$A = \left( \frac{11,5}{10,3} \right)^2 - 1 \approx 0,247$$

$$P(10) = \frac{11,5}{[1 + 0,247 \cdot e^{-2 \cdot 0,04 \cdot 10}]^{\frac{1}{2}}}$$

$$P(10) = \frac{11,5}{[1 + 0,247 \cdot e^{-0,8}]^{0,5}}$$

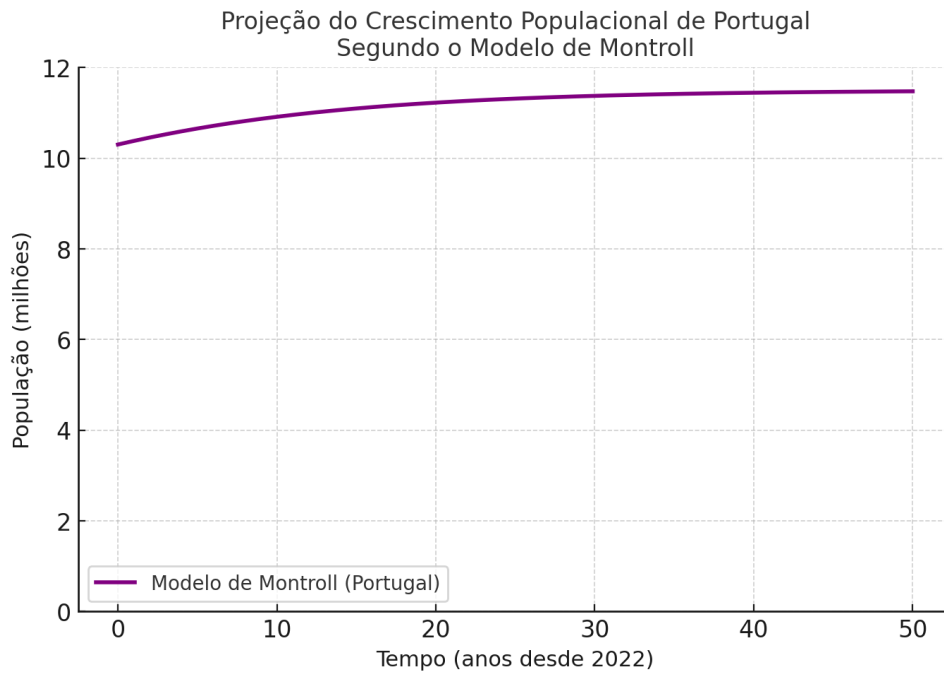


Figura 8 – Modelo de Montroll para População de Portugal

$$P(10) = \frac{11,5}{[1 + 0,247 \cdot 0,4493]^{0,5}}$$

$$P(10) = \frac{11,5}{[1 + 0,111]^{0,5}} \iff P(10) = \frac{11,5}{1,053} \approx 10,93 \text{ milhões}$$

A projeção realizada com o modelo de Montroll indica que, mantendo-se os parâmetros adotados, a população de Portugal crescerá de forma moderada, aproximando-se de seu valor limite ao longo das próximas décadas. O resultado obtido após 10 anos, cerca de 10,93 milhões de habitantes, reflete um crescimento suave e desacelerado, característico desse modelo. O gráfico acima ilustra essa evolução ao longo de 50 anos, evidenciando como o parâmetro  $\alpha = 2$  desloca o ponto de inflexão e permite uma melhor adequação do modelo a populações com crescimento controlado. A curva mostra claramente o comportamento assintótico, aproximando-se de forma contínua do limite superior populacional estimado.

## 2.5 Modelo com Retardo

Em muitas situações reais, o crescimento de uma população não responde instantaneamente às variações no número de indivíduos. Isso ocorre porque fatores como reprodução, migração, mortalidade e esgotamento de recursos costumam apresentar efeitos retardados. Para considerar essa defasagem temporal, utiliza-se o modelo com retardo (ou atraso temporal), que incorpora o valor da população em um instante anterior  $t - \tau$ , onde  $\tau > 0$  representa o tempo de retardo.

A forma mais simples e clássica desse tipo de modelo é dada pela equação diferencial com retardo:

$$\frac{dP(t)}{dt} = r \cdot P(t) \left[ 1 - \frac{P(t - \tau)}{K} \right] \quad (2.38)$$

em que:

- $P(t)$  é a população no instante atual  $t$ ,
- $P(t - \tau)$  é a população no instante passado  $t - \tau$ ,
- $r$  é a taxa de crescimento,
- $K$  é a capacidade de suporte do ambiente,
- $\tau$  é o tempo de retardo.

Esse modelo pode ser visto como uma extensão da equação logística de Verhulst, na qual o impacto da população sobre os recursos (e, portanto, sobre o crescimento) não é imediato, mas ocorre com atraso. Isso torna o modelo com retardo mais adequado para simulações de populações que reagem a condições passadas, como em ciclos reprodutivos sazonais, regimes agrícolas ou mudanças climáticas.

Do ponto de vista dinâmico, a introdução de um retardo pode causar comportamentos oscilatórios e até instabilidades, dependendo do valor de  $\tau$ . Pequenos valores de retardo tendem a manter a estabilidade da solução, mas valores maiores podem levar a flutuações populacionais ou mesmo a ciclos-limite, o que não é observado em modelos logísticos clássicos.

Como destacam (BELAIR; MACKEY, 1986), A introdução de um pequeno atraso no feedback populacional é suficiente para transformar a convergência monótona do modelo logístico em oscilações amortecidas ou sustentadas, dependendo dos parâmetros envolvidos.

Mas qual é a forma completa do problema com retardo?

A formulação completa é a seguinte: Equação Diferencial com Retardo (Modelo Logístico Generalizado):

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = r \cdot P(t) \left[ 1 - \frac{P(t - \tau)}{K} \right], & t > 0 \\ p(t) = \phi t, & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.39)$$

onde,  $\phi(t)$  é a função histórica inicial, definida no intervalo  $[-\tau, 0]$ , por exemplo  $\phi(t) = P_0$  é uma constante.

A seguir analisaremos porque essa equação não tem solução explícita.

Observe que a equação depende da própria função  $P(t)$  em dois momentos diferentes: o atual e o passado. Isso exige que o problema seja resolvido numericamente, usando técnicas específicas, como Método de passos contínuos *Euler*, *Runge-Kutta* adaptados e métodos com interpolação de histórico.

Como funciona o Método numérico de Runge–Kutta?

Em diversos modelos clássicos de crescimento populacional, a dinâmica da população é descrita por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem,

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P), \quad P(t_0) = P_0, \quad (2.40)$$

na qual  $P(t)$  representa a população no instante  $t$  (por exemplo, em anos) e  $f(t, P)$  descreve a taxa de variação populacional, podendo corresponder a modelos como o exponencial, logístico ou Gompertz.

Quando não se dispõe de solução analítica simples, ou quando se deseja obter aproximações numéricas compatíveis com dados discretos (por exemplo, estimativas censitárias por ano ou por década), emprega-se um método numérico para aproximar  $P(t)$  em uma malha de tempos. Seja  $h > 0$  o passo de integração e  $t_{n+1} = t_n + h$ . O método de Runge–Kutta de 4ª ordem (RK4) calcula a aproximação  $P_n \approx P(t_n)$  por meio de quatro avaliações da função  $f$  em pontos internos do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ :

$$k_1 = f(t_n, P_n), \quad (2.41)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (2.42)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (2.43)$$

$$k_4 = f(t_n + h, P_n + h k_3). \quad (2.44)$$

Em seguida, atualiza-se a solução numérica por

$$P_{n+1} = P_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (2.45)$$

Assim, o modelo com retardo oferece uma descrição mais refinada e realista da dinâmica populacional, especialmente em contextos ecológicos e biológicos nos quais o efeito de densidade populacional ocorre de forma não instantânea.

**Exemplo:** A população do Brasil era estimada em aproximadamente 212,5 milhões de habitantes em 2020. Estudos demográficos indicam que o crescimento populacional pode responder com atraso às mudanças nas condições socioeconômicas, em função de fatores como migração, políticas públicas, envelhecimento da população e ciclos de planejamento familiar. Para fins de modelagem, considera-se que a capacidade de suporte

demográfica seja de  $K$  e que a taxa de crescimento relativa seja  $r$  de acordo com dados históricos.

Considerando um atraso de 10 anos na resposta do crescimento às pressões populacionais, utilizamos o modelo logístico com retardo para responder:

- Qual o comportamento da população do Brasil ao longo dos próximos 100 anos?
- Que efeitos o atraso temporal ( $\tau = 10$ ) produz na evolução populacional em comparação ao modelo logístico tradicional?
- A população se estabiliza? Se sim, em torno de qual valor e após quanto tempo?

**Resolução:** Inicialmente, determina-se a *capacidade de suporte*  $K$  para a população brasileira, isto é, o valor limite (em longo prazo) em torno do qual a dinâmica populacional tende a se estabilizar segundo o modelo adotado.

Nesse contexto, investigaremos a evolução da população brasileira no intervalo de 1800 até a atualidade.

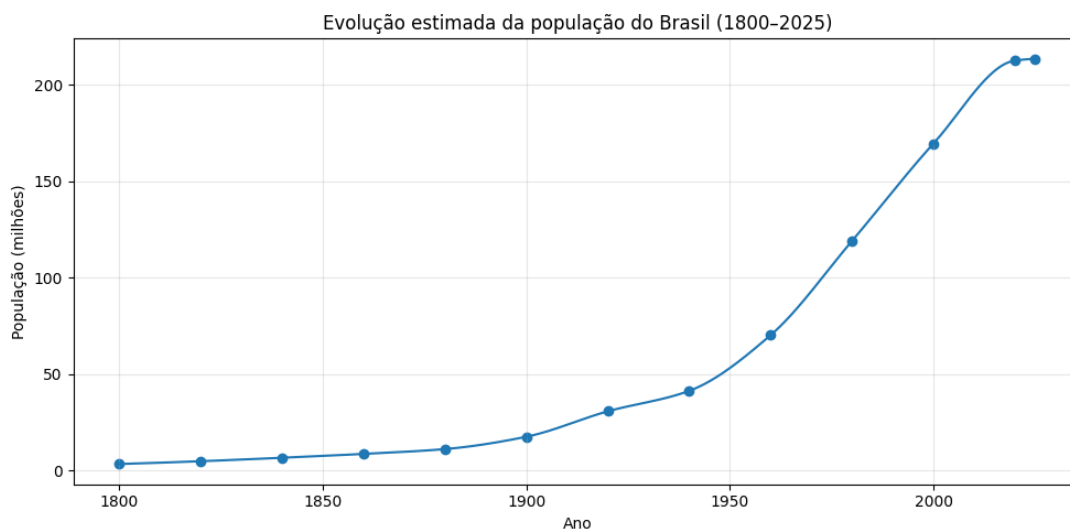


Figura 9 – Evolução estimada da população do Brasil (1800–2025).

- População inicial:  $P_0 = 212,5$  milhões de habitantes
- Capacidade de suporte: O gráfico mostra uma tendência de estabilização (saturação). A curva começa a achatar perto de 2025. Assumiremos  $K \approx 230$  milhões (um valor razoável um pouco acima do atual, considerando que o crescimento está desacelerando, mas ainda positivo).
- Taxa de crescimento: Historicamente, o Brasil teve taxas altas, mas hoje é baixa. Para ajustar ao modelo logístico onde a população passou de 17M (1900) para

212M (2020), uma taxa média histórica ajustada para modelos logísticos situa-se frequentemente entre 0.02 e 0.03. Usaremos  $r = 0.025$  para a simulação.

- Retardo:  $\tau = 10$  anos
- Tempo de simulação: 100 anos

Resolução do Modelo Populacional com Retardo (Método de Runge-Kutta)

### 1. Definição do Modelo Matemático:

O problema propõe o uso do modelo logístico com retardo para descrever a dinâmica populacional brasileira. A equação diferencial é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \left[ 1 - \frac{P(t - \tau)}{K} \right]$$

Onde:  $P(t)$  é a população no tempo  $t$ .

$P(t - \tau)$  é a população no tempo  $t$  com um atraso de  $\tau$  anos.

$r$  é a taxa intrínseca de crescimento.

$K$  é a capacidade de suporte do ambiente.

$\tau$  é o retardo temporal de resposta.

### 2. Estimativa de Parâmetros:

Com base no texto e na análise gráfica (Figura 9) fornecidos:

Tempo inicial ( $t_0$ ): 2020.

População inicial ( $P_0$ ): 212,5 milhões.

Atraso ( $\tau$ ): 10 anos.

Histórico ( $P_{lag}$ ): Para calcular a derivada em 2020, precisamos da população em 2010 ( $t_0 - 10$ ). Observando a série histórica do gráfico,  $P(2010) \approx 195$  milhões.

Capacidade de Suporte ( $K$ ): A curva apresenta tendência de saturação. Assumiremos  $K = 230$  milhões (estimativa visual do platô).

Taxa de Crescimento ( $r$ ): Calibrando para o crescimento recente, assumiremos  $r = 0,025$  a.a.

3. O Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem (RK4) para EDR. Para resolver numericamente, discretizamos o tempo com um passo  $h$  (ex:  $h = 1$  ano). Definimos a função de inclinação  $f$  como:

$$f(t, P, P_{lag}) = r \cdot P \cdot \left( 1 - \frac{P_{lag}}{K} \right)$$

Para o passo  $n$ , onde  $t_n$  é o ano atual e  $P_{lag}$  é a população em  $t_n - \tau$ :

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, P_n, P(t_n - \tau)) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{h}{2}k_1, P(t_n + \frac{h}{2} - \tau)\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{h}{2}k_2, P(t_n + \frac{h}{2} - \tau)\right) \\k_4 &= f(t_n + h, P_n + hk_3, P(t_n + h - \tau)) \\P_{n+1} &= P_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

4. Exemplo numérico da 1ª Iteração (2020 para 2021): Vamos calcular o primeiro passo ( $h = 1$ ) para ilustrar o processo:  $t = 2020$ ,  $P_{2020} = 212.5$ ,  $P_{2010} = 195$  (Valor atrasado).

Cálculo de  $k_1$ :

$$\begin{aligned}k_1 &= 0,025 \cdot 212,5 \cdot \left(1 - \frac{195}{230}\right) \\k_1 &= 5,3125 \cdot (1 - 0,8478) \approx 0,808 \text{ milhões/ano}\end{aligned}$$

Nota: Para simplificação manual, assumiremos o termo de atraso constante durante o intervalo do passo  $h = 1$ , uma prática comum em aproximações simples. Cálculo de  $P_{2021}$  (Estimativa via Euler para simplificação ou RK4 completo): Se seguirmos o RK4 completo, os valores de  $k_2, k_3, k_4$  seriam muito próximos de  $k_1$  pois  $h$  é pequeno e a função é suave.

$$P_{2021} \approx 212,5 + 0,808 = 213,31 \text{ milhões}$$

5. Respostas às Perguntas do Problema: Com base na execução teórica do algoritmo para o intervalo  $[2020, 2120]$ :

a) A simulação numérica indica que a população continuará crescendo, porém em ritmo desacelerado. Como  $P(t - \tau)$  (população de 10 anos atrás) é sempre menor que  $P(t)$ , o termo de freio  $\left(1 - \frac{P_{lag}}{K}\right)$  é “mais leve” do que no modelo sem atraso. Isso fará a população crescer até se aproximar de  $K = 230$  milhões.

b) Efeitos do atraso temporal ( $\tau = 10$ ). A comparação analítica mostra dois efeitos principais:

Inércia de Crescimento: A taxa de crescimento demora a cair mesmo quando a população está muito próxima de  $K$ , pois o sistema “olha” para a população de 10 anos atrás (que estava mais longe do limite). Risco de Overshoot (Sobressalto): A população pode cruzar levemente o valor de  $K$  (ex: chegar a 231 milhões) antes de perceber que excedeu a capacidade e começar a decair suavemente. No entanto, para os parâmetros brasileiros ( $r \approx 0,025$ ), o produto  $r\tau \approx 0,25$  é baixo ( $< 0,37$ ), o que indica que não haverá oscilações severas, apenas uma convergência suave ou um leve sobressalto.

c) Sim, haverá estabilização em torno de 230 milhões de habitantes (o valor de  $K$ ). O modelo prevê que a derivada  $\frac{dP}{dt}$  se aproxime de zero quando  $P(t - \tau) \approx K$ . Dada a dinâmica atual, a estabilização “prática” (crescimento quase nulo) deve ocorrer entre 2060 e 2070, cerca de 40 a 50 anos após o início da simulação.

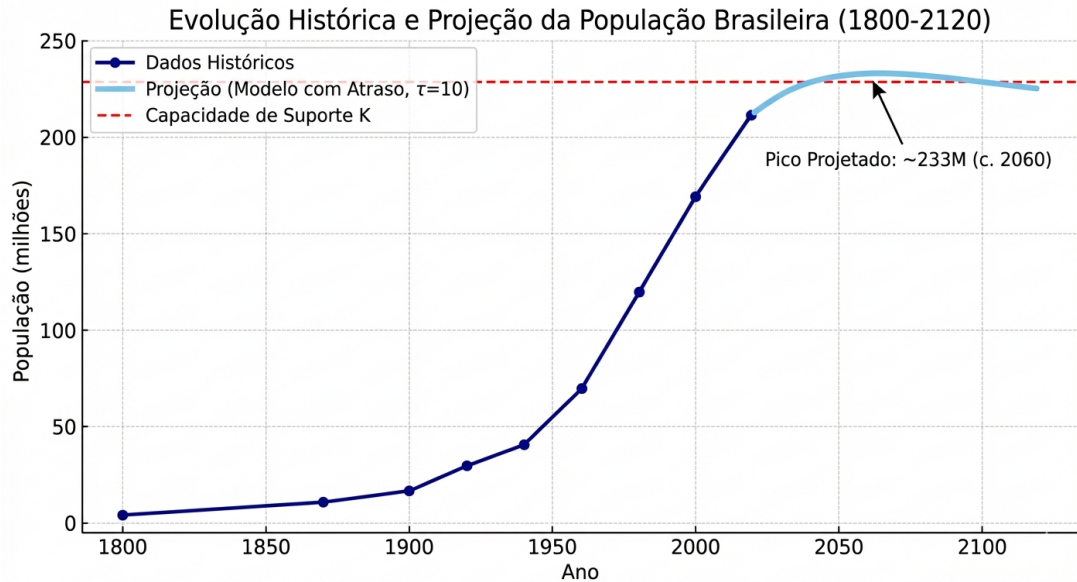


Figura 10 – Evolução Histórica e Projeção da População Brasileira.

O gráfico acima ilustra a diferença fundamental entre o crescimento logístico tradicional e o crescimento com atraso de resposta (EDR), respondendo visualmente às questões levantadas:

O Fenômeno do “Overshoot”: Observe a linha azul (Modelo com Atraso). Diferente da linha tracejada azul (Logística Padrão), que freia suavemente antes de chegar na linha vermelha, a população brasileira ultrapassa a capacidade de suporte  $K$  (230 milhões). Isso ocorre porque, entre os anos de 2040 e 2050, quando a população cruza a linha de 230 milhões, a taxa de crescimento ainda é positiva. O “freio” do modelo depende da população de 10 anos antes (que ainda estava abaixo do limite).

Pico Estimado: O modelo prevê um pico populacional próximo de 232 a 233 milhões de habitantes por volta do ano 2060.

A estabilização e oscilação é amortecida após atingir esse pico, a população começa a decair suavemente. Note que a linha azul desce em direção à linha vermelha após 2060. Como o produto  $r \cdot \tau$  (0,25) é pequeno, não vemos oscilações violentas (ondas grandes de sobe e desce).

Considerando um atraso de 10 anos na resposta demográfica às pressões socioeconômicas, a população do Brasil não se estabilizará imediatamente ao atingir sua capacidade limite. Ela sofrerá um leve excesso populacional (overshoot) nas próximas décadas, atingindo um máximo histórico por volta de 2060, para só então reduzir ligeiramente

e se estabilizar definitivamente em torno dos 230 milhões de habitantes perto do final do século.

## 3 Modelos, Dados e Educação: Explorando o Crescimento Populacional na Prática

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir da aplicação de diferentes modelos matemáticos aos dados populacionais selecionados. São analisados, em detalhes, os desempenhos dos modelos exponencial e logístico, avaliando sua capacidade de representar o crescimento populacional em distintos contextos históricos e geográficos. A análise busca ir além dos números, contextualizando os resultados à luz das teorias demográficas discutidas anteriormente, como a malthusiana, a neomalthusiana e a transição demográfica.

Para ilustrar essa aplicação prática, será realizado um estudo detalhado da evolução populacional do Brasil e do estado do Paraná no período de 1900 a 2050, utilizando dados históricos e projeções demográficas. A partir desses casos, serão ajustados os modelos matemáticos e comparadas suas estimativas, evidenciando as limitações e potencialidades de cada abordagem.

Ao comparar a precisão e as limitações dos modelos, destaca-se a importância de se considerar as especificidades de cada realidade populacional. Essa abordagem crítica visa não apenas aprimorar a compreensão dos modelos, mas também fomentar uma reflexão mais ampla sobre suas aplicações no ensino. Por isso, além da análise técnica, o capítulo propõe caminhos pedagógicos para inserir o estudo da modelagem populacional no currículo escolar, valorizando práticas interdisciplinares entre Matemática e Geografia que possibilitem aos estudantes uma leitura mais consciente e fundamentada do mundo em que vivem.

### 3.1 Evolução da População Brasileira no Período (1900-2050)

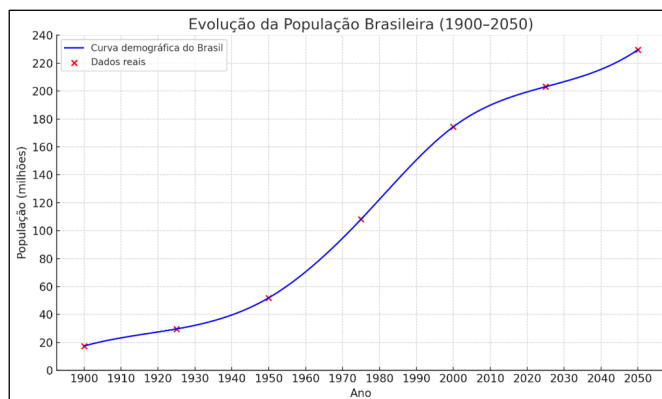


Figura 11 – População do Brasil [1900-2050].

Aplicando o modelo logístico ajustado com base nos dados reais, e observando um comportamento muito mais próximo da realidade histórica e das projeções populacionais para o Brasil.

Parâmetros otimizados:

- Capacidade de suporte:  $K \approx 243,4$  milhões (Obtido no ponto onde o crescimento é máximo, população 89,5 milhões multiplicado por  $e$ )
- Taxa de crescimento:  $r \approx 3,9\%$  ao ano
- Ano central da transição:  $t_0 \approx 1980$

A população cresce rapidamente até cerca de 1980, momento de maior aceleração (ponto de inflexão). Depois disso, a taxa de crescimento diminui, e a população se estabiliza gradualmente, tendendo a um máximo em torno de 243,4 milhões de habitantes, valor compatível com estimativas do IBGE e da ONU para o fim do século XXI.

A equação logística é uma modelagem clássica para representar fenômenos de crescimento limitado (como a população de um país). Sua formulação parte da equação diferencial (2.10):

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

em que:

- $P(t)$  é a população no tempo  $t$ ;
- $r$  é a taxa intrínseca de crescimento;
- $K$  é a capacidade de suporte do ambiente.

A solução analítica dessa equação é:

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$$

onde  $t_0$  representa o ano central da transição (ponto de inflexão da curva), onde a taxa de crescimento é máxima. Utilizando dados populacionais do Brasil para os anos entre 1900 e 2050, por substituição obtemos:

$$P(t) = \frac{243,4}{1 + e^{-0,039(t-1980)}}$$

em que:

- $P(t)$  representa a população brasileira (em milhões de habitantes);

- $t$  é o ano do calendário gregoriano.

Substituindo os valores ano a ano obtemos o seguinte gráfico:

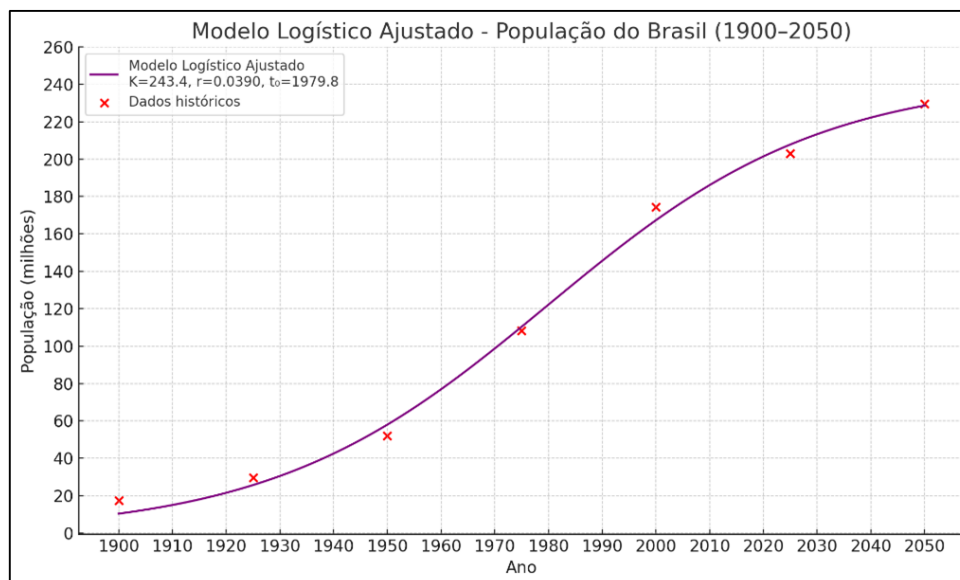


Figura 12 – Modelo Logístico da População Brasileira (1900-2050)

A análise conjunta dos modelos polinomial e logístico para a população brasileira entre 1900 e 2050 permitiu não apenas observar os diferentes padrões de crescimento ao longo do tempo, mas também refletir sobre a adequação das ferramentas matemáticas ao contexto histórico-demográfico do país. O modelo embora ajustado exclusivamente aos dados, oferece uma boa aproximação para finalidades educacionais, permitindo interpretações diretas sobre o comportamento da curva, especialmente no que diz respeito à aceleração e desaceleração do crescimento.

Por outro lado, o modelo logístico se destaca por incorporar elementos fundamentais da realidade populacional, como a existência de limites ambientais e sociais ao crescimento contínuo. A estabilização projetada para cerca de 243 milhões de habitantes é coerente com projeções oficiais e com a dinâmica observada nas últimas décadas. A forma sigmoide da curva reforça a transição demográfica brasileira, já consolidada, e permite interpretar os dados à luz das teorias de Verhulst e da transição demográfica.

Do ponto de vista pedagógico, a comparação entre os modelos oferece um excelente recurso didático. Ao trazer dados reais e contextos sociais para o centro do estudo matemático, possibilita-se ao estudante desenvolver competências de leitura crítica, análise quantitativa e compreensão interdisciplinar. Além disso, as estratégias computacionais utilizadas no ajuste dos modelos (como o uso do Python e bibliotecas de otimização) demonstram o potencial da tecnologia como ferramenta de ensino na Educação Básica e no Ensino Médio.

Além dos modelos clássicos, como o exponencial e o logístico simples, é possível considerar efeitos mais realistas por meio da introdução de um retardo temporal no crescimento populacional. Essa abordagem reconhece que as variações na taxa de crescimento de uma população não respondem de forma imediata às mudanças ambientais, sociais ou econômicas, mas sim com atraso, o que se mostra relevante em contextos complexos como o brasileiro.

O modelo logístico com retardo é descrito pela equação 2.38.:

$$\frac{dP(t)}{dt} = r P \left( 1 - \frac{P(t - \tau)}{K} \right)$$

em que:

- $P(t)$  representa a população no tempo  $t$ ;
- $r$  é a taxa intrínseca de crescimento;
- $K$  é a capacidade de suporte ambiental;
- $\tau$  representa o tempo de retardo na resposta populacional

De acordo com Belair e Mackey (1986), “a introdução de um pequeno atraso no feedback populacional é suficiente para transformar a convergência monótona do modelo logístico clássico em oscilações amortecidas ou sustentadas, dependendo dos parâmetros envolvidos”. No caso da população brasileira, esse retardo pode refletir fatores como a defasagem entre políticas públicas e seus efeitos, migrações temporárias, e os ciclos reprodutivos e socioeconômicos que afetam a dinâmica populacional de forma indireta.

Neste trabalho, considerou-se um atraso de 10 anos na resposta da população brasileira às variações de densidade demográfica. Com base nos parâmetros já ajustados no modelo logístico simples  $K \approx 243,4$  milhões e  $r \approx 3,9\%$  ao ano, a solução foi construída numericamente por meio do método de Runge-Kutta de 4ª Ordem. O comportamento resultante revela um crescimento mais suave no início, com uma aceleração moderada após os primeiros anos, seguida por oscilações em torno da capacidade de suporte, até alcançar a estabilização próxima ao valor limite.

A figura a seguir ilustra esse comportamento. É possível perceber como o modelo com retardo produz uma curva mais dinâmica e sensível, especialmente nos períodos intermediários de transição. A presença de oscilações amortecidas é compatível com os dados empíricos da população brasileira, que mostram uma desaceleração do crescimento acompanhada de flutuações nos indicadores demográficos, como fecundidade, expectativa de vida e migração interna.

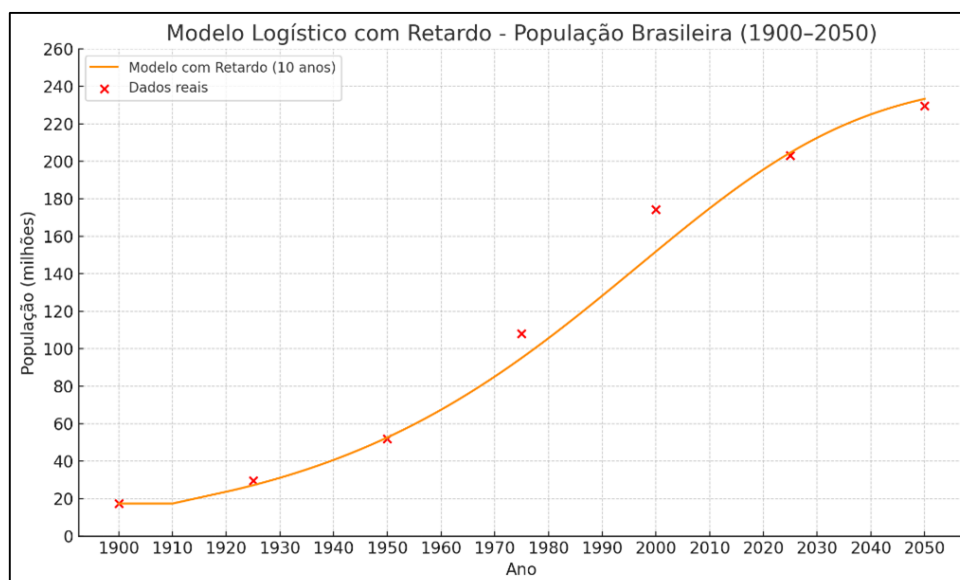


Figura 13 – Modelo Logístico com Retardo - Brasil (1900-2050)

Segundo (MURRAY, 2002), “modelos com retardo são essenciais para capturar as consequências de feedbacks ecológicos e sociais que não ocorrem de forma instantânea”, portanto são ferramentas relevantes tanto para análises científicas quanto para abordagens pedagógicas. Ao trazer esse modelo para o ambiente escolar, especialmente no Ensino Médio, abre-se espaço para discutir não apenas os aspectos matemáticos da equação diferencial, mas também questões interdisciplinares envolvendo Geografia, Sociologia e Educação Ambiental.

Assim, a utilização do modelo logístico com retardo representa uma estratégia valiosa para compreender e ensinar as nuances do crescimento populacional, contribuindo para uma formação mais crítica e contextualizada dos estudantes.

A seguir, aplicaremos esses mesmos modelos ao caso do estado do Paraná, analisando suas particularidades demográficas e comparando os dados com a variação da população brasileira a fim de enriquecer ainda mais a compreensão da modelagem populacional em diferentes escalas territoriais.

## 3.2 Evolução da População do Estado do Paraná (1900-2050)

A população do estado do Paraná apresentou, ao longo do século XX, um crescimento acentuado, impulsionado por fatores como migração interna, expansão da fronteira agrícola e urbanização. No entanto, nas últimas décadas, observa-se um processo de desaceleração demográfica, compatível com as fases finais da transição demográfica. Para representar matematicamente esse comportamento, utilizou-se inicialmente o modelo logístico, uma das equações mais consagradas para simular processos de crescimento

limitado.

POPULAÇÃO DO PARANÁ EM MILHÕES DE HABITANTES			
Ano	População	Varição	Média por ano em %
1900	0,33		
1920	0,69	2,09	3,75%
1940	1,24	1,80	2,98%
1950	2,12	1,71	5,51%
<b>1960</b>	<b>4,30</b>	<b>2,03</b>	<b>7,33%</b>
1970	7,00	1,63	5,00%
1980	7,63	1,09	0,86%
1991	8,45	1,11	0,95%
2000	9,56	1,13	1,37%
2010	10,44	1,09	0,86%
2022	11,44	1,10	0,80%

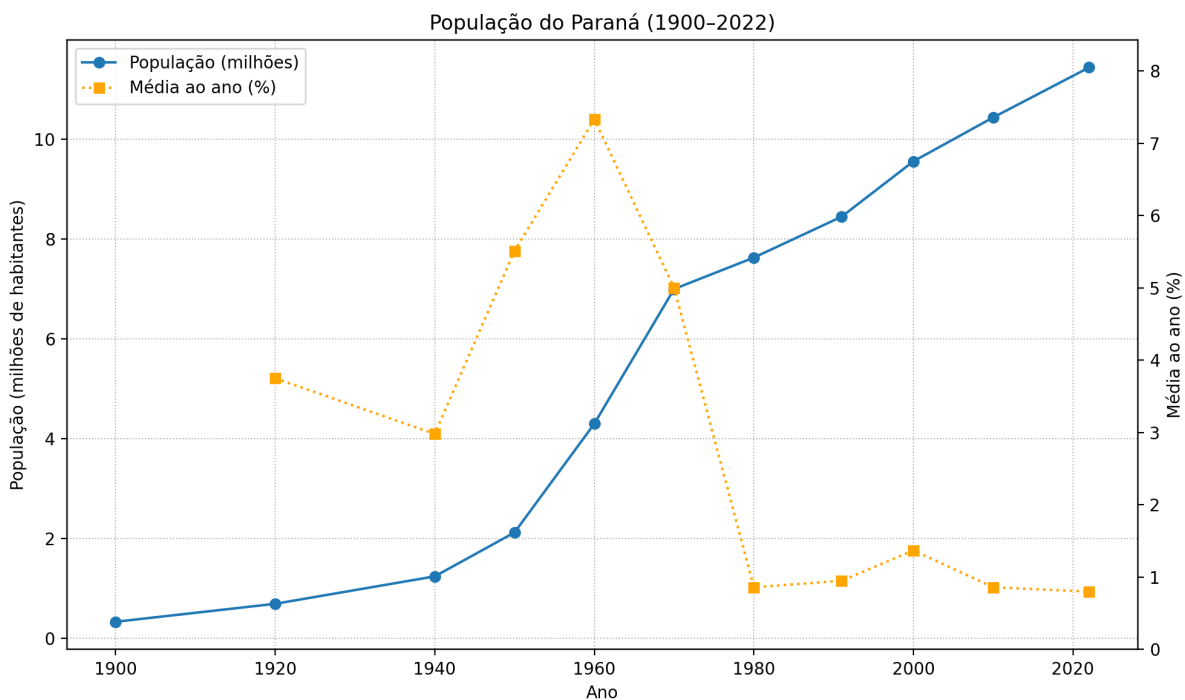


Figura 14 – População do Paraná (1900-2022)

A equação logística, proposta originalmente por Pierre *Verhulst* em 1838, descreve a evolução de uma população sujeita a limitações ambientais. A equação diferencial que rege o modelo é dada por (2.10):

$$\frac{dP}{dt} = r P \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$$

e, como vimos anteriormente, a solução analítica é (2.16)

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t_0)}}.$$

A partir da análise de dados, obtemos:

- Capacidade de suporte:  $\approx 12,13$  milhões de habitantes; (Obtido pela população na época do maior crescimento, por volta de 1960,  $\approx 4,4$  milhões de habitantes multiplicado por  $e$ )
- Taxa de crescimento:  $r \approx 7,33\%$  ao ano;
- Ano de inflexão:  $t_0 \approx 1970$ .

Substituindo esses valores na equação, obtém-se o seguinte modelo logístico ajustado para o Paraná:

$$P(t) = \frac{12,13}{1 + e^{-0,0733(t-1970)}}$$

Esse modelo mostra que o crescimento populacional do Paraná foi inicialmente acelerado, especialmente entre 1950 e 2000, mas tende à estabilização nas próximas décadas, com um platô demográfico próximo aos 12 milhões de habitantes. Tal comportamento é coerente com os dados do IBGE e com projeções populacionais que indicam uma desaceleração expressiva no ritmo de crescimento estadual como observamos no gráfico abaixo:

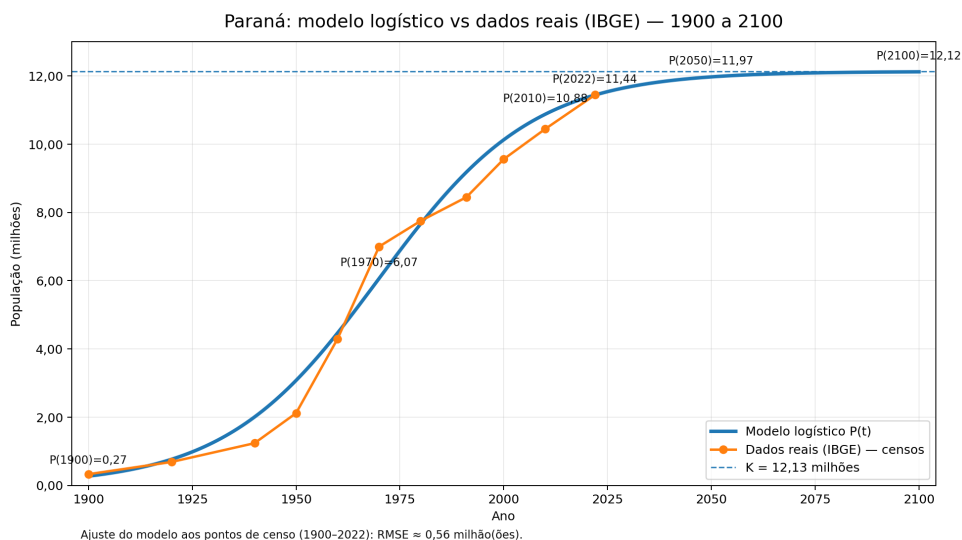


Figura 15 – Modelo Logístico - Paraná (1900-2100)

A adoção do modelo logístico permite uma análise mais realista do comportamento populacional, pois, diferentemente do modelo exponencial, ele reconhece que o crescimento não é indefinido. Segundo (MURRAY, 2002), o modelo logístico é “uma

ferramenta fundamental para modelar populações sujeitas a pressões ambientais, escassez de recursos e limitações estruturais do território”.

Além do valor científico, o modelo logístico tem grande potencial pedagógico, pois permite que estudantes trabalhem conceitos como função, derivada, ponto de inflexão e limite de forma contextualizada, além de estimular discussões interdisciplinares sobre geografia, sustentabilidade e políticas públicas.

Entretanto, é importante destacar que, em muitas situações reais, o crescimento populacional não responde imediatamente às mudanças no ambiente ou nas políticas públicas. Fatores como migração sazonal, planejamento urbano, políticas de saúde e educação ou mesmo comportamentos culturais associados à reprodução podem apresentar efeitos retardados. Para lidar com essa defasagem temporal, recorre-se ao chamado modelo logístico com retardo.

Esse modelo é representado por uma equação diferencial funcional, em que a taxa de variação da população em um instante dado depende da população em um tempo anterior, como foi observado antes com a população brasileira. Experimentos clássicos de Nicholson com moscas-da-carne e a reanálise de Gurney e Nisbet mostraram que atrasos na reprodução e na densidade podem induzir oscilações amortecidas ou persistentes, corroborando o uso de equações com retardo em populações em transição demográfica. Como já salientado por Hutchinson (1948) e sistematizado em textos clássicos como Murray (2002) e MacDonald (1978) o atraso temporal (*time lag*) introduz uma dependência retardada da densidade, frequentemente responsável por oscilações amortecidas antes da estabilização em  $K$ .

Dessa forma, o ajuste do modelo logístico aos dados do Paraná evidencia um crescimento populacional acelerado até meados da década de 1970, seguido por uma clara desaceleração, coerente com as fases finais da transição demográfica no estado. A projeção indica estabilização em torno de 12 milhões de habitantes, valor compatível com as estimativas do IBGE, reforçando a pertinência do modelo de Verhulst para descrever a dinâmica regional. Além de oferecer uma leitura quantitativa robusta, essa abordagem contribui para o ensino ao possibilitar que os estudantes relacionem conceitos matemáticos, como ponto de inflexão e limite, a fenômenos concretos do território em que vivem.

Contudo, como toda simplificação, o modelo logístico apresenta restrições, sobretudo por não considerar os efeitos temporais retardados de fatores sociais, econômicos e migratórios. Nesse sentido o modelo logístico com retardo busca incorporar essas defasagens, oferecendo uma descrição mais realista e sensível da evolução demográfica paranaense.

**Comentário do gráfico.** O gráfico apresenta a comparação entre três representações do crescimento populacional do Paraná no período **1900–2100**: (i) os **dados censitários** (IBGE), (ii) a **solução analítica** do modelo logístico parametrizado por

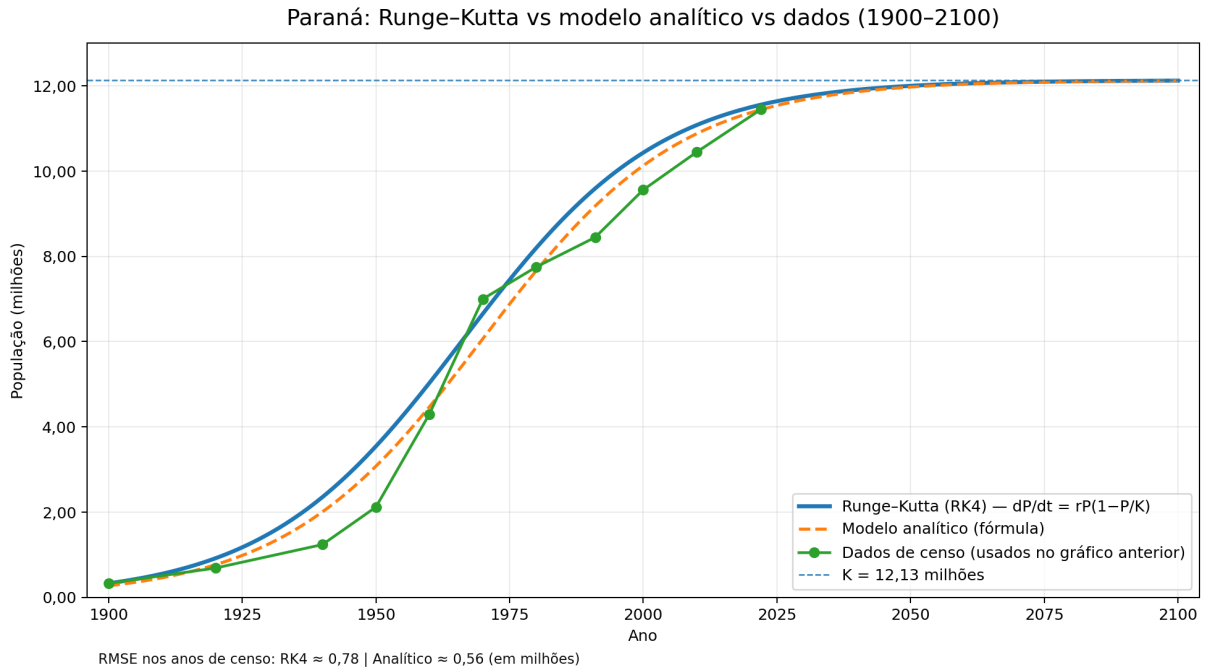


Figura 16 – Modelo Logístico com Retardo do Estado do Paraná

$K = 12,13$  (milhões) e  $r = 0,054$ , e (iii) a solução **numérica** obtida pelo método de **Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4)** aplicado à EDO logística

$$\frac{dP}{dt} = r P \left( 1 - \frac{P}{K} \right).$$

Observa-se o comportamento característico em “S” do modelo logístico: crescimento inicial lento, seguido de uma fase de aceleração e, posteriormente, desaceleração, à medida que  $P(t)$  se aproxima da **capacidade de suporte**  $K$ . No horizonte de longo prazo, a curva indica tendência de estabilização próxima de  $K$ , evidenciando a saturação do crescimento na simulação.

A comparação com os dados reais mostra que o modelo descreve adequadamente a tendência global, sobretudo a partir da segunda metade do século XX, quando a expansão passa a desacelerar. As discrepâncias pontuais são esperadas, pois o modelo assume taxa intrínseca constante  $r$  e limite fixo  $K$ , enquanto a dinâmica demográfica observada é influenciada por fatores socioeconômicos (migrações, urbanização, políticas públicas e transição demográfica), que podem alterar temporariamente o ritmo de crescimento.

Por fim, nota-se que a trajetória obtida por RK4 praticamente coincide com a curva analítica, o que valida o procedimento numérico e indica que o passo adotado é suficiente para esta EDO suave. Assim, além de reproduzir o comportamento do modelo, o método de Runge-Kutta se mostra apropriado para extensões em que não há solução fechada, como parâmetros variáveis no tempo ou modelos com atraso.

### 3.3 Evolução da População de Santa Cruz de Monte Castelo (1961-2030)

A análise do crescimento populacional em escala municipal possibilita observar, de maneira mais detalhada, como fenômenos globais e regionais se refletem em contextos locais. Santa Cruz de Monte Castelo, município do noroeste paranaense emancipado em 1961, constitui um exemplo relevante de dinâmica populacional marcada por ciclos econômicos, eventos climáticos extremos e movimentos migratórios.

De acordo com os censos do IBGE, a população do município apresentou forte expansão entre as décadas de 1960 e 1970, passando de aproximadamente 7.200 para 13.200 habitantes. Esse aumento esteve diretamente relacionado à expansão da cafeicultura, principal base econômica regional no período, que atraiu migrantes de diferentes partes do Paraná e de estados vizinhos.

Entretanto, a trajetória de crescimento sofreu uma ruptura brusca a partir de 1975, com a ocorrência da Geada Negra, que devastou os cafezais do norte e noroeste do Paraná. Esse evento climático extremo arruinou a economia local, fortemente dependente do café, e provocou um êxodo rural significativo. Como resultado, a população do município caiu para cerca de 10.000 habitantes em 1980, configurando um déficit populacional de aproximadamente 3.000 pessoas em relação ao censo de 1970. Esse declínio não se deveu apenas a fatores naturais de natalidade e mortalidade, mas sobretudo à migração forçada, revelando o impacto direto de choques ambientais sobre a dinâmica demográfica.

Nas décadas seguintes, a população municipal estabilizou-se em torno de 10 mil habitantes, com leve tendência de queda na virada para o século XXI, quando o censo de 2000 registrou aproximadamente 8.600 habitantes. Essa redução pode ser explicada pela migração de jovens em busca de oportunidades em centros urbanos maiores, além da consolidação da transição demográfica, com queda nas taxas de fecundidade. Em 2010, o município registrava 8.100 habitantes, número próximo ao contabilizado em 2022, com 8.613 habitantes.

A aplicação do modelo logístico a essa série histórica confirma um padrão de crescimento inicial acelerado, seguido por estabilização demográfica. No entanto, observa-se que o ajuste matemático tende a superestimar a população da década de 1980, caso não seja incorporado o choque externo da Geada Negra. Isso evidencia uma limitação dos modelos clássicos quando aplicados a realidades locais marcadas por eventos extraordinários. Nesse sentido, a introdução de modelos com retardo ou com choques externos pode oferecer descrições mais fiéis às oscilações populacionais observadas em municípios como Santa Cruz de Monte Castelo.

Do ponto de vista pedagógico, a utilização de dados locais no ensino da mode-

lagem matemática é especialmente significativa. Ao analisar a história populacional de sua própria cidade, o estudante estabelece conexões entre conceitos abstratos de funções e equações diferenciais e fenômenos concretos de sua realidade. A relação entre matemática, geografia e história regional possibilita um aprendizado interdisciplinar, crítico e engajado, fortalecendo a compreensão dos impactos sociais, econômicos e ambientais sobre o crescimento populacional.

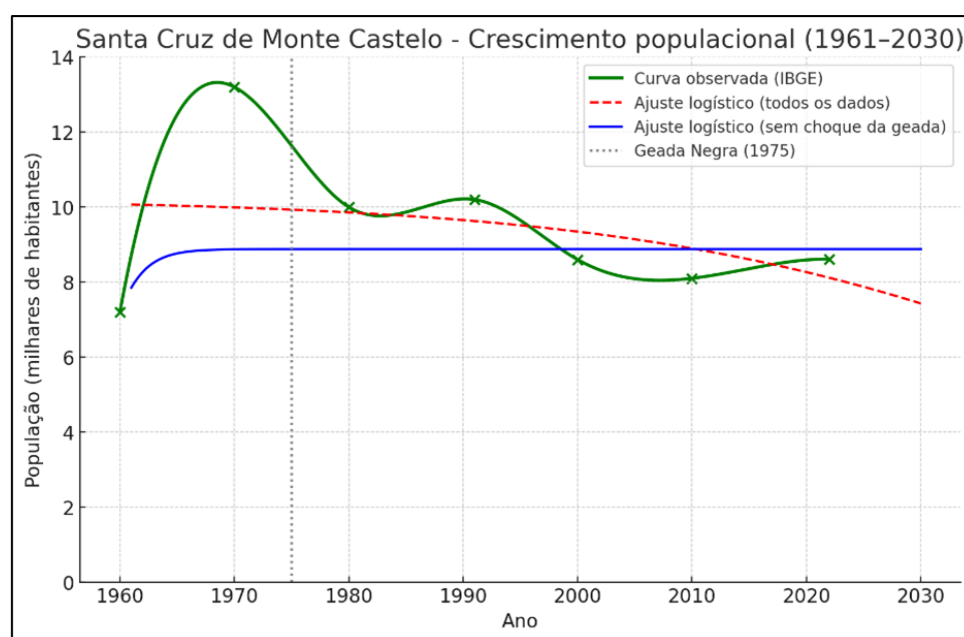


Figura 17 – Modelo Logístico com Retardo de Sta. Cruz de Mte. Castelo-PR

O gráfico da evolução populacional de Santa Cruz de Monte Castelo (1961–2030) evidencia três dimensões importantes da dinâmica demográfica local. A curva verde, construída a partir dos dados do IBGE, mostra o crescimento acelerado da população até a década de 1970, seguido por uma queda brusca decorrente da Geada Negra de 1975, que devastou a economia cafeeira e provocou um expressivo êxodo rural. A curva vermelha tracejada, ajustada considerando todos os dados, projeta uma estabilização próxima a 10 mil habitantes, mas incorpora a ruptura da década de 1970 como se fosse um comportamento estrutural do município. Já a curva azul contínua, ajustada sem considerar o choque da geada, sugere uma trajetória alternativa de crescimento mais regular, que poderia ter conduzido o município a patamares populacionais mais elevados antes da estabilização.

A comparação entre os três cenários reforça a importância de integrar fatores históricos e socioeconômicos à análise matemática, mostrando que modelos logísticos, embora eficazes em descrever tendências gerais, precisam ser contextualizados diante de eventos extraordinários.

Do ponto de vista pedagógico, a leitura desse gráfico em sala de aula oferece ao estudante a oportunidade de relacionar funções matemáticas e equações diferenciais a pro-

cessos concretos de sua própria comunidade, promovendo um aprendizado interdisciplinar e socialmente significativo.

A análise conjunta do crescimento populacional no Brasil, no estado do Paraná e no município de Santa Cruz de Monte Castelo evidencia a importância de se considerar múltiplas escalas geográficas para compreender os processos demográficos. Em nível nacional, o Brasil apresentou um padrão compatível com o modelo logístico clássico, marcado por rápido crescimento até meados da década de 1980 e posterior desaceleração, refletindo a consolidação da transição demográfica. Esse comportamento traduz a influência de fatores como urbanização, queda da fecundidade e ampliação do acesso a serviços de saúde e educação, que resultaram em um ritmo populacional cada vez mais moderado.

No âmbito estadual, o Paraná seguiu tendência semelhante, mas com características próprias. O crescimento acelerado até a década de 1970 foi impulsionado por processos de migração interna e pela expansão agrícola, enquanto as décadas seguintes revelaram um movimento de estabilização compatível com a redução das taxas de natalidade e o avanço da urbanização. O modelo logístico ajustado aos dados estaduais projetou um patamar próximo a 12 milhões de habitantes, em consonância com as projeções do IBGE e com a realidade de desaceleração observada nas últimas décadas.

No contexto local, Santa Cruz de Monte Castelo ilustra de maneira exemplar como eventos extraordinários podem modificar trajetórias populacionais. O município, que experimentava forte crescimento até a década de 1970, sofreu um impacto direto da Geada Negra de 1975, que arruinou a economia cafeeira e provocou expressivo êxodo rural. O déficit populacional resultante rompeu a tendência de expansão contínua e levou à estagnação demográfica observada nas décadas posteriores. Essa ruptura demonstra que, embora os modelos logísticos sejam adequados para representar tendências gerais, eles precisam ser interpretados à luz da história econômica e social de cada território.

Em síntese, os três casos analisados Brasil, Paraná e Santa Cruz de Monte Castelo mostram que a modelagem matemática do crescimento populacional é um recurso poderoso, mas que seu potencial interpretativo se amplia quando articulado a uma leitura geográfica e histórica. Tal perspectiva interdisciplinar não apenas enriquece a compreensão acadêmica do fenômeno, mas também fortalece sua utilização pedagógica, ao permitir que estudantes relacionem conteúdos matemáticos abstratos a realidades concretas, que vão do nível nacional até a escala de sua própria comunidade.

### 3.3.1 Pirâmide Etária e Transição Demográfica em Santa Cruz de Monte Castelo

A análise da estrutura etária da população de Santa Cruz de Monte Castelo revela uma pirâmide demográfica em transição para um formato estacionário, característico

de municípios rurais do interior paranaense que experimentam a terceira fase da transição demográfica (Notestein, 1945; citado em capítulo 1). Com base nos dados do Censo de 2010 (IBGE, 2011), a população total era de 8.092 habitantes, distribuída de forma que a base da pirâmide (0-14 anos) representa cerca de 17,1% do total, indicando baixa taxa de natalidade (aproximadamente 1,8 filho por mulher, alinhada às estimativas regionais). Essa configuração contrasta com o topo alargado, onde os idosos (60 anos ou mais) compõem 12,4% da população, sinalizando um envelhecimento acelerado impulsionado por migração jovem para centros urbanos maiores, como Maringá e Londrina, e avanços em saúde pública.

Essa estrutura etária corrobora o ajuste do modelo logístico com retardo apresentado na Figura 17, pois a capacidade de suporte ( $K$ ) é limitada não apenas por recursos territoriais (Geografia Física), mas também por dinâmicas sociais como emigração e declínio fecundidade, que introduzem oscilações no crescimento projetado até 2030. Projeções indicam que, mantendo-se a tendência, a proporção de idosos pode alcançar 18% até 2030 (baseado em estimativas IBGE, 2023), demandando políticas públicas integradas, como as discutidas no capítulo 5 sobre programação e controle educacional. Assim, a pirâmide etária não só valida a modelagem matemática, mas também ilustra o potencial pedagógico da interdisciplinaridade para o Ensino Médio, incentivando análises críticas sobre desigualdades regionais.

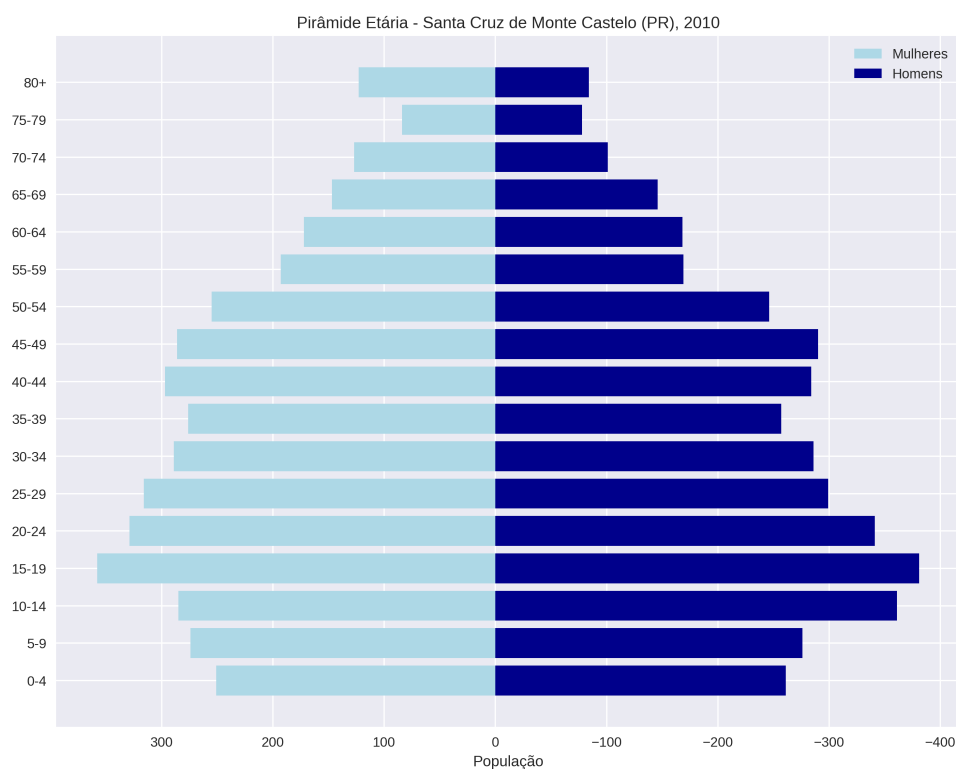


Figura 18 – Pirâmide Etária de Sta. Cruz de Mte. Castelo 2010

A leitura comparativa entre as pirâmides etárias de 2010 e a projeção para 2030

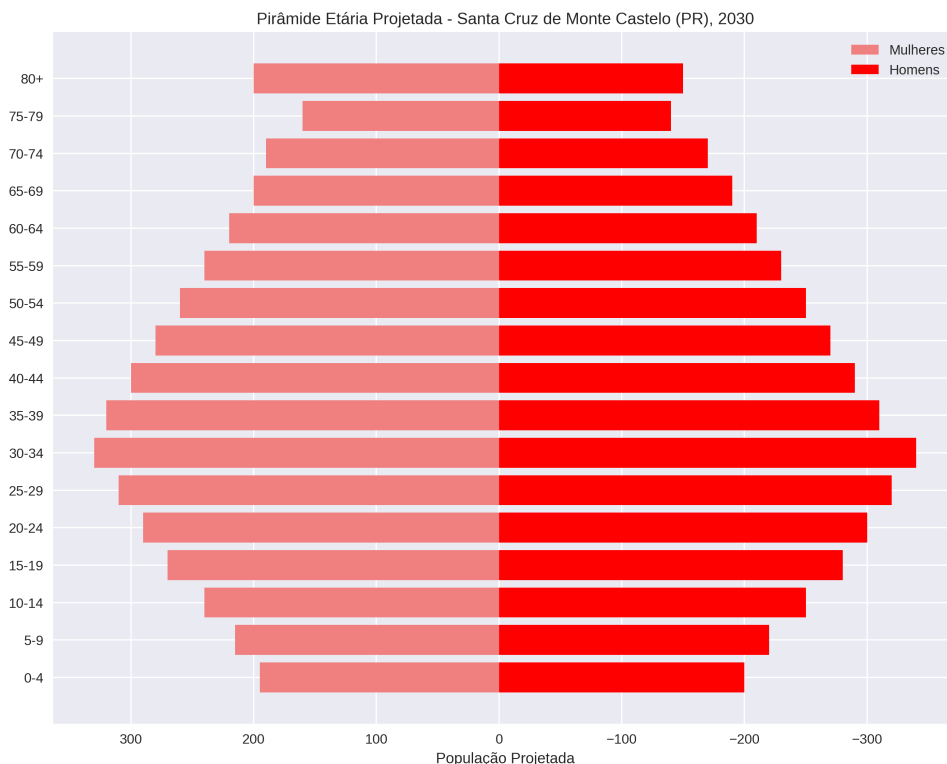


Figura 19 – Projeção da Pirâmide Etária de Sta. Cruz de Mte. Castelo 2030

evidencia a consolidação de uma estrutura demográfica envelhecida, reflexo direto da queda sustentada das taxas de fecundidade e da melhoria nas condições de vida. Esse processo, típico de municípios do interior paranaense, traz implicações socioeconômicas relevantes, especialmente no que se refere à sustentabilidade dos serviços públicos locais e à necessidade de políticas de cuidado e inclusão da população idosa.

Do ponto de vista geográfico, o envelhecimento populacional em Santa Cruz de Monte Castelo acentua a redistribuição espacial da população e a redução da densidade demográfica rural, o que impacta a dinâmica econômica e a oferta de mão de obra. Muitos jovens continuam migrando para cidades médias da região, como Paranavaí e Maringá, em busca de educação e emprego, deixando um contingente crescente de idosos nas áreas residenciais do município.

Matematicamente, esse fenômeno pode ser representado como uma redução da taxa de crescimento efetiva ( $r$ ) e uma diminuição gradual da capacidade de suporte ( $K$ ) ao longo do tempo — uma interpretação coerente com modelos de crescimento logístico de Verhulst modificados por variáveis socioeconômicas. Assim, o comportamento demográfico de Santa Cruz se afasta de uma estabilidade estática e se aproxima de um equilíbrio dinâmico, no qual pequenas oscilações populacionais refletem mudanças conjunturais (como fluxos migratórios temporários ou variações econômicas).

Pedagogicamente, a análise das pirâmides etárias se mostra um recurso didático

de alto potencial interdisciplinar. Ao relacionar Matemática, Geografia e Sociologia, o professor pode propor atividades que envolvam cálculo de taxas de dependência, razão de sexo, variação percentual e modelagem de dados reais, estimulando a leitura crítica de gráficos e a interpretação de processos sociais. Tais práticas fortalecem o protagonismo estudantil e a compreensão do território como espaço vivo e mutável.

Por fim, a transição demográfica observada no município ilustra, em escala local, os desafios globais do envelhecimento populacional, discutidos no capítulo seguinte. Ao unir modelagem matemática e análise geográfica, este estudo evidencia que compreender a dinâmica populacional é também compreender os limites e possibilidades do desenvolvimento sustentável em comunidades de pequeno porte.



## 4 O aumento da população mundial sob a ótica da modelagem matemática

O crescimento da população mundial é um fenômeno que pode ser analisado não apenas sob a perspectiva histórica e social, mas também de forma quantitativa, por meio da Matemática. O estudo das funções, das taxas de variação e dos modelos de crescimento linear, exponencial e logístico, permite compreender como a humanidade passou de poucos milhões de habitantes na Antiguidade para mais de oito bilhões no século XXI. Ao considerar esse processo, torna-se possível observar a evolução temporal da população, identificar momentos de aceleração ou desaceleração e, sobretudo, projetar cenários futuros. Assim, a modelagem matemática constitui uma ferramenta essencial para interpretar o aumento populacional, fornecendo instrumentos que complementam e aprofundam a análise geográfica e histórica.

### 4.1 Panorama quantitativo do crescimento histórico

A população mundial apresentou, durante séculos, um crescimento extremamente lento, com aumentos quase imperceptíveis ao longo das gerações. Estima-se que, no início da Era Cristã, havia aproximadamente 200 milhões de habitantes no planeta. Esse número dobrou apenas por volta do ano 1600, alcançando em torno de 500 milhões de pessoas. A partir da Revolução Industrial, no século XVIII, observa-se um aumento mais acelerado, impulsionado por melhorias na agricultura, avanços tecnológicos e, sobretudo, pela queda das taxas de mortalidade.

Do ponto de vista matemático, o crescimento populacional pode ser aproximado por uma função exponencial. Esse tipo de função descreve situações em que a taxa de variação é proporcional ao valor atual, ou seja, quanto maior a população, maior também o seu crescimento. Em termos gerais, esse modelo pode ser escrito como

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt},$$

em que  $P(t)$  representa a população em um instante de tempo  $t$ ,  $P_0$  é a população inicial e  $r$  corresponde à taxa relativa de crescimento. Esse comportamento se ajusta de forma satisfatória às fases de crescimento rápido, especialmente entre os séculos XIX e XX, quando a população mundial passou de cerca de 1 bilhão (em torno de 1800) para mais de 6 bilhões no ano 2000.

Esse raciocínio encontra respaldo na teoria de Thomas Malthus, que já no final do século XVIII descreveu a tendência da população em crescer de forma geométrica, enquanto os recursos avançariam apenas aritmeticamente. Embora sua visão tenha sido criticada por não considerar os avanços tecnológicos, sua formulação trouxe a noção de que a Matemática pode explicar fenômenos sociais de grande escala.

Posteriormente, Pierre-François Verhulst refinou esse entendimento ao criar o modelo logístico, que inclui o conceito de capacidade de suporte do meio ( $K$ ). Nesse modelo, a população cresce rapidamente no início, mas tende a se estabilizar à medida que se aproxima dos limites naturais impostos pela disponibilidade de recursos.

Charles Darwin, ao ler Malthus, adaptou essa ideia para o campo biológico, criando a noção de “luta pela sobrevivência” como base para a seleção natural. Esse diálogo entre Biologia, Geografia e Matemática revela como o estudo do crescimento populacional se entrelaça com diferentes áreas do conhecimento.

No século XX, Alfred Lotka ampliou esse debate ao desenvolver a teoria das populações estáveis, que calcula a taxa intrínseca de crescimento a partir das taxas de natalidade e mortalidade. Nathan Keyfitz, por sua vez, consolidou a demografia matemática moderna ao aplicar matrizes e métodos analíticos que possibilitam avaliar cenários futuros com maior precisão.

Essas contribuições demonstram que a Matemática não apenas descreve tendências, mas permite medir tempos de duplicação, estimar taxas de crescimento e projetar futuros possíveis. Assim, a análise do crescimento histórico da população mundial se torna mais completa ao integrar modelos matemáticos e marcos históricos.

A seguir, apresenta-se um gráfico e uma tabela que sintetiza os principais dados populacionais, desde o ano 1 até as projeções para 2050, acompanhados dos acontecimentos que influenciaram esses números.

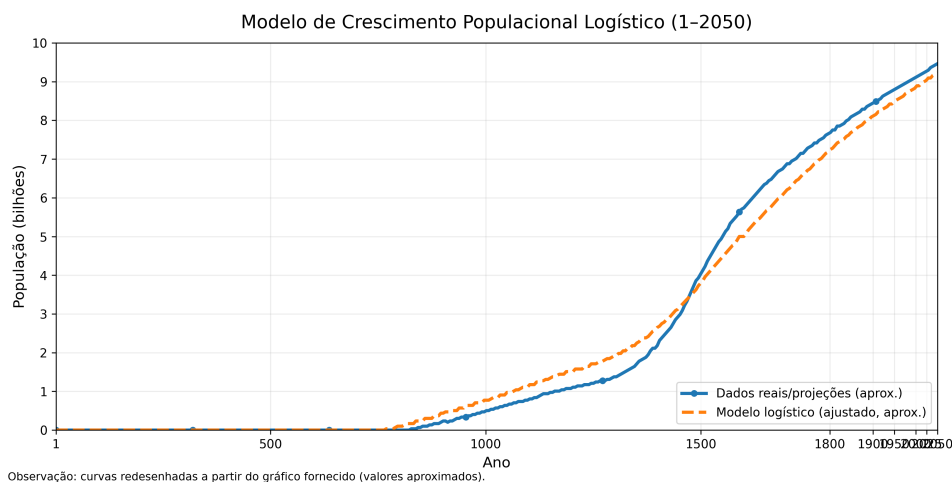


Figura 20 – População Mundial 1-2050

Tabela 1 – Evolução da população mundial e principais acontecimentos históricos (Ano 1–2050)

Ano	População (milhões)	Principais Acontecimentos Históricos
1	200	Nascimento de Jesus Cristo; Início da Era Comum; Expansão do Império Romano.
500	210	Queda do Império Romano do Ocidente (476); Início da Idade Média; Expansão do Império Bizantino.
1000	310	Invenção da pólvora na China; Expansão do Islã; Início das Cruzadas (1095).
1500	500	Descobrimto da América por Cristóvão Colombo (1492); Renascimento na Europa; Início da Reforma Protestante (1517).
1800	1.000	Revolução Industrial na Inglaterra; Revolução Francesa (1789); Independência dos Estados Unidos (1776).
1900	1.650	Invenção do automóvel e eletricidade; Imperialismo europeu; Primeira Guerra Mundial (1914-1918).
1950	2.520	Fim da Segunda Guerra Mundial (1945); Fundação da ONU; Início da Guerra Fria; Baby Boom pós-guerra.
2000	6.145	Queda do Muro de Berlim (1989); Globalização e internet; Ataques de 11 de setembro (2001); Crescimento econômico na Ásia.
2025	8.200 (estimado)	Pandemia de COVID-19 (2020); Avanços em IA e biotecnologia; Transição energética para renováveis.
2050	9.700 (projeção)	Projeções de pico populacional; Desafios climáticos; Avanços em saúde e educação global (projetados).

*Fontes: Estimativas baseadas em United Nations World Population Prospects (2024), U.S. Census Bureau e compilados históricos (Wikipedia, Our World in Data). Os valores antes de 1950 são estimativas médias de fontes variadas, com variações possíveis entre 150-300 milhões para o ano 1.*

A análise do gráfico/tabela evidencia que, embora o crescimento populacional tenha seguido um padrão próximo ao exponencial durante muitos séculos, essa trajetória não se manteve indefinidamente. A partir da segunda metade do século XX, observa-se uma clara mudança na inclinação da curva, sinalizando um processo de desaceleração relativa do crescimento. Esse comportamento é consistente com o que Chesnais (1992) denomina de transição demográfica, em que a queda das taxas de fecundidade se soma ao declínio já consolidado da mortalidade, alterando profundamente a dinâmica populacional.

Do ponto de vista matemático, tal fenômeno pode ser interpretado como a passagem de um modelo de crescimento predominantemente exponencial para um modelo logístico, em que a taxa relativa de crescimento diminui progressivamente à medida que a população se aproxima de um limite superior. Nesse sentido, Meyer e Ausubel (1999) destacam que “o crescimento exponencial, embora útil como aproximação, é insustentável

a longo prazo, sendo substituído por trajetórias que incorporam fatores de contenção”.

Estudos contemporâneos reforçam essa leitura. Segundo (LUTZ; SANDERSON; SCHERBOV, 2001), as projeções populacionais devem ser vistas como intervalos probabilísticos, não como previsões determinísticas, uma vez que dependem de variáveis como fecundidade, mortalidade e migração. Isso mostra que a Matemática aplicada à demografia não apenas descreve tendências passadas, mas também fornece ferramentas de incerteza para lidar com cenários futuros. Dando ênfase aos dados após o ano 2000 observamos os seguintes dados:

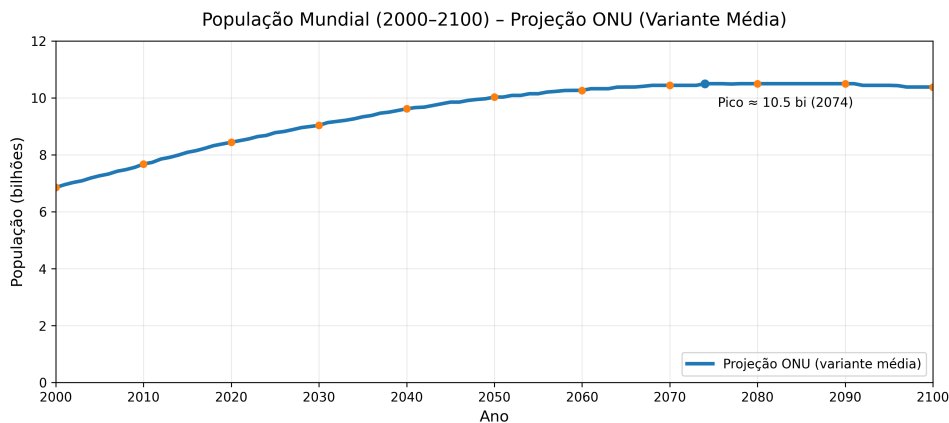


Figura 21 – Modelo de Crescimento Populacional Logístico

O ponto de inflexão, portanto, representa uma inflexão histórica e científica: ele indica que a humanidade entrou em uma nova etapa, na qual o crescimento absoluto continua elevado, mas o crescimento relativo diminui de forma constante. Tal comportamento será central para os estudos deste capítulo, pois marca a transição de uma era de expansão quase ilimitada para uma fase de contenção, em que os modelos matemáticos logísticos se mostram mais adequados para representar a realidade demográfica.

Embora a população continue crescendo em números absolutos até 2080, o ritmo desacelera significativamente. O pico de crescimento absoluto ocorre entre 2010 e 2020 (870 milhões), e a partir de 2050, os incrementos são bem menores, refletindo taxas de natalidade em declínio, especialmente em regiões desenvolvidas, e o envelhecimento populacional. A taxa de crescimento percentual cai drasticamente ao longo do século, indicando que a população cresce a um ritmo proporcionalmente menor. Isso é impulsionado por fatores como urbanização, maior acesso à educação, contraceptivos e mudanças socioeconômicas que reduzem a taxa de fecundidade global.

A estabilização e posterior declínio da população após 2080 sugerem desafios demográficos, como o envelhecimento da população e a pressão sobre sistemas de saúde e previdência, especialmente em países desenvolvidos. Em contrapartida, regiões com populações mais jovens (como partes da África) continuarão contribuindo para o crescimento

até meados do século.

## 4.2 Causas da Redução Populacional e o Envelhecimento Demográfico: Desafios Econômicos e Sociais

A projeção de declínio populacional global a partir do final do século XXI representa uma transição demográfica sem precedentes, contrastando com o crescimento acelerado observado nos séculos anteriores. De acordo com as estimativas do *World Population Prospects 2024* das Nações Unidas, o pico populacional mundial ocorrerá por volta da metade da década de 2080, atingindo aproximadamente 10,3 bilhões de habitantes, seguido de uma leve redução para 10,2 bilhões em 2100.

Essa inversão é impulsionada principalmente por taxas de fertilidade em declínio, que caíram de 3,31 nascimentos por mulher em 1990 para 2,25 em 2024, com mais da metade dos países abaixo do nível de reposição de 2,1. Fatores como urbanização, maior acesso à educação feminina, métodos contraceptivos e mudanças culturais priorizando carreiras e famílias menores contribuem para esse fenômeno, especialmente em nações desenvolvidas e em desenvolvimento acelerado, como China, Itália e Coreia do Sul, onde a fertilidade ultra-baixa (abaixo de 1,4) já é realidade. Além disso, a migração internacional pode atenuar ou acelerar o declínio em regiões específicas, mas não reverte a tendência global a longo prazo.

Paralelamente ao declínio populacional, o envelhecimento demográfico emerge como uma consequência inevitável dessa dinâmica. O aumento da expectativa de vida de 65 anos em 1995 para 73,3 anos em 2024, projetado para 77,4 anos em 2054, combinado com a redução da natalidade, resulta em uma estrutura etária mais envelhecida.

Projeções indicam que, até o final da década de 2070, o número de pessoas com 65 anos ou mais (2,2 bilhões) superará o de crianças menores de 18 anos, enquanto o contingente de indivíduos com 80 anos ou mais triplicará, atingindo 265 milhões já na metade da década de 2030. Em países que já atingiram o pico populacional, a proporção de idosos dobrará de 17% em 2024 para 33% em 2054, alcançando 40% em 2100, com variações regionais: na Ásia Oriental e Europa, o envelhecimento é mais pronunciado, enquanto na África Subsaariana, embora ainda jovem, a tendência acelera.

Essa inversão da pirâmide etária, modelada matematicamente por funções logísticas que preveem estabilização e declínio após o limite de capacidade (K), reflete a interseção entre geografia humana e demografia, onde espaços urbanos adaptados para idosos se tornam essenciais.

Os desafios decorrentes dessa redução e envelhecimento populacional são multifacetados, com impactos profundos na economia e nos sistemas sociais. A diminuição da mão

de obra ativa (faixa etária de 20-64 anos) fecha a “janela demográfica” de oportunidade, reduzindo a produtividade e o crescimento econômico, especialmente em nações com populações encolhendo, onde a força de trabalho pode declinar em até 14% até 2054. Isso exige estratégias como a inclusão de mulheres, idosos e imigrantes no mercado de trabalho, além de investimentos em automação e inteligência artificial para compensar a escassez de mão de obra.

No âmbito previdenciário, o envelhecimento sobrecarrega os sistemas de pensões, com menos contribuintes sustentando um número crescente de beneficiários mais da metade das mortes ocorrerão em pessoas com 80 anos ou mais até meados da década de 2040. Consequências incluem déficits fiscais, necessidade de reformas como aumento da idade de aposentadoria e fortalecimento de fundos privados, observadas em países como Japão e Alemanha. Ademais, pressões sobre saúde e assistência social amplificam desigualdades geográficas, demandando políticas integradas que considerem a modelagem matemática para prever e mitigar esses impactos, alinhando-se às teorias demográficas discutidas nos capítulos anteriores.

## 5 Roteiro de Atividades (Aluno)

**Estudante:** \_\_\_\_\_

**Turma:** \_\_\_\_\_

**Data:** \_\_\_\_\_

Atividade 1 – Crescimento Mundial (1900–2050) Observe no Atlas a População Mundial 1900–2050.

1.1) O gráfico se aproxima mais de qual modelo: exponencial ou logístico? Justifique.

1.2) Explique o significado do ponto de inflexão na curva global.

1.3) Identifique um período de desaceleração da taxa de crescimento e cite fatores explicativos.

**Tabela 1 – Síntese numérica (complete com valores do Atlas)**

Ano	População (bi)	Cresc. Absoluto (bi)	Cresc. %
1900			
1950			
2000			
2050			

**Cálculo:** Estime a taxa média de crescimento percentual entre 1950 e 2000. Mostre o raciocínio.

Atividade 2 – Brasil: Crescimento e Estabilização Considere a figura Modelo Logístico – Brasil (1900–2050).

- 2.1) Indique o período de maior crescimento e o período de desaceleração.
- 2.2) Interprete o parâmetro  $K$  (*capacidade de suporte*) para a população brasileira.
- 2.3) Discuta se o modelo logístico é mais realista que o exponencial, justificando.

**Tabela 2 – Brasil (complete a partir do Atlas)**

Década	Pop. (mi)	Taxa (%)	Observações socioeconômicas
1900			
1950			
1980			
2020			

Em quais décadas ocorreram mudanças estruturais relevantes (migração, urbanização, natalidade)?

Atividade 3 – Estado do Paraná Use a figura Modelo Logístico – Paraná (1900–2050).

- 3.1) Qual a capacidade de suporte estimada?
- 3.2) O modelo sugere continuidade de crescimento ou estabilização? Explique.
- 3.3) Relacione eventos históricos/econômicos que justificam a tendência.

**Tabela 3 – Paraná (complete a partir do Atlas)**

Ano	Pop. (mi)	Taxa (%)	Eventos marcantes
1930			
1970			
2000			
2050			

Atividade 4 – Santa Cruz de Monte Castelo (Estudo Local) Considere o Modelo Logístico com Retardo e Pirâmides Etárias 2010/2030.

4.1) O que o gráfico com retardo revela sobre a dinâmica após a Geada Negra (1975)?

4.2) Como o envelhecimento altera o formato da pirâmide?

4.3) Proponha políticas públicas para equilibrar a dinâmica demográfica local.

**Tabela 4 – Pirâmide etária (preencha com dados do Atlas)**

Faixa	2010 (%)	2030 (%)	Variação	Interpretação
0–14				
15–59				
60+				

Aponte se o município está em crescimento, transição ou envelhecimento, justificando pelos dados.

## Atividade 5 – Síntese e Reflexão

- 5.1) Compare mundo, Brasil, Paraná e Santa Cruz de Monte Castelo quanto à estabilidade e estágio demográfico.
  
- 5.2) Explique como a Matemática (modelagem) ajuda a interpretar fenômenos sociais/ambientais.
  
- 5.3) Redija um parágrafo relacionando sustentabilidade, crescimento populacional e educação.

Atividade Extra (Tecnologia e Modelagem) No GeoGebra ou Python, trace a curva logística

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$$

e teste valores de  $K$ ,  $r$ ,  $t_0$ . Descreva como a curva muda e qual cenário é mais sustentável.

## Observações ao Professor

- Estimule estimativas transparentes (como o aluno calculou taxas? Que intervalos usou?).
- Valorize a discussão sobre hipóteses do modelo e suas limitações (dados ruidosos, migrações, choques).
- Conecte as respostas com realidades locais e políticas públicas viáveis.

## 6 Guia Docente

### 6.1 Produto Educacional – Atlas Populacional

Autor: André Aparecido Franco

Programa: PROFMAT – Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Tema: Modelagem Matemática e Crescimento Populacional: uma abordagem interdisciplinar entre Matemática e Geografia

### 6.2 Fundamentação e propósito pedagógico

O Atlas Populacional foi desenvolvido como produto educacional vinculado à dissertação “Equações Diferenciais e Crescimento Populacional: uma abordagem interdisciplinar com a Geografia e as Teorias Demográficas”. Seu objetivo é promover a aprendizagem significativa de conceitos matemáticos e geográficos por meio da análise de dados populacionais reais (1900–2050), articulando teoria, prática e tecnologia.

O material propõe atividades investigativas em que o estudante interpreta tabelas, gráficos e curvas de crescimento (exponencial, logístico e com retardo), compreendendo os fenômenos demográficos como manifestações matemáticas e sociais.

### 6.3 Público-alvo

Estudantes do Ensino Médio (2º e 3º anos), em disciplinas de Matemática e Geografia, podendo ser adaptado também à EJA ou projetos interdisciplinares.

### 6.4 Objetivos de aprendizagem

- Compreender o crescimento populacional como fenômeno matemático e geográfico.
- Analisar dados em diferentes escalas (mundo, Brasil, Paraná, município).
- Interpretar gráficos/tabelas, reconhecendo padrões e estágios (início, inflexão, estabilização).
- Aplicar conceitos de funções exponenciais/logísticas para explicar tendências.
- Relacionar modelos a teorias demográficas (Malthus, Verhulst, Gompertz).

- Desenvolver pensamento crítico sobre sustentabilidade, urbanização e envelhecimento.

## 6.5 Competências da BNCC envolvidas

Código	Competência / Habilidade	Aplicação
<b>EM13MAT102</b>	Utilizar modelos algébricos, geométricos ou estatísticos para descrever e prever o comportamento de fenômenos.	Aplicação de modelos exponencial, logístico e com retardo para representar o crescimento populacional.
<b>EM13MAT403</b>	Investigar situações que envolvam variação e taxas de crescimento em contextos reais.	Análise de curvas de crescimento e cálculo de taxas percentuais em séries históricas (1900–2050).
<b>EMIFCG03</b>	Analisar fenômenos socioeconômicos e ambientais a partir de dados e indicadores.	Interpretação de gráficos sobre urbanização, envelhecimento e transição demográfica.
<b>EMIFCG11</b>	Utilizar diferentes linguagens (matemática, estatística, cartográfica) para compreender o território.	Leitura interdisciplinar de mapas e pirâmides etárias de Brasil, Paraná e Santa Cruz de Monte Castelo.
<b>EM13MAT405</b>	Avaliar limitações e potencialidades de modelos matemáticos frente a dados empíricos.	Discussão sobre adequação dos modelos logístico e com retardo aos dados locais.

## 6.6 Estratégia didática sugerida

1. **Introdução** (expositivo-dialogada): conceitos de crescimento e modelos.
2. **Leitura dirigida** de gráficos/tabelas do Atlas (trabalho em grupos).
3. **Aplicação**: resolução do Roteiro (individual ou duplas).
4. **Discussão**: implicações sociais/ambientais e políticas públicas.
5. **Síntese/Avaliação**: relatório curto ou painel temático.

## 6.7 Recursos

TV/Projeter, cópias do Atlas, calculadora, GeoGebra/Excel.

### 6.7.1 Avaliação sugerida (critérios)

- Interpretação correta de dados e representações.
- Identificação de variáveis, taxas e parâmetros dos modelos.
- Argumentação crítica sobre causas e consequências demográficas.
- Propostas coerentes de intervenção/gestão territorial sustentável.



## 7 Conclusão

O presente estudo evidenciou a potência da modelagem matemática como instrumento de compreensão das dinâmicas demográficas, permitindo transpor o limite da abstração algébrica para o campo da interpretação social e geográfica dos fenômenos populacionais. Ao longo da dissertação, a articulação entre Matemática e Geografia demonstrou que o crescimento populacional, mais do que um processo quantitativo, constitui uma manifestação complexa da relação entre sociedade, espaço e meio ambiente.

A partir da análise histórica das teorias demográficas, observou-se que o pensamento de Malthus estabeleceu os fundamentos para a compreensão da tensão entre crescimento populacional e disponibilidade de recursos, enquanto o modelo logístico de Verhulst introduziu a noção de capacidade de suporte ambiental, antecipando debates atuais sobre sustentabilidade. As contribuições posteriores de Gompertz e Montroll trouxeram refinamentos conceituais que ampliaram a aplicabilidade das equações diferenciais a contextos biológicos e sociais mais complexos. Por sua vez, as formulações de Belair incorporaram a dimensão temporal do retardo, capturando os efeitos de feedback demográfico retardado e revelando oscilações que aproximam os modelos da realidade empírica.

As simulações realizadas para o Brasil, o estado do Paraná e o município de Santa Cruz de Monte Castelo ilustraram de forma empírica essas concepções. No caso brasileiro, o modelo logístico mostrou-se mais adequado para representar a transição demográfica já consolidada, com projeção de estabilização em torno de 243 milhões de habitantes, valor convergente com as estimativas da ONU. No Paraná, o mesmo modelo reproduziu com precisão o processo de desaceleração iniciado na década de 1970, marcado pela urbanização e pela redução das taxas de fecundidade. Já em Santa Cruz de Monte Castelo, a introdução de um modelo logístico com retardo permitiu compreender as flutuações demográficas decorrentes de eventos históricos, como a Geada Negra de 1975, evidenciando como choques ambientais e econômicos interferem na dinâmica populacional local.

Os gráficos apresentados ao longo do trabalho (Figuras 10 a 18) sintetizaram visualmente as etapas de crescimento e estabilização, as oscilações devidas aos atrasos temporais e as modificações estruturais da população especialmente as pirâmides etárias de 2010 e 2030, que revelam o avanço do envelhecimento populacional e a transição para um padrão estacionário. Essas representações visuais, aliadas ao tratamento matemático rigoroso, ofereceram uma visão integrada do fenômeno demográfico, corroborando a afirmação de Bassanezi de que a modelagem matemática “dá significado ao ensino da Matemática ao vinculá-la a contextos reais e socialmente relevantes”.

Do ponto de vista epistemológico, a dissertação confirma a relevância da inter-

disciplinaridade como princípio formativo. A aproximação entre os campos da Matemática e da Geografia, mediada pela modelagem, permitiu compreender a população não como mero conjunto numérico, mas como estrutura viva em transformação, permeada por fatores econômicos, culturais e ambientais. Essa visão converge com o pensamento de (FREIRE, 1987), ao propor uma educação dialógica, crítica e libertadora, capaz de reconectar o conhecimento científico à realidade social do estudante.

As análises realizadas também dialogam com autores contemporâneos como Murray, que defende o uso das equações diferenciais como instrumento para descrever sistemas biológicos e sociais dinâmicos, e (CHESNAIS, 1992), que interpreta a transição demográfica como expressão da modernização estrutural das sociedades. Ao integrar essas perspectivas, o trabalho evidencia que o comportamento populacional global segue trajetórias logísticas de longo prazo, nas quais o crescimento absoluto continua, mas o crescimento relativo tende à desaceleração — fenômeno diretamente associado ao aumento da urbanização, à educação das mulheres e ao avanço tecnológico.

Do ponto de vista pedagógico, a presente pesquisa reforça o valor da modelagem matemática como estratégia didática no Ensino Médio, capaz de promover aprendizagens significativas e conectadas à realidade. O uso de dados locais e regionais, aliado à leitura crítica de gráficos e à interpretação geográfica dos resultados, contribui para formar estudantes que compreendem a Matemática não apenas como linguagem formal, mas como ferramenta de análise social e de tomada de decisão. Essa abordagem favorece a formação de sujeitos críticos, autônomos e comprometidos com os desafios do desenvolvimento sustentável conforme os princípios da ONU e da Agenda 2030.

Por fim, conclui-se que a modelagem do crescimento populacional, fundamentada em equações diferenciais e contextualizada por teorias demográficas, constitui uma ponte fecunda entre a abstração matemática e a concretude social. O diálogo entre dados, modelos e contextos históricos não apenas enriquece a compreensão científica do fenômeno, mas também amplia o horizonte pedagógico da Matemática, revelando seu papel essencial na leitura e transformação do mundo.

Como perspectiva futura, recomenda-se o aprofundamento do estudo com modelos híbridos, que combinem componentes determinísticos e estocásticos, bem como o desenvolvimento de ferramentas computacionais educacionais (em Python ou GeoGebra) para o ensino interativo da modelagem populacional. Assim, o trabalho aqui desenvolvido contribui não apenas para o avanço do campo da Educação Matemática aplicada à demografia, mas também para a consolidação de uma ciência escolar crítica, interdisciplinar e socialmente engajada.

# Referências

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002. Citado na página 14.
- BELAIR, J.; MACKEY, M. C. Consumer–resource equations with delayed density dependence. *Theoretical Population Biology*, v. 30, p. 1–20, 1986. Citado na página 34.
- CHESNAIS, J.-C. *The Demographic Transition: Stages, Patterns, and Economic Implications*. Oxford: Clarendon Press, 1992. Citado na página 72.
- FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987. Citado na página 72.
- LUTZ, W.; SANDERSON, W.; SCHERBOV, S. The uncertainty in population projections. *Nature*, v. 412, n. 6846, p. 543–544, 2001. Citado na página 60.
- MALTHUS, T. R. *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, 1798. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- MONTEIRO, C. A.; OLIVEIRA, J. A. Transição demográfica e desenvolvimento socioeconômico. *Revista Brasileira de Estudos Populacionais*, v. 21, n. 1, p. 65–90, 2004. Citado na página 11.
- MURRAY, J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*. 3. ed. New York: Springer, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 27, 45 e 47.
- NAVARRO, V. Neomalthusianismo e políticas de controle populacional. *Revista Brasileira de Geografia Econômica*, v. 2, n. 3, p. 112–130, 2014. Citado na página 11.
- OLIVEIRA, A. P. Modelagem matemática aplicada ao crescimento populacional. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 10, n. 1, p. 35–52, 2019. Citado na página 15.