



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Joy Joaquim Pedro da Costa

Novas demonstrações do milenar Teorema de Pitágoras e uma história de inclusão de meninas na Matemática! Um exemplo pedagógico!

Campina Grande - PB

Abril/2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Joy Joaquim Pedro da Costa

**Novas demonstrações do milenar Teorema de Pitágoras
e uma história de inclusão de meninas na Matemática!
Um exemplo pedagógico!**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho

Campina Grande - PB
Abril/2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

C837n Costa, Joy Joaquim Pedro da.
 Novas demonstrações do milenar teorema de Pitágoras e uma história de inclusão de meninas na matemática! um exemplo pedagógico! / Joy Joaquim Pedro da Costa. – 2026.
 111 f. ; il. color.

 Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.
 "Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
 Referências.

 1. Teorema de Pitágoras. 2. Demonstrações Trigonométricas.
 3. História da Matemática. 4. Mulheres na Matemática. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

UFCG/BC

CDU 514.11(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECARIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Joy Joaquim Pedro da Costa

Novas demonstrações do milenar Teorema de Pitágoras e uma história de inclusão de meninas na Matemática!

Um exemplo pedagógico!

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em
Matemática - CCT - UFCG, na modalidade
Mestrado Profissional, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 26 de maio de 2026:

Documento assinado digitalmente
 **DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO**
Data: 27/05/2026 11:47:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho

Orientador – UFCG

Documento assinado digitalmente
 **CARLOS ALEXANDRE GOMES DA SILVA**
Data: 27/05/2026 17:18:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva

Examinador externo(a) – UFRN

Documento assinado digitalmente
 **LEOMQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO**
Data: 27/05/2026 14:57:06-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo

Examinador interno - UFCG

Campina Grande - PB

Maio/2026

AGRADECIMENTOS

A todos os meus mestres — aqueles que estiveram diante de uma lousa e aqueles que ensinaram com o exemplo, com o silêncio, com a escuta ou com a palavra certa no momento exato. Aos professores que me guiaram pelas trilhas do saber e às pessoas queridas — familiares, amigos, companheiros de caminhada — que, sem serem docentes por ofício, me legaram lições profundas sobre coragem, ética, persistência e humanidade: este trabalho também é fruto dos ensinamentos que colhi de cada um de vocês.

Em especial, ao Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho, meu orientador, cuja generosidade intelectual, paciência e incentivo foram pilares fundamentais para a realização deste sonho. Sua confiança em mim, mesmo quando eu duvidava, fez toda a diferença.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso investiga criticamente a afirmação histórica de Elisha Scott Loomis, em *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968), de que “não existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras”. A partir da análise das contribuições recentes de Jason Zimba (ZIMBA, 2009), Nuno Luzia (LUZIA, 2015) e, especialmente, das jovens Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson (JACKSON; AND, 2024) — adolescentes negras, de uma escola católica em um subúrbio de Nova Orleans, um contexto frequentemente marginalizado nos espaços científicos — e, pela falta de uma definição clara do que seria tal tipo de demonstração nas bibliografias estudadas, propõe-se uma definição operacional rigorosa: **demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam identidades trigonométricas cujas próprias demonstrações não dependem do Teorema de Pitágoras**. Com base nessa definição, desenvolvem-se três demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras originais, todas fundamentadas exclusivamente na trigonometria do triângulo retângulo, ou seja, nas razões trigonométricas definidas por semelhança, sem recorrer ao ciclo trigonométrico nem à Relação Fundamental da Trigonometria — $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ — como premissa. O trabalho também analisa a circularidade presente na demonstração de Versluys (VERSLUYS, 1914) e discute as controvérsias epistemológicas e pedagógicas em torno da suposta impossibilidade de demonstrações trigonométricas. Como desdobramento prático, elabora-se um Produto Educacional composto por um vídeo motivacional e uma Atividade Dirigida de Aprendizagem (ADA) voltada para estudantes do Ensino Médio, inspirada na trajetória de Jackson e Johnson, com o objetivo de humanizar a matemática e estimular a investigação criativa. Este estudo não apenas corrige um equívoco epistemológico centenário, mas também reafirma que a matemática é um campo vivo, acessível e coletivo — onde novas vozes continuam a transformar verdades aparentemente consolidadas.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; demonstrações trigonométricas; história da matemática; mulheres na matemática.

ABSTRACT

This Final Course Work critically examines the historical claim by Elisha Scott Loomis in *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968) that “there are no trigonometric proofs of the Pythagorean Theorem.” Drawing on recent contributions by Jason Zimba (ZIMBA, 2009), Nuno Luzia (LUZIA, 2015), and especially the young students Ne’Kiya Jackson and Calcea Johnson (JACKSON; AND, 2024) — afro-american girls, teenagers, from a Catholic school in a suburb of New Orleans, a context often marginalized in scientific spaces —and, due to the lack of a clear definition of what such a type of demonstration would be in the studied bibliographies, a rigorous operational definition is proposed: **trigonometric proofs of the Pythagorean Theorem are those that employ trigonometric identities whose own derivations do not depend on the Pythagorean Theorem itself.** Based on this definition, three original trigonometric proofs of the Pythagorean Theorem are developed, all based exclusively on the trigonometry of the right triangle, that is, on trigonometric ratios defined by similarity, without invoking the unit circle or the pythagorean identity — $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ — as an assumption. The study also analyzes the circularity in Versluys’ (VERSLUYS, 1914) proof and discusses the epistemological and pedagogical controversies surrounding the alleged impossibility of trigonometric demonstrations. As a practical outcome, we developed an Educational Product consisting of a motivational video and a Guided Learning Activity (GLA) for high school students, inspired by Jackson and Johnson’s journey, aiming to humanize mathematics and foster creative inquiry. This work not only corrects a century-old epistemological misconception but also reaffirms that mathematics is a living, accessible, and collective field — where new voices continue to reshape seemingly settled truths.

Keywords: Pythagorean Theorem; trigonometric proofs; history of mathematics; women in mathematics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Elisha Scott Loomis - 1894.	14
Figura 2 – Classificação das demonstrações extraída do livro de Loomis.	15
Figura 3 – Demonstração algébrica extraída do livro de Loomis.	17
Figura 4 – Demonstração geométrica extraída do livro de Loomis.	19
Figura 5 – Quinta consideração extraída do livro de Loomis.	21
Figura 6 – Argumento para a impossibilidade de demonstrações trigonométricas extraído do livro de Loomis.	23
Figura 7 – Triângulo retângulos semelhantes.	25
Figura 8 – Construção da soma de ângulos.	29
Figura 9 – Triângulo acutângulo inscrito.	31
Figura 10 – Triângulo obtusângulo inscrito.	32
Figura 11 – Triângulo obtusângulo inscrito 2.	33
Figura 12 – Suplemento do seno.	33
Figura 13 – Triângulo retângulo inscrito.	34
Figura 14 – Ciclo Trigonométrico.	36
Figura 15 – Triângulo Retângulo ABC .	36
Figura 16 – “Demonstração trigonométrica” extraída do livro de Versluys.	42
Figura 17 – Demonstração das fórmulas da diferença extraída do trabalho de Zimba.	48
Figura 18 – A Demonstração Trigonométrica extraída do trabalho de Zimba.	50
Figura 19 – Preliminares extraída do trabalho de Luzia.	54
Figura 20 – Demonstração do Teorema de Pitágoras via fórmulas do ângulo metade extraída do trabalho de Luzia.	56
Figura 21 – Segunda demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras extraída do trabalho de Luzia.	58
Figura 22 – Comentário da demonstração #84 extraído do site Cut-The-Knot.	62
Figura 23 – Definições trigonométricas extraídas do trabalho de Jackson e Johnson.	65
Figura 24 – Triângulos semelhantes extraídos do trabalho de Jackson e Johnson.	66
Figura 25 – Triângulo agudo ABC .	68
Figura 26 – Construção geométrica da Lei dos Cossenos para um triângulo retângulo.	71
Figura 27 – Demonstração da Lei dos Senos extraída do trabalho de Jackson e John- son.	73
Figura 28 – Demonstração das fórmulas da soma de ângulos extraída do trabalho de Jackson e Johnson.	74
Figura 29 – Caso: Triângulo isósceles extraído do trabalho de Jackson e Johnson.	76
Figura 30 – Lema 1 extraído do trabalho de Jackson e Johnson.	77

Figura 31 – Primeira demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson (Parte	
A).	80
Figura 32 – Primeira demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson (Parte	
B).	81
Figura 33 – Segunda demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.	85
Figura 34 – Terceira demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.	88
Figura 35 – Quarta demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.	91
Figura 36 – Quinta demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.	95

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação das demonstrações por semelhança de triângulos e por	
razões trigonométricas.	39

Lista de quadros

1	Tradução da Figura 2	16
2	Tradução da Figura 3	18
3	Tradução da Figura 4	20
4	Tradução da Figura 5	21
5	Tradução da Figura 6	24
6	Tradução da Figura 16	43
7	Tradução da Figura 18	49
8	Tradução da Figura 18	51
9	Tradução da Figura 19	55
10	Tradução da Figura 20	57
11	Tradução da Figura 21	59
12	Tradução da Figura 22	63
13	Tradução da figura 27	74
14	Tradução da figura 28	75
15	Tradução da figura 30	78
16	Tradução da Figura 31	82
17	Tradução da Figura 32	83
18	Tradução da Figura 33	86
19	Tradução da Figura 34	89
20	Tradução da Figura 35	92
21	Tradução da Figura 36	96

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivos	12
1.2	Organização	13
2	NÃO EXISTE “DEMONSTRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA” DO TEOREMA DE PITÁGORAS	14
2.1	The Pithagorean Proposition	15
2.1.1	Demonstrações Algébricas	16
2.1.2	Demonstrações Geométricas	19
2.1.3	Demonstrações Quaterniônicas e Demonstrações Dinâmicas	20
2.1.4	Demonstrações Trigonométricas: o “tabu” de Loomis e o desafio que motivou essa pesquisa	20
3	O QUE SÃO DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TEOREMA DE PITÁGORAS?	23
3.1	Razões Trigonométricas do Triângulo Retângulo	25
3.2	Identidades Trigonométricas do Triângulo Retângulo	28
3.2.1	Fórmulas da Soma de Ângulos	28
3.2.2	Lei dos Senos	30
3.2.3	Relação Fundamental da Trigonometria	35
3.3	Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras	38
3.3.1	Uma Nova Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras	39
3.4	Referência Circular: A demonstração de Versluys	41
4	DESAFIANDO O SENSO COMUM: NOVAS DEMONSTRA- ÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO SÉCULO XXI	46
4.1	Jason Zimba: A primeira demonstração trigonométrica rigorosa	46
4.1.1	A demonstração trigonométrica de Zimba	47
4.1.2	Uma alternativa à demonstração trigonométrica de Zimba	52
4.2	Nuno Luzia: Novas abordagens para um teorema antigo	53
4.3	Repercussão e controvérsias: o debate na comunidade matemática	61
5	JOVENS PROTAGONISTAS	64
5.1	Duas Novas Demonstrações do Teorema de Pitágoras	67

6	AS DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE JACKSON E JOHNSON	
	E JOHNSON	73
6.1	A primeira demonstração de Jackson e Johnson	79
6.2	A segunda demonstração de Jackson e Johnson	85
6.3	A terceira demonstração de Jackson e Johnson	88
6.4	A quarta demonstração de Jackson e Johnson	90
6.5	A quinta demonstração de Jackson e Johnson	94
6.6	O que Jackson e Johnson demonstraram.	97
7	PRODUTO EDUCACIONAL: CONSTRUINDO UMA DEMONSTRAÇÃO ATUAL DO TEOREMA DE PITÁGORAS E UMA HISTÓRIA DE INCLUSÃO DE MENINAS NA MATEMÁTICA	98
7.1	Contexto histórico e a motivação deste trabalho	98
7.2	Atividade Dirigida de Aprendizagem	100
7.2.1	O que é uma Atividade Dirigida de Aprendizagem?	100
7.2.2	Por que produzir uma ADA?	100
7.2.3	Escolha das demonstrações	101
7.2.4	Produção do vídeo motivacional	102
7.3	Aplicação do Produto Educacional	103
7.3.1	Momento de aplicação	103
7.3.2	Como aplicar	104
7.3.3	Questões orientadoras para discussão em sala de aula	104
7.4	Objetivos Pedagógicos	105
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICES	111

1 Introdução

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi motivado por um acontecimento recente e simbolicamente poderoso: a apresentação, em 2023, de cinco novas demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras pelas estudantes Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, de uma escola católica em Nova Orleans. Seu trabalho (JACKSON; AND, 2024), inicialmente desenvolvido para um concurso escolar, desafiou frontalmente uma afirmação consagrada há mais de um século: a de que “não existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras”, proclamada por Elisha Scott Loomis em sua obra *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968).

Ao investigar as demonstrações de Jackson e Johnson, fomos conduzidos às contribuições pioneiras de Jason Zimba (ZIMBA, 2009) e Nuno Luzia (LUZIA, 2015), cujos trabalhos já haviam delineado caminhos rigorosos para demonstrações trigonométricas não circulares, ou seja, que não pressupõem o próprio Teorema de Pitágoras. Contudo, apesar desses avanços, notamos a ausência, mesmo nos trabalhos em que se fala desse conceito, de uma definição clara e operacional do que, de fato, constituiria uma “demonstração trigonométrica” legítima. Essa lacuna conceitual orientou o cerne desta pesquisa.

Diante disso, propusemos a seguinte definição: **demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependem do Teorema de Pitágoras.** Com base nesse critério, nós produzimos três demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras originais, todas fundamentadas exclusivamente na trigonometria do triângulo retângulo, isto é, nas razões trigonométricas definidas por semelhança, sem recorrer ao ciclo trigonométrico nem à Relação Fundamental da Trigonometria, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, como premissa.

Além do aspecto técnico, este trabalho busca refletir criticamente sobre a estrutura do ensino da matemática. A trigonometria, frequentemente relegada a um “apêndice do apêndice” nos currículos, merece um lugar central, especialmente se reconhecermos que suas bases lógicas podem ser estabelecidas independentemente do Teorema de Pitágoras. Mais ainda, defendemos que a geometria, com seu caráter visual e intuitivo, deveria preceder a álgebra e até mesmo a aritmética formal no percurso educacional, invertendo a ordem tradicionalmente adotada.

Por fim, este TCC culmina em um Produto Educacional: uma Atividade Dirigida de Aprendizagem (ADA) inspirada na trajetória de Jackson e Johnson, que convida estudantes do Ensino Médio a experimentar a matemática como criação coletiva, acessível e profundamente humana.

1.1 Objetivos

Objetivo geral:

Analisar criticamente a afirmação de que “não existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras”, propor uma definição operacional rigorosa para esse tipo de demonstração e produzir demonstrações originais que satisfaçam tal definição, contribuindo não apenas para a correção de um equívoco epistemológico consolidado na literatura matemática, mas também para a construção de um exemplo pedagógico que valorize a diversidade e a inclusão na matemática — em especial, ao visibilizar o protagonismo de mulheres, jovens, negros e estudantes de contextos periféricos como sujeitos legítimos e criativos do conhecimento matemático.

Objetivos específicos:

- Investigar historicamente a origem e a influência da proscrição de Loomis sobre demonstrações trigonométricas;
- Examinar as demonstrações de Jason Zimba, Nuno Luzia, Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, avaliando sua validade lógica e ausência de circularidade;
- Propor uma definição clara e funcional de “demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras”;
- Elaborar demonstrações originais que atendam aos critérios dessa definição;
- Desenvolver um Produto Educacional (vídeo motivacional e Atividade Dirigida de Aprendizagem – ADA) que traduza essa investigação em uma experiência significativa para estudantes do Ensino Médio, inspirada na trajetória de Jackson e Johnson e comprometida com a democratização do acesso à matemática como prática criativa e coletiva.

1.2 Organização

Este trabalho está organizado em sete capítulos. O Capítulo 1 é a presente introdução. O Capítulo 2 apresenta a obra de Elisha Scott Loomis (LOOMIS, 1968) e sua célebre afirmação de que “não existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras”, contextualizando-a historicamente e destacando sua influência duradoura. O Capítulo 3 questiona essa proscricção, analisa os fundamentos da trigonometria do triângulo retângulo e propõe uma definição operacional de demonstração trigonométrica, além de apresentar uma demonstração original.

O Capítulo 4 examina as primeiras respostas acadêmicas ao dogma de Loomis, com foco nas contribuições de Jason Zimba (ZIMBA, 2009) e Nuno Luzia (LUZIA, 2015), e discute as controvérsias surgidas em fóruns matemáticos (CUT-THE-KNOT.ORG, 2025) e na Wikipédia (WIKIPEDIA, 2025c). O Capítulo 5 introduz as jovens protagonistas Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, explorando o contexto, a motivação e a crítica epistemológica à “ciclotopia”, conceito criado por elas para definir a trigonometria do ciclo trigonométrico, em distinção à trigonometria do triângulo retângulo. O Capítulo 6 analisa detalhadamente as cinco demonstrações por elas apresentadas (JACKSON; AND, 2024), verificando sua conformidade com a definição proposta.

Por fim, o Capítulo 7 descreve o Produto Educacional desenvolvido: um vídeo motivacional e uma Atividade Dirigida de Aprendizagem (ADA) voltada para estudantes do Ensino Médio — especialmente meninas negras e jovens de contextos periféricos —, cujo objetivo é humanizar a matemática, desconstruir mitos sobre quem pode produzi-la e estimular a investigação criativa.

2 Não existe “demonstração trigonométrica” do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais conhecidos e fundamentais da Matemática. Sua formulação — *em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa* — é, não apenas elegante e prática, mas também rica em variedade de possíveis demonstrações. Existem centenas de demonstrações distintas, provenientes de diversas épocas e culturas, o que testemunha a universalidade e a profundidade desse teorema ao longo da história da matemática.

Essa riqueza de demonstrações motivou, ao longo do tempo, trabalhos dedicados à sua coleta, análise e organização. Entre eles, destaca-se o livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis — obra que será aqui examinada como referência central para a análise das demonstrações existentes e, em particular, para a discussão sobre os limites e possibilidades de demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras.

Figura 1 – Elisha Scott Loomis - 1894.



Fonte: (WIKIPEDIA, 2025a)

Elisha Scott Loomis (18 de setembro de 1852 - 11 de dezembro de 1940) (Figura 1) foi um professor, matemático, genealogista, escritor e engenheiro. Nasceu em uma cabana de madeira em Wadsworth, Ohio, e demonstrou desde cedo um intelecto notável e uma paixão pela educação. Dedicou grande parte da sua vida ao ensino, mas é mais conhecido pela sua obra, *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968), que traduzindo significa “O

Teorema de Pitágoras”. Publicada originalmente em 1927, com 230 demonstrações, possui uma edição datilografada com máquina de escrever da época e foi reeditada em 1940, quando novas demonstrações e 366 imagens foram acrescentadas. (WIKIPEDIA, 2025a)

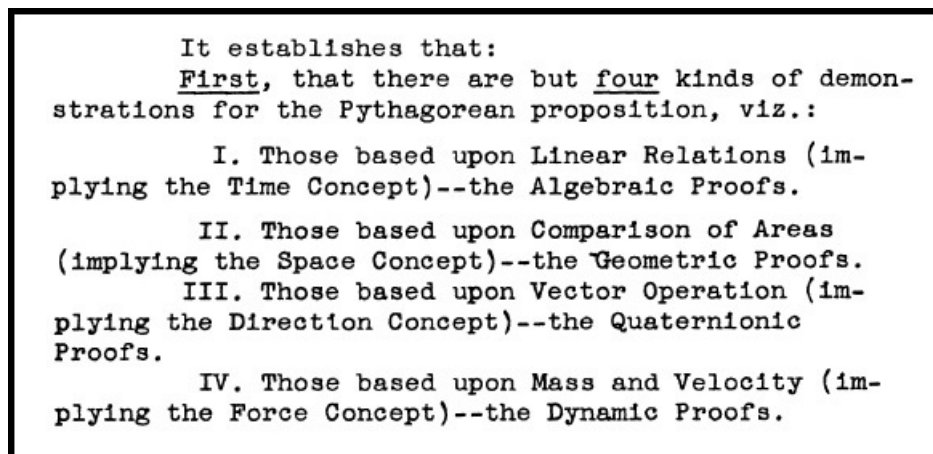
2.1 The Pithagorean Proposition

O livro *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968), disponibilizado no site https://archive.org/details/pythagoreanpropo0000loom_b2m3, é uma compilação de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras, cujas origens, segundo o autor, datam de 900 A.C. até 1940 D.C. Loomis, na página (viii) do prefácio do seu livro, classifica as demonstrações em quatro categorias:

- Algébricas (109 demonstrações);
- Geométricas (255 demonstrações);
- Quaterniônicas (4 demonstrações);
- Dinâmicas (2 demonstrações).

Essa classificação pode ser observada na Figura 2.

Figura 2 – Classificação das demonstrações extraída do livro de Loomis.



Fonte: (LOOMIS, 1968)

No decorrer deste trabalho, traduziremos livremente alguns trechos da obra de Loomis. A seguir, no Quadro 1, apresentamos a tradução da classificação das demonstrações segundo Loomis, exibida na Figura 2.

Quadro 1 – Tradução da Figura 2

Fica estabelecido que:

Primeiro, que existem quatro tipos de demonstração do *Teorema de Pitágoras*, veja:

I. Aquelas baseadas em Relações Lineares (implicando o Conceito de Tempo) – as Demonstrações Algébricas.

II. Aquelas baseadas na Comparação de Áreas (implicando o Conceito de Espaço) – as Demonstrações Geométricas.

III. Aquelas baseadas na Operação com Vetores (implicando o Conceito de Direção) – as Demonstrações Quaterniônicas.

IV. Aquelas baseadas em Massa e Velocidade (implicando o Conceito de Força) – as Demonstrações Dinâmicas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

As próximas seções explorarão algumas dessas categorias, apontando suas características principais e apresentando exemplos extraídos da obra de Loomis.

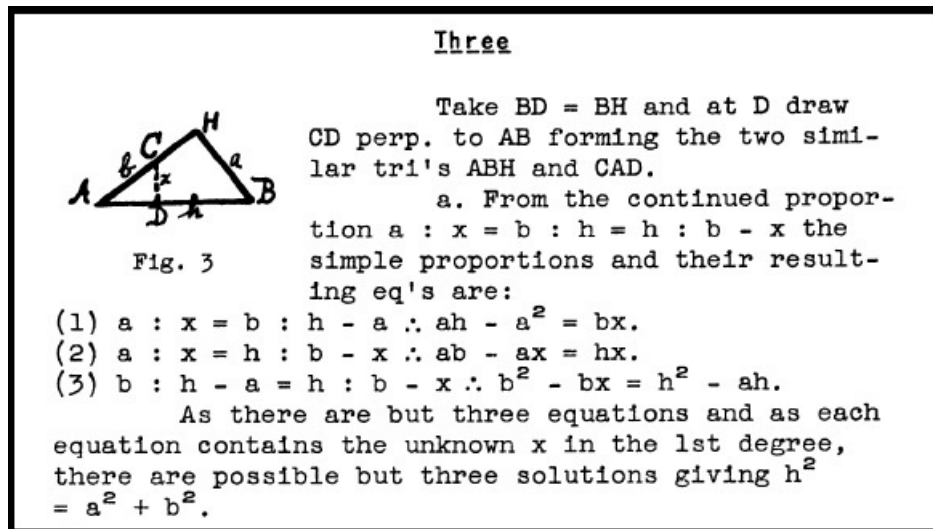
2.1.1 Demonstrações Algébricas

Para Loomis, as demonstrações algébricas são aquelas baseadas no princípio da proporcionalidade e se subdividem em:

- Semelhança de triângulos retângulos;
- Média geométrica;
- Pelo uso de círculos;
- Razão entre áreas;
- Teoria dos limites;
- Algébrico-geométricas;
- Semelhança de polígonos (não quadrados).

Observe, na Figura 3, a ‘demonstração algébrica 3’, extraída da página 26 do livro de Loomis (LOOMIS, 1968) — um exemplo que utiliza a semelhança de triângulos retângulos.

Figura 3 – Demonstração algébrica extraída do livro de Loomis.



Fonte: (LOOMIS, 1968)

Veja, no Quadro 2, a tradução da ‘demonstração algébrica 3’, extraída da página 26 do livro de Loomis (LOOMIS, 1968), exibida na Figura 3. A resolução detalhada das três possíveis soluções foi acrescentada por nós, a fim de esclarecer o raciocínio implícito na demonstração original, que não a inclui.

Quadro 2 – Tradução da Figura 3

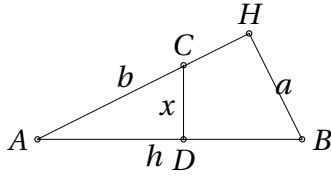


Fig. 3

Três

Tome $\overline{BD} = \overline{BH}$ e em D desenhe CD perpendicular a AB formando dois triângulos semelhantes ABH e ACD .

a. De onde seguem as proporções $a : x = b : h - a = h : b - x$ cujas equações resultantes são:

- (1) $a : x = b : h - a \therefore ah - a^2 = bx$.
- (2) $a : x = h : b - x \therefore ab - ax = hx$.
- (3) $b : h - a = h : b - x \therefore b^2 - bx = h^2 - ah$.

Como existem apenas três equações e cada equação contém a incógnita x no primeiro grau, existem apenas três soluções possíveis, dando $h^2 = a^2 + b^2$.

A resolução abaixo foi acrescentada por nós.

Isolando x nas equações (1), (2) e (3):

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{h-a} \therefore ah - a^2 = bx \Rightarrow x = \frac{ah - a^2}{b}, \quad (2.1)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{b-x} \therefore ab - ax = hx \Rightarrow x = \frac{ab}{a+h}, \quad (2.2)$$

$$\frac{b}{h-a} = \frac{h}{b-x} \therefore b^2 - bx = h^2 - ah \Rightarrow x = \frac{ah + b^2 - h^2}{b}. \quad (2.3)$$

Caso 1: De 2.1 e 2.2

$$\frac{ah - a^2}{b} = \frac{ab}{a+h} \Rightarrow (a+h)(ah - a^2) = ab^2 \Rightarrow a^2h + ah^2 - a^3 - a^2h = ab^2.$$

Dividindo ambos os membros da equação por a :

$$h^2 - a^2 = b^2 \therefore a^2 + b^2 = h^2.$$

Caso 2: De 2.1 e 2.3

$$\frac{ah - a^2}{b} = \frac{ah + b^2 - h^2}{b} \Rightarrow -a^2 = b^2 - h^2 \therefore a^2 + b^2 = h^2.$$

Caso 3: De 2.2 e 2.3

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+h} &= \frac{ah + b^2 - h^2}{b} \Rightarrow ab^2 = (a+h)(ah + b^2 - h^2) \\ &\Rightarrow ab^2 = a^2h + ab^2 - ah^2 + ah^2 + hb^2 - h^3. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da equação por h :

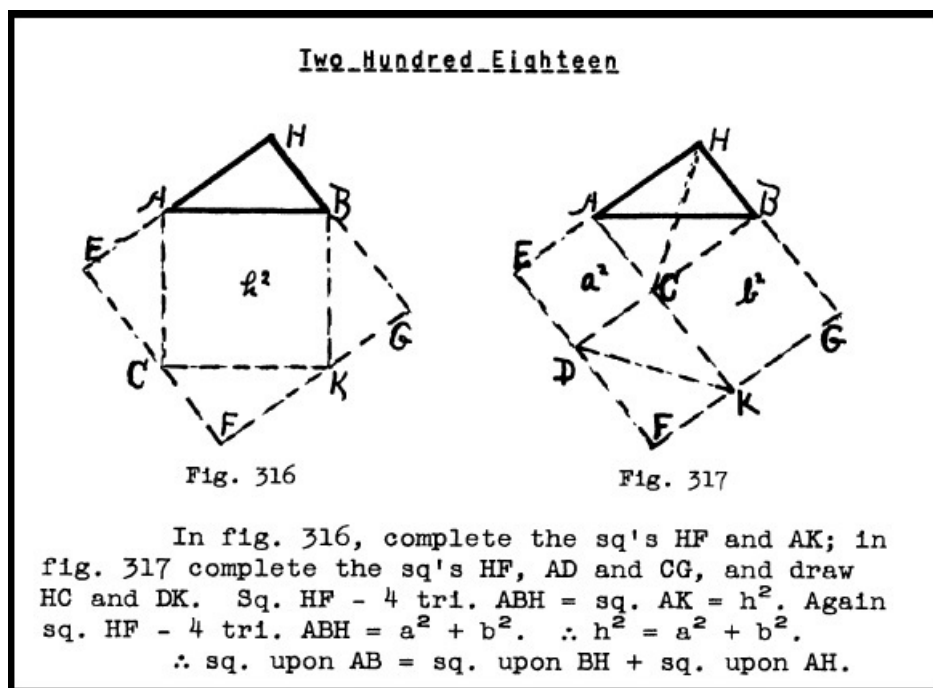
$$0 = a^2 + b^2 - h^2 \therefore a^2 + b^2 = h^2.$$

2.1.2 Demonstrações Geométricas

Segundo Loomis, todas as demonstrações geométricas decorrem da comparação da área de quadrados, que são subdivididos em 10 tipos a depender se o quadrado da hipotenusa e os quadrados dos catetos são desenhados no interior ou no exterior do triângulo retângulo.

A seguir, na Figura 4, como exemplo ilustrativo dessa classificação, apresentamos a ‘demonstração geométrica 218’, extraída da página 223 do livro de Loomis (LOOMIS, 1968), demonstração na qual os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa são construídos no exterior do triângulo.

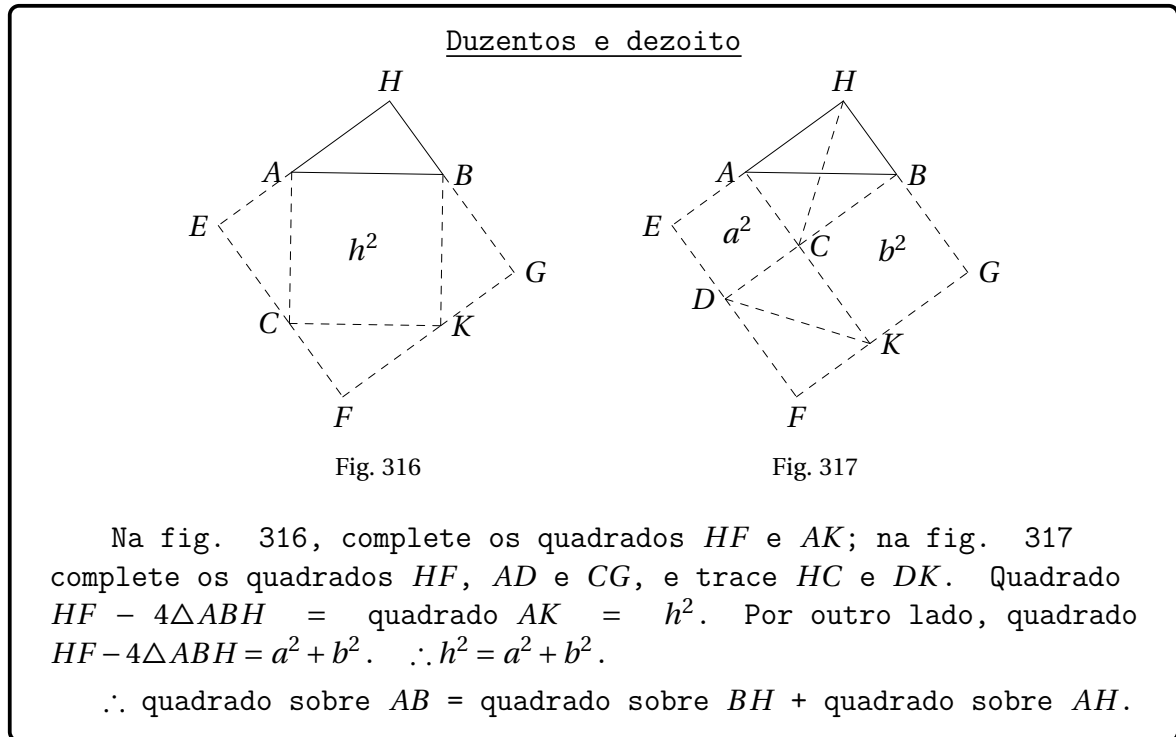
Figura 4 – Demonstração geométrica extraída do livro de Loomis.



Fonte: (LOOMIS, 1968)

Veja, no Quadro 3, a tradução da ‘demonstração geométrica 218’, extraída da página 223 do livro de Loomis (LOOMIS, 1968), exibida na Figura 4.

Quadro 3 – Tradução da Figura 4



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

2.1.3 Demonstrações Quaterniônicas e Demonstrações Dinâmicas

As demonstrações quaterniônicas são aquelas baseadas na operação com vetores e as demonstrações dinâmicas são aquelas que empregam princípios físicos de massa e velocidade. Embora intrigantes, essas categorias não serão exploradas neste trabalho, por fugirem ao escopo da investigação proposta.

2.1.4 Demonstrações Trigonométricas: o “tabu” de Loomis e o desafio que motivou essa pesquisa

Loomis afirma, no prefácio da sua obra, vide Figura 5, que “nenhuma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras é possível”, argumentando que a própria ciência da Trigonometria, e tudo o que dela deriva, seria impossível sem o Teorema de Pitágoras.

Figura 5 – Quinta consideração extraída do livro de Loomis.

Fifth, that no trigonometric proof is possible.

With the hope that this simple exposition of this historically renowned and mathematically fundamental proposition, without which the science of Trigonometry and all that it implies would be impossible, may interest many minds and prove helpful and suggestive to the student, the teacher and the future original investigator, to each and to all who are seeking more light, the author, sends it forth.

Fonte: (LOOMIS 1968)

Segue-se, no Quadro 4, a tradução livre da quinta consideração de Loomis, exibida na Figura 5.

Quadro 4 – Tradução da Figura 5

Quinto, que nenhuma demonstração trigonométrica é possível.

Com a esperança de que a exposição desse fundamental e historicamente renomado teorema, sem a qual a ciência da Trigonometria e tudo o que ela implica seriam impossíveis, possa interessar muitas mentes e se mostrar útil e sugestiva para o estudante, o professor e o futuro pesquisador, para os quais o autor manda suas considerações.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A afirmação de Loomis — “nenhuma demonstração trigonométrica é possível” — não é apenas uma observação técnica: é um marco histórico, um dogma quase intocável que atravessou décadas e consolidou-se como senso comum entre matemáticos, historiadores e educadores. Embora breve e sem demonstração formal, carrega um peso filosófico e epistemológico considerável: sugere que a Trigonometria, como sistema dedutivo, depende logicamente do Teorema de Pitágoras e, portanto, não pode ser usada para prová-lo, pois configuraria, assim, uma referência circular.

Contudo, aqui reside um problema crucial e fascinante. Loomis não definiu, em sua obra, o que exatamente ele entendia por “demonstração trigonométrica”. Seria qualquer uso de senos e cossenos? Bastaria mencionar ângulos? Ou estaria ele se referindo especificamente à dependência da relação fundamental da trigonometria, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, que de fato, é derivada diretamente do Teorema de Pitágoras?

Essa ambiguidade não é trivial! Ela abre espaço para uma série de questionamentos:

- Será que toda a trigonometria e suas identidades trigonométricas pressupõe o Teorema de Pitágoras?
- É possível construir uma trigonometria independente do Teorema de Pitágoras?
- E se pudermos demonstrar o Teorema de Pitágoras usando apenas as razões trigonométricas, sem recorrer à identidades trigonométricas? Isso ainda seria "trigonométrico"?
- Onde traçamos a linha entre “uso de trigonometria” e “demonstração trigonométrica”?
- “Se o Teorema de Pitágoras é o alicerce da trigonometria, será que a trigonometria pode, algum dia, sustentar o Teorema de Pitágoras?”

Essas perguntas não são meras especulações, elas tocam no cerne da relação entre geometria, álgebra e análise, revelando como conceitos aparentemente elementares carregam camadas profundas de interdependência lógica.

Foi exatamente essa lacuna, essa ausência de definição clara do que seria uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, esse “tabu” não justificado de que tal demonstração não seria possível, que motivou o cerne desta pesquisa.

Esse é, portanto, o ponto de virada no nosso presente trabalho. O que parecia ser um beco sem saída — “não existe demonstração trigonométrica” — transforma-se na porta de entrada para uma investigação original, que não apenas revisa um clássico da matemática, mas propõe novas lentes para entendê-lo.

No próximo capítulo, mergulharemos nesse desafio. Definiremos o termo “demonstração trigonométrica”, analisaremos propostas histórias (e contemporâneas) que se aproximam desse tipo de demonstração e, finalmente, apresentaremos nossa própria construção de uma demonstração que, embora use elementos trigonométricos, busca romper com a referência circular, oferecendo uma nova perspectiva sobre as relações trigonométricas e o próprio Teorema de Pitágoras.

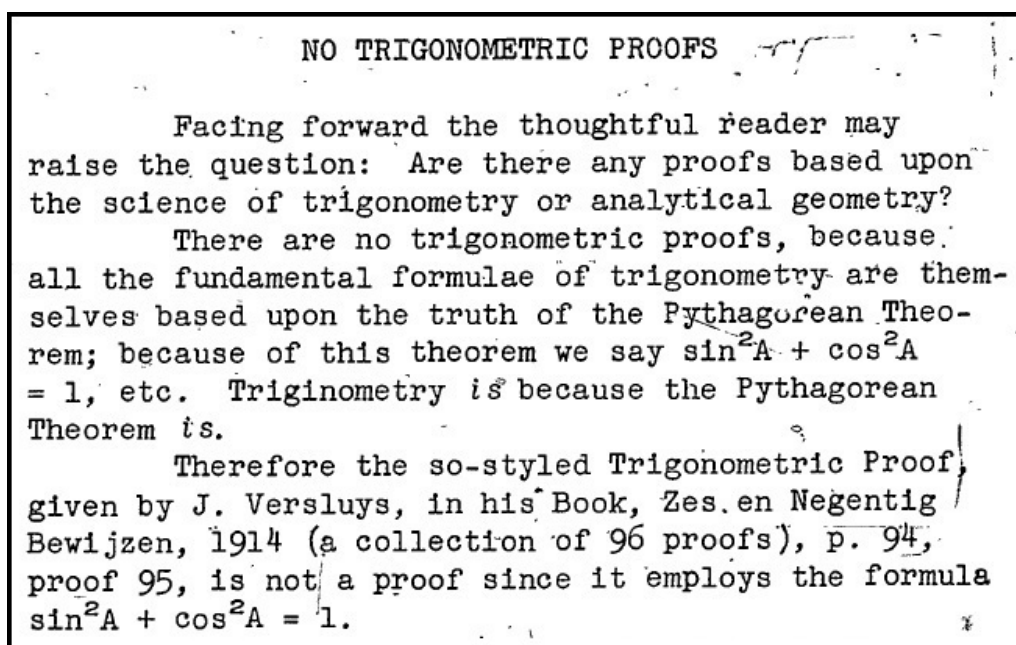
Este não é apenas um exercício acadêmico, é uma provocação ao estabelecido, uma tentativa de mostrar que até os pilares mais sólidos da matemática podem ser revisitados, questionados e, quem sabe, reimaginados.

3 O que são Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras?

Nosso esforço bibliográfico não encontrou, em nenhuma das principais fontes históricas ou contemporâneas, nem mesmo nos trabalhos em que se fala desse conceito, uma definição precisa do que constituiria uma “demonstração trigonométrica” do Teorema de Pitágoras. Isso nos colocou diante de um desafio duplo: primeiro, construir uma definição do que se entende por tal tipo de demonstração; segundo, investigar se, sob certas condições lógicas e axiomáticas, seria possível contornar a referência circular apontada por Loomis, citada na seção [2.1.4](#).

Embora Loomis não tenha explicitado uma definição formal de “demonstração trigonométrica”, sua convicção sobre o tema é inequívoca: ele acreditava firmemente que tal tipo de demonstração seria impossível. Essa posição pode ser reconstruída a partir de sua argumentação central, reproduzida na Figura [6](#) e traduzida no Quadro [5](#).

Figura 6 – Argumento para a impossibilidade de demonstrações trigonométricas extraído do livro de Loomis.



Fonte: [\(LOOMIS, 1968\)](#)

Observe, no Quadro 5, a tradução da Figura 6, o argumento de Loomis para a impossibilidade de demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras.

Quadro 5 – Tradução da Figura 6

NÃO HÁ DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Mirando adiante, o leitor atento pode se perguntar: Existe alguma demonstração baseada na ciência da trigonometria ou geometria analítica?

Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras; por causa deste teorema, dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, etc. Trigonometria existe porque o Teorema de Pitágoras existe.

Portanto, a assim chamada Demonstração Trigonométrica apresentada por J. Versluys, em seu livro "Zes. en Negenting", 1914 (uma coleção de 96 demonstrações) (VERSLUYS, 1914), p. 94, demonstração 95, não é uma demonstração, pois emprega a fórmula $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Para fins analíticos, isolamos quatro proposições centrais dessa passagem:

Afirmção 3.1: *Trigonometria existe porque o Teorema de Pitágoras existe.* (3.1)

Afirmção 3.2: *Não existem demonstrações trigonométricas [do Teorema de Pitágoras], porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.* (3.2)

Afirmção 3.3: *Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.* (3.3)

Afirmção 3.4: *Portanto a assim chamada demonstração trigonométrica, apresentada por Versluys, em seu livro (VERSLUYS, 1914), não é uma demonstração [trigonométrica do Teorema de Pitágoras] uma vez que aplica a fórmula $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.* (3.4)

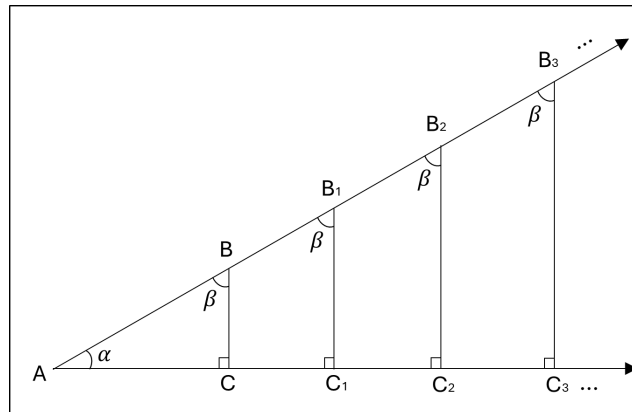
Nas seções seguintes, examinaremos cada uma dessas afirmações, investigando em que medida, e sob quais condições, elas se sustentam logicamente.

3.1 Razões Trigonométricas do Triângulo Retângulo

Vamos iniciar nossa análise pela afirmação 3.1 de Loomis: “*Trigonometria existe porque o Teorema de Pitágoras existe.*”. Embora essa proposição seja frequentemente assumida como evidente em alguns contextos históricos e pedagógicos, sua validade lógica merece exame cuidadoso. Em particular, é necessário investigar em que medida a construção da trigonometria do triângulo retângulo depende efetivamente do Teorema de Pitágoras. Um ponto de partida natural é a definição clássica das razões trigonométricas, tal como apresentada na maioria dos livros didáticos — a título de exemplo, nas coleções de Matemática das editoras Moderna (LEONARDO, 2016), FTD (BONJORNO, 2016) e Ática (DANTE, 2016), amplamente adotadas no Ensino Médio brasileiro —, cuja abordagem se fundamenta na semelhança de triângulos retângulos. Observemos a seguir como essa abordagem é tradicionalmente conduzida.

Seja A , o vértice do ângulo agudo α . Sobre um dos lados do ângulo tomemos arbitrariamente os pontos $C, C_1, C_2, \dots$ e, por esses pontos, traçamos perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{AC}$ que intersectam o outro lado do ângulo nos pontos $B, B_1, B_2, \dots$, respectivamente conforme a Figura 7. Obtemos assim, os triângulos retângulos $ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, \dots$, que são semelhantes entre si pelo caso ângulo-ângulo.

Figura 7 – Triângulo retângulos semelhantes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Assim, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \dots = k$$

A constante k não depende dos comprimentos dos segmentos envolvidos, mas sim, apenas do ângulo α .

Considerando o ângulo α como referência, essa relação é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de seno de α . Assim, escrevemos:

Definição 3.1.1 (Seno). Em um triângulo retângulo ABC (cf. Figura 7),

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Considerando novamente a semelhança de triângulos, podemos escrever a relação entre os segmentos de reta $AC, AC_1, AC_2, \dots$ e $AB, AB_1, AB_2, \dots$, respectivamente. Essa relação é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de cosseno de α . Assim, escrevemos:

Definição 3.1.2 (Cosseno). Em um triângulo retângulo ABC (cf. Figura 7),

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

As razões $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ e $\text{cos } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ são chamadas **razões trigonométricas** em relação ao ângulo α .

Considerando o ângulo β e utilizando as relações análogas, essas razões trigonométricas também valem. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{sen } \beta &= \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, & (0^\circ < \beta < 90^\circ), \\ \text{cos } \beta &= \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, & (0^\circ < \beta < 90^\circ). \end{aligned}$$

Note que para dois ângulos complementares α e β , temos que

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta \text{ e } \text{sen } \beta = \text{cos } \alpha.$$

É importante observar que, no âmbito da trigonometria do triângulo retângulo, as razões seno e cosseno não estão definidas para os ângulos de 0° e 90° . Isso ocorre porque tais ângulos não podem substituir os ângulos agudos de um triângulo retângulo: um ângulo de 0° colapsaria o triângulo, enquanto um ângulo de 90° violaria a condição da soma dos ângulos internos de um triângulo. Assim, os valores $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$ e $\cos 90^\circ = 0$ não são definições geométricas derivadas de triângulos, mas sim extensões convencionais introduzidas no contexto da trigonometria do ciclo trigonométrico, onde as funções seno e cosseno são reinterpretadas como coordenadas de pontos sobre o círculo unitário. Essa distinção é crucial para evitar circularidade lógica ao tratar demonstrações do Teorema de Pitágoras, pois a construção do ciclo trigonométrico no âmbito da geometria analítica, pressupõe, em geral, a métrica euclidiana — e, portanto, o próprio teorema que se deseja demonstrar.

Conclusão:

Dessa análise, conclui-se que as definições das razões trigonométricas podem ser estabelecidas com base exclusivamente na semelhança de triângulo retângulos, sem recorrer ao Teorema de Pitágoras. Isso sugere que a afirmação [3.1](#) de Loomis: “*Trigonometria existe porque o Teorema de Pitágoras existe.*” não se sustenta. Consequentemente, o emprego das razões trigonométricas não incorre em circularidade lógica, desde que restringidas aos ângulos agudos.

Vale ressaltar que, embora a trigonometria do triângulo retângulo contemple outras razões — como tangente, secante, cossecante e cotangente —, optamos por não abordá-las neste trabalho, pois não são necessárias para os objetivos aqui propostos. Nosso interesse não reside em apresentar ou percorrer toda a ciência da trigonometria, mas sim em identificar quais de seus elementos fundamentais podem ou não ser dissociados logicamente do Teorema de Pitágoras. Dessa forma, nos restringimos às duas razões básicas — seno e cosseno — suficientes para analisar a crítica de Loomis e investigar a possibilidade de “demonstrações trigonométricas”. Com essa base estabelecida, passamos agora à análise, da dependência ao Teorema de Pitágoras, de algumas identidades trigonométricas.

3.2 Identidades Trigonométricas do Triângulo Retângulo

Passamos agora a afirmação [3.2](#) de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”. Essa proposição levanta uma questão central para o nosso estudo: até que ponto a trigonometria, em suas identidades, dependem logicamente do Teorema de Pitágoras? Para investigar essa dependência, propomos um exame sistemático de algumas das identidades frequentemente associadas à base da trigonometria, como:

1. As fórmulas para o seno e para o cosseno da soma de ângulos (Seção [3.2.1](#));
2. A Lei dos Senos (Seção [3.2.2](#));
3. A Relação Fundamental da Trigonometria (Seção [3.2.3](#)).

O objetivo não é apenas verificar se tais resultados podem ser obtidos sem recorrer ao Teorema de Pitágoras, mas também identificar quais pressupostos geométricos ou axiomáticos são efetivamente mobilizados em cada dedução e, com isso, mapear quais partes da trigonometria podem, em princípio, existir de forma independente do Teorema de Pitágoras.

3.2.1 Fórmulas da Soma de Ângulos

Nesta seção, serão deduzidas as fórmulas para o seno e para o cosseno da soma de ângulos, coletadas na proposição [3.1](#), a fim de investigar a sua dependência do Teorema de Pitágoras.

Proposição 3.1. Seno e cosseno da soma de ângulos.

Para os ângulos α e β tais que $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$, temos:

$$(a) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(b) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Demonstração. Inicialmente traçamos, sobre o ângulo α , o triângulo ABC , retângulo em C e com hipotenusa de medida unitária, conforme Figura [8](#). Em seguida traçamos o triângulo ACC' , retângulo em C' , o segmento BB' perpendicular ao segmento AC' e o segmento CD perpendicular ao segmento BB' .

As fórmulas para o seno e para o cosseno da diferença de dois ângulos podem ser demonstradas de forma similar.

Conclusão:

Portanto, como demonstrado, as fórmulas para o seno e para o cosseno da soma (e, por extensão, da diferença) de ângulos, são estabelecidas exclusivamente com base em construções geométricas elementares e nas definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo, sem qualquer apelo ao Teorema de Pitágoras. Esse resultado reforça a ideia de que nem toda a trigonometria é logicamente dependente dele, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “... *todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

Prosseguindo nessa investigação, analisaremos, a seguir, a Lei dos Senos, outra identidade central da trigonometria, para verificar se ela também pode ser desenvolvida de forma independente do Teorema de Pitágoras.

3.2.2 Lei dos Senos

A Lei dos Senos, proposição 3.2, é uma das identidades mais fundamentais da trigonometria, frequentemente utilizada em resoluções de triângulos não retângulos. Diante da crítica de Loomis, na afirmação 3.2: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”, é essencial investigar se essa lei também carrega tal dependência ou se pode ser estabelecida de forma independente. Para isso, analisaremos sua demonstração nos três casos clássicos: triângulo acutângulo, obtusângulo e retângulo, verificando em quais deles (e por quais razões) o Teorema de Pitágoras efetivamente intervém.

Proposição 3.2. Lei dos senos.

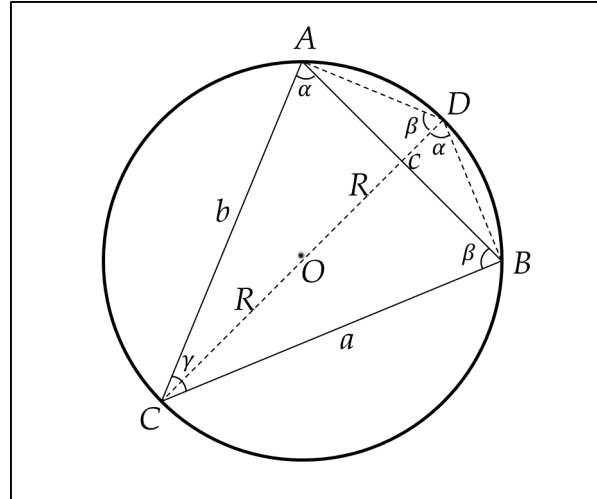
Se R é o raio do círculo circunscrito a um triângulo de lados a , b e c , e de ângulos opostos α , β e γ , respectivamente, então

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Caso 1: Demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo.

Seja um triângulo acutângulo ABC , desenhe a circunferência circunscrita conforme a Figura 9.

Figura 9 – Triângulo acutângulo inscrito.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A partir do vértice C , trace o diâmetro dessa circunferência de raio R , cujo outro extremo do diâmetro toca a circunferência no ponto D , formando assim dois novos triângulos, BDC e ADC retângulos, pois o lado CD é diâmetro do círculo circunscrito, por construção.

Observe no triângulo retângulo BDC que o ângulo $B\hat{D}C$ está inscrito no mesmo arco do ângulo $B\hat{A}C$, portanto, $B\hat{A}C = B\hat{D}C = \alpha$. Assim,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}. \quad (3.5)$$

Em seguida, no triângulo retângulo ADC , o ângulo $A\hat{D}C$ está inscrito no mesmo arco do ângulo $A\hat{B}C$, portanto, $A\hat{B}C = A\hat{D}C = \beta$. Assim,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}. \quad (3.6)$$

Analogamente, traçando o diâmetro a partir de outro vértice do triângulo ABC , encontramos

$$2R = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}. \quad (3.7)$$

Por fim, de 3.5, 3.6 e 3.7 concluímos que

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

■

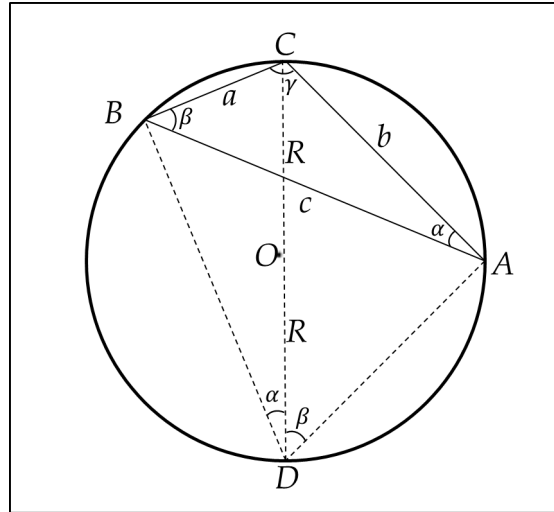
Note que a demonstração da Lei dos Senos para o triângulo acutângulo não se utiliza do Teorema de Pitágoras. Tradicionalmente, os livros didáticos, em suas demonstrações da Lei dos Senos, não estendem a demonstração para os casos do triângulo obtusângulo e do triângulo retângulo, ou alegam que são obtidos de forma análoga.

Vamos conferir, a seguir, a demonstração da Lei dos Senos para um triângulo obtusângulo.

Caso 2: Demonstração da lei dos senos para um triângulo obtusângulo.

Seja um triângulo obtusângulo ABC , desenhe a circunferência circunscrita, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Triângulo obtusângulo inscrito.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A partir do vértice C , trace o diâmetro da circunferência de raio R , cujo o outro extremo desse diâmetro toca a circunferência no ponto D , formando assim dois novos triângulos, BDC e ADC retângulos, pois o lado CD é diâmetro do círculo circunscrito por construção.

Observe no triângulo retângulo BDC , que o ângulo $B\hat{D}C$ está inscrito no mesmo arco que o ângulo $B\hat{A}C$, portanto, $B\hat{A}C = B\hat{D}C = \alpha$. Assim,

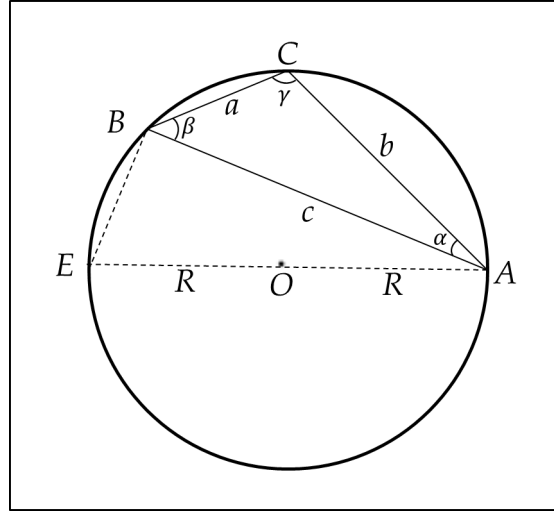
$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen } \alpha}. \quad (3.8)$$

Analogamente, no triângulo retângulo ADC , o ângulo $A\hat{D}C$ está inserido no mesmo arco do ângulo $A\hat{B}C$, portanto, $A\hat{B}C = A\hat{D}C = \beta$. Assim,

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\text{sen } \beta}. \quad (3.9)$$

Em seguida, a partir do vértice A , trace o diâmetro da circunferência de raio R , cujo outro extremo toca a circunferência no ponto E , conforme a Figura 11.

Figura 11 – Triângulo obtusângulo inscrito 2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

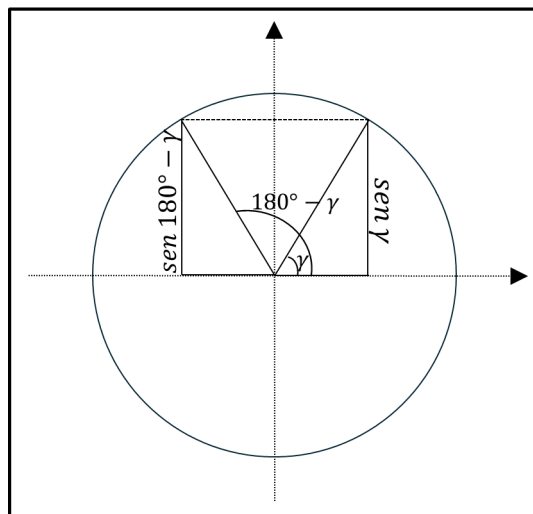
Como $AEBC$ é um quadrilátero inscritível, o ângulo $\widehat{BEA}$ é suplementar ao ângulo $\widehat{ACB}$ pois seus arcos compreendem toda a circunferência, ou seja, pelo teorema do ângulo inscrito

$$\widehat{ACB} + \widehat{BEA} = \frac{1}{2} (\widehat{ACB} + \widehat{BEA}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ,$$

e, pelo fato de $\sin \gamma = \sin (180^\circ - \gamma)$, conforme a Figura 12, temos

$$\sin (\widehat{ACB}) = \sin (\widehat{BEA}) = \sin \gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (3.10)$$

Figura 12 – Suplemento do seno.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Por fim, de 3.8, 3.9 e 3.10 concluímos que

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

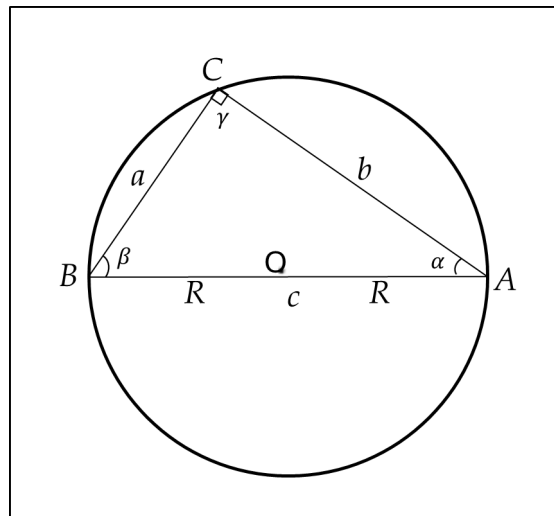
■

Note que, nesse caso, para incluirmos o ângulo obtuso a Lei dos Senos, usamos o fato do seno de um ângulo ser igual ao seno do suplementar desse ângulo, ou seja, $\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta)$ (vide Figura 12), fato esse decorrente da trigonometria no ciclo trigonométrico e, portanto, dependente do Teorema de Pitágoras. Partimos para o último caso, a Lei dos Senos para o triângulo retângulo.

Caso 3: Demonstração da lei dos senos para um triângulo retângulo.

Dado um triângulo retângulo ABC de ângulo reto C , desenhe a circunferência circunscrita, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Triângulo retângulo inscrito.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Note que a hipotenusa c tem medida $2R$, sendo R o raio dessa circunferência. Assim,

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = c = \frac{a}{\sin \alpha}, \text{ e} \quad (3.11)$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = c = \frac{b}{\sin \beta}. \quad (3.12)$$

Logo, de 3.11 e 3.12

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = c.$$

Como $\gamma = 90^\circ$ e $\sin 90^\circ = 1$, fato decorrente da trigonometria do ciclo trigonométrico, podemos escrever:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

■

Nesse último caso usamos o fato de que $\sin 90^\circ = 1$, decorrente da trigonometria no ciclo trigonométrico e, por consequência, depende do Teorema de Pitágoras.

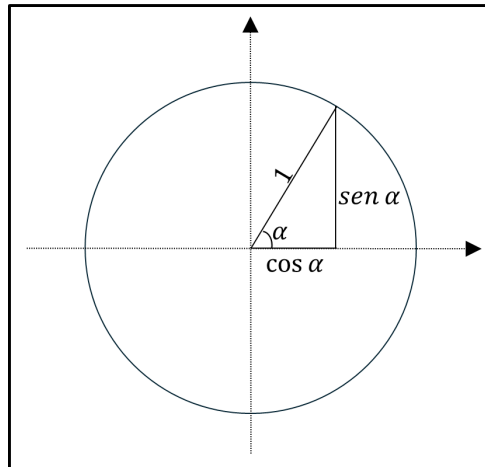
Conclusão:

Dessa forma, concluímos que a Lei dos Senos não depende do Teorema de Pitágoras quando aplicada a triângulos acutângulos, pois sua demonstração se baseia exclusivamente em propriedades de ângulos inscritos e na definição de seno no triângulo retângulo, conceitos que, como vimos na seção 3.1, são anteriores e independentes do Teorema de Pitágoras. Contudo, nos casos do triângulo obtusângulo e do triângulo retângulo, a extensão da lei exige o uso de propriedades do seno fora do intervalo agudo (como $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ e $\sin 90^\circ = 1$), as quais são tradicionalmente justificadas com base na trigonometria do ciclo trigonométrico — e esta, sim, geralmente pressupõe o Teorema de Pitágoras. Assim, embora a essência geométrica da Lei dos Senos seja independente de Pitágoras, sua generalização plena para todos os triângulos acaba por depender, de forma indireta, do teorema. Esse resultado matiza a afirmação 3.2 de Loomis, nem toda a trigonometria é circular, mas certas generalizações só se sustentam com o alicerce pitagórico.

3.2.3 Relação Fundamental da Trigonometria

Chegamos agora ao cerne da crítica de Loomis: a afirmação 3.3: “*Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.*”. De fato, a Relação Fundamental da Trigonometria, proposição 3.3, é frequentemente apresentada nos livros didáticos como uma consequência direta do Teorema de Pitágoras no ciclo trigonométrico (Figura 14), o que provavelmente levou Loomis a generalizar, de forma apressada, que toda a trigonometria dele depende. Contudo, é fundamental distinguir entre uma demonstração específica (como a tradicional, baseada nas razões métricas do triângulo retângulo) e a possibilidade lógica de outras derivações. A relação fundamental pode ser demonstrada com Pitágoras, mas isso não significa que só possa ser demonstrada assim.

Figura 14 – Ciclo Trigonométrico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Vejamos como essa identidade é tradicionalmente deduzida nos livros didáticos, recorrendo explicitamente ao Teorema de Pitágoras.

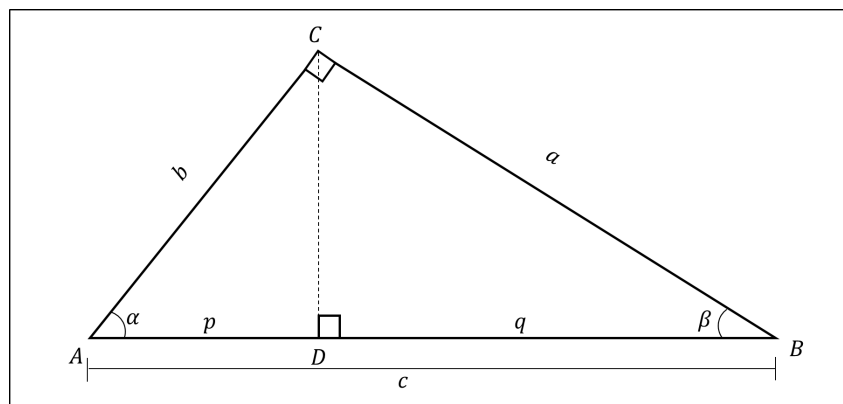
Proposição 3.3. Relação Fundamental da Trigonometria.

Para todo $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, temos

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Demonstração Tradicional da Relação Fundamental da Trigonometria.

Considere o triângulo ABC , retângulo em C , conforme a Figura 15.

Figura 15 – Triângulo Retângulo ABC .

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Pela definição das razões trigonométricas, temos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2}, \text{ e} \quad (3.13)$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}. \quad (3.14)$$

Somando [3.13](#) e [3.14](#), membro a membro, obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, encontramos

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

■

Conclusão:

Essa demonstração, embora elegante e didática, pressupõe o Teorema de Pitágoras e, portanto, não pode ser usada para demonstrá-lo, sob pena de circularidade lógica. É esse tipo de argumento que Loomis tinha em mente ao rejeitar qualquer “demonstração trigonométrica”. No entanto, sua generalização ignora um ponto crucial: a relação fundamental não é, por definição, dependente do Teorema de Pitágoras, como será demonstrado nas próximas seções desse TCC.

Assim, o erro de Loomis não está em apontar a circularidade nas “demonstrações trigonométricas”, mas em confundir uma construção didática comum com uma necessidade lógica inevitável. A Relação Fundamental da Trigonometria pode ser construída com base no Teorema de Pitágoras e, nesse caso, não serve para demonstrá-lo. Mas isso não exclui, a priori, a possibilidade de uma abordagem trigonométrica independente, capaz de chegar ao Teorema de Pitágoras sem recorrer à identidade fundamental em sua forma clássica.

Essa distinção é o que nos permite, na próxima seção, propor uma definição rigorosa do que seria uma demonstração trigonométrica legítima e, eventualmente, apresentar uma construção original que respeite essa independência lógica.

3.3 Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras

Apesar da frequente menção à expressão “*demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras*”, sobretudo em contextos históricos e pedagógicos, nosso levantamento, não identificou, nas fontes consultadas, uma definição formal do que caracteriza esse tipo de demonstração. Diante dessa ausência e considerando as análises desenvolvidas nas seções anteriores, tornou-se necessário propor uma definição do que constitui uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, que segue.

Definição 3.3.1. Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependem do Teorema de Pitágoras.

Vale salientar que o mero uso de razões trigonométricas não caracteriza, por si só, uma demonstração como trigonométrica. Como vimos na seção 3.1, essas razões trigonométricas são definidas com base na semelhança de triângulos retângulos, um princípio independente do Teorema de Pitágoras. Assim, qualquer demonstração algébrica baseada em semelhança de triângulos, pode ser reescrita com razões trigonométrica.

A definição supra citada foi pensada justamente para evitar que cada demonstração do Teorema de Pitágoras que utilize semelhança de triângulos possua automaticamente uma “demonstração trigonométrica” equivalente.

A Tabela 1, a seguir, ilustra essa equivalência, comparando lado a lado uma demonstração clássica do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos e sua versão “trigonometrizada”.

Tabela 1 – Comparação das demonstrações por semelhança de triângulos e por razões trigonométricas.

Considere o triângulo ABC da Figura 15 da página 36.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS
$\triangle ACD \sim \triangle ABC$	$\left. \begin{array}{l} \triangle ACD : \cos(\alpha) = \frac{p}{b} \\ \triangle ABC : \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = pc$
$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{p}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = pc$	
$\triangle CBD \sim \triangle ABC$	$\left. \begin{array}{l} \triangle CBD : \sin \alpha = \frac{q}{a} \\ \triangle ABC : \sin \alpha = \frac{a}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{q}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = qc$
$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{q}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = qc$	
$a^2 + b^2 = pc + qc = c(p + q) = c^2.$	$a^2 + b^2 = pc + qc = c(p + q) = c^2.$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Essa comparação mostra claramente que, na ausência de identidades trigonométricas, a versão com seno e cosseno é apenas uma reformulação notacional da demonstração por semelhança e, portanto, não constitui uma demonstração trigonométrica genuína. Para que uma demonstração seja legitimamente trigonométrica, é necessário invocar uma identidade trigonométrica não trivial, isto é, uma relação entre funções trigonométricas que não se reduza à definição de seno ou cosseno.

Felizmente, no contexto da Figura 15 da página 36, nos foi possível construir uma demonstração trigonométrica original. A seguir, detalhamos os passos dessa demonstração.

3.3.1 Uma Nova Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras

A nossa demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras utiliza a soma $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ de forma aparentemente direta, mas sem pressupor a relação fundamental. A construção parte unicamente das definições de seno e cosseno do triângulo retângulo, permitindo que a identidade emergja como pressuposto ao Teorema de Pitágoras, e não como sua consequência, contrariando a afirmação 3.3 de Loomis: “*Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$* ”.

Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras 1.

Considere o triângulo ABC , retângulo em C , e seja D , o pé da altura relativa a hipotenusa, de modo que $\overline{AD} = p$ e $\overline{BD} = q$, conforme a Figura 15

Pela definição das razões trigonométricas:

- No $\triangle ABC$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}, \text{ e} \quad (3.15)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}. \quad (3.16)$$

- No $\triangle BCD$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{q}{a}. \quad (3.17)$$

- No $\triangle ACD$:

$$\cos \alpha = \frac{p}{b}. \quad (3.18)$$

Multiplicando 3.15 por 3.17:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{a}{c} \cdot \frac{q}{a} = \frac{q}{c}. \quad (3.19)$$

Multiplicando 3.16 por 3.18:

$$\cos^2 \alpha = \frac{b}{c} \cdot \frac{p}{b} = \frac{p}{c}. \quad (3.20)$$

Somando 3.19 e 3.20:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{q+p}{c} = \frac{c}{c} = 1. \quad (3.21)$$

Mas, substituindo 3.15 e 3.16 em 3.21:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

■

Conclusão:

- Essa demonstração evita o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a Relação Fundamental da Trigonometria derivada a partir das razões trigonométricas sem recorrer ao Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.3 de Loomis: “*Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$* ”;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

Essa descoberta não apenas corrige um equívoco histórico, mas também redefine o que entendemos por “trigonometria” em relação à geometria euclidiana: ela não é meramente uma consequência do Teorema de Pitágoras, mas um sistema paralelo, capaz, em certas condições, de reconstruir o próprio Teorema de Pitágoras.

3.4 Referência Circular: A demonstração de Versluys

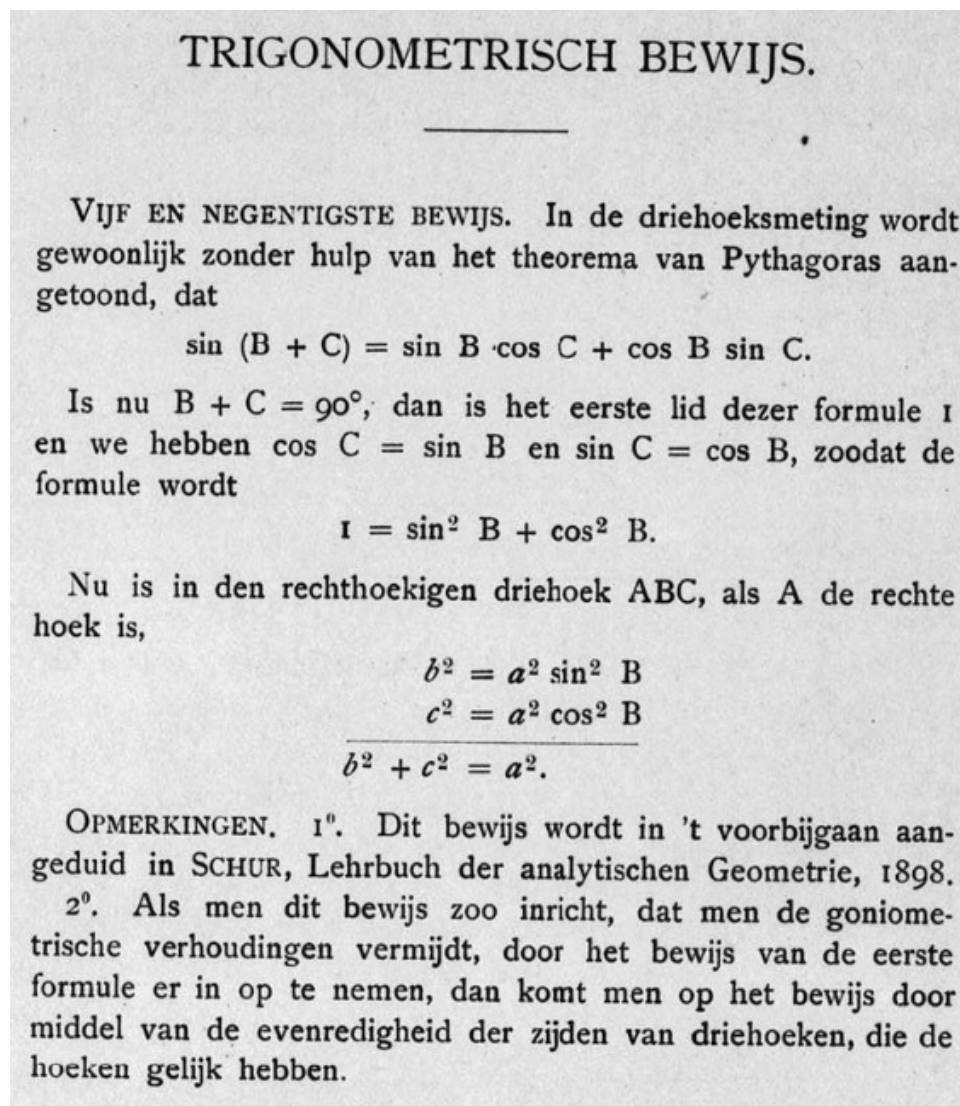
Encerramos nossa análise com a afirmação 3.4 de Loomis: “*Portanto a assim chamada demonstração trigonométrica, apresentada por Versluys, em seu livro (VERSLUYS, 1914), não é uma demonstração uma vez que aplica a fórmula $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$* ”.

Essa crítica tornou-se emblemática no debate sobre a legitimidade das demonstrações trigonométricas, e sua avaliação exige, antes de tudo, o exame da própria demonstração proposta por Jan Versluys (1845-1920), professor holandês atuante no ensino secundário no final do século XIX e início do XX. Embora poucos detalhes biográficos sejam conhecidos com certeza, sabe-se que Versluys foi uma personalidade influente na educação matemática holandesa, notadamente como autor de manuais didáticos amplamente adotados em sua época. Sua obra *Zes en Negentig Bewijzen voor den Stelling van Pythagoras* (Noventa e Seis Demonstrações do Teorema de Pitágoras, 1914) (VERSLUYS, 1914), citada por Loomis, insere-se nesse esforço pedagógico de valorizar o raciocínio geométrico por meio da diversidade de demonstrações — tendência marcante na reforma do ensino holandês daquele período (SMID, 2009).

A demonstração em questão (nº 95 na coletânea de Versluys) é aqui reproduzida na Figura 16, com tradução no Quadro 6. O objetivo não é apenas descrevê-la, mas submetê-

la aos critérios da definição 3.3.1 proposta neste trabalho: será que o uso de $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nela configura, de fato, uma circularidade ou se trata de uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras?

Figura 16 – “Demonstração trigonométrica” extraída do livro de Versluys.



Fonte: (VERSLUYS, 1914)

Vejamos, no Quadro 6, uma tradução, usando o tradutor do Google, do holandês, da Figura 16, a auto intitulada demonstração trigonométrica extraída do livro de Versluys (VERSLUYS, 1914):

Quadro 6 – Tradução da Figura 16

DEMONSTRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA.

DEMONSTRAÇÃO NOVENTA E CINCO. Na trigonometria, costuma-se demonstrar, sem recorrer ao teorema de Pitágoras, que

$$\sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

Se $B + C = 90^\circ$, então o primeiro membro desta fórmula é 1 e temos $\cos C = \sin B$ e $\sin C = \cos B$, de modo que a fórmula se torna

$$1 = \sin^2 B + \cos^2 B$$

Agora, no triângulo retângulo ABC , se A é o ângulo reto,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 \sin^2 B \\ c^2 &= a^2 \cos^2 B \\ \hline b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÕES. 1°. Esta demonstração é indicada de passagem em SHUR, Lehrbuch der analutischen Geometrie, 1898.

2°. Se organizarmos esta demonstração de forma a evitar as razões trigonométricas, incluindo a fórmula do seno da soma de dois ângulos, chegamos ao resultado por meio da proporcionalidade dos lados do triângulo que têm os ângulos iguais.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

À primeira vista, a demonstração parece legítima: a fórmula do seno da soma de ângulos (Proposição 3.1) foi, de fato, demonstrada na seção 3.2.1 sem recorrer ao Teorema de Pitágoras. Contudo, há um ponto crítico, no segundo parágrafo da demonstração de Versluys, que passa despercebido: a igualdade $\sin 90^\circ = 1$.

Segundo nossas análises, esse valor não decorre da definição de seno no triângulo retângulo, pois, nesse contexto, o seno só é definido para ângulos agudos ($0^\circ < \theta < 90^\circ$). A extensão para $\theta = 90^\circ$ exige o círculo trigonométrico, onde $\sin 90^\circ$ é interpretado como a ordenada do ponto $(0, 1)$, e a própria construção desse círculo, no ambiente da Geometria Analítica, pressupõe a distância euclidiana, ou seja, o Teorema de Pitágoras.

Inicialmente, em nossa análise, consideramos a possibilidade de contornar essa dependência utilizando a Lei dos Senos, já que, para triângulos acutângulos, ela foi demonstrada de forma independente (seção 3.2.2). De fato, no triângulo retângulo ABC , com hipotenusa c , temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{1}.$$

Se assumíssemos que o denominador da última fração é $\operatorname{sen} 90^\circ$, obteríamos $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ sem apelar ao círculo.

Contudo, observamos que essa inferência é inválida. A Lei dos Senos, mesmo em sua forma geral, não fornece o valor de $\operatorname{sen} 90^\circ$; ela apenas relaciona razões entre os lados e os senos de ângulos de um triângulo. O valor $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ não é derivado da lei, mas pressuposto para que a lei se estenda ao caso do ângulo reto, como vimos na Seção 3.2.2. Em outras palavras: a Lei dos Senos para triângulos retângulos já incorpora, implicitamente, a definição de $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$, e esta, como vimos, depende do círculo trigonométrico, e, portanto, do Teorema de Pitágoras.

Assim, a demonstração de Versluys, embora engenhosa, é circular: ela utiliza uma consequência do Teorema de Pitágoras ($\operatorname{sen} 90^\circ = 1$) para demonstrar o próprio teorema.

Esse caso ilustra com clareza um perigo epistemológico sutil: a circularidade nem sempre é explícita. Ela pode se esconder em definições aparentemente inocentes ou em generalizações didáticas que, embora úteis, carregam pressupostos lógicos profundos. É exatamente por isso que uma definição rigorosa de demonstração trigonométrica como a proposta por nós na seção 3.3 é indispensável.

Conclusão:

Com isso, encerramos a análise do livro de Loomis no que diz respeito às demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras. Demonstramos que:

- Nem toda a trigonometria depende do teorema;
- Identidades como as fórmulas de soma de ângulos e a Lei dos Senos (no caso agudo) são logicamente independentes do Teorema de Pitágoras;
- A Relação Fundamental da Trigonometria pode ser derivada, em contextos específicos, sem invocar o Teorema de Pitágoras;
- O uso de ângulos não agudos frequentemente reintroduzem, de forma sutil, a dependência pitagórica;
- Existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras;
- Mas também, que é preciso ser cauteloso e rigoroso ao afirmar qualquer coisa em Matemática — especialmente quando se trata de supostas impossibilidades.

Esses resultados não apenas refutam a generalização apressada de Loomis, mas também abrem caminho para um novo olhar sobre a relação entre trigonometria e geometria euclidiana. Se, por um lado, a impossibilidade de demonstrações trigonométricas era tida como dogma histórico, por outro, a análise cuidadosa das bases lógicas da trigonometria revela que tal proibição carece de fundamento. Na verdade, nas últimas décadas, matemáticos começaram a desafiar explicitamente esse senso comum, propondo demonstrações trigonométricas rigorosas e não circulares do Teorema de Pitágoras. É a essa virada conceitual, e às contribuições pioneiras que a sustentam, que dedicamos o próximo capítulo.

4 Desafiando o senso comum: Novas Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras no Século XXI

Desde a publicação de *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968), a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas* [do Teorema de Pitágoras], ...”, analisada no capítulo 3 deste trabalho, tornou-se quase um dogma na comunidade matemática por quase um século. No entanto, a partir das últimas décadas, matemáticos começaram a reexaminar criticamente essa proscrição, argumentando que a impossibilidade alegada por Loomis não era lógica, mas histórica e pedagógica, fruto de uma forma específica de ensinar trigonometria, e não de uma limitação inerente à matemática.

Neste capítulo, analisamos duas contribuições fundamentais que romperam com esse paradigma: os trabalhos de Jason Zimba (ZIMBA, 2009) e Nuno Luzia (LUZIA, 2015). Ambos demonstraram, com rigor, que é possível construir demonstrações trigonométricas não circulares do Teorema de Pitágoras, desde que se evite pressupor a identidade fundamental. Adicionalmente, examinaremos as controvérsias surgidas em fóruns acadêmicos e na Wikipedia, que revelam como essa questão continua a provocar reflexão, e até disputas, entre matemáticos, educadores e editores.

4.1 Jason Zimba: A primeira demonstração trigonométrica rigorosa

Jason Zimba é um matemático e físico americano, conhecido por seu papel como um dos principais arquitetos dos Common Core State Standards for Mathematics (CCSS-M) — equivalente norte-americano da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no Brasil. Antes de sua atuação em políticas educacionais, Zimba desenvolveu pesquisa em astrofísica e lecionou em instituições como o Bennington College. Atualmente, atua como Diretor Acadêmico da Amplify (AMPLIFY, 2024), empresa de tecnologia educacional.

Em 2009, Zimba publicou no Forum Geometricorum (FAU.EDU, 2009) o artigo “On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem” (ZIMBA, 2009), (tradução: Sobre a Possibilidade de Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras), no qual desafiou frontalmente a afirmação 3.3 de Loomis: “*Por causa do Teorema*

de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.". Seu argumento central é claro — a identidade $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ pode ser derivada independentemente do Teorema de Pitágoras.

Zimba inicia seu trabalho citando Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas [do Teorema de Pitágoras], porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras. Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.*” e apontando que a crença na dependência da Relação Fundamental da Trigonometria ao Teorema de Pitágoras pode ser observada em grupos de discussões do Wikipedia (WIKIPEDIA, 2025c) e no site Cut-The-Knot.org (CUT-THE-KNOT.ORG, 2025), mas apesar do senso comum, essa crença é falsa e se propõem a demonstrar essa identidade sem invocar o Teorema de Pitágoras.

4.1.1 A demonstração trigonométrica de Zimba

Preliminarmente, Zimba define seno e cosseno exclusivamente por semelhança de triângulos retângulos, para ângulos agudos, sem invocar qualquer métrica euclidiana. Em seguida, demonstra geometricamente as fórmulas de subtração, exibida na Figura 17, usando apenas construções com triângulos retângulos e as razões trigonométricas, sem recorrer ao Teorema de Pitágoras.

Figura 17 – Demonstração das fórmulas da diferença extraída do trabalho de Zimba.

3. Subtraction formulas

The sine and cosine functions defined above obey the following subtraction formulas, valid for all $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ with $\alpha - \beta$ also in $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

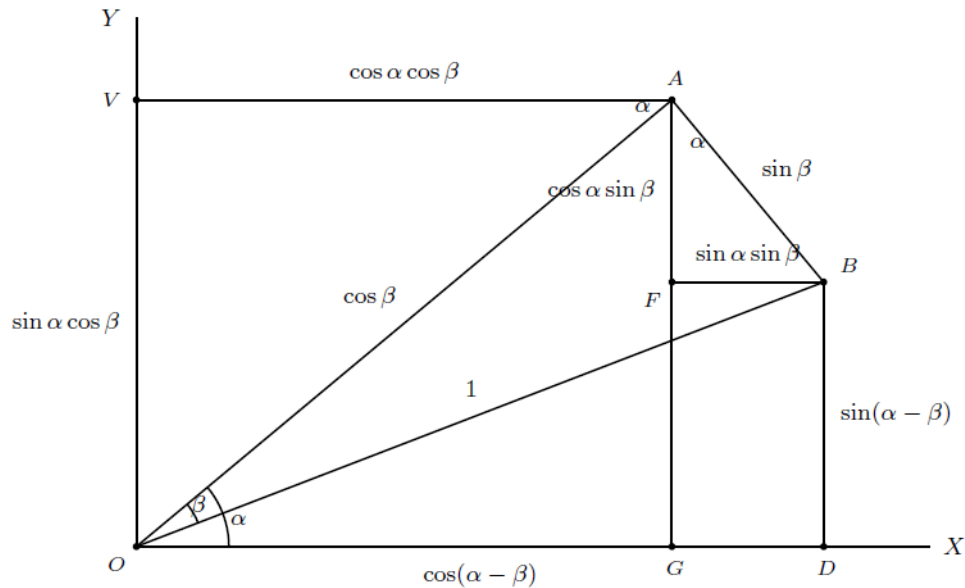


Figure 1.

Fonte: (ZIMBA, 2009)

Observe, no Quadro 7, a tradução da Figura 17, onde Zimba demonstra as fórmulas da diferença, para o seno e para o cosseno, de ângulos agudos distintos.

Figura 18 – A Demonstração Trigonométrica extraída do trabalho de Zimba.

4. The Pythagorean theorem from the subtraction formula

It is tempting to try to derive the identity $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ by setting $\alpha = \beta = x$ and $\cos 0 = 1$ in (1).⁴ This would not be valid, however, because the domain of the cosine function does not include zero. But there is a way around this problem. Given any $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, let y be any number with $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$. Then x , y , and $x - y$ are all in $(0, \frac{\pi}{2})$. Therefore, applying (1) repeatedly, we have

$$\begin{aligned}\cos y &= \cos(x - (x - y)) \\ &= \cos x \cos(x - y) + \sin x \sin(x - y) \\ &= \cos x (\cos x \cos y + \sin x \sin y) + \sin x (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x) \cos y.\end{aligned}$$

From this, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

5. Proving the Pythagorean theorem as a corollary

Because the foregoing proof is independent of the Pythagorean theorem, we may deduce the Pythagorean theorem as a corollary without risk of *petitio principii*. The identity $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ applied to a right triangle with legs a , b and hypotenuse c gives $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$, or $a^2 + b^2 = c^2$.

Fonte: (ZIMBA, 2009)

Veja, no Quadro 8, a tradução da demonstração trigonométrica extraída do trabalho de Zimba (ZIMBA, 2009), exibida na Figura 18.

Quadro 8 – Tradução da Figura 18

4. O Teorema de Pitágoras a partir da fórmula da diferença

É convidativo tentar derivar a identidade $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ tomando $\alpha = \beta = x$ e $\cos 0 = 1$. Isso não seria válido, no entanto, porque o domínio da função cosseno não inclui zero. Mas há uma maneira de contornar esse problema. Dado qualquer $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, tome y tal que $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$. Assim x , y e $x - y$ estão todos em $(0, \frac{\pi}{2})$. Portanto, aplicando (1) repetidamente, nós temos:

$$\begin{aligned}\cos y &= \cos(x - (x - y)) \\ &= \cos x \cos(x - y) + \sin x \sin(x - y) \\ &= \cos x(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + \sin x(\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x) \cos y.\end{aligned}$$

Donde, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

5. Demonstrando o Teorema de Pitágoras como um corolário

Como a demonstração anterior é independente do Teorema de Pitágoras, podemos deduzir o Teorema de Pitágoras como um corolário sem o risco de *petitio principii*^a. A identidade $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ aplicada a um triângulo retângulo de catetos a , b e hipotenusa c dá $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, ou $a^2 + b^2 = c^2$.

^a A expressão “petitio principii” refere-se a uma falácia informal que ocorre quando um argumento assume como verdadeiro o que deveria ser demonstrado. Em outras palavras, a conclusão é incluída nas premissas de forma implícita, criando um raciocínio circular.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Conclusão:

- A demonstração de Zimba evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza as fórmulas da diferença de ângulos do seno e do cosseno, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras para determinar a Relação Fundamental da Trigonometria conforme proposto;
- Ela não é válida para o triângulo retângulo isósceles, contudo, isso não exime o fato de que a Relação fundamental da Trigonometria foi estabelecida independente do Teorema de Pitágoras, refutando a afirmação 3.3 de Loomis: *Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$* ;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigo-*

nométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.” e, segundo nos consta, a primeira de sua natureza.

Notadamente, a elegante estratégia de Zimba, de acrescentar zero, ao ângulo y , em $\cos y$ também pode ser reproduzida para o $\sin y$, constituindo assim, uma demonstração alternativa, que apresentamos na próxima seção.

4.1.2 Uma alternativa à demonstração trigonométrica de Zimba

Além da demonstração original de Zimba, baseada na fórmula do cosseno da diferença, é possível construir uma demonstração análoga utilizando a fórmula do seno da diferença. Essa abordagem reforça a robustez do método: não é um acaso isolado, mas uma consequência sistemática da independência lógica das fórmulas de adição/subtração em relação ao Teorema de Pitágoras.

A demonstração a seguir segue a mesma estratégia da demonstração anterior: fixa dois ângulos agudos arbitrários x e y , com $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$, e aplica as fórmulas da diferença, derivadas geometricamente (sem recorrer ao Teorema de Pitágoras), repetidamente, até isolar $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Observe:

Demonstração trigonométrica alternativa de Zimba via seno da diferença.

Adicionando zero ($0 = x - x$) ao ângulo y , em $\sin y$, de modo que:

$$\sin y = \sin (x - (x - y))$$

e, aplicando, repetidamente, as fórmulas da diferença no lado direito dessa equação:

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin x \cos (x - y) - \cos x \sin (x - y) \\ &= \sin x (\cos x \cos y + \sin x \sin y) - \cos x (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= \sin x \cos x \cos y + \sin^2 x \sin y - \cos x \sin x \cos y + \cos^2 x \sin y \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x) \sin y \end{aligned}$$

Como $y \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos $\sin y \neq 0$, e podemos dividir ambos os lados por $\sin y$, obtendo:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Finalmente, aplicando essa identidade a um triângulo retângulo com catetos a, b e hipotenusa c , onde $\sin x = \frac{a}{c}$ e $\cos x = \frac{b}{c}$, segue-se:

$$\left(\frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2}\right) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$



4.2 Nuno Luzia: Novas abordagens para um teorema antigo

Nuno Alexandre Martins de Matos Luzia é professor do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), com doutorado pelo IMPA e pesquisa focada em Sistemas Dinâmicos e Geometria Fractal. Inspirado pelo trabalho de Zimba (ZIMBA, 2009), em 2015, Luzia publicou, no site arXiv.org (UNIVERSITY, 2019), o artigo “Other Trigonometric Proofs of Pythagoras Theorem” (LUZIA, 2015) (tradução: Outras Demonstrações Trigonômétricas do Teorema de Pitágoras), no qual apresenta duas novas demonstrações do Teorema de Pitágoras baseadas nas fórmulas do ângulo metade. Em 2017, sua demonstração foi publicada na revista RPM — revista do professor de matemática — volume 93, ano 35, sob o título “O teorema de Pitágoras via fórmulas de duplicação do ângulo” (LUZIA, 2017).

Preliminarmente, Luzia aponta, em seu trabalho (LUZIA, 2015), como exposto na Figura 19, a equivalência entre o Teorema de Pitágoras e a Relação Fundamental da Trigonometria e, que a fórmula para o cosseno do ângulo metade pode ser derivada a partir das fórmulas da soma de ângulos, que por sua vez, podem ser demonstradas geometricamente sem a aplicação do Teorema de Pitágoras, como observamos na seção 3.2.1 e, de forma análoga a demonstração das fórmulas da diferença, exibida na Figura 17, apresentada por Zimba em seu trabalho (ZIMBA, 2009).

Figura 19 – Preliminares extraída do trabalho de Luzia.

Then Pythagoras theorem is equivalent to

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad (1)$$

for every $0 < \theta < 90^\circ$.

The subtracting formulas

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

valid for $0 < \alpha, \beta, \alpha - \beta < 90^\circ$, can be proved geometrically without using Pythagoras theorem (see [1]). Zimba [1] used these formulas to prove Pythagoras theorem.

The addition formula

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 90^\circ$, can, in the same way, also be proved geometrically without using Pythagoras theorem, from which it follows the half-angle formula

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

If we use Pythagoras formula (1) in (2) then we get

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

What if we could prove (3) without using Pythagoras theorem? Then using (2) and (3) we would get the Pythagoras formula (1) !

Fonte: (LUZIA, 2015)

Veja, no Quadro 9, a tradução do trecho extraído do trabalho de Luzia (LUZIA, 2015), exibido na Figura 19.

Quadro 9 – Tradução da Figura 19

Então, o Teorema de Pitágoras é equivalente à

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad (1)$$

para todo $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

As fórmulas da diferença

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

válidas para $0^\circ < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 90^\circ$, pode ser demonstrado geometricamente sem usar o Teorema de Pitágoras (veja [1]). Zimba [1] usou essas fórmulas para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

A fórmula da soma

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$0^\circ < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 90^\circ$, pode, da mesma maneira, ser demonstrada geometricamente sem usar o Teorema de Pitágoras, do qual segue a fórmula do ângulo metade

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

Se nós usarmos a Relação Fundamental da Trigonometria [1] em [2] então obtemos

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

E se pudéssemos demonstrar [3] sem usar o Teorema de Pitágoras? Então usando [2] e [3] nós conseguiríamos a Relação Fundamental da Trigonometria [1] !

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Assim, para produzir uma demonstração da Relação Fundamental da Trigonometria, $\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$, sem o auxílio do Teorema de Pitágoras, em outras palavras, para produzir uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, basta demonstrar a equação (3) da Figura 19, $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, sem recorrer ao Teorema de Pitágoras. E foi o que Luzia fez, como exposto na Figura 20, a seguir.

Figura 20 – Demonstração do Teorema de Pitágoras via fórmulas do ângulo metade extraída do trabalho de Luzia.

1.1. Proof of half-angle formulas. First we observe the simple fact that in an isosceles triangle with two equal sides with length 1, forming an angle θ , the length of the other side is $2 \sin \frac{\theta}{2}$. This can be seen by dividing the isosceles triangle in two right triangles with an angle $\frac{\theta}{2}$. See Figure 2.

Also the other angles β of the isosceles triangle satisfy $\theta + \beta + \beta = 180^\circ$ or $\beta = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$. Of course, by definition, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ and $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$.

Now consider the two right triangles as in Figure 3, which together form an isosceles triangle as in Figure 2.

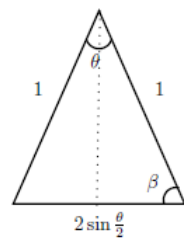


FIGURE 2

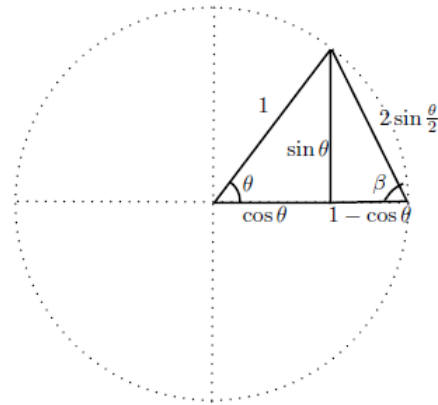


FIGURE 3

Using the trigonometric relations for the right hand side triangle, we get

$$1 - \cos \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos(90^\circ - \frac{\theta}{2}), \quad \text{or} \quad \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}), \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

As mentioned before, (4) together with (2) imply the Pythagoras formula (1).

Fonte: (LUZIA, 2015)

Veja, no Quadro 10, a tradução da demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, via fórmulas do ângulo metade, extraída do trabalho de Luzia (LUZIA, 2015), exibida na Figura 20.

Quadro 10 – Tradução da Figura 20

1.1. Demonstração das fórmulas do ângulo metade. Primeiro nós observamos o simples fato que em um triângulo isósceles com os dois lados iguais de medida 1, formando um ângulo θ , a medida do outro lado é $2 \sin \frac{\theta}{2}$. Isso pode ser observado dividindo o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos com um ângulo $\frac{\theta}{2}$. Veja Figura 2.

Também, os outros ângulos β do triângulo isósceles satisfazem $\theta + \beta + \beta = 180^\circ$ ou $\beta = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$. Por definição, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ e $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$.

Considere os dois triângulos como na Figura 3, que juntos formam um triângulo isósceles como na Figura 2.

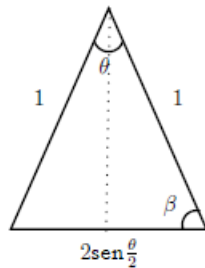


FIGURA 2

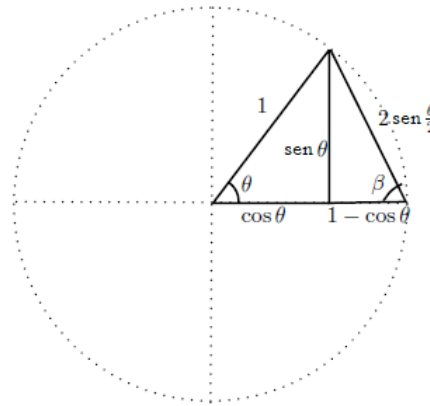


FIGURA 3

Usando as razões trigonométricas do triângulo do lado direito, nós temos

$$1 - \cos \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(90^\circ - \frac{\theta}{2} \right), \quad \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(90^\circ - \frac{\theta}{2} \right), \quad \text{ou} \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Como mencionado, (4) junto com (2) implicam no Teorema de Pitágoras (1).

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Observe que ambas equações: $\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$ e $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, foram demonstradas geometricamente e pelo uso das razões trigonométricas, sem recorrer ao Teorema de Pitágoras e, igualando as duas obtemos:

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow 1 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Conclusão:

- A demonstração do Teorema de Pitágoras pelas fórmulas do ângulo metade de Zimba evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;

- Ela utiliza as fórmulas do ângulo metade derivada a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

A segunda demonstração trigonométrica que Luzia apresenta em seu trabalho (LUZIA, 2015), exibida na Figura 21, utiliza as fórmulas do ângulo metade

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad (4.1)$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (4.2)$$

determinadas, sem recorrer ao Teorema de Pitágoras, em sua primeira demonstração, exibida na Figura 20, e traduzida no Quadro 10, na página anterior.

Figura 21 – Segunda demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras extraída do trabalho de Luzia.

1.2. Another proof. Here we prove the Pythagoras theorem using formulas (4) and (5) (instead of using formulas (4) and (2)). We get

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right).$$

By mathematical induction we get

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - 4^n \left(\prod_{i=1}^n \sin^2 \frac{\theta}{2^i} \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2^n} + \sin^2 \frac{\theta}{2^n} - 1 \right), \quad (6)$$

for every natural number n . Clearly $|\cos^2 \frac{\theta}{2^n} + \sin^2 \frac{\theta}{2^n} - 1| \leq 1$ (actually this quantity can be made arbitrarily small by making n large). Let θ be measured in radians. It follows from Figure 3 that $\sin \theta < 2 \sin \frac{\theta}{2} < \theta$. Then

$$4^n \prod_{i=1}^n \sin^2 \frac{\theta}{2^i} < (4\theta^2)^n 4^{-\sum_{i=1}^n i} < (4\theta^2)^n 2^{-n^2},$$

which is clearly arbitrarily small by making n large enough. Then (6) implies the Pythagoras formula (1).

Fonte: (LUZIA, 2015)

Observe, no Quadro 11, a tradução da segunda demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, extraída de seu trabalho (LUZIA, 2015), exibida na Figura 21.

Quadro 11 – Tradução da Figura 21

1.2. Outra demonstração. Aqui nós demonstramos o Teorema de Pitágoras pelas as fórmulas (4) e (5) (ao invés das fórmulas (4) e (2)). Nós temos

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right).$$

Por indução matemática nós temos

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - 4^n \left(\prod_{i=1}^n \sin^2 \frac{\theta}{2^i} \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2^n} + \sin^2 \frac{\theta}{2^n} - 1 \right), \quad (6)$$

para todo número natural n . Claramente $\left| \cos^2 \frac{\theta}{2^i} + \sin^2 \frac{\theta}{2^i} - 1 \right| \leq 1$ (Em verdade essa quantidade pode ser arbitrariamente pequena escolhendo n suficientemente grande). Seja θ medido em radianos. Segue, da Figura 3 que $\sin \theta < 2 \sin \frac{\theta}{2} < \theta$. Então

$$4^n \prod_{i=1}^n \sin^2 \frac{\theta}{2^i} < (4\theta^2)^n 4^{-\sum_{i=1}^n i} < (4\theta^2)^n 2^{-n^2},$$

que é arbitrariamente pequeno tomando n suficientemente grande. Então (6) implica o Teorema de Pitágoras (1).

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Note que a soma dos quadrados das equações 4.1 e 4.2, é

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right), \quad (4.3)$$

Manipulando a equação 4.3 de forma conveniente, essa equação revela uma estrutura recursiva.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right), \quad (4.4)$$

O termo $\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)$ tem a mesma forma que o lado esquerdo, mas com o ângulo reduzido à metade, de modo que

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{4} \left(\cos^2 \frac{\theta}{4} + \sin^2 \frac{\theta}{4} - 1 \right).$$

Aplicando esse processo repetidamente, obtém-se:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 + 4^n \left(\prod_{i=1}^n \sin^2 \frac{\theta}{2^i} \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2^n} + \sin^2 \frac{\theta}{2^n} - 1 \right), \quad (4.5)$$

Como as medidas, do quadrado do cosseno e do quadrado do seno, de um ângulo agudo estão entre zero e um $\left(0 < \cos^2 \frac{\theta}{2}, \sin^2 \frac{\theta}{2} < 1 \right)$, claramente $\left| \cos^2 \frac{\theta}{2^i} + \sin^2 \frac{\theta}{2^i} - 1 \right| \leq 1$.

Considerando θ em radianos, observa-se na Figura 20, na página 57, que $2 \sin \frac{\theta}{2} < \theta$, ou seja, $\sin \frac{\theta}{2} < \frac{\theta}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} 4^n \left(\prod_{i=1}^n \sin^2 \frac{\theta}{2^i} \right) &= 4^n \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{8} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{16} \cdot \dots \right] < \\ &< 4^n \left[\left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{8} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{16} \right)^2 \cdot \dots \right] = 4^n \left(\frac{\theta^n}{2^{\frac{n^2+n}{2}}} \right)^2 = (4\theta^2)^n \cdot 2^{-n^2-n} < \\ &< (4\theta^2)^n \cdot 2^{-n^2}. \end{aligned}$$

E, como o $\lim_{n \rightarrow \infty} (4\theta^2)^n \cdot 2^{-n^2} = 0$, o termo a direita da equação 4.5 tende a zero, o que implica:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Conclusão:

- A outra demonstração do Teorema de Pitágoras de Zimba evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza as fórmulas do ângulo metade derivada a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- O argumento de limite depende apenas de propriedades elementares de seno (como $\sin \theta < \theta$ para $\theta > 0$), que podem ser justificadas sem recorrer à métrica euclidiana;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

Assim, a segunda demonstração de Luzia não apenas satisfaz os critérios da Definição 3.3.1, mas também amplia o repertório de métodos disponíveis para demonstrações trigonométricas não circulares, integrando geometria, trigonometria, álgebra e análise de forma elegante e rigorosa.

4.3 Repercussão e controvérsias: o debate na comunidade matemática

A demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras de Zimba, embora publicada em periódico revisado por pares (Forum Geometricorum, 2009) (FAU.EDU, 2009), não foi imediatamente aceita como válida ou relevante pela comunidade matemática mais ampla — especialmente no contexto enciclopédico da Wikipédia. Em 2023, uma tentativa de incluí-la na página principal do Teorema de Pitágoras, (WIKIPEDIA, 2025c), foi revertida por editores experientes, como David Eppstein e D. Lazard, com base em argumentos que vão além da correção lógica da demonstração.

Os principais pontos de objeção foram:

1. Falta de notoriedade: segundo os editores, a demonstração, embora correta, não possui “reconhecimento histórico significativo” nem cobertura em fontes secundárias confiáveis, o que a tornaria inadequada para inclusão em uma enciclopédia generalista.
2. Questionamento da “primalidade”: mesmo que a demonstração seja não circular, não há consenso sobre ser a “primeira” demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras. Como observou Eppstein: *alegações desse tipo exigem fontes secundárias independentes, e o fato de Luzia (LUZIA, 2015) tê-la chamado de “primeira” não basta, pois se trata de uma fonte primária ou de baixa profundidade analítica.* (WIKIPEDIA, 2025c)
3. Ceticismo histórico: D. Lazard, no fórum (WIKIPEDIA, 2025c), sintetizou uma visão amplamente compartilhada entre historiadores da matemática ao afirmar: *“O teorema de Pitágoras remonta a mais de 1.000 anos; a trigonometria data de mais de 500 anos. Desde então, centenas de grandes matemáticos estudaram sua relação. Portanto, é muito improvável que algo realmente novo possa ser encontrado sobre este assunto.”* Esse argumento, embora não técnico, reflete uma desconfiança epistemológica diante de supostas “descobertas” em áreas clássicas da matemática.
4. Suposta circularidade: críticos argumentaram que o uso de $\sin(\alpha + \beta)$ ou $\sin 90^\circ = 1$ reintroduziria a dependência do Teorema de Pitágoras.

No entanto, como se vê nas discussões (WIKIPEDIA, 2025c) e (WIKIPEDIA, 2025d), Kamil Kielczewski, editor colaborador da Wikipédia e participante ativo dos debates matemáticos na plataforma, juntamente com outros usuários, destacaram que:

- A demonstração de Zimba evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela não pressupõe $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, mas deriva essa identidade a partir das fórmulas de subtração, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Foi explicitamente reconhecida por Luzia (LUZIA, 2015) como a primeira demonstração trigonométrica não circular — o que, embora não satisfaça os critérios da Wikipédia, tem peso acadêmico no contexto de pesquisa;
- Sua simplicidade, elegância e independência de construções geométricas complexas a tornam pedagogicamente valiosa.

Esse debate revela uma tensão entre rigor lógico e critérios enciclopédicos: enquanto matemáticos como Zimba e Luzia demonstram que a impossibilidade alegada por Loomis é equivocada, editores da Wikipédia exigem “notoriedade”, um critério externo ao mérito matemático.

Contrapondo-se a essa resistência, o site “Cut The Knot”, (CUT-THE-KNOT.ORG, 2025), plataforma dedicada à divulgação e análise de demonstrações matemáticas, com uma coleção de 122 demonstrações do Teorema de Pitágoras — inclui a demonstração trigonométrica de Zimba como a demonstração #84, como se observa na Figura 18. Acompanhe, no Quadro 12 a tradução livre do comentário de seu editor, Alexander Bogomolny:

Figura 22 – Comentário da demonstração #84 extraído do site Cut-The-Knot.

Proof #84

Elisha Loomis, myself and no doubt many others believed and still believe that no trigonometric proof of the Pythagorean theorem is possible. This belief stemmed from the assumption that any such proof would rely on the most fundamental of trigonometric identities $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ is nothing but a reformulation of the Pythagorean theorem proper. Now, Jason Zimba showed that the theorem can be derived from the subtraction formulas for sine and cosine without a recourse to $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. I happily admit to being in the wrong.

Fonte: (CUT-THE-KNOT.ORG, 2025)

Quadro 12 – Tradução da Figura 22

Demonstração #84

Elisha Loomis, eu mesmo e, sem dúvida muitos outros acreditávamos, e [alguns] ainda acreditam, que nenhuma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras é possível. Essa crença derivava da suposição de que qualquer demonstração desse tipo dependeria da relação fundamental da trigonometria $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, que nada mais é do que uma reformulação do próprio teorema de Pitágoras. Agora, Jason Zimba mostrou que o teorema pode ser derivado das fórmulas de subtração para seno e cosseno sem recorrer a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Eu, admito felizmente, estava errado.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

As contribuições de Zimba e Luzia confirmam, de forma inequívoca, que demonstrações trigonométricas não circulares do Teorema de Pitágoras são possíveis. Elas respeitam os critérios estabelecidos na definição 3.3.1: baseiam-se em definições de seno e cosseno via semelhança de triângulos retângulos, utilizam identidades demonstradas geometricamente e evitam a Relação Fundamental da Trigonometria como premissa.

Assim, a afirmação 3.1 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas [do Teorema de Pitágoras], ...*”, revela-se excessivamente categórica. Não é que tais demonstrações sejam impossíveis, mas que algumas são circulares, enquanto outras não. Contudo, como revelam os debates na Wikipédia (WIKIPEDIA, 2025c), (WIKIPEDIA, 2025d) e no Cut-The-Knot (CUT-THE-KNOT.ORG, 2025), o reconhecimento de uma nova verdade científica exige mais do que rigor: exige vencer a resistência inerente à desconstrução de um senso comum consolidado. A ideia de que “não existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras” tornou-se ao longo de décadas, um fato aparentemente inquestionável e, por isso, mesmo demonstrações válidas enfrentam barreiras não lógicas, mas sociocognitivas: desconfiança histórica, apego à tradição e aversão ao que parece “improvável” em um campo antigo.

É justamente nesse contexto que o trabalho de Zimba (ZIMBA, 2009) e Luzia (LUZIA, 2015) adquire relevância dupla: não apenas a correção de um equívoco epistemológico, mas por sua coragem em ousar rever um dogma secular, abrindo caminho para novas vozes, como as de Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, cujo trabalho *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem* (Cinco ou Dez Novas Demonstrações do Teorema de Pitágoras) (JACKSON; AND, 2024) não apenas ampliou o repertório de demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras, mas também, inspirou diretamente este TCC. É a elas, suas ideias, suas demonstrações e seu impacto simbólico, que dedicamos o próximo capítulo.

5 Jovens Protagonistas

Em março de 2023, duas jovens estudantes do ensino médio de Nova Orleans, Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, de uma escola católica no sul dos Estados Unidos, apresentaram, na *Southeastern Sectional Meeting da American Mathematical Society* (AMS, 2023), (tradução: Reunião Seccional Sudeste da Sociedade Matemática Americana) o trabalho “*Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem*” (JACKSON; AND, 2024) (tradução: Cinco ou Dez Novas Demonstrações do Teorema de Pitágoras), que desafiava um dos tabus da matemática elementar — a suposta impossibilidade de demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras, sobre a qual falamos no Capítulo 3. Motivadas inicialmente por um prêmio de quinhentos dólares em um concurso escolar de matemática, Jackson e Johnson mergulharam em uma investigação que, meses depois, resultaria não apenas em cinco demonstrações originais, mas também na publicação de seu artigo no prestigiado periódico *The American Mathematical Monthly* (MAA.ORG, 2024) — um feito raro até para pesquisadores estabelecidos.

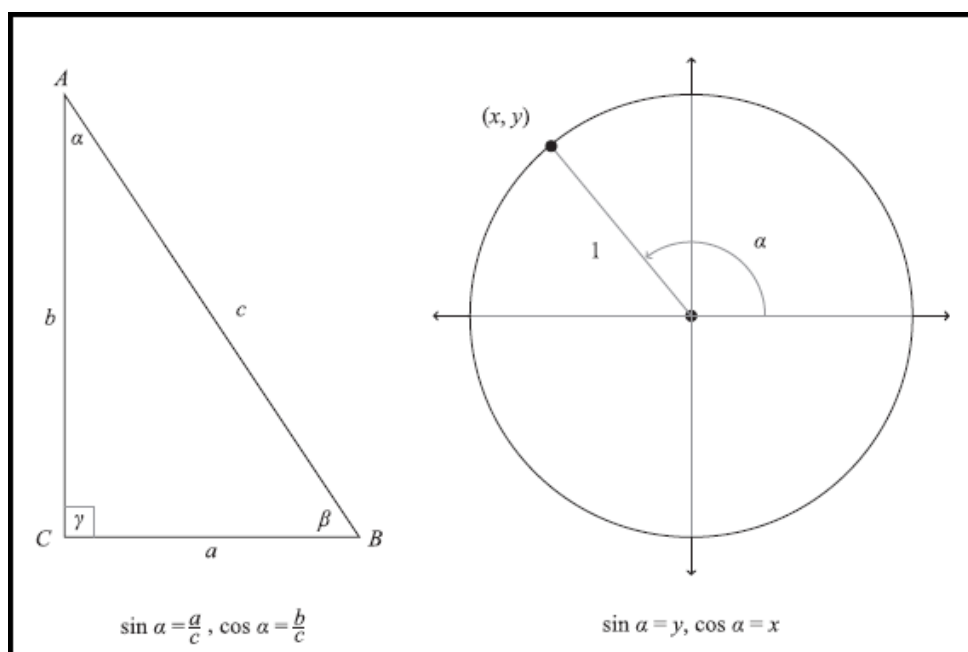
O feito de Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson transcende a esfera técnica: ele é um marco de resistência epistemológica e inclusão social. Em um campo historicamente dominado por homens brancos, duas adolescentes negras não apenas desafiaram um dogma centenário da matemática, mas também romperam barreiras invisíveis que ainda afastam meninas negras e periféricas dos espaços científicos. Seu trabalho repercutiu globalmente: foram destaque no documentário “*Remarkable Kids*” (tradução: Crianças Notáveis), exibido pelo prestigiado programa *60 Minutes* da CBS News (CBSNEWS, 2024); receberam congratulações públicas da ex-primeira dama Michelle Obama; foram homenageadas com as chaves da cidade de Nova Orleans; receberam uma condecoração do governador da Louisiana; e tiveram suas histórias contadas em jornais locais, nacionais e internacionais — inclusive em veículos da Coreia do Sul. Mais do que reconhecimento midiático, sua trajetória tornou-se um símbolo poderoso de pertencimento: prova viva de que gênero, raça, classe ou origem geográfica jamais devem ser obstáculos à contribuição científica. Foi justamente essa narrativa, de coragem intelectual aliada à identidade, que inspirou diretamente este Trabalho de Conclusão de Curso.

Quando questionadas sobre por que tantas pessoas acharam seu feito “tão impressionante”, Jackson e Johnson responderam com lucidez: “*Provavelmente porque somos negras, e também mulheres. Ah! E nossa idade, claro, teve um grande papel*” (CBSNEWS, 2024). Suas palavras ecoam como um convite à reflexão: por que ainda causa espanto ver jovens mulheres negras fazendo matemática de alto nível? Não seria mais justo, e mais

saudável para a ciência, se isso fosse algo comum, esperado, e celebrado sem surpresa? A pergunta permanece, não como acusação, mas como chamado: a matemática só será verdadeiramente universal quando vozes como as delas deixarem de ser exceção e se tornarem protagonismo cotidiano.

Mas além da dimensão humana e simbólica, há também uma clareza conceitual notável em seu trabalho. Desde as primeiras linhas de seu artigo, Jackson e Johnson identificam a raiz do mal-estar em torno da trigonometria: a coexistência de duas definições distintas para as mesmas funções: por um lado, a trigonometria do triângulo retângulo, baseada nas razões dos lados do triângulo retângulo e válida apenas para ângulos agudos; por outro, a trigonometria do ciclo trigonométrico, baseada nas coordenadas de um ponto sobre um círculo unitário de centro na origem, que estende essas funções a todos os ângulos reais (Figura 23). Diante disso, elas propõem uma distinção radical: apenas a primeira mereceria o nome de trigonometria; a segunda, baseada no ciclo trigonométrico, deveria ser chamada de “ciclotopia” — um termo que, segundo nossas pesquisas, não aparece em nenhuma fonte matemática anterior, mas que sintetiza com brilhantismo uma crítica epistemológica já presente nos trabalhos de Zimba (ZIMBA, 2009) e Luzia (LUZIA, 2015).

Figura 23 – Definições trigonométricas extraídas do trabalho de Jackson e Johnson.



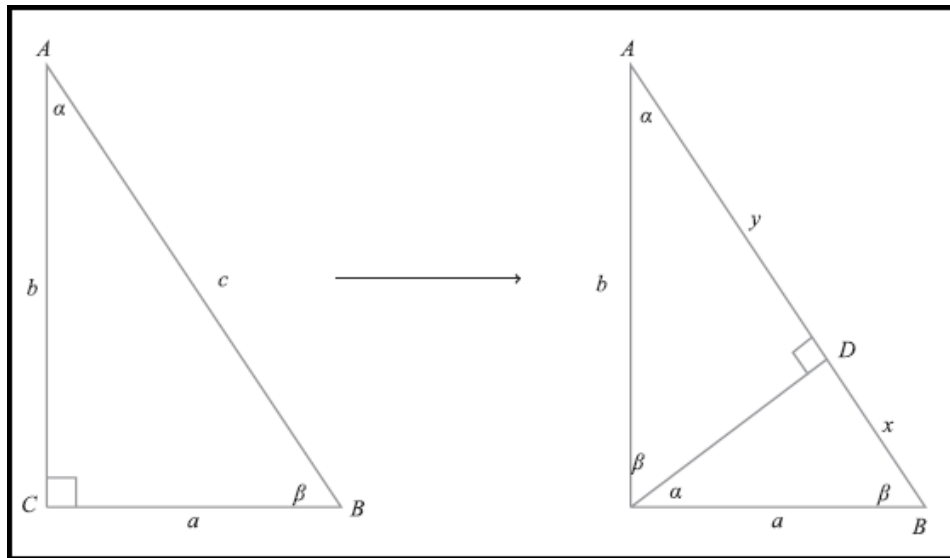
Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Essa distinção é crucial para o debate sobre o que constitui uma demonstração trigonométrica legítima. Jackson e Johnson argumentam que apenas os ângulos agudos per-

tencem à trigonometria genuína, pois são os únicos para os quais seno e cosseno podem ser definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos, sem recorrer ao círculo unitário. Consequentemente, qualquer demonstração que invoque $\sin 90^\circ = 1$ ou identidades derivadas da trigonometria do ciclo trigonométrico seria, em sua visão, “ciclotópica”, não trigonométrica, e consequentemente circular.

Contudo, as autoras não explicam de forma detalhada por que o uso do ciclo trigonométrico implicaria em circularidade — limitando-se a afirmar que ele pressupõe a identidade $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, a qual, segundo elas, já incorpora o Teorema de Pitágoras. Curiosamente, elas próprias apresentam uma demonstração que ilustra essa ambiguidade: ao reescrever a clássica demonstração por semelhança de triângulos em termos trigonométricos, como vemos a seguir, na Figura 24. Substituindo a por $c \sin \alpha$ e b por $c \cos \alpha$ em $x = a \sin \alpha$ e $y = b \cos \alpha$, obtêm $x = c \cdot \sin^2 \alpha$ e $y = c \cdot \cos^2 \alpha$, assim, $x + y = c = c \cdot \sin^2 \alpha + c \cdot \cos^2 \alpha$, de onde segue $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e, portanto, $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 24 – Triângulos semelhantes extraídos do trabalho de Jackson e Johnson.



Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Jackson e Johnson consideram essa abordagem desnecessariamente complicada, pois “não acrescenta nada” à visão mais simples baseada em semelhança. No entanto, essa demonstração é, de fato, uma demonstração trigonométrica válida segundo os critérios da definição 3.3.1 estabelecidos neste trabalho na seção 3.3: ela não pressupõe a identidade fundamental, mas a deriva a partir de relações geométricas elementares, utilizando apenas ângulos agudos e definições das razões trigonométricas nos triângulos retângulos. Dessa forma, mesmo ao construir uma demonstração que satisfaz os critérios de uma demonstração trigonométrica não circular, Jackson e Johnson hesitam em classificá-la

como tal — indicando que o próprio conceito de “demonstração trigonométrica” permanece em dúvida, até mesmo para quem o coloca em prática.

Curiosamente, as jovens autoras não afirmam ter uma definição fechada do que constitui uma demonstração trigonométrica. Pelo contrário, reconhecem abertamente em seu artigo (JACKSON; AND, 2024): “Em verdade, não temos ideia de como traçar uma linha clara entre demonstrações trigonométricas e não trigonométricas”. Essa humildade intelectual contrasta fortemente com a assertividade dogmática de Loomis, e revela uma maturidade rara: elas entendem que a matemática não é um conjunto fixo de verdades, mas um campo em constante negociação conceitual.

Outro apontamento das jovens autoras é particularmente provocador: elas afirmam que demonstrar o Teorema de Pitágoras via Lei dos Cossenos, partindo de $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ e tomando $\gamma = 90^\circ$, é uma “demonstração ciclotópica”, não trigonométrica, pois se utiliza da trigonometria do ciclo trigonométrico, visto que o $\cos 90^\circ$ não é definido na trigonometria do triângulo retângulo. Essa observação, embora correta em seu contexto, levanta uma questão mais profunda: seria a Lei dos Cossenos, em si, inerentemente dependente do Teorema de Pitágoras?

Inspirado pela crítica de Jackson e Johnson à Lei dos Cossenos, especialmente por envolver o cosseno do ângulo reto, questionamos-nos da possibilidade de usar essa identidade nos ângulos agudos do triângulo retângulo, para demonstrar o Teorema de Pitágoras e, por sorte, obtivemos sucesso nessa empreitada, como veremos adiante. Basta então, para produzir uma nova demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, encontrar uma demonstração da Lei dos Cossenos que atenda aos nossos requisitos, ou seja, não dependa do Teorema de Pitágoras.

5.1 Duas Novas Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Nesta seção, apresentamos os passos, e também os percalços, que nos conduziram à construção de duas novas demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras. Inspirados pela crítica de Jackson e Johnson à circularidade presente em certas abordagens clássicas, especialmente no uso da Lei dos Cossenos com ângulos retos, embarcamos em uma investigação cuidadosa: seria possível formular uma demonstração trigonométrica genuína, rigorosa e não circular, utilizando essa identidade nos ângulos agudos do triângulo retângulo? O caminho não foi linear: enfrentamos tentativas frustradas, revisões conceituais e ajustes técnicos. Mas foi justamente nesse ir e vir entre tentativa e erro que emergiram as duas demonstrações que ora compartilhamos, ambas fiéis à definição pro-

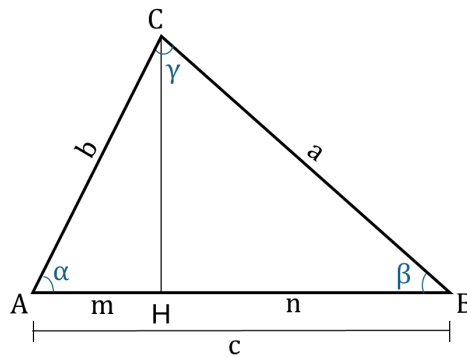
posta no Capítulo 3.

Durante nossas pesquisas, identificamos uma demonstração da Lei dos Cossenos baseada em sistemas lineares e resolução por meio da Regra de Cramer, apresentada de forma anônima na página ‘Lei dos Cossenos’ da Wikipédia (WIKIPEDIA, 2025b), sob o título ‘Forma matricial’. Embora não seja possível atribuir autoria individual a essa abordagem, sua estrutura sugere uma construção independente do Teorema de Pitágoras. Veja a seguir sua reprodução:

Demonstração matricial da Lei dos Cossenos.

Seja o triângulo agudo ABC , trace a altura relativa ao vértice C , conforme a figura 25 abaixo:

Figura 25 – Triângulo agudo ABC .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Podemos deduzir, a partir da definição de cosseno, as seguintes relações:

$$\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha. \quad (5.1)$$

$$\cos \beta = \frac{n}{a} \Rightarrow n = a \cdot \cos \beta. \quad (5.2)$$

Somando 5.1 e 5.2 e como $m + n = c$, obtem-se a relação $c = b \cos \alpha + a \cos \beta$. Traçando as alturas relativas a cada vértice do triângulo, tem-se:

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$$

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta$$

Que consiste em um Sistema Linear, cuja solução pode ser dada pela Regra de Cramer, para tanto, temos:

Matriz dos coeficientes (M): $M = \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$

Matriz não alterada na coluna da variável $\cos \alpha$ (X): $X = \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{bmatrix}$

Assim é válida a igualdade $\cos \alpha = \frac{\det(X)}{\det(M)}$ e, portanto:

$$\cos \alpha = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2)}{2abc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

E, analogamente

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

■

Contudo, reincidimos no erro ocorrido em nossa análise da demonstração de Versluis, exibida na Figura 16, na seção 3.4: tratamos o caso particular da Lei dos Senos, válido apenas para triângulos acutângulos, como se fosse aplicável ao triângulo retângulo. De fato, a demonstração matricial apresentada acima pressupõe que as três alturas internas geram um sistema linear quadrado, condição que não se verifica em triângulos retângulos. Nesse caso, as alturas relativas aos vértices agudos coincidem com os próprios catetos, resultando em um sistema degenerado e, portanto, sem determinante bem definido.

Apesar desse impasse, ao tentar adaptar a estratégia da demonstração matricial ao contexto do triângulo retângulo, acabamos por construir uma nova demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, que apresentamos a seguir.

Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras 2.

Seja o triângulo retângulo ABC , trace a altura relativa ao vértice C , conforme a figura 15, da página 37.

Da definição de cosseno nos triângulos ACD e BCD , temos as seguintes relações:

$$\cos \alpha = \frac{p}{b} \Rightarrow p = b \cdot \cos \alpha. \quad (5.3)$$

$$\cos \beta = \frac{q}{a} \Rightarrow q = a \cdot \cos \beta. \quad (5.4)$$

Somando 5.3 e 5.4 e como $p + q = c$, obtem-se a relação:

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta. \quad (5.5)$$

Pela definição das razões trigonométricas no triângulo ABC , tem-se:

$$a = c \cos \beta. \quad (5.6)$$

$$b = c \cos \alpha. \quad (5.7)$$

Substituindo [5.6](#) e [5.7](#) em [5.5](#), e $\cos \beta$ por $\sin \alpha$, encontramos a Relação Fundamental da Trigonometria, que implica no Teorema de Pitágoras.

$$c = c \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

■

Conclusão:

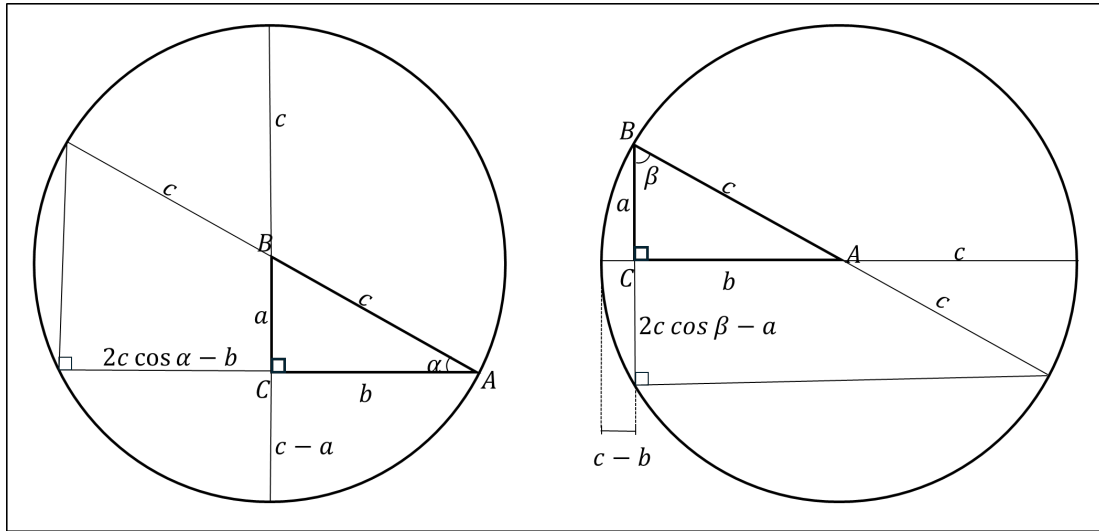
- Essa demonstração evita o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a Relação Fundamental da Trigonometria derivada a partir das razões trigonométricas sem recorrer ao Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação [3.3](#) de Loomis: “*Por causa do Teorema de Pitágoras dizemos que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$* ”;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição [3.3.1](#) e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação [3.2](#) de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

Seguindo nossa investigação, encontramos no site CutTheKnot ([CUTTHEKNOT, 2025a](#)), uma demonstração da Lei dos Cossenos válida para o triângulo retângulo. Desenvolvemos então uma nova demonstração original baseada na Lei dos Cossenos que respeita rigorosamente os critérios da definição [3.3.1](#), que se segue.

Demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras 3.

Seja o triângulo retângulo ABC de hipotenusa c . Trace a circunferência de centro no ponto B e raio c . Estenda os lados do triângulo de modo que eles toquem a circunferência conforme a Figura 26.

Figura 26 – Construção geométrica da Lei dos Cossenos para um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Pelo Teorema das Cordas, aplicado no ponto C , obtemos a Lei dos Cossenos para α .

$$(c + a)(c - a) = b(2c \cos \alpha - b) \Rightarrow c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha - b^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (5.8)$$

Analogamente, a partir do ponto A , encontramos a Lei dos Cossenos para β .

$$(c + b)(c - b) = a(2c \cos \beta - a) \Rightarrow c^2 - b^2 = 2ac \cos \beta - a^2 \Rightarrow$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \quad (5.9)$$

Isolamos $\cos \alpha$ na equação 5.8.

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}. \quad (5.10)$$

Agora, considere o triângulo retângulo ABC . Como α e β são complementares, $\cos \alpha = \sin \beta$ e $\cos \beta = \sin \alpha$ e, pela definição de seno, temos:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \cos \beta = \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b}. \quad (5.11)$$

Substituindo o $\cos \beta$ da equação 5.11 na equação 5.9 e, em seguida, trocamos o $\sin \beta$ por $\cos \alpha$ e isolamos o $\cos \alpha$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \frac{a \cdot \sin \beta}{b} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \frac{a \cdot \cos \alpha}{b} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{b(b^2 - a^2 - c^2)}{-2a^2c}. \quad (5.12)$$

Por fim, igualando 5.10 e 5.12 e, simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} &= \frac{b(b^2 - a^2 - c^2)}{-2a^2c} \Rightarrow a^2(a^2 - b^2 - c^2) = b^2(b^2 - a^2 - c^2) \Rightarrow \\ a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 &= b^4 - a^2b^2 - b^2c^2 \Rightarrow a^4 - b^4 = a^2c^2 - b^2c^2 \Rightarrow \\ (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) &= c^2(a^2 - b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

■

Conclusão:

- Essa demonstração evita o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a Lei dos Cossenos derivada a partir de construções geométricas e do Teorema da Interseção das Cordas, o qual, por sua vez, é estabelecido por semelhança de triângulos e pelo Teorema do Ângulo Inscrito, sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Além disso, emprega apenas relações elementares entre seno e cosseno de ângulos complementares, decorrentes diretamente das definições no triângulo retângulo, sem apelar à Lei dos Senos na sua forma geral nem ao valor $\sin 90^\circ = 1$, preservando assim a ausência de circularidade;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

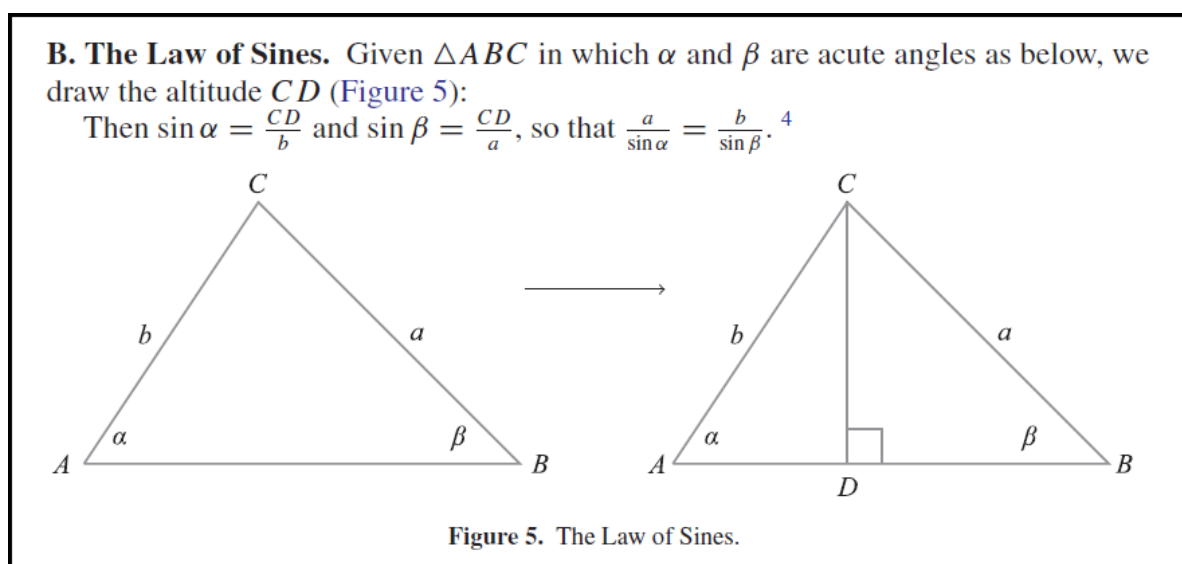
No próximo capítulo analisaremos detalhadamente as demonstrações apresentadas no artigo (JACKSON; AND, 2024), produzido pelas nossas jovens protagonistas e publicado no prestigiado periódico The American Mathematical Monthly (MAA.ORG, 2024).

6 As Demonstrações Trigonométricas de Jackson e Johnson

As demonstrações de Jackson e Johnson — todas cuidadosamente restritas a ângulos agudos e baseadas em semelhança, fórmulas de soma de ângulos e Lei dos Senos — seguem uma metodologia clara: explorar combinações lineares dos ângulos do triângulo retângulo para construir novas figuras cujas relações trigonométricas levem, inevitavelmente, a $a^2 + b^2 = c^2$. Notavelmente, elas dedicam esforço especial ao caso do triângulo retângulo isósceles (Figura 29), que muitas demonstrações clássicas negligenciam, para complementar as primeiras quatro demonstrações que se utilizam do ângulo $\beta - \alpha$ em suas construções e desenvolvem uma quinta demonstração que funciona universalmente.

Preliminarmente, as jovens demonstraram as identidades trigonométricas usadas em suas demonstrações: - a Lei dos Senos (Figura 27); - as fórmulas da adição de ângulos e de ângulos duplos (Figura 28) para o seno e para o cosseno; - e uma demonstração geométrica para o triângulo retângulo isósceles (Figura 29), para o qual a maioria de suas demonstrações não são válidas.

Figura 27 – Demonstração da Lei dos Senos extraída do trabalho de Jackson e Johnson.



Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Segue, no quadro 13, a tradução da demonstração da Lei dos Senos extraído trabalho de Jackson e Johnson, exibida na Figura 27. Observe que a Lei dos Senos foi demonstrada, apenas para os ângulos agudos, com um método diferente ao da seção 3.2.2.

Quadro 13 – Tradução da figura 27

B. A Lei dos Senos. Dado $\triangle ABC$ no qual α e β são ângulos agudos conforme abaixo, nós traçamos a altura CD (Figura 5):

Então $\sin \alpha = \frac{CD}{b}$ e $\sin \beta = \frac{CD}{a}$, assim temos $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

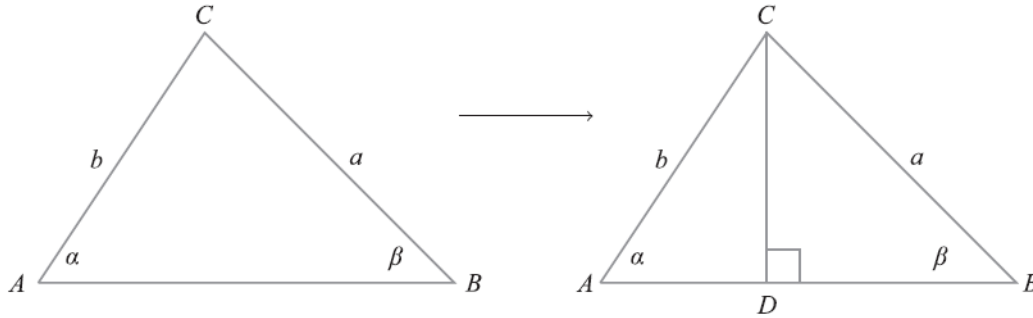


Figura 5. A Lei dos Senos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 28 – Demonstração das fórmulas da soma de ângulos extraída do trabalho de Jackson e Johnson.

A. The Angle Addition Formulas. Our proofs use the Angle Addition Formulas for sine and cosine, and Figure 4 demonstrates that when α , β , and $\alpha + \beta$ are all acute angles, we have $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ and $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Thus if $\alpha < 45^\circ$ with $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ and $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, we have $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2ab}{c^2}$ and $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$. And if α and β are complementary angles with $\alpha < \beta$, then since $\sin \theta = \cos(90 - \theta)$ we have $\sin(\beta - \alpha) = \cos(90 - (\beta - \alpha)) = \cos((\alpha + \beta) - (\beta - \alpha)) = \cos(2\alpha) = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$ as well.

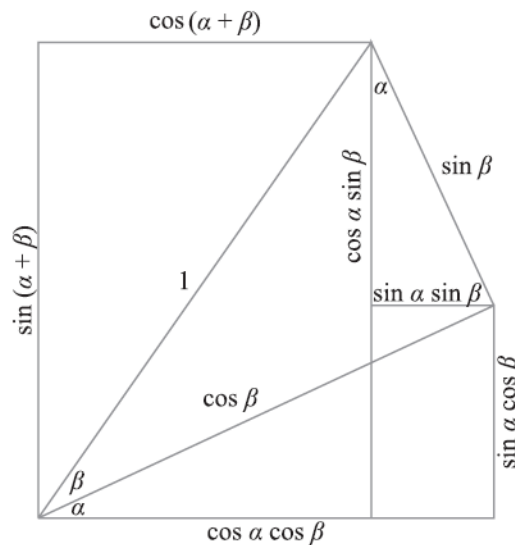


Figure 4. The Angle Addition Formulas.

Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Segue, no quadro 14, a tradução da demonstração das fórmulas da soma de ângulos e do ângulo duplo, extraídas do trabalho de Jackson e Johnson, exibida na figura 28. Observe, que fica determinado que para um triângulo retângulo de ângulos 2α e $\beta - \alpha$ construído a partir dois ângulos complementares $\alpha < \beta$, tem-se:

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2} \quad \text{e} \quad \cos 2\alpha = \sin(\beta - \alpha) = \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Quadro 14 – Tradução da figura 28

A. As Fórmulas de Adição de Ângulos. Nossas demonstrações usam as Fórmulas de Adição de Ângulos para o seno e para o cosseno, e a Figura 4 demonstra que quando α , β , e $\alpha + \beta$ são todos ângulos agudos, nós temos $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ e $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Assim se $\alpha < 45^\circ$ com $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ e $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, nos temos $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2ab}{c^2}$ e $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$. E se α e β são ângulos complementares com $\alpha < \beta$, então desde que $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ nós temos $\sin(\beta - \alpha) = \cos(90^\circ - (\beta - \alpha)) = \cos((\beta + \alpha) - (\beta - \alpha)) = \cos(2\alpha) = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$ também.

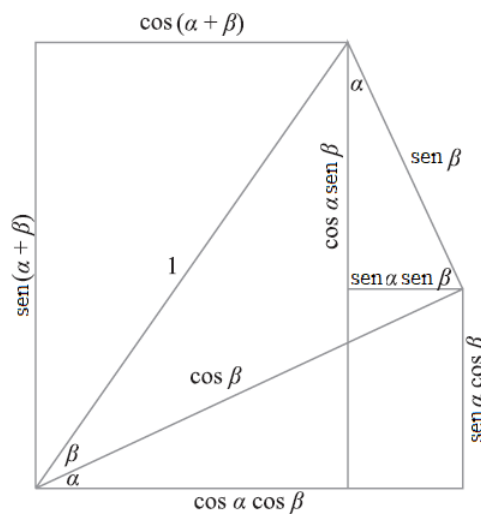
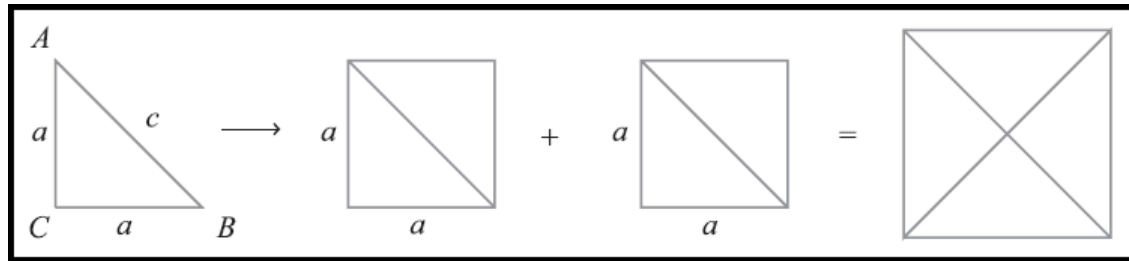


Figura 4. As fórmulas da Adição de Ângulos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Agora, veja na Figura 29, a demonstração geométrica (sem palavras) do Teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo isósceles, caso que não é abrangido pelas quatro primeiras demonstrações, já que elas dependem do ângulo $\beta - \alpha$, o qual se anula quando $\alpha = \beta = 45^\circ$. Essa demonstração foi especialmente elaborada por Jackson e Johnson para preencher essa lacuna, garantindo que seu conjunto de demonstrações seja completo, ou seja, válido tanto para triângulos retângulos escalenos quanto para o caso isósceles.

Figura 29 – Caso: Triângulo isósceles extraído do trabalho de Jackson e Johnson.



Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

As cinco demonstrações não são meras variações, são explorações sistemáticas de um espaço de possibilidades geométrico-trigonômétricas, guiadas por um lema fundamental demonstrado na seção 5 do artigo (JACKSON; AND, 2024) como se observa, a seguir, na figura 30: os únicos ângulos que são combinações lineares inteiras de α e β e, que formam um novo triângulo retângulo são 2α e $\beta - \alpha$, os quais são complementares. Esse resultado conduz a “busca por demonstrações trigonométricas”: não se trata de procurar demonstrações arbitrárias, mas de encontrar construções que efetivamente produzam um triângulo retângulo com esses ângulos específicos. Trata-se, portanto, de uma contribuição metodológica tão relevante quanto as próprias demonstrações.

Figura 30 – Lema 1 extraído do trabalho de Jackson e Johnson.

Lemma 1. *a) If ABC is an isosceles right triangle (so that $\alpha = \beta = 45$) then the only triangle whose angles are integral linear combinations of α and β is the isosceles right triangle.*

b) If $\alpha < \beta$ in right triangle ABC , then there exists a right triangle whose acute angles are 2α and $\beta - \alpha$. Furthermore, 2α and $\beta - \alpha$ are the only integral linear combinations of α and β that will form the acute angles of a right triangle for every pair $\{\alpha, \beta\}$.

Proof. a) Since all three angle measurements of isosceles triangle ABC are multiples of 45, all three angle measurements in any new triangle (whose angles are restricted to sums and/or differences of the angles of $\triangle ABC$) are still multiples of 45, and so our triangle must be an isosceles right triangle. In other words, if we start with an isosceles right triangle, then we cannot create a new triangle.

b) Now suppose that $\alpha < \beta$. If an acute angle in a newly constructed right triangle measures $m\alpha + n\beta$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) then its complement measures $90 - (m\alpha + n\beta) = (\alpha + \beta) - (m\alpha + n\beta) = (1 - m)\alpha + (1 - n)\beta$. If the integers n and $1 - n$ are both nonzero, so that one of them (say, n) is negative, then replacing n by $|n|$ we see that one of the angles measures $m\alpha - n\beta$ where $m > n > 0$. But when α measures $\frac{90n}{m+n}$ degrees, so that its complement β measures $\frac{90m}{m+n}$, this construction gives us a triangle that has an angle of $m\alpha - n\beta = m\frac{90n}{m+n} - n\frac{90m}{m+n} = 0$. This impossibility shows we must have $n = 0$, so that one of the acute angles measures $m\alpha$ for some $m \in \mathbb{N}$.

If $m = 1$ then we simply recover our original triangle ABC . If $m = 2$ then we obtain a new right triangle whose acute angles measure 2α and $\beta - \alpha$. (Note that $2\alpha < 90$ since $\alpha < 45$.) Finally, we see that $m \geq 3$ is impossible since no such triangle can exist if $30 \leq \alpha < 45$. ■

Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Acompanhe, no quadro 15, a tradução livre da demonstração dada pelas jovens ao Lema 6.1 que afirma que para qualquer triângulo retângulo não isósceles de ângulos $\alpha < \beta$, as únicas combinações lineares inteiras de α e β que formam um triângulo retângulo são 2α e $\beta - \alpha$.

Quadro 15 – Tradução da figura 30

Lema 6.1. *a) Se ABC é um triângulo retângulo isósceles (tal que $\alpha = \beta = 45^\circ$) então o único triângulo cujos ângulos são combinações lineares de α e β é o triângulo retângulo isósceles.*

b) Se $\alpha < \beta$ no triângulo retângulo ABC , então existe um triângulo retângulo cujos ângulos agudos são 2α e $\beta - \alpha$. Além disso, 2α e $\beta - \alpha$ são as únicas combinações lineares inteiras de α e β que formam ângulos agudos de um triângulo retângulo para cada par $\{\alpha, \beta\}$.

Demonstração. a) Já que as medidas de três ângulos do triângulo isósceles ABC são múltiplos de 45° , todos os três ângulos do novo triângulo (cujos ângulos são restritos a soma e/ou diferença dos ângulos do $\triangle ABC$) serão múltiplos de 45° e, portanto, nosso triângulo será um triângulo retângulo isósceles. Em outras palavras, partindo de um triângulo retângulo isósceles, não podemos criar um triângulo retângulo diferente.

b) Agora suponha que $\alpha < \beta$. Se um ângulo agudo no novo triângulo retângulo mede $m\alpha + n\beta$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) e o seu complemento mede $90^\circ - (m\alpha + n\beta) = (\alpha + \beta) - (m\alpha + n\beta) = (1-m)\alpha + (1-n)\beta$. Se os inteiros n e $1-n$ são ambos não-nulos, tais que um deles é negativo (suponha n), então substituindo n por $|n|$ notamos que um dos ângulos mede $m\alpha - n\beta$ onde $m > n > 0$. Mas quando α mede $\frac{90n}{m+n}$ graus, o seu complemento mede $\frac{90m}{m+n}$, essa construção nos dá um triângulo que tem um ângulo de $m\alpha - n\beta = m \frac{90n}{m+n} - n \frac{90m}{m+n} = 0$. Essa impossibilidade mostra que devemos ter $n = 0$, assim um dos ângulos agudos mede $m\alpha$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

Se $m = 1$ nós teremos nosso triângulo original ABC . Se $m = 2$ nós obtemos um novo triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 2α e $\beta - \alpha$. (Note que $2\alpha < 90^\circ$ já que $\alpha < 45^\circ$.) Finalmente, nós vemos que $m \geq 3$ é impossível já que não existe triângulo retângulo se $30^\circ \leq \alpha < 45^\circ$. ■

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

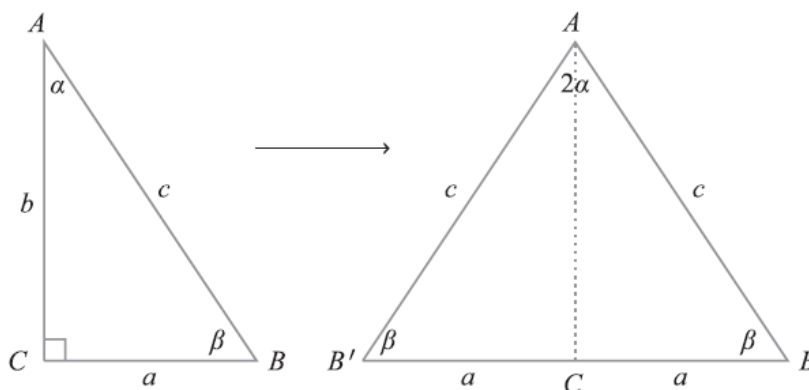
Nas próximas seções, vamos analisar individualmente cada uma das cinco demonstrações do Teorema de Pitágoras construídas pelas jovens Jackson e Johnson e, verificar se elas cumprem os requisitos da definição 3.3.1.

6.1 A primeira demonstração de Jackson e Johnson

A primeira demonstração de Jackson e Johnson (Figura 31) começa desenhando um triângulo composto por um triângulo retângulo não isósceles ($\alpha < \beta$) e seu simétrico de modo que o triângulo resultante possua um ângulo 2α . Em seguida elas replicam a estratégia utilizada na demonstração do Teorema de Pitágoras via Progressão Geométrica (CUTTHEKNOT, 2025b) para construir um triângulo retângulo de ângulos 2α e $\beta - \alpha$, no qual a hipotenusa é calculada usando a fórmula da soma de infinitos termos de uma série convergente e, com o auxílio da fórmula do cosseno do ângulo duplo, apresentada na Figura 28, na página 75, é demonstrado o Teorema de Pitágoras (Figura 32).

Figura 31 – Primeira demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson (Parte A).

A. The first proof. Our first proof begins by reflecting $\triangle ABC$ across the line $\overleftrightarrow{AC}$ through A and C to create the isosceles triangle ABB' .

Figure 7. Creating $\triangle ABB'$.

We now construct right triangle $AB'D$ as on the left in Figure 8 by creating a right angle at vertex B' (so that $m\angle BB'D = 90 - \beta = \alpha$) and extending side AB to meet the new line segment at point D . We then fill $\triangle B'BD$ with progressively smaller and smaller scale copies of the original right triangle ABC , as at right in Figure 8.

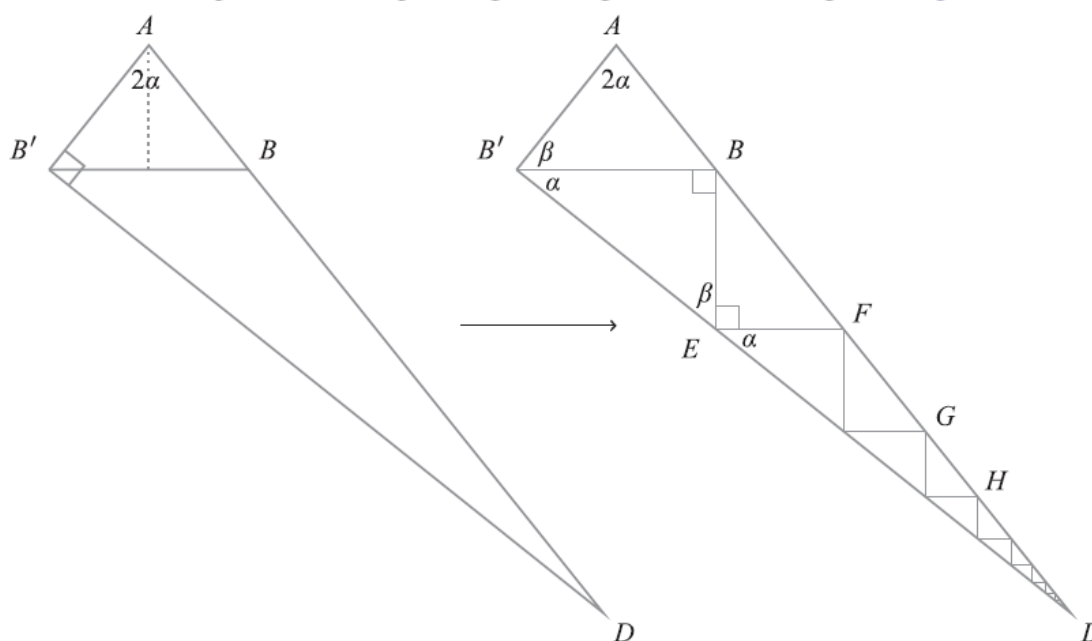


Figure 8. The first proof.

Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Figura 32 – Primeira demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson (Parte B).

Since BB' has length $2a$ and is the longer leg of $\triangle B'EB \sim \triangle ABC$, the ratio of sides $a : b : c$ shows the shorter leg BE has length $(2a)\frac{a}{b} = \frac{2a^2}{b}$. But BE is the longer leg of $\triangle BFE$, so the hypotenuse BF of $\triangle BFE$ has length $(\frac{2a^2}{b})(\frac{c}{b}) = \frac{2a^2c}{b^2}$. By construction, the shorter leg in each triangle is also the longer leg in the next triangle, which means that successive triangles have the ratio $\frac{a}{b}$; but then alternate triangles have ratio $\frac{a^2}{b^2}$, so that $FG = (\frac{a^2}{b^2})BF = \frac{2a^4c}{b^4}$, and $GH = (\frac{a^2}{b^2})FG = \frac{2a^6c}{b^6}$, etc. Thus the hypotenuse AD of right triangle $AB'D$ has length $AB + BF + FG + GH + \dots = c(1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots)$.

In $\triangle AB'D$ we have $\cos(2\alpha) = \frac{AB'}{AD} = \frac{c}{AD}$ and therefore $AD = \frac{c}{\cos(2\alpha)}$ (Figure 8).

We equate these two expressions for AD to find

$$\begin{aligned} c(1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots) &= \frac{c}{\cos(2\alpha)} \\ \Rightarrow c(1 + \frac{2a^2/b^2}{1 - a^2/b^2}) &= \frac{c}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ \Rightarrow 1 + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} &= \frac{1}{(b/c)^2 - (a/c)^2} \\ \Rightarrow \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} &= \frac{c^2}{b^2 - a^2} \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Note that one step of our proof used the well-known Sum of Convergent Series formula $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$ to determine that

$$\frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots = \frac{2a^2/b^2}{1 - a^2/b^2}.$$

Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Veja, no Quadro 16, a tradução da parte A da primeira demonstração de Jackson e Johnson, exibida na Figura 31.

Quadro 16 – Tradução da Figura 31

A. A primeira demonstração. Nossa primeira demonstração começa por refletir $\triangle ABC$ sobre o eixo $\overleftrightarrow{AC}$ para criar o triângulo isósceles ABB' .

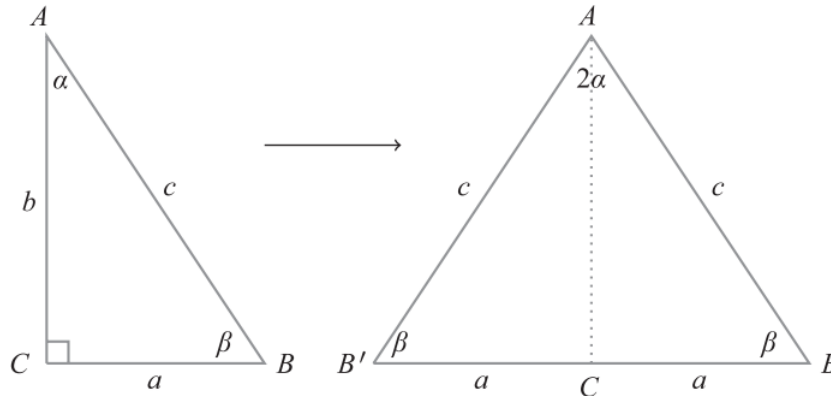


Figura 7. Construção do $\triangle ABB'$.

Em seguida, construímos o triângulo retângulo $AB'D$ como na esquerda da Figura 8 criando um ângulo reto no vértice B (tal que $\widehat{BBD} = 90^\circ - \beta = \alpha$) e estendendo o lado AB para encontrar o novo segmento no ponto D . Nós então preenchemos o $\triangle B'BD$ com progressivos triângulos, cada vez menores, semelhantes ao triângulo retângulo ABC , como na direita da Figura 8.

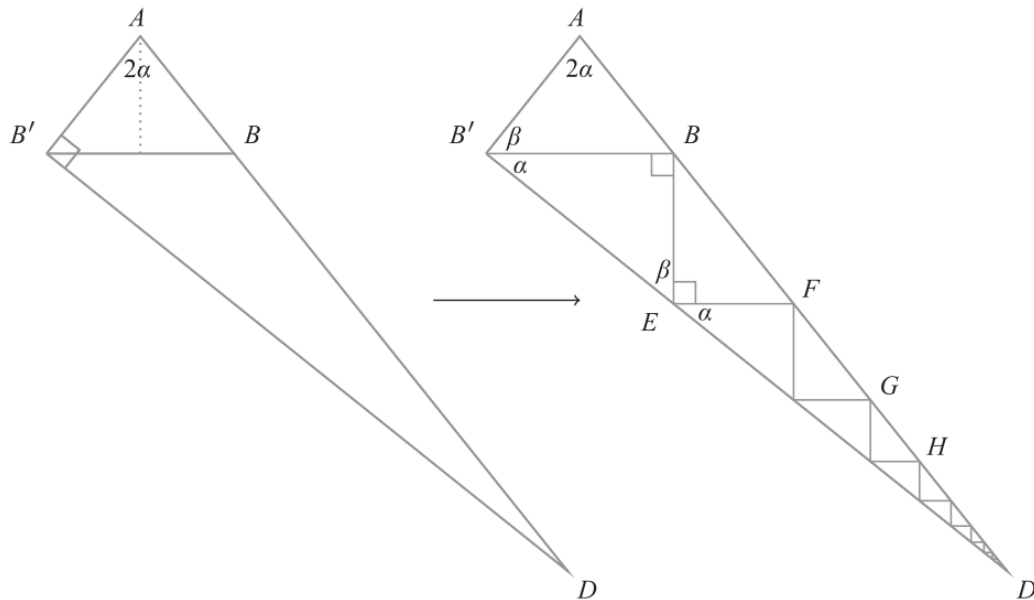


Figura 8. A primeira demonstração.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Veja, no Quadro 17 a tradução da parte B da primeira demonstração de Jackson e Johnson, exibida na Figura 32.

Quadro 17 – Tradução da Figura 32

Como BB' tem medida $2a$ e é o maior cateto do $\triangle B'EB \sim \triangle ABC$, as razões do lados $a : b : c$ mostra que o menor cateto BE tem medida $(2a)\frac{a}{b} = \frac{2a^2}{b}$. Mas BE é o maior cateto do $\triangle BFE$, assim a hipotenusa BF do $\triangle BFE$ tem medida $\left(\frac{2a^2}{b}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{2a^2c}{b^2}$. Por construção, o menor cateto de cada triângulo é também o maior cateto do próximo triângulo, o que significa que sucessivos triângulos tem razão $\frac{a}{b}$; mas então triângulo alternados tem razão $\frac{a^2}{b^2}$, ou seja, $FG = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)BF = \frac{2a^4c}{b^4}$, e $GH = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)FG = \frac{2a^6c}{b^6}$, etc. Assim a hipotenusa AD do triângulo retângulo $AB'D$ tem medida $AB + BF + FG + GH + \dots = c\left(1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots\right)$.

No $\triangle AB'D$ nós temos $\cos(2\alpha) = \frac{AB'}{AD} = \frac{c}{AD}$ e portanto $AD = \frac{c}{\cos 2\alpha}$ (Figura 8).

Nós igualamos essas duas expressões de AD para encontrar

$$\begin{aligned} & c\left(1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots\right) = \frac{c}{\cos(2\alpha)} \\ \Rightarrow & c\left(1 + \frac{2a^2/b^2}{1 - a^2/b^2}\right) = \frac{c}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ \Rightarrow & 1 + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} = \frac{1}{(b/c)^2 - (a/c)^2} \\ \Rightarrow & \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \frac{c^2}{b^2 - a^2} \\ \Rightarrow & a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

Note que no primeiro passo da nossa demonstração usamos a conhecida fórmula da Soma de uma Série Convergente $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$ para determinar que

$$\frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots = \frac{2a^2/b^2}{1 - a^2/b^2}.$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

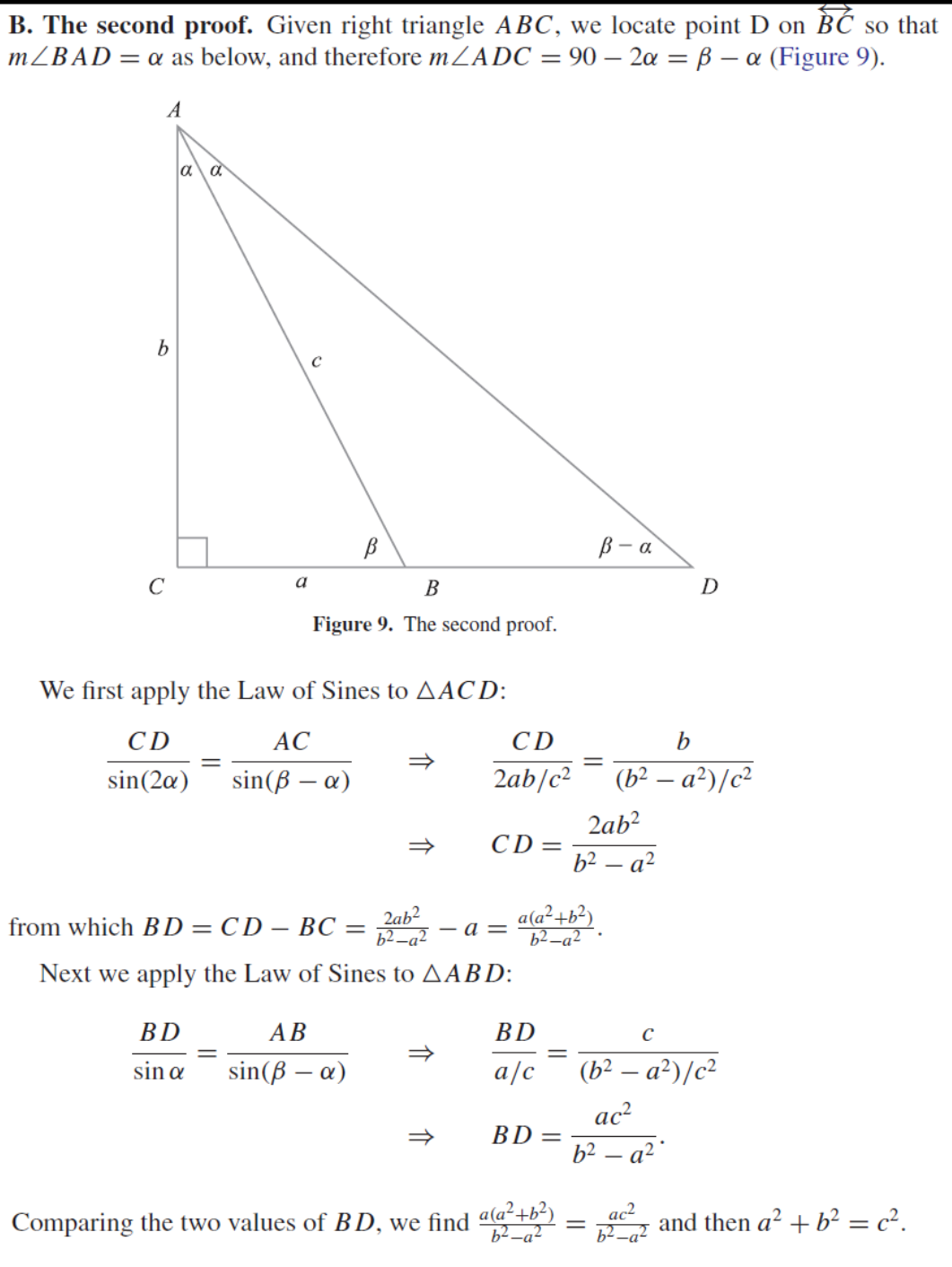
Conclusão:

- A primeira demonstração de Jackson e Johnson evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a identidade do cosseno do ângulo duplo derivada a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Ela também lança mão do uso da Fórmula da Soma de Séries Convergentes, que da mesma forma, não depende do Teorema de Pitágoras;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

6.2 A segunda demonstração de Jackson e Johnson

A segunda demonstração de Jackson e Johnson (Figura 33) constrói um novo triângulo retângulo externo ao triângulo retângulo original, de forma que o novo triângulo seja formado com os ângulos 2α e $\beta - \alpha$. A partir do qual, com a aplicação da Lei dos Senos e a fórmula do seno do ângulo duplo, é demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Figura 33 – Segunda demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.



Veja, no Quadro 18, a tradução da segunda demonstração de Jackson e Johnson, exibida na Figura 33.

Quadro 18 – Tradução da Figura 33

B. A segunda demonstração. Dado o triângulo retângulo ABC , tome o ponto D em $\overleftrightarrow{BC}$ tal que $\widehat{BAD} = \alpha$, e portanto $\widehat{ADC} = 90^\circ - 2\alpha = \beta - \alpha$ (Figura 9).

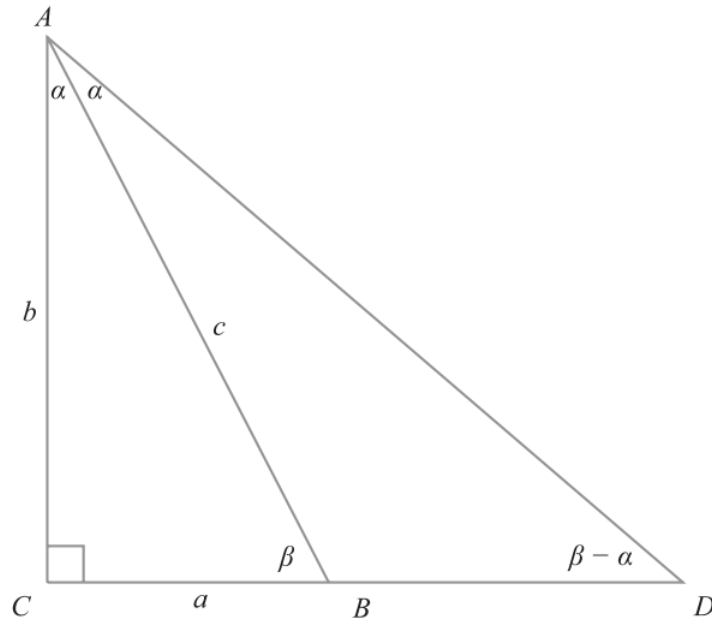


Figura 9. A segunda demonstração.

Primeiro aplicamos a Lei dos Senos no $\triangle ACD$:

$$\begin{aligned} \frac{CD}{\sin(2\alpha)} &= \frac{AC}{\sin(\beta - \alpha)} \Rightarrow \frac{CD}{2ab/c^2} = \frac{b}{(b^2 - a^2)/c^2} \\ &\Rightarrow CD = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$\text{donde } BD = CD - BC = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} - a = \frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}.$$

Em seguida aplicamos a Lei dos Senos no $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{\sin \alpha} &= \frac{AB}{\sin(\beta - \alpha)} \Rightarrow \frac{BD}{a/c} = \frac{c}{(b^2 - a^2)/c^2} \\ &\Rightarrow BD = \frac{ac^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Comparando os valores de BD, encontramos $\frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} = \frac{ac^2}{b^2 - a^2}$ e então $a^2 + b^2 = c^2$.

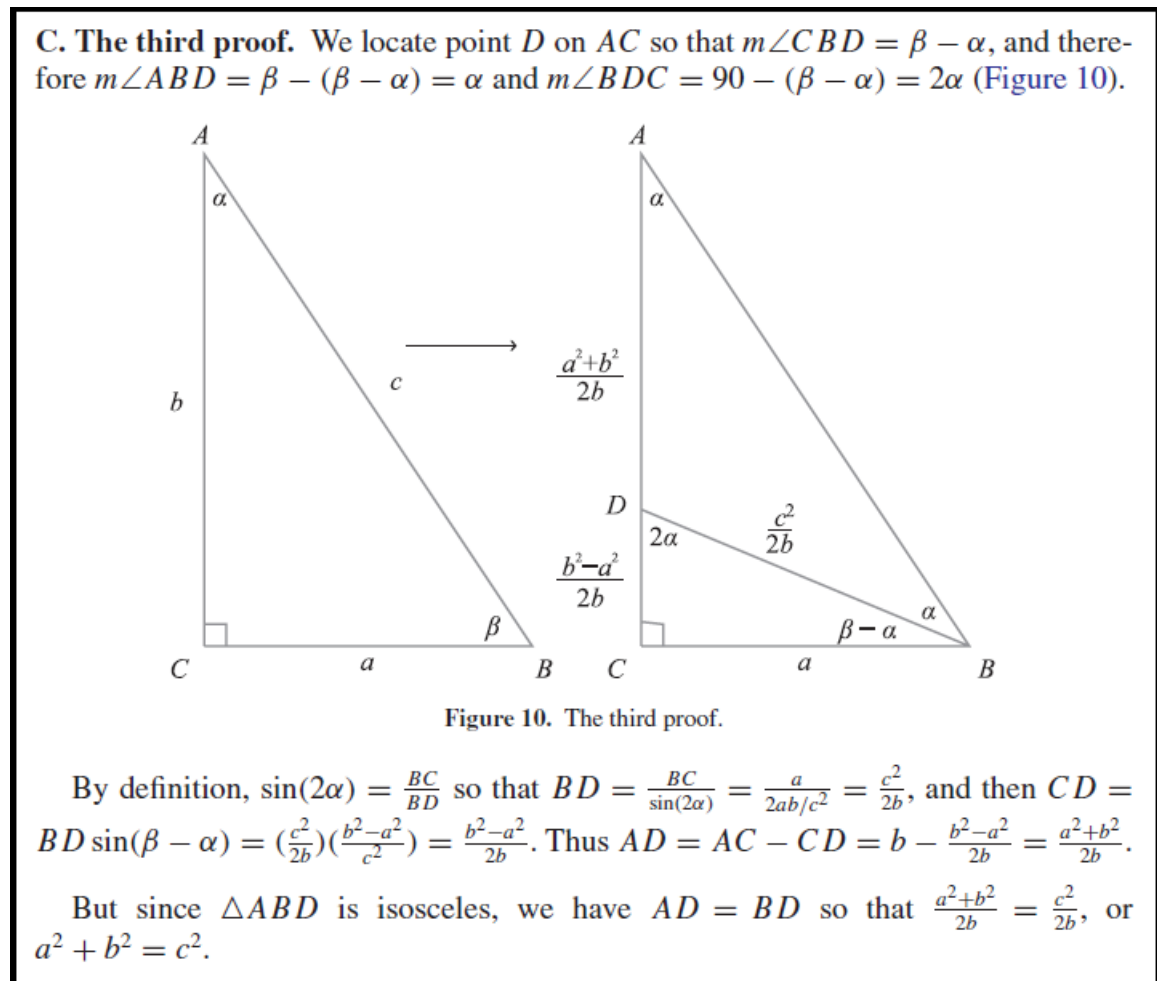
Conclusão:

- A segunda demonstração de Jackson e Johnson evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a Lei dos Senos e as fórmulas do ângulo duplo derivada a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

6.3 A terceira demonstração de Jackson e Johnson

A terceira demonstração de Jackson e Johnson (Figura 34), de forma semelhante à demonstração anterior, constrói um novo triângulo retângulo, mas dessa vez, interno ao triângulo retângulo original, de forma que o novo triângulo seja formado com os ângulos 2α e $\beta - \alpha$. A partir do qual, com a aplicação das fórmulas do ângulo duplo, é demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Figura 34 – Terceira demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.



Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Veja, no Quadro 19, a tradução da terceira demonstração de Jackson e Johnson, exibida na Figura 34.

Quadro 19 – Tradução da Figura 34

C. A terceira demonstração. Seja o triângulo retângulo ABC . Tome o ponto D tal que o ângulo $\widehat{CBD} = \beta - \alpha$, assim o ângulo $\widehat{ABD} = \beta - (\beta - \alpha) = \alpha$ e o ângulo $\widehat{BDC} = 90^\circ - (\beta - \alpha) = 2\alpha$ (Figura 10).

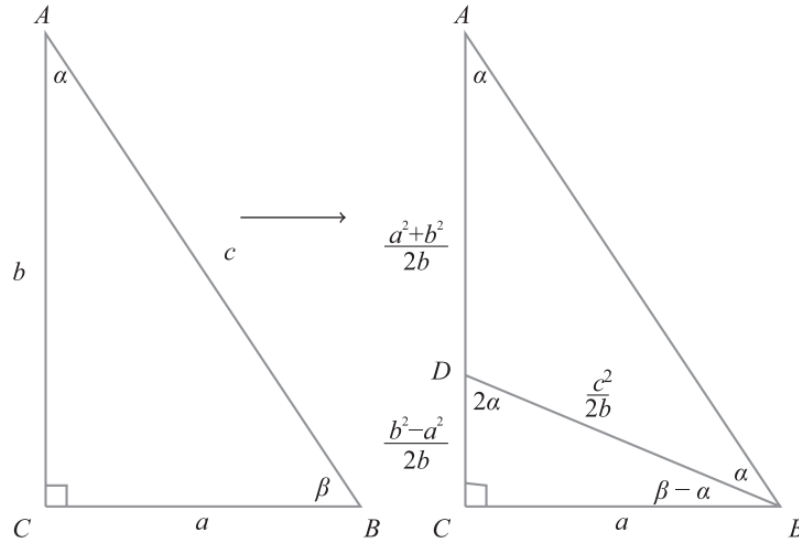


Figura 10. A terceira demonstração.

Pela definição de seno, $\text{sen}(2\alpha) = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{BC}{\text{sen}(2\alpha)} = \frac{a}{2ab/c^2} = \frac{c^2}{2b}$, e então $CD = BD \text{sen}(\beta - \alpha) = \left(\frac{c^2}{2b}\right) \left(\frac{b^2 - a^2}{c^2}\right) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$. Assim $AD = AC - CD = b - \frac{b^2 - a^2}{2b} = \frac{a^2 + b^2}{2b}$.

Mas como o $\triangle ABD$ é isósceles, nós temos $AD = BD$ tal que $\frac{a^2 + b^2}{2b} = \frac{c^2}{2b}$, ou $a^2 + b^2 = c^2$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Conclusão:

- A terceira demonstração de Jackson e Johnson evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza as fórmulas do ângulo duplo derivada a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonômétrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

6.4 A quarta demonstração de Jackson e Johnson

A quarta demonstração de Jackson e Johnson (Figura 35) usa a mediana e a mediatriz relativa a hipotenusa para criar um novo triângulo retângulo, interno ao triângulo retângulo original, de forma que o triângulo criado tem os ângulos 2α e $\beta - \alpha$. E, pela semelhança de triângulos, aplicando a Lei dos senos e as fórmulas do ângulo duplo, é demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Figura 35 – Quarta demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.

D. The fourth proof. We draw the perpendicular bisector DE of the hypotenuse AB (so that $\triangle AED \sim \triangle ABC$) and then we construct the rectangle $AOBC$ and draw its diagonals. By reflective symmetry, $m\angle BCD = m\angle CBD = \beta$; but then $m\angle DCE = 90 - \beta = \alpha$ and $m\angle BDC = 180 - (\beta + \beta) = 2\alpha$. We also have $m\angle CDE = 90 - 2\alpha = \beta - \alpha$ (Figure 11).

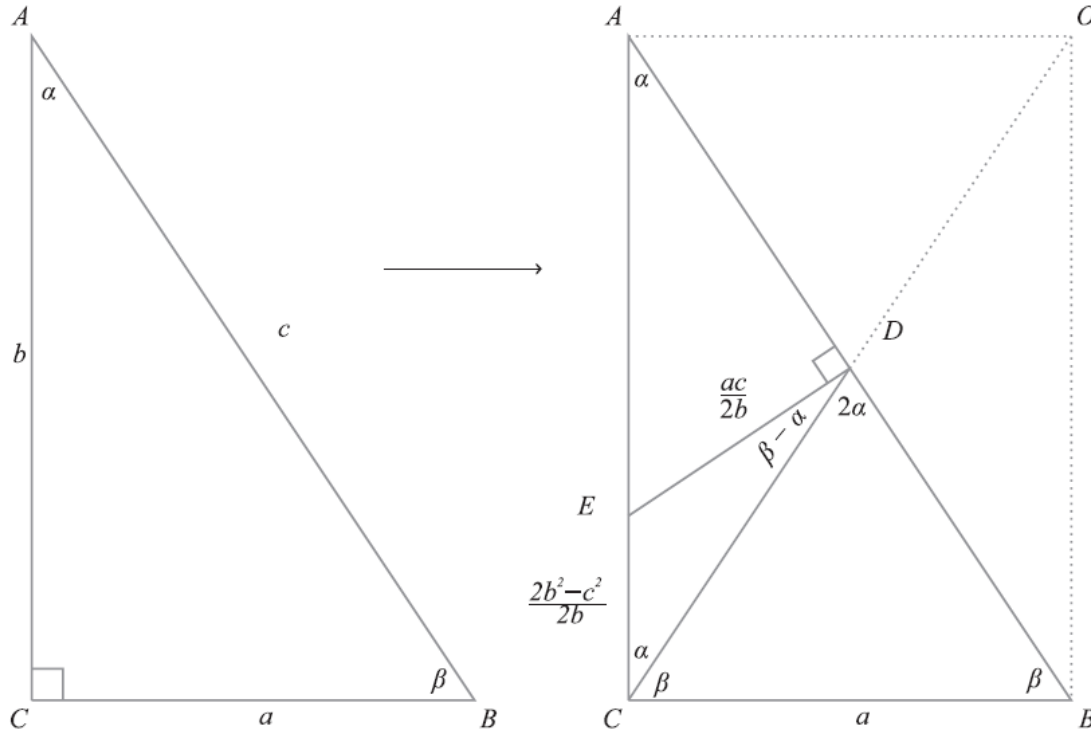


Figure 11. The fourth proof.

Since $AD = BD$, we have $AD = BD = \frac{c}{2}$, and the ratio $a : b : c$ of the sides of $\triangle AED$ shows that $DE = AD(\frac{a}{b}) = \frac{ac}{2b}$ and $AE = AD(\frac{c}{b}) = \frac{c^2}{2b}$. Thus $CE = AC - AE = b - \frac{c^2}{2b} = \frac{2b^2 - c^2}{2b}$.

We apply the Law of Sines to $\triangle CDE$ to find

$$\begin{aligned} \frac{(2b^2 - c^2)/2b}{\sin(\beta - \alpha)} &= \frac{ac/2b}{\sin \alpha} &\Rightarrow &\frac{2b^2 - c^2}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{ac}{\sin \alpha} \\ \Rightarrow \frac{2b^2 - c^2}{(b^2 - a^2)/c^2} &= \frac{ac}{a/c} &\Rightarrow &\frac{2b^2 - c^2}{b^2 - a^2} = 1 \\ \Rightarrow 2b^2 - c^2 &= b^2 - a^2 &\Rightarrow &a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

Veja, no Quadro 20, a tradução da quarta demonstração de Jackson e Johnson, exibida na Figura 35.

Quadro 20 – Tradução da Figura 35

D. A quarta demonstração. Trace a mediatriz DE da hipotenusa AB (tal que $\triangle AED \sim \triangle ABC$) e então construa o retângulo $AOBC$ e desenhe suas diagonais. Por reflexão, $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = \beta$; mas então $\widehat{DCE} = 90^\circ - \beta = \alpha$ e $\widehat{BDC} = 180^\circ - (\beta + \beta) = 2\alpha$. Nós também temos $\widehat{CDE} = 90^\circ - 2\alpha = \beta - \alpha$ (Figura 11).

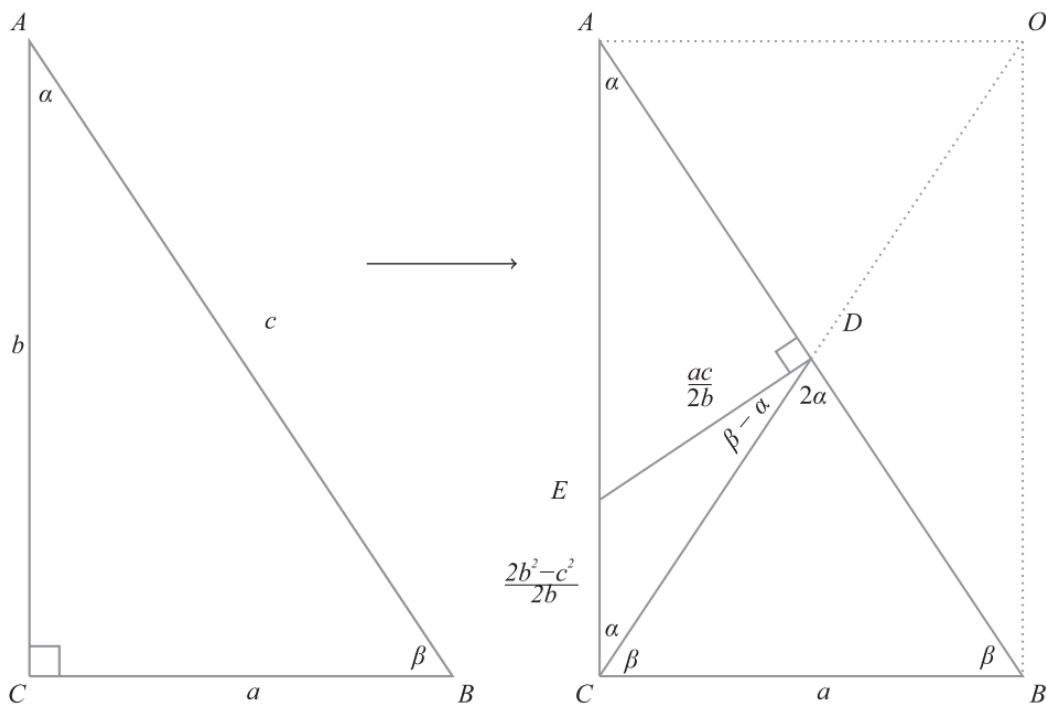


Figura 11. A quarta demonstração.

Como $AD = BD$, nós temos $AD = BD = \frac{c}{2}$, e a razão $a : b : c$ dos lados do $\triangle AED$ mostra que $DE = AD\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ac}{2b}$ e $AE = AD\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{c^2}{2b}$. Assim $CE = AC - AE = b - \frac{c^2}{2b} = \frac{2b^2 - c^2}{2b}$.

Aplicando a Lei dos Senos no $\triangle CDE$ para encontrar

$$\begin{aligned} \frac{(2b^2 - c^2)/2b}{\sin(\beta - \alpha)} &= \frac{ac/2b}{\sin \alpha} & \Rightarrow & \frac{2b^2 - c^2}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{ac}{\sin \alpha} \\ \Rightarrow \frac{2b^2 - c^2}{(b^2 - a^2)/c^2} &= \frac{ac}{a/c} & \Rightarrow & \frac{2b^2 - c^2}{b^2 - a^2} = 1 \\ \Rightarrow 2b^2 - c^2 &= b^2 - a^2 & \Rightarrow & a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

Conclusão:

- A quarta demonstração de Jackson e Johnson evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a Lei dos Senos e as fórmulas do ângulo duplo, derivadas a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

6.5 A quinta demonstração de Jackson e Johnson

A quinta demonstração de Jackson e Johnson (Figura 36), diferente das outras quatro, é válida para o triângulo retângulo isósceles. Ela cria um triângulo retângulo reduzido, interno ao triângulo retângulo original, de razão de semelhança k , cujo um dos seus lados é usado para desenhar um novo triângulo retângulo de ângulos 2α e $\beta - \alpha$. Onde a aplicação da Lei dos Senos e as fórmulas dos ângulo duplos leva, ao Teorema de Pitágoras.

Figura 36 – Quinta demonstração extraída do trabalho de Jackson e Johnson.

E. The fifth proof. Unlike our first four proofs, our fifth proof works for the isosceles right triangle. Given right triangle ABC with $\alpha \leq \beta$, for any constant k ($0 < k < 1$) we can draw DE so that $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ with scale factor k . We then draw DF so that $m\angle EDF = 2\alpha$, and we choose k so that F lies between B and C .

If $m\angle\alpha < 45$, then DF and EC can be extended to meet at point G , creating right triangle DEG in which $m\angle G = \beta - \alpha$. Since $DE \parallel BC$ we have $m\angle BFD = m\angle EDF = 2\alpha$, and then $m\angle BDF = 180 - (2\alpha + \beta) = \beta$. Applying the Law of Sines to $\triangle BDF$, we find $\frac{BF}{\sin\beta} = \frac{DF}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin(2\alpha)}$ so that $BF = DF = \frac{BD \sin\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{(1-k)c^2}{2a}$, and in $\triangle DEG$ we have $\sin(\beta - \alpha) = \frac{DE}{DG}$ so that $DG = \frac{DE}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{ka}{(b^2 - a^2)/c^2} = \frac{kac^2}{b^2 - a^2}$. Then $FG = DG - DF = \frac{c^2[(k+1)a^2 + (k-1)b^2]}{2a(b^2 - a^2)}$, and since $\sin(\beta - \alpha) = \frac{CF}{FG}$ we have $CF = FG \cdot \frac{b^2 - a^2}{c^2} = \frac{(k+1)a^2 + (k-1)b^2}{2a}$.

When $m\angle\alpha = 45$, we still have $BF = \frac{(1-k)c^2}{2a}$ (if M is the midpoint of BD then $BM = \frac{(1-k)c}{2}$ and $BF = \frac{c}{a} \cdot BM$) and we still have $CF = \frac{(k+1)a^2 + (k-1)b^2}{2a}$ ($= ka$), so for any right triangle ABC , we find

$$\begin{aligned} BC = BF + CF &\Rightarrow a = \frac{(1-k)c^2}{2a} + \frac{(k+1)a^2 + (k-1)b^2}{2a} \\ &\Rightarrow 2a^2 = (1-k)c^2 + (k+1)a^2 + (k-1)b^2 \\ &\Rightarrow 0 = (1-k)c^2 + (k-1)a^2 + (k-1)b^2 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

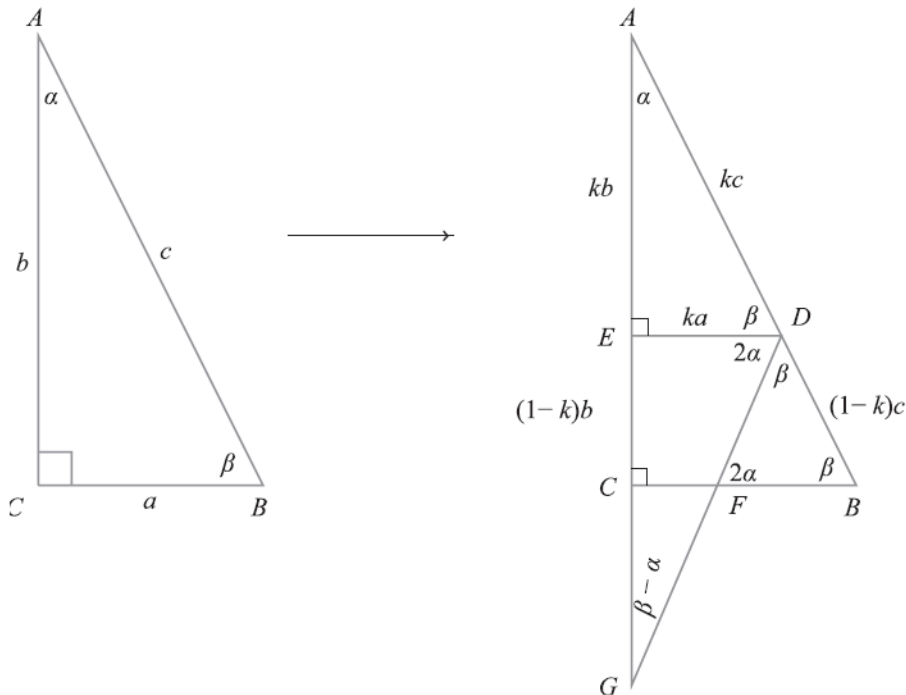


Figure 12. The fifth proof.

Fonte: (JACKSON; AND, 2024)

Veja, no Quadro 21, a tradução da quinta demonstração de Jackson e Johnson, exibida na Figura 36.

Conclusão:

- A quinta demonstração de Jackson e Johnson evita cuidadosamente o uso de ângulos não agudos, onde seno e cosseno são definidos exclusivamente por razões de lados em triângulos retângulos;
- Ela utiliza a Lei dos Senos e a fórmula do seno do ângulo duplo derivada a partir das fórmulas de adição, as quais, por sua vez, são estabelecidas geometricamente sem recorrer ao Teorema de Pitágoras;
- Assim, essa demonstração atende aos critérios da Definição 3.3.1 e, segundo nosso ponto de vista, trata-se de uma Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, contrariando a afirmação 3.2 de Loomis: “*Não existem demonstrações trigonométricas, porque todas as fórmulas fundamentais da trigonometria são baseadas na verdade do Teorema de Pitágoras.*”.

6.6 O que Jackson e Johnson demonstraram.

Mais do que cinco demonstrações, o trabalho de Jackson e Johnson é um ato de pertencimento. Em um campo historicamente dominado por homens brancos europeus, duas adolescentes negras de uma escola pública do sul dos EUA mostraram que a matemática não pertence a ninguém — e, por isso, pertence a todos. Sua trajetória — do concurso escolar à AMS, do LaTeX aprendido à publicação em um dos mais respeitados periódicos da área — é um testemunho poderoso de que gênero, etnia, classe social ou origem geográfica jamais devem ser barreiras à contribuição científica.

E, acima de tudo, seu trabalho reforça uma lição central desta dissertação: ainda há muito a ser desvendado, mesmo nos teoremas mais antigos. O Teorema de Pitágoras, com mais de dois milênios de história, continua a surpreender — não porque faltava algo a ser descoberto, mas porque novas vozes trazem novas perguntas, e é das perguntas, não das respostas, que a matemática se renova.

No próximo capítulo, apresentamos o Produto Educacional resultante desta pesquisa: um vídeo motivacional e duas Atividades Dirigidas de Aprendizagem (ADAs) pensadas para levar às salas de aula não apenas o conteúdo, mas também a convicção de que toda pessoa, em especial meninas negras e estudantes da periferia, pode não só aprender matemática, mas transformá-la.

7 Produto Educacional: Construindo uma demonstração atual do Teorema de Pitágoras e uma história de inclusão de meninas na Matemática

Este Produto Educacional é composto por um vídeo motivacional e duas Atividades Dirigidas de Aprendizagem (ADAs), cuidadosamente elaboradas para alunos do 1º e do 2º anos do Ensino Médio. Seu objetivo principal vai além da transmissão de conteúdos: busca conectar os estudantes à “alma” da matemática, não como um conjunto fixo de fórmulas, mas como uma prática viva, criativa, coletiva e profundamente humana. Inspirado na trajetória das jovens Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, este material convida os alunos a experimentar o ato de demonstrar, questionar e reimaginar verdades aparentemente consolidadas, reforçando que a matemática pertence a todas e todos — especialmente àquelas e àqueles historicamente excluídos dos espaços científicos.

7.1 Contexto histórico e a motivação deste trabalho

A história da matemática é feita de perguntas, respostas e, sobretudo, de coragem para desafiar o que se considera “impossível”. Um dos casos mais emblemáticos dessa dinâmica envolve o Teorema de Pitágoras — um dos pilares da geometria — e a longa crença de que ele não poderia ser demonstrado por meio da trigonometria.

Essa ideia consolidou-se em 1927, com a publicação do livro *The Pythagorean Proposition*, do professor Elisha Scott Loomis (LOOMIS, 1968), que traduzindo significa “O Teorema de Pitágoras”. Em sua obra, que reúne centenas de demonstrações do teorema, Loomis afirmou categoricamente:

“Não existem demonstrações trigonométricas [do Teorema de Pitágoras], pois toda a trigonometria depende dele”

Embora essa afirmação nunca tenha sido acompanhada de uma demonstração formal, ela foi amplamente aceita pela comunidade matemática durante décadas, tornando-se um verdadeiro dogma. A lógica por trás dela era aparentemente sólida: como as identidades trigonométricas fundamentais, em especial $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, são frequentemente

derivadas a partir do Teorema de Pitágoras, usar trigonometria para prová-lo seria um raciocínio circular.

No entanto, em 2009, o matemático Jason Zimba desafiou essa visão. Em seu artigo “On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem” (ZIMBA, 2009) (tradução: Sobre a possibilidade de uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras), publicado na revista Forum Geometricorum (FAU.EDU, 2009), Zimba demonstrou a Relação Fundamental da Trigonometria independentemente do Teorema de Pitágoras. Com isso, tornou-se possível construir uma demonstração trigonométrica rigorosa e não circular do teorema, rompendo um tabu que durou quase um século.

Pouco mais de uma década, em dezembro de 2022, duas estudantes do último ano do ensino médio nos Estados Unidos — Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson — aceitaram um desafio proposto em um concurso escolar de matemática com premiação em dinheiro. O objetivo? Encontrar uma nova demonstração do Teorema de Pitágoras. Inspiradas pelo trabalho de Zimba (ZIMBA, 2009) e Luzia (LUZIA, 2015), elas mergulharam na investigação e, surpreendentemente, desenvolveram cinco demonstrações trigonométricas originais (JACKSON; AND, 2024). Seu trabalho foi apresentado à American Mathematical Society (AMS, 2023) (tradução: Sociedade Americana de Matemática) e ganhou repercussão internacional, incluindo uma entrevista no programa 60 Minutes da CBS News (CBSNEWS, 2024).

O feito de Ne’Kiya e Calcea transcende o aspecto técnico: ele é um poderoso símbolo de inclusão, juventude e potencial humano. Como jovens, mulheres e negras, elas desmontaram, com simplicidade e brilhantismo, não apenas um equívoco matemático, mas também estereótipos sobre quem pode fazer ciência.

Diante desse cenário histórico e inspirador, este trabalho adota a seguinte definição, ausente na literatura consultada:

Definição 3.3.1. Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependem do Teorema de Pitágoras.

Essa definição orientou toda a análise das demonstrações existentes, a criação de três demonstrações trigonométricas originais e a produção deste produto educacional.

Assim, motivado pela trajetória de Ne’Kiya e Calcea, pelo rigor de Zimba e pela necessidade de democratizar o acesso à matemática como prática criativa e humana, resolvemos produzir, como produto educacional, um vídeo motivacional e duas Atividades Dirigidas de Aprendizagem (ADA). O objetivo é levar aos estudantes do Ensino Médio não apenas o conhecimento, mas também a convicção de que eles mesmos podem questionar, descobrir e transformar a matemática.

7.2 Atividade Dirigida de Aprendizagem

7.2.1 O que é uma Atividade Dirigida de Aprendizagem?

Uma Atividade Dirigida de Aprendizagem (ADA) é uma sequência didática planejada com objetivos específicos, que orienta os estudantes por meio de etapas estruturadas, incentivando a investigação, a reflexão e a construção ativa do conhecimento. Diferentemente de exercícios mecânicos, uma ADA busca envolver o aluno em um processo de descoberta guiada, em que ele não apenas aplica fórmulas, mas compreende ideias, questiona pressupostos e experimenta o fazer matemática.

Neste trabalho, a ADA foi concebida como uma atividade para que os estudantes vivenciem a matemática como criação humana — dinâmica, acessível e profundamente conectada à curiosidade e à lógica.

7.2.2 Por que produzir uma ADA?

A escolha por uma ADA parte de uma convicção central deste trabalho: é fundamental conectar o aluno à “alma” da matemática. Muitas vezes, o ensino se limita à transmissão de resultados prontos, sem revelar o caminho que os originou — as dúvidas, os erros, as tentativas e as intuições. Isso gera nos estudantes a falsa impressão de que a matemática é imutável, distante e inacessível.

A ADA aqui proposta busca romper com essa visão, convidando os alunos a participarem ativamente da construção de uma demonstração. Ao fazê-lo, eles não apenas aplicam conteúdos específicos, mas também desenvolvem pensamento crítico, autonomia intelectual e confiança em sua própria capacidade de raciocínio — especialmente importante para meninas e jovens historicamente sub-representados nos campos científicos.

7.2.3 Escolha das demonstrações

Foram selecionadas, para este produto educacional, duas demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras, apresentadas neste TCC, adaptadas a diferentes momentos do currículo do Ensino Médio, gerando duas ADAs independentes:

- **ADA.1:** Foi utilizada uma demonstração original, desenvolvida pelo autor deste trabalho, na seção 3.3.1, que emprega apenas as razões trigonométricas básicas (seno e cosseno) em um triângulo retângulo. Sua simplicidade permite que os alunos, recém introduzidos à trigonometria, compreendam a estrutura lógica de uma demonstração sem recorrer a identidades avançadas. A atividade exige apenas os conceitos trabalhados no estudo da trigonometria do triângulo retângulo: definição de seno e cosseno, o próprio enunciado do Teorema de Pitágoras e a Relação Fundamental da Trigonometria.
- **ADA.2:** Foi adotada a demonstração de Jason Zimba (ZIMBA, 2009), apresentada na seção 4.1.1 reconhecida como a primeira demonstração trigonométrica rigorosa e não circular do teorema. Essa escolha se justifica por três razões:
 1. Valor histórico: representa a quebra de um paradigma centenário estabelecido por Loomis (LOOMIS, 1968), pois foi a primeira demonstração trigonométrica rigorosa e não circular do Teorema de Pitágoras. Com isso, ela desmonta a suposta “impossibilidade lógica” das demonstrações trigonométricas, revelando-a como uma limitação histórica e didática, não matemática;
 2. Riqueza didática: utiliza as fórmulas da diferença para seno e cosseno, além da elegante estratégia de “somar zero” (isto é, inserir termos que se cancelam algebricamente para facilitar a manipulação);
 3. Viabilidade curricular: os conteúdos utilizados são abordados no 2º ano do Ensino Médio, tornando a atividade contextualmente pertinente.

Ambas as demonstrações foram cuidadosamente adaptadas para serem realizadas em uma única aula de 45 minutos, com orientações claras, perguntas norteadoras e espaço para discussão coletiva. O foco não está na memorização, mas na compreensão do processo demonstrativo e na reflexão sobre o que significa “demonstrar” em matemática.

Vale ressaltar que a estrutura desta ADA é flexível e pode ser replicada com outras demonstrações do Teorema de Pitágoras, em especial com as produzidas por Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson. Entre elas, destaca-se a segunda demonstração de Jackson e Johnson, apresentada na seção 6.2, cuja construção geométrica é notavelmente simples

e recorre à Lei dos Senos — conteúdo já abordado no 2º ano do Ensino Médio. Essa demonstração, além de atender aos critérios da Definição 3.3.1, “*Demonstrações Trigonométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependam do Teorema de Pitágoras.*”, oferece uma alternativa rica e acessível para aprofundar o entendimento dos estudantes sobre relações trigonométricas e argumentação matemática.

Durante a produção deste trabalho, notamos que o livro didático (PAIVA, 2024), adotado pelas Escolas Cidadãs Integrais do Estado da Paraíba em 2026, concentra todo o estudo da trigonometria na 2ª série do ensino médio, evidenciando que o ensino-aprendizagem da matemática assim como a própria Matemática, é orgânico e está em constante aperfeiçoamento. Mas como as ADAs produzidas são independentes uma da outra, em nada muda sua aplicação em sala de aula.

7.2.4 Produção do vídeo motivacional

Além da ADA, este produto educacional inclui um vídeo educativo motivacional que serve como porta de entrada emocional e histórica para a atividade. O vídeo foi inspirado em dois materiais audiovisuais de referência:

- O vídeo educativo “*How many ways are there to prove the Pythagorean theorem?*”, de Betty Fei (tradução: De quantas maneiras podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras), disponível na plataforma TED-Ed (TED-ED, 2019) e no YouTube (TED-ED, 2017);
- O documentário “*Remarkable Kids*” (tradução: Crianças Notáveis), exibido pelo programa 60 Minutes (CBSNEWS, 2024), que apresenta a história de Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson.

O roteiro do vídeo foi baseado na história das jovens Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, com o intuito de mostrar aos estudantes, que além de aprender, eles são capazes de fazer matemática e, motivá-los a tentar, enfrentar os desafios e se deleitar nas descobertas. A produção final do vídeo foi realizada pela empresa MapperPlay Studio (e-mail: mapperplayoficial@gmail.com), contratado para edição, narração e montagem conforme as diretrizes pedagógicas do autor deste TCC.

Esse vídeo educacional pode ser encontrado no portal eduCAPES (GOV.BR, 2026), ou pelo link <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1179875>>.

Embora o vídeo seja aplicado antes da ADA (conforme descrito na próxima seção), sua concepção faz parte integrante do produto educacional, pois estabelece o clima de inspiração, pertencimento e possibilidade necessário para que os alunos se engajem plenamente na experiência demonstrativa que se segue.

7.3 Aplicação do Produto Educacional

A aplicação do produto educacional aqui desenvolvido deve ocorrer em três etapas complementares:

1. Exibição do vídeo motivacional,
2. Realização da Atividade Dirigida de Aprendizagem (ADA) e
3. Discussão orientada.

Essa sequência foi pensada para criar um arco pedagógico completo: do inspirar ao fazer, passando pela reflexão crítica.

7.3.1 Momento de aplicação

Tendo em vista que o currículo escolar é passível de mudanças e adaptações, a aplicação das ADAs podem ser feita em momentos distintos do currículo, respeitando os pré-requisitos cognitivos e conceituais mínimos necessários dos alunos:

- **Para o ADA.1:** A atividade deve ser aplicada após o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno e cosseno), o próprio Teorema de Pitágoras e a Relação Fundamental da Trigonometria. Nesse estágio, os alunos já dispõem dos elementos mínimos para compreender a demonstração proposta, que se baseia exclusivamente nesses conceitos.
- **Para o ADA.2:** A aplicação deve ocorrer após o estudo das fórmulas de soma e diferença para seno e cosseno, geralmente abordadas no contexto da trigonometria do ciclo trigonométrico. Esses conteúdos são essenciais para a compreensão da demonstração de Jason Zimba, que utiliza tais identidades de forma estratégica.

7.3.2 Como aplicar

1. Iniciar com o vídeo motivacional (duração aproximada: 10 minutos). O vídeo deve ser exibido em sala de aula, seguido de um breve momento de compartilhamento de impressões. Perguntas como “O que mais chamou sua atenção?” ou “Você já imaginou que jovens da sua idade poderiam mudar a matemática?” ajudam a ativar o engajamento emocional.
2. Distribuir a folha da ADA (uma por aluno). A atividade é autoexplicativa, mas o professor deve circular pela sala, incentivando a leitura atenta, esclarecendo dúvidas conceituais e evitando fornecer “atalhos” que comprometam o processo investigativo.
3. Reservar 25 a 30 minutos para a realização da ADA, seguidos de 5 a 10 minutos de socialização coletiva. Nesse momento final, o professor conduz uma discussão com base nas questões orientadoras (ver Seção 4.3), valorizando diferentes formas de raciocínio e reforçando a ideia de que a matemática é construída por pessoas, e os alunos também podem ser parte disso.

7.3.3 Questões orientadoras para discussão em sala de aula

Ao final da atividade, recomenda-se promover um debate com base nas seguintes perguntas, adaptadas conforme a ADA aplicada:

Para ambas as ADAs:

- Por que demonstramos teoremas? E por que existem tantas formas diferentes de demonstrar o mesmo resultado?
- O que é uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras? E que outros tipos de demonstração existem?
- Como foi que aprendemos a Relação Fundamental da Trigonometria? Usamos o Teorema de Pitágoras?
- A demonstração que reproduzimos é uma demonstração trigonométrica?
- Quem pode fazer matemática? O que muda quando quem faz matemática é uma garota negra de uma escola pública?
- Por que raramente ouvimos falar de mulheres matemáticas na escola?
- Ser “bom em matemática” depende de talento nato ou de oportunidade?

Questões adicionais para a ADA.2:

- Qual a importância da demonstração de Zimba para a Matemática?
- Na demonstração de Zimba, seria possível usar a fórmula da diferença do seno?
- Qual o papel da estratégia de “somar zero” no desenvolvimento da demonstração? Você já havia visto esse tipo de artifício antes?

Essas perguntas não visam respostas únicas, mas sim estimular o pensamento meta-cognitivo, a argumentação matemática e a percepção de que demonstrar é explicar, justificar e comunicar — não apenas calcular.

7.4 Objetivos Pedagógicos

O produto educacional tem como objetivo principal desconstruir as barreiras psicológicas que muitos alunos constroem em torno da matemática — o sentimento de incapacidade, a ideia de que “matemática é só para alguns”, ou a visão de que ela é um corpo fixo de verdades imutáveis. Ao contrário, busca-se:

- Humanizar a matemática, mostrando que ela é construída por pessoas reais, em contextos diversos;
- Fortalecer a autoestima dos estudantes, especialmente meninas e jovens periféricos, historicamente sub-representados nos campos científicos;
- Inspirar especialmente meninas e jovens negras a se enxergarem como sujeitas da matemática, ao apresentar exemplos reais de protagonismo feminino, como Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson, que desafiam estereótipos históricos e mostram que gênero, raça e origem social não são barreiras à excelência científica;
- Conectar os alunos à “alma” da matemática: sua criatividade, sua lógica interna e seu poder transformador;
- Estimular o pensamento crítico e investigativo, ao convidar os alunos a reproduzirem, compreenderem e até reinventarem demonstrações matemáticas.

Em última instância, espera-se que, ao final da experiência, os estudantes não apenas saibam como se demonstra o Teorema de Pitágoras, mas compreendam por que isso é feito — e de tantas formas distintas. Mais do que isso, deseja-se que encontrem a confiança necessária para se verem como protagonistas dessa história viva e em constante construção: a da própria matemática.

8 Considerações Finais

Este trabalho partiu de uma aparente impossibilidade: a afirmação categórica, consagrada por Elisha Scott Loomis em *The Pythagorean Proposition* (LOOMIS, 1968), de que “não existem demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras”. Ao longo da investigação, essa proposição revelou-se não uma verdade lógica, mas um equívoco epistemológico amplamente aceito pela comunidade matemática durante quase um século. Analisando criticamente os trabalhos de Jason Zimba (ZIMBA, 2009), Nuno Luzia (LUZIA, 2015) e, especialmente, das jovens Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson (JACKSON; AND, 2024), foi possível identificar que a impossibilidade alegada só se sustenta se a trigonometria for entendida como dependente, desde sua origem, do próprio Teorema de Pitágoras.

Contudo, ao distinguir cuidadosamente entre trigonometria do triângulo retângulo (baseada exclusivamente em semelhança e razões de lados, válida apenas para ângulos agudos) e trigonometria do ciclo trigonométrico (que estende essas funções a todos os ângulos reais, mas pressupõe a métrica euclidiana), tornou-se possível, devido a falta de uma definição do que seria uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras, nas bibliografias consultadas, formular uma definição operacional rigorosa: **demonstrações trigonométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependem do Teorema de Pitágoras**. Com base nessa definição, apresentamos três demonstrações originais que satisfazem plenamente esse critério, preenchendo assim uma lacuna conceitual na literatura e contribuindo efetivamente para o repertório de demonstrações não circulares do teorema.

Além do aspecto técnico, este estudo levantou questões pedagógicas e filosóficas fundamentais. A trigonometria, frequentemente relegada nas salas de aula a um “apêndice” da geometria — que por sua vez costuma ser ensinada por último — merece um lugar central no currículo. Sugerimos, inclusive, uma inversão didática radical: e se a geometria, com seu caráter visual e intuitivo, fosse introduzida antes da álgebra e até mesmo da aritmética formal? Afinal, nos primeiros anos escolares, aprendemos números por meio de figuras, quantidades visuais e padrões espaciais. Talvez o caminho mais natural para o pensamento matemático seja, justamente, o geométrico.

Reconhecemos, contudo, que certas questões permanecem em aberto. Embora concordamos com Loomis, Zimba, Luzia e, Jackson e Johnson quanto ao fato de que a trigo-

nometria do ciclo trigonométrico, tal como habitualmente construída, pressupõe o Teorema de Pitágoras, essa afirmação ainda carece de uma demonstração rigorosa dentro dos fundamentos da geometria analítica. Seriam os valores $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$ e $\cos 90^\circ$ verdadeiras definições ou meras consequências de uma estrutura métrica pitagórica? Até que ponto a geometria analítica pode avançar sem invocar, explícita ou implicitamente, a relação pitagórica? Essas são indagações valiosas para futuras pesquisas.

Em particular, os valores $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$ e $\cos 90^\circ = 0$, frequentemente apresentados como “definições” nos livros didáticos, merecem uma atenção especial. Na trigonometria do triângulo retângulo, esses ângulos não são definíveis, pois não existem triângulos retângulos com ângulos nulos ou retos além do próprio ângulo reto. Assim, tais valores só surgem quando se adota o ciclo trigonométrico, cuja construção depende da noção de distância euclidiana no plano — isto é, da própria relação pitagórica.

Portanto, a questão central não é apenas técnica, mas conceitual: esses valores são definições arbitrárias escolhidas por conveniência, ou são consequências lógicas de uma estrutura métrica que já incorpora o Teorema de Pitágoras? Se forem definições, poderíamos, em princípio, estabelecer outras sem comprometer a consistência interna da trigonometria. Se forem consequências, então qualquer uso de $\sin 90^\circ = 1$ em uma demonstração do Teorema de Pitágoras configura circularidade, ainda que sutil.

Essa ambiguidade revela uma lacuna nos fundamentos da matemática elementar: raramente se discute, nas salas de aula ou mesmo nos textos avançados, em que momento exato a trigonometria deixa de ser puramente geométrica (baseada em semelhança) e torna-se métrica (baseada em coordenadas e distâncias). Até que ponto a geometria analítica pode avançar sem invocar, explícita ou implicitamente, a relação pitagórica?

Essas são indagações valiosas, não apenas para historiadores ou matemáticos, mas também para educadores. Elas tocam na base da clareza conceitual que desejamos transmitir aos estudantes, especialmente àqueles que, como Ne’Kiya e Calcea, ousam questionar o que todos parecem aceitar como óbvio.

Por fim, este trabalho celebra não apenas os grandes nomes da história da matemática, mas também as pequenas conquistas de pessoas comuns que, com curiosidade, esforço e coragem intelectual, ousam questionar o estabelecido. A trajetória de Ne’Kiya e Calcea, duas adolescentes de uma escola católica em Nova Orleans, é um testemunho poderoso de que a matemática não pertence a ninguém — e, por isso, pertence a todos.

Assim, concluímos este TCC não com respostas definitivas, mas com novas perguntas. Porque é assim que a matemática se renova: não pelo acúmulo de certezas, mas pela coragem de questionar.

Referências

- AMPLIFY. *Amplify | High-quality K-12 curriculum and assessments*. 2024. Disponível em: <<https://amplify.com/>>. Acesso em: 27 de dezembro 2025. Citado na página 46.
- AMS. *2023 Spring Southeastern Sectional Meeting, Program*. 2023. Disponível em: <https://www.ams.org/meetings/sectional/2298_program.html>. Acesso em: 23 de dezembro 2025. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 99.
- BONJORNO, J. R. *Matemática Completa 1º ano*. [S.l.]: FTD, 2016. Citado na página 25.
- CBSNEWS. *Remarkable Kids | 60 Minutes Full Episodes*. 2024. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=P1CGR2TuA7s>>. Acesso em: 14 de janeiro 2026. Citado 3 vezes nas páginas 64, 99 e 102.
- CUT-THE-KNOT.ORG. *Pythagorean Theorem and its many proofs*. 2025. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#84>>. Acesso em: 25 de dezembro 2025. Citado 4 vezes nas páginas 13, 47, 62 e 63.
- CUTTHEKNOT. *The Cosine Law: PWW by S. Kung*. 2025. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/KungCosLaw.shtml>>. Acesso em: 04 de dezembro 2025. Citado na página 70.
- CUTTHEKNOT. *Pythagorean Theorem via Geometric Progression*. 2025. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Proof100.shtml>>. Acesso em: 04 de dezembro 2025. Citado na página 79.
- DANTE, L. R. *Matemática : contexto aplicações. 1º ano: ensino médio*. [S.l.]: Ática, 2016. Citado na página 25.
- FAU.EDU. *Forum Geometricorum | Open Access Journals | Florida Atlantic University*. 2009. Disponível em: <<https://digitalcommons.fau.edu/fg/>>. Acesso em: 23 de dezembro 2025. Citado 3 vezes nas páginas 46, 61 e 99.
- GOV.BR. *eduCAPES*. 2026. <<https://educapes.capes.gov.br/>>. Acessado em: 13/06/2026. Citado na página 102.
- JACKSON, N.; AND, C. J. Five or ten new proofs of the pythagorean theorem. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 131, n. 9, p. 739–752, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2370240>>. Citado 22 vezes nas páginas 3, 4, 11, 13, 63, 64, 65, 66, 67, 72, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 85, 88, 91, 95, 99 e 106.
- LEONARDO, F. M. d. *Conexões com a matemática. 1º ano: ensino médio*. [S.l.]: Moderna, 2016. Citado na página 25.
- LOOMIS, E. S. *Pythagorean Proposition*. [S.l.]: Natl Council of Teachers of, 1968. 284 p. ISBN 9780873530361. Citado 14 vezes nas páginas 3, 4, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 46, 98, 101 e 106.

LUZIA, N. *Other trigonometric proofs of Pythagoras theorem*. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1502.06628>. Citado 15 vezes nas páginas 3, 4, 11, 13, 46, 53, 54, 56, 58, 61, 62, 63, 65, 99 e 106.

LUZIA, N. O teorema de Pitágoras via fórmulas de duplicação do ângulo. *RPM*, v. 93, p. 2–4, 2017. Citado na página 53.

MAA.ORG. *The American mathematical monthly – mathematical association of America*. 2024. Disponível em: <https://maa.org/publication/the-american-mathematical-monthly/>. Acesso em: 23 de dezembro 2025. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 72.

PAIVA, M. *Moderna plus matemática Paiva. 2º ano: ensino médio*. [S.l.]: Moderna, 2024. Citado na página 102.

SMID, H. J. Foreign influences on dutch mathematics teaching. In: BJARNADÓTTIR, K.; FURINGHETTI, E.; SCHUBRING, G. (Ed.). *“Dig where you stand”: Proceedings of the Conference on “On-going Research in the History of Mathematics Education”*. Reykjavik: University of Iceland–School of Education, 2009. p. 209–222. Citado na página 41.

TED-ED. *How many ways are there to prove the Pythagorean theorem? - Betty Fei*. *YouTube*. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=YompsDlEdtc>. Acesso em: 14 de janeiro 2026. Citado na página 102.

TED-ED. *Lessons Worth Sharing*. 2019. Disponível em: <https://ed.ted.com/>. Acesso em: 14 de janeiro 2026. Citado na página 102.

UNIVERSITY, C. *arXiv.org e-Print archive*. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/>. Acesso em: 23 de dezembro 2025. Citado na página 53.

VERSLUYS, J. *Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras: verzameld en gerangschikt*. [S.l.]: Versluys, 1914. 103 p. Citado 5 vezes nas páginas 3, 4, 24, 41 e 42.

WIKIPEDIA. *Elisha Scott Loomis*. 2025. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Elisha_Scott_Loomis. Acesso em: 29 de junho 2025. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

WIKIPEDIA. *Lei dos Cossenos*. 2025. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_dos_cossenos. Acesso em: 04 de dezembro 2025. Citado na página 68.

WIKIPEDIA. *Talk:Pythagorean theorem*. 2025. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Pythagorean_theorem. Acesso em: 17 de agosto 2025. Citado 4 vezes nas páginas 13, 47, 61 e 63.

WIKIPEDIA. *Talk:Pythagorean theorem/Archive 7*. 2025. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Pythagorean_theorem/Archive_7#Proof_using_trigonometry. Acesso em: 17 de agosto 2025. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 63.

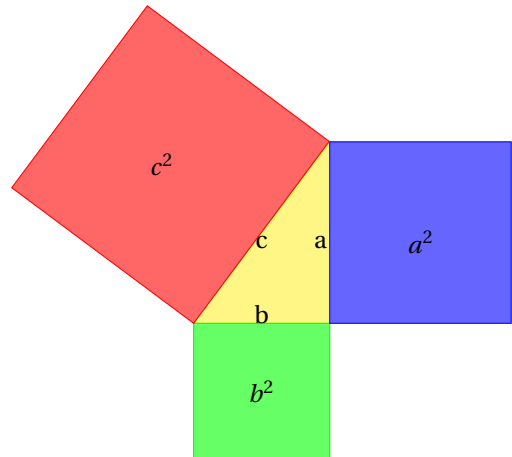
ZIMBA, J. On the possibility of trigonometric proofs of the pythagorean theorem. In: *Forum geometricorum*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 9, p. 275–278. Citado 13 vezes nas páginas 3, 4, 11, 13, 46, 48, 50, 53, 63, 65, 99, 101 e 106.

Apêndices

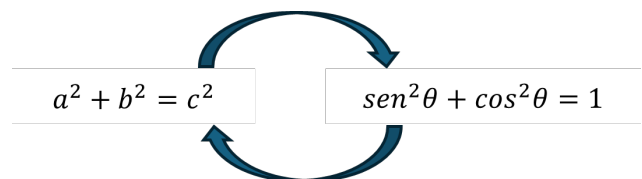
(ADA.1) Atividade Dirigida de Aprendizagem 1
Uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras

Aluno(a): _____ **Turma:** _____ **Data:** ____/____/____

Você sabia que o Teorema de Pitágoras — aquele que diz que, em um triângulo retângulo, “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa” — já foi demonstrado de mais de 370 formas diferentes? Demonstrações usam regras matemáticas existentes e lógica para provar que o teorema é verdadeiro o tempo todo.



Por quase um século acreditou-se que o Teorema de Pitágoras não poderia ser demonstrado por meio da trigonometria. Como as identidades trigonométricas, em especial a Relação Fundamental da Trigonometria, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, são usualmente derivadas a partir do Teorema de Pitágoras, usar trigonometria para prová-lo seria um raciocínio circular.



Contudo, em 2009, o professor Zimba mostrou que é possível construir demonstrações trigonométricas [não circulares] do Teorema de Pitágoras. Essa contribuição inspirou as jovens Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson a desenvolverem suas próprias demonstrações para um desafio proposto em um concurso escolar de Matemática. Elas provaram que qualquer pessoa, independentemente de gênero, raça ou origem, pode fazer matemática de verdade.

Baseado nessa história, o professor Joy Costa, propôs em seu trabalho de TCC do ProfMat, Mestrado voltado para professores de Matemática do ensino público, a seguinte definição:

Definição 3.3.1. Demonstrações Trigonômétricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependem do Teorema de Pitágoras.

O objetivo desta ADA não é mostrar uma demonstração já pronta, mas guiá-los pela experiência da descoberta. Nesta atividade, você vai construir a Demonstração Trigonômétrica do Teorema de Pitágoras, desenvolvida pelo professor Joy Costa em seu trabalho, especialmente pensada para quem está começando a estudar trigonometria.

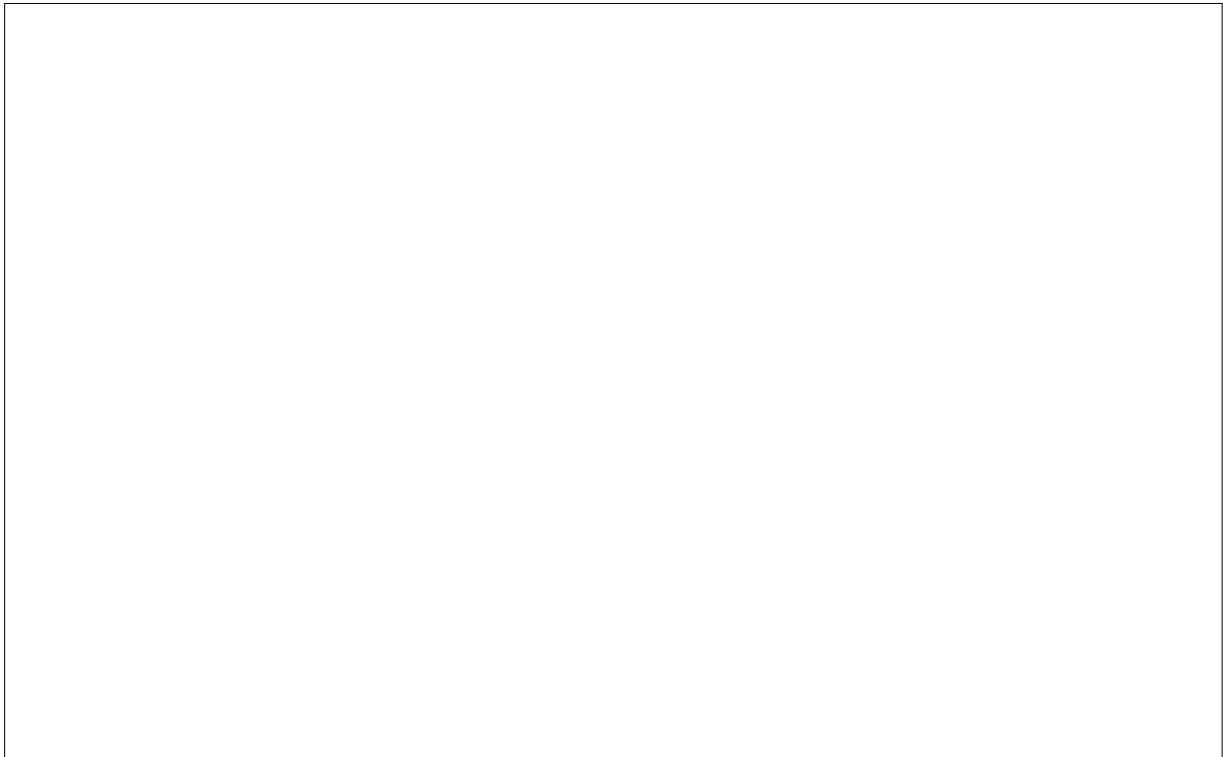
Vamos começar!

Folha de demonstração 1

1ª PARTE: Construindo a figura.

Passo 1. Usando régua e compasso, no quadro abaixo, desenhe um triângulo retângulo ABC , com ângulo reto em C . (Faça um triângulo grande)

- Chame o ângulo A de α e o ângulo B de β .
- Nomeie os lados: $BC = a$ (cateto oposto a α); $AC = b$ (cateto adjacente a α) e $AB = c$ (hipotenusa)



Passo 2. Trace a altura relativa à hipotenusa AB .

- Chame o ponto onde ela toca a hipotenusa de D .
- Assim, $AD = p$ e $DB = q$. (Lembre-se: $p + q = c$)

Passo 3. Quantos triângulos retângulos você vê agora? _____

Liste-os: _____

Passo 4. Qual é a medida do ângulo $\widehat{BCD}$? (marque na figura)

Passo 5. Esses triângulos são semelhantes? () sim () não

Justifique: _____

2ª PARTE: Aplicando as razões trigonométricas.

Passo 6. Determine o seno e o cosseno do ângulo α no triângulo ABC .

• $\operatorname{sen} \alpha =$

• $\cos \alpha =$

Passo 7. Determine o seno do ângulo α no triângulo BCD .

• $\operatorname{sen} \alpha =$

Passo 8. Determine o cosseno do ângulo α no triângulo ACD .

• $\cos \alpha =$

3ª PARTE: Encontrando a Relação Fundamental da Trigonometria.

Passo 9. Multiplique o $\operatorname{sen} \alpha$ do passo 6 com o $\operatorname{sen} \alpha$ do passo 7 para determinar $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e, multiplique o $\cos \alpha$ do passo 6 com o $\cos \alpha$ do passo 8 para determinar $\cos^2 \alpha$.

• $\operatorname{sen}^2 \alpha =$

• $\cos^2 \alpha =$

Passo 10. Some os dois resultados acima e simplifique para encontrar a Relação Fundamental da Trigonometria.

• $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$

4ª PARTE: Demonstrando o Teorema de Pitágoras.

Passo 11. Substitua $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ do triângulo ABC (passo 6) na relação acima:

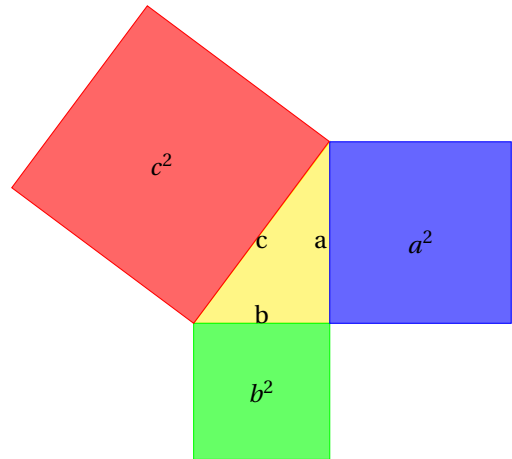
Passo 12. Multiplique ambos os lados da equação acima por c^2 e simplifique:

Parabéns! Você demonstrou o Teorema de Pitágoras usando trigonometria!

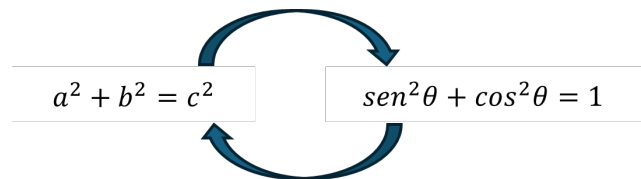
(ADA.2) Atividade Dirigida de Aprendizagem 2
Outra demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras

Aluno(a): _____ **Turma:** _____ **Data:** ____/____/____

Você sabia que o Teorema de Pitágoras — aquele que diz que, em um triângulo retângulo, “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa” — já foi demonstrado de mais de 370 formas diferentes? Demonstrações usam regras matemáticas existentes e lógica para provar que o teorema é verdadeiro o tempo todo.



Por quase um século acreditou-se que o Teorema de Pitágoras não poderia ser demonstrado por meio da trigonometria. Como as identidades trigonométricas, em especial a Relação Fundamental da Trigonometria, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, são usualmente derivadas a partir do Teorema de Pitágoras, usar trigonometria para prová-lo seria um raciocínio circular.



Contudo, em 2009, o professor Zimba mostrou que é possível construir demonstrações trigonométricas [não circulares] do Teorema de Pitágoras. Essa contribuição inspirou as jovens Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson a desenvolverem suas próprias demonstrações para um desafio proposto em um concurso escolar de Matemática. Elas provaram que qualquer pessoa, independentemente de gênero, raça ou origem, pode fazer matemática de verdade.

Baseado nessa história, o professor Joy Costa, propôs em seu trabalho de TCC do ProfMat, Mestrado voltado para professores de Matemática do ensino público, a seguinte definição:

Definição 3.3.1. Demonstrações Trigonômétricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que utilizam as identidades trigonométricas cujas demonstrações dessas identidades não dependem do Teorema de Pitágoras.

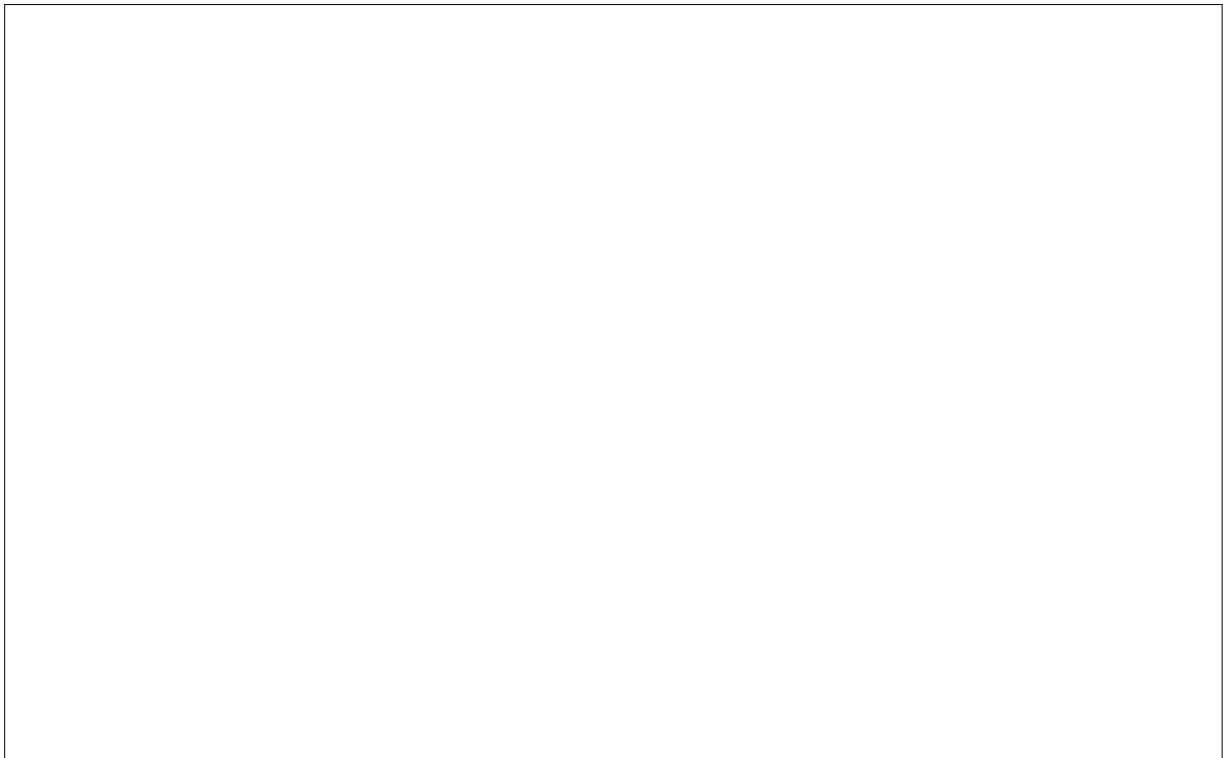
O objetivo desta ADA não é mostrar uma demonstração já pronta, mas guiá-los pela experiência da descoberta. Nesta atividade, você vai construir a Demonstração Trigonométrica do Teorema de Pitágoras, desenvolvida pelo professor Zimba, e considerada a primeira de sua natureza.

Vamos começar!

Folha de demonstração 2

Passo 1. Usando régua e compasso, no quadro abaixo, desenhe um triângulo retângulo ABC , com ângulo reto em C . (Desenhe um triângulo grande com os catetos de tamanhos visivelmente diferentes)

- Chame o ângulo A de α e o ângulo B de β , tal que $\alpha < \beta$.
- Nomeie os lados: $BC = a$ (cateto oposto a α); $AC = b$ (cateto adjacente a α) e $AB = c$ (hipotenusa)



Passo 2. Determine o seno e o cosseno do ângulo α no triângulo ABC .

• $\text{sen } \alpha =$

• $\text{cos } \alpha =$

Passo 3. Escreva as fórmulas do seno e do cosseno da diferença de dois ângulos arbitrários, x e y . Essas fórmulas não dependem do Teorema de Pitágoras.

• $\text{sen}(x - y) =$

• $\text{cos}(x - y) =$

Passo 4. Mostre que $\cos \beta = \cos [\alpha - (\alpha - \beta)]$. **Dicas:** $\cos \beta = \cos (0 + \beta)$ e $(\alpha - \alpha) = 0$.

Passo 5. Utilize a fórmula do cosseno da diferença (passo 3) na equação $\cos \beta = \cos [\alpha - (\alpha - \beta)]$ (passo 4), onde $x = \alpha$ e $y = (\alpha - \beta)$.

Passo 6. Utilize as fórmulas do seno e do cosseno da diferença (passo 3) na equação $\cos \beta = \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)$ (passo 5), onde $x = \alpha$ e $y = \beta$. Em seguida, utilize a propriedade distributiva e simplifique para demonstrar a Relação Fundamental da Trigonometria, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, sem usar o Teorema de Pitágoras.

Passo 7. Substitua $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ do triângulo ABC (passo 2) na Relação Fundamental da Trigonometria (passo 6).

Passo 8. Multiplique ambos os lados da equação acima por c^2 e simplifique.

Parabéns! Você demonstrou o Teorema de Pitágoras usando trigonometria!