

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ARTHUR KARNOPP BRÜSKE

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DA CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA À
EXPERIMENTAÇÃO

JOINVILLE

2026

ARTHUR KARNOPP BRÜSKE

**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DA CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA À
EXPERIMENTAÇÃO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc.

Orientadora: Prof.a Dr.a Viviane Maria Beuter.

JOINVILLE

2026

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Brüske, Arthur Karnopp

Funções trigonométricas: da conceituação matemática à
experimentação / Arthur Karnopp Brüske. -- 2026.
84 p.

Orientadora: Viviane Maria Beuter

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede
Nacional, Joinville, 2026.

1. Funções trigonométricas. 2. Movimento harmônico
simples. 3. Sistema massa-mola. I. Beuter, Viviane Maria. II.
Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação
Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

ARTHUR KARNOPP BRÜSKE

**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DA CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA À
EXPERIMENTAÇÃO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc.

Orientadora: Prof.a Dr.a Viviane Maria Beuter.

BANCA EXAMINADORA

Presidente:

Prof.a Dr.a Elisandra Bar de Figueiredo
UDESC/CCT

Membros:

Prof.a Dr.a Eliane Bihuna de Azevedo
UDESC/CCT

Prof.a Dr.a Marina Geremia
IFSC

Joinville, 24 de março de 2026.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus que esteve ao meu lado em meus momentos mais dolorosos e que providenciou conforto durante o percurso.

Para os meus pais, sou grato por sempre me apoiarem de maneira íntegra e coerente, sempre me auxiliando em minhas dificuldades e tomada de decisões.

Também deixo um agradecimento mais do que especial à minha orientadora pela sugestão do tema deste trabalho e da sua dedicação em orientar a minha pesquisa.

Para finalizar, agradeço a Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) pelo auxílio fornecido em forma de bolsa acadêmica durante o período em que fui aluno do mestrado.

RESUMO

Este documento tem como objetivo desenvolver uma abordagem das funções trigonométricas fundamentada nos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, associando-as com suas aplicações, em especial o Movimento Harmônico Simples (MHS). Será discutido a maneira que as essas funções são apresentadas aos estudantes do ensino médio, visando tornar mais esclarecedor como os livros didáticos abordam este tema. Com este intuito, será utilizado a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física para estabelecer relações entre as funções trigonométricas e o MHS. O resultado desta associação será exposto pelo sistema massa-mola, o qual pode ser descrito através da trigonometria em virtude da periodicidade do seu deslocamento. Além disso, cada um destes conteúdos será desenvolvido com o auxílio do Cálculo Diferencial e Integral a fim de possibilitar um amplo entendimento sobre os temas trabalhados. A metodologia selecionada para este estudo será no contexto qualitativo, visando uma pesquisa bibliográfica. Por fim, o produto educacional será discutido, fundamentando-se na construção de um instrumento que permita a visualização das funções trigonométricas de forma concreta.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas. Movimento Harmônico Simples. Sistema Massa-Mola.

ABSTRACT

This document aims to develop an approach to trigonometric functions based on the concepts of Differential and Integral Calculus, associating them with their applications, especially Simple Harmonic Motion (SHM). It will discuss how these functions are presented to high school students, clarifying how textbooks address this topic. To this end, an interdisciplinary approach between Mathematics and Physics will be used to establish relationships between trigonometric functions and SHM. The result of this association will be presented using the mass-spring system, which can be described through trigonometry due to the periodicity of its displacement. Furthermore, each of these concepts will be developed with the aid of Differential and Integral Calculus to enable a broad understanding of the topics covered. The methodology selected for this study will be qualitative, involving bibliographic research. Finally, an educational project will be conceived, based on the construction of an instrument that allows for the visualization of trigonometric functions in a concrete way.

Keywords: Trigonometric Functions. Simple Harmonic Motion. Mass-Spring System.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Construção Geométrica de Menelaus	18
Figura 2 – Interpretação do Cosseno por Ptolomeu	20
Figura 3 – Tabela de senos: medições indianas e atuais	23
Figura 4 – Divisão do quadrante.....	24
Figura 5 – As funções trigonométricas	28
Figura 6 – Funções Seno e Cosseno	29
Figura 7 – Funções Tangente e Cotangente	29
Figura 8 – Intervalo da função seno selecionado	30
Figura 9 – Gráfico da função $y = \arcsen(x)$	31
Figura 10 – Gráfico da função $y = arccos(x)$	32
Figura 11 – Ângulo como união de duas semirretas	33
Figura 12 – Área da região representada por $\int_a^b f(x)dx$	33
Figura 13 – Ângulos direcionados das semirretas l_1 e l_2	33
Figura 14 – Ângulos direcionados por meio da semirreta l_1 como eixo horizontal positivo	34
Figura 15 – Pontos na circunferência gerada pelo ângulo direcionado	34
Figura 16 – Seno e Cosseno no Círculo Unitário	35
Figura 17 – Comprimento do arco x	36
Figura 18 – Setor S de área $\frac{x}{2}$	37
Figura 19 – Semicírculo de área $\frac{\pi}{2}$	38
Figura 20 – Área $A(x)$ para $0 \leq x \leq 1$	39
Figura 21 – Área $A(x)$ para $-1 \leq x \leq 0$	39
Figura 22 – Gráfico da função $A(x)$ no intervalo $[-1,1]$	40
Figura 23 – Área do setor estabelecido pelo ponto $P = (\cos x, \sin x)$	41
Figura 24 – Imagem da função cosseno no intervalo $[0, \pi]$	43
Figura 25 – Imagem da função seno no intervalo $[0, \pi]$	44
Figura 26 – Gráficos das funções seno e cosseno.....	44
Figura 27 – Comparação de áreas	47
Figura 28 – Oscilação do deslocamento da massa m	51
Figura 29 – Aproximação Numérica	55
Figura 30 – Definição da função tangente.....	59

Figura 31 – Gráfico da função tangente	59
Figura 32 – Uso do GeoGebra para construir gráficos	60
Figura 33 – Citação do sistema massa-mola.....	61
Figura 34 – Recorte da seção “Duração do dia”	62
Figura 35 – Recorte da seção “O desafio de medir o tempo”	63
Figura 36 – Instrumento: Sistema Massa-Mola	73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Livros didáticos e conceitos associados ao estudo das funções trigonométricas.....	63
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	METODOLOGIA	14
3	A ORIGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	17
4	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DEFINIÇÕES E CONSTRUÇÕES ...	27
4.1	FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR RICHARD COURANT	27
4.2	FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR MICHAEL SPIVAK	32
4.3	FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR WALTER RUDIN.....	45
5	O SISTEMA MASSA-MOLA	51
5.1	SÉRIES DE FOURIER	56
6	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO BÁSICO.....	58
7	PRINCIPAIS DIFICULDADES DOS ESTUDANTES NA COMPREENSÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	66
7.1	AS EXPERIÊNCIAS PRÉVIAS.....	66
7.2	O RACIOCÍNIO LÓGICO MATEMÁTICO.....	67
7.3	A CONCEITUAÇÃO	68
8	PRODUTO EDUCACIONAL	70
8.1	A PREFERÊNCIA DO SISTEMA FÍSICO AO SIMULADOR DIGITAL (PHET)	71
8.2	A CONSTRUÇÃO DO SISTEMA MASSA-MOLA.....	72
8.3	A APLICAÇÃO DO INSTRUMENTO	74
8.3.1	A coleta de dados.....	74
8.3.2	Os cálculos que sucedem a coleta	75
8.3.3	Das discussões posteriores	76
9	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS.....	81

1 INTRODUÇÃO

Um dos conteúdos matemáticos mais discutidos durante o ensino médio é o de funções; em especial, as funções reais com valores reais. Inicialmente, os estudantes desenvolvem seus conhecimentos a partir da função afim, e, no decorrer das aulas, novas formas de representar as funções são apresentadas. Porém, vale realçar que no ensino da Matemática, é papel do professor ao lecionar um novo conteúdo, fazer alguma associação deste conceito com o conhecimento de mundo já adquirido pelo estudante, conforme aponta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p.528).

Partindo desta perspectiva, é possível relacionar grande parte das funções com concepções já reconhecidas pelos alunos. A função afim pode descrever, por exemplo, a produção de uma fábrica ao longo do tempo, enquanto a função quadrática pode descrever a trajetória de um objeto, como lançamento de uma bola ou foguete. As funções exponenciais, por sua vez, são comumente exemplificadas pela proliferação de bactérias, ao mesmo modo que a relevância da função logarítmica é exposta como a principal maneira de medir a magnitude de terremotos.

Contudo, nem todas as funções permitem associações tão imediatas com o cotidiano. À medida que os conteúdos avançam, as representações tornam-se progressivamente mais abstratas, exigindo dos alunos uma maior capacidade de generalização e simbolização matemática. Dessa maneira, a transição das funções elementares para outros modelos funcionais demanda estratégias pedagógicas que auxiliem o estudante a construir novas conexões conceituais, mesmo quando os exemplos concretos não são tão evidentes.

Nesse sentido, um exemplo de função com o qual é mais complexo de fazer associações são as funções trigonométricas, em virtude do seu caráter periódico. Estas características proporcionam uma abstração maior, o que gera obstáculos durante o processo de aprendizagem, pois conforme apontado por Duval (2009) as dificuldades no aprendizado são ampliadas na medida em que o grau de abstração dos conteúdos aumenta. Sob o ponto de vista dos estudantes, outra complexidade das funções trigonométricas é conseguir relacioná-las com uma situação do cotidiano, conforme aponta Oliveira (2020). Estes fatores tornam este conteúdo matemático ainda mais abstrato e menos concreto.

As representações gráficas são uma excelente ferramenta para auxiliar no entendimento das funções. Consciência e Oliveira (2011) afirmam que a representação gráfica é essencial para entender conceitos relacionados à função e desempenha um papel crucial na resolução de problemas. Ela permite que os alunos solucionem questões sem necessariamente recorrer a escrita algébrica. Entretanto, apesar da representação gráfica, as funções trigonométricas, continuam sendo um modelo que gera dificuldades, especialmente em virtude de sua periodicidade e da necessidade de articulação com o ciclo trigonométrico.

A partir dessas considerações, podemos levantar o seguinte questionamento: De que forma podemos relacionar as funções trigonométricas com os objetos de estudo de outras disciplinas, visando auxiliar na construção do conhecimento relativo a esse tipo de função? Um dos objetivos desta pesquisa será refletir sobre essa questão.

Assim como apontado por Reis (2001), na mente do professor é necessário não apenas conhecer os fatos ou conceitos de um conteúdo, mas compreender as estruturas dos assuntos, tendo domínio de conceitos e ligações entre eles. Um dos fundamentos desta pesquisa é apresentar construções formalizadas não apenas das funções trigonométricas, mas também do Movimento Harmônico Simples (MHS), de forma que envolva a compreensão dos conceitos a partir de suas definições, e posteriormente, gerar associações que podem ser exploradas em sala de aula contribuindo para o aprendizado dos discentes.

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma abordagem das funções trigonométricas fundamentada nos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, articulando-as com suas aplicações práticas, com destaque para o Movimento Harmônico Simples (MHS). Para isso, propõe-se também a construção de um instrumento físico representando o sistema massa-mola, como recurso para reduzir o grau de abstração desses conteúdos.

Para alcançar este propósito, os seguintes objetivos específicos serão discutidos:

- Compreender a origem das funções seno e cosseno.
- Verificar como os pesquisadores fundamentam as funções trigonométricas.
- Analisar de que maneira os livros de ensino básico apresentam as funções trigonométricas.
- Investigar as dificuldades que os estudantes possuem para compreender estes conceitos.
- Estabelecer relações entre as funções trigonométricas e o Movimento Harmônico Simples.

Para alcançar os objetivos, este trabalho está organizado em 9 capítulos. O primeiro deles é a Introdução, na qual apresentamos a problemática, os objetivos e a organização da dissertação, no segundo capítulo descrevemos a metodologia deste trabalho, evidenciando as características da pesquisa qualitativa; no terceiro capítulo discutimos sobre a construção das funções trigonométricas a partir de uma perspectiva histórica, enquanto no quarto iniciamos o desenvolvimento das funções trigonométricas a partir de conceitos mais formalizados e atuais. O quinto capítulo baseia-se na concepção do Movimento Harmônico Simples (MHS) associando-o com o sistema massa-mola. O sexto capítulo por sua vez, analisa a maneira em que livros de matemática voltados ao ensino médio apresentam os conceitos de funções trigonométricas, ao mesmo tempo que o sétimo capítulo discute as principais dificuldades dos estudantes neste tema. O oitavo capítulo usufrui das discussões apresentadas previamente no texto para exhibir a proposta do produto educacional, desde o motivo da sua escolha até a construção e aplicação. O último capítulo apresenta as conclusões obtidas com toda a pesquisa.

2 METODOLOGIA

Tendo em vista o objetivo e as metas estabelecidas para o desenvolvimento desta pesquisa, a abordagem metodológica adotada é uma investigação predominantemente qualitativa, com uma abordagem descritiva e interpretativa com procedimentos experimentais aplicados ao contexto educacional.

Nesse contexto, a pesquisa também é de natureza bibliográfica, pois se baseia na leitura e análise de livros, artigos científicos, dissertações, teses, livros didáticos e outros materiais acadêmicos relacionados ao tema. Assim como exposto por Gil (2008), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material previamente elaborado, constituído principalmente por livros e artigos científicos. Este direcionamento é especialmente relevante em pesquisas que utilizam a análise de conteúdo como técnica principal.

Ao investigar as funções trigonométricas, é possível recorrer a produções que discutem sua evolução histórica, sua formalização analítica, suas representações gráficas e suas aplicações em fenômenos periódicos. Essa etapa tem como objetivo organizar e fortalecer o referencial teórico sobre este modelo de funções, o Movimento Harmônico Simples (MHS) e, especialmente, o sistema massa-mola. Esse levantamento fornece a base conceitual necessária para orientar e justificar as escolhas feitas ao longo do trabalho.

Porém, Gil (2008) ainda destaca que a pesquisa bibliográfica pode vir a apresentar limitações. Fontes secundárias de informações podem conter dados imprecisos, juntamente com interpretações distorcidas e generalizações inadequadas. Diante disso, é de extrema valia considerar diferentes autores para a verificação da coerência dos dados analisados. Portanto, a escolha pela pesquisa bibliográfica não implica apenas em um conjunto de informações, mas em um processo interpretativo que busca estabelecer relações entre os elementos matemáticos e físicos estudados.

A pesquisa também será de caráter qualitativo, a qual possui características únicas que a fundamentam. Bogdan e Biklen (1994), expõe algumas delas que podemos associar com o intuito desta pesquisa, sendo elas: (i) O principal instrumento de recolha de dados é observador. (ii) O ponto alto da

pesquisa é o processo, tornando o resultado um complemento da pesquisa e não o foco principal. (iii) O significado que os participantes atribuem a experiência é de grande valia. Além disso, Flick (2012) ainda aponta que essa perspectiva metodológica reforça a reconstrução detalhada de casos específicos, a coleta de dados ampla e o desenvolvimento teórico a partir das descobertas empíricas. Nesse contexto, pesquisador não parte na maioria das vezes de hipótese pré-determinadas, mas busca adquirir significados de cunho muitas vezes subjetivo.

Aplicada ao campo da Educação Matemática, a abordagem descrita acima mostra-se interessante quando o intuito é compreender como os estudantes constroem os significados de conceitos como as funções trigonométricas. Tradicionalmente, elas são ensinadas com grande ênfase algébrica, carecendo de contextualização, o que faz com que os alunos as compreendam como distante da realidade. Uma proposta qualitativa permite compreender como os estudantes aprendem estes conceitos, bem como o sentido atribuído que lhes é atribuído nesse processo.

Uma das primeiras etapas desta pesquisa é compreender a concepção de função trigonométrica como um todo: partindo desde a sua origem até as suas definições mais formais. Em seguida, será analisado o MHS, mais precisamente o sistema massa-mola, e como ele pode ser compreendido através de funções trigonométricas. Toda esta parte do estudo está associada com o aspecto descritivo desta pesquisa, o qual visa obter o máximo de informações relevantes para a sua fundamentação.

A condição experimental desta pesquisa está diretamente relacionada com o seu processo. O intuito é criar um objeto físico que represente um sistema massa-mola com a finalidade de auxiliar no entendimento das funções trigonométricas, possibilitando as principais compreensões dos conceitos ali relacionados. Ao manipular o sistema e observar o comportamento oscilatório, os estudantes podem reconstruir suas compreensões sobre periodicidade e outros elementos envolvidos.

O produto educacional associado a esta dissertação descreve um passo a passo de como construir este sistema massa-mola, bem como apresenta uma sequência de procedimentos e questões para que outro professor possa reproduzi-lo e aplicá-lo com suas turmas. Outra parte do produto educacional

consiste na elaboração de vídeos utilizando esse instrumento, destinados aos docentes que desejam apresentar as associações discutidas neste projeto, porém sem a necessidade de realizar sua construção.

Desta maneira, a articulação entre pesquisa qualitativa e o uso do instrumento como produto educacional constitui uma estratégia válida para o ensino de funções trigonométricas. Ao privilegiar a compreensão dos significados construídos pelos estudantes, essa abordagem não apenas favorece a aprendizagem conceitual, mas também contribui para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais contextualizadas, investigativas e interdisciplinares.

O uso da Inteligência Artificial (IA) neste documento foi utilizado para auxiliar na elaboração de sugestões de perguntas presentes nas listas de atividades disponíveis no produto educacional, contribuindo para a diversificação. Além disso, a IA foi aplicada como ferramenta de apoio para otimizar a escrita da formatação da lista de referências, visando atender as normas acadêmicas necessárias.

3 A ORIGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção será discutido o desenvolvimento das funções trigonométricas ao longo da história da humanidade visando proporcionar um entendimento geral de seu desenvolvimento. Além disso, será exposta uma fundamentação prévia sobre a razão pela qual um professor de matemática deve não apenas compreender os conceitos matemáticos, mas também ter uma base de entendimento no que tange o desenvolvimento histórico de determinados temas.

O pesquisador D'Ambrosio (2021) destaca que a Matemática, como qualquer outra forma de conhecimento, possui o seu progresso associado com o contexto social, econômico, político e ideológico. Tendo em vista que a matemática é uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, pois o seu desenvolvimento em grande parte das vezes esteve relacionado com o interesse de alguns indivíduos ou de um grupo. Outro ponto apontado por D'Ambrosio (2021) é que o professor deve apontar aos seus alunos que a aritmética não é apenas a manipulação numérica, enquanto a geometria não se resume a figuras e formas perfeitas. Na realidade, estes exemplos podem ser contextualizados como: na decoração dos indígenas, na variedade de cores para colorir uma pipa, na quantidade de arroz que um recipiente de um litro pode armazenar, entre outras situações. Neste sentido, o autor defende que a matemática da escola é apenas uma das muitas matemáticas que se encontram pelas diversas culturas. Portanto, esta perspectiva histórica estimula o raciocínio crítico, aprecia a pluralidade cultural na geração do conhecimento matemático. Também contribui com as abordagens educacionais ao tornar a aprendizagem mais relevante e inspiradora. Ao reconhecer as raízes, os obstáculos e as mudanças que os tópicos matemáticos enfrentaram ao longo da história, o professor pode demonstrar a matemática não como um conjunto fixo de verdades imutáveis, mas como uma criação humana que está sempre se modificando.

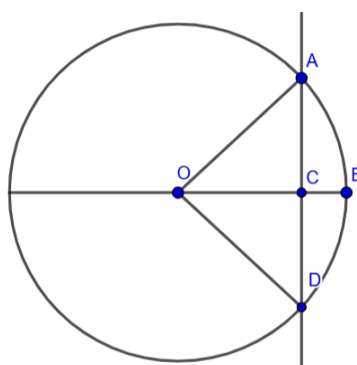
Em especial, os estudos associados a trigonometria possuem registros bem antigos, assim como aponta Eves (2011) destacando obras importantes como o papiro Cairo (3000 a.C.) e o papiro Rhind (1650 a.C.), nos quais

evidenciam algumas relações trigonométricas, juntamente com menções a triângulos retângulos. Estes conceitos estavam associados a construções de pirâmides, horário do dia (através das sombras) e divisão de terrenos.

Notoriamente, outro povo que contribuiu com o avanço matemático foram os gregos. Boyer (2012) enfatiza que a Grécia teve um profundo avanço na trigonometria da época, especialmente sendo reconhecida como historicamente pelo Teorema de Pitágoras e também o Teorema de Tales. Entretanto, o pesquisador ainda destaca que existem evidências históricas de que ambos os teoremas já eram de entendimento dos babilônios e dos egípcios. Esta circunstância reforça o que foi estabelecido por D'Ambrosio (2021), no qual define que a matemática não se desenvolveu de maneira linear, mas que cada grupo de indivíduos se apropriou dela a depender de cada contexto histórico e social.

Como mencionado acima, a evolução da matemática ocorreu de diferentes maneiras a variar de cada civilização. Os gregos foram uma das primeiras civilizações com registro escrito a construir conceitos com o que hoje podem ser associados com as funções trigonométricas. Heath (1981) aponta que Menelaus (c. 70 – 140) foi um dos primeiros matemáticos a fazer uma concepção introdutória do que seria a função seno, mas é difícil afirmar que ele teria sido o único. É possível acompanhar a construção deste conceito por meio da Figura 1.

Figura 1 – Construção Geométrica de Menelaus



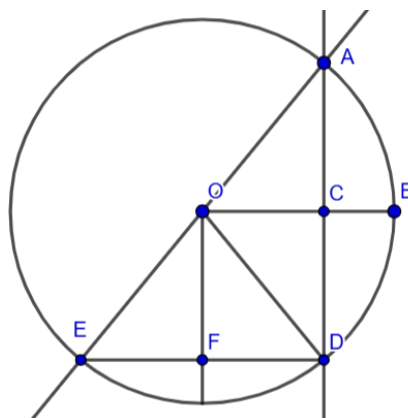
Fonte: Elaboração própria (2025)

De maneira generalizada, Menelaus atribuía que **o seno de um ângulo é a metade de uma corda**, ou ainda, **o seno de um ângulo é metade da corda do dobro deste ângulo**. Para compreender, vamos analisar a Figura 1 em que o ponto O é o centro de uma circunferência, sendo o segmento OA seu raio. Além disso, o ponto C é o ponto no qual a reta que passa pelos pontos A e C da circunferência, perpendicular ao segmento OB, intercepta o próprio segmento OB. O grego descrevia que o seno de $\widehat{A\hat{O}B}$, na realidade era o comprimento do segmento AC, e conseqüentemente metade da corda AD. Ainda vale notar que o dobro do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é o ângulo $\widehat{A\hat{O}D}$ e a corda deste último ângulo é AD. Desta maneira, a definição de seno da época, era que o seno do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, que é AC é metade da corda do ângulo $\widehat{A\hat{O}D}$, que é a corda AD. Apesar das diferentes terminologias e da definição ainda necessitar de alguns ajustes, é possível associar o conceito grego de cordas com a nossa definição de seno atual.

Tratando-se do cosseno, o seu desenvolvimento ao longo da história esteve primeiramente ligado ao seno, como aponta Heath (1981). O complemento do seno foi importante de ser estudado para os gregos, especialmente para analisar triângulos retângulos, e esta foi uma das primeiras maneiras em que o cosseno foi desenvolvido. Ptolomeu (c. 100 – 70) baseou-se na construção de seno defendida por Menelaus, o qual como destacado acima, definia o seno de um ângulo como a metade do comprimento de uma corda associada ao dobro deste ângulo, escrita da seguinte maneira: $crd \cdot 2\alpha$. Em virtude disso, Ptolomeu definiu o cosseno como: $crd \cdot (180^\circ - 2\alpha)$, que pode ser assimilada como o comprimento da corda gerada por 180° subtraída do dobro do ângulo em questão.

A Figura 2 ilustra a compreensão geométrica descrita, na qual $\widehat{A\hat{O}C}$ é um ângulo α , ao mesmo tempo que $\widehat{A\hat{O}D}$ representa o dobro deste ângulo, 2α . Conseqüentemente, o ângulo $\widehat{D\hat{O}E}$ pode ser descrito como $180^\circ - 2\alpha$. Repetindo os mesmos procedimentos apresentados anteriormente para determinar a corda seno, temos que a corda relativa ao cosseno do ângulo $\widehat{A\hat{O}C}$ é a metade da corda ED, explícita como EF.

Figura 2 – Interpretação do Cosseno por Ptolomeu



Fonte: Elaboração própria (2025)

Esta expressão claramente evidencia o conhecimento da parte dos gregos da seguinte propriedade trigonométrica: $\text{sen}(x) = \cos(90^\circ - x)$. Heath (1981) ainda destaca que com base nas duas expressões gregas, originou-se a identidade fundamental da trigonometria, escrita da seguinte forma:

$$(\text{crd} \cdot 2\alpha)^2 + (\text{crd} \cdot (180^\circ - 2\alpha))^2 = 1.$$

O povo Indiano foi outro representante no que tange o desenvolvimento da trigonometria. Aryabhata, nascido no século V, foi um grande matemático e escreveu o livro *Aryabhathiya*, que continha a sua própria tabela de senos, assim aponta Smith (1958). Sua definição de seno era “meia corda”.

De acordo com Boyer (2012), são apresentados os senos dos ângulos até 90° , divididos em vinte e quatro intervalos iguais de $3^\circ 45'$ (ou seja, 225 minutos) cada um. Para exprimir o comprimento do arco e o comprimento do seno na mesma unidade, o raio era tomado como 3438 e a circunferência como $360 \times 60 = 21.600$ minutos. Isso implica um valor para π correto até o quarto algarismo significativo, 3,1416. Para o primeiro desses intervalos, o seno foi tomado igual ao próprio número de minutos do arco, isto é, 225. Em linguagem atual, sabe-se que o seno de um ângulo pequeno é aproximadamente igual à medida do ângulo em radianos.

Na elaboração dessa tabela o seno era contado em minutos, em um intervalo de 225 minutos. Esta concepção enfatizava especialmente a diferença de um seno para o outro. O primeiro seno era definido como 225, e os demais eram determinados a partir do anterior por um processo recorrente. Subtraindo

225 de 225, obtém-se o resto 0. Dividindo 225 por 225, o quociente será 1. A soma de 0 e 1 é subtraída de 225, e desta maneira, obtém-se o número 224; assim, o segundo seno é dado por: $225 + 224 = 449$. Para calcularmos o terceiro seno, procede-se de forma semelhante: subtraindo 225 de 224 teremos que o resto será 1. Dividindo a soma de 225 com 224 por 225, o quociente mais próximo é 2. Somando o 1 da primeira subtração, com o quociente 2, obtém-se 3. A diferença de 225 e 3 é 222; portanto, o terceiro seno é dado pela soma: $449 + 222 = 671$.

De forma geral, o método pode ser expresso por meio de uma fórmula de recorrência. Sejam $s(i)$ o i -ésimo seno na sequência e $\Delta(i + 1) = s(i + 1) - s(i)$, para de $i = 1$ a 24. Com essa notação, pode-se assumir que $\Delta(1) = s(1)$.

Observa-se que cada nova diferença é obtida subtraindo-se de $s(1)$ uma quantidade que depende dos valores já acumulados. De fato, no segundo passo,

$$\Delta(2) = 225 - \left[225 - 225 + \frac{225}{225} \right] = 225 - \frac{225}{225} = 224,$$

ou seja,

$$\Delta(2) = \Delta(1) - \frac{s(1)}{s(1)}.$$

Consequentemente, $s(2) = s(1) + \Delta(2) = 225 + 224 = 449$.

No passo seguinte, a “correção” subtraída de 225 é obtida dividindo-se a soma $225 + 224$ por 225 e tomando-se o quociente mais próximo de um inteiro. Assim,

$$\Delta(3) = 225 - \left[225 - 224 + \frac{225 + 224}{225} \right] = 224 - \frac{225 + 224}{225} = 222,$$

logo,

$$\Delta(3) = \Delta(2) - \frac{s(2)}{s(1)}$$

e, portanto, $s(3) = s(2) + \Delta(3) = 449 + 222 = 671$. Prosseguindo desse modo, obtém-se a relação geral

$$\Delta(i + 1) = \Delta(i) - \frac{s(i)}{s(1)}. \quad (1)$$

Para resolver essa recorrência, escrevemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}\Delta(2) &= \Delta(1) - \frac{s(1)}{s(1)} \\ \Delta(3) &= \Delta(2) - \frac{s(2)}{s(1)} \\ &\vdots \\ \Delta(i) &= \Delta(i-1) - \frac{s(i-1)}{s(1)} \\ \Delta(i+1) &= \Delta(i) - \frac{s(i)}{s(1)}.\end{aligned}$$

Somando as igualdades, obtemos

$$\Delta(2) + \Delta(3) + \dots + \Delta(i) + \Delta(i+1) = \Delta(1) + \Delta(3) + \dots + \Delta(i) - \frac{\sum_{k=1}^i s(k)}{s(1)}.$$

Após os cancelamentos correspondentes, resulta

$$\Delta(i+1) = \Delta(1) - \frac{\sum_{k=1}^i s(k)}{s(1)} = s(1) - \frac{\sum_{k=1}^i s(k)}{s(1)}.$$

Denotando por

$$S(i) = \sum_{k=1}^i s(k)$$

a soma dos i primeiros senos, obtém-se, em forma aproximada,

$$\Delta(i+1) = s(1) - \frac{S(i)}{s(1)}.$$

Como $s(i+1) = s(i) + \Delta(i+1)$, segue a recorrência

$$s(i+1) = s(i) + s(1) - \frac{S(i)}{s(1)}. \quad (2)$$

A recorrência (2) é descrita por Boyer (2012).

Uma tabela elaborada por Morey (2003) reúne os vinte e quatro valores de seno da época, bem como suas correspondentes medidas atuais. O autor ainda destaca que os indianos, assim como os árabes, contribuíram significativamente com a construção de tábuas trigonométricas mais precisas, elaboradas com o auxílio de procedimentos de interpolação.

Figura 3 – Tabela de senos: medições indianas e atuais

Ângulo Θ	<i>Varahamihira</i>		<i>Aryabhata I</i>		Valor Moderno
	$r \cdot \text{sen}\theta$ $r=120$	$\text{sen}\theta$	$r \cdot \text{sen}\theta$ $r=3438$	$\text{sen}\theta$	$\text{sen}\theta$
3°45'	751	0,06542	225'	0,6545	0,06540
7°30'	1540	0,13056	449'	0,13060	0,13056
11°15'	2325	0,19514	671'	0,19517	0,19509
15°	31'4"	0,25889	890'	0,25962	0,25882
18°45'	38'34"	0,32139	1105'	0,32141	0,32143
22°30'	45'56"	0,38278	1315'	0,38249	0,38268
26°15'	53'5"	0,44236	1520'	0,44212	0,44229
30°	60'	0,50000	1719'	0,50000	0,50000
33°45'	66'40"	0,55556	1910'	0,55556	0,55556
37°30'	73'3"	0,60875	2093'	0,60878	0,60876
41°15'	79'7"	0,65931	2267'	0,65910	0,65935
45°	84'51"	0,70708	2431'	0,70710	0,70711
48°45'	90'13"	0,75181	2585'	0,75189	0,75184
52°30'	95'13"	0,79347	2728'	0,79348	0,79335
56°15'	99'46"	0,83139	2859'	0,83159	0,83147
60°	103'56"	0,86611	2978'	0,86620	0,86602
63°45'	107'38"	0,89694	3084'	0,89703	0,89687
67°30'	110'53"	0,92402	3177'	0,92408	0,92388
71°15'	113'38"	0,94694	3256'	0,94706	0,94693
75°	115'56"	0,96611	3321'	0,96597	0,96593
78°45'	117'43"	0,98097	3372'	0,98080	0,98079
82°30'	119'	0,99167	3409'	0,99156	0,99144
86°15'	119'45"	0,99792	3431'	0,99796	0,99786
90°	120'	1,00000	3438'	1,00000	1,00000

Fonte: MOREY (2003, p.25)

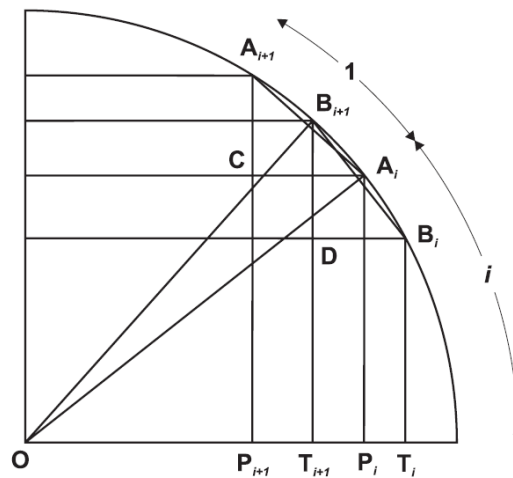
Brummelen (2009) afirma que uma prescrição semelhante no *Aryabhata* atraiu consideravelmente mais atenção, em parte devido às diferentes interpretações acerca do método e de sua origem. A apresentação que segue fundamenta-se na explicação do cientista indiano Nilakantha, do século XV, articulada com os detalhes expostos por Brummelen (2009) e com nossas próprias considerações e notações utilizadas anteriormente.

Dividimos o ângulo reto em 24 partes iguais, definimos $s(1) = 225$ e escrevemos as primeiras diferenças dos senos como

$$\Delta(i) = s(i) - s(i - 1). \quad (3)$$

Na Figura 4, os 24 pontos de divisão do quadrante são os A_i , enquanto os pontos médios são os B_i . Os senos que Aryabhata correspondem aos comprimentos $P_i A_i$; as distâncias $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1}$ são todas iguais à corda de 1, denotada por $Crd(1)$.

Figura 4 – Divisão do quadrante



Fonte: BRUMMELEN (2009)

Como a corda $A_i A_{i+1}$ é perpendicular a OB_{i+1} , os triângulos retângulos $\triangle A_i C A_{i+1}$ e $\triangle OT_{i+1} B_{i+1}$ são semelhantes. De fato, os triângulos $\triangle OB_{i+1} B_i$ e $\triangle OA_i A_{i+1}$ são semelhantes e, assim, os ângulos $\widehat{TB_{i+1} B_i}$ e $\widehat{CA_i A_{i+1}}$ congruentes, de onde segue a semelhança. Portanto,

$$\frac{A_{i+1}C}{A_i A_{i+1}} = \frac{OT_{i+1}}{B_{i+1}O},$$

ou

$$\frac{s(i+1) - s(i)}{\text{Crd}(1)} = \frac{\Delta(i+1)}{\text{Crd}(1)} = \frac{OT_{i+1}}{R},$$

sendo R o raio da circunferência. Isso nos fornece uma equação para a primeira diferença:

$$\Delta(i+1) = \frac{\text{Crd}(1)}{R} \cdot OT_{i+1}. \quad (4)$$

Aplicando a equação (4) duas vezes, com i e $i+1$ como argumentos, obtemos uma expressão para a segunda diferença:

$$\Delta(i) - \Delta(i+1) = \frac{\text{Crd}(1)}{R} \cdot (OT_i - OT_{i+1}) = \frac{\text{Crd}(1)}{R} \cdot T_i T_{i+1}. \quad (5)$$

A semelhança dos triângulos $\triangle B_i D B_{i+1}$ e $\triangle A_i P_i O$ (que ocorre de modo similar aos triângulos $\triangle A_i C A_{i+1}$ e $\triangle OT_{i+1} B_{i+1}$) fornece:

$$\frac{B_i D}{B_i B_{i+1}} = \frac{A_i P_i}{A_i O},$$

logo,

$$T_i T_{i+1} = B_i D = \frac{Crd(1)}{R} \cdot sen(i). \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), obtemos.

$$\frac{\Delta(i) - \Delta(i+1)}{s(i)} = \left[\frac{Crd(1)}{R} \right]^2. \quad (7)$$

Assim, o lado esquerdo é independente de i . Segundo Brummelen (2009), não se sabe ao certo se Aryabhata tinha conhecimento dessa equação surpreendente. Nilakantha sabia; ele observou que aplicá-la duas vezes, para $i = 1$ e para um i arbitrário, fornece

$$\frac{\Delta(i) - \Delta(i+1)}{s(i)} = \frac{\Delta(1) - \Delta(2)}{s(1)},$$

ou

$$\Delta(i) - \Delta(i+1) = [\Delta(1) - \Delta(2)] \frac{s(i)}{s(1)}. \quad (8)$$

Utilizando $\Delta(1) = 225$ e $\Delta(2) = 224$, obtemos a equação

$$\Delta(i+1) = \Delta(i) - \frac{s(i)}{s(1)}, \quad (9)$$

que coincide com equação (2) deduzida anteriormente.

A partir de (9), todos os senos podem ser gerados sucessivamente, pois $\Delta(i+1)$ é a única quantidade que não é conhecida imediatamente a partir de $sen(1), \dots, sen(i)$; e

$$s(i+1) = s(i) + \Delta(i+1).$$

Com o passar do tempo, novas conjecturas e associações relacionadas as funções trigonométricas começaram a se estabelecer, de maneira similar com o que temos hoje. Mas vale ainda mencionar que a trigonometria era utilizada quase que exclusivamente para a geometria, porém esta realidade começou a alterar-se por volta do século XVIII. O pesquisador Kline (1972) destaca que a influência da trigonometria para o cálculo começou com a descoberta de representações em séries infinitas para as funções trigonométricas. A astronomia auxiliou nesta descoberta, tendo em vista que os fenômenos astronômicos são periódicos. Kline (1972) salienta que o uso de séries

trigonométricas foi necessário para determinar a posição de planetas, a partir de um procedimento matemático que estima os valores de uma função em diferentes posições. Outro nome relevante mencionado por Kline (1972) para este desenvolvimento da trigonometria foi Euler. O interesse do matemático por interpolação permitiu o desenvolvimento de uma representação em série de uma função trigonométrica. Em seu livro, *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à Análise do Infinito), Euler estabeleceu a análise rigorosa das funções trigonométricas. O significado de seno por exemplo, não era mais um segmento de reta, mas um número ou razão, o ponto de ordenada de um círculo. Nesta obra ainda foram introduzidas algumas nas nomenclaturas usuais associadas ao estudo das funções trigonométricas, como: cos (cosseno), tan (tangente), sec (secante), csc (cossecante) e cot (cotangente).

4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DEFINIÇÕES E CONSTRUÇÕES

O estudo das funções é amplamente abordado na educação básica, especialmente no ensino médio, por meio de disciplinas como Matemática e Física. Segundo Usiskin (1995), a ideia de função surge quando associamos duas grandezas por meio de uma escrita algébrica, de tal maneira que esta associação provoque uma relação de dependência de uma das grandezas para com a outra. Desta forma, podemos começar a formalizar conceitos como domínio e contradomínio de uma função. Vale destacar também que as funções são discutidas em alguns cursos de nível superior, especialmente aqueles voltados para as áreas da Matemática e da Engenharia. Tais cursos possuem o Cálculo Diferencial e Integral como uma disciplina que pode vir a abordar o conceito de função desde a sua definição e construção. Tanto no ensino médio, quanto no ensino superior são desenvolvidos estudos sobre diversas funções.

Antes de definir as funções trigonométricas é importante esclarecer que elas não possuem apenas um único meio de estabelecer seus conceitos. Alguns autores podem se fundamentar especialmente na concepção geométrica para defini-las, enquanto outros podem optar por uma abordagem mais analítica. Visando proporcionar um entendimento mais amplo dos modelos de estruturação dessas funções, será apresentado como foi abordado esta definição por três grandes matemáticos do século XX: Richard Courant, Michael Spivak e Walter Rudin.

Courant (1965) segue a abordagem geométrica tradicional, utilizando o círculo trigonométrico. Spivak (1967), por sua vez, fundamenta sua apresentação em conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, como derivadas e integrais, enquanto Rudin (1976) recorre da Análise Complexas. Para o desenvolvimento deste capítulo, assume-se que elementos do Cálculo de Funções Reais e Complexas sejam de conhecimento prévio do leitor.

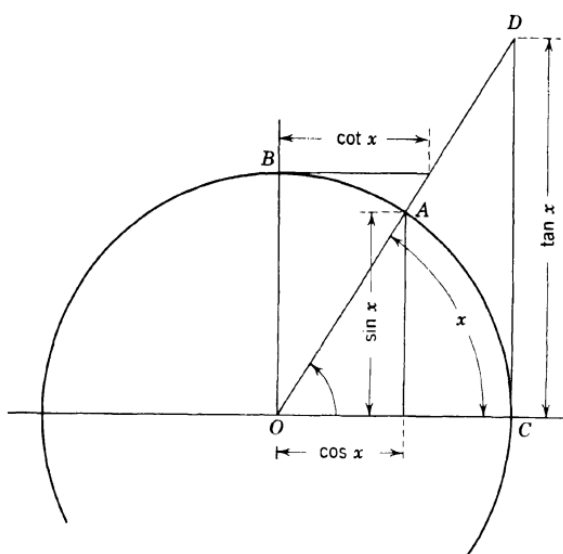
4.1 FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR RICHARD COURANT

Em sua obra, *Introduction to Calculus and Analysis*, Courant (1965) classifica as funções trigonométricas, como funções transcendentais

elementares, visto que é da geometria que é extraído grande parte de sua conceituação. Deste modo, o matemático se propõe a apresentar uma conceituação mais geométrica das funções, seguida de outra mais analítica, voltada as funções inversas das funções trigonométricas

O autor utiliza a Figura 5 para estabelecer o significado geométrico das funções seno, cosseno, tangente e cotangente.

Figura 5 – As funções trigonométricas



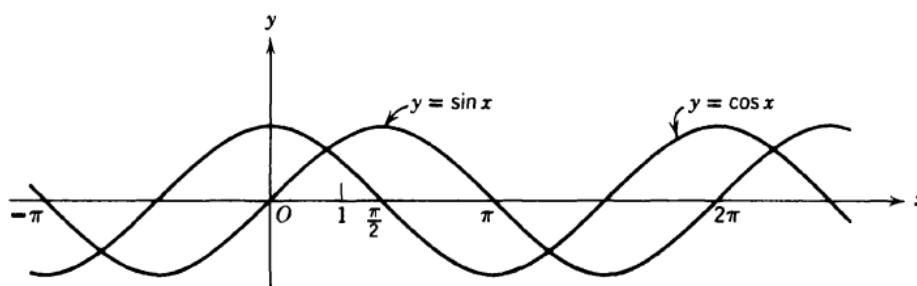
Fonte: COURANT; RICHARD (1965, p.50)

O matemático enfatiza que os ângulos são medidos em radianos, no qual é feita a medição com seu vértice no centro de um círculo com raio igual a 1. Após isso, é medido o tamanho do ângulo pelo comprimento do arco da circunferência seccionado pelo ângulo. Consequentemente, um ângulo de 180° é equivalente a um ângulo de π radianos. Enquanto, um ângulo de 90° tem uma medida de $\frac{\pi}{2}$ radianos, e o ângulo de 360° tem medida em radianos equivalente a 2π . Por outro lado, um ângulo de 1 radiano expresso em graus é $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Posteriormente, Courant (1965) denota que ao se referir a um ângulo x , esta referência está associada a um ângulo cuja medida em radianos é igual a x . Na Figura 5, note que o ângulo é medido a partir do segmento OC, no qual os ângulos positivos são considerados no sentido anti-horário. Para finalizar, ainda

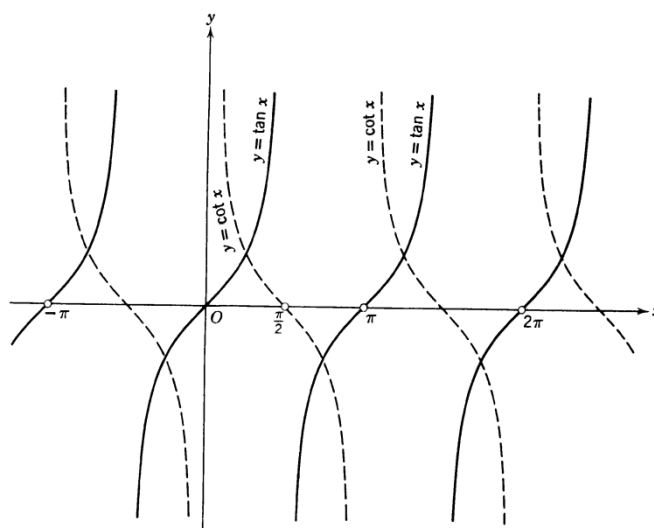
é exposto os gráficos das funções seno, cosseno, tangente e cotangente a partir das Figuras 6 e 7.

Figura 6 – Funções Seno e Cosseno



Fonte: COURANT; RICHARD (1965, p.50)

Figura 7 – Funções Tangente e Cotangente



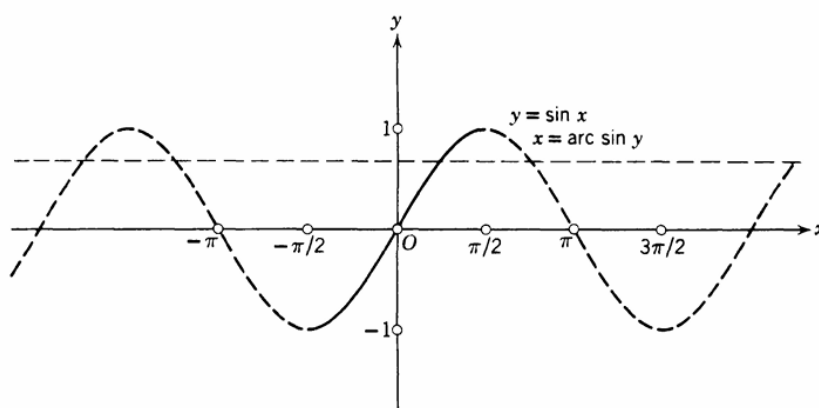
Fonte: COURANT; RICHARD (1965, p.51)

Para definir as funções inversas das funções trigonométricas, Courant (1965) baseia-se em uma abordagem mais analítica, ainda que utilize algumas concepções apresentadas acima.

Os gráficos das funções seno, cosseno, tangente e cotangente são necessários para definir o intervalo da função inversa, de modo que para as linhas $y = c$ paralelas ao eixo das abscissas, é necessário cortar as curvas em um único ponto.

Para estabelecer a inversa da função seno, o matemático realça que a derivada da função $y = \text{sen}(x)$ é dada por $y' = \cos(x)$, na qual a derivada é positiva no intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Neste mesmo intervalo, podemos definir a inversa como $x = \text{arcsen}(y)$. A Figura 8 apresenta a restrição de domínio mencionada, a parte da linha contínua.

Figura 8 – Intervalo da função seno selecionado



Fonte: COURANT; RICHARD (1965, p.211)

O autor expõe que esta função aumenta monotonamente de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ à medida que y percorre o intervalo -1 a $+1$. Além disso, é destacado que a inversa da função seno neste intervalo trata-se do principal valor do arco-seno. Ainda, é definido a multivaloração do $\text{arcsen}(y)$: Seja um valor de y qualquer, o ângulo x correspondente não é apenas um ângulo específico, mas todo ângulo na forma $2k\pi + x, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Derivando a função $x = \text{arcsen}(y)$, obtemos:

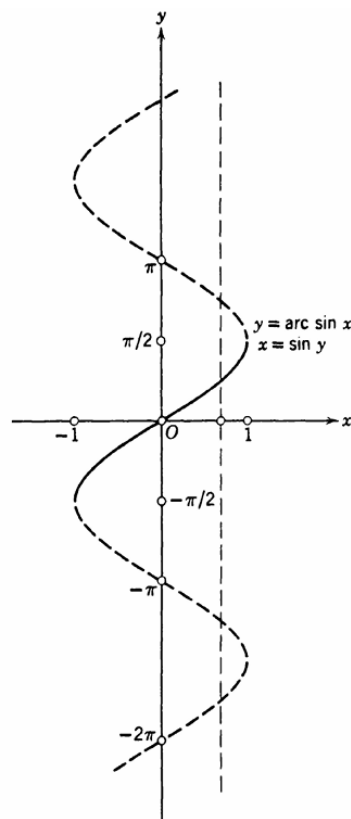
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}(x)^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - y^2}}$$

Consequentemente, a raiz quadrada considerada é positiva, pois a nossa função está definida no intervalo de $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Desta maneira, conseguimos alterar a variável independente y para x , como usual. Então, a derivada da função $y = \text{arcsen}(x)$ é expressa como:

$$\frac{d}{dx} \text{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Para finalizar, Courant (1965) apresenta o gráfico da função inversa definida:

Figura 9 – Gráfico da função $y = \arcsen(x)$

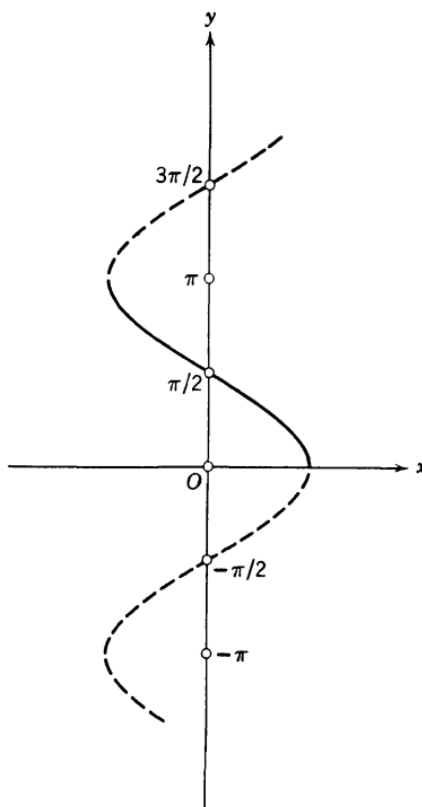


Fonte: COURANT; RICHARD (1965, p.212)

O autor define a inversa da função $y = \cos(x)$ como $x = \arccos(y)$ com base no mesmo raciocínio, porém levando em consideração dois pontos fundamentais. A primeira mudança está no intervalo que a função é definida, desta vez será $0 < x < \pi$. O segundo ponto de alteração está associado à derivada da função inversa, pois desta vez tomaremos o valor negativo da raiz, considerando o intervalo escolhido. Com estas duas alterações, e novamente alterando a variável independente y para x , temos que a derivada de $y = \arccos(x)$, será:

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

O gráfico da função pode ser visualizado pela Figura 10:

Figura 10 – Gráfico da função $y = \arccos(x)$ 

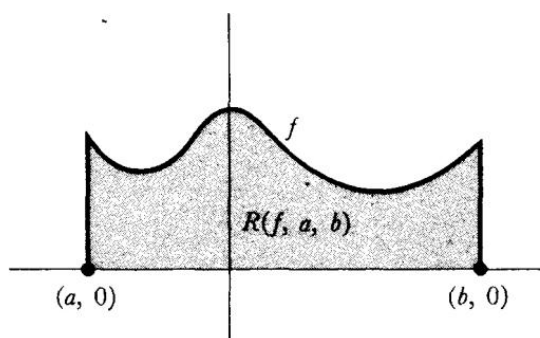
Fonte: COURANT; RICHARD (1965, p.213)

4.2 FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR MICHAEL SPIVAK

Neste momento iremos definir as funções cosseno e seno com o auxílio do livro *Calculus* escrito por Spivak (1967), na qual podemos compreender a sua construção por meio de integrais definidas no sentido de Riemann. Nesse contexto, a integral definida pode ser interpretada como o cálculo da área de uma região limitada por uma função em um determinado intervalo. Mais precisamente, se $f(x) \geq 0$ para todo $a \leq x \leq b$, então a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ fornece a área da região limitada pelo eixo x a curva definida por f e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, representada na Figura 11.

O intuito de abordar este modelo de definição é proporcionar uma compreensão amplificada sobre as funções trigonométricas desde a sua construção.

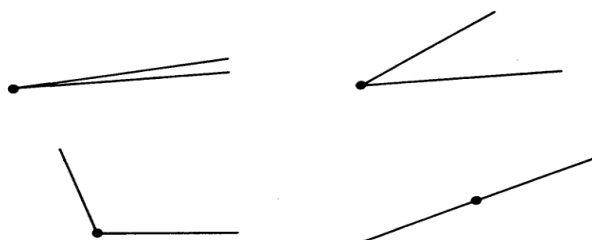
Figura 11 – Área da região representada por $\int_a^b f(x)dx$



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.214)

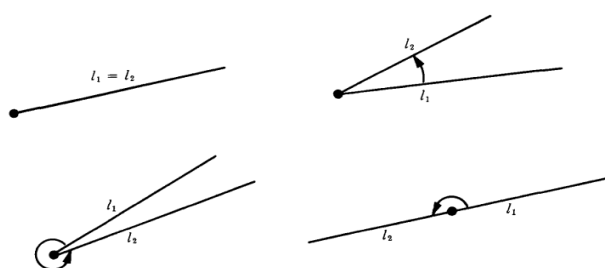
Para começar a definir as funções seno e cosseno, partiremos da concepção de ângulo presente na geometria elementar, na qual um ângulo é a interseção de duas semirretas que compartilham um ponto de origem, conforme pode ser observado na Figura 12. Na trigonometria ainda são mais utilizados os "ângulos direcionados", que podem ser vistos como pares (l_1, l_2) de semirretas com o mesmo ponto de origem, como ilustrado na Figura 13.

Figura 12 - Ângulo como união de duas semirretas



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.256)

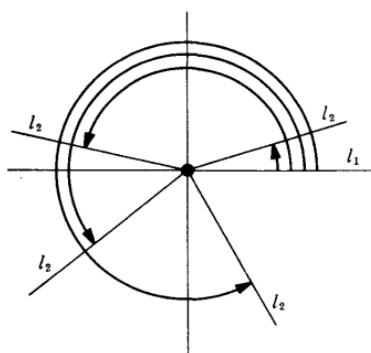
Figura 13 - Ângulos direcionados das semirretas l_1 e l_2



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.256)

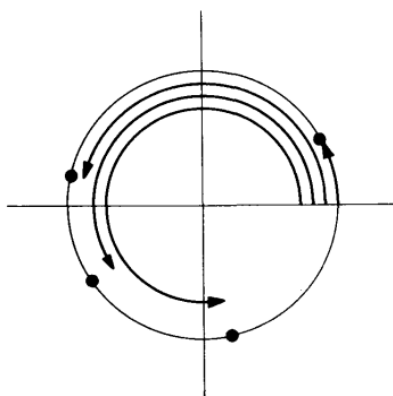
Ao escolhermos a metade positiva do eixo horizontal para a semirreta l_1 , o ângulo direcionado é completamente descrito pela segunda semirreta l_2 (Figura 14). Como cada semirreta intercepta o círculo unitário exatamente uma vez, o ângulo direcionado pode ser claramente representado por um ponto nesse círculo (Figura 15), ou seja, por um ponto $P(x, y)$ que satisfaz a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Figura 14 - Ângulos direcionados por meio da semirreta l_1 como eixo horizontal positivo



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.256)

Figura 15 - Pontos na circunferência gerada pelo ângulo direcionado

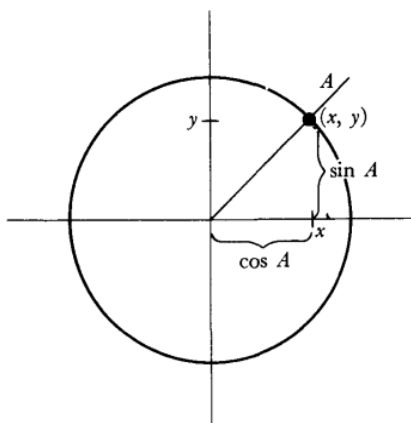


Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.257)

Conseqüentemente, o seno e o cosseno de um ângulo direcionado podem ser definidos da seguinte maneira: um ângulo direcionado é representado por um ponto $A(x, y)$ no círculo unitário, no qual $x^2 + y^2 = 1$; o seno do ângulo é definido como y , e o cosseno como x , como pode ser visualizado na Figura 16.

Este círculo unitário é o mesmo círculo utilizado no estudo do ciclo trigonométrico trabalhado em sala de aula, e a partir dele iremos dar continuidade em nossa definição.

Figura 16 - Seno e Cosseno no Círculo Unitário



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.257)

Apesar da familiaridade do parágrafo anterior com um dos conteúdos lecionados na educação básica, Spivak (1967) realça que ainda há muito a desenvolver para definir as funções seno e cosseno. O que definimos até agora é o seno e o cosseno de um ângulo direcionado; o que desejamos definir é $\text{sen}(x)$ e o $\text{cos}(x)$ para cada número x . Usualmente, associamos cada um dos números a cada ângulo a partir da medição em graus. Um ângulo "de uma volta completa" é associado a 360 graus, um ângulo "meia-volta" é associado a 180 graus, um ângulo "um quarto de volta" é associado a 90 graus, e assim por diante. O ângulo associado a um número x é chamado de "o ângulo de x graus". Vale notar que o ângulo de 0 graus é o mesmo que o de 360 graus, e essa ambiguidade é intencionalmente ampliada, de modo que um ângulo de 90 graus também é considerado um ângulo de $360 + 90$ graus, e assim por diante. Com isso, podemos agora definir uma função, que denotaremos por $\text{sen}^\circ(x)$, da seguinte forma:

$$\text{sen}^\circ(x) = \text{seno do ângulo de } x \text{ graus.}$$

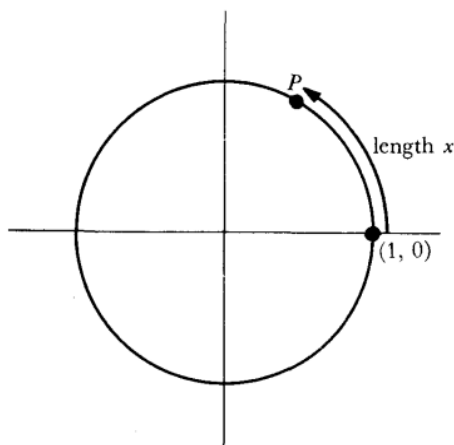
Entretanto, o autor ainda destaca que há dificuldades com essa abordagem. Embora desde o 9º Ano do Ensino Fundamental podemos esclarecer e mostrar aos estudantes os valores do seno de um ângulo de 45º ou

90°, encontramos dificuldade com ângulos que representam um número irracional, por exemplo, qual o seno do ângulo de $\sqrt{2}$ graus? Para responder esta pergunta seria necessária uma análise mais aprofundada. Entretanto, Spivak (1967) destaca que esta situação pode ser contornada em virtude da função seno ter propriedades “matematicamente agradáveis”.

A medição dos ângulos em radianos é o recurso que será utilizado para solucionar o impasse exposto no parágrafo acima. Dado um número qualquer x , considere um ponto P no círculo unitário tal que o comprimento do arco entre o ponto $(1,0)$ e P , no sentido anti-horário, seja igual a x , como exposto na Figura 17. O ângulo direcionado formado por P é denominado "o ângulo de x radianos". Como o comprimento total do círculo é 2π , o ângulo de x radianos é equivalente ao ângulo de $2\pi + x$ radianos. A partir disso, uma função seno pode ser definida da seguinte maneira:

$$\text{sen}^r(x) = \text{seno do ângulo de } x \text{ radianos}$$

Figura 17 - Comprimento do arco x



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.258)

Este mesmo método pode ser facilmente adotado para definir $\text{sen}^\circ(x)$; uma vez que queremos que $\text{sen}^\circ 360 = \text{sen}^r 2\pi$, podemos definir:

$$\text{sen}^\circ(x) = \text{sen}^r \frac{2\pi x}{360} = \text{sen}^r \frac{\pi x}{180}.$$

Estabelecida a conversão da função seno em graus para radianos, vale destacar que em breve será removido o sobrescrito r em sen^r , já que sen^r (e não $\text{sen}^\circ(x)$) é a única função que nos interessa; antes de fazer isso, o autor

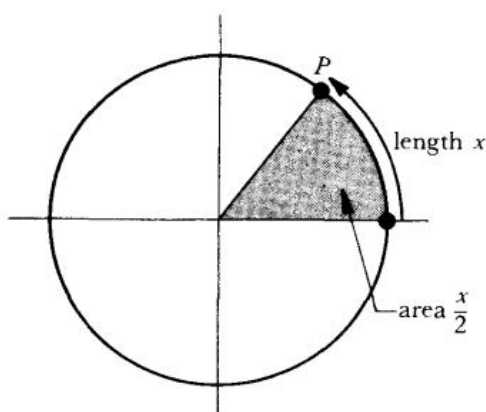
ainda adverte que existem problemas nos quais é mais propício utilizar a função $\text{sen}^\circ(x)$ para determinar a sua solução.

Ainda que a função sen^r seja a que desejamos representar simplesmente por sen (e adotar essa notação daqui em diante), há uma complicação até mesmo na definição de sen^r . A definição que estamos propondo depende do conceito de comprimento de uma curva. Embora fosse possível explorar e definir comprimento de forma mais elaborada, neste momento, é mais prático reformular a definição com base em áreas, que podemos tratar utilizando a integral. Em seguida será apresentada toda a construção da função seno por meio do cálculo de integrais descrito por Spivak (1967).

Suponha que x representa o comprimento do arco do círculo unitário que vai de $(1,0)$ até P ; esse arco, portanto, corresponde a $\frac{x}{2\pi}$ do comprimento total 2π da circunferência. Seja S o "setor" mostrado na Figura 18; S é delimitado pelo círculo unitário, o eixo horizontal e a reta que passa pela origem $(0,0)$ e pelo ponto P . A área de S deve ser $\frac{x}{2\pi}$ vezes a área interna do círculo unitário, que esperamos ser π ; portanto, a área de S deve ser:

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}.$$

Figura 18 - Setor S de área $\frac{x}{2}$



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.258)

Sendo assim, podemos definir $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ como as coordenadas do ponto P que determina um setor de área $\frac{x}{2}$.

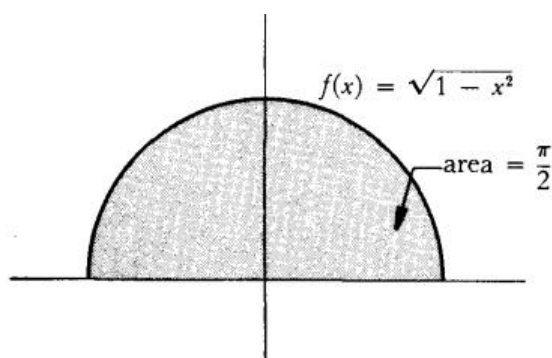
Com essas considerações como base, a definição precisa das funções seno e cosseno pode agora ser iniciada. A definição a seguir trata π como a área do círculo unitário, mais especificamente, como o dobro da área de um semicírculo (Figura 19).

Definição 4.2.1:

$$\pi = 2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Vale realçar ainda que o autor explica que esta definição não é apresentada apenas como uma adição decorativa; para estabelecer as funções trigonométricas, será necessário inicialmente definir $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ apenas para $0 \leq x \leq \pi$.

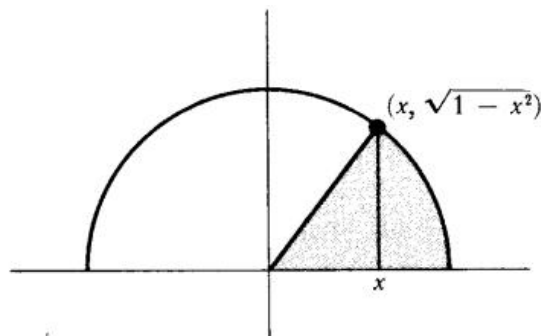
Figura 19 - Semicírculo de área $\frac{\pi}{2}$



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.258)

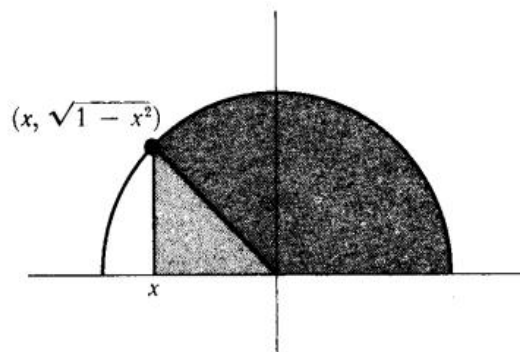
A segunda definição tem como objetivo descrever, para $-1 \leq x \leq 1$, a área $A(x)$ do setor delimitado pelo círculo unitário, o eixo horizontal e a semirreta que passa pelo ponto $(x, \sqrt{1-x^2})$. Quando $0 \leq x \leq 1$, essa área pode ser representada conforme a Figura 20, gerando a soma da área de um triângulo e da área de uma região abaixo do círculo unitário.

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Figura 20 – Área $A(x)$ para $0 \leq x \leq 1$ 

Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.259)

Observe ainda que esta fórmula pode ser adaptada para $-1 \leq x \leq 0$. Neste caso, o termo $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ é negativo e representa a área do triângulo que deve ser subtraída do termo $\int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt$. Graficamente, esta situação pode ser detectada na Figura 21 a seguir.

Figura 21 – Área $A(x)$ para $-1 \leq x \leq 0$ 

Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.259)

Portanto, a expressão $A(x)$ para determinar a área do setor circular é a mesma tanto para o intervalo $0 \leq x \leq 1$, quanto para o intervalo $-1 \leq x \leq 0$. O que nos leva a nossa próxima definição:

Definição 4.2.2: Se $-1 \leq x \leq 1$, então:

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Observe que se $-1 < x < 1$, então função A é diferenciável em x e com auxílio do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos $A'(x)$:

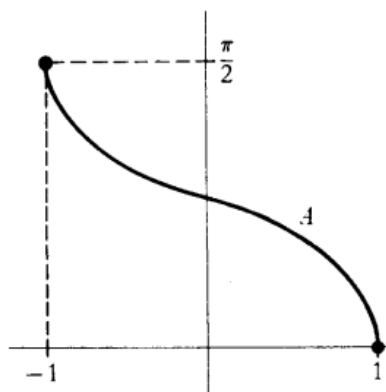
$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2} \left[x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \right] - \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow A'(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{-x^2 + (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] - \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow A'(x) &= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow A'(x) &= \frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow A'(x) &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Segue dessa última expressão que derivada de A é negativa em $(-1,1)$, ou seja, os valores de A decrescem no intervalo $[-1,1]$, passando de

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \text{Área do semicírculo superior} = \frac{\pi}{2}$$

para $A(1) = 0$. Esse resultado também decorre diretamente da definição de A . Com isso pode-se concluir que a função A é uma bijeção de $[-1,1]$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Veja gráfico da função A na Figura 22.

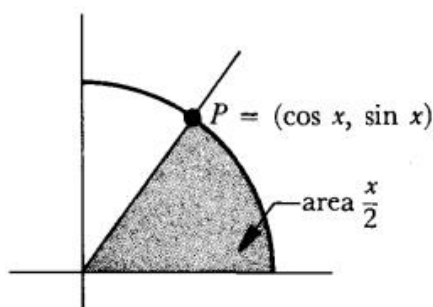
Figura 22 – Gráfico da função $A(x)$ no intervalo $[-1,1]$



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.259)

Para $0 \leq x \leq \pi$, desejamos definir o $\cos(x)$ e $\sin(x)$ como as coordenadas de um ponto $P = (\cos x, \sin x)$ no círculo unitário, que forma um setor com área igual a $\frac{x}{2}$, conforme ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Área do setor estabelecido pelo ponto $P = (\cos x, \sin x)$



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.260)

Efetuada esta última análise, podemos ir para a nossa próxima definição:

Definição 4.2.3: Se $0 \leq x \leq \pi$, então $\cos(x)$ é um número no intervalo $[-1,1]$ tal que:

$$A(\cos x) = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \sqrt{1 - (\cos x)^2}.$$

Spivak (1967) adverte que essa definição ainda requer uma justificativa adicional. Para garantir que existe um número y que satisfaz $A(y) = \frac{x}{2}$, utiliza-se o Teorema do Valor Intermediário (TVI), o qual assegura que uma função contínua f , definida em um intervalo fechado $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Como A é diferenciável no intervalo $(-1,1)$, segue que ela é contínua nesse intervalo e também no intervalo fechado $[-1,1]$. Assim, pelo TVI, a função A assume todos os valores entre $0 = A(1)$ e $\frac{\pi}{2} = A(-1)$. Portanto, para todo $x \in [0, \pi]$, existe $y \in [-1,1]$ tal que $A(y) = \frac{x}{2}$.

Observa-se, na Definição 4.2.3, que a função \cos está definida implicitamente. Utilizando a inversibilidade da função A , tem-se que a função

$$\cos(x) = A^{-1}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{para todo } 0 \leq x \leq \pi,$$

sendo A^{-1} a inversa da função A . Além disso, tem-se que $A(\cos 0) = 0$ e $A(\cos \pi) = \frac{\pi}{2}$. Isso implica que, $\cos 0 = 1$ e $\cos \pi = -1$, considerando a função A como área associada.

Na etapa seguinte, Spivak (1967) utiliza aplicações das derivadas para a construção dos gráficos das funções cosseno e seno.

Teorema 4.2.4: Se $0 < x < \pi$, então

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen} x,$$

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x.$$

Demonstração: Se $B = 2A$, então a definição $A(\cos x) = \frac{x}{2}$ pode ser escrita como $B(\cos x) = x$. Dessa forma, podemos dizer que o cosseno é o inverso de B . Já temos que:

$$A'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

O que pode ser escrito como:

$$B'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= (B^{-1})'(x) \\ \Rightarrow \cos'(x) &= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} && \text{(pelo Teorema da Função Inversa)} \\ \Rightarrow \cos'(x) &= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}} \\ \Rightarrow \cos'(x) &= -\sqrt{1-\cos^2(x)} \\ \Rightarrow \cos'(x) &= -\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Note ainda que:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - (\cos x)^2}.$$

Assim, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 \cos(x) \cos'(x)}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \\ \Rightarrow \operatorname{sen}'(x) &= \frac{\cos(x) \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

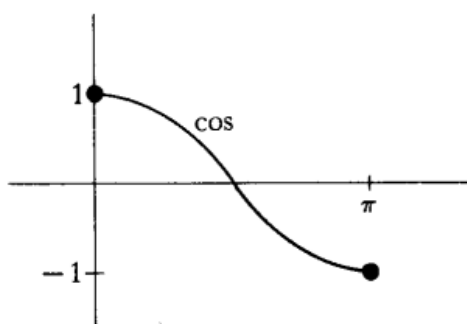
$$\Rightarrow \text{sen}'(x) = \cos(x). \quad \blacksquare$$

Com os resultados do Teorema 4.2.4, é possível esboçar os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $[0, \pi]$, já que:

$$\cos'x = -\text{sen}x = -\sqrt{1 - (\cos x)^2} < 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Pela figura 24, pode-se notar que a função cosseno é decrescente, uma vez que $\cos(0) = 1$ e $\cos(\pi) = -1$.

Figura 24 – Imagem da função cosseno no intervalo $[0, \pi]$



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.261)

Conseqüentemente, $\cos(y) = 0$, para um único y no intervalo $[0, \pi]$. Para encontrar o valor de y :

$$A(\cos x) = \frac{x}{2} \Rightarrow A(0) = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2A(\cos x).$$

Então:

$$y = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

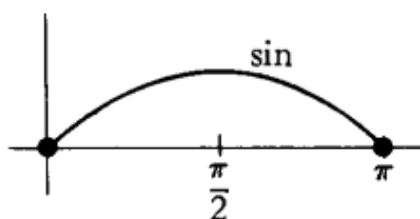
Considerando que

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

é possível escrever

$$y = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Agora temos que $\text{sen}'(x) = \cos(x) > 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e ainda vale que $\text{sen}'(x) = \cos(x) < 0$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Desta maneira, o seno cresce no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e decresce no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, como pode ser visualizado na Figura 25.

Figura 25 – Imagem da função seno no intervalo $[0, \pi]$ 

Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.261)

Para definir os valores do seno e cosseno em intervalos diferentes daqueles restritos anteriormente, Spivak(1967) realiza este processo dividido em duas etapas:

(1) Se $\pi < x < 2\pi$, então:

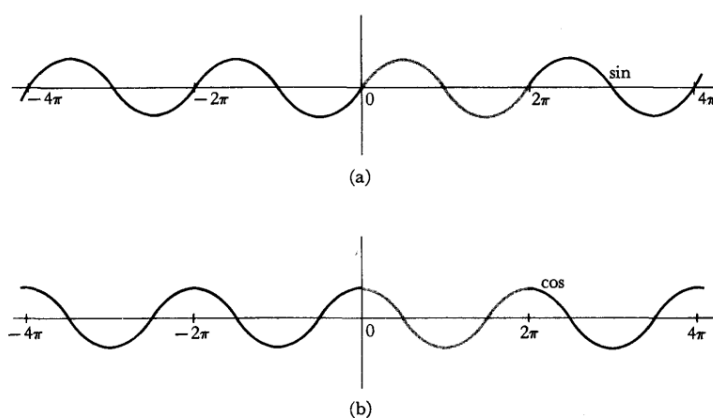
$$\text{sen}(x) = -\text{sen}(2\pi - x), \quad \text{cos}(x) = \text{cos}(2\pi - x).$$

(1) Se $x = 2\pi k + x_0$, para algum k inteiro, e para algum $x_0 \in [0, 2\pi]$, então:

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x_0), \quad \text{cos}(x) = \text{cos}(x_0).$$

Dessa maneira, a Figura 26 apresenta os gráficos das funções seno e cosseno definidos para todo o domínio dos números reais.

Figura 26 – Gráficos das funções seno e cosseno



Fonte: SPIVAK; MICHAEL (1967, p.262)

4.3 FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR WALTER RUDIN

Outra obra consultada foi *Principles of Mathematical Analysis*, de Rudin (1976). Nessa obra, Rudin introduz as funções trigonométricas para números reais por meio de séries de potências, em uma construção que remete, em certa medida, às ideias de Euler. Nessa abordagem, as funções seno e cosseno surgem naturalmente a partir da função exponencial complexa e das propriedades analíticas dessas séries.

Pode-se dizer que o método adotado por Rudin (1976) é mais avançado do ponto de vista teórico, pois requer ferramentas da Análise Complexa. Em contraste, Spivak (1967) fundamenta sua apresentação principalmente nos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral de funções reais. Assim, enquanto Spivak constrói as funções trigonométricas no contexto da análise real, Rudin as introduz como consequência da teoria das funções analíticas no plano complexo.

No início do Capítulo 8, Rudin (1976) define a função exponencial por meio da série de potências:

Definição 4.3.1: *Definimos*

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1)$$

O teste da razão mostra que esta série converge para todo z complexo. A partir das propriedades provadas anteriormente sobre série de funções, por exemplo, a multiplicação de séries absolutamente convergentes, Rudin (1976) obtém as seguintes propriedades:

- $E(z)E(w) = E(z + w)$, para todo z, w complexo;
- $E(0) = 1$;
- $E(z) \neq 0$, para todo z complexo;
- $E'(z) = E(z)$, para todo z complexo.

Definição 4.3.2: *Definimos*

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)], \quad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)], \quad (2)$$

para todo x real.

O autor não descreve as funções S e C como séries de potências explicitamente. No entanto, isso é fácil de deduzir a partir das Definições 4.3.1 e 4.3.2 e das propriedades das séries absolutamente convergentes:

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)] = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + (-1)^n)(ix)^n}{n!},$$

observamos que os termos ímpares da última série são 0, assim,

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Analogamente,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Novamente, o teste da razão mostra que essas séries convergem para todo z complexo. Além disso, são holomorfas (analíticas) sobre todo o plano complexo, ou seja, são diferenciáveis em cada ponto $z \in \mathbb{C}$.

Nos próximos passos, Rudin (1976) prova propriedades das funções $C(x)$ e $S(x)$ com o objetivo de mostrar que essas funções coincidem com as funções $\cos x$ e $\sin x$, cuja definição é usualmente baseada em considerações geométricas.

Segue da definição da exponencial complexa que $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$. Logo,

$$\overline{C(x)} = \frac{1}{2} \overline{[E(ix) + E(-ix)]} = \frac{1}{2} [E(\bar{ix}) + E(\overline{-ix})] = \frac{1}{2} [E(-ix) + E(ix)] = C(x).$$

Analogamente, $\overline{S(x)} = S(x)$. Isso mostra que $C(x)$ e $S(x)$ são reais para x real. Além disso,

$$C(x) + iS(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)] + i \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)] = E(ix),$$

ou seja,

$$E(ix) = C(x) + iS(x). \quad (3)$$

Assim, $C(x)$ e $S(x)$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de $E(ix)$, se x é real.

Em seguida, Rudin (1976) prova que os pontos $E(ix)$, para todo x real, pertencem ao círculo unitário (circunferência de centro na origem e raio 1):

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(\bar{ix}) = E(ix)E(-ix) = E(ix - ix) = E(0) = 1,$$

de modo que

$$|E(ix)| = 1, \text{ para todo } x \text{ real.} \quad (4)$$

Observamos que dessa igualdade obtemos a seguinte identidade:

$$[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1. \quad (5)$$

Da Definição 4.3.2., temos que $C(0) = 1$ e $S(0) = 0$. Da derivada da função exponencial E e da regra da cadeia segue que:

$$\begin{aligned} C'(x) &= \left(\frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)] \right)' \\ &= \frac{1}{2} [E'(ix)i - E'(-ix)i] \\ &= -\frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)] \\ &= -S(x). \end{aligned}$$

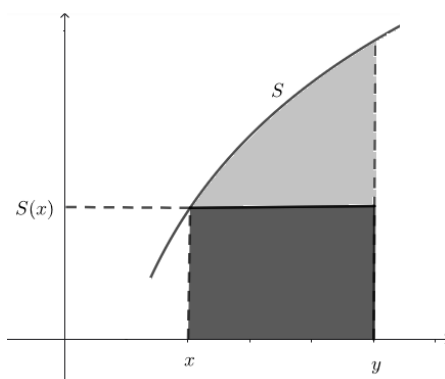
Logo, $C'(x) = -S(x)$ e, similarmete, $S'(x) = C(x)$.

Na próxima etapa, o autor prova que existem números positivos x tais que $C(x) = 0$. Suponha que isso não ocorra. Como $C(0) = 1$, segue então que $C(x) > 0$ para todo $x > 0$; logo $S'(x) = C(x) > 0$ e, portanto, S é estritamente crescente; e como $S(0) = 0$, temos $S(x) > 0$ se $x > 0$. Assim, se $0 < x < y$, temos

$$S(x)(y - x) < \int_x^y S(t) dt = -C(x) + C(y) = C(y) - C(x) \leq 2.$$

A primeira desigualdade segue do fato que a área do retângulo de lados $S(x)$ e $y - x$ é menor do que a área da região limitada pela curva S e eixo das abscissas, entre x e y (veja a Figura 27). A última desigualdade segue de (5), da qual obtemos $[C(x)]^2 \leq 1$ e, portanto, $-1 \leq C(x) \leq 1$ para todo x real.

Figura 27: Comparação das áreas



Fonte: Elaboração própria (2026).

Como $S(x) > 0$, $S(x)(y - x) \leq 2$ não pode ser verdadeira para y grande, e, assim, obtemos uma contradição.

Neste momento, de modo diferente, Rudin (1976) define o número π :

Definição 4.3.3: *Seja x_0 o menor número positivo tal que $C(x_0) = 0$. Isso existe, pois o conjunto dos zeros de uma função contínua é fechado e $C(0) \neq 0$. Definimos o número π por*

$$\pi = 2x_0.$$

Temos que $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(x_0) = 0$, e (5) mostra que $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$. Como $C(x) > 0$ em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pela Definição 4.3.3, S é crescente em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, logo $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Assim,

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right) = C\left(\frac{\pi}{2}\right) + iS\left(\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

A fórmula $E(z)E(w) = E(z + w)$ fornece:

$$E(\pi i) = E\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2}\right) = E\left(\frac{\pi i}{2}\right)E\left(\frac{\pi i}{2}\right) = -1$$

e

$$E(2\pi i) = E(\pi i + \pi i) = E(\pi i)E(\pi i) = 1.$$

Logo

$$E(z + 2\pi i) = E(z)E(2\pi i) = E(z), \quad (6)$$

para todo z complexo.

Em seguida, Rudin (1976) apresenta um teorema com propriedade das funções E , C e S :

Teorema 4.3.4:

- a) *A função E é periódica, com período $2\pi i$.*
- b) *As funções C e S são periódicas, com período 2π .*
- c) *Se $0 < t < 2\pi$, então $E(it) \neq 1$.*
- d) *Se z é um número complexo com $|z| = 1$, existe um único $t \in [0, 2\pi)$ tal que $E(it) = z$.*

Demonstração:

- a) Vale por (6);

b) De (a) segue que

$$C(x + 2\pi) = \frac{1}{2}[E(ix + 2\pi i) + E(-ix - 2\pi i)] = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)] = C(x).$$

Analogamente, $S(x + 2\pi) = S(x)$, para todo x real.

c) Suponha $0 < t < \frac{\pi}{2}$ e $E(it) = x + iy$, com x, y reais. Observamos que

$$"0 < t < 2\pi \text{ implica que } E(it) \neq 1"$$

é equivalente a

$$"0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ implica que } E(4it) \neq 1".$$

Temos que

$$E(4it) = [E(it)]^4 = (x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2).$$

Se $E(4it)$ não é real, nada temos a fazer. Se $E(4it)$ é real, segue que

$$x^2 - y^2 = 0. \text{ Como } x^2 + y^2 = 1 \text{ por (4), temos } x^2 = y^2 = \frac{1}{2} \text{ e, portanto,}$$

$$E(4it) = -1 \neq 1.$$

d) Se $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, então

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2)E(-it_1) = E(i(t_2 - t_1)) \neq 1,$$

por (c). Logo, $E(it_2) \neq E(it_1)$. Isto estabelece a afirmação de unicidade em (d).

Para provar a afirmação de existência em (d), será fixado z tal que $|z| = 1$. Escreva $z = x + iy$, com x e y reais. Segue que $x^2 + y^2 = 1$.

Suponha primeiro que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, C decresce de 1 até 0.

Logo, $C(t) = x$ para algum $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Como $C^2 + S^2 = 1$ e $S \geq 0$ em

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, segue que $S(t) = y$, e com isso, $z = E(it)$.

Se $x < 0$ e $y \geq 0$, as condições precedentes são satisfeitas por $-iz$.

Logo, $-iz = E(it)$ para algum $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e como $i = E\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, assim

$$\text{obtemos } z = iE(it) = E\left(\frac{\pi i}{2}\right)E(it) = E\left(i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Finalmente, se $y < 0$, os dois casos precedentes evidenciam que

$$-z = E(it) \text{ para algum } t \in (0, \pi). \text{ Logo } z = -E(it) = E(i\pi)E(it) =$$

$$E(i(t + \pi)). \text{ Isto prova (d) e, portanto, o teorema. } \blacksquare$$

Para finalizar, o autor escreve que de (d), (2) e (3) segue que a curva γ definida por

$$\gamma(t) = E(it) = C(t) + iS(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma curva simples fechada cujo conjunto de valores é o círculo unitário no plano.

Como $\gamma'(t) = iE(it)$, o comprimento de γ é

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |iE(it)| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Este é, naturalmente, o resultado esperado para o perímetro de um círculo de raio 1. Isso mostra que π , definido em 4.3.3, tem o significado geométrico usual.

Da mesma forma, vemos que o ponto $\gamma(t_0)$ descreve um arco de circunferência de comprimento t_0 quando t cresce de 0 até t_0 :

$$\int_0^{t_0} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{t_0} 1 dt = t_0.$$

Considerando o triângulo de vértices

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \gamma(t_0), \quad z_3 = C(t_0),$$

temos que $C(t)$ e $S(t)$ são de fato idênticas a $\cos t$ e $\sin t$, se estas forem definidas da maneira usual como razões dos lados de um triângulo retângulo.

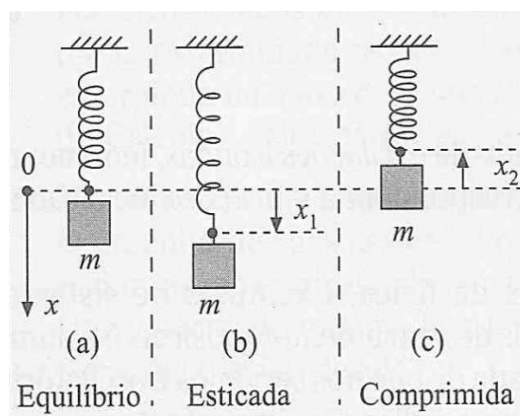
Rudin (1976) enfatiza que as propriedades básicas das funções trigonométricas foram deduzidas a partir das Definições 4.3.1 e 4.3.2, sem qualquer apelo à noção geométrica de ângulo.

5 O SISTEMA MASSA-MOLA

Para definirmos o sistema massa-mola através de funções trigonométricas, iremos nos basear no livro: Curso de Física Básica escrito por Nussenzveig (2002). Inicialmente, o autor descreve que as oscilações estão presentes em diversos ramos da física. Alguns exemplos apresentados são pêndulos, cordas de instrumentos musicais e colunas de ar em instrumentos de sopro. A corrente elétrica alternada que utilizamos também é uma forma de oscilação, e as oscilações da corrente em circuitos elétricos possuem várias aplicações relevantes. Além destes exemplos, o que é de interesse para o nosso estudo é o sistema constituído por uma massa m suspensa verticalmente por uma mola.

A Figura 28 ilustra três situações distintas: Na primeira delas, (a) a posição de equilíbrio estável, na qual a força gerada pela distensão da mola equilibra o peso. Em (b), a mola foi esticada, ocasionando um deslocamento $x_1 > 0$ em relação ao nível de equilíbrio estável correspondente a $x = 0$. Observe que em (c), ela foi comprimida, com um deslocamento $x_2 > 0$. A força restaurada é dada pela equação $F = -kx$, na qual $k > 0$ é a constante elástica do modelo de mola e o sinal negativo reflete a natureza opositora da força. A lei de Hooke, como é conhecida a equação $F = -kx$, é válida para deslocamentos suficientemente pequenos.

Figura 28 – Oscilação do deslocamento da massa m



Fonte: NUSSENZVEIG; HERCH (2002, p.40)

A Segunda Lei de Newton fornece a equação do movimento correspondente é:

$$mx'' = F(x) = -kx$$

Considerando também que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ obtemos que a equação do movimento pode ser escrita como:

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Conforme aponta Nussenzveig (2002), a análise anterior revela que, para pequenos deslocamentos de uma posição de equilíbrio estável, qualquer sistema com um grau de liberdade deve seguir, de forma aproximada, essa equação de movimento. Essa ampla aplicabilidade é uma das razões que tornam o oscilador harmônico tão fundamental. O autor também salienta que a restrição a pequenos desvios é fundamental. Para deslocamentos maiores, surgem correções não lineares (termos adicionais proporcionais a x^2 , x^3 , ...). Dessa forma, ao ultrapassarmos o limite elástico de uma mola, ela não retorna mais à posição de equilíbrio, resultando em deformações permanentes. Estes casos não serão analisados aqui, pois não é o objetivo deste estudo. Além disso, ao desenvolver a equação que descreve o movimento de um sistema massa-mola, muitos autores consideram a presença de atrito e de forças externas, tais efeitos, entretanto, não estão incluídos na abordagem adotada por Nussenzveig (2002).

O movimento de um oscilador harmônico é denominado movimento harmônico simples (MHS), conforme apontado por Nussenzveig (2002). Para encontrar a equação que descreve o MHS ao longo do tempo, é necessário resolver a equação de movimento em relação à função desconhecida $x(t)$. Trata-se de uma diferencial ordinária para $x(t)$, pois envolve derivadas de x em relação ao tempo t , e é de segunda ordem, uma vez que a derivada de maior ordem que aparece é a segunda.

Neste ponto, Nussenzveig (2002) observa que, para solucionar uma equação diferencial mais geral, como a equação apresentada acima, dadas as condições iniciais, pode-se buscar soluções aproximadas por meio de métodos numéricos. No entanto, apresentaremos inicialmente o método mais convencional, descrito em Equações Diferenciais Aplicadas, de Figueiredo e Neves (2005), para resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem

com coeficientes constantes, deixando o método apresentado por Nussenzweig para um momento posterior.

O método de resolução consiste em buscar soluções na forma

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

em que λ é um parâmetro a determinar. Substituindo essa expressão na equação $x'' + \omega^2 x = 0$ obtemos

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0,$$

o que implica que,

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

que é conhecida como a equação característica da equação $x'' + \omega^2 x = 0$. Neste caso, temos duas raízes complexas conjugadas:

$$\lambda_1 = i\omega \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i\omega.$$

Logo,

$$x_1(t) = e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-i\omega t}$$

são linearmente independentes, pois seu Wronskiano é

$$W[x_1, x_2](t) = \det \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} & -i\omega e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = -2i\omega \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Utilizando a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

temos

$$x_1(t) = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t).$$

Em virtude da linearidade da equação $x'' + \omega^2 x = 0$, também são soluções da equação diferencial

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2} [x_1(t) + x_2(t)] = \cos \omega t \quad \text{e} \quad \phi_2(t) = \frac{1}{2i} [x_1(t) - x_2(t)] = \operatorname{sen} \omega t.$$

Como o Wronkiano das soluções ϕ_1 e ϕ_2 é

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = \det \begin{pmatrix} \cos \omega t & \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \omega \cos \omega t \end{pmatrix} = \omega \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

segue que são linearmente independentes. Desse modo,

$$x(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$$

é a solução geral da equação diferencial $x'' + \omega^2 x = 0$.

A construção apresentada evidencia como as funções trigonométricas emergem do contexto das equações diferenciais, revelando seu papel

fundamental na descrição de fenômenos oscilatórios e periódicos. A solução exposta não é apenas um resultado algébrico, mas a expressão matemática do comportamento de sistemas que oscilam ao redor de uma posição de equilíbrio, como um pêndulo ou uma mola. Essa perspectiva reforça que as funções seno e cosseno deixam de ser conceitos abstratos e assumem um significado físico concreto, associado à posição de um corpo em movimento periódico ao longo do tempo.

A seguir descrevemos o desenvolvimento apresentado por Nussenzweig (2002) utilizando métodos numéricos. Na prática, isso é comumente feito com o auxílio de computadores. Quando o intervalo de tempo Δt é suficientemente pequeno, é possível realizar aproximações:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{dx}{dt}(t + \Delta t) - \frac{dx}{dt}(t) \right],$$

$$\frac{dx}{dt}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [x(t + \Delta t) - x(t)].$$

Dessa maneira, se partirmos de $t = 0$ e considerando as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = x_0 \text{ e } \frac{dx}{dt}(0) = v(0) = v_0,$$

obtemos:

$$x(\Delta t) \approx x(0) + \Delta t \frac{dx}{dt}(0) = x_0 + v_0 \Delta t,$$

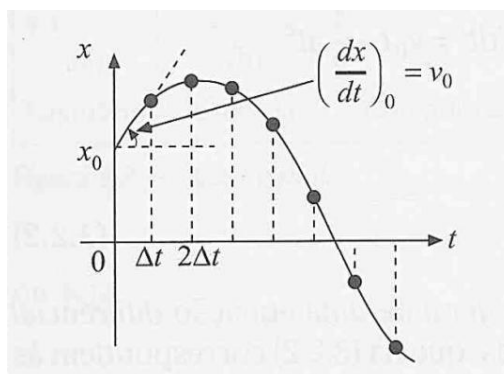
$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) \approx \frac{dx}{dt}(0) + \Delta t \frac{d^2x}{dt^2}(0) = v_0 - \omega^2 x_0 \Delta t,$$

lembrando que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

O autor ainda afirma que se repetirmos o mesmo procedimento, obteríamos x e $\frac{dx}{dt}$ no instante $2\Delta t$, e assim sucessivamente. Desta forma, se traçarmos um gráfico de x em função de t , unindo os pontos assim obtidos $x(0)$, $x(\Delta t)$, $x(2\Delta t)$, por segmentos de reta, obtém-se uma poligonal, que se aproxima tanto mais da curva solução $x(t)$ quanto menor o intervalo Δt . Este cenário é mostrado na Figura 29 quando consideramos $x_0 > 0$ e $v_0 > 0$.

Figura 29 – Aproximação Numérica



Fonte: NUSSENZVEIG; HERCH (2002, p.42)

Portanto, Nussenzveig (2002) aponta que para $x > 0$, o coeficiente angular $\frac{dx}{dt}$ da tangente à curva decresce ao se passar de t para $t + \Delta t$: a inclinação reduz, atinge zero (tangente horizontal) e, em seguida, torna-se negativa e cresce em valor absoluto. Conseqüentemente, no momento em que a curva está acima do eixo das abscissas, ela apresenta concavidade para baixo; ao cruzar o eixo ($x < 0$), ocorre o oposto: a concavidade se volta para cima. Esse comportamento é característico das oscilações. A equação mencionada também indica que a curvatura é mais acentuada quanto maior o valor absoluto de x .

Após toda esta análise, podemos dizer que o gráfico aproximado lembra uma senóide, sugerindo considerar soluções do tipo $\text{sen}(ct)$, $\text{cos}(ct)$, onde c é uma constante a ser ajustada. Temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\text{sen}(ct)] = -c^2 \text{sen}(ct).$$

$$\frac{d^2}{dt^2} [\text{cos}(ct)] = -c^2 \text{cos}(ct).$$

Desta maneira, definindo $\omega = c$, obtemos as seguintes soluções:

$$x_1(t) = \text{cos}(\omega t),$$

$$x_2(t) = \text{sen}(\omega t).$$

O autor também afirma que para qualquer equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea, temos que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, conseqüentemente, $x_1(t) + x_2(t)$ também é solução. Não apenas isso, mas se $x(t)$ é solução, podemos dizer que para um a constante, $ax(t)$ é outra solução.

Com base nestas duas afirmações podemos escrever a forma geral de nossa solução.

$$x(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t.$$

Portanto, esta é a equação $x(t)$ que relaciona a posição da massa m no intervalo de tempo t por meio das funções trigonométricas.

5.1 SÉRIES DE FOURIER

Joseph Fourier no início do século XIX trouxe um importante estudo envolvendo funções trigonométricas. Em sua perspectiva, ele associou os fenômenos periódicos através das séries de Fourier, visando auxiliar no entendimento de alguns conceitos como calor e sons (FOURIER, 1822).

Inicialmente, Fourier considerou a definição associada a periodicidade de uma função. Uma função $f(x)$ é dita periódica se satisfaz a relação $f(x + T) = f(x)$, com período $T > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Buscando assim, representar funções arbitrárias com comportamento periódico como somas de funções trigonométricas simples. Seu intuito inicial era descrever matematicamente a propagação do calor, porém como apontado por Carslaw (1921) suas ideias logo foram reconhecidas como ferramentas fundamentais em diversas áreas da ciência.

De acordo com Figueiredo (2005), se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável de período 2π , então a série de Fourier da função f , dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),$$

converge em cada ponto x , para $f(x)$, isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)).$$

Em virtude da expressão acima que Lima (2023) reforça o que Joseph Fourier descobriu: Toda função periódica (com raras exceções) é uma soma finita ou infinita de funções do tipo $a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx)$. É relevante ainda destacar a semelhança entre esta expressão com a solução geral:

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

do sistema massa-mola, no qual $n = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $a_n = b_n = 0$, para todo $n = 0$ e $n \geq 2$. Esta abordagem revela que o movimento do sistema possui características periódicas e harmônicas, fazendo com que ele possa ser diretamente relacionado às funções seno e cosseno, os mesmos elementos fundamentais utilizados nas Séries de Fourier.

Portanto, a aplicação das Séries de Fourier ultrapassa a matemática abstrata: sistemas físicos, como o sistema de massa e mola, amplamente analisado na física clássica, mostram como a separação de sinais periódicos em harmônicos facilita a compreensão e previsão do comportamento de sistemas que oscilam. Deste modo, a teoria de Fourier é essencial para a análise de fenômenos periódicos tanto na natureza quanto na engenharia.

6 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO BÁSICO

Os livros de Matemática empregados no Ensino Médio serão outro objeto de análise neste trabalho. O intuito principal é compreender como as funções trigonométricas são exibidas em cada um deles. A pesquisa busca reconhecer não apenas como cada um dos temas está estruturado, mas também a maneira como os conceitos essenciais de seno, cosseno e tangente são abordados. Ao todo, serão discutidas cinco obras de diferentes autores, e para este estudo apenas o capítulo de funções trigonométricas de cada livro será objeto da análise.

Para a análise dos livros didáticos, foram selecionadas cinco obras voltadas ao ensino médio, todas disponíveis digitalmente de forma gratuita, o que justifica as escolhas e amplia o acesso tanto para professores, quanto para estudantes. As obras analisadas são: Conexões: Matemática e suas Tecnologias (LEONARDO, 2020); Multiversos Matemática: Sequências e Trigonometria (SOUZA, 2020); Prisma Matemática: Geometria e Trigonometria (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020); Matemática Interligada: Trigonometria, Fenômenos Periódicos e Programação (ANDRADE, 2020); Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares (DANTE; VIANA, 2020). Elas serão examinadas de modo a oferecer ao professor um panorama comparativo sobre como cada uma aborda os conteúdos trigonométricos, permitindo identificar qual delas se mostra mais adequada a depender dos objetivos pedagógicos pretendidos.

No contexto do ensino médio, esta função tem características bem expressivas. A presença de infinitas assíntotas verticais, decorrente do comportamento periódico da função, caracteriza um modelo gráfico único quando comparado ao das demais funções estudadas. Esta análise mais detalhada da função promove o raciocínio abstrato do estudante de maneira mais sofisticada.

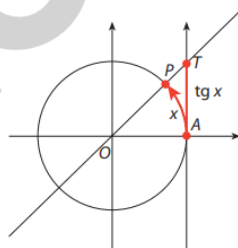
Figura 30 – Definição da função tangente

5 A função tangente

Seja P a extremidade de um arco, na circunferência trigonométrica de centro O , correspondente ao número real x .

Consideremos o ponto T de intersecção entre a reta \overline{OP} e a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$.

Sabemos que a ordenada do ponto T é a tangente do arco de medida x .



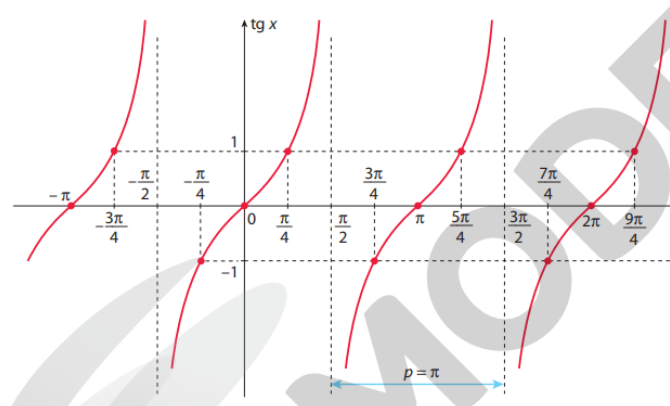
ADILSON BECCO

A função **tangente** é a função $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x do domínio ao número real $\text{tg } x$, ou seja, $f(x) = \text{tg } x$.

Fonte: LEONARDO (2020, p.90)

Figura 31 – Gráfico da função tangente

Assim, o gráfico da função tangente tem o seguinte formato:



Fonte: LEONARDO (2020, p.91)

Todas as cinco obras analisadas sugerem atividades a serem desenvolvidas com os alunos por meio do software digital GeoGebra. Entretanto, a obra *Multiversos Matemática: Sequências e Trigonometria* (SOUZA, 2020) destaca-se por apresentar atividades bem estruturadas envolvendo o uso deste

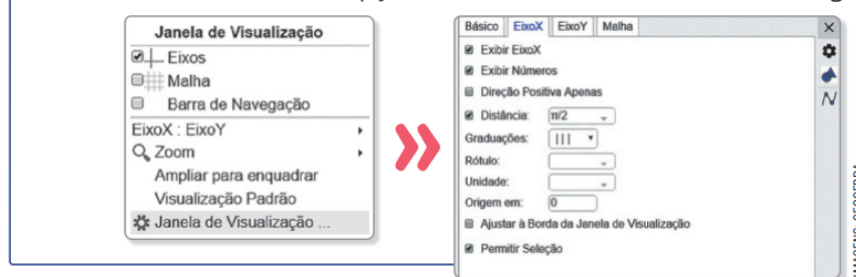
software, até mesmo para docentes que não possuem o domínio da ferramenta como pode ser visualizado na Figura 32.

Figura 32 – Uso do GeoGebra para construir gráficos

Nesta Unidade, estudamos as funções do tipo trigonométrica, definidas por $f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$ ou $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, em que a , b , c e d são números reais, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Agora, utilizando o *software* de geometria dinâmica, **GeoGebra**, vamos estudar como os gráficos dessas funções se comportam ao alterarmos os valores dos parâmetros a , b , c e d .

Acompanhe como proceder.

A Vamos ajustar a escala do eixo x para que tenha $\frac{\pi}{2}$ de unidade. Para isso, clicamos com o botão direito do *mouse* em qualquer lugar livre na **Janela de visualização** e, na caixa de opções que abrir, clicamos em **Janela de visualização....** Em seguida, ao abrir a caixa de diálogo, na aba **EixoX**, marcamos a opção **Distância**, selecionamos a opção $\pi/2$ e fechamos essa caixa de diálogo.



Fonte: SOUZA (2020, p.142)

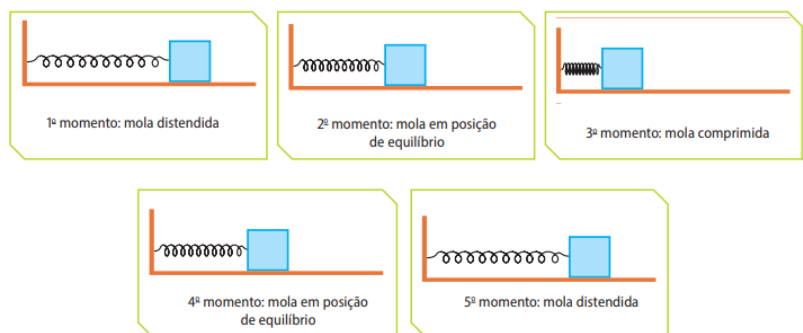
Outro aspecto positivo dessa obra é que, ao final de seu capítulo relacionado as funções trigonométricas, é disponibilizada uma lista de exercícios bem extensa, incluindo algumas questões de vestibulares de todo o país, o que oferece ao professor um bom repertório de questões para discutir.

O sistema massa-mola associado com o estudo das funções trigonométricas foi exposto apenas no livro *Prisma Matemática: Geometria e Trigonometria* (BONJORNIO; JÚNIOR; SOUSA, 2020) conforme exibido pela Figura 33. Este material associa a função seno com a velocidade da mola no sistema, enquanto relaciona o cosseno com a posição do objeto, ou seja, da massa. Esta construção auxilia o estudante a relacionar a interdisciplinaridade da matemática com a física, favorecendo o aprendizado em ambos os campos.

Figura 33 – Citação do sistema massa-mola

O sistema massa-mola: posição

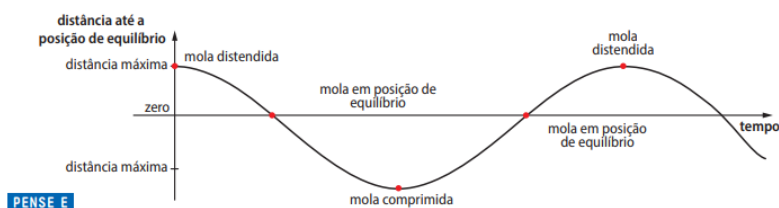
Vamos retomar o estudo do sistema massa-mola visto anteriormente, mas, desta vez, sob a ótica da posição do objeto ao longo do tempo. Vamos rever o sistema:



Considerando a posição de equilíbrio como a posição inicial, temos:

- Quando a mola está distendida (ou comprimida), o objeto está o mais distante possível da posição inicial.
- Quando a mola está em sua posição de equilíbrio, a distância do objeto até a posição inicial é igual a zero.

Vamos analisar graficamente essa situação.



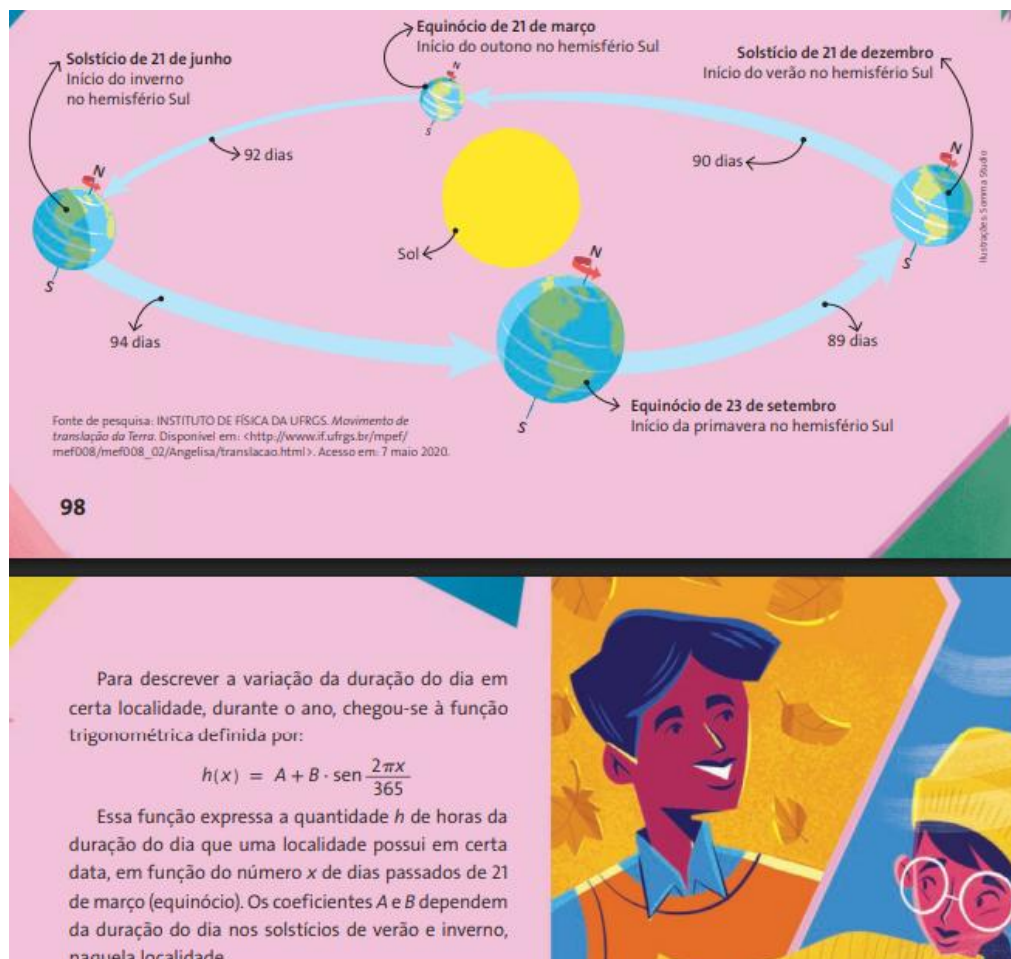
Fonte: BONJORNO, JÚNIOR, SOUSA (2020, p.136)

Vale destacar ainda que esta obra ainda identifica não apenas as equações trigonométricas, mas também as inequações trigonométricas, o que pode vir a ser bem conveniente para o professor analisar a compreensão gráfica que cada discente possui em relação a estes modelos de funções.

As últimas duas obras, Matemática Interligada: Trigonometria, Fenômenos Periódicos e Programação (ANDRADE, 2020) e Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares (DANTE; VIANA, 2020) são similares em diversos aspectos no que tange o desenvolvimento de seus capítulos. Ambas trazem uma construção completa dos elementos associados ao ciclo trigonométrico, previamente ao estudo das funções. O final do capítulo dos dois livros realça situações nos quais podemos encontrar as funções trigonométricas no cotidiano, porém a forma como isso é realizado varia entre as

duas. A primeira utiliza-se de ilustrações e gráficos que despertam a atenção do estudante, exibindo, em duas seções, que as funções trigonométricas podem representar a duração do dia ou a propagação ultrassônica (Figura 34).

Figura 34 - Recorte da seção “Duração do dia”



Fonte: ANDRADE (2020, p.98)

A segunda por sua vez apresenta esta contextualização por meio de exercícios que envolvem o cálculo da pressão arterial, corrente alternada de um osciloscópio ou ainda de ondas sonoras. Além do mais, traz uma seção sobre o relógio de pêndulo, como pode ser visto na Figura 35.

Figura 35 - Recorte da seção “O desafio de medir o tempo”

Como o pêndulo faz o relógio funcionar?

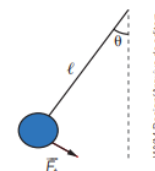
O pêndulo está acoplado ao mecanismo do relógio. Sendo a amplitude constante, o mecanismo é acionado em intervalos de tempo iguais, permitindo a precisão do relógio.

Em termos físicos, o movimento do pêndulo é regido pela força gravitacional. A componente dessa força que atua na oscilação é um vetor \vec{F}_t , tangente ao braço do pêndulo, que depende apenas da medida de massa m do pêndulo e do módulo da aceleração gravitacional g , como representado na figura ao lado.

Considerando uma aproximação para uma situação ideal, na qual o braço do pêndulo, de medida de comprimento ℓ , pode ser aproximado para um fio de massa desprezível, e desconsiderando os efeitos de forças dissipativas (como o atrito e a resistência do ar), podemos calcular o módulo da componente tangencial da força gravitacional pela relação:

$$F_t = mg \cdot \sin \theta$$

Assim, essa força tem valor máximo quando a medida de abertura é máxima, e é nula no momento em que o pêndulo fica perfeitamente na vertical ($\theta = 0$).



Fonte: DANTE; VIANA (2020, p.78)

No quadro a seguir, podemos verificar os principais elementos discutidos em cada um dos livros:

Quadro 1 – Livros didáticos e conceitos associados ao estudo das funções trigonométricas

	Conexões	Multiversos	Prisma	Matemática em contexto	Matemática Interligada
Introduz o capítulo com a construção completa do ciclo trigonométrico.		X		X	X
Contextualiza a função trigonométrica antes de sua definição.	X	X	X	X	X
Apresenta a definição de função periódica.	X		X	X	X
Menciona os arcos Côngruos.	X	X		X	X
Define a função seno, juntamente com o gráfico.	X	X	X	X	X
Define a função cosseno, juntamente com o gráfico.	X	X	X	X	X

Define a função tangente, juntamente com o gráfico.	X				
Expõe alguns pontos notáveis das funções em radianos.	X	X	X	X	X
Associa a igualdade de arcos entre diferentes quadrantes.		X		X	X
Utiliza o sistema massa-mola para relacionar com as funções seno e cosseno.			X		
Propõe uma atividade com os estudantes através do software GeoGebra.	X	X	X	X	X
Analisa o período e a amplitude das funções.	X	X	X	X	X
Define a função seno como ímpar.	X	X		X	X
Define a função cosseno como par.	X	X		X	X
Discute as mudanças ocorridas nos gráficos das funções trigonométricas através de translações verticais e horizontais.	X	X	X	X	X
Apresenta as equações trigonométricas, assim como métodos de resolução.	X	X	X		

Apresenta as inequações trigonométricas, assim como métodos de resolução.			X		
Disponibiliza uma lista de exercícios somente para a função seno.	X		X		
Disponibiliza uma lista de exercícios somente para a função cosseno.	X		X		
Disponibiliza uma lista de exercícios somente para a função tangente.	X				
Disponibiliza uma lista de exercícios envolvendo tanto seno, quanto cosseno.	X	X		X	X
Disponibiliza uma lista de exercícios enfatizando de forma exclusiva as aplicações cotidianas das funções trigonométricas		X		X	
Disponibiliza uma lista de exercícios envolvendo a resolução de equações trigonométricas.	X	X	X		

Fonte: Elaboração própria (2025)

A avaliação de cada um destes livros tem como intenção auxiliar o docente na escolha do material adequado para o seu modelo de aula, sem classificar cada um dos livros como mais favorável ao ensino, ou ainda, menos apropriado.

7 PRINCIPAIS DIFICULDADES DOS ESTUDANTES NA COMPREENSÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A compreensão das funções trigonométricas representa, para alguns estudantes, um desafio ao longo da educação matemática. Diante disso, diversos pesquisadores têm voltado sua atenção para este tema, buscando identificar e compreender os principais obstáculos enfrentados durante o processo de aprendizagem deste conteúdo. A presente seção reúne e discute as percepções de diferentes autores acerca dessas dificuldades, com o objetivo de construir um panorama mais amplo sobre o tema. Cabe ressaltar, entretanto, que por se tratar de um campo de maior abstração, as dificuldades aqui elencadas não possuem caráter universal: o que se configura como um obstáculo para determinado contexto pode não se manifestar da mesma forma em outro, uma vez que fatores diversos, como a trajetória escolar influencia diretamente a relação que cada sujeito estabelece com o conhecimento matemático.

7.1 AS EXPERIÊNCIAS PRÉVIAS

Em algumas ocasiões, o estudo das funções trigonométricas possibilita incertezas na compreensão de seus principais conceitos. Thompson (2008) destaca que as experiências prévias dos alunos com a trigonometria é um dos fatores que pode originar estas dúvidas. O autor realça que se a aprendizagem da trigonometria foi associada como elemento de grande complexidade, desta maneira, a experiência de meta-aprendizagem será comprometida, o que irá proporcionar consequências na assimilação das funções trigonométricas. No momento em que alguns tópicos da trigonometria como razões trigonométricas e relações entre ângulos e medidas são trabalhadas de maneira unicamente mecânica e descontextualizada torna-se complexo para o estudante identificar conexões entre estes conceitos e as representações algébricas e gráficas das funções trigonométricas. Com base nisso, outro fator agravante é a desconexão entre os dois blocos em que a trigonometria costuma ser ensinada: a trigonometria dos triângulos e a trigonometria das funções periódicas. O currículo

acaba desenvolvendo “duas trigonometrias” sem relação entre si, o que compromete a coerência conceitual necessária para uma aprendizagem significativa. Essa incoerência de significados, construída ao longo dos anos escolares, torna ainda mais difícil para o estudante compreender as funções trigonométricas como objetos matemáticos unificados. Para Thompson (2008), o problema não está na complexidade intrínseca do conteúdo, mas na ausência de uma base conceitual coerente que sustente a passagem de um contexto para o outro.

Ainda vale notar a questão psicológica e emocional do estudante durante o aprendizado, tendo em vista que vivências passadas caracterizadas por desafios podem afetar negativamente a postura do aluno em relação ao novo conteúdo apresentado, diminuindo sua motivação no que tange o aprendizado.

7.2 O RACIOCÍNIO LÓGICO MATEMÁTICO

Um estudo realizado na Indonésia por Ilyas et al. (2022) estabeleceu conexões entre o raciocínio lógico matemático com o aprendizado das funções trigonométricas. Esta pesquisa de caráter qualitativa teve o intuito de compreender como o conceito das funções haviam sido assimilados pelos estudantes do ensino médio. A coleta de dados baseou-se uma atividade verbal e escrita, nas quais os alunos deveriam refletir sobre os procedimentos necessários para resolver três tarefas solicitadas, todas envolvendo os conceitos de funções trigonométricas. Observou-se que os educandos que já haviam se destacado em testes prévios de raciocínio lógico matemático também apresentaram maior compreensão das propriedades das funções. Os autores classificaram os estudantes em três categorias: estudantes com habilidades de raciocínio lógico elevadas (ST), estudantes com habilidades de raciocínio lógico moderadas (SS) e estudantes com habilidades de raciocínio lógico baixas (SR). Concluiu-se que tanto o grupo de alunos ST, quanto o grupo SS utilizam do raciocínio indutivo na compreensão do problema, juntamente com o raciocínio dedutivo no momento da execução. A grande diferença entre os dois grupos destacada é que o grupo de habilidades moderadas costuma utilizar com maior frequência as ferramentas de tentativa e erro. Os autores também destacaram

que os estudantes pertencentes ao grupo SR não conseguiram estabelecer conexões necessárias para descrever uma linha de raciocínio que permitisse a solução do problema. Os critérios para a classificação dos alunos em cada um dos três grupos não foram apresentados no artigo.

Os resultados da pesquisa acima expõem que as funções trigonométricas necessitam de uma compreensão estruturada de seus conceitos, a qual está diretamente conectada com o raciocínio lógico do indivíduo. Tendo em vista que o ponto de partida não é apenas a aplicação de uma equação matemática, mas a capacidade do estudante de estabelecer relações, identificar padrões e construir conclusões coerentes a partir de definições e propriedades matemáticas. A ausência destas habilidades torna o aprendizado mecânico e superficial, dificultando a transferência do conhecimento para situações distintas daquelas já estudadas. Outro aspecto relevante é o uso da trigonometria tanto no contexto escolar quanto em áreas como física, engenharia e arquitetura. Resolver problemas que necessitam de linhas de raciocínio não usuais, significa que o aluno deverá selecionar as estratégias adequadas, organizar os dados e seguir uma sequência lógica de passos, competências diretamente associadas ao raciocínio lógico-matemático.

7.3 A CONCEITUAÇÃO

Outro estudo realizado na Turquia teve como objetivo analisar as percepções de estudantes universitários ingressantes ao curso de Licenciatura em Matemática em relação ao aprendizado adquirido da trigonometria e das funções trigonométricas durante o ensino médio. Com este intuito, Çetin (2015) realizou um estudo de caso com 90 alunos cursantes da disciplina de Matemática Básica. A coleta de dados baseou-se por meio de dois instrumentos principais: uma escala composta por dez questões relacionadas à compreensão dos estudantes sobre seu conhecimento conceitual e um teste de constituído por cinco questões abertas, que verificavam a profundidade do conteúdo matemático assimilado pelos alunos. Os dados obtidos foram analisados a partir de procedimentos de análise descritiva e de conteúdo, nos quais os resultados indicaram que, embora os estudantes apresentassem um elevado nível de

percepção em relação aos conceitos fundamentais de trigonometria e funções trigonométricas, especialmente no que se refere às medidas de ângulos e de arcos, não conseguiram desenvolver tais conceitos de forma conceitualmente consistente. Ainda vale destacar que os participantes demonstraram consciência no que tange estas dificuldades.

A investigação realizada por Çetin (2015) aponta em especial um impasse envolvendo o ensino da trigonometria e das funções trigonométricas: a distância existente entre a percepção dos ingressantes ao curso de Licenciatura em Matemática no que tange o domínio conceitual com a compreensão teórica formalizada dos conteúdos. Esse distanciamento evidente pode ser compreendido como consequência de práticas pedagógicas que valorizam apenas a memorização, a apresentação da trigonometria como um conjunto de fórmulas e equações e até mesmo a pouca relação entre os conceitos apresentados. Outro ponto importante a se destacar é que o fato de os estudantes possuírem imagens visuais dos conceitos, mas não conseguirem desenvolver a compreensão adequada, exhibe que o ensino da trigonometria pode estar sendo limitado pelo uso de representações gráficas e reduzindo o espaço das definições e propriedades matemáticas associadas. Desta maneira, fazendo com que essa abordagem impeça a transferência da aprendizagem para novos contextos. Além disso, ainda que os estudantes reconheçam suas próprias limitações, o estudo não aprofunda os motivos pelos quais essa consciência não é traduzida em um potencial avanço. Essa lacuna evidencia a necessidade de maiores investigações neste aspecto. Portanto, ainda que a pesquisa apresente sugestões associadas ao ensino dos ângulos, arcos e suas respectivas medidas, as conclusões obtidas realçam a necessidade de uma revisão mais detalhada das práticas de ensino da trigonometria.

8 PRODUTO EDUCACIONAL

Um dos fundamentos desta pesquisa é apresentar uma ferramenta alternativa para o ensino das funções trigonométricas em sala de aula. Visando este objetivo, a construção de um sistema massa-mola foi selecionada para atender esta finalidade. A intenção de propor a utilização deste instrumento está relacionada ao vínculo que é possível estabelecer entre a representação trigonométrica com o fenômeno físico. Essa abordagem comparativa possibilita um estudo mais contextualizado das funções, de maneira que o estudante pode obter dados do experimento a fim de modelar valores para a periodicidade, amplitude e fase; conceitos essenciais para funções como seno e cosseno. Esta representação dos conteúdos matemáticos juntamente com o fenômeno físico pode vir a favorecer o processo de aprendizagem de maneira mais significativa. Diante do exposto, é notório que o sistema massa-mola favorece a interdisciplinaridade, possibilitando relações da matemática com a física. Este modelo favorece a fragmentação tradicional dos conteúdos escolares, oportunizando um estudo mais contextualizado e aplicado com os conhecimentos científicos e tecnológicos pertencentes ao cotidiano.

Com o intuito de facilitar a aplicação deste produto educacional em sala de aula, foi elaborado um caderno pedagógico destinado aos professores de Matemática do Ensino Médio. Nesse material são apresentadas orientações detalhadas para a construção do sistema massa-mola, bem como uma sequência didática composta por atividades e experimentos que podem ser desenvolvidos com os estudantes a partir do instrumento construído.

Além disso, o material reúne vídeos utilizados para a coleta de dados do experimento, os quais auxiliam na observação do movimento oscilatório do sistema, e apresenta os procedimentos e cálculos necessários para a modelagem matemática do fenômeno observado. Os vídeos também são uma alternativa para a aplicação da atividade sem a construção do instrumento, no entanto, recomenda-se a construção do objeto já que a experiência direta com o instrumento potencializa o envolvimento dos alunos e amplia as possibilidades de exploração didática. Dessa maneira, busca-se oferecer ao docente um suporte completo para a condução da atividade, integrando a experimentação

prática com a análise matemática envolvida no estudo das funções trigonométricas.

8.1 A PREFERÊNCIA DO SISTEMA FÍSICO AO SIMULADOR DIGITAL (PHET)

As simulações interativas presentes na plataforma Physics Education Technology (PhET), disponível em <https://phet.colorado.edu/> e desenvolvidas pela Universidade do Colorado Boulder são amplamente utilizadas para apoiar a compreensão conceitual de tópicos de física e matemática. Essas simulações são projetadas para serem interativas e visualmente intuitivas. No entanto, a experimentação por meio de um artefato físico oferece possibilidades educacionais únicas. Uma das principais contribuições dos experimentos físicos reside em sua capacidade de inserir os estudantes no contexto, envolvendo a manipulação de materiais reais por meio da interatividade dos procedimentos.

Um estudo comparativo realizado por Rytting et al. (2019) mostra que os estudantes relatam maior engajamento e percebem os experimentos presenciais como mais eficazes para a aprendizagem. Nesta pesquisa que compara experiências baseadas em simulações PhET com experimentos físicos em diferentes tópicos, constatou-se que apesar de ambos favorecerem a compreensão conceitual, os alunos envolvidos em atividades práticas não apenas demonstraram maior envolvimento, como também uma percepção mais positiva sobre o processo de aprendizagem. Desta maneira, a compreensão dos estudantes sobre o que significa fazer ciência, também difere entre ambientes físicos e simulados. Experimentos reais exigem que os alunos lidem com imperfeições do mundo físico, bem como a variabilidade das medições, o que promove uma assimilação mais profunda da investigação científica e da incerteza nos dados empíricos. Entretanto, simulações frequentemente apresentam dados idealizados, que apesar de serem benéficos para o estudo exclusivamente matemático, limitam o contato dos estudantes com a complexidade da prática.

Ainda vale destacar que os sistemas físicos favorecem práticas colaborativas e comunicativas em sala de aula. Funke (1998) aponta que

simulações podem ser ricas em imagens e em cálculos, mas deixam a desejar na dimensão social. A montagem do experimento, o ajuste de massas ou constantes elásticas, a cronometragem das oscilações e a construção gráficos a partir de dados reais geralmente exigem trabalho em equipe e comunicação entre os estudantes. As simulações embora também possam ser utilizadas em grupo, tendem a posicionar os alunos em interações mais individualizadas.

Pelas razões expostas acima, optou-se por elaborar um sistema massa-mola físico em vez de utilizar a plataforma PhET como instrumento para este produto.

A seguir apresentamos como construir o sistema massa-mola, tal qual a aplicação do instrumento como contribuição para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. Observa-se que essas seções estão inseridas de modo similar no caderno pedagógico elaborado.

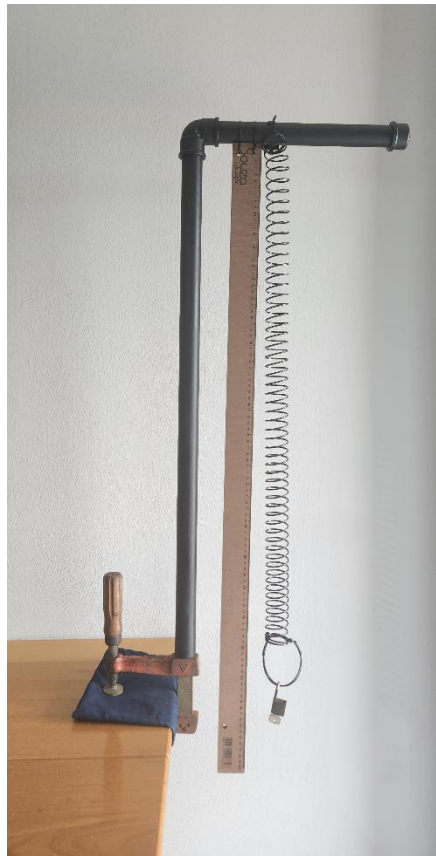
8.2 A CONSTRUÇÃO DO SISTEMA MASSA-MOLA

Nesta seção são apresentados os materiais e os procedimentos necessários para a construção do instrumento mostrado na Figura 36.

Os utensílios necessários para a elaboração do sistema são:

- Superfície plana para a montagem.
- Cano de PVC com comprimento de 80 cm (32 mm de diâmetro).
- Cano de PVC com comprimento de 30 cm (32 mm de diâmetro).
- Cano de PVC em formato de “joelho” 90° (32 mm de diâmetro).
- Tampão de PVC (32 mm de diâmetro).
- Mola helicoidal (mola de caderno) com 30 cm de comprimento em compressão (30 mm de diâmetro externo).
- Régua de madeira com 100 cm de comprimento.
- Grampo sargento de ferro.
- Cinco unidades de abraçadeiras de nylon.
- Massa A: Cadeado de 41 gramas.
- Massa B: Chumbo de arremesso de 12 gramas.
- Massa C: Chumbo de arremesso de 33 gramas.
- Massa D: Chumbo de arremesso de 38 gramas.

Figura 36 – Instrumento: Sistema Massa-Mola



Fonte: Elaboração própria (2025)

Com estes materiais foi possível construir o artefato a partir desta sequência:

- 1º. Fixe o grampo sargento de ferro na superfície plana.
- 2º. Fixe o cano de PVC de 80 cm no grampo sargento de ferro.
- 3º. Encaixe o cano de PVC em formato de “joelho” no cano de PVC de 80 cm.
- 4º. Encaixe o cano de PVC de 30 cm no cano de PVC em formato de “joelho”.
- 5º. Coloque o tampão de PVC no cano de PVC de 30 cm.
- 6º. Utilize duas abraçadeiras de nylon para pendurar a régua de madeira no cano de PVC de 30 cm. Vale observar que nesta etapa é preciso fazer dois furos na extremidade da régua para possibilitar a passagem das abraçadeiras.

- 7º. Utilize uma abraçadeira de nylon para pendurar a mola helicoidal no cano de PVC de 30 cm (próximo a régua).
- 8º. Utilize as duas abraçadeiras de nylon restantes para criar a argola que fixa as diferentes massas do sistema.
- 9º. Coloque uma das massas disponíveis na argola criada na etapa anterior.

Vale notar ainda que, para uma aplicação mais efetiva deste produto por parte do docente, recomenda-se a construção física do instrumento. Entretanto, estão disponibilizados, na plataforma Vimeo, vídeos do artefato sendo utilizado para cada uma das massas (A, B, C e D) apresentadas anteriormente. Seguem os links de acesso:

- Massa A: <https://vimeo.com/1164099837?share=copy&fl=sv&fe=ci>
- Massa B: <https://vimeo.com/1164103356?share=copy>
- Massa C: <https://vimeo.com/1164103383?share=copy&fl=sv&fe=ci>
- Massa D: <https://vimeo.com/1164103411?share=copy&fl=sv&fe=ci>

8.3 A APLICAÇÃO DO INSTRUMENTO

A partir do momento em que o sistema massa-mola está construído, podemos extrair informações com base em sua visualização, realizar cálculos a partir dos dados coletados e, evidentemente, projetar conclusões. No caderno pedagógico está disponibilizada uma lista de atividades provenientes da visualização do instrumento na prática, cuja linha de raciocínio da resolução é semelhante às informações apresentadas a seguir.

8.3.1 A coleta de dados

As informações apresentadas neste tópico estão associadas com o primeiro vídeo disponibilizado na plataforma Vimeo, no qual é utilizado a massa A na execução do sistema.

Analisando a barra de reprodução do vídeo podemos extrair o $t_0 = 3,4s$, em que a mola está mais deslocada representando o seu valor máximo, e

também o $t_1 = 4,0s$, que se associa com o valor mínimo inicial do sistema. Será utilizado este recorte

$$t_1 - t_0 = 4,0s - 3,4s = 0,6s,$$

para determinar não apenas o período do sistema, mas também todas as outras informações aqui descritas. O motivo desta escolha está vinculado ao fato de que a intensidade das oscilações diminui com o passar do tempo em virtude da aceleração negativa existente. Sendo assim, para fazer com que não exista mudança de amplitude aparente será necessário utilizar o trecho do vídeo em que o sistema possui velocidade máxima, ou muito próxima disso.

Então, temos o período da função:

$$T = 2(t_1 - t_0) = 1,2s.$$

A amplitude pode ser determinada visualizando os valores marcados na régua para os tempos t_0 e t_1 . Obtendo assim, $x_{max} = 82,5 \text{ cm}$ e $x_{min} = 75,5 \text{ cm}$. Do ponto de vista matemático, podemos escrever $x_{max} = 3,5 \text{ cm}$, assim como $x_{min} = -3,5 \text{ cm}$, pois a posição de equilíbrio da massa é 79 cm . Desta maneira, a amplitude:

$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = 3,5 \text{ cm}.$$

8.3.2 Os cálculos que sucedem a coleta

Como já visto anteriormente, podemos escrever o movimento periódico do sistema por meio da equação:

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

Sabendo o valor do período T , torna-se possível encontrar a frequência angular ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \cong 5,24 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Além disso, vale observar que a e b são constantes, as quais podem ser encontradas pelas expressões $a = A\sin(\varphi)$ e $b = A\cos(\varphi)$, nas quais φ também é constante. Aplicando a substituição em $x(t)$:

$$x(t) = A\sin(\varphi)\cos(\omega t) + A\cos(\varphi)\sin(\omega t).$$

Considerando que já foi determinado os valores da amplitude $A = 3,5 \text{ cm}$ e da frequência angular $\omega \cong 5,24 \text{ rad/s}$, basta encontrar o valor de φ aplicando o tempo $t = 0$, na equação:

$$x(0) = 3,5\text{sen}(\varphi)\text{cos}(0) + 3,5\text{cos}(\varphi)\text{sen}(0).$$

Note que $\text{sen}(0) = 0$, $\text{cos}(0) = 1$ e $x(0) = 3,5 \text{ cm}$. Portanto,

$$3,5 = x(0) = 3,5\text{sen}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Encontradas todas as constantes, podemos escrever a equação $x(t)$.

$$x(t) = 3,5\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{cos}(5,24t) + 3,5\text{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}(5,24t).$$

Ainda é necessário observar que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, simplificando a expressão de modo que a função trigonométrica que representa este movimento é:

$$x(t) = 3,5\text{cos}(5,24t).$$

8.3.3 Das discussões posteriores

Após descoberta a expressão $x(t)$, é plausível discutir com os alunos sobre a sua funcionalidade. Com base no intervalo de 0,6 segundos estabelecido na coleta de dados, torna-se conveniente verificar quão precisa é a equação, efetuando os devidos cálculos para valores de t tanto menores, quanto maiores que o intervalo utilizado. O intuito desta ação é verificar a margem de erro de cada um dos casos. Para fazer isso, iremos comparar dois valores distintos:

Para $t = 0,5\text{s}$ (este valor está associado ao segundo 3,9 do vídeo),

$$x(0,5) = 3,5\text{cos}(2,62) = -3,03 \text{ cm}.$$

Neste mesmo instante, a medição apresentada na régua é de 75,9 cm, o que equivale a $x(0,5) = -3,1 \text{ cm}$, ($3,1 = 79 - 75,9$). Notoriamente, esta aproximação é muito coerente e a margem de erro está atrelada tanto a aproximação da frequência angular, como na dificuldade de medir os milímetros da régua com maior precisão.

Agora vamos analisar para $t = 1s$ (este valor corresponde ao segundo 4,4 do vídeo),

$$x(1) = 3,5\cos(5,24) = 1,76 \text{ cm.}$$

A partir deste momento, já podemos ver uma diferença mais significativa entre o resultado da equação com a medição apresentada no vídeo, pois neste momento marca-se 80,9 cm na régua, o que seria equivalente à: $x(1) = 1,9 \text{ cm}$. Esta margem de erro próxima aos 8% é fruto especialmente da perda de velocidade do sistema.

Vale realçar ainda que o professor pode utilizar o instrumento visando uma interdisciplinaridade mais profunda com a área da física explorando pontos como: constante elástica da mola e aceleração do sistema, por meio das seguintes expressões:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ e } a = -\omega^2x.$$

Demais discussões relevantes estão orientadas no caderno pedagógico.

9 CONCLUSÃO

A partir do exposto, é possível concluir que as funções trigonométricas estabelecem uma relação direta com o MHS, sendo que, no caso do sistema massa-mola, essa relação é descrita matematicamente pela seguinte equação: $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$. Tal conexão não se restringe ao plano teórico, uma vez que a aplicação do instrumento construído permite a coleta de dados concretos, os quais possibilitam a descrição das funções trigonométricas com o auxílio da equação acima. Dessa forma, o artefato se mostra um recurso eficaz contribuindo para a redução do grau de abstração desse conteúdo.

No decorrer deste documento observou-se que as funções trigonométricas são resultado de um longo processo histórico da construção do conhecimento matemático, em especial no estudo de triângulos. Esse modelo conceitual surgiu de forma gradual, sendo elaborado ao longo dos séculos, à medida que diferentes civilizações como os gregos, indianos e árabes sistematizaram relações entre ângulos e cordas. Nesse contexto, as funções seno e cosseno assumem um papel central, já que a partir delas originou-se outras relações e aplicações.

Nota-se também que a formalização das funções trigonométricas pode ocorrer por diferentes abordagens conceituais, como a definição por razões entre segmentos ou por meio de construções mais analíticas, envolvendo o uso de integrais e séries. Essas diferentes definições não são excludentes, mas se complementam, uma vez que cada uma atende a objetivos distintos. A primeira favorece a compreensão intuitiva; a segunda possibilita maior integração com as áreas de cálculo e análise matemática; enquanto a terceira se desprende da geometria e utiliza a análise complexa.

Tratando-se dos livros didáticos de matemática analisados, embora eles apresentassem uma contextualização inicial das funções trigonométricas, ainda é possível verificar uma lacuna no que diz respeito a sugestão de experimentos físicos que favoreçam o entendimento desses conteúdos, como o sistema massa-mola. Um aspecto positivo é a abordagem consistente das funções seno e cosseno, amplamente discutidas em seus conceitos e visualização gráfica.

Porém, a função tangente não é discutida com igual profundidade, tendo a sua representação gráfica exposta em apenas um dos cinco livros apresentados.

Outro ponto discutido foi a dificuldade dos estudantes na compreensão das funções trigonométricas. Ela está diretamente ligada com a forma que a trigonometria é frequentemente abordada no contexto escolar, descontextualizada e distante de aplicações significativas. As práticas pedagógicas centradas na memorização de fórmulas é outro fator limitador, considerando que diferentes representações deste modelo de funções tendem a ser mais complexos para a interpretação. Desta maneira, evidencia-se a necessidade de abordagens didáticas que promovam a contextualização.

O uso do instrumento físico desenvolvido para a representação do sistema massa-mola é um recurso pedagógico potencialmente relevante para o processo de aprendizagem. Considerando que permite os alunos investigarem de maneira mais concreta os elementos ali presentes, como as constantes presentes na equação e compreender seus significados. A socialização que o artefato oportuniza tende a criar discussões entre os estudantes que favoreçam o aprendizado na prática. Além disso, o instrumento apresenta um potencial interdisciplinar, em especial com o campo da física, sendo possível abordar conceitos como constante elástica e aceleração. Entretanto, este aspecto não foi completamente explorado indicando que ainda é possível aprimorar a lista de atividades apresentada no caderno pedagógico.

Por fim, cabe destacar que esta pesquisa representou uma contribuição significativa para a minha formação enquanto professor, na medida em que possibilitou uma compreensão mais aprofundada das funções trigonométricas a partir de diferentes formalizações, além de que a associação com o MHS revelou uma maneira enriquecedora de trabalhar esses conceitos em sala de aula. A análise dos livros didáticos, por sua vez, foi de grande importância para identificar qual obra se aproxima mais da minha abordagem de ensino, oferecendo escolhas pedagógicas mais alinhadas aos objetivos de aprendizagem. Como perspectiva futura, reconhece-se que o produto educacional desenvolvido ainda não passou pela etapa de aplicação em sala de aula, dado o prazo inerente à produção deste documento, o que aponta para a possibilidade de aprimoramentos à medida que o instrumento for incorporado à

prática. Assim, espera-se que este trabalho sirva para o contínuo desenvolvimento de práticas pedagógicas mais significativas no ensino das funções trigonométricas.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: trigonometria, fenômenos periódicos e programação**. São Paulo: Editora Scipione, 2020.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação - uma introdução á teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora LDA, 1994.
- BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática: geometria e trigonometria – ensino médio**. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 504 f., 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/bncc>.
- BRUMMELEN, Glen Van. **The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry**. New Jersey: Princeton University, 2009.
- CARSLAW, Horatio Scott. **Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals**. London: Macmillan, 1921.
- ÇETIN, Omer Faruk. Students' perceptions and development of conceptual understanding regarding trigonometry and trigonometric function. **Educational Research and Reviews**, v. 10, n. 3, p. 338–350, 2015. DOI: 10.5897/ERR2014.2017.
- CONSCIÊNCIA, M.; OLIVEIRA, H. **Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo**. In: ATAS DO XXII SIEM: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DE MATEMÁTICA. São Paulo: APM, 2011.
- COURANT, Richard; JOHN, Fritz. **Introduction to Calculus and Analysis**. Vol. 1. 1. ed. New York: Interscience Publishers, 1965.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E MATEMÁTICA UMA VISÃO HISTÓRICO-PEDAGÓGICA**. Revista História da Matemática para Professores, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 41–64, 2021. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67>.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares**. São Paulo: Editora Ática, 2020.

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. **Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria**. In: Congresso Nacional de Educação-EDUCERE, 10., 2011, Curitiba. Anais[...] Curitiba: PUCPR, 2011.

Duval, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais**. São Paulo, SP: Livraria da Física. 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Unicamp, 843 f., 2011.

FLICK, U. **Introdução à Metodologia de Pesquisa: Um guia para iniciantes**. Tradução: Magda Lopes. Porto Alegre: Penso, 2012.

FOURIER, Joseph. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Firmin Didot, 1822.

FUNKE, J. **Computer-based testing and training with scenarios from complex problem-solving research: advantages and disadvantages**. International Journal of Selection and Assessment, v. 6, n. 2, p. 90–96, 1998.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

GERHARDT, E. E.; SILVEIRA, D. T. **Método de pesquisa**. 1. Ed. – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. Ed. São Paulo: Atlas, 2008.

Heath, T. L. **A History of Greek Mathematics**. v. 2. New York: Dover Publications, Inc., 1981.

ILYAS, Marufi; ILYAS, Muhammad; IKRAM, Muhammad; ROSIDAH; KAEWHANAM, Phimlikid. Exploration of high school students' reasoning in solving trigonometric function problems. **Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika**, v. 13, p. 231–249, 2022. DOI: 10.24042/ajpm.v13i2.12972.

KLING, M. **Mathematics in Western Culture**. Oxford University Press, New York, 1953.

LEONARDO, Fábio Martins. **Conexões: Matemática e suas tecnologias - Trigonometria**. São Paulo: Editora Moderna, 2020.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2023.

LOPES, R. R. **Explorando o movimento harmônico simples para o ensino das funções trigonométricas: Um olhar sobre o uso do GeoGebra no estudo das funções seno e cosseno**. 2023. 87 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, BA, 2018.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2002. v.2.

OLIVEIRA, E. S. S. **Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao GeoGebra**. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – Universidade Federal da Bahia, Salvador –Ba, 2020.

REIS, F.S. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: A visão de professores e autores de livros didáticos**. Zetetiké, São Paulo, 2001.

RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1976.

RYTTING, Matt; WRIGHT, Geoff; SHUMWAY, Steven; JENSEN, Jamie. **Comparison of simulation and hands-on labs in helping high school students learn physics concepts**. International Journal of Education, v. 11, n. 1, p. 18, 2019.

SPIVAK, Michael. **Calculus**. 1. ed. New York: Addison-Wesley, 1967.

SMITH, D.E. **History of Mathematics**. vol. 1, Dover Publications, INC. New York, 1958.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos, matemática: sequências e trigonometria**. São Paulo: Editora FTD, 2020.

THOMPSON, P. W. Conceptual analysis of mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. **Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Morélia, México: PME, 2008. v. 1, p. 45–64.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. IN: COXFORD, A. F., SHULTE, A. P. (Org). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.



JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS
TECNOLÓGICAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Viviane Maria Beuter, professora do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação intitulada: “**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DA CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA À EXPERIMENTAÇÃO**” de autoria do acadêmico Arthur Karnopp Brüske.

Joinville, 23 de abril de 2026.

Viviane Maria Beuter