Universidade Federal de Rondonópolis - UFR
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Do Triângulo de Pascal ao Binômio de Newton: possibilidades para o ensino da Álgebra na Educação Básica

Fernando Henrique de Saiber

Rondonópolis - Mato Grosso
Junho de 2026

Do Triângulo de Pascal ao Binômio de Newton: possibilidades para o ensino da Álgebra na Educação Básica

Fernando Henrique de Saiber

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFR como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Moreira Neto.

Rondonópolis - Mato Grosso
Junho de 2026

Do Triângulo de Pascal ao Binômio de Newton: possibilidades para o ensino da Álgebra na Educação Básica [†]

Fernando Henrique de Saiber

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFR como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 19 de junho de 2026.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alvaro Moreira Neto (Orientador)
UFR

Prof. Dr. Márcio Lemes de Souza
UFMT

Profª. Drª. Priscila Friedemann Cardoso
UFR

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte
Ficha Catalográfica elaborada de forma automática com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

S132t Saiber, Fernando Henrique de.
Do Triângulo de Pascal ao Binômio de Newton: possibilidades para o ensino da Álgebra na Educação Básica [recurso eletrônico] / Fernando Henrique de Saiber. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 83 f., il. color., pdf). – 2026.

Orientador(a): Prof. Dr. Alvaro Moreira Neto..
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Rondonópolis, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Rondonópolis, 2026.
Inclui bibliografia.

1. Triângulo de Pascal. 2. Binômio de Newton. 3. Produtos Notáveis. 4. Ensino de Álgebra. 5. BNCC. I. Neto., Prof. Dr. Alvaro Moreira, *orientador*. II. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS-UFR.

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA - PROPGP/UFR.

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT/UFR.

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Do Triângulo de Pascal ao Binômio de Newton: possibilidades para o ensino da Álgebra na Educação Básica.

AUTORA : MESTRANDO **FERNANDO HENRIQUE DE SAIBER** .

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, da Universidade Federal de Rondonópolis-UFR, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em 19 de Junho de 2026.

Seguem as assinaturas dos membros titulares da banca.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Prof. Dr. Álvaro Moreira Neto** (Presidente da Banca/Orientador);
2. **Profa. Dra. Priscila Friedemann Cardoso** (Membro interno titular/UFR);
3. **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa** (Membro externo titular, UFMT/Barra do Garças).

Rondonópolis-MT, **19/06/2026.**

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alvaro Moreira Neto**, **Docente - UFR**, em 19/06/2026, às 16:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Priscila Friedemann Cardoso**, **Docente - UFR**, em 19/06/2026, às 16:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Márcio registrado(a) civilmente como Márcio Lemes de Sousa**, **Usuário Externo**, em 23/06/2026, às 14:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufr.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0701911** e o código CRC **2FC723DD**.

Referência: Processo nº 23853.005471/2026-16 SEI nº 0701911

À minha família e, especialmente, à minha mãe, ausente em corpo, mas eternamente presente em alma.

Agradecimentos

Sou grato a todos que caminharam ao meu lado durante todo o período do mestrado, especialmente aos colegas de turma, Juliana, Rodrigo e Gustavo (in memoriam), que sempre se mostraram presentes e solícitos quando necessário.

Agradeço à minha família, em especial ao meu noivo, Thiago, que esteve comigo em todas as etapas desse processo, oferecendo apoio e incentivo constantes.

Agradeço a Deus pela sabedoria e pelo discernimento que me concedeu para alcançar esta etapa.

Registro também minha gratidão à CAPES pelo apoio financeiro, fundamental para a realização desta pesquisa, e ao meu orientador, pela disponibilidade constante, dedicação e valiosa orientação ao longo dessa trajetória.

"O Binômio de Newton é tão belo quanto Vênus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso.".

Fernando Pessoa

Resumo

Com o objetivo de inserir o Triângulo Aritmético no Ensino Fundamental — anos finais — e no Ensino Médio, este trabalho apresenta relações importantes do Triângulo de Pascal e possibilidades de sua utilização no ensino da Matemática na Educação Básica. A pesquisa, de natureza qualitativa e fundamentada em análise documental, examina aplicações do Triângulo Aritmético identificadas em trabalhos acadêmicos, livros pedagógicos e artigos científicos. Busca-se evidenciar como esse recurso pode constituir uma alternativa metodológica para a resolução de problemas, favorecendo a compreensão de conteúdos nos quais os estudantes apresentam dificuldades. A presente dissertação propõe o uso do Triângulo de Pascal como instrumento de apoio à compreensão da estrutura e do desenvolvimento dos produtos notáveis e do Binômio de Newton, em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Tal abordagem favorece a identificação de padrões e a generalização de expressões algébricas, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa. Fundamentado em autores de referência da Educação Matemática, o estudo culmina na apresentação de propriedades do Triângulo Aritmético e de aplicações voltadas ao ensino básico, como técnicas de contagem, combinatória e desenvolvimento do pensamento algébrico, integrando aspectos históricos e conceituais da Matemática e estimulando o raciocínio investigativo dos estudantes.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal; Binômio de Newton; Produtos Notáveis; Ensino de Álgebra; BNCC.

Abstract

With the objective of introducing the Arithmetic Triangle into Elementary Education — final years — and High School, this work presents important relationships involving Pascal's Triangle and ways in which it can be used in mathematics teaching in basic education. The research, qualitative in nature and based on documentary analysis, addresses applications of the Arithmetic Triangle identified in academic works, pedagogical books, and scientific articles. The intention is to show how this resource can constitute a new path or a complementary alternative for problem solving, favoring the understanding of contents in which students demonstrate difficulties. This dissertation proposes the use of Pascal's Triangle as an instrument to support the understanding of the structure and development of remarkable products and the Binomial Theorem, in alignment with the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC). This approach seeks to promote the identification of patterns and the generalization of algebraic expressions, contributing to more meaningful learning. Based on reference authors in Mathematics Education, the study culminates in the presentation of relationships existing in the Arithmetic Triangle and some applications in basic education, such as the teaching of combinatorial techniques and algebraic thinking, integrating historical and conceptual aspects of mathematics, while stimulating investigative reasoning and students' interest.
Keywords: Pascal's Triangle; Binomial Theorem; Notable Products; Algebra Teaching; BNCC.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$(a+b)^n$	Binômio de Newton
$\binom{n}{k}$	Coeficiente binomial
$\cap$	Operação de interseção entre conjuntos
$\cup$	Operação de união entre conjuntos
$\in$	Pertence a
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\notin$	Não pertence a
$\subseteq$	Subconjunto
$\sum$	Símbolo de somatório utilizado para representar soma de termos
F_n	n-ésimo termo da sequência de Fibonacci

Introdução

Ensinar produtos notáveis e binômio de Newton geralmente não é uma tarefa simples. Muitas vezes o conteúdo é abordado com o uso de geometria, usando equivalência entre áreas e volumes de sólidos, mas quando é trabalhado com uma dimensão maior que três o professor precisa recorrer a estratégias alternativas para facilitar a compreensão do conteúdo pelos alunos, tais como o uso de recursos numéricos e algébricos para que seja possível apresentar um novo caminho para o ensino, com isso torna-se uma forma de contribuir para a aprendizagem e auxiliar o docente a diversificar sua prática pedagógica. O estudo da álgebra nos últimos anos do Ensino Fundamental marca um período de transição entre o pensamento numérico e do algébrico, o que demanda do estudante a capacidade para entender padrões que não são numéricos, além de generalizações e abstrações e, no ensino médio, o aprofundamento dessas habilidades. Portanto, os conteúdos de álgebra, como o estudo dos produtos notáveis e o binômio de Newton geralmente apresentam desafios, pois são frequentemente ensinados de forma mecânica, desconectado de um contexto de aplicação prática e sem relevância para o estudante. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL 2018) destaca a relevância de promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico, bem como a capacidade de identificar padrões e realizar generalizações. Nesse contexto, torna-se pertinente refletir sobre a relação existente entre o Triângulo Aritmético, os produtos notáveis e o Binômio de Newton, bem como sobre as possíveis articulações desse recurso com as unidades temáticas, habilidades e competências previstas na Base Nacional Comum Curricular. Além disso, emerge a necessidade de considerar as razões pelas quais esse tema ainda aparece de forma pouco recorrente em livros didáticos. Tais reflexões orientam a presente investigação e constituem alguns dos aspectos que se busca discutir ao longo deste trabalho.

Nesse sentido, é fundamental sugerir metodologias que facilitem a visualização de padrões matemáticos e a compreensão conceitual do que está sendo trabalhado, já que a álgebra se torna mais compreensível quando é possível visualizar. Nessa perspectiva, o Triângulo de Pascal juntamente com o Binômio de Newton, com todo o seu valor histórico, oferece uma maneira estruturada e visual de compreender as relações entre os coeficientes de binômios, permitindo assim uma relação natural com o desenvolvimento dos produtos notáveis, a saber, o quadrado e o cubo da soma e da diferença, conceitos utilizados especificamente no 8º ano do Ensino Fundamental. Este trabalho apresenta uma sequência lógica que integra esses conceitos, contexto histórico, padrões e relações entre os temas com o intuito de tornar o ensino mais significativo e atrativo.

A proposta desta pesquisa consiste em contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, apresentando uma alternativa para a abordagem do tema, cuja compreensão já foi explorada e aperfeiçoada ao longo da história da Matemática. Nesse sentido, torna-se relevante refletir sobre as dificuldades apresentadas por estudantes do Ensino Fundamental na compreensão de problemas relacionados à álgebra, bem como sobre os obstáculos enfrentados, no Ensino Médio, na compreensão da estrutura binomial. Além disso, evidencia-se a necessidade de compreender por que essas abordagens ainda são pouco exploradas nos livros didáticos, embora constituindo uma possibilidade para o desenvolvimento de práticas investigativas no ensino de Matemática. Essas reflexões configuram a principal motivação que orienta a presente investigação.

Diante dessas considerações, temos a seguinte questão norteadora desta pesquisa: de que maneira o Triângulo de Pascal e sua relação com o Binômio de Newton podem contribuir para a compreensão da álgebra na Educação Básica?

A partir dessa problemática, esta pesquisa tem como objetivo geral investigar o Triângulo de Pascal e sua relação com o Binômio de Newton, relacionando o tema com as habilidades da BNCC para o ensino da Álgebra na Educação Básica. Como objetivos específicos, busca-se apresentar aspectos históricos relacionados ao Triângulo de Pascal; construir o triângulo de forma intuitiva a partir da Relação de Stifel; demonstrar algumas de suas principais propriedades; relacioná-lo aos conceitos de combinação simples e coeficientes binomiais; demonstrar o Teorema do Binômio de Newton; discutir aplicações matemáticas decorrentes dessas relações; analisar habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e indicar possibilidades metodológicas para o ensino da álgebra.

Quanto aos procedimentos metodológicos, trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, com abordagem bibliográfica e documental. Utilizou-se para sua elaboração, livros, artigos científicos, dissertações, teses e documentos oficiais que tratam do tema, especialmente materiais relacionados à História da Matemática, à Álgebra, à Combinatória e ao currículo da Educação Básica. O trabalho também possui caráter propositivo, ao apresentar a relação entre o tema com os eixos temáticos, os objetos do conhecimento e as habilidades da BNCC.

A relevância desta investigação justifica-se pela busca de caminhos que favoreçam uma aprendizagem mais significativa da Matemática, especialmente no campo algébrico. Ao valorizar sua construção histórica, pretende-se oferecer ao professor uma alternativa metodológica que ultrapasse a simples repetição de fórmulas, estimulando a compreensão, o raciocínio lógico e a autonomia do estudante.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo apresenta-se uma abordagem histórica acerca do Triângulo de Pascal, destacando contribuições de diferentes povos e matemáticos ao longo do tempo. No segundo capítulo discute-se a construção do triângulo e algumas de suas principais propriedades. No terceiro capítulo aborda-se o Binômio de Newton e sua relação direta com os elementos do Triângulo de Pascal. No quarto capítulo são analisadas aproximações com a BNCC e apresentadas a correlação das habilidades com o triângulo de pascal e o binômio de Newton para a Educação Básica. Por fim, temos as considerações finais da pesquisa.

Capítulo 1

Um pouco da história

1.1 A história do Triângulo de Pascal

Segundo Affonso (2014) os primeiros registros do Triangulo Aritmético se dão pelo matemático indiano Erudito Pingala (200 a.C.), em uma obra chamada "Chandra Sutra", o que se dá há dois mil anos antes de Pascal, ou seja, na Índia esse triângulo já era instrumento de análise antes da existência de Pascal.

Segundo Rosadas (2026), na Índia antiga, diversos ramos da Matemática foram objeto de estudo, destacando-se a Combinatória, cujas técnicas passaram relacionar-se com outras áreas do conhecimento. Nesse cenário, surgem os primeiros registros sistematizados de métodos combinatórios. Contudo, conforme já mencionado, é com o Erudito Pingala (c. 200 a.C.), em sua obra Chandra Sutra, que se identifica, pela primeira vez, o chamado Triângulo Aritmético, associado à descrição mais antiga conhecida de um sistema numérico binário. Pingala apresentou esse sistema ao analisar as métricas védicas, baseadas na combinação de sílabas longas e curtas. Suas reflexões acerca das possíveis combinações métricas estabelecem uma relação direta com o que atualmente se reconhece como o Teorema Binomial.

Ainda sobre a origem do Triângulo Aritmético, Affonso (2014) afirma que os antigos chineses já desenvolviam estudos relacionados a esse tema, destacando-se o matemático chines Yang Hui (1238-1298), que escreveu livros onde buscava compreender as propriedades do triângulo aritmético. Ainda na China há registros, segundo Rosadas (2026) , há registros de que a obra de Yang Hui também engloba estudos que relacionam a soma de séries com o Triângulo Aritmético. Esses estudos foram publicados pelo matemático Zhu Shijie (1260-1330) em seu livro "Precioso espelho dos quatro elementos", obra que marca o fim da época áurea da matemática chinesa e que também apresenta a figura do Triângulo.

No mundo islâmico também há registro de estudos do tema, porém com a utilização de livros indianos já existentes. Para Affonso (2014) o matemático islâmico mais renomado a dedicar-se ao estudo do Triângulo Aritmético foi Al-Samaw'al (1130–1180). Em seu tratado "A Deslumbrante Álgebra", o autor revisou, corrigiu e aperfeiçoou as contribuições de seus predecessores relativas ao Triângulo Aritmético e ao Binômio de Newton. Nessa obra utilizou o Triângulo Aritmético para conseguir o desenvolvimento de potências quádrica, cúbica e quártica de binômios.

Já na Europa, o matemático alemão Apianus (1495-1551) publicou em 1527 o livro intitulado *"Kauffmanns Rechnung"*, que se tratava de uma obra de aritmética comercial. Nesta obra, o Triângulo Aritmético aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas. Segundo Boyer (1974), é a primeira impressão do Triângulo Aritmético na Europa. Chega-se, então, a Tartaglia, matemático italiano responsável pela obra *"General Tratato di numeri et misure"* de 1556, onde desenvolveu grandes contribuições para o desenvolvimento do Triângulo Aritmético. Tartaglia com toda a sua contribuição para o estudo reivindicou para si o nome Triângulo de Tartaglia. Como consequência, alguns países europeus conhecem o Triângulo Aritmético como "Triângulo de Tartaglia". Apesar de Tartaglia ter recebido o nome pelo estudo do Triângulo Aritmético, foi o matemático Michel Stifel (1487-1567), que estudou algumas das propriedades do triângulo e as discutiu em sua obra "Arithmetica Integra", de 1544. Sendo o primeiro matemático que divulgou o Triângulo Aritmético na Europa. (AFFONSO 2014)

Destaca-se que que, ao longo da história o Triângulo Aritmético ficou conhecido por vários designativos, segundo Rosadas (2026). Na China, o denominavam de Yang Hui, na Itália recebia o título de triângulo de Tartaglia e em outras regiões de Tartaglia-Pascal e de Triângulo Combinatório.

Com base em todo o contexto histórico explorado até aqui, falta mencionar o matemático Blaise Pascal, matemático francês cuja contribuição para a matemática e física não se limitaram somente ao estudo do triângulo aritmético. Nascido em 19 de junho de 1623, Pascal realizou grandes feitos para a matemática. Em 1647 quando se dedicou aos estudos da aritmética desenvolveu o cálculo da probabilidade e o Triângulo Aritmético entre outras coisas. Pascal morreu em 19 de agosto de 1662, mas antes dedicou-se intensa e profundamente a conhecer o Triângulo Aritmético e suas propriedades. Sua dedicação resultou na obra *"Traité di Triangle Arithmétique"*, publicada postumamente em 1665 (AFFONSO 2014).

Com toda sua contribuição acerca do estudo aritmético do triângulo, o matemático francês ficou conhecido por sua obra onde denominavam de Triângulo de Pascal, uma homenagem justa, ao homem que aplicou tempo e dedicação para conhecer e apresentar as propriedades desse triângulo Rosadas (2026). Agora aprofundaremos sobre as contribuições de Pascal para o estudo do triângulo aritmético e a razão pela qual esse triângulo leva seu nome.

Para Boyer (1974) o triângulo recebe esse nome graças ao matemático, físico, filósofo e escritor francês Blaise Pascal (1623-1662) na qual apresentou aplicações matemáticas do Triangulo Aritmético, ou seja, Pascal foi o matemático que escreveu sobre o Triângulo Aritmético e todas as suas propriedades. Segundo Rosadas (2026) Pascal começou a dedicar seus estudos a aritmética a partir de 1647 e escreveu sobre cálculos de probabilidade, a fórmula de geometria do acaso, o conhecido Triângulo de Pascal e o tratado sobre as potências numéricas. Mas, ainda segundo Rosadas (2026), Pascal passou por um hiato nos estudos relacionados a aritmética, e nesse período passou por problemas familiares e uma dedicação a militância religiosa após um acidente de carruagem em 1654, o que o levou a escrever sobre Filosofia e Teologia. Segundo Affonso (2014) Pascal é conhecido por sua grande contribuição para a matemática, não só pelos estudos envolvendo o triângulo aritmético, mas também pelos estudos sobre cônicas, o ciclóide e seu pioneirismo nos estudos de probabilidade. Suas contribuições também estão na Física, em que escreveu sobre a mecânica dos fluidos. Os estudos de Pascal envolvendo o triângulo aritmético vieram a público após a sua morte em 1662, com o trabalho intitulado "Traité di Triangle Arithmétique"onde Pascal investigou a fundo várias propriedades o triângulo.

Figura 1.1: Obra de Pascal

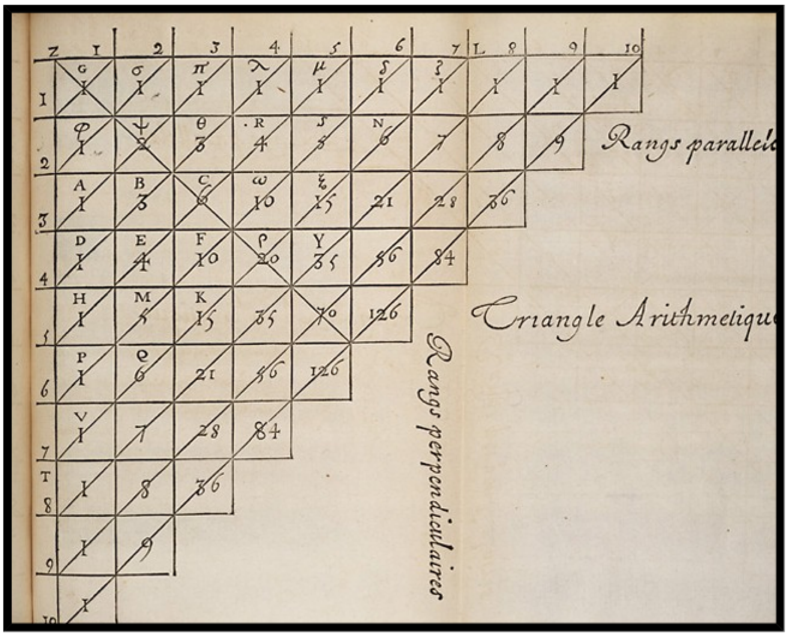
Fonte: (AFFONSO 2014).

O livro póstumo de Pascal foi publicado em 1665, Affonso (2014) . Na obra de Pascal, temos a seguinte descrição de como construir o Triângulo Aritmético.

> "Chamo Triângulo Aritmético uma figura que se constrói da seguinte maneira. De um ponto G, qualquer, desenho duas retas GV e G, uma perpendicular a outra, e, sobre cada uma dessas, tomo tantas partes próximas iguais que se quiser, começando em G, nomeando-as 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente; esses números são os expoentes das divisões da reta."(AFFONSO 2014 p.22)

Sendo o desenvolvimento descrito como a figura abaixo.

Figura 1.2: Triângulo Aritmético de Pascal



Fonte: (AFFONSO 2014).

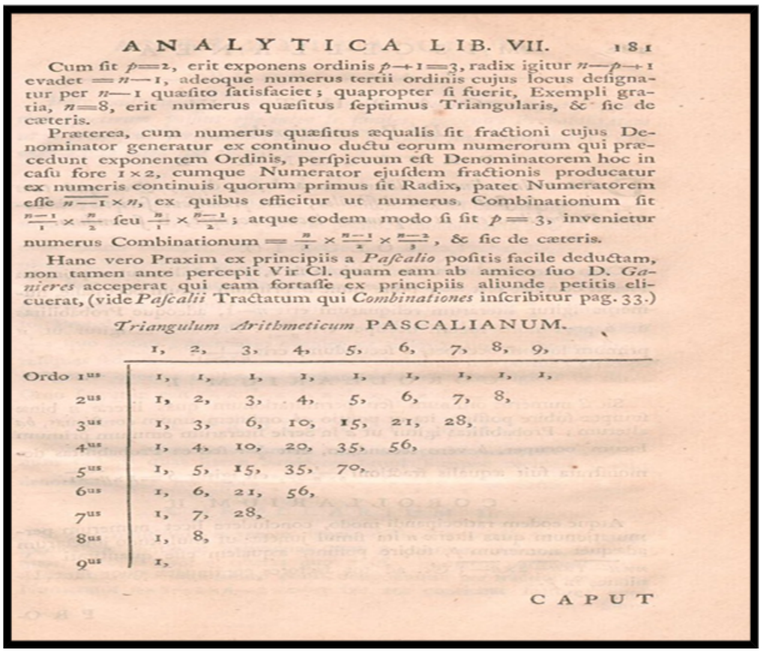
A construção do triângulo realiza-se por meio da disposição de cada número em uma célula, seguindo uma regra geral previamente estabelecida. Para isso, é suficiente a escolha de um número inicial, ou número gerador, que no caso do Triângulo Aritmético é o número 1.

> O número de cada célula é igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular, mais a célula que a precede na sua posição paralela. Portanto, a célula F é obtido pela soma da célula C mais a célula E, e assim sucessivamente (AFFONSO, 2014 p.23).

Após enunciar a construção do Triângulo Pascal demonstra as propriedades que conhecemos hoje e, Segundo Affonso (2014) Pascal apresenta as aplicações dessas propriedades nos títulos *"Às ordens numéricas"*, *"As combinações"*, *"Para determinar as partes que cada jogador deve receber quando dois jogadores fazem várias partidas"* e *"Para achar as potências de binômios e de apótomos (diferença entre duas razões incomensuráveis)"*.

O reconhecimento do nome Triângulo de Pascal vem em 1730 com o matemático Abrahan de Moivre (1667-1754) que, em sua obra "Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis (1730)", usou a titulação *"Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM"* para dar referência ao Triângulo Aritmético. A partir da obra de Abrahan, o Triângulo Aritmético fica conhecido como "Triângulo de Pascal", denominação que utilizaremos ao longo desse trabalho como sinônimo de Triângulo Aritmético.

Figura 1.3: Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM



ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum ſit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus deſignatur per $n-1$ quæſito ſatisfaciet; quapropter ſi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæſitus ſeptimus Triangularis, & ſic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæſitus æqualis ſit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perſpicuum eſt Denominatorem hoc in caſu fore 1×2, cumque Numerator ejuſdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus ſit Radix, patet Numeratorem eſſe $\overline{n-1} \times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum ſit $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ ſeu $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; atque eodem modo ſi ſit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, & ſic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Paſcalio* poſitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico ſuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaſſe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Paſcalii* Tractatum qui *Combinationes* inſcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1us	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2us	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3us	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4us	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5us	1,	5,	15,	35,	70,				
6us	1,	6,	21,	56,					
7us	1,	7,	28,						
8us	1,	8,							
9us	1,								

CAPUT

Fonte: (AFFONSO 2014).

Pascal nunca teve uma ótima saúde, adoecendo em 1659 e seu falecimento ocorreu em 19 de agosto de 1662, dois meses após completar 39 anos.

Capítulo 2

As combinações e o Triângulo de Pascal

2.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada uma abordagem acerca da construção do Triângulo de Pascal de forma intuitiva. Inicialmente, será exposta a relação de Stifel, que constitui a regra fundamental para a construção do triângulo, com o objetivo de possibilitar ao leitor uma compreensão clara do processo de formação de seus elementos. Em seguida, será introduzida a ideia de combinação, juntamente com sua fundamentação teórica no contexto da Análise Combinatória. A partir dessa noção, no capítulo 3 serão apresentados e demonstrados os coeficientes binomiais, bem como a construção do Binômio de Newton e a relação existente entre seus coeficientes e os elementos do Triângulo de Pascal.

2.2 O Triângulo de Pascal e sua construção intuitiva

Segundo Santos (2017), a construção do Triângulo de Pascal pode ser realizada em quatro etapas, apresentadas de forma intuitiva e de fácil compreensão, utilizando como base a relação de Stifel. (os passos descritos são ilustrados na figura 2.1)

Passo 1: Comece escrevendo o número 1. (linha zero)

Passo 2: Na linha 1 coloque mais dois algarismos 1.

Passo 3: Cada linha abaixo deverá conter um número a mais que a linha anterior, lembrando que os números das extremidades, deverão ser obrigatoriamente 1.

Passo 4: Para saber qual número escrever, some os dois números da esquerda para direita, da linha de cima e o resultado é escrito imediatamente na linha de baixo. Por exemplo, o número central na terceira linha do Triângulo de Pascal é 2 pois $1 + 1 = 2$, os números centrais da linha são 3 uma vez que $1 + 2 = 3$, e 3 porque $2 + 1 = 3$. E assim sucessivamente. Como apresentado na Figura (2.1). No Triângulo de Pascal podemos perceber vários padrões interessantes ao longo de sua construção.

Figura 2.1: Triângulo de Pascal

linha 0	1										
linha 1	1	1									
linha 2	1	2	1								
linha 3	1	3	3	1							
linha 4	1	4	6	4	1						
linha 5	1	5	10	10	5	1					
linha 6	1	6	15	20	15	6	1				
linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
linha 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
linha 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
linha 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Fonte: (SANTOS 2017).

Com o intuito de apresentar quatro resultados relacionados à construção do Triângulo Aritmético, Santos (2017) destaca quatro propriedades fundamentais desse triângulo: a) a relação de Stifel; b) o teorema das linhas; c) o teorema das colunas; e d) o teorema das diagonais. Na próxima seção, abordaremos a ideia intuitiva e a demonstração da relação de Stifel. As demonstrações dos teoremas mencionados nos itens b, c e d serão desenvolvidas em uma seção específica.

2.3 A ideia de combinação e a construção do triangulo de Pascal

Para compreender a Relação de Stifel, é necessário retomar os conceitos de combinatória, pois os termos que aparecem nessa relação são expressos justamente por meio dessas noções.

Neste trabalho não retomaremos os conceitos de arranjos e permutações, uma vez que, no presente contexto, não há necessidade de os apresentar. Assim, o foco desta seção será direcionado exclusivamente à ideia de combinação.

Em seu trabalho, Pinto (2014) apresenta um exemplo simples para compreender o conceito de combinação. Considere o conjunto formado por alguns dos principais times cariocas, T={Flamengo, Vasco, Botafogo, Fluminense}. Ao analisar os subconjuntos formados por dois elementos desse conjunto, obtêm-se as combinações {Flamengo, Vasco}, {Flamengo, Botafogo}, {Flamengo, Fluminense}, {Vasco, Botafogo}, {Vasco, Fluminense} e {Botafogo, Fluminense}, totalizando seis subconjuntos. Perceba que o subconjunto {Vasco, Fluminense} e {Fluminense, Vasco} é o mesmo, pois a ordem em que os times aparecem não importa, logo, temos 3 subconjuntos de T.

Nesse contexto, nas combinações, a ordem dos elementos não interfere na formação dos subconjuntos. Assim, a análise é realizada considerando conjuntos e subconjuntos de elementos. Embora a contagem direta das combinações seja simples quando o conjunto possui poucos elementos, esse procedimento torna-se impraticável à medida que o número de elementos cresce, o que motiva a formulação de um caso geral para o cálculo dessas combinações.

Do ponto de vista combinatório, uma *combinação* corresponde à escolha de elementos de um conjunto, sem que a ordem em que esses elementos são selecionados seja relevante. Em outras palavras, nas combinações duas seleções que possuem os mesmos elementos, ainda que em ordens distintas, são consideradas iguais.

Definição 2.3.1. *Seja A um conjunto com n elementos distintos. O número de maneiras de escolher p elementos desse conjunto, com $0 \leq p \leq n$, é denotado por*

$$C(n,p) = \binom{n}{p}, \quad \text{em que} \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{2.1}$$

A expressão $\binom{n}{p}$ deve ser lida como "n escolhe p" e indica, portanto, a quantidade de subconjuntos com p elementos que podem ser formados a partir de um conjunto com n elementos. $n!$ representa o fatorial de n, definido por $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$, com a convenção $0! = 1$.

Vale ressaltar aqui, que $0 \leq p \leq n$ pois se $p > n$ teremos $n - p < 0$ e para um número negativo não se define fatorial, então convencionamos que se $p > n$ e $p < 0$ então $\binom{n}{p} = 0$

Uma propriedade imediata da Definição (2.3.1) é a simetria, que afirma que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \tag{2.2}$$

Do ponto de vista interpretativo, escolher p elementos para compor um subconjunto equivale a escolher $n-p$ elementos para permanecer fora dele. Chamamos essa propriedade de "combinação complementar", técnica essa utilizada para simplificar cálculos ao focar no número de elementos excluídos em vez dos incluídos, conforme (FERNANDES 2021).

2.4 Relação de Stifel e sua interpretação no triângulo

De acordo com Rosadas (2016), a relação de Stifel mostra que a soma de dois números consecutivos do Triângulo de Pascal é igual ao elemento abaixo do segundo termo. Essa relação posicional vale quando o triângulo é apresentado como um triângulo retângulo.

A seguir apresentamos o Triângulo de Pascal disposto na forma de triângulo retângulo:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & \cdots & \binom{n}{p} & \cdots & 1
\end{array}
$$

Observe que cada elemento do Triângulo de Pascal corresponde ao número de combinações de n elementos tomados p a p em que n é o número da linha e p indica a coluna, seno a primeira linha linha e primeira coluna indicadas por 0. Assim, o valor presente em cada posição do triângulo é determinado pela linha n em que o elemento se encontra e pela sua posição p dentro dessa linha, sendo representado por.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Por exemplo, analisando o triângulo com a disposição em números, observe que o número 6 é obtido pela soma dos dois números imediatamente acima dele,

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & \boxed{3} & \boxed{3} & 1 & & \\
1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

$$3 + 3 = 6,$$

e que qualquer número do triângulo segue a mesma regra. No Triângulo de Pascal, cada elemento interno é obtido pela soma de dois elementos consecutivos da linha anterior. Essa propriedade é conhecida como relação de Stifel e pode ser representada por

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{2.3}$$

Observe que cada termo da igualdade representa uma quantidade de combinações. Assim, a relação estabelece uma conexão entre o número de combinações de um conjunto com n elementos e o número de combinações de um conjunto com $n + 1$ elementos, a seguir apresentaremos um exemplo que comprova a veracidade de (2.3)

Exemplo: Considere o conjunto

$$A = \{a, b, c, d, e\},$$

com 5 elementos. Desejamos determinar a quantidade de subconjuntos de A com 3 elementos. Por definição, isso é combinação de 5 elementos tomados 3 a 3 $\binom{5}{3}$

Por outro laro pela relação de Stifel (2.3), temos:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}.$$

Para compreender essa relação do ponto de vista da teoria de conjuntos, fixemos o elemento $e \in A$. Assim, podemos dividir os subconjuntos de 3 elementos em dois casos:

- subconjuntos que contêm o elemento e;
- subconjuntos que não contêm o elemento e.

No primeiro caso, como o elemento e já pertence ao subconjunto, resta escolher mais 2 elementos dentre os outros 4 elementos do conjunto

$$\{a, b, c, d\}.$$

Logo, a quantidade desses subconjuntos é dada por

$$\binom{4}{2} = 6.$$

No segundo caso, o elemento e não pertence ao subconjunto. Assim, devemos escolher os 3 elementos apenas dentre os 4 elementos restantes:

$$\{a, b, c, d\}.$$

Portanto, a quantidade desses subconjuntos é

$$\binom{4}{3} = 4.$$

Somando os dois casos, obtemos:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3} = 6 + 4 = 10.$$

Dessa forma, existem 10 subconjuntos com 3 elementos em um conjunto com 5 elementos, ilustrando numericamente a relação de Stifel.

Desse modo, compreender o significado combinatório é fundamental para interpretar adequadamente os termos envolvidos na demonstração da Relação de Stifel.

Teorema 2.4.1. *Seja p um número inteiro com, $0 \leq p \leq n-1$, então vale a Relação de Stifel:*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{2.4}$$

Demonstração:

Considere um conjunto A com n elementos. Desejamos contar quantos subconjuntos de A possuem exatamente p elementos. Sabemos que essa quantidade é dada por

$$\binom{n}{p}.$$

Fixemos um elemento $a \in A$. A partir desse elemento, podemos dividir todos os subconjuntos de A com p elementos em dois casos distintos.

No primeiro caso, consideramos os subconjuntos de A com p elementos que contêm o elemento a. Como a já está escolhido, precisamos selecionar os outros $p-1$ elementos dentre os $n-1$ elementos restantes de A. Portanto, a quantidade de subconjuntos desse tipo é

$$\binom{n-1}{p-1}.$$

No segundo caso, consideramos os subconjuntos de A com p elementos que não contêm o elemento a. Nesse caso, todos os p elementos devem ser escolhidos dentre os $n-1$ elementos restantes de A. Assim, a quantidade de subconjuntos desse tipo é

$$\binom{n-1}{p}.$$

Como todo subconjunto de A com p elementos ou contém a, ou não contém a, e esses dois casos são disjuntos, a quantidade total de subconjuntos com p elementos é a soma das quantidades obtidas em cada caso. Logo,

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}. \tag{2.5}$$

Portanto, a relação de Stifel está demonstrada por meio da contagem de subconjuntos. Perceba que (2.4) e (2.5) correspondem à mesma equação, só que considerando uma quantidade diferente de elementos pertencentes ao conjunto.

Podemos ainda recorrer a demonstração utilizando a álgebra.

Demonstração 2:

Pela definição de combinação, temos:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!},\end{aligned}$$

colocando os termos sob o mesmo denominador. Note que

$$(p+1)! = (p+1)p! \quad \text{e} \quad (n-p)! = (n-p)(n-p-1)!,$$

assim, escrevemos:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{p!(n-p)!} &= \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)(n-p-1)!},\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!\big[(p+1)+(n-p)\big]}{(p+1)!(n-p)(n-p-1)!},\end{aligned}$$

simplificando o numerador:

$$(p+1) + (n-p) = n+1,$$

logo,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)(n-p-1)!},$$

observando que $(n+1)! = (n+1)n!$ e $(n-p)(n-p-1)! = (n-p)!$, obtem-se:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}\\ &= \binom{n+1}{p+1},\end{aligned}$$

conclui-se, portanto, que

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1},$$

o que demonstra a Relação de Stifel (2.4). $\square$

2.5 Axiomas de Peano e a Indução Matemática

Aqui falaremos sobre a indução matemática, usando como referência (FOMIN, 2012), para compreender o princípio e utilzá-lo nas demonstrações dos teoremas relacionados ao triângulo de Pascal.

O Princípio da Indução Matemática constitui um dos fundamentos lógicos da aritmética e da teoria dos números, sendo amplamente utilizado na demonstração de proposições envolvendo números naturais. Embora frequentemente apresentado como uma técnica de demonstração, trata-se, em sentido mais profundo, de um princípio estrutural que decorre da própria construção axiomática do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Sua importância reside na possibilidade de estabelecer a validade de uma afirmação para uma quantidade infinita de casos por meio de um procedimento finito e rigorosamente estruturado.

Historicamente, segundo Souza (2023), a formalização rigorosa dos números naturais foi realizada no final do século XIX por Giuseppe Peano, como parte de seu sistema axiomático para a teoria dos números naturais. Esses axiomas, hoje conhecidos como *Axiomas de Peano*, estabelecem a existência de um número inicial, a noção de sucessor e propriedades fundamentais que garantem a estrutura ordenada e infinita de $\mathbb{N}$.

Como consequência desses axiomas, temos o chamado *princípio da indução*, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

> Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ contém o elemento inicial e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então $A = \mathbb{N}$.

Essa formulação estrutural equivale, em linguagem proposicional, ao conhecido Princípio da Indução Matemática:

Teorema 2.5.1. *Seja $P(n)$ uma proposição definida em $n \in \mathbb{N}$. Se:*

1. *$P(1)$ é verdadeira;*

2. *para todo $n \in \mathbb{N}$, a veracidade de $P(n)$ implica a veracidade de $P(n+1)$,*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Do ponto de vista pedagógico, a compreensão desse princípio torna-se mais acessível quando se recorre a analogias intuitivas, como a conhecida imagem de uma sequência de dominós alinhados: ao assegurar que o primeiro cai e que cada peça derruba a seguinte, garante-se a queda de todas. Essa abordagem, segundo Fomin (2012), favorece a construção do significado antes da formalização simbólica do princípio.

Sob essa perspectiva, o passo base corresponde à verificação inicial — o "primeiro dominó" — enquanto o passo indutivo assegura a continuidade do processo. Tal encadeamento evidencia que a indução não é um argumento circular, mas sim um mecanismo lógico fundamentado na própria definição axiomática dos números naturais.

Além disso, a equivalência entre o princípio da indução e o princípio da boa ordenação — segundo o qual todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento — reforça seu caráter estrutural. A indução, portanto, não é apenas um método conveniente de demonstração, mas uma consequência direta da maneira como os números naturais são concebidos formalmente.

Na abordagem pedagógica presente em Fomin (2012), a indução é apresentada como uma estratégia de raciocínio progressivo, estimulando o estudante a identificar padrões, formular conjecturas e estruturar argumentos rigorosos. Esse tratamento didático evidencia que a clareza na definição da proposição $P(n)$ é uma etapa decisiva para o sucesso da demonstração.

Assim, compreender o Princípio da Indução Matemática à luz dos Axiomas de Peano permite articular intuição, história e rigor, oferecendo ao estudante uma visão integrada da fundamentação dos números naturais e de um dos métodos demonstrativos mais importantes da matemática.

A estrutura lógica do argumento organiza-se, portanto, em duas etapas fundamentais. O **passo base** estabelece o ponto inicial da validade da proposição, enquanto o **passo indutivo** assegura a propagação dessa validade ao longo do conjunto dos números naturais.

A abordagem apresentada em Fomin (2012) enfatiza que o princípio não deve ser visto apenas como uma técnica formal, mas como uma estratégia de raciocínio progressivo, intimamente vinculada à resolução de problemas. O texto destaca que a hipótese de indução não constitui uma suposição arbitrária, mas parte integrante de uma cadeia lógica coerente, cuja construção exige clareza na formulação da proposição $P(n)$.

Além disso, ressalta-se que muitos resultados aparentemente complexos tornam-se acessíveis quando se identifica adequadamente a proposição a ser demonstrada. Assim, a escolha precisa da formulação do enunciado constitui etapa decisiva para a aplicação eficaz do método. Em síntese, o Princípio da Indução Matemática, segundo Fomin (2012), articula rigor lógico e intuição pedagógica, favorecendo tanto a compreensão conceitual quanto a aplicação sistemática do método.

Diante do exposto, agora veremos a apliacação da indução matemática nos teoremas que queremos demonstar relacionados com o triângulo de pascal. O livro de (FOMIN, 2012) traz inúmeros problemas dos quais a indução matemática é crucial para resolvê-los, mas como o mérito do trabalho não é abordar as aplicações da indução, mas sim utiliza-lá para demonstrar os próximos teoremas, sugere-se ao leitor que, caso tenha interesse em se aprofundar no assunto, o livro será uma ótima bibliografia para tal.

2.6 Algumas propriedades do Triângulo de Pascal

Nesta seção, demonstraremos por indução alguns teoremas relacionados com o Triângulo de Pascal, mencionados na seção anterior.

2.6.1 Teorema das linhas

O teorema das linhas diz que ao somarmos todos os termos de uma linha do triangulo de pascal, o resultado é sempre 2 elevado ao número da linha, como por exemplo, a soma dos termos da linha 4 será $2^4 = 16$. Para melhor entender o que diz o teorema das linhas, Benevides (2023) cria a seguinte figura.

Figura 2.2: Teorema das Linhas.

Linha 0: $1 \longrightarrow 2^0 = 1$

Linha 1: $1 + 1 \longrightarrow 2^1 = 1$

Linha 2: $1 + 2 + 1 \longrightarrow 2^2 = 2$

Linha 3: $1 + 3 + 3 + 1 \longrightarrow 2^3 = 4$

Linha 4: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 \longrightarrow 2^4 = 8$

Linha 5: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \longrightarrow 2^5 = 16$

Fonte: (BENEVIDES 2023).

Teorema 2.6.1. *A soma dos elementos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal é igual a 2^n, ou seja,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{2.6}$$

Demonstração. Faremos a demonstração utilizando o Princípio da Indução Matemática sobre n.

1º Passo: Caso base

Para $n = 0$, temos:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1.$$

Por outro lado, $2^0 = 1$ logo conforme a Figura 2.2, a igualdade é válida para $n = 0$.

2º Passo: Hipótese de indução

Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum número natural n, isto é,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{2.7}$$

Essa será nossa hipótese de indução.

3º Passo: Passo indutivo

Devemos provar que a afirmação é válida para $n + 1$, isto é, que:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}. \tag{2.8}$$

Utilizando a relação de Stifel (2.4), em (2.8) obtém-se:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right). \tag{2.9}$$

Separando as somas na equação (2.9) , temos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1}.$$

Observemos agora que:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

pois pela Definição (2.3.1) $\binom{n}{n+1} = 0$. Além disso, fazendo a mudança de índice $j = k - 1$, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} = \sum_{j=-1}^{n} \binom{n}{j}.$$

Como por (2.3.1) $\binom{n}{-1} = 0$, segue que:

$$\sum_{j=-1}^{n} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Logo,

$$= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Pela hipótese de indução,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Conclusão

Pelo Princípio da Indução Matemática, concluímos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

para todo número natural n. $\square$

Veja que aqui usamos o princípio da indução matemática que mencionamos na Seção (2.4) provamos o passo base, para $n = 0$, supomos que era válido para algum número natural n e inferimos, a partir daí, a validade para $n+1$. Logo, pelo principio da indução, conseguimos provar que é valido para todos os números naturais.

2.6.2 Teorema das colunas do Triângulo de Pascal

O teorema das colunas diz que, a soma de elementos consecutivos de uma coluna, iniciando do topo (primeiro elemento igual a 1) é igual ao elemento na linha imediatamente abaixo e na coluna à direita da última parcela somada.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & \boxed{1} & & & & \\
1 & \boxed{2} & 1 & & & \\
1 & \boxed{3} & 3 & 1 & & \\
1 & \boxed{4} & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & \boxed{10} & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Teorema 2.6.2 (Teorema das colunas do Triângulo de Pascal)**.** *Para todo inteiro $n \geq 0$ e todo inteiro r com $0 \leq r \leq n$, vale*

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}. \tag{2.10}$$

Assim, a soma dos elementos de uma coluna fixa r, isto é, $\binom{r}{r}, \binom{r+1}{r}, \ldots, \binom{n}{r}$ é igual ao elemento imediatamente abaixo e à direita, $\binom{n+1}{r+1}$

Demonstração. Fixemos um inteiro $r \geq 0$. Vamos provar a identidade (2.10) por indução em n, para todo $n \geq r$.

1º Passo: Caso base

Quando $n = r$, o somatório do lado esquerdo tem apenas um termo:

$$\sum_{k=r}^{r} \binom{k}{r} = \binom{r}{r} = 1.$$

Por outro lado,

$$\binom{r+1}{r+1} = 1.$$

Logo, a igualdade (2.10) é verdadeira para $n = r$.

2º Passo: Hipótese de indução

Suponha que, para algum $n \geq r$, a identidade seja verdadeira, isto é,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}. \tag{2.11}$$

3º Passo: Passo indutivo

Precisamos mostrar que,

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k}{r} = \binom{n+2}{r+1}. \tag{2.12}$$

Começamos separando o último termo do somatório (2.12):

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k}{r} = \left(\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}\right) + \binom{n+1}{r}. \tag{2.13}$$

Aplicando a hipótese de indução (2.11) ao primeiro somatório (2.13), obtemos

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r}. \tag{2.14}$$

Agora usamos a *relação de Stifel* (2.4), no segundo membro da equação (2.14) obtemos:

$$\binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r+1} = \binom{n+2}{r+1}, \tag{2.15}$$

válida para todos os inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n+1$. Substituindo (2.15) na expressão (2.14), segue que

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k}{r} = \binom{n+2}{r+1},$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar.

Portanto, pelo princípio da indução matemática, a identidade (2.10) vale para todo $n \geq r$. Como r foi fixado arbitrariamente, concluímos que o resultado é verdadeiro para quaisquer $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$. $\square$

A fórmula (2.10) também é conhecida como *identidade do taco de hóquei*, pois, ao destacar os termos $\binom{r}{r}, \binom{r+1}{r}, \ldots, \binom{n}{r}$ no Triângulo de Pascal, o contorno lembra o formato de um taco, e o termo $\binom{n+1}{r+1}$ aparece na "ponta".

2.6.3 Teorema das Diagonais

O Teorema das Diagonais no Triângulo de Pascal afirma que a soma dos elementos ao longo de uma diagonal (iniciando em qualquer borda e movendo-se para baixo/direita) é igual ao elemento situado imediatamente abaixo do último número somado, na linha seguinte.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
\boxed{1} & 1 & & & & \\
1 & \boxed{2} & 1 & & & \\
1 & 3 & \boxed{3} & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & \boxed{4} & 1 & \\
1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1
\end{array}
$$

Perceba que $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Há diferentes usos do termo "diagonais" um deles é o fato de que as diagonais geram uma das sequências mais importantes da matemática que é a sequencia de Fibonacci, e outro é a soma em diagonal produzir um coeficiente deslocado que é essencialmente a mesma identidade do Teorema (2.6.3) escrita em outra indexação (LOPES 2018).

Aqui, falaremos da diagonal mais utilizada no triângulo que é a soma ao longo de uma diagonal inclinada:

Teorema 2.6.3 (Teorema das diagonais do Triângulo de Pascal)**.** *Para $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{N}$, vale que*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{r} = \binom{r+n+1}{r+1} \tag{2.16}$$

Demonstração. Vamos demonstrar (2.16), por indução sobre n, com r fixado.

1º passo: caso base

Para $n = 0$, o primeiro membro fica

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{r+i}{r} = \binom{r}{r} = 1.$$

Por outro lado, o segundo membro é

$$\binom{r+0+1}{r+1} = \binom{r+1}{r+1} = 1.$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{r+i}{r} = \binom{r+1}{r+1},$$

e, portanto, a igualdade é verdadeira para $n = 0$.

2º passo: hipótese de indução

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, a igualdade seja verdadeira, isto é, suponha que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{r} = \binom{r+n+1}{r+1}. \tag{2.17}$$

3º passo: passo indutivo

Devemos mostrar que a igualdade também vale para $n+1$, ou seja, que

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{r+i}{r} = \binom{r+n+2}{r+1}. \tag{2.18}$$

Começamos separando o último membro do somatório de (2.18)

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{r+i}{r} = \sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{r} + \binom{r+n+1}{r}.$$

Aplicando a hipótese de indução (2.17), obtemos

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{r+i}{r} = \binom{r+n+1}{r+1} + \binom{r+n+1}{r}. \tag{2.19}$$

Agora, pela relação de Stiffel (2.4), no segundo membro da equação (2.19)

$$\binom{r+n+1}{r+1} + \binom{r+n+1}{r} = \binom{r+n+2}{r+1}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{r+i}{r} = \binom{r+n+2}{r+1}.$$

Assim, a proposição é verdadeira para $n+1$.

Portando, pelo princípio da indução matemática, a identidade (2.16) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{r} = \binom{r+n+1}{r+1},$$

Desse modo, fica demonstrado o teorema das diagonais do Triângulo de Pascal. $\square$

2.6.4 Fibonacci nas diagonais inversas

A sequência de Fibonacci [1] é uma das mais conhecidas na Matemática, sendo definida por uma relação de recorrência simples, na qual cada termo é obtido a partir da soma dos dois termos anteriores.

Formalmente, a sequência de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall\, n \geq 2.$$

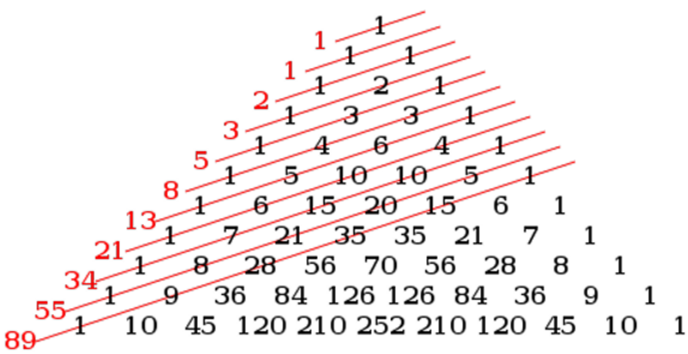
Essa relação de recorrência determina que cada termo da sequência é obtido pela soma dos dois termos imediatamente anteriores.

A partir dessa definição, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

$$(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots)$$

Essa sequência aparece em diversos contextos matemáticos. Um resultado clássico, apresentado em abordagens sobre aplicações do triângulo afirma que os números de Fibonacci podem ser obtidos pela soma das diagonais inversas do Triângulo de Pascal conforme a Figura (2.3) (ROSADAS 2016). Essa observação reforça o caráter estruturante do triângulo como fonte de padrões e regularidades.

Figura 2.3: Fibonacci na soma das diagonais inversas.



(ROSADAS 2016).

[1]Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci (1170–1250), foi um matemático italiano e conhecido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média, Leonardo foi o matemático que popularizou o sistema de numeração indo-arábico em sua obra *Liber Abaci* (1202) na qual apresenta a sequência que leva seu nome.

2.6.5 A identidade de Vandermonde

O livro de Vilenkin (1972) em um capítulo chamado, *Properties of combinations*, traz algumas propriedades refente à combinação que podemos facilmente entender através do Triângulo de Pascal. Uma vez que já vimos que os elementos do triângulo são resultados de combinações, uma das propriedades interessantes além das já citadas aqui no texto é a identidade de Vandermonde [2] ou convolução binomial, que estabelece uma relação importante entre combinações e, a soma dos quadrados das linhas do Triângulo de Pascal.

Falaremos primeiramente sobre a convolução binomial que também é chamada de identidade de Vandermonde, e como consequência direta dessa relação a propriedade da somas dos quadrados da linhas do triângulo de pascal.

A identidade da convolução binomial é dada por:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}, \qquad m,n,r \in \mathbb{N}_0,\ k \in \{0,1,\ldots,r\}. \tag{2.20}$$

Essa identidade estabelece uma relação pelo principio fundamental da contagem da seguinte forma: escolher r elementos de um conjunto com $m+n$ elementos pode ser realizado escolhendo k elementos de um subconjunto com m elementos e $r-k$ elementos de outro subconjunto com n elementos. Somando todas as possibilidades para k, obtemos o número total de maneiras de escolher r elementos do conjunto total.

Como os elementos do Triângulo de Pascal correspondem às combinações $\binom{n}{k}$, a identidade de Vandermonde pode ser interpretada como uma relação entre diferentes linhas do triângulo. Nesse contexto, um elemento de uma linha pode ser obtido por meio de uma soma de produtos de elementos pertencentes a duas linhas anteriores.

Enquanto a relação de Stiffel envolve apenas dois elementos adjacentes da linha anterior, a convolução binomial envolve vários elementos organizados ao longo de linhas diferentes do triângulo.

Por exemplo, considere o cálculo de $\binom{5}{2}$. Aplicando a identidade de Vandermonde com $m=2$ e $n=3$, temos a relação apresentada na figura 2.4 onde destaca os elementos envolvidos nessa relação dentro do Triângulo de Pascal.

Na disposição em triângulo retângulo, destacam-se os coeficientes envolvidos na identidade de Vandermonde para o caso particular, $\binom{5}{2}$ observa-se que o elemento $\boxed{10}$, localizado na quinta linha, pode ser obtido pela soma:

[2]Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796) foi um matemático francês conhecido por suas contribuições à teoria dos determinantes e combinatória.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & \\
\boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{3} & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & \boxed{10} & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

Figura 2.4: Ilustração da identidade de Vandermond no Triângulo de Pascal.

$$\boxed{10} = \binom{2}{0}\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{0} = \boxed{1} \cdot \boxed{3} + \boxed{2} \cdot \boxed{3} + \boxed{1} \cdot \boxed{1}.$$

Dessa forma, a convolução binomial evidencia uma relação entre coeficientes de diferentes linhas do Triângulo de Pascal, mostrando que um elemento de uma linha posterior pode ser expresso a partir da combinação de elementos de linhas anteriores.

Esse exemplo ilustra como diferentes combinações presentes no Triângulo de Pascal podem se combinar para produzir um coeficiente de uma linha posterior, evidenciando a estrutura combinatória presente no triângulo, com isso temos o seguinte teorema.

Teorema 2.6.4 (Convolução Binomial)**.** *Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r \leq m+n$. Então,*

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Demonstração. Apresentamos a demonstração por indução sobre n.

1º Passo : Caso Base

Para $n = 0$, temos

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{0}{r-k}.$$

Conforme a Definição (2.3.1)

$$\binom{0}{r-k} = \begin{cases} 1, & \text{se } r-k = 0, \\ 0, & \text{se } r-k \neq 0, \end{cases}$$

segue que o único termo não nulo da soma ocorre quando $k = r$. Logo,

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{0}{r-k} = \binom{m}{r}\binom{0}{0} = \binom{m}{r}.$$

Por outro lado,
$$\binom{m+0}{r} = \binom{m}{r}.$$

Portanto,
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{0}{r-k} = \binom{m+0}{r},$$
isto é, a identidade é verdadeira para $n = 0$.

2º Passo: Hipótese de indução

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, valha
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}, \tag{2.21}$$
para todo $r \in \mathbb{N}$.

3º Passo: Passo indutivo

Devemos mostrar que a igualdade também vale para $n+1$, ou seja,
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n+1}{r-k} = \binom{m+n+1}{r}. \tag{2.22}$$

Utilizando a relação de Stifel (2.3),
$$\binom{n+1}{r-k} = \binom{n}{r-k} + \binom{n}{r-k-1}, \tag{2.23}$$

Usando a expressão (2.23) e as propriedades de somatório, obtemos:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n+1}{r-k} &= \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\left[\binom{n}{r-k} + \binom{n}{r-k-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} + \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k-1}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Pela hipótese de indução, do lado direito da expressão (2.24) é igual a
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}. \tag{2.25}$$

Resta analisar a segunda soma do lado direito da expressão (2.24):
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k-1}.$$

Observe que esta soma tem a mesma forma da hipótese de indução (2.21), com r

substituído por $r-1$. De fato,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k-1}=\sum_{k=0}^{r-1}\binom{m}{k}\binom{n}{(r-1)-k},$$

pois, para $k=r$, tem-se $\binom{n}{-1}=0$. Como a indução é realizada em relação a n,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k-1}=\binom{m+n}{r-1}. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.26) em (2.24), obtemos

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n+1}{r-k}=\binom{m+n}{r}+\binom{m+n}{r-1}.$$

Aplicando novamente a relação de Stifel (2.3), segue que

$$\binom{m+n}{r}+\binom{m+n}{r-1}=\binom{m+n+1}{r}.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n+1}{r-k}=\binom{m+n+1}{r}.$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, conclui-se que

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}, \tag{2.27}$$

para todos $m,n,r\in\mathbb{N}$, com $0\leq r\leq m+n$.

$\square$

Em Particular, se tomarmos $n=m=r$ na identidade de Vandermonde (2.6.4), obtemos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}. \tag{2.28}$$

Como já sabemos por (2.2)

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k},$$

segue que a equação (2.28) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{2.29}$$

Ou seja (2.29), é uma consequência direta da convolação binomial que diz que a soma dos quadrados das linhas do triângulo de pascal, é igual ao elemento que está presente na linha que representa o dobro da linha atual e na coluna atual.

Veja um exemplo de representação na Figura 2.5:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
\boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{1} & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & \boxed{20} & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Figura 2.5: Consequência da convolução

Perceba que $1^2 + 3^3 + 3^2 + 1^2 = 20$

2.6.6 Soma Alternada

Outra propriedade que é importante mencionar é a da soma alternada, perceba que ao somar as linhas do triângulo de Pascal de modo que o primeiro elemento da linha seja positivo, e o restante alternando entre positivo e negativo teremos que a soma da linha resulta em zero, ou seja a soma alternada, ora positiva ora negativa dos elementos da linha $n \geq 1$ é sempre nula, veja:

$$\begin{array}{lll}
\text{Linha um,} & n = 1 \Longrightarrow & \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 0 \\
\text{Linha dois,} & n = 2 \Longrightarrow & \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 0 \\
\text{Linha três,} & n = 3 \Longrightarrow & \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0 \\
\text{Linha quatro,} & n = 4 \Longrightarrow & \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0 \\
\text{Linha cinco,} & n = 5 \Longrightarrow & \binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0 \\
\text{Linha seis,} & n = 6 \Longrightarrow & \binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 0 \\
& \vdots & \vdots
\end{array}$$

Desenvolvendo cada uma das combinações, tem-se:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Linha um,} & n = 1 \Longrightarrow & 1 - 1 = 0 \\
\text{Linha dois,} & n = 2 \Longrightarrow & 1 - 2 + 1 = 0 \\
\text{Linha três,} & n = 3 \Longrightarrow & 1 - 3 + 3 - 1 = 0 \\
\text{Linha quatro,} & n = 4 \Longrightarrow & 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0 \\
\text{Linha cinco,} & n = 5 \Longrightarrow & 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0 \\
\text{Linha seis,} & n = 6 \Longrightarrow & 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0 \\
& \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Teorema 2.6.5 (Teorema da Soma Alternada)**.** *Para todo inteiro $n \geq 1$, a soma alternada dos elementos do Triângulo de Pascal é nula. Isto é,*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \tag{2.30}$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre $n \geq 1$ que o somatório (2.30) é sempre nulo.

1º Passo : Caso Base

Para $n = 1$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} &= \binom{1}{0} - \binom{1}{1} \\
&= 1 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Lembre que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 2$, usando a relação de Stifel (2.3),

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \binom{2}{k} &= \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\
&= \binom{1}{0} - \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1}\right] + \binom{1}{1} \\
&= \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} - \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Para $n = 3$, novamente pela relação de Stifel (2.3),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{k} &= \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} \\
&= \binom{2}{0} - \left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1}\right] + \left[\binom{2}{1} + \binom{2}{2}\right] - \binom{2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k} - \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2º Passo: Hipótese de indução

Suponha que, para algum inteiro $n \geq 1$, a propriedade seja verdadeira, isto é,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0. \tag{2.31}$$

3º Passo: Passo indutivo

Devemos mostrar que a igualdade também vale para $n + 1$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = 0. \tag{2.32}$$

Usando a relação de Stifel (2.3)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}.
\end{aligned}$$

Agora reindexando o segundo somatório, fazendo $j = k - 1$, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0. \tag{2.33}$$

Portanto, a igualdade é válida para $n+1$ pelo princípio da indução finita.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0, \tag{2.34}$$

para todo $n \geq 1$. $\square$

Com isso, finalizamos a seção que trata sobre o Triângulo de Pascal e suas propriedades mais importante. No próximo capítulo introduziremos a ideia de coeficientes binomiais e sua construção e veremos que o desenvolvimento do binômio de Newton está diretamente ligado a ideia de combinação e o Triângulo de Pascal estudado até aqui.

Capítulo 3

Binomio de Newton

3.1 Coeficientes binomiais

Denomina-se **binômio** toda expressão algébrica formada pela soma de dois termos direfentes de zero, normalmente representada por $a + b$. O estudo da expansão de potências de binômios caminha naturalmente ao conceito de coeficientes binomiais, que desempenham papel central em diversas áreas da matemática, em particular na análise combinatória.

Para compreender a origem desses coeficientes, faremos uma análise que consiste inicialmente sobre o produto entre binômios:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$e$$

$$(a + b)(c + d)(e + f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bd + bdf$$

Ao desenvolver esses produtos, cada termo resulta da escolha de um termo de cada um dos binômios envolvidos. Nos exemplos acima, cada parcela do desenvolvimento será formada pelo produto de dois fatores ou três fatores respectivamente, um proveniente de cada binômio. Pelo princípio multiplicativo da contagem, existem $2^2 = 4$ formas distintas para o produto de 2 binômios e $2^3 = 8$ formas distintas para o produto de 3 binômios ou seja para o produto de 4 binômios existem $2^4 = 16$ formas de realizar essas escolhas, o que implica que o desenvolvimento completo possui dezesseis termos distintos (SANTOS, 2007).

De maneira geral, ao multiplicarmos k binômios, o número total de produtos possíveis será 2^k. Esse fato decorre diretamente do princípio fundamental da contagem, uma vez que para cada binômio existem duas escolhas possíveis.

Consideremos agora o produto formado por vários fatores iguais:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b),$$

com 6 fatores. Nesse caso, cada termo da expansão é obtido escolhendo-se, em cada fator, o termo a ou o termo b. Como existem duas possibilidades de escolha em cada um dos seis fatores, o número total de termos gerados é $2^6 = 64$.

Entretanto, muitos desses termos são semelhantes e podem ser agrupados. Por exemplo, o termo a^4b^2 aparece sempre que, entre os seis fatores, escolhemos o termo a exatamente quatro vezes e o termo b duas vezes. O número de maneiras de realizar essa escolha corresponde ao número de formas de selecionar dois fatores entre os seis para fornecer o termo b, ou, equivalentemente, quatro fatores para fornecer o termo a. Essa quantidade de termos a^4b^2 é

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$$

Assim, o coeficiente do termo a^4b^2 na expansão é exatamente $\binom{6}{4}$. Como todo termo consiste do produto de 6 letras, o termo geral é da forma a^ib^j, onde $i+j=6$, ou seja, cada termo é da forma a^ib^{i-6}. De modo geral, cada termo da expansão de $(a+b)^n$ possui a forma

$$a^ib^{n-i},$$

onde i indica quantas vezes o termo a foi escolhido entre os n fatores. O número de maneiras de realizar essa escolha é dado pela combinação

$$\binom{n}{i},$$

que corresponde ao número de subconjuntos com i elementos escolhidos entre n posições possíveis. Consequentemente, obtém-se a conhecida expansão

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^ib^{n-i}, \tag{3.1}$$

na qual os números $\binom{n}{i}$ são denominados **coeficientes binomiais**. Esses coeficientes indicam quantas vezes cada termo aparece no desenvolvimento da potência do binômio (SANTOS, 2017).

Observa-se ainda que, para cada valor de i variando de 0 até n, surge um termo distinto na expansão, totalizando $n+1$ termos diferentes, embora o processo combinatório que os origina envolva 2^n produtos possíveis.

Além disso, da simetria do binômio $(a+b)$ segue imediatamente que

$$(a+b)^n = (b+a)^n,$$

o que implica a identidade

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i},$$

mostrando que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos na expansão são iguais.

Notas-se que, se $a = b = 1$ o lado direito dessa igualdade gera os números da linha n do Triângulo de Pascal (2.1). Além disso, como visto em (2.6.1) sua soma é igual a 2^n. Veja abaixo a expansão de $(a+b)^n$ para os primeiros valores de n.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4\\
(a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5\\
(a+b)^6 &= 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6
\end{aligned}$$

Com isso, podemos dizer que o Triângulo de Pascal aparece como os coeficientes da expansão apresentada acima.

3.1.1 Teorema Binomial

O teorema conhecido no ensino médio como *Binômio de Newton* estabelece a expansão de $(x+a)^n$ em termos de coeficientes binomiais (AFFONSO 2014):

Teorema 3.1.1 (Teorema Binomial). *Se $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$, então*

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k. \tag{3.2}$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n.

1º Passo: Caso base:

Para $n = 1$, temos $(x+a)^1 = x + a$.

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} a^k = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1.$$

Como $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$ e $a^0 = 1$, segue que

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} a^k = x + a.$$

Logo, a igualdade é válida para $n = 1$.

2º Passo: Hipótese de indução: Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, valha

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k. \tag{3.3}$$

3º Passo: Passo indutivo: Vamos mostrar que a igualdade vale para $n+1$, isto é,

$$(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} a^k. \tag{3.4}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade (3.4), temos:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a).$$

Aplicando a hipótese de indução (3.3),

$$(x+a)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \right) (x+a). \tag{3.5}$$

Distribuindo os fatores no lado direito da equação (3.5), obtemos,

$$(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} a^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^{k+1}. \tag{3.6}$$

Na segunda soma de (3.6), fazemos a mudança de índice $j = k+1$. Assim,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} a^j. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6), temos,

$$(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} a^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} a^k.$$

Agora agrupando os termos,

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}a^{k} + \binom{n}{n}a^{n+1}.$$

Pela relação de Stiffel (2.4),

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Além disso,

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}.$$

Logo,

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}a^{k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1},$$

Ou seja,

$$(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}a^{k}.$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, temos que igualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Anteriormente em (2.6.5) vimos sobre a convolução binomial, agora, podemos fazer o estudo do conceito de produto convolutório. Tal operação surge naturalmente no estudo de sequências, séries de potências e multiplicação de polinômios, desempenhando papel fundamental em diferentes áreas da matemática, como análise combinatória, teoria das probabilidades e álgebra.

De maneira intuitiva, o produto convolutório descreve o processo de combinar duas sequências numéricas para formar uma terceira sequência, cujos termos são obtidos a partir de todas as combinações possíveis entre os termos das sequências iniciais. Assim, cada coeficiente resultante carrega informações provenientes das diferentes formas de decomposição de um índice em parcelas menores.

No contexto algébrico, essa operação aparece naturalmente na multiplicação de polinômios. De fato, ao multiplicarmos dois polinômios, os coeficientes do produto não são obtidos apenas pela multiplicação direta de termos correspondentes, mas sim pela soma de todos os produtos possíveis entre coeficientes cujos expoentes possuem a mesma soma. Essa estrutura caracteriza precisamente o produto convolutório.

Além disso, essa ideia possui uma relação profunda com o Binômio de Newton e com o Triângulo de Pascal. Como os coeficientes binomiais organizados no Triângulo de

Pascal correspondem aos coeficientes do desenvolvimento de

$$(1+x)^n,$$

a multiplicação de duas expansões binomiais produz naturalmente uma convolução entre coeficientes binomiais. Consequentemente, a convolução binomial pode ser interpretada como um caso particular do produto convolutório aplicado às linhas do Triângulo de Pascal.

A seguir apresentamos formalmente a definição de soma e produto de séries de potências.

Definição 3.1.1. ***(Soma e produto de séries).*** *Se* $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ *e* $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ *são duas séries de potências (polinômios), em que* $m, n \in \mathbb{N}$, *então a soma destas duas séries é a série de potências* $\sum_{k=0}^{m+n} d_k\, x^k$ *na qual o coeficiente* $d_k = (a_k + b_k)$ *e o produto destas duas séries é a série de potências* $\sum_{k=0}^{m+n} c_k\, x^k$ *em que o coeficiente* c_k *é dado por* $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, *produto convolutório dos coeficientes das séries* $P(x)$ *e* $Q(x)$.

Exemplo Sejam os polinômios $P(x) = 1+2x-2x^2-x^3$ e $Q(x) = -3+x-4x^2+2x^3$. Impomos que $P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{6} c_k\, x^k$, $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}$. Desse modo temos $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$ e $a_k = 0$ para $k \geq 3$. fazendo o mesmo para os coeficientes de $Q(x)$, temos $b_0 = -3$ $b_1 = 1$ $b_2 = -4$ $b_3 = 2$ e etc.

$$c_0 = \sum_{j=0}^{0} a_j\, b_{0-j} = a_0\, b_0 = 1 \cdot (-3) = -3,$$

$$c_1 = \sum_{j=0}^{1} a_j\, b_{1-j} = a_0\, b_1 + a_1\, b_0 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 1 - 6 = -5,$$

$$\begin{aligned} c_2 = \sum_{j=0}^{2} a_j\, b_{2-j} &= a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0 \\ &= 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \\ &= -4 + 2 + 6 = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 = \sum_{j=0}^{3} a_j\, b_{3-j} &= a_0\, b_3 + a_1\, b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_0 \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 - 8 - 2 + 3 = -5,\\
c_4 &= \sum_{j=0}^{4} a_j\, b_{4-j} = a_0\, b_4 + a_1\, b_3 + a_2\, b_2 + a_3\, b_1 + a_4\, b_0\\
&= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-3)\\
&= 0 + 4 + 8 - 1 + 0 = 11,\\
c_5 &= \sum_{j=0}^{5} a_j\, b_{5-j} = a_0\, b_5 + a_1\, b_4 + a_2\, b_3 + a_3\, b_2 + a_4\, b_1 + a_5\, b_0\\
&= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-3)\\
&= 0 + 0 - 4 + 4 + 0 + 0 = 0,\\
c_6 &= \sum_{j=0}^{6} a_j\, b_{6-j} = a_0\, b_6 + a_1\, b_5 + a_2\, b_4 + a_3\, b_3 + a_4\, b_2 + a_5\, b_1 + a_6\, b_0\\
&= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-3)\\
&= 0 + 0 + 0 - 2 + 0 + 0 + 0 = -2.
\end{aligned}
$$

Portanto, utilizando o produto convolutório dos coeficientes das séries de potências associadas aos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, obtemos

$$P(x)\, Q(x) = -3 - 5x + 4x^2 - 5x^3 + 11x^4 - 2x^6.$$

Esse resultado evidencia como os coeficientes do produto de dois polinômios podem ser determinados a partir da convolução dos coeficientes das séries originais. Agora veja que se, fizermos:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = P(x), \tag{3.8}$$

com $a_k = \binom{m}{k}$ se $0 \leq k \leq m$ e $a_k = 0$ se $m < k$. De modo análogo,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = Q(x), \tag{3.9}$$

em que $b_k = \binom{n}{k}$ se $0 \leq k \leq n$ e $b_k = 0$ se $n < k$. Sabe-se que, pelo binômio de Newton (3.1.1),

$$(1+x)^m\, (1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \sum_{r=0}^{m+n} \binom{m+n}{r} x^r,$$

em que $c_r = \binom{m+n}{r}$ se $0 \leq r \leq m+n$ e $c_r = 0$ se $m+n < r$. Mas, usando a definição

(3.1.1) e as equações (3.8) e (3.9), vem que:

$$c_r = \sum_{j=0}^{r} a_j\, b_{r-j} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j},$$

ou ainda

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r},$$

Perceba que ao trocar j por k temos a equação (2.20).

3.2 Relação entre o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton

3.2.1 Os coeficientes do binômio como uma linha do triângulo

Pelo Teorema Binomial, temos:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n. \tag{3.10}$$

Logo, os coeficientes do desenvolvimento binomial são exatamente:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n},$$

isto é, a linha n do Triângulo de Pascal. Até aqui, tratávamos a notação $\binom{n}{p}$ como combinações de n elementos tomados p a p, a partir de agora chamaremos essa notação de coeficientes binomiais.

3.2.2 Como a Relação de Stifel "explica" o padrão dos coeficientes

Como a relação de Stiffel descreve a formação interna do triângulo, ela também descreve a formação dos coeficientes do Binômio (SANTOS 2019):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Assim, para passar de $(x+a)^{n-1}$ para $(x+a)^n = (x+a)(x+a)^{n-1}$, os coeficientes se combinam exatamente pelo padrão do triângulo, justificando o crescimento regular dos coeficientes.

Tomando $n = 4$, a linha 4 do triângulo é $1, 4, 6, 4, 1$. Portanto:

$$(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4.$$

O exemplo mostra a correspondência entre triângulo e binômio de Newton. Observa-se que todos os teoremas apresentados e demonstrados até o momento acerca do triângulo de Pascal manifestam-se de forma natural no contexto do Binômio de Newton. Por essa razão, é recorrente na literatura a utilização da noção de coeficientes binomiais como ferramenta para a demonstração de propriedades do triângulo de Pascal.

Destaca-se, entretanto, que a construção desenvolvida neste trabalho foi conduzida de modo a permitir que o leitor compreendesse, inicialmente, as relações internas do triângulo de forma independente, sem associação direta com o binômio. Tal abordagem tem como objetivo proporcionar, ao se introduzir o Binômio de Newton, uma compreensão mais significativa, na qual as conexões estabelecidas se revelem de maneira natural e coerente.

3.3 Aplicações do Binômio de Newton

Nesta seção, serão apresentadas algumas aplicações do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, evidenciando como os teoremas anteriormente demonstrados contribuem para a compreensão e o cálculo de propriedades matemáticas em diferentes contextos.

Ao longo da exposição, buscar-se-á estabelecer, sempre que possível, relações entre o Binômio de Newton e os resultados já obtidos acerca do Triângulo de Pascal, de modo a reforçar a conexão entre esses dois conceitos.

Teorema 3.3.1 (Interpretação combinatória do Teorema das Linhas)**.** *Seja A um conjunto finito com n elementos. Então, o número total de subconjuntos de A é dado por*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Demonstração. Considere um conjunto finito A com n elementos. Deseja-se determinar a quantidade total de seus subconjuntos.

Por um lado, do ponto de vista combinatório, cada subconjunto pode ser formado escolhendo-se k elementos dentre os n disponíveis, para todo k variando de 0 até n. Assim, o número total de subconjuntos pode ser expresso como

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Por outro lado, cada elemento de A pode ou não pertencer a um subconjunto. Como há duas possibilidades para cada elemento e essas escolhas são independentes, o número total de subconjuntos é igual a

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n.$$

Dessa forma, conclui-se que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

$\square$

Observa-se que a soma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

corresponde exatamente à soma dos elementos da linha n do Triângulo de Pascal, resultado este já estabelecido anteriormente pelo Teorema das Linhas. Assim, esta interpretação combinatória fornece um significado concreto para tal resultado, associando-o diretamente à contagem de subconjuntos de um conjunto finito.

Além disso, essa relação pode ser novamente justificada por meio do Binômio de Newton. De fato, ao considerar a expansão de $(x+a)^n$ e tomar $x = 1$ e $a = 1$, obtém-se

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Como $1 + 1 = 2$, segue que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

Outro ponto a se notar é que se tomarmos $x = 1$ e $a = -1$ em 3.1.1, temos:

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0 \tag{3.11}$$

Perceba que a (3.11) é a equação (2.30) vista anteriormente.

Diante do exposto podemos ver a conexão entre a Análise Combinatória, o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.

3.4 Quantas funções existem?

No estudo de funções, é comum apresentar as definições de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Entretanto, ao considerarmos a quantidade dessas funções, torna-se necessário aprofundar o estudo em contagem. De fato, ao questionarmos quantas são as funções injetoras de uma função $f : A \to B$, com A e B conjuntos finitos, bem como quantas são as funções sobrejetoras e as bijetoras, percebe-se que tais indagações conduzem naturalmente a um problema de natureza combinatória como por exemplo. "Quantas funções injetoras $f : A \to B$ existem entre dois conjuntos, sendo que A possui sete elementos e B quatro ?" para analisar a quantidade de funções injetoras, a dedução do método de contagem é quase que intuitivo, perceba que com A possuindo 7 elementos e B possuindo 4 elementos não teremos $f : A \to B$, mas, no caso de ser $g : B \to A$, então teríamos:

$$\binom{7}{4} \cdot 4! = \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot 4! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \tag{3.12}$$

funções injetoras. Pois, primeiro, deve-se escolher 4 elementos dentre os 7 do conjunto A, o que pode ser feito de $\binom{7}{4}$ modos e, segundo, fazer todas as $4! = 24$ permutações entre estes 4 elementos escolhidos e associados aos 4 elementos do conjunto B.

O resultado apresentado na equação (3.12) se obtém pelo principio fundamental da contagem. Neste ponto, recordando a definição do coeficiente binomial,: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, com $0 \leq p \leq n$ e $n!$ o fatorial do número natural n, Usa-se o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

Mas e se a pergunta fosse, "Quantas funções sobrejetoras $f : A \to B$ existem entre dois conjuntos, sendo que A possui sete elementos e B quatro ?" Para a contagem da quantidade de funções sobrejetoras, precisaremos de um estudo mais refinado, pois envolve uma análise mais profunda sobre o tema.

Antes de prosseguir, faz-se necessário revisar alguns conceitos para melhor compreensão desse trabalho. Sejam A e B dois conjuntos não vazios com $m, n \in \mathbb{N}$ elementos, digamos, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Entende-se por aplicação (ou função) de A em B, qualquer correspondência f, que a cada $x \in A$ associa a um único $y \in B$. Se $y \in B$ está associado a $x \in A$ diz-se que x é uma pré-imagem de y e escreve-se $f(x) = y$. O subconjunto de B dos elementos que admitem pré-imagem é chamado conjunto imagem.

Uma aplicação de A em B, $f : A \to B$, é chamada aplicação sobrejetora ou sobrejetiva se o conjunto imagem é B, ou seja, se cada elemento de B admite pré-imagem. Uma aplicação é dita aplicação injetiva ou injetora, se cada elemento do conjunto imagem admite uma única pré-imagem, ou ainda, se para todos $x_i \neq x_j \in A$ implica $f(x_i) \neq f(x_j) \in B$, $i \neq j = 1, 2, \ldots, m$. Quando f é sobrejetora e injetora dizemos que f é bijetora. Prova-se que, quando $m = n$, uma aplicação é sobrejetiva se, e somente se, é injetiva, e, neste caso, tem-se $n!$ funções bijetoras.

Como apresentado anteriormente, verifica-se que o número de funções injetoras que podem ser definidas de A em B é, quando $m \leq n$, dada por $\binom{n}{m} \cdot m!$ e é igual a zero de $n < m$. Ademais, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade total de funções $f : A \to B$ (injetoras e/ou sobrejetoras) é igual a n^m, pois para cada uma m possibilidades de escolha dentro do conjunto A existem n opções de se associar este elemento a algum outro do conjunto B.

Para se estabelecer uma fórmula direta determinando o número de sobrejeções que podem ser definidas de A em B, no entanto, é um pouco mais complexo[1]. Esta é uma versão do problema de determinar o número de modos em que se pode distribuir m meias distintas em n gavetas distintas de modo que nenhuma gaveta fique vazia. Indica-se, neste trabalho, este número por $\alpha(m, n)$.

Nosso objetivo é demonstrar a validade da seguinte fórmula:

$$\alpha(m,n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m, \tag{3.13}$$

sejam quais forem os números naturais m e n, como visto em (FILHO 1985). Desta maneira, por exemplo, deve-se ter $\alpha(n, n) = n!$, isto é, se $m = n$.

A título de curiosidade, sendo $m = 7$ e $n = 4$, tem-se que:

$$\alpha(7,4) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{4-i} \binom{4}{i} i^7 = -\binom{4}{1} + \binom{4}{2} 2^7 - \binom{4}{3} 3^7 + \binom{4}{4} 4^7 = 8400, \tag{3.14}$$

ou seja, existem 8400 funções sobrejetoras $f : A \to B$, em que A possui sete elementos e B quatro. Número bem superior que as 840 funções injetoras, vista anteriormente.

Note que se deve ter $\alpha(m, n) = 0$, sempre que $m < n$, pois, por exemplo, como se terá uma função sobrejetora entre $A = \{x_1\}$ e $B = \{y_1, y_2\}$? Ou se A tiver três elementos e B cinco ?

3.4.1 Princípio da inclusão e exclusão.

Este princípio trata de como obter o número de elementos do conjunto Ω da equação (3.15), quando se considera a união de uma lista finita de conjuntos discretos fornecidos, isto é, obter o número de elementos de

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k, \tag{3.15}$$

em que, os conjuntos discretos e finitos A_i são dados, $i = 1, 2, \ldots, k$. Neste ponto, denotamos, $n(A)$ como sendo o número de elementos do conjunto discreto A.

[1] Talvez por isso poucos docentes a conhecem.

Para $i \in \{1,2\}$ então $\Omega = A_1 \cup A_2$ e desse modo: $n(\Omega) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$. E mais, se por ventura $i \in \{1,2,3\}$ logo $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ e

$$n(\Omega) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \tag{3.16}$$

Para uma quantidade $k \in \mathbb{N}$ de conjuntos, como visto na equação (3.15), tem-se que o número de elementos do conjunto Ω é dado pelo teorema (3.4.1):

Teorema 3.4.1. ***(Princípio da inclusão e exclusão).*** *Sejam dados os conjuntos discretos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, em que: $n(A_1) = n_1$, $n(A_2) = n_2, \ldots, n(A_k) = n_k$ e considere $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$. Então $n(\Omega)$ é determinado por:*

$$n(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{1 \leq i < j \leq k} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} n(A_i \cap A_j \cap A_r) - \ldots + (-1)^{k+1}\, n(A_1 \cap \ldots \cap A_k). \tag{3.17}$$

O modo de se interpretar esta equação (3.17) é: a) somar a quantidade de todos os elementos dos conjuntos individualmente, b) depois subtrair a quantidade de elementos de todas as interseções de dois conjuntos, c) depois somar a quantidade de elementos de todas as interseções de três conjuntos, d) subtrair a quantidade de elementos das interseções de quatro conjuntos e continuar este processo, alternando sinais, até chegar na interseção de todos os k conjuntos. Um exemplo deste processo pode ser visto na equação (3.16) com $k = 3$ conjuntos.

A demonstração aqui apresentada pode ser vista em (SANTOS, 2007). É preciso provar que, de fato, a equação (3.17) conta exatamente uma única vez o elemento $x \in A_p$, com $1 \leq p \leq k$. Supondo exatamente isso, ou seja, que x pertença a p destes conjuntos, $x \in A_{i_1}, x \in A_{i_2}, \ldots, x \in A_{i_p}$, então este elemento será contado p vezes em $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n(A_i)$. Na parte $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq k} n(A_i \cap A_j)$ será contado $\binom{p}{2}$ vezes. Na parcela da interseção tripla, $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j < r \leq k} n(A_i \cap A_j \cap A_r)$, será contado $\binom{p}{3}$ vezes, e assim sucessivamente até o termo $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p})$, que fornece uma contribuição igual a 1. Nossa hipótese garante que, para mais de p conjuntos $(1 \leq p \leq k)$, o elemento x não irá configurar. Somando todas estas contribuições, vem que:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}. \tag{3.18}$$

Pelo desenvolvimento geral do binômio de Newton, $(x+a)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k\, a^{p-k}$, fazendo $x = -1$ e $a = 1$, temos a soma alternada dos elementos da linha p do triângulo de Pascal

(2.30), que sempre será igual a zero, isto é,

$$0 = (-1+1)^p = \binom{p}{0} - \left[\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}\right]. \tag{3.19}$$

Comparando as equações (3.18) e (3.19) e pelo fato de que $\binom{p}{0} = 1$, então só pode a equação (3.18) ser igual a 1. O que conclui a demonstração.

3.4.2 Número de funções sobrejetoras, função $\alpha(m, n)$.

Indicamos que a demonstração do teorema (3.4.2) a seguir pode ser vista em (FILHO 1985).

Teorema 3.4.2. *Sendo $n(A) = m$ e $n(B) = n$, com $n \leq m$, o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ é dado por:*

$$\alpha(m, n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m. \tag{3.20}$$

Observação: A fórmula apresentada na equação (3.13) parece ser diferente da equação (3.20), mas se fizermos $n - j = i$ então $j = n - i$ e, sendo, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ implica que $i = n, n-1, \ldots, 1, 0$. Ademais, $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, assim[2],

$$\alpha(m, n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m. \tag{3.21}$$

Demonstração. Consideremos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ sabe-se que existem n^m funções $f : A \to B$. Para determinar o número de funções sobrejetoras, subtrai-se desse total o número de funções que não são sobrejetoras. Para isto, considere o seguinte conjunto:

$$C_j = \text{conjunto de todas as funções } g : A \to B \text{ tais que } g^{-1}(y_j) = \emptyset,$$

ou seja, $g(x_i) \neq y_j$, para $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. Deste modo, uma função $g : A \to B$ qualquer deixa de ser sobrejetora quando pertence a pelo menos um dos C_j. E o conjunto de todas as funções g não-sobrejetoras é

$$\Omega = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n. \tag{3.22}$$

Pelo Teorema (3.17)

[2]Na verdade, não há necessidade de se aplicar $j = n$ na equação (3.20) ou $i = 0$ na equação (3.13) = equação (3.21).

$$\begin{aligned} n(\Omega) = &\sum_{i=1}^{n} n(C_i) - \sum_{1\le i<j\le n} n(C_i \cap C_j) \\ &+ \sum_{1\le i<j<r\le n} n(C_i \cap C_j \cap C_r) - \cdots \\ &+ (-1)^{n+1}\, n(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned} n(C_i) &= (n-1)^m, \\ n(C_i \cap C_j) &= (n-2)^m, \\ n(C_i \cap C_j \cap C_r) &= (n-3)^m, \\ &\vdots \\ n(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n) &= (n-n)^m. \end{aligned}$$

Como é preciso escolher um $y_j \in B$ para se obter C_i então há $\binom{n}{1}$ maneiras de se faze-lo, e existem $\binom{n}{2}$ modos de se escolher dois elementos em B a fim de contar $n(C_i \cap C_j)$ e etc. Por fim, substituindo essas informações na equação (3.23), obtém-se,

$$\begin{aligned} n(\Omega) &= \binom{n}{1}(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \binom{n}{3}(n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^m \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}(n-j)^m. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Subtraindo o resultado da equação (3.24), do total geral de funções n^m, obtém-se,

$$\begin{aligned} \alpha(m,n) &= n^m - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}(n-j)^m \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}(n-j)^m \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^m. \end{aligned} \tag{3.25}$$

conforme visto na equação (3.21). E isto conclui a demonstração. □

Como visto nesta subseção, a obtenção da Equação (3.13), a partir da Equação (3.17), já é suficiente para garantir sua validade para todos os números naturais m e

n. Entretanto, na Seção (3.4.3) apresenta-se uma demonstração por indução sobre m da validade da expressão associada à equação de duas variáveis $\alpha(m,n)$,, por constituir um exercício interessante para os leitores interessados no tema.

3.4.3 Propriedade da função $\alpha(m,n)$.

A verificação da validade da equação (3.13), se dará por indução sobre m, e para isto apresenta-se primeiro o seguinte lema, bem como sua demonstração.

Lema 3.4.1. *Sendo m e n números inteiros maiores que 1, então:*

$$\alpha(m,n) = n\left[\alpha(m-1,n-1) + \alpha(m-1,n)\right]. \tag{3.26}$$

Considere os conjuntos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ e a função $f : A \to B$. Fixe um elemento, digamos, $x_1 \in A$ e considere o elemento, digamos, $y_1 \in B$, tal que, $f(x_1) = y_1$. Existem duas possibilidades exclusivas: (i) $f(x) \neq y_1$ para todo $x \in A - \{x_1\}$ ou (ii) Existe $x \in A - \{x_1\}$ tal que $f(x) = y_1$.

O número de sobrejeções $f : A \to B$ tais que $f(x_1) = y_1$ satisfazendo a condição (i) é igual a $\alpha(m-1,n-1)$, pois diminui-se uma possibilidade de escolha em A e em B. E satisfazendo (ii) é igual a $\alpha(m-1,n)$, pois aqui diminui-se apenas uma escolha em A. Portanto, o número total de funções satisfazendo $f(x_1) = y_1$ é igual a soma: $\alpha(m-1,n-1) + \alpha(m-1,n)$. Como existem n possibilidade para escolha de "y_1", segue-se a equação (3.26).

3.4.4 Demonstração da Equação (3.13).

Como já mencionado, a prova seguirá por indução sobre m. Isto significa que, para $m = 1$, temos.

Demonstração.

$$\alpha(1,n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{3.27}$$

Para $n = 1$, tem-se

$$\alpha(1,1) = \sum_{i=1}^{1} (-1)^{1-i} \binom{1}{i} i = 1.$$

Para $n = 2$, tem-se

$$\alpha(1,2) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{2-i} \binom{2}{i} i$$

$$= (-1)^1 \binom{2}{1} \cdot 1 + (-1)^0 \binom{2}{2} \cdot 2$$
$$= -2 + 2 = 0.$$

Suponha $n > 2$ e, usando a relação de Stifel (2.3)

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1},$$

pode-se escrever (3.27) como:

$$\begin{aligned}
\alpha(1,n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i}\, i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] i \\
&= n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] i \\
&= n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} i + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i-1} i \\
&= n - \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} (i+1) + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} i - n + 1 \\
&= 1 - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} i}_{(*)} - \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} i}_{(*)} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n-1)-i} \binom{n-1}{i}. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

E pela fórmula do binômio de Newton, dada por $(x+a)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}\, a^i$, pode-se concluir, fazendo $x = -1$ e $a = 1$, que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot (-1)^{(n-1)-i} \cdot 1^i = (-1+1)^{n-1} = 0, \ \forall\ n > 1. \qquad (3.29)$$

E este resultado mostra a validade de $\alpha(m,n)$ para $m = 1$ e $n > 1$ qualquer[3].

Continuando o processo da prova por indução sobre m, suponhamos agora que

[3]Na verdade, seguindo estas mesmas etapas, pode-se concluir que $\alpha(m,n) = 0$ sempre que $m < n$.

$m \geq 2$ e que a equação (3.13) seja válida para $m-1$ (e n qualquer) e inferiremos a partir daí que esta equação também será verdadeira para m (e n qualquer). Separemos os casos, em que $n = 1$ e $m \geq 2$. Com efeito, se $n = 1$, obtém-se,

$$\alpha(m,1) = \sum_{i=1}^{1} (-1)^{1-i} \binom{1}{i} i^m = (-1)^{1-1} \binom{1}{1} 1^m = 1, \tag{3.30}$$

é claro que se $n = 1 \Longrightarrow B = \{y_1\}$ e deste modo só existe uma única função sobrejetora $f : A \to B$ em que o número de elementos do conjunto A não importa. (3.13) é verdadeira para $n = 1$ e $m \geq 2$. A hipótese de indução nos afirma que é válida a seguinte equação:

$$\alpha(m-1,n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^{m-1}. \tag{3.31}$$

Suponhamos agora que $n > 1$. E usando o Lema (3.4.1) e a relação de Stifel (2.3), obtém-se,

$$\begin{aligned}
\alpha(m,n) &= n\left[\alpha(m-1,n-1) + \alpha(m-1,n)\right], \\
&= n\left[\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i} i^{m-1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^{m-1}\right], \\
&= n\left\{n^{m-1} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\, i^{m-1}\left[\binom{n}{i} - \binom{n-1}{i}\right]\right\}, \\
&= n^m + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\, i^{m-1}\, n\binom{n-1}{i-1}, \\
&= n^m + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^m, \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^m.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Aqui, usou-se ainda a identidade: $\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$. Finalmente, conclui-se que $\alpha(m,n)$ é verdadeira para quaisquer números naturais m e n maiores que 1. $\square$

Em particular, utilizando a equação (3.26), para $m = n$, provaremos, por indução, que $\alpha(n,n) = n!$. Sendo $m = n = 2$, então[4]: $\alpha(2,2) = 2[\alpha(1,1) + \alpha(1,2)] = 2[1+0] = 2 = 2!$. E supondo que $\alpha(n-1,n-1) = (n-1)!$ $(n > 2)$, como nossa hipótese de indução, assim,

$$\alpha(n,n) = n\left[\alpha(n-1,n-1) + \alpha(n-1,n)\right] = n\,\alpha(n-1,n-1) = n\,(n-1)! = n!, \tag{3.33}$$

[4]Rever $\alpha(1,1)$ e $\alpha(1,2)$ na sequência da equação (3.27).

pois, como $n-1<n$, então $\alpha(n-1,n)=0$ para todo $n>2$. Conclui-se, por fim, a seguinte identidade, válida para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n = (-1)^{n-1}\binom{n}{1}+(-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^n+(-1)^{n-3}\binom{n}{3}3^n+\ldots+\binom{n}{n}n^n = n!. \tag{3.34}$$

Para finalizar, apresentam-se, na tabela (3.1) a seguir [5], os valores de $\alpha(m,n)$ para $m,n \in D=\{1,2,3,\ldots,9,10\}$. Perceba o crescimento exorbitante de $\alpha(m,n)$ a medida que m,n percorre o conjunto D, por exemplo, $\alpha(10,8)=30\,240\,000$, ou seja, valor superior a 30 milhões de funções sobrejetoras $f:A\to B$, com $n(A)=10$ e $n(B)=8$.

Tabela 3.1: Valores de $\alpha(m,n)$. Primeira coluna tem-se $m \in \{1,2,\ldots,10\}$ e na primeira linha tem-se $n \in \{1,2,\ldots,10\}$.

m,n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
6	1	62	540	1 560	1 800	720	0	0	0	0
7	1	126	1 806	8 400	16 800	15 120	5 040	0	0	0
8	1	254	5 796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320	0	0
9	1	510	18 150	186 480	834 120	1 905 120	2 328 480	1 451 520	362 880	0
10	1	1 022	55 980	818 520	5 103 000	16 435 440	29 635 200	30 240 000	16 329 600	3 628 800

Aqui vimos o modo de se obter o número de funções sobrejetoras entre dois conjuntos finitos e apresentou-se uma demonstração, por indução, da validade de tal fórmula, em que, destacam-se a utilização das identidades da relação de Stiffel, do binômio de Newton e do princípio da inclusão e exclusão. Tais resultados reforçam a importância dos docentes buscarem constantemente ampliar seus conhecimentos em Análise Combinatória, área fundamental para a formação matemática e para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

A sequência apresentada no capítulo 2 possibilitou a construção do Triângulo de Pascal de forma intuitiva, a partir da relação de Stifel, permitindo também a organização e a demonstração de algumas de suas propriedades fundamentais, como os teoremas das linhas, das colunas e das diagonais. A partir dessa construção, torna-se possível estabelecer uma relação conceitual com a Análise Combinatória, especialmente por meio da ideia de combinações e dos coeficientes binomiais. Por fim, no capítulo 3 apresenta-se o Teorema do Binômio, evidenciando que os coeficientes presentes em sua expansão correspondem exatamente aos elementos do Triângulo de Pascal, reforçando, assim, a conexão estrutural existente entre esses conteúdos matemáticos.

[5] Os números apresentados foram obtidos a partir de um código desenvolvido em FORTRAN. Para mais detalhes, veja o Apêndice A.

Capítulo 4

A abordagem do Triângulo de Pascal e do Binômio de Newton na BNCC

4.1 A aprendizagem da álgebra no ensino

As aprendizagens essenciais que todos os estudantes da Educação Básica Brasileira devem desenvolver são definidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) . Esse documento estabelece diretrizes para a organização curricular das diferentes áreas do conhecimento, sendo referência para a elaboração de currículos, materiais didáticos e práticas pedagógicas. Sua proposta busca garantir equidade educacional e promover o desenvolvimento integral dos estudantes (SILVA, 2023).

Em ralação ao componente curricular de Matemática, a BNCC enfatiza o letramento matemático, incentivando a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a capacidade de argumentação (COSTA, 2025). Nesse sentido a BNCC estrutura o ensino da matemática em grandes eixos que orientam o desenvolvimento das aprendizagens, chamados de Unidades Temáticas. Entre essas unidades estão: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística.

Deste modo, vê-se a introdução do pensamento algébrico desde os anos iniciais. Isso rompe com a visão tradicional de que a Álgebra deve ser ensinada apenas nos anos finais, promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas desde o início da escolarização. Essa organização permite que os conteúdos sejam trabalhados de maneira integrada, favorecendo a construção de significados e a articulação entre diferentes conceitos matemáticos. Assim, introdução da unidade temática Álgebra nos anos iniciais evidencia uma mudança curricular importante, ao reconhecer o desenvolvimento do pensamento algébrico desde cedo (LIMA, 2017).

Segundo Oliveira (2020), a BNCC propõe o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o 1º ao 5º ano, por meio de tarefas que envolvem sequências, equivalências e relações entre grandezas. Essa abordagem está alinhada ao movimento internacional conhecido como Early Álgebra [1], que defende a introdução precoce de ideias algébricas. Nos anos iniciais, a Álgebra se manifesta principalmente por meio de atividades que envolvem padrões e relações, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes (SANTOS e SILVA 2020).

4.2 Habilidades relacionadas no desenvolvimento da unidade temática de Álgebra na BNCC

A unidade temática Álgebra assume papel central na formação do pensamento matemático, especialmente pela sua capacidade de promover processos de generalização, modelação e abstração. Deste modo, as habilidades no desenvolvimento dessa unidade temática são fundamentais para a análise do ensino de Álgebra ao longo da Educação Básica.

Assim sendo, a BNCC define habilidades como descrições das aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver, expressas por meio de verbos que indicam processos cognitivos articulados a objetos de conhecimento (BRASIL 2018). Diferentemente de abordagens curriculares, centradas exclusivamente em conteúdos, a BNCC adota uma perspectiva orientada para a ação do sujeito, enfatizando o que o estudante deve ser capaz de fazer com o conhecimento.

São as habilidades, portanto, que operam como elementos articuladores que dão concretude ao currículo. Em outras palavras, orientam a prática pedagógica, indicando como os conteúdos devem ser mobilizados no processo de ensino-aprendizagem. Essa concepção de habilidades insere-se em um movimento internacional de reorganização curricular, orientado por competências, amplamente difundido por organismos como a OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) (OECD 2019).

Adicionalmente, Perrenound (1999) já destacava que o desenvolvimento de habilidades envolve mobilização de conhecimentos em situações complexas, o que reforça a necessidade de práticas pedagógicas que transcendam a repetição mecânica.

No caso da unidade temática Álgebra, as habilidades desempenham papel decisivo na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. Segundo Blanton (2005), esse processo envolve o desenvolvimento de três dimensões principais: a generalização de padrões, o uso de símbolos e a modelagem de relações. Tais dimensões estão explicitamente contempladas nas habilidades da BNCC (BRASIL 2018).

Oliveira (2020) evidenciam que as habilidades algébricas na BNCC apresentam uma progressão estruturada, na qual o estudante transita de abordagens iniciais, baseadas na identificação intuitiva de padrões e regularidades, para níveis mais avançados

[1] O movimento Early Algebra refere-se a uma abordagem da Educação Matemática que defende o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais da escolarização, por meio da exploração de padrões, relações e generalizações, antes da introdução formal da álgebra simbólica.

de formalização, caracterizados pelo uso de linguagem simbólica e pela manipulação de expressões e equações algébricas nos anos finais do Ensino Fundamental. Sob essa perspectiva, as habilidades não apenas orientam o ensino, mas garantem a progressão cognitiva, elemento essencial para a aprendizagem significativa.

4.3 Habilidades do ensino de Álgebra no Ensino Fundamental

As habilidades, relacionadas à Álgebra no Ensino Fundamental, estão distribuídas ao longo de todo o percurso escolar e refletem uma concepção ampliada de pensamento algébrico. Nos anos iniciais, destacam-se habilidades relacionadas à identificação de padrões e regularidades; nos anos finais, há ênfase na formalização por meio de expressões algébricas, equações e funções.

Segundo Blanton (2005), o desenvolvimento precoce do pensamento algébrico contribui significativamente para o desempenho matemático posterior. No contexto brasileiro, Ferreira (2016) corroboram essa perspectiva ao demonstrar que estudantes expostos a práticas que envolvem generalização apresentam melhor desempenho em resolução de problemas algébricos.

Estudos empíricos têm demonstrado que dificuldades em Álgebra frequentemente estão associadas a lacunas conceituais construídas nos anos iniciais, especialmente no que se refere à compreensão de equivalência e relações matemáticas. Pesquisas longitudinais indicam que a compreensão precoce da igualdade é um preditor significativo do desempenho posterior em Álgebra (HORNBURG, 2021).

Ademais, evidências quantitativas mostram que estudantes com dificuldades matemáticas iniciais apresentam desempenho significativamente inferior em raciocínio algébrico.

4.4 Análise de habilidades específicas

Dentre as habilidades previstas na BNCC, destacam-se, para os propósitos deste estudo, as habilidades, EF06MA14 EF08MA06, EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA18, EF08MA08, EF09MA06, EF09MA09 e a EM13MAT302, por representarem momentos-chave na formalização e no aprofundamento do pensamento algébrico. (BRASIL 2018).

No 6º ano, a habilidade (EF06MA14) contempla o reconhecimento das propriedades da igualdade, levando o estudante a compreender que a equivalência entre os membros de uma sentença matemática é preservada quando ambos são submetidos à mesma operação de adição, subtração, multiplicação ou divisão.

No 7º ano, observa-se ampliação significativa das competências algébricas. A habilidade (EF07MA13) introduz a ideia de variável representada por letra ou símbolo para expressar relações entre grandezas, diferenciando-a da noção de incógnita. Essa distinção é relevante porque permite ao estudante compreender que a Álgebra não se restringe à busca de valores desconhecidos, mas envolve também a modelagem de situações gerais e dependências funcionais. As habilidades (EF07MA14), (EF07MA15) e (EF07MA16) enfatizam o estudo de sequências, regularidades e equivalência entre expressões algébricas. O trabalho com padrões constitui importante porta de entrada para o pensamento algébrico, pois favorece processos de generalização e formulação de regras. De acordo com (BORTOLOTE, 2024) a BNCC evidencia uma concepção de Álgebra centrada no reconhecimento de regularidades e no desenvolvimento da capacidade de generalizar propriedades matemáticas. Ainda no 7º ano, as habilidades (EF07MA17) e (EF07MA18) articulam Álgebra e resolução de problemas ao tratar de proporcionalidade direta e inversa, bem como de equações polinomiais do 1º grau. Nesse momento, a linguagem algébrica torna-se ferramenta de representação e modelagem, aproximando a Matemática de contextos reais e ampliando a compreensão do estudante acerca das aplicações sociais do conhecimento matemático.

No 8º ano, o percurso formativo avança para conteúdos mais formais. A habilidade (EF08MA06) contempla o cálculo do valor numérico de expressões algébricas, consolidando propriedades operatórias e substituição de variáveis por valores específicos. Já as habilidades (EF08MA07) e (EF08MA08) promovem a integração entre Álgebra e Geometria Analítica ao associar equações lineares de duas incógnitas a retas no plano cartesiano e utilizar sistemas lineares na resolução de problemas contextualizados. A habilidade (EF08MA10) amplia esse campo ao propor identificação de regularidades em sequências figurais não recursivas e construção de algoritmos por meio de fluxogramas. Essa orientação aproxima o ensino da Álgebra do pensamento computacional, habilidade cada vez mais necessária na contemporaneidade.

No 9º ano, a habilidade (EF09MA06) sistematiza o conceito de função como relação de dependência unívoca entre variáveis, contemplando representações numéricas, gráficas e algébricas. Trata-se de conteúdo fundamental para a transição ao Ensino Médio. Por sua vez, a habilidade (EF09MA09) aborda fatoração algébrica e produtos notáveis, articulando tais procedimentos à resolução de equações do 2º grau.

Já a habilidade (EM13MAT302), no Ensino Médio, aprofunda esse percurso ao propor a modelagem e análise de funções, integrando representações algébricas e gráficas em situações mais complexas (BRASIL 2018)

Dessa forma, a análise dessas habilidades permite compreender não apenas a progressão curricular da Álgebra, mas também os desafios inerentes ao seu desenvolvimento, especialmente no que se refere à transição entre diferentes níveis de abstração. Ao focalizar essas três habilidades, busca-se evidenciar como o currículo orienta a construção do pensamento algébrico e quais são as implicações pedagógicas para o ensino, considerando a necessidade de promover aprendizagens significativas e articuladas ao longo da trajetória escolar.

4.5 Consequências da não aprendizagem dessas habilidades

A não consolidação das habilidades algébricas compromete significativamente o desempenho matemático do estudante. Nesse sentido, Ferreira (2016) identificou que alunos com dificuldades na resolução de equações tendem a apresentar desempenho inferior em conteúdos subsequentes, como funções e geometria analítica. Santos (2020), por sua vez, apontam uma correlação entre dificuldades em Álgebra, baixos resultados em avaliações externas e maiores índices de evasão em áreas que demandam conhecimentos matemáticos mais avançados.

Esses dados reforçam a ideia de que a aprendizagem da Álgebra possui caráter cumulativo, sendo dependente da consolidação progressiva das habilidades.

4.6 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton como metodologia alternativa no ensino da Álgebra

A utilização de metodologias alternativas no ensino básico tem se consolidado como uma estratégia essencial para enfrentar dificuldades históricas relacionadas à aprendizagem dessa área. O ensino tradicional, frequentemente centrado na repetição de procedimentos e na memorização de regras, tem se mostrado insuficiente para promover a compreensão conceitual e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Nesse contexto, diferentes estudos apontam a necessidade de práticas pedagógicas que valorizem a construção ativa do conhecimento, a resolução de problemas e a contextualização dos conteúdos (SANTOS e SILVA 2020).

A importância dessas metodologias alternativas reside, sobretudo, na capacidade de engajar os estudantes e favorecer aprendizagens significativas. Ao deslocar o foco do ensino para o estudante, tais abordagens permitem que ele participe ativamente do processo, estabelecendo relações, formulando hipóteses e desenvolvendo autonomia intelectual. Conforme evidenciado por Silva (2020), propostas didáticas diferenciadas contribuem para a redução de dificuldades em conteúdos matemáticos, uma vez que tornam o aprendizado mais acessível e conectado à realidade dos alunos. De modo semelhante, Santos (2020) destacam que a diversificação metodológica é fundamental para superar lacunas conceituais acumuladas ao longo da escolarização básica.

Nesse cenário, o Triângulo de Pascal se apresenta como uma potente ferramenta didática e uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática. Trata-se de uma estrutura numérica simples em sua construção, mas rica em propriedades matemáticas, permitindo múltiplas abordagens pedagógicas. Sua utilização possibilita a exploração de conceitos como padrões, regularidades, combinações, coeficientes binomiais e relações algébricas de forma visual e investigativa. Segundo Silva (2020), o Triângulo de Pascal favorece a compreensão de conceitos abstratos ao proporcionar uma representação concreta e organizada das relações matemáticas.

Além disso, o uso do Triângulo de Pascal permite integrar diferentes conteúdos matemáticos, promovendo uma visão mais articulada do conhecimento. Por meio dele, é possível trabalhar desde conteúdos introdutórios no Ensino Fundamental, como identificação de padrões, até conceitos mais avançados no Ensino Médio, como o binômio de Newton e análise combinatória. Santos (2020) ressalta que essa ferramenta contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico, ao incentivar o reconhecimento de regularidades e a generalização de resultados.

No que se refere às aplicações no contexto escolar, os estudos analisados apresentam diferentes possibilidades de uso do Triângulo de Pascal. No Ensino Fundamental, sua aplicação está frequentemente associada à identificação de padrões numéricos e à construção de sequências, permitindo que os alunos desenvolvam habilidades investigativas e de organização do pensamento matemático Silva (2020). Já no Ensino Médio, o Triângulo de Pascal é amplamente utilizado para introduzir conceitos de análise combinatória e para compreender a expansão de potências binomiais, estabelecendo conexões com conteúdos algébricos mais complexos.

As práticas pedagógicas envolvendo o Triângulo de Pascal geralmente se baseiam em atividades exploratórias, nas quais os estudantes são convidados a construir o triângulo, observar suas propriedades e formular conjecturas. Santos (2020) destaca que esse tipo de abordagem favorece a aprendizagem ativa, pois coloca o aluno como protagonista do processo. Além disso, o uso de recursos visuais e a possibilidade de manipulação dos dados contribuem para tornar o conteúdo mais compreensível e significativo.

Em relação aos resultados dessas aplicações, os estudos indicam impactos positivos tanto no desempenho quanto na atitude dos estudantes em relação à Matemática. Observa-se melhora na compreensão de conceitos, especialmente aqueles relacionados à combinatória e à álgebra, bem como maior interesse e participação nas aulas, Silva (2020) aponta que o uso do Triângulo de Pascal contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de generalização, habilidades essenciais para o aprendizado matemático.

Além disso, Silva (2020) evidencia que a utilização de metodologias alternativas, como o Triângulo de Pascal, pode reduzir erros conceituais recorrentes, ao permitir que os alunos compreendam o significado dos procedimentos matemáticos, e não apenas os executem mecanicamente. Santos (2020) reforça que essas práticas favorecem a construção de uma aprendizagem mais duradoura, uma vez que estão baseadas na compreensão e não na memorização.

Dessa forma, conclui-se que o uso de metodologias alternativas no ensino de Matemática é fundamental para promover aprendizagens mais significativas e efetivas no Ensino Fundamental e Ensino Médio. O Triângulo de Pascal, nesse contexto, destaca-se como uma ferramenta didática versátil e eficiente, capaz de articular diferentes conteúdos e desenvolver habilidades essenciais ao pensamento matemático. As evidências apresentadas pelos estudos analisados demonstram que sua aplicação contribui significativamente para a melhoria do desempenho dos estudantes, além de tornar o ensino mais dinâmico e envolvente, atendendo às demandas contemporâneas da educação matemática.

Dando continuidade à discussão acerca do uso do Triângulo de Pascal como metodologia alternativa no ensino de Matemática, sua articulação com o Binômio de Newton no Ensino Médio representa um avanço natural no processo de formalização algébrica. Essa estratégia está alinhada com perspectivas contemporâneas da Educação Matemática, que defendem o uso de múltiplas representações e a resolução de problemas como elementos centrais do processo de ensino e aprendizagem. Conforme discutido por Durval (2012), ao enfatizar a importância dos registros de representação semiótica, e por Schoenfeld (2016), ao destacar a resolução de problemas como eixo estruturante do pensamento matemático.

O Triângulo de Pascal, ao organizar os coeficientes binomiais de forma sistemática, oferece suporte visual e conceitual para a compreensão da expansão de $(a+b)^n$, favorecendo a construção de significados e a consolidação do pensamento algébrico. Nesse sentido, a integração entre essas duas ferramentas contribui para uma aprendizagem mais significativa, ao conectar conceitos de álgebra e análise combinatória. Conforme Blanton (2005), o desenvolvimento do pensamento algébrico está diretamente relacionado à capacidade de generalizar padrões e estabelecer relações, aspectos fortemente mobilizados pelo uso do Binômio de Newton.

Do ponto de vista metodológico, o ensino do Binômio de Newton ganha maior efetividade quando inserido em práticas investigativas que valorizam a construção ativa do conhecimento. Em vez de apresentar a fórmula de forma direta, o professor pode conduzir os estudantes à sua descoberta por meio da análise do Triângulo de Pascal, promovendo uma abordagem mais significativa e menos mecanizada. Essa estratégia está alinhada com perspectivas contemporâneas da Educação Matemática, que defendem o uso de múltiplas representações e a resolução de problemas como elementos centrais do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Schoenfeld (2016), a compreensão matemática é ampliada quando os estudantes são envolvidos em atividades que exigem interpretação, argumentação e generalização, em oposição à mera aplicação de algoritmos. Além disso, estudos no contexto brasileiro indicam que a articulação entre combinatória e álgebra, por meio de recursos como o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton, favorece o desempenho dos estudantes e amplia sua capacidade de resolver problemas complexos Santos (2020). Dessa forma, o trabalho com o Binômio de Newton não apenas aprofunda conteúdos matemáticos, mas também fortalece competências fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático no Ensino Médio.

4.7 Aplicações do Triângulo de Pascal e Binomio de Newton no ensino da álgebra

Tendo em vista o contexto apresentado, o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton emergem como ferramentas didáticas potentes para o ensino da Álgebra na Educação Básica. Diferentemente de abordagens tradicionais, centradas na aplicação mecânica, o uso articulado dessas ferramentas favorece a construção do conhecimento. Nesse sentido, o triângulo de pascal permite que os estudantes visualizem regularidades numéricas e compreendam a formação dos coeficientes binomiais, enquanto o Binômio de Newton formaliza essas relações em linguagem algébrica.

Conforme evidenciado por Silva (2013), a utilização dessas estratégias em sala de aula contribui para tornar o ensino mais dinâmico e significativo, ao possibilitar que os alunos construam conceitos a partir da exploração de estruturas matemáticas. De forma semelhante, Costa (2022) destaca que o trabalho com Triangulo de pascal e Binômio de Newton, quando associado à resolução de problemas, favorece o desenvolvimento do raciocínio algébrico e reduz dificuldades operacionais recorrentes.

No que se refere à BNCC, o uso desses conceitos apresenta grande potencial para o desenvolvimento de habilidades específicas da Álgebra. Santiago (2016) evidencia que a utilização do Triangulo de Pascal como recurso introdutório possibilita uma transição mais fluida para conteúdos mais abstratos, como o Binômio de Newton, contribuindo para a consolidação do pensamento algébrico ao longo da escolarização. Nessa mesma perspectiva, Rocha (2015) apontam que a articulação entre combinatória e Álgebra, mediada por esses recursos, amplia a capacidade de generalização dos estudantes, elemento essencial para o desenvolvimento das competências previstas na BNCC.

Alguns estudos analisados indicam impactos positivos no processo de ensino e aprendizagem. Santos (2025), ao investigar o uso de tarefas exploratórias envolvendo o Triângulo de Pascal, verificou que os estudantes apresentaram maior engajamento e melhor desempenho na resolução de problemas algébricos, especialmente aqueles que exigiam identificação de padrões e generalização.

De forma complementar, Silva (2013) relata que a utilização de atividades baseadas no Triângulo de Pascal e no Binômio de Newton contribuiu para a redução de erros conceituais e para aumentar a participação dos alunos nas aulas, evidenciando um processo de aprendizagem mais ativo e significativo

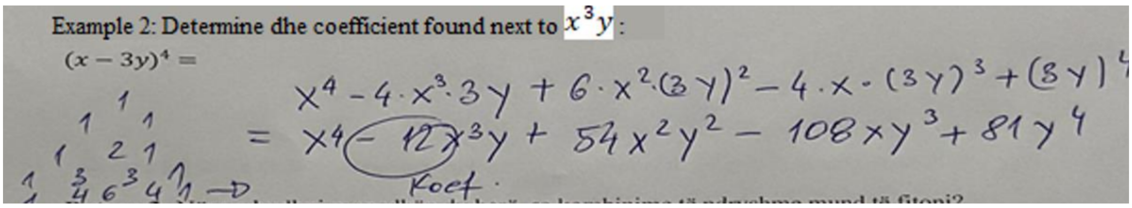
Costa (2022), por sua vez, destaca que a abordagem investigativa, aliada ao uso dessas ferramentas, favorece a compreensão de conceitos abstratos, tornando-os mais acessíveis aos estudantes.

Já Santiago (2016) demonstra que a integração entre Triângulo de Pascal e Binômio de Newton possibilita uma aprendizagem progressiva, na qual os alunos partem de representações concretas e alcançam níveis mais elevados de abstração.

Rocha (2015), ao analisarem tarefas investigativas no Ensino Médio, observam que a substituição de uma abordagem tradicional para atividades exploratórias promove uma transformação no papel do aluno, que passa a atuar de forma mais ativa na construção do conhecimento, propondo hipóteses, identificando regularidades e elaborando argumentos matemáticos. Os relatos dos estudantes indicam que esse tipo de abordagem torna a aprendizagem mais significativa e prazerosa, além de favorecer a compreensão dos conceitos, já que os alunos deixam de apenas aplicar procedimentos e passam a entender os fundamentos matemáticos envolvidos.

Estudos que mensurem diretamente os resultados em exames e provas são escassos no Brasil. Entretanto, Aliu (2023) mensuraram o impacto direto do Triângulo de Pascal na resolução de polinômios binomiais, com alunos na Sérvia. Os autores aplicaram um teste sem a utilização do Triângulo de Pascal e posteriormente comparam os resultados a outro teste, com os de um segundo teste, realizado após quatro semanas de ensino dessa ferramenta. Nos testes evidenciou-se a abertura do Triângulo de Pascal pelos alunos na resolução de polinômios, conforme a Imagem 4.1. Além disso, os pesquisadores observaram um aumento significativo no desempenho dos estudantes, cuja média de acertos passou de 5,16 para 7,4 após a intervenção pedagógica.

Figura 4.1: Uso do triangulo de pascal para resolução de polinômios por alunos



Fonte: (ALIU 2023).

Com base no exemplo apresentado na Figura 4.1, é possível inferir que a atividade contempla as habilidades (EF09MA06) a (EF09MA09) e a (EM13MAT302). Isso evidencia que, embora o Triângulo de Pascal não seja mencionado pela BNCC, ele pode ser utilizado para uma melhor consolidação das habilidades pelos estudantes.

Dessa forma, os resultados das pesquisas analisadas reforçam que o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton constituem não apenas conteúdos matemáticos, mas também estratégias metodológicas eficazes para o ensino da Álgebra. Ao promoverem a articulação entre diferentes representações e favorecerem a construção ativa do conhecimento, essas ferramentas contribuem para o desenvolvimento de habilidades essenciais, conforme preconizado pela BNCC. Além disso, sua aplicação em contextos reais de sala de aula evidencia seu potencial para melhorar o desempenho dos estudantes e tornar o ensino de Matemática mais significativo e contextualizado.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC enfatiza o desenvolvimento da linguagem algébrica, das generalizações e dos produtos notáveis, criando um ambiente propício para a utilização do Triângulo de Pascal como ferramenta de apoio à compreensão desses conteúdos. Nesse sentido, a proposta apresentada neste trabalho se mostra coerente com as diretrizes curriculares, ao promover uma aprendizagem significativa e contextualizada.

No Ensino Médio, a BNCC propõe o aprofundamento e a integração dos conhecimentos matemáticos, com ênfase em processos de investigação, modelagem e argumentação. Nesse contexto, o Binômio de Newton surge como uma extensão natural das ideias desenvolvidas no Ensino Fundamental, permitindo a formalização das regularidades observadas no Triângulo de Pascal. Além disso, a articulação entre diferentes registros de representação — numérico, algébrico e combinatório — contribui para o desenvolvimento de competências essenciais para o letramento matemático.

Outro aspecto relevante diz respeito à interdisciplinaridade presente na abordagem proposta. O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton estabelecem conexões com diferentes áreas da Matemática, como Álgebra, Análise Combinatória e Probabilidade, possibilitando uma visão mais integrada do conhecimento. Essa característica está em consonância com a orientação da BNCC, que propõe a superação da fragmentação dos conteúdos e a construção de uma compreensão mais ampla e articulada da Matemática.

Capítulo 5

Considerações finais

Ao longo deste trabalho, buscou-se apresentar uma abordagem integrada do triângulo de Pascal e do Binômio de Newton, articulando aspectos históricos, conceituais e didáticos, com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos algébricos na Educação Básica. A construção dessa proposta partiu da compreensão de que o ensino de Matemática, frequentemente pautado na memorização de regras e fórmulas, pode ser ressignificado por meio de abordagens que privilegiem a investigação, a identificação de padrões e a construção ativa do conhecimento.

Inicialmente, foi apresentado um panorama histórico do Triângulo de Pascal, evidenciando sua construção e utilização. Esse resgate histórico permitiu compreender que o conhecimento matemático é fruto de um processo coletivo e contínuo de construção, reforçando a importância de contextualizar os conteúdos trabalhados em sala de aula.

Em seguida, foram exploradas as propriedades fundamentais do Triângulo de Pascal, com destaque para a relação de Stifel, que constitui a base de sua construção, e para os teoremas das linhas, das colunas e das diagonais. As demonstrações apresentadas, em especial aquelas desenvolvidas por indução matemática, contribuíram para evidenciar o rigor dessas propriedades, ao mesmo tempo em que possibilitaram a compreensão de sua estrutura e de suas regularidades.

A análise dessas propriedades permitiu estabelecer conexões com a Análise Combinatória, particularmente com o conceito de combinação. Nesse contexto, os elementos do Triângulo de Pascal foram interpretados como resultados de contagens de subconjuntos de um conjunto finito, o que possibilitou uma compreensão mais significativa dos coeficientes binomiais. Essa abordagem favorece a superação de uma visão meramente operacional da combinatória, promovendo uma compreensão conceitual fundamentada em significados matemáticos.

A partir dessas relações, foi possível estabelecer a conexão com o Binômio de Newton, evidenciando que os coeficientes presentes na expansão de $(a + b)^n$ correspondem exatamente aos elementos do Triângulo de Pascal. Essa relação constitui um dos principais eixos deste trabalho, pois permite compreender que expressões como o Binômio de Newton e até mesmo os produtos notáveis podem ser aprendidas com contexto e não simplesmente serem memorizadas, mas como resultados de padrões previamente identificados e generalizados. Dessa forma, a passagem do Triângulo de Pascal para o Binômio de Newton representa a transição de uma abordagem empírica para uma formalização algébrica mais ampla e generalizada.

No campo didático, a proposta apresentada fundamenta-se na ideia de que o ensino pode ser significativamente enriquecido quando articulado com a construção e interpretação do Triângulo de Pascal. Ao explorar padrões numéricos e promover a investigação, o professor possibilita que o aluno compreenda a origem das expressões algébricas, desenvolvendo um pensamento matemático mais autônomo e crítico. Essa abordagem contribui para reduzir a dependência de memorização mecânica, favorecendo a construção de significados e o desenvolvimento da capacidade de generalização.

A análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforçou a pertinência dessa proposta, evidenciando que, embora o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton não sejam explicitamente mencionados como objetos de conhecimento, suas abordagens estão plenamente alinhadas às competências e habilidades previstas para a área de Matemática. No Ensino Fundamental, destacam-se as habilidades relacionadas à identificação de padrões, à resolução de problemas de contagem e à construção do pensamento algébrico, que constituem a base para a introdução do Triângulo de Pascal de forma intuitiva e progressiva.

Diante do exposto, conclui-se que a utilização do Triângulo de Pascal e do Binômio de Newton no ensino de Matemática constitui uma estratégia didática relevante e coerente com as diretrizes da BNCC. Ao promover a investigação, a identificação de padrões e a generalização, essa abordagem contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para a formação de estudantes mais autônomos e críticos.

Por fim, espera-se que este trabalho possa contribuir para a reflexão sobre práticas pedagógicas no ensino de Matemática, incentivando a adoção de metodologias que valorizem a construção do conhecimento e a compreensão dos conceitos, em detrimento da simples reprodução de procedimentos. Acredita-se que, ao integrar história, teoria e prática, é possível tornar o ensino de Matemática mais significativo, favorecendo não apenas o desempenho escolar dos estudantes, mas também sua formação como cidadãos capazes de interpretar, analisar e atuar criticamente na sociedade.

Apêndice A

Código em FORTRAN

FORTRAN (*Formula Translation*) é uma linguagem de programação desenvolvida na década de 1950 pela IBM, sendo uma das primeiras linguagens de alto nível voltadas para aplicações científicas e matemáticas. Sua criação teve como principal objetivo facilitar a implementação de cálculos numéricos e algoritmos matemáticos de maneira eficiente e confiável.

Ao longo das décadas, o FORTRAN consolidou-se como uma das linguagens mais utilizadas em computação científica, especialmente em áreas que envolvem grande volume de cálculos, tais como matemática aplicada, física, engenharia e simulações computacionais. Entre suas principais características destacam-se a eficiência no processamento numérico, a precisão em operações matemáticas e a facilidade de implementação de algoritmos iterativos.

Neste trabalho, o código apresentado em FORTRAN foi utilizado para auxiliar na geração e verificação de resultados relacionados ao Triângulo de Pascal e aos coeficientes binomiais, possibilitando automatizar cálculos e validar propriedades matemáticas discutidas ao longo da dissertação.

Abaixo temos a linha de programação em FORTRAN para o cálculo da tabela 3.1 e também a programação do cálculo do Triângulo de Pascal.

```
program al
implicit none
integer(8) :: m,n,i,j,k,l,v
real*8 :: w,u,ri,rj,rv
real*8, allocatable, dimension (:,:) :: alfa
m =  13
n =  13
allocate (alfa(1:m,1:n))
! arquivo de saida ''comb.dat'', se refere ao triangulo de pascal.
open(unit=11, file="comb.dat", status = "unknown")
 do i = 0,m
```

```
    do j = 0,n
       write(11,*) i,j, bi(i,j)
   enddo
  enddo
 close(unit=11)
 !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
 open(unit=12, file="matriz.dat", status = "unknown")
 do i = 1,m
      ri = float(i)
      do j = 1,n
          rj = float(j)
          w = 0.0
          do v = 1,j
             rv = float(v)
             w = w + ((-1.0)**(rj-rv))*bi(j,v)*(1.0*rv**ri)
          enddo
          alfa(i,j) = w
          write(12,*) i, j , alfa(i,j)
       enddo
  enddo
 close(unit=12)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
contains
 !numero binominal
 real*8 function bi(e,r)
        integer(8), intent(in) :: e, r
        integer(8) :: i
        real*8 :: num, den,fi,fe
     if (e.ge.r) then
        num = 1.0
        den = 1.0
          do i = 1, r
            fi = float(i)
            fe = float(e)
            num = num *(fe - fi + 1.0)
            den = den * fi
        end do
        bi = num / den
        else if (e.lt.r) then
        bi = 0.0
        endif
```

```
      end function bi

end program al
```

Referências

AFFONSO, A. *O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

ALIU, A.; REXHEPI, S.; ISENI, E. Efficiency of understanding some mathematical problems by means of pascal's triangle. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 18, n. 4, p. em0753, 2023. ISSN 1306-3030. Acesso em: 26 abr. 2026. Disponível em: <https://doi.org/10.29333/iejme/13713>.

BENEVIDES, F. S. *Material Teórico – Módulo Binômio de Newton e Triângulo de Pascal: Soma de Elementos em Linhas, Colunas e Diagonais*. 2023. OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: http://matematica.obmep.org.br/.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

BORTOLOTE, J. C.; BICUDO, M. A. V. O pensar algébrico explicitado na bncc sob análise. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 38, p. e230285, 2024. ISSN 1980-4415. Acesso em: 27 abr. 2026. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230285>.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 8 mar. 2026. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

COSTA, M. d. S.; MARTINS, A. C. d. J.; NUNES, C. B. Ensino de álgebra no sexto ano do ensino fundamental: orientações didático-pedagógicas com base na bncc. *Revista Educação Matemática em Foco*, v. 13, n. 1, 2025.

COSTA, S. V. *Binômio de Newton e Aplicações no Ensino Médio*. 51 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. ISSN 1981-1322. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

FERNANDES, A. d. S. *Resolução de problemas olímpicos envolvendo análise combinatória e probabilidade através da metodologia de Polya*. 223 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Pura e Aplicada)) — Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2021.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, C. M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. *Educação e Fronteiras On-Line*, Dourados, MS, v. 6, n. 17, p. 34–47, 2016. ISSN 2237-258X.

FILHO, M. F. A. Número de sobrejeções entre dois conjuntos finitos. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 7, 1985.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

HORNBURG, C. B.; DEVLIN, B. L.; MCNEIL, N. M. Earlier understanding of mathematical equivalence in elementary school predicts greater algebra readiness in middle school. *Journal of Educational Psychology*, v. 113, n. 3, p. 540–559, 2021. Acesso em: 26 abr. 2026. Disponível em: <https://doi.org/10.1037/edu0000683>.

LIMA, J. R. d. C.; BIANCHINI, B. L. A álgebra e o pensamento algébrico na proposta de base nacional curricular comum para os anos iniciais do ensino fundamental. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 197–208, 2017.

LOPES, M. S. Monografia (Graduação em Matemática), *Triângulo de Pascal: história, algumas de suas aplicações e uma proposta didática para o ensino*. Araguaína: [s.n.], 2018. 44 p.

OECD. *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. Paris: OECD Publishing, 2019. Acesso em: 26 abr. 2026. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>.

OLIVEIRA, I.; FARIAS, L. M. S. Bncc: uma análise das tarefas prescritas na unidade temática álgebra. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 11, n. 2, p. 1–23, 2020. ISSN 2177-9309.

PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed Editora, 1999. Obra originalmente publicada como *Construire des compétences dès l'école*. Paris: ESF, 1997.

PINTO, R. C. *Introdução à análise combinatória.* 59 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

ROCHA, M. M.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. d. Tarefa matemática investigativa no ensino médio: uma análise de resoluções de três estudantes investigando o triângulo de pascal. *Ensino de Ciências e Matemática*, p. 95, 2015.

ROSADAS, V. D. S. *Triângulo de Pascal: curiosidades e aplicações na escola básica.* 70 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

SANTIAGO, T. P. *Triângulo de Pascal: aplicações no ensino fundamental e médio.* Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.

SANTOS, A. A. M. d. *Binômio de Newton: Uma abordagem no campo da análise combinatória para o ensino médio.* 107 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

SANTOS, C. A. B. d.; SILVA, E. A. d. Ensino de álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: uma reflexão sobre a bncc e o currículo municipal. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 11, n. 3, 2020. ISSN 2177-9309.

SANTOS, I. G. d. *Analiticidade do Binômio de Newton e Triângulo de Pascal no ensino da matemática: contribuições histórica, formação de professores, aplicabilidade teórica e contextualizada.* 83 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Pará, Abaetetuba, 2025.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007. ISBN 978-85-7393-634-6.

SANTOS, N. L. P. *O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci.* 111 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional)) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2017.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* [S.l.]: National Council of Teachers of Mathematics, 2016. Reprint.

SILVA, G. A. d.; CANCIAN, Q. G.; MALACARNE, V. Matemática na base nacional comum curricular para o ensino fundamental: o que é dito sobre as tecnologias digitais? *Ensino & Pesquisa*, v. 21, n. 2, p. 308–322, 2023.

SILVA, L. D. d. S. d.; ELIAN, S. N. Aprendendo as propriedades do triângulo de pascal através de atividades dinâmicas. In: *Anais da VIII Jornada Nacional de Educação Matemática e XXI Jornada Regional de Educação Matemática*. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2020. 06 a 08 maio 2020. Eixo Temático: Pesquisa em Educação Matemática. Modalidade: Comunicação Científica.

SILVA, S. D. d. *Estudo do binômio de Newton*. 60 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

SOUZA, G. M. d. Monografia (Graduação em Matemática), *Indução Matemática e aplicações*. Caicó: [s.n.], 2023.

VILEKIN, N. Y. *Combinatorial Mathematics for Recreation*. Moscow: Mir Publishers, 1972. Disponível em: https://archive.org/details/VilenkinCombinatorialMathematics. Acesso em: 7 mar. 2026.