UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ELVES RODRIGUES PANTOJA

CARACTERIZAÇÃO E APLICAÇÃO DE FUNÇÕES AFINS, QUADRÁTICAS E EXPONENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MACAPÁ - AP

2026

ELVES RODRIGUES PANTOJA

CARACTERIZAÇÃO E APLICAÇÃO DE FUNÇÕES AFINS, QUADRÁTICAS E EXPONENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP) como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática

Orientador:
Prof. Dr. Guzmán E. Isla Chamilco

MACAPÁ - AP

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB-2 / 1569

Pantoja, Elves Rodrigues.
P198c Caracterização e aplicação de funções afins, quadráticas e exponenciais em modelagem matemática para a resolução de problemas / Elves Rodrigues Pantoja. - Macapá, 2026.
1 recurso eletrônico.
120 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Macapá, 2026.
Orientador: Dr. Guzmán E. Isla Chamilco.

Modo de acesso: World Wide Web.
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Funções básicas da matemática escolar. 2. Caracterização de funções. 3. Modelagem matemática. I. Chamilco, Guzmán E. Isla, orientador. II. Universidade Federal do Amapá - UNIFAP. III. Título.

CDD 23. ed. – 515.7

PANTOJA, Elves Rodrigues. **Caracterização e aplicação de funções afins, quadráticas e exponenciais em modelagem matemática para a resolução de problemas**. Orientador: Dr. Guzmán E. Isla Chamilco. 2026. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Matemática. Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, Macapá, 2026.

Elves Rodrigues Pantoja

Caracterização e Aplicação de Funções Afins, Quadráticas e Exponenciais em Modelagem Matemática para a Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UNIFAP, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Macapá-AP, 27 de fevereiro de 2026:

Documento assinado digitalmente
gov.br
GUZMAN EULALIO ISLA CHAMILCO
Data: 10/03/2026 22:05:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSE WALTER CARDENAS SOTIL
Data: 10/03/2026 22:41:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Dr. Jose Walter Cárdenas Sotil
Examinador interno - UNIFAP

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARCIO ALDO LOBATO BAHIA
Data: 11/03/2026 17:50:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Dr. Márcio Aldo Lobato Bahia
Examinador interno - UNIFAP

Documento assinado digitalmente
gov.br
DENIEL CORREA DE ALMEIDA
Data: 11/03/2026 09:41:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Dr. Deniel Correa de Almeida
Examinador externo - UEAP

Macapá-AP
Fevereiro/2026

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por conceder-me força, discernimento, disciplina e perseverança ao longo de todo o percurso deste trabalho.

À minha família, expresso minha sincera gratidão pelo apoio constante. À minha esposa, Elizângela, pela compreensão, incentivo e parceria em todos os momentos. Aos meus filhos, Felipe, Maria Luiza, Lucas e Ângela, pelo carinho, paciência e motivação diária, que tornaram possível a conclusão desta etapa.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), agradeço pela formação acadêmica e pelas contribuições ao longo do curso. Em especial, registro meu agradecimento ao Dr. Guzmán Chamilco, por ter aceitado a orientação, pela atenção e pelo acompanhamento no desenvolvimento desta dissertação. Aos colegas de curso, agradeço pela convivência, pelas trocas de experiências e pelo apoio mútuo ao longo dessa trajetória acadêmica.

RESUMO

Esta dissertação investiga uma abordagem conceitual para o estudo das funções que integram o currículo da Educação Básica (afim, quadrática e exponencial) fundamentada na análise de diferenças absolutas e variações relativas associadas a incrementos regulares da variável independente. Em contraposição à apresentação tradicional centrada na forma algébrica das funções, o trabalho propõe a caracterização dessas classes funcionais a partir de propriedades observáveis em contextos de modelagem matemática, sem a necessidade do conhecimento prévio da expressão analítica do modelo. Metodologicamente, a pesquisa apoia-se em uma revisão teórica sobre o conceito de função e suas propriedades fundamentais, seguida da análise sistemática dessas funções sob o ponto de vista de suas variações discretas. Mostra-se que funções afins podem ser identificadas pela constância das diferenças absolutas, funções quadráticas pela constância das diferenças de segunda ordem e funções exponenciais pela constância das variações relativas, estabelecendo um critério unificado de caracterização. A modelagem matemática é adotada como eixo metodológico, permitindo articular teoria e aplicação por meio de problemas contextualizados que favorecem a interpretação e a construção do modelo matemático. Como principal contribuição, o trabalho oferece subsídios teóricos e didáticos para o ensino de funções, ampliando as possibilidades de abordagem conceitual e promovendo uma compreensão mais significativa no contexto da educação matemática.

Palavras-chave: Funções básicas da matemática escolar. Caracterização de funções. Modelagem matemática. Educação matemática.

ABSTRACT

This dissertation investigates a conceptual approach to the study of functions that integrate the Basic Education curriculum (affine, quadratic, and exponential), grounded in the analysis of absolute differences and relative variations associated with regular increments of the independent variable. In contrast to the traditional presentation centered on the algebraic form of functions, this work proposes the characterization of these functional classes based on observable properties in mathematical modeling contexts, without requiring prior knowledge of the model's analytical expression. Methodologically, the research is supported by a theoretical review of the concept of function and its fundamental properties, followed by a systematic analysis of these functions from the perspective of their discrete variations. It is shown that linear functions can be identified by the constancy of absolute differences, quadratic functions by the constancy of second-order differences, and exponential functions by the constancy of relative variations, establishing a unified criterion for characterization. Mathematical modeling is adopted as the methodological axis, allowing the articulation of theory and application through contextualized problems that favor the interpretation and construction of the mathematical model. As its main contribution, the work offers theoretical and didactic insights for the teaching of functions, expanding the possibilities for a conceptual approach and promoting a more meaningful understanding within the context of mathematics education.

Keywords: Basic school mathematics functions. Characterization of functions. Mathematical modeling. Mathematics education.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática, em particular no que se refere ao estudo de funções, tem sido objeto de constantes reflexões e reformulações no âmbito das propostas curriculares brasileiras. Embora, documentos oficiais e pesquisas em Educação Matemática defendam práticas pedagógicas centradas no estudante, que valorizem a construção do conhecimento, a contextualização e a articulação com situações do mundo real, autores como Bassanezi (2002) e Biembengut (2007) apontam que a implementação efetiva dessas propostas enfrenta desafios no cotidiano escolar, evidenciando um descompasso entre o currículo prescrito e as práticas desenvolvidas em sala de aula.

A Matemática desempenha papel fundamental na formação do estudante ao possibilitar a compreensão, interpretação e análise de fenômenos presentes em diferentes contextos sociais, científicos e econômicos. Dessa forma, o ensino dessa disciplina não deve se limitar à exposição formal de conteúdos, à transmissão de procedimentos e à memorização de fórmulas. Nesse cenário, emergem diferentes tendências em Educação Matemática, como a História da Matemática, a Etnomatemática, a Matemática Crítica, a Resolução de Problemas e, em especial, a Modelagem Matemática, que busca aproximar o conhecimento matemático da realidade do discente.

Ainda que as propostas teóricas e as tendências contemporâneas da Educação Matemática defendam abordagens centradas na construção do conhecimento e na contextualização, o modelo estrutural predominante em muitos livros didáticos e práticas docentes ainda se concentra na apresentação formal dos conceitos, com definições, propriedades e exercícios de aplicação direta. No estudo das funções básicas do currículo escolar, é comum que a ênfase recaia sobre expressões algébricas, leis de formação e manipulações simbólicas, frequentemente dissociadas do contexto que deu origem ao problema. Como consequência, o aluno é levado a calcular valores como $f(2)$ ou resolver equações sem compreender o significado do modelo matemático envolvido ou o motivo pelo qual determinada função foi escolhida.

A centralidade atribuída na expressão algébrica das funções pode comprometer a compreensão conceitual do estudante, uma vez que o foco recai sobre a forma simbólica e não sobre a função enquanto objeto matemático. Conforme destaca Lima (2023, p.

35-37), uma função não deve ser confundida com a fórmula utilizada para representá-la, pois ela é definida essencialmente pela correspondência que estabelece entre os elementos de seu domínio e de seu contradomínio. O autor enfatiza ainda que diferentes expressões algébricas podem descrever uma mesma função e que uma mesma fórmula pode definir funções distintas, dependendo do domínio considerado, o que evidencia a importância de compreender a função para além de sua forma algébrica.

A compreensão da função como objeto matemático, para além de sua representação simbólica, reforça a necessidade de abordar o estudo das funções privilegiando a análise de propriedades globais e dos comportamentos associados às variações da variável independente, em vez de se restringir à manipulação formal de fórmulas. Tal abordagem fundamenta a proposta deste trabalho, que busca caracterizar funções afins, quadráticas e exponenciais a partir de critérios observáveis em contextos de modelagem matemática, sem que seja dada, previamente, a lei de formação da função.

Diante desse contexto, a presente pesquisa propõe-se a investigar a seguinte questão: *De que forma é possível reconhecer se o modelo matemático adequado para uma determinada situação envolve uma função afim, quadrática ou exponencial?* Para responder a essa questão, desenvolve-se uma abordagem baseada na análise do comportamento das variações absolutas e relativas associadas a incrementos regulares da variável independente, permitindo caracterizar essas funções a partir de propriedades observáveis, sem a exigência do conhecimento prévio de sua forma algébrica.

A escolha pela modelagem matemática como eixo metodológico justifica-se por seu potencial formativo e didático. Segundo Bassanezi (2002, p. 24), a modelagem matemática é "um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências". A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Essa perspectiva possibilita ao estudante perceber a Matemática como uma linguagem capaz de descrever e interpretar situações concretas, fortalecendo a compreensão conceitual e o pensamento crítico.

A orientação teórico-metodológica desenvolvida neste estudo está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018), documento normativo que orienta a educação básica no Brasil. A BNCC destaca a importância de práticas pedagógicas que relacionem o conhecimento matemático ao cotidiano dos estudantes, enfatizando processos como resolução de problemas, investigação e modelagem matemática, considerados fundamentais para o desenvolvimento do letramento matemático e da formação cidadã.

Como contribuição principal, este trabalho sistematiza critérios de caracterização de funções afins, quadráticas e exponenciais com base no comportamento de suas variações, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos que auxiliem professores e estudantes na identificação do modelo matemático adequado em situações contextualizadas. Ao enfatizar a caracterização das funções como eixo central, busca-se ampliar o repertório de estratégias didáticas para o ensino de funções e fortalecer a articulação entre teoria matemática e aplicação.

A dissertação está organizada da seguinte forma: inicialmente, apresenta-se uma revisão teórica sobre o conceito de função e suas propriedades fundamentais. Em seguida, são estudadas as funções afins, quadráticas e exponenciais, com ênfase em seus critérios de caracterização. Posteriormente, dedica-se um capítulo à modelagem matemática, no qual são analisados problemas contextualizados que ilustram a aplicação dos conceitos desenvolvidos. Por fim, apresentam-se as considerações finais e as referências bibliográficas.

FUNÇÕES

Apresentamos, neste capítulo, uma fundamentação teórica acerca do conceito de função, abordando suas propriedades e representações essenciais para as análises desenvolvidas nas seções posteriores. Mais do que a formalização rigorosa, busca-se compreender as funções como instrumentos de modelagem, aptos a descrever relações de dependência e padrões de variação.

Para tanto, adota-se predominantemente a linguagem da matemática escolar e da BNCC, bem como, as diretrizes da LDB, visando preservar a clareza didática e a fluidez expositiva. Sob essa ótica, conceitos como par ordenado, produto cartesiano e representações gráficas são explorados em sua forma tradicional, em consonância com as práticas da educação básica e da graduação.

2.1 Conceitos gerais

O conceito de função ocupa um lugar central na Matemática, mas sua consolidação como objeto formal resultou de um longo processo histórico. Antes de sua formulação abstrata, ideias associadas à dependência entre grandezas já eram utilizadas de maneira intuitiva e operacional, sobretudo em contextos práticos ligados à Astronomia, à Geometria e à Navegação.

Um exemplo histórico que evidencia uma relação organizada entre grandezas é a Tabela de Cordas, atribuída a Cláudio Ptolomeu, cientista do século II que viveu em Alexandria durante o período romano. Nessa tabela, os ângulos são expressos em graus, variando de meio grau em meio grau, e a cada ângulo central α, com $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, associa-se o comprimento L da corda correspondente em uma semicircunferência de diâmetro fixado. Trata-se, portanto, de uma associação regular entre duas grandezas, estruturada de forma tabular e orientada à resolução de problemas concretos, ainda que desprovida de formulação algébrica explícita.

Embora construções como a Tabela de Cordas (figura 2.1) não utilizassem a linguagem algébrica moderna, elas evidenciam uma organização sistemática de correspondências entre grandezas, ainda que não formuladas nos termos do conceito de função tal como hoje o compreendemos. Ao longo dos séculos XVII e XVIII, com o desenvolvimento do Cálculo e da Análise Matemática, o conceito de função passou a ser progressivamente associado a expressões analíticas e a notações simbólicas. No século XIX, consolidou-se uma formulação mais abstrata, na qual a função passou a ser compreendida como uma correspondência entre conjuntos, independentemente da forma algébrica utilizada para representá-la.

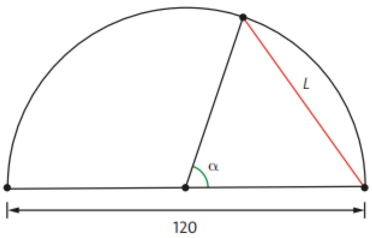

Tabela de cordas

α (°)	L (unidades)
...	...
18,5	19,27
...	...
70	68,86
...	...
114	100,67
...	...

Figura 2.1: Exemplo da Tabela de Cordas
Fonte: (Dante, 2016)

Diante dessa evolução conceitual, torna-se necessária a adoção de uma definição de função que seja, ao mesmo tempo, rigorosa e adequada à análise de aspectos gerais e comportamentos funcionais, especialmente no contexto do ensino e da modelagem matemática. Neste trabalho, adotamos a definição apresentada por Lima (2023, p. 36), por sua clareza conceitual e por enfatizar a função como objeto matemático, e não restrita à sua expressão algébrica.

Definição 1. *Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \longrightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x"). O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f.*
Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \longrightarrow f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Exemplo 2.1.1. *Dado um conjunto não vazio X, a função identidade de X, denotada por $Id_X : X \longrightarrow X$, é a função definida por $Id_X(x) = x$, para todo $x \in X$.*

Exemplo 2.1.2. *Dados conjuntos não vazios X e Y e fixado um elemento $c \in Y$, a função constante c de X em Y é a função $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$.*

Observe que se tivermos dois conjuntos A e X, em que $A \subset X$, podemos falar da imagem de um conjunto e escrever $f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$. Isto é, a imagem do subconjunto $A \subset X$ pela função $f : X \longrightarrow Y$ é o subconjunto $f(A) \subset Y$ formado pelos elementos $f(x)$, com $x \in A$. Então esse conjunto A pode ser qualquer coisa contido no domínio da função, e isso tem sentido, não precisa ser um conjunto finito, pode ser um intervalo e assim por diante.

Para facilitar a escrita, dada uma função f qualquer, vamos representar quando conveniente o domínio de f por $D(f)$, o contradomínio de f por $CD(f)$ e a imagem de f por $Im(f)$.

É importante ressaltar que a notação f, por si só, designa a própria função como objeto matemático. Ou seja, estamos falando sobre a relação de correspondência entre elementos de dois conjuntos. Assim, quando dizemos $f : X \longrightarrow Y$ estamos dizendo que f é a função que leva elementos de X para elementos de Y. Por outro lado, $f(x)$ é a imagem de um elemento x do domínio pela função f. Isto é, o valor da função no ponto x.

Essa distinção conceitual é essencial para o desenvolvimento deste trabalho, pois permite analisar funções como objetos matemáticos caracterizados por propriedades globais, e não apenas como expressões algébricas pontuais.

Apesar de muitas vezes se usar "função $f(x)$"como sinônimo de "função f", isso é um abuso de linguagem, mas que deve ser evitado em contextos formais, como trabalhos acadêmicos ou em uma aula/apresentação rigorosa.

> É importante ressaltar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função f no ponto $x \in X$. Os livros antigos, bem como alguns atuais, principalmente os de Cálculo, costumam dizer "a função $f(x)$"quando deveriam dizer "a função f". Algumas vezes essa linguagem inexata torna a comunicação mais rápida e fica difícil resistir à tentação de usá-la. Mas é indispensável a cada momento ter a noção precisa do que se está fazendo. (Lima, 2023, p. 36)

Por vezes, podemos visualizar uma função $f : X \longrightarrow Y$ de uma maneira mais concreta por meio de diagramas, em que cada seta indica que elemento $y \in Y$ está associado a cada $x \in X$.

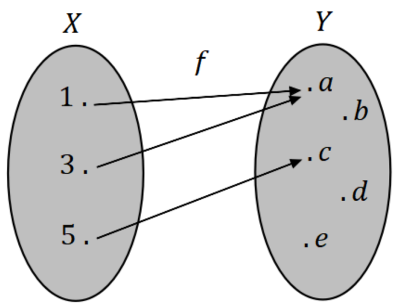

Figura 2.2: Exemplo de função f de X em Y.

Fonte: (Autor, 2026)

No exemplo da figura 2.2, temos os conjuntos $X = \{1, 3, 5\}$, e $Y = \{a, b, c, d, e\}$, e os elementos $f(1) = a$, $f(3) = a$, $f(5) = c$. Assim, a é a imagem de 1 e 3 por f, e c é a imagem de 5 por f.

Como ilustrado pelo exemplo da figura 2.2, a definição de função permite que, no diagrama correspondente, um ou mais elementos de Y não recebam setas ou, ainda, que um ou mais elementos de Y recebam mais de uma seta.

Note, contudo, que os dois próximos exemplos não correspondem a funções.

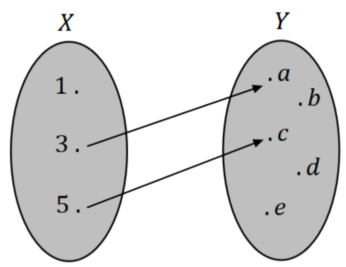

Figura 2.3: X tem elementos dos quais não partem seta alguma.
Fonte: (Autor, 2026)

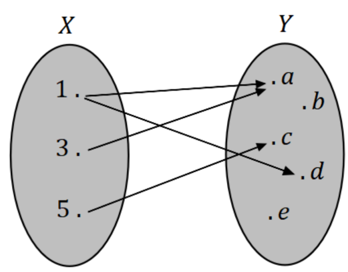

Figura 2.4: X tem elementos dos quais parte mais de uma seta.
Fonte: (Autor, 2026)

A situação da figura 2.3 não caracteriza função, porque não há nenhuma seta partindo do elemento $1 \in X$. Já na figura 2.4, do elemento $1 \in X$ parte mais de uma seta, o que foge do conceito de função.

Utilizaremos a notação $x \longrightarrow f(x)$, para indicar que a função f associa ao elemento x o valor $f(x)$. Em outras palavras, a função f aplica uma operação ao valor x, resultando em $f(x)$.

Segundo Lima (2023), deve-se ainda observar que uma função consta de três ingredientes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \longrightarrow f(x)$. Mesmo quando dizemos simplesmente "a função f", ficam subentendidos seu domínio X e seu contradomínio Y. Sem que eles sejam especificados, não existe a função. Assim sendo uma pergunta do tipo "Qual é o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x}$"?, estritamente falando, não faz sentido. A pergunta correta seria: "Qual é o maior subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$ defini uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$"? Novamente, a pergunta incorreta é mais simples de formular. Se for feita assim é importante saber seu significado.

Já podemos então concluir, pelas definições apresentadas até aqui, que duas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : A \longrightarrow B$ são iguais, se e somente se, $X = A$, $Y = B$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Isto é, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

Ainda segundo Lima (2023), em muitos exemplos de funções $f : X \longrightarrow Y$, principalmente na Matemática Elementar, X e Y são conjuntos numéricos e a regra $x \longrightarrow f(x)$ exprime o valor $f(x)$ por meio de uma fórmula que envolve x. Mas em geral não precisa ser assim. A natureza da regra que ensina como obter $f(x)$ quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto x como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado.

b) Não pode haver ambiguidade: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y.

Os exemplos a seguir ilustram essas exigências:

Exemplo 2.1.3. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ que calcula a raiz quadrada de um número. Se X e Y forem o conjunto dos números reais e $f(x) = \sqrt{x}$, então para $x < 0$, não haverá um correspondente em Y, pois a raiz quadrada de um número negativo não é um número real. Portanto, não seria uma função.*

Exemplo 2.1.4. *Indiquemos com X o conjunto dos números reais positivos e com Y o conjunto dos triângulos do plano. Para cada $x \in X$, ponhamos $f(x) = t$ caso t seja um triângulo cuja área é x. Esta regra não define uma função $f : X \longrightarrow Y$ porque é ambígua: dado $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos diferentes com a área x.*

Além da regra de correspondência, as funções podem ser classificadas de acordo com propriedades que descrevem a forma como os elementos do domínio se relacionam com o contradomínio, destacando-se, entre elas, a injetividade, a sobrejetividade e a bijetividade.

2.2 Injetividade (Injetora)

Uma função é injetiva (ou injetora) quando elementos distintos do domínio produzem imagens distintas no contradomínio. Em outras palavras, a função é injetiva, se dois elementos diferentes do conjunto de entrada (domínio) nunca têm a mesma imagem no conjunto de saída (contradomínio).

Uma possibilidade para contextualizar essa propriedade é considerar, por exemplo, a lista de chamada de uma classe com 15 alunos, em que o nome de cada um é associado a um único número natural (considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$) , e não há dois alunos com o mesmo número: (Veja tabela 2.1)

Número	1	2	3	4	...	15
Nome	Ariel castro	Ari Lopes	Bruno Silva	Carlos Souza	...	Willian Ferreia

Tabela 2.1: Lista de alunos (contextualização da injetividade)
Fonte: (Autor, 2026)

Sendo X o conjunto dos nomes dessa turma, vamos considerar a função $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa o nome de cada aluno ao número de chamada na lista.

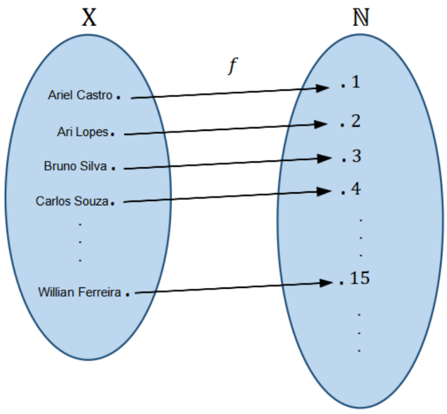

Figura 2.5: Diagrama da lista de alunos
Fonte: (Autor, 2026)

Como não existem elementos distintos no domínio de f com a mesma imagem, dizemos que f é uma injeção de X em $\mathbb{N}$. Definimos de acordo com Lima (2023).

Definição 2. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se injetiva quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y.*

Ou seja, f é injetiva quando

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esta condição pode também ser expressa em sua forma contrapositiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

O próximo exemplo, a função f não goza da propriedade da injetividade, veja:

Exemplo 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma função cuja regra é $f(n) =$ números de divisores positivos de n, com $n \in \mathbb{N}$.*

Note que, no exemplo 2.2.1 acima, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(12) = 6$, $f(29) = 2$, $f(40) = 8$. Numa visão mais criteriosa, essa função associa cada número n primo ao natural 2, logo não é injetiva.

A relevância da injetividade no contexto deste estudo está associada à hipótese de monotonicidade assumida para determinadas funções reais de uma variável real. Nos teoremas de caracterização das funções afins e exponenciais, considera-se a monotonicidade estrita como condição suficiente para garantir a injetividade, propriedade que desempenha papel fundamental sobretudo nas recíprocas desses resultados, ao assegurar a unicidade da correspondência entre cada valor da variável independente e o respectivo valor da função.

2.3 Sobrejetividade (Sobrejetora)

Uma função é sobrejetiva (ou sobrejetora) quando todos os elementos do seu contradomínio são imagens de pelo menos um elemento do domínio. Em outras palavras, não existem elementos no contradomínio que não estejam relacionados a nenhum elemento do domínio.

Imagine um edifício de 5 andares, todos os 10 apartamentos estão habitados. Por medida de segurança, na portaria, há uma lista de todos os moradores e o número do apartamento que ocupam (Tabela 2.2). Sendo X o conjunto dos nomes dos moradores desse edifício e Y o conjunto dos números dos apartamentos, considere $f : X \longrightarrow Y$, a função que associa o nome de cada morador ao número do apartamento.

Morador(es)	**Apartamento**
Paulo e Sandra	1
Ariel, Juliana e Fábio	2
José Carlos	3
Roberto	4
Silvia	5
João e Bia	6
Nilson, Eliana e Viviane	7
André	8
Marlon e Helena	9
Luiz	10

Tabela 2.2: Lista de Morador(es)
Fonte: (Autor, 2026)

Como qualquer elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio, isto é, o contradomínio é o próprio conjunto imagem da função f, dizemos que f é sobrejetiva, que de acordo com Lima (2023).

Definição 3. *Diz-se que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva, quando para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Exemplo 2.3.1. *Imagine que você tem um conjunto de professores (conjunto X) e um conjunto de salas de aula (conjunto Y). Uma função sobrejetiva poderia ser definida como a função que associa cada professor a uma sala de aula em que ele leciona. Se cada sala de aula tiver pelo menos um professor lecionando nela, então essa função será sobrejetiva. Se houver alguma sala de aula que não tenha professor alocado, a função não será sobrejetiva.*

Exemplo 2.3.2. *Em uma escola, se cada turma tiver pelo menos um aluno matriculado, a função que associa cada aluno à sua turma será sobrejetiva.*

Exemplo 2.3.3. *Indiquemos com X o conjunto de pontos da circunferência de raio r e centro O e com Y o conjunto de ângulos em radianos $[0, 2\pi)$. Definimos $f : X \longrightarrow Y$, para cada ponto $P \in X$, como $f(P) = \theta$, em que θ é a medida do ângulo central formado pelo raio OP e o semieixo horizontal à direita de O contada no sentido anti-horário. Note que, para cada $\theta \in Y$, existe pelo menos um ponto P em X tal que $f(P) = \theta$. Logo essa regra define uma função sobrejetiva.*

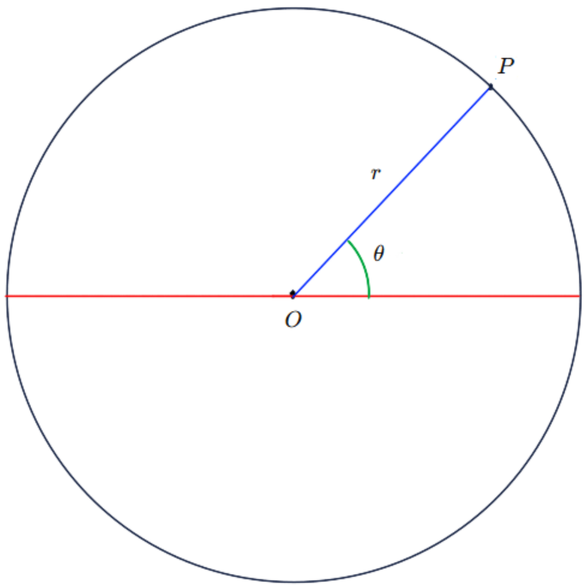

Figura 2.6: Ilustração de função sobrejetiva na circunferência.
Fonte: (Autor, 2026)

2.4 Bijetividade (Bijetora)

Uma função bijetiva, também chamada de bijetora, é um tipo especial de função que é tanto injetiva quanto sobrejetiva ao mesmo tempo. Isso significa que cada elemento do domínio da função tem uma imagem única no contradomínio, e cada elemento do contradomínio é a imagem de exatamente um elemento do domínio. Isto é, não há dois elementos diferentes do domínio com a mesma imagem, e nenhum elemento do contradomínio é "ignorado"pela função.

A função bijetiva combina essas duas qualidades. Ela é injetiva (um para um) e sobrejetiva (tudo no contradomínio é atingido), garantindo uma relação perfeita entre os elementos do domínio e do contradomínio. Assim, Lima (2023) define:

Definição 4. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 2.4.1. *Sejam Y a base de um triângulo e X um segmento paralelo a Y, unindo os outros dois lados desse triângulo. Seja ainda P o vértice oposto à base Y. Obtém-se uma correspondência biunívoca $f : X \longrightarrow Y$ associada a cada $x \in X$ o ponto $f(x)$ onde a semirreta Px intersecta a base Y.*

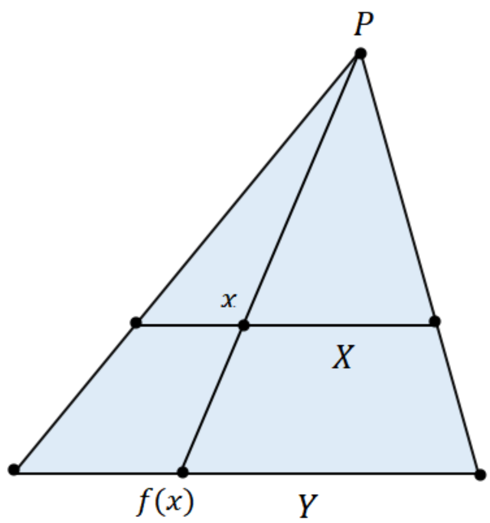

Figura 2.7: Ilustração geométrica de correspondência biunívoca num triângulo.
Fonte: (Autor, 2026)

A correspondência biunívoca é uma ferramenta para comparar conjuntos e determinar se eles possuem a mesma cardinalidade. O número cardinal, por sua vez, é o conceito que indica a quantidade de elementos de um conjunto, permitindo a contagem e a comparação entre agrupamentos finitos ou infinitos.

Diz-se que dois conjuntos X e Y tem o mesmo número cardinal quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f : X \longrightarrow Y$, ou seja, se existe essa correspondência, os conjuntos X e Y são numericamente equivalentes, portanto, têm o mesmo número cardinal.

Funções bijetivas são importantes porque estabelecem uma correspondência perfeita entre dois conjuntos, permitindo a inversão da função. Se uma função é bijetiva, existe uma função inversa que restaura os elementos do domínio a partir das imagens.

2.5 Composição de funções

A composição de funções, também conhecida como função composta, é uma operação que combina duas ou mais funções. Em termos conceituais, essa operação consiste em aplicar sucessivamente duas funções, de modo que o valor de saída da primeira sirva de entrada para a segunda.

Em geral, dadas as funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ temos regras bem definidas para, partindo de $x \in X$ via f, obter $y = f(x) \in Y$ e, via g, obter $z = g(y) \in Z$. É natural, portanto, considerar a possibilidade de definir uma função que permita passar diretamente de X para Z, por meio da aplicação sucessiva de f e g.

Definição 5. *Dadas as funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$, a função composta de f e g (nessa ordem) é a função $g \circ f : X \longrightarrow Z$, definida, para cada $x \in X$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

A definição acima apresenta o caso em que o contradomínio de f é o próprio domínio de g. De modo geral, para que a composta esteja bem definida, é necessário garantir que a imagem de cada elemento x por f pertença ao domínio da função g, ou seja, $f(x) \in D(g)$ para todo $x \in X$.

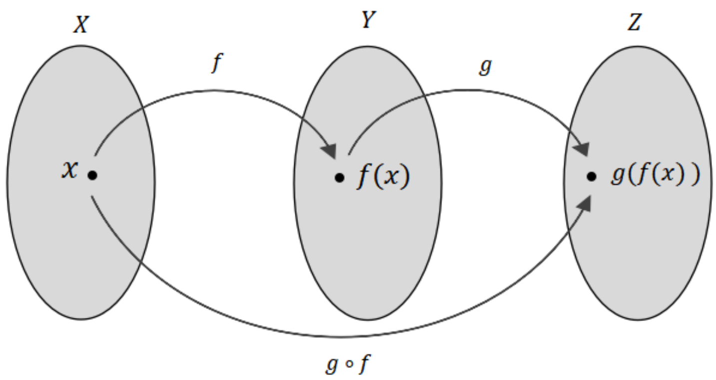

Figura 2.8: Função composta de g com f
Fonte: (Autor, 2026)

Ao longo deste trabalho, a composição de funções será utilizada apenas de forma pontual, sobretudo para expressar propriedades fundamentais das funções inversas, como as identidades

$$f^{-1} \circ f = Id_X \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = Id_Y,$$

quando f é uma bijeção, e para descrever relações funcionais envolvendo modelos exponenciais e logarítmicos.

2.6 Inversão de funções

No campo da Matemática, uma função inversa (ou inversa de uma função) é uma função que desfaz a ação de outra função. Se uma função f associa um valor x a um valor y, então a função inversa associa y de volta a x. Para que uma função admita uma inversa, alguns requisitos são necessários, em particular, a função deve ser bijetiva, isto é, simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Considere uma função $f : X \longrightarrow Y$ que seja uma bijeção. Nesse caso, os elementos de X e Y estão em correspondência biunívoca: a cada elemento de X corresponde um único elemento de Y por meio de f, e vice-versa. Quando isso ocorre, pode-se definir uma função $g : Y \longrightarrow X$ exigindo que

$$f(x) = y \iff g(y) = x.$$

A função g, definida dessa forma, é denominada função inversa de f e é usualmente representada por f^{-1}.

Definição 6. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção. A função inversa de f é a função $g : Y \longrightarrow X$ tal que, para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$, tem-se*

$$g(y) = x \iff y = f(x).$$

Da definição acima, seguem imediatamente as identidades

$$g \circ f = Id_X \quad \text{e} \quad f \circ g = Id_Y,$$

ou, de forma equivalente,

$$f^{-1} \circ f = Id_X \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = Id_Y,$$

em que Id_X e Id_Y denotam as funções identidade em X e Y, respectivamente.

A compreensão dessas propriedades será essencial nos capítulos seguintes, quando a função logarítmica for introduzida como a inversa da função exponencial em domínios adequados, permitindo a análise e a caracterização desses modelos no contexto da modelagem matemática.

2.7 Gráfico de funções

A representação gráfica constitui uma ferramenta fundamental para a interpretação do comportamento das funções, especialmente no contexto da modelagem matemática, pois permite visualizar tendências, variações e regularidades que nem sempre são evidentes apenas pela expressão analítica.

Gráficos de funções são representações visuais da relação entre duas variáveis, geralmente chamadas de x e y, em um plano cartesiano (sistema de eixos ortogonais). Eles mostram como os valores de saída (y) mudam à medida que os valores de entrada (x) variam, permitindo analisar o comportamento da função.

O gráfico de uma função é a representação geométrica de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ no plano cartesiano.

Dados conjuntos não vazios X e Y, seu produto cartesiano é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x, chamada abcissa, pertence a X e cuja segunda coordenada y, chamada ordenada, pertence a Y.

$$X \times Y = \{(x, y);\ x \in X \quad e \quad y \in Y\}.$$

Quando $X = Y = \mathbb{R}$, usualmente vemos X e Y como retas numeradas e $X \times Y$ como um plano, munido de um sistema cartesiano de coordenadas fixado.

Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são os pares ordenados de números reais. Eles surgem como coordenadas (abcissa, ordenada) de um ponto $P(x, y)$ quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY, que se intersectam no ponto O, denominado a origem do sistema de coordenadas.

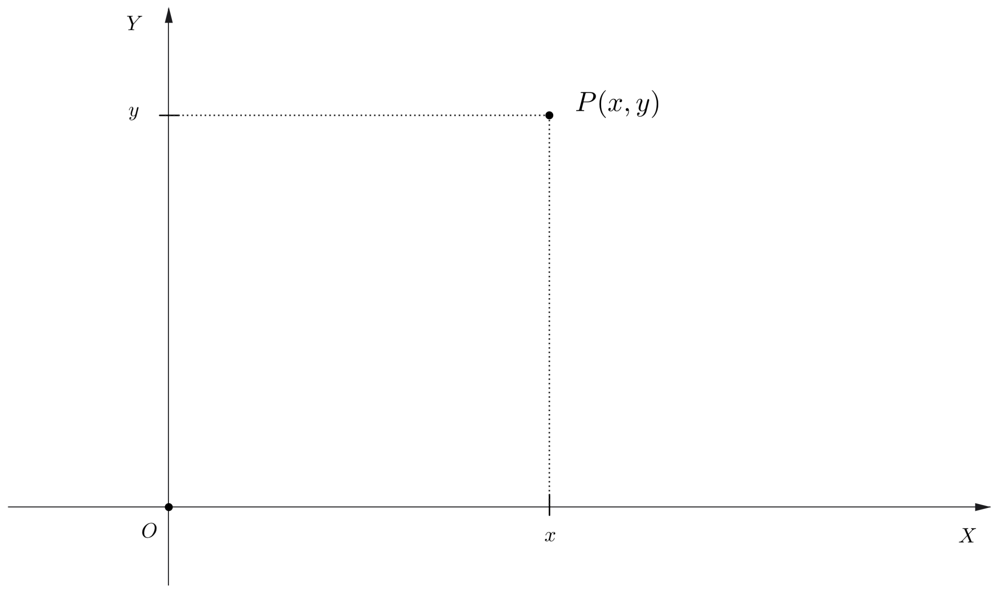

Figura 2.9: Representação de um ponto $P(x, y)$ no plano cartesiano $X \times Y$.
Fonte: (Autor, 2026)

A cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números reais. Essa correspondência biunívoca entre pares de números reais e pontos do plano permite escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, de modo recíproco, interpretar geometricamente relações entre números reais.

Uma pergunta básica que se pode fazer é: se $P(x, y)$ e $Q(u, v)$ são dois pontos distintos de um plano, como se pode exprimir a distância do ponto P ao ponto Q a partir dessas coordenadas?

Utilizando o Teorema de Pitágoras, a resposta para calcular a distância $d(P, Q)$ é imediata. Para isso, é preciso introduzir um novo ponto $S(x, v)$.

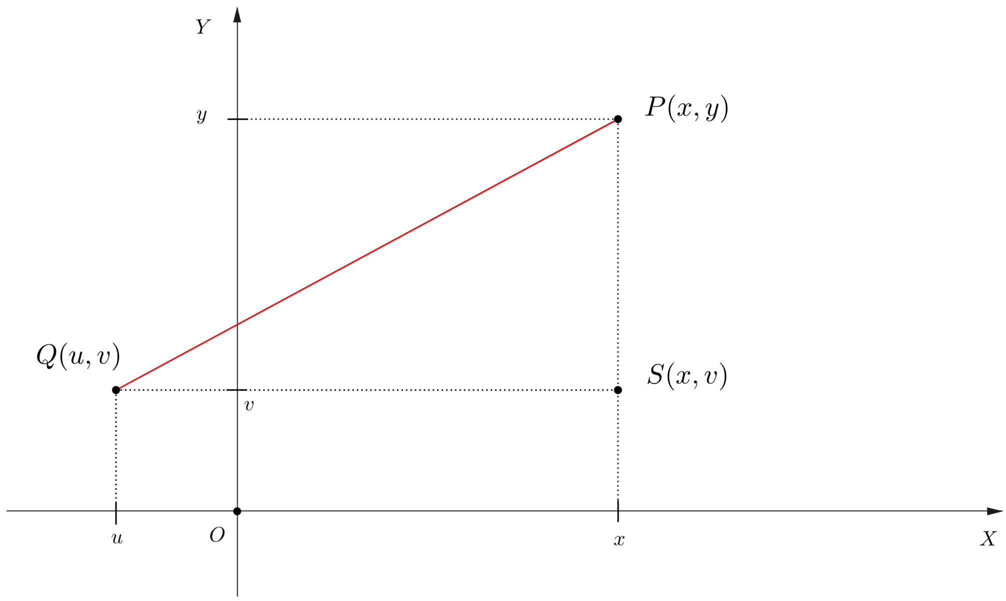

Figura 2.10: Distância entre os pontos $P(x, y)$ e $Q(u, v)$.
Fonte: (Autor, 2026)

Como Q e S têm a mesma ordenada, o segmento QS é horizontal (paralelo ao eixo OX). Já os pontos P e S têm a mesma abcissa, assim o segmento PS é vertical (paralelo ao eixo OY). Portanto o segmento PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo PQS, cujos catetos medem $|x - u|$ e $|y - v|$, respectivamente. O Teorema de Pitágoras nos dá então:

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

Ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Note que, a distância da origem $O(0, 0)$ a um ponto $P(x, y)$ qualquer do plano é dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplo 2.7.1. *A circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo que é o centro dela. A distância constante de qualquer ponto da circunferência ao seu centro é denominada raio. Se o centro de uma circunferência C é o ponto $A = (a, b)$ e o raio é o número real $r > 0$ então, por definição, um ponto $P(x, y)$ pertence a C se, e somente se, $d(A, P) = r$. Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos*

$$C = \{(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Portanto, diz-se que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

é a equação da circunferência de centro no ponto $A(a, b)$ e raio r.

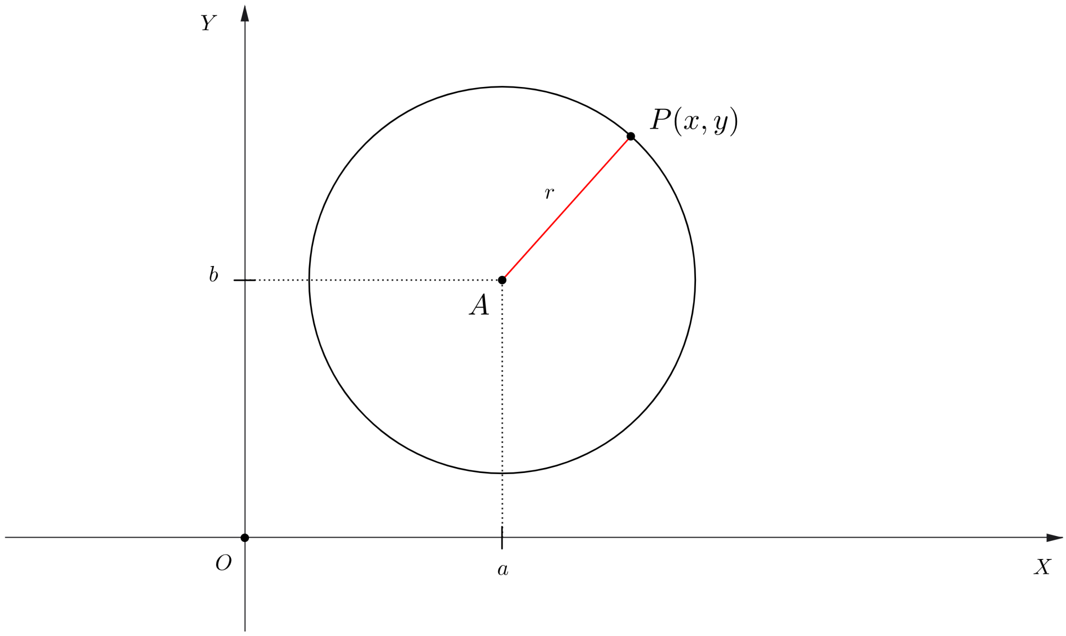

Figura 2.11: Circunferência de raio r e centro $A(a, b)$.
Fonte: (Autor, 2026)

Por sua vez, o disco D de centro A e raio r é formado pelos pontos $P(x, y)$ cuja distância ao ponto $A \leq r$. Portanto

$$D = \{(x, y);\ (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}.$$

Segundo Munis Neto (2015), estabelece-se a seguinte definição.

Definição 7. *Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, o gráfico de f é o subconjunto G_f do produto cartesiano $X \times Y$, definido por*

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}.$$

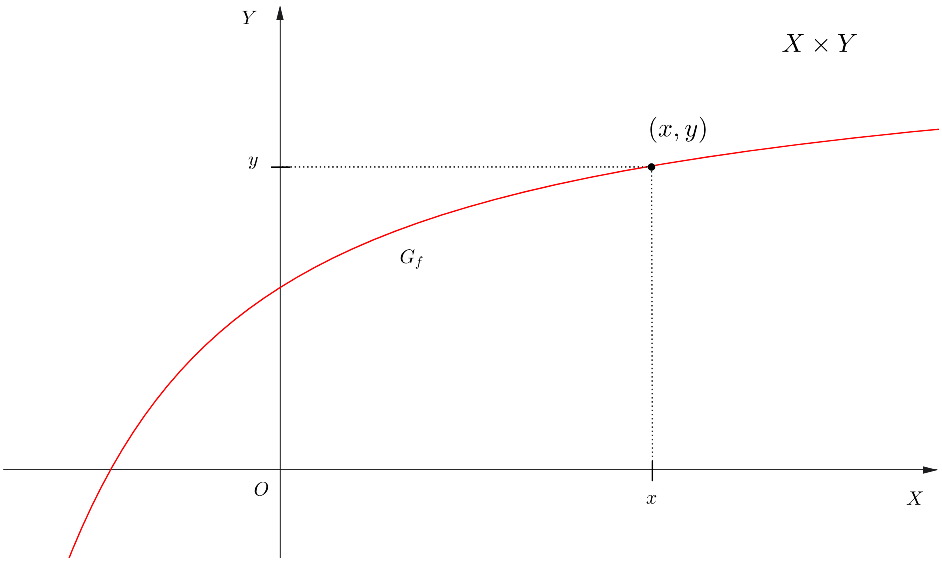

Figura 2.12: Gráfico de $f : X \longrightarrow Y$.
Fonte: (Autor, 2026)

Sabemos que uma das condições para que f seja uma função de X em Y é que, a cada $x \in X$ deve corresponder um único $y \in Y$. No gráfico cartesiano, isso significa que qualquer reta paralela ao eixo OY traçada por um ponto de X, deve cortar o gráfico G_f em um e somente um ponto.

O gráfico de uma função real de uma variável real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, portanto, pelo menos nos casos mais simples, pode ser visualizado como uma linha formada pelos pontos de coordenadas $(x, f(x))$, quando x varia no conjunto X.

O momento agora é oportuno para lembrarmos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dados $x_1, x_2 \in X$, com $X \subset \mathbb{R}$, é dita:

- crescente quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- decrescente quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- monótona não decrescente quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- monótona não crescente quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer das quatro possibilidades, f diz-se monótona. Porém nas duas primeiras (f crescente ou f decrescente) diz-se que f é estritamente monótona e, além do mais, que f é uma função injetiva.

Claramente, os quatro casos acima não são mutuamente excludentes. Simplesmente, os dois primeiros são casos particulares dos dois últimos. Além disso, há funções que não se enquadram em nenhuma dessas quatro categorias.

Com base nesses conceitos gerais, nos capítulos seguintes serão estudadas funções reais de uma variável real (afins, quadráticas e exponenciais) sob a perspectiva da caracterização do modelo matemático a partir do comportamento das variações associadas a incrementos regulares da variável independente. Essa abordagem permitirá compreender tais funções não apenas por suas expressões algébricas, mas principalmente pelas propriedades que as distinguem no contexto da modelagem matemática.

Como estaremos nos referindo a funções em que domínio e contradomínio são o conjunto $\mathbb{R}$, em alguns casos, a notação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será omitida para que a escrita não se torne redundante e pedante.

FUNÇÃO AFIM

Função afim é uma das funções elementares mais fundamentais da Matemática, não apenas por sua simplicidade algébrica, mas sobretudo por seu papel na modelagem de fenômenos caracterizados por variações constantes entre grandezas.

Neste capítulo, estudamos a função afim sob a perspectiva da modelagem matemática, com ênfase em suas propriedades estruturais e, sobretudo, em sua caracterização a partir do comportamento de seus acréscimos. Essa abordagem permitirá identificar situações modeláveis por funções afins mesmo quando sua expressão algébrica não é conhecida a priori, estabelecendo um padrão conceitual que será estendido aos casos quadrático e exponencial.

3.1 Definição e conceitos gerais

Definição 8. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

É fácil perceber que uma função afim fica determinada, ou melhor, que é possível calcular as constantes a e b, a partir de duas informações apenas. Se fornecidos para $x_1 \neq x_2$,

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$$

e

$$y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$$

e fazendo a diferença, obtemos

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1),$$

portanto, a fica determinado como

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e consequentemente

$$b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2.$$

É comum também obtermos b como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$, eventualmente, chama-se o valor inicial da função f.

Uma função afim é crescente quando sua taxa de crescimento (ou taxa de variação), dada pelo coeficiente a, é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$.

Para justificar o que acabamos de afirmar, em outros termos — a monotonicidade estrita da função afim — dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, e $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$, então

$$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2),$$

como $x_1 - x_2 < 0$, quando $a > 0$, temos

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Portanto, f é crescente. Por outro lado, quando $a < 0$,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Portanto, f é decrescente.

Quando $a = 0$, temos um caso particular de função afim (função constante), pois

$$f(x) = 0 \cdot x + b = b, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x_1) = f(x_2) = b.$$

Logo, f é constante.

3.2 Taxa de variação média de uma função afim

Em qualquer função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, quando acrescentamos h à variável x, passando de x para $x+h$, há, em correspondência, um acréscimo $f(x+h) - f(x)$ no valor da função.

Definição 9. *Dados x e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, o número*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

chama-se taxa de variação média da função f no intervalo $[x, x+h]$.

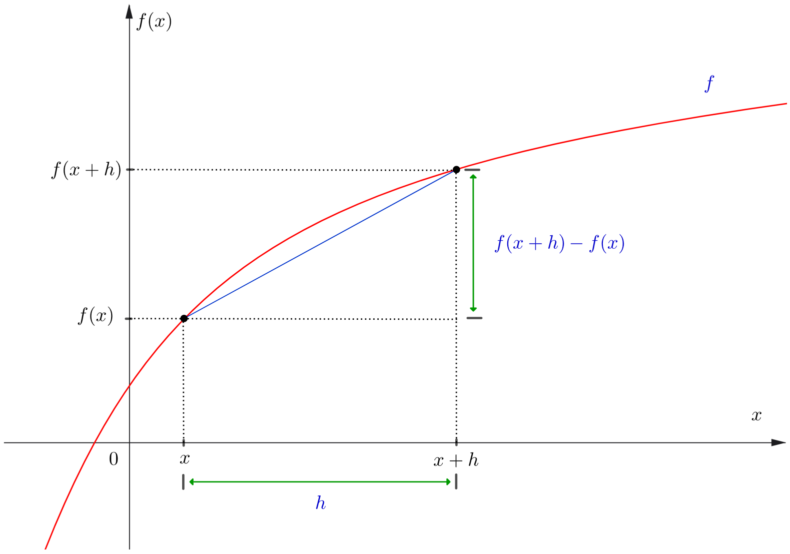

Figura 3.1: Visão geométrica da taxa de variação média de uma função f no intervalo $[x, x+h]$.

Fonte: (Autor, 2026)

No caso da função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, dados x e $x+h$ números reais, com $h \neq 0$, sua taxa de variação média em relação a x é dada pelo número

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{\cancel{ax} + ah \cancel{+b} \cancel{-ax} \cancel{-b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a\,.$$

Esse resultado evidencia que, na função afim, a taxa de variação não depende do ponto considerado, refletindo a uniformidade dos acréscimos da função ao longo de todo o domínio.

Como a taxa de variação média de uma função afim é constante, podemos dizer apenas taxa de variação (ou taxa de crescimento). Além disso, ela pode ser interpretada como a variação em $f(x)$ causada por cada aumento de 1 unidade em x.

Exemplo 3.2.1. *A taxa de variação da função afim $f(x) = 7x + 12$ é 7, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz f(x) aumentar 7 unidades; e a da função $g(x) = -5x + 2$ é -5, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $g(x)$ diminuir 5 unidades.*

Ocorre que, a taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad \forall\, x_1 \neq x_2\,.$$

3.3 O gráfico da função Afim

É possível demonstrar, apenas com o que conhecemos sobre função afim, que o seu gráfico é uma reta. Como afirma Lima (2023).

Definição 10. *O gráfico G de uma função $f : x \longrightarrow ax + b$ é uma linha reta.*

Para conferir isto, basta mostrar que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1,\, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2,\, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3,\, ax_3 + b)$ desse gráfico são colineares. Para esse propósito, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Entretanto, podemos supor que as abcissas x_1, x_2 e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A aplicação da fórmula da distância entre dois pontos resulta em

$$\begin{aligned} d(P_2,\, P_1) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a(x_2 - x_1))^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}. \end{aligned}$$

Analogamente, $d(P_3,\, P_2) = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)}$ e $d(P_3,\, P_1) = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$. Dai, temos

$$\begin{aligned} d(P_3,\, P_1) &= d(P_2, P_1) + d(P_3, P_2) \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} + (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} \\ &= ((x_2 - x_1) + (x_3 - x_2))\sqrt{(1 + a^2)} \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}. \end{aligned}$$

Logo, P_1, P_2 e P_3 são colineares.

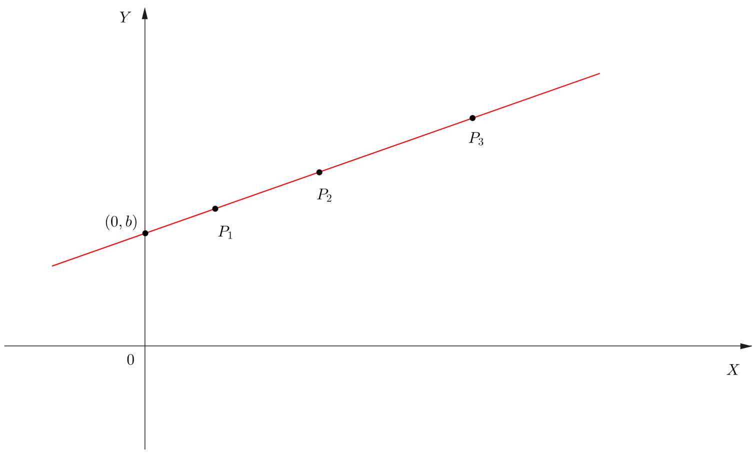

Figura 3.2: Gráfico de uma função afim f com $a > 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f : x \longrightarrow ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se a inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

O que justifica o fato de que basta conhecer os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assume quando $x_1 \neq x_2$ (escolhidos arbitrariamente) fique inteiramente determinada é o seu gráfico ser uma linha reta, pois uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos.

Na prática, sabendo que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é afim e que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto significa encontrar os valores que satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -ax_1 \cancel{-b} = -y_1 \\ \quad ax_2 \cancel{+b} = \quad y_2 \end{cases} \Longrightarrow \; ax_2 - ax_1 \; = y_2 - y_1 \; \Longrightarrow$$

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \Longrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

tomando uma das equações acima e substituindo o valor de a, temos

$$ax_1 + b = y_1 \Longrightarrow \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + b = y_1 \Longrightarrow b = y_1 - \frac{(x_1 y_2 - x_1 y_1)}{x_2 - x_1}.$$

Logo

$$b \;\; = \;\; \frac{x_2 y_1 \cancel{- x_1 y_1} - x_1 y_2 \cancel{+ x_1 y_1}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

O argumento anterior que determinou os valores das incógnitas a e b provou que dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

No estudo da Geometria analítica os elementos geométricos são descritos por equações. Entre eles, a reta, que particularmente nos interessa, pois, o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta. Reciprocamente, toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.

Para demonstrar essa afirmação, tomemos dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ na reta r, temos necessariamente $x_1 \neq x_2$, pois r é não vertical. Assim existe uma função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2. Logo, essa reta coincide com r.

Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $y = ax + b$ é a equação da reta r, dada pela função. Assim, $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que na função afim é a taxa de variação (ou crescimento), agora, na reta, recebe o nome de coeficiente angular da reta (ou declividade da reta), pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo do eixo OX com a reta r.

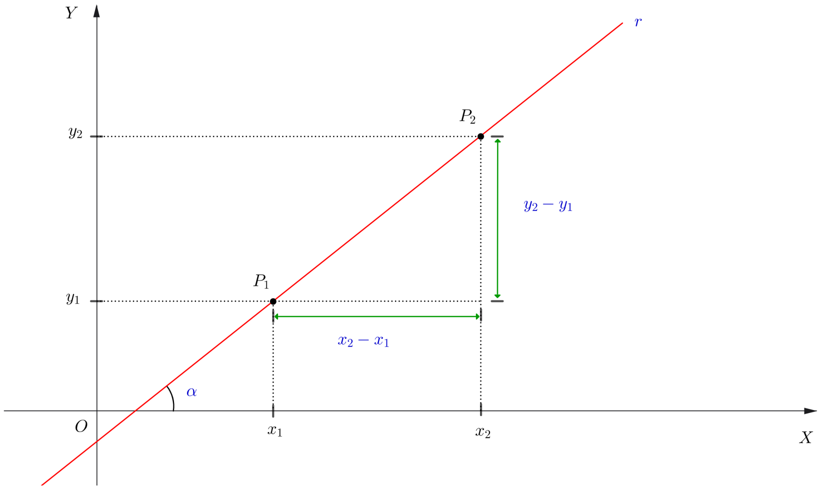

Figura 3.3: Reta r e ângulo de inclinação α com eixo OX.
Fonte: (Autor, 2026)

A relação entre o coeficiente angular com o ângulo de inclinação α que o eixo OX forma com a reta r é dada por $a = \tan\alpha$.

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico de uma reta r, então o coeficiente angular a e um ponto fixo $P_0(x_0, y_0)$ dessa reta, a determinam, isto é,

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Longrightarrow y - y_0 = a(x - x_0) \Longrightarrow y = y_0 + a(x - x_0).$$

Essa é a equação da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular

$$a = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} = \tan\alpha.$$

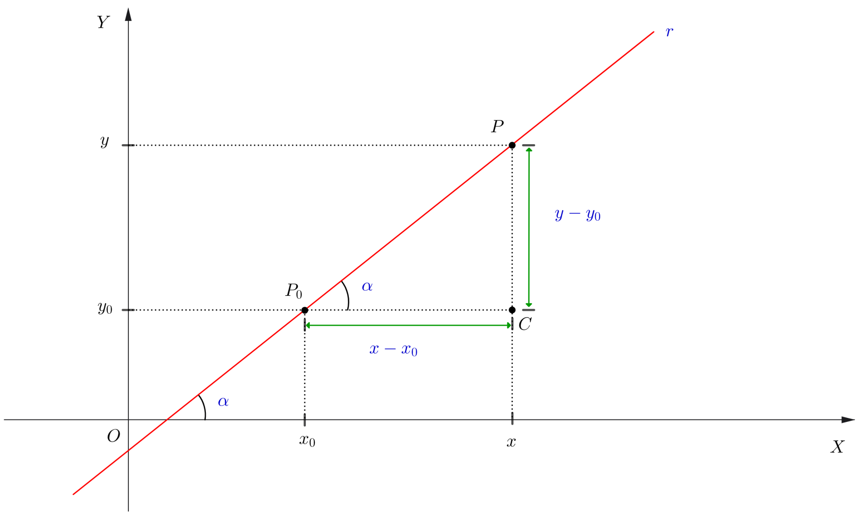

Figura 3.4: Gráfico da reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e tem $a = \tan\alpha$.
Fonte: (Autor, 2026)

Em resumo, a função afim f, dada por $f(x) = ax + b$ é usada para modelar uma infinidade de situações reais, por exemplo, no eixo OX podemos marcar o tempo em anos, no eixo OY, podemos marcar o faturamento de uma empresa que vai aumentando com o tempo. Nessa situação concreta em que temos, tempo num eixo e faturamento no outro, não é adequado falarmos do número a como coeficiente angular, pois não há, ângulo algum no problema estudado. Na geometria analítica os eixos estão graduados na mesma unidade, isso é fundamental para podermos falar em ângulo, portanto, o nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento).

3.4 Zero da função afim

O valor de x para o qual a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se zero da função afim. Para determinar o zero de uma função afim basta resolver a equação $ax + b = 0$.

$$ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Geometricamente, o zero de qualquer função, em particular, o da função afim $f(x) = ax + b$ corresponde à abscissa do ponto de intersecção entre o gráfico da função e o eixo OX.

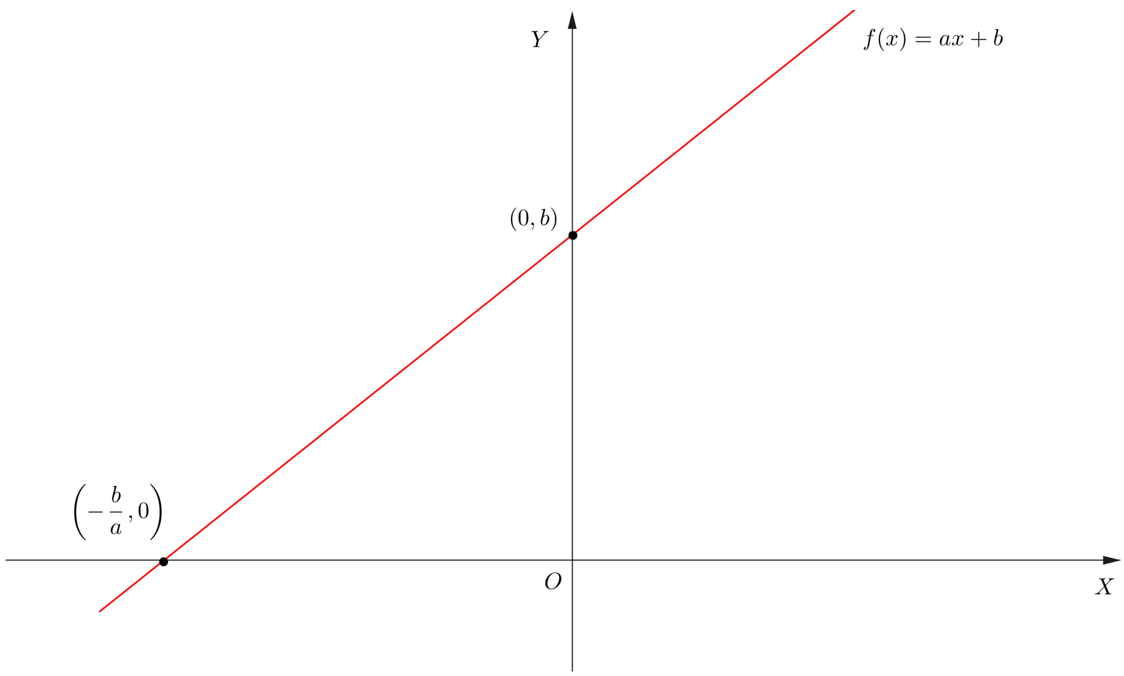

Figura 3.5: Gráfico da função afim intersecta o eixo OX no ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.
Fonte: (Autor, 2026)

3.5 Função Linear

Uma função linear é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo x real. É um caso particular da função afim em que $b = 0$. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem $(0, 0)$. Os problemas que envolvem proporcionalidade, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma função linear, e por isso afirmamos que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Vamos supor que uma grandeza y seja função da grandeza x, ou seja, $y = f(x)$. Dizemos que y é diretamente proporcional a x se as seguintes condições forem satisfeitas:

a) y é uma função crescente de x;

b) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também ficará multiplicado por n, ou seja,

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \qquad \forall \;\; x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Igualmente, dizemos que y é inversamente proporcional a x:

a) quando y é uma função decrescente de x;

b) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y ficará dividido por n, ou seja,

$$f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x), \qquad \forall \;\; x \in \mathbb{R} \;\; \text{e} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Fixaremos nossa atenção à proporcionalidade direta que é conveniente chamarmos apenas de "proporcionalidade".

Segundo Lima (2023, p. 92), o Teorema Fundamental da Proporcionalidade nos garante que, obedecidas as condições acima para os números naturais, podemos estende-las para os números reais. Isto é, reconhecer grandezas diretamente proporcionais, na verdade, basta você testar se, ao multiplicar uma delas por um número natural, a outra fica multiplicada pelo mesmo número natural, então elas são diretamente proporcionais, ou seja, se as condições acima forem válidas para os naturais apenas, então vale para qualquer real.

A proporcionalidade direta constitui, portanto, um caso particular de comportamento funcional em que os acréscimos relativos das grandezas são constantes, o que naturalmente conduz ao modelo linear.

O resultado a seguir desempenha papel central na caracterização das funções lineares e será utilizado de forma decisiva nas demonstrações das recíprocas apresentadas adiante.

Teorema 1 (**Teorema Fundamental da Proporcionalidade**). *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.

2. *Pondo* $a = f(1)$, *tem-se* $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *(logo,* $f(cx) = cf(x)$ *para todo* $c, x \in \mathbb{R}$*).*

3. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como as afirmações são equivalentes, nosso objetivo é provar as implicações (1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3) e (3) $\Longrightarrow$ (1).

(i) (1) $\Longrightarrow$ (2).
Primeiramente, vamos provar que essa implicação vale para um número n inteiro qualquer.

$$f(n) = f(n \cdot 1) \overset{por\ 1}{=} nf(1) \overset{por\ 2}{=} an\,, \quad \forall \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Agora provaremos que vale para um racional qualquer $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$.

$$r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow q \cdot f(r) \overset{por\ 1}{=} f(qr) = f(p) = f(p \cdot 1) \overset{por\ 1}{=} pf(1) \overset{por\ 2}{=} ap \Longrightarrow$$

$$q \cdot f(r) = ap \Longrightarrow f(r) = a \cdot \frac{p}{q} \Longrightarrow f(r) = ar\,, \forall \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Note que, $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0 \overset{f\ crescente}{\Longrightarrow} f(1) > f(0) \Longrightarrow a > 0$.
Dado $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, suponha que $f(x) \neq ax$. Assim, $f(x) < ax$ ou $f(x) > ax$.

$$f(x) < ax \Longrightarrow \frac{f(x)}{a} < x \Longrightarrow \exists \ \ r \in \mathbb{Q} \ ; \ \ \frac{f(x)}{a} < r < x \Longrightarrow f(x) < ar < ax \Longrightarrow$$

$$f(x) < f(r).$$

Temos uma contradição, pois a função é crescente, e $r < x \Longrightarrow f(r) < f(x)$, ou seja, a afirmação $f(x) < ax$ não é verdadeira. Por outro lado,

$$f(x) > ax \Longrightarrow \frac{f(x)}{a} > x \Longrightarrow \exists \ \ r \in \mathbb{Q} \ ; \ \ \frac{f(x)}{a} > r > x \Longrightarrow f(x) > ar > ax \Longrightarrow$$

$$f(x) > f(r).$$

Novamente temos uma contradição, como a função é crescente, $r > x \Longrightarrow f(r) > f(x)$. Logo a afirmação $f(x) > ax$ não é verdadeira. Portanto, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) (2) $\Longrightarrow$ (3). Temos que $f(x+y) \overset{por\ 2}{=} a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y), \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) (3) $\Longrightarrow$ (1). Mostraremos que vale para $n \geq 0$, e para $n < 0$.

- $n \geq 0$

$$f(nx) = f\underbrace{(x + x + x + \cdots + x)}_{n\ \ parcelas\ de\ x} = f(x) + \underbrace{(x + x + x + \cdots + x)}_{n-1\ \ parcelas\ de\ x} = \ldots$$

$$= \underbrace{f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ \ \ parcelas\ de\ f(x)}$$

Logo, $f(nx) = nf(x)\,, \quad \forall\ \ n \geq 0.$

- $n < 0$

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Longrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Longrightarrow$$

$$f(x) = -f(-x) \iff f(-x) = -f(x).$$

Portanto, $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$.

$\square$

Em algumas situações, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade precisa ser aplicado a grandezas (como área ou massa, por exemplo) cujas medidas são expressas apenas por números positivos. Então temos uma função crescente $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ é o conjunto dos números positivos.

Em se tratando apenas de grandezas positivas, em resumo, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade diz que, se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é crescente e $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e para $x \in \mathbb{R}^+$.

A partir desse fato, tem-se que para

$$x = 1 \Longrightarrow f(c \cdot 1) = c \cdot f(1),$$

fazendo f(1)=k, temos

$$f(c) = k \cdot c,$$

trocando c por x, temos

$$f(x) = k \cdot x.$$

Portanto, se uma grandeza for multiplicada por um número, e então a outra ficar multiplicada pelo mesmo número, quer dizer que elas estão relacionadas por uma função linear.

Para a proporcionalidade inversa, $f(c \cdot x) = \frac{f(x)}{c}$, com $x, c \in \mathbb{R}^+$ e $c \neq 0$, faça novamente $x = 1$, veja que,

$$x = 1 \Longrightarrow f(c) = \frac{f(1)}{c},$$

considerando $f(1) = k$, temos
$$f(c) = \frac{k}{c},$$
fazendo $c = x$, a fórmula para a proporcionalidade inversa é $f(x) = \frac{k}{x}$, porém esta função não é linear.

Não é o nosso foco aqui , mas vale registrar que se duas grandezas são inversamente proporcionais basta verificar se, uma delas é multiplicada por dois, a outra deve se reduzir à metade, se triplicamos uma, a outra se reduz à terça parte, e assim por diante. Se isso for verdade, então as grandezas são inversamente proporcionais, não basta apenas, que uma cresça e a outra decresça.

A importância do Teorema Fundamental da Proporcionalidade está no seguinte ponto. Se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é crescente e $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^+$, então f é uma proporcionalidade.

Exemplo 3.5.1. *Se 1 quilograma de arroz custa R\$ 12,00, então x quilogramas custarão* $y = f(x) = 12x$ *reais. Note que* $f(x) = 12x$ *é uma função crescente* $(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. *E também que 1 kg custa R\$* $12,00$*, 2 kg custam R\$* $24,00$*, 3 kg custam R\$* $36,00$*, e assim por diante. Duplicando a quantidade de quilogramas duplicamos o preço, triplicando a quantidade de quilogramas triplicamos o preço,. . . , ou seja, o preço a pagar é diretamente proporcional à quantidade de quilogramas que compramos.*

Neste caso, o coeficiente de proporcionalidade é $12 = \frac{12}{1} = \frac{24}{2} = \frac{36}{3} = \ldots$

Observe ainda que, $f(1) = 12$; $f(2) = 24$; $f(3) = 36$; $f(4) = 48$, etc. e que, por exemplo
$$\left.\begin{array}{rcl} f(3) = f(3 \cdot 1) & = 36 \\ 3 \cdot f(1) = \quad 3 \cdot 12 & = 36 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1).$$

É fundamental destacar que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, que é conhecida como função identidade, é um caso particular de função linear, em que $a = 1$. O seu gráfico é a bissetriz dos 1° e 3° quadrantes do sistema ortogonal cartesiano.

3.6 Caracterização da Função Afim

Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?

No clássico problema da tarifa do táxi não há dificuldade. Pois tem-se $f(x) = ax + b$, tal que x é a distância percorrida, $f(x)$ é o preço a pagar, b é a bandeirada e a é a taxa por quilômetro rodado. Porém, nem todo problema é assim tão explicito.

Então, será que existe uma forma de identificar se um determinado problema pode ser modelado por uma função afim em uma situação real? A resposta é sim.

Uma função afim é uma função da forma $f(x) = ax+b$, em que a e b são números reais. A propriedade característica de uma função afim é a seguinte:

Se f é uma função afim, os acréscimos $f(x+h)-f(x)$ dependem apenas de h (e não de x). Consequentemente, a sequência formada por $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, $\ldots$ é uma progressão aritmética.

A verificação é simples. Ora, veja que se, f é uma função afim, o que implica f necessariamente monótona e injetiva, então o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ fica

$$f(x+h)-f(x) = a(x+h)+b-(ax+b) = \cancel{ax}+ah\cancel{+b}-\cancel{ax}\cancel{-b} = ah,$$

isso significa que a diferença depende apenas do incremento h e não do valor de x. Aplicando a propriedade para $x+h$ no lugar de x, temos $f[(x+h)+h]-f(x+h)$, logo

$$\begin{aligned} f(x+2h)-f(x+h) &= a(x+2h)+b-[a(x+h)+b] \\ &= \cancel{ax}+2ah\cancel{+b}-\cancel{ax}-ah\cancel{-b} \\ &= 2ah-ah \\ &= ah. \end{aligned}$$

Assim, a sequência $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, $\ldots$ forma, portanto, uma progressão aritmética de razão ah. Se o incremento h for igual a 1, a razão da progressão é o coeficiente a, que também é a taxa de variação da função afim. O coeficiente b, por sua vez, pode ser interpretado como o valor inicial da função, ou seja, o valor de f(0).

Uma consequência disto é que os pontos do gráfico da função de abscissas x, $x+h$, $x+2h, \ldots$ estão em uma mesma reta, pela congruência dos triângulos indicados na figura 3.6.

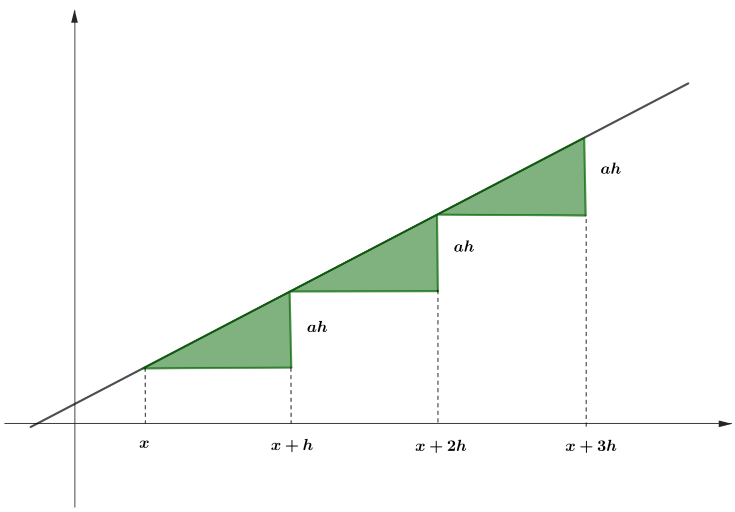

Figura 3.6: Representação gráfica da caracterização da função afim.
Fonte: (Autor, 2026)

Já sabemos que, este acréscimo não depende de x, somente de h e ademais é proporcional a h. Mas será que a recíproca é verdadeira? Lima (2023, p. 96) afirma que sim com base no seguinte teorema.

Teorema 2. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótono injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Essa demonstração será uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Demonstração. Seja f uma função crescente, isso quer dizer que existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que, se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. A primeira análise que vamos fazer é verificar se a função $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ também é crescente. Sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tais que, $h_1 < h_2$. Adicionando x a ambos os lados da desigualdade, tem-se

$$h_1 + x < h_2 + x \stackrel{f\ crescente}{\Longrightarrow} f(h_1 + x) < f(h_2 + x) \Longrightarrow f(h_1 + x) - f(h_2 + x) < 0$$

Agora, vamos analisar h_1 e h_2 em φ.

$$\varphi(h_1) = f(x + h_1) - f(x) \quad \text{e} \quad \varphi(h_2) = f(x + h_2) - f(x)$$

Fazendo, $\varphi(h_1) - \varphi(h_2)$, tem-se

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_2) \;=\; f(x + h_1) \cancel{- f(x)} - f(x + h_2) \cancel{+ f(x)} = f(x + h_1) - f(x + h_2) < 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(h_1) - \varphi(h_2) &< 0 \\ \varphi(h_1) &< \varphi(h_2) \end{aligned}$$

Portanto, a função φ é crescente.
Como, para $h = 0$, $\varphi(0) = f(x + 0) - f(x) = 0$. Além disso, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(h + k) &= f(x + h + k) - f(x) \\ &= f((x + k) + h) + f(x + k) - f(x + k) - f(x) \\ &= \underbrace{f((x + k) + h) - f(x + k)}_{\varphi(h)} + \underbrace{f(x + k) - f(x)}_{\varphi(k)} \\ &= \varphi(h) + \varphi(k). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Assim, para $x = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= ah \\ f(0+h)-f(0) &= ah \\ f(h) &= ah+f(0) \qquad \text{chamando } f(0) \text{ de } b \\ f(h) &= ah+b \quad , \end{aligned}$$

ou seja, $f(x) = ax + b \qquad$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

Se $f(x+h)-f(x)$ não depende de x, então dizemos que acréscimos iguais para x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$. Como sabemos que esse acréscimo é ah, então podemos dizer que acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

Em outras palavras, numa função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, tal que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ocorre o seguinte. Se a partir de um valor de x_1 qualquer, dermos um aumento de valor h, y_1 aumentará de um valor $m = a \cdot h$. Ocorre que se em um outro ponto do eixo das abcissas, x_2 por exemplo, dermos o mesmo aumento h, y_2 irá aumentar também o valor $m = a \cdot h$. Isto é, aumentos iguais na variável x, sempre correspondem a aumentos iguais em y. Assim, todo problema que tiver essa caracterização será modelado por uma função desse tipo.

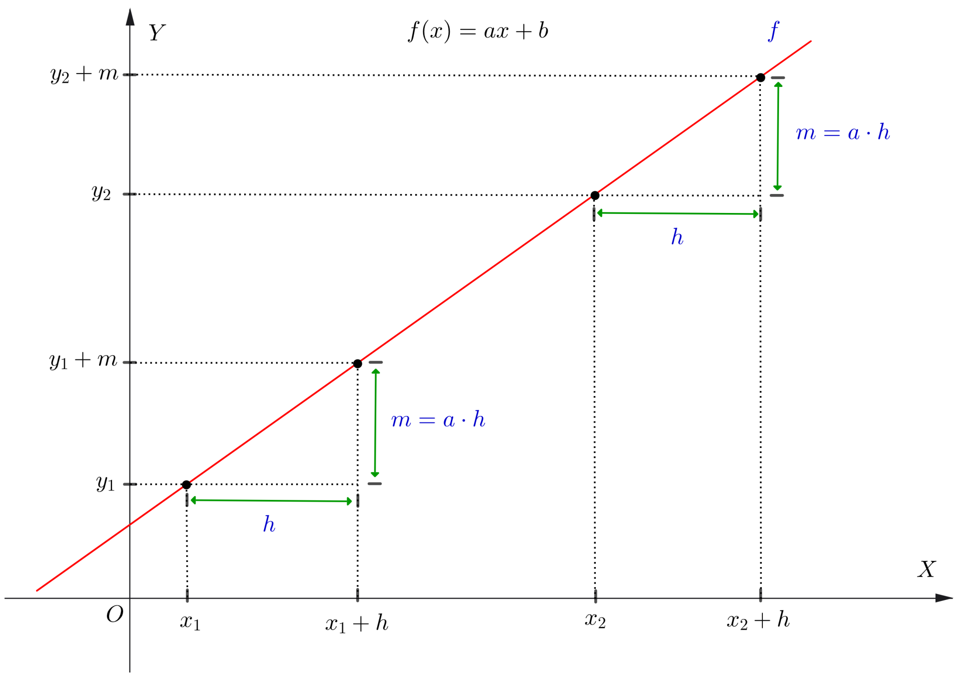

Figura 3.7: Caracterização da função afim: acréscimos iguais para x correspondem acréscimos iguais para $y = f(x)$.

Fonte: (Autor, 2026)

Vamos analisar a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

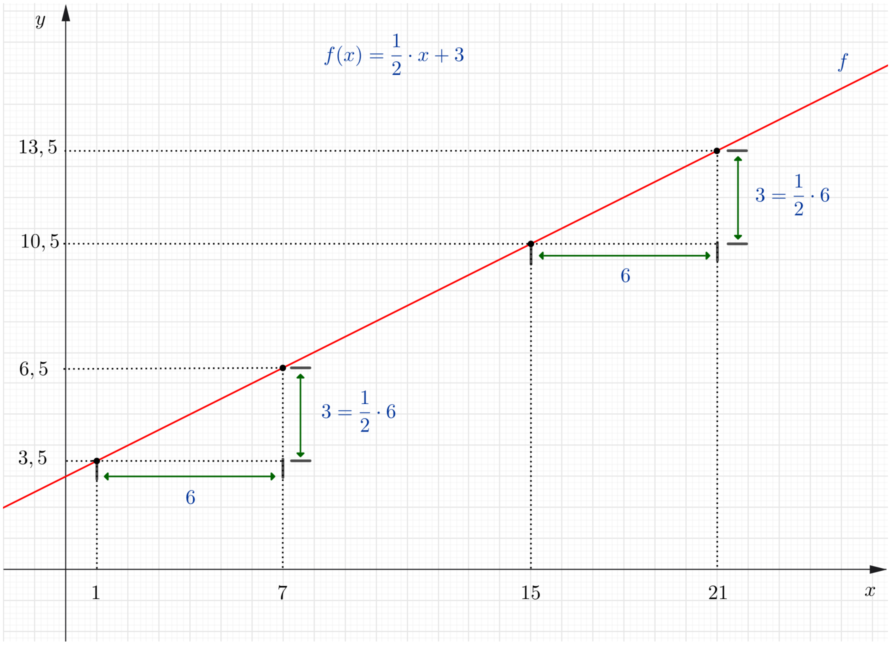

Figura 3.8: Caracterização da função afim: representação gráfica da função afim $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

Fonte: (Autor, 2026)

Então, existe uma relação muito importante entre funções afins e progressões aritméticas.

Definição 11. *Uma progressão aritmética* (PA) *é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada de razão da progressão aritmética.*

Por exemplo, s sequência:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19, \ldots$$

é uma progressão aritmética de razão 3.

Agora, consideremos a função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$. Aplicando à função cada termo da sequência acima, vamos constatar que

$$f(1) = 7,\ f(4) = 13,\ f(7) = 19,\ f(10) = 25,\ f(13) = 31,\ f(16) = 37,\ f(19) = 43, \text{ etc.}$$

Assim,

$$7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37,\ 43, \ldots$$

é também uma progressão aritmética e sua razão é 6 $(2 \cdot 3)$.

Geometricamente, uma (PA), pode ser vista como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ igualmente espaçados na reta. O que isto indica é que a razão $h = x_{i+1} - x_i$ não depende de i:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_{i+1} - x_i = \ldots.$$

Deste modo, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x_i)$ com $i = 1, 2, 3, \ldots$ também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i &= (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) \\ &= ax_{i+1} \cancel{+b} - ax_i \cancel{-b} \\ &= a(x_{i+1} - x_i) \\ &= ah. \end{aligned}$$

Posto isto, se tivermos uma reta não vertical (gráfico da função afim) em $\mathbb{R}^2$ e tomarmos sobre ela os pontos

$$(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots, (i, y_i), \ldots$$

cujas abcissas são os números naturais $1, 2, 3, \ldots, i, \ldots$, as ordenadas $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_i, \ldots$, desses pontos, formam uma progressão aritmética, e ainda, seu gráfico são pontos sobre o gráfico de uma função afim.

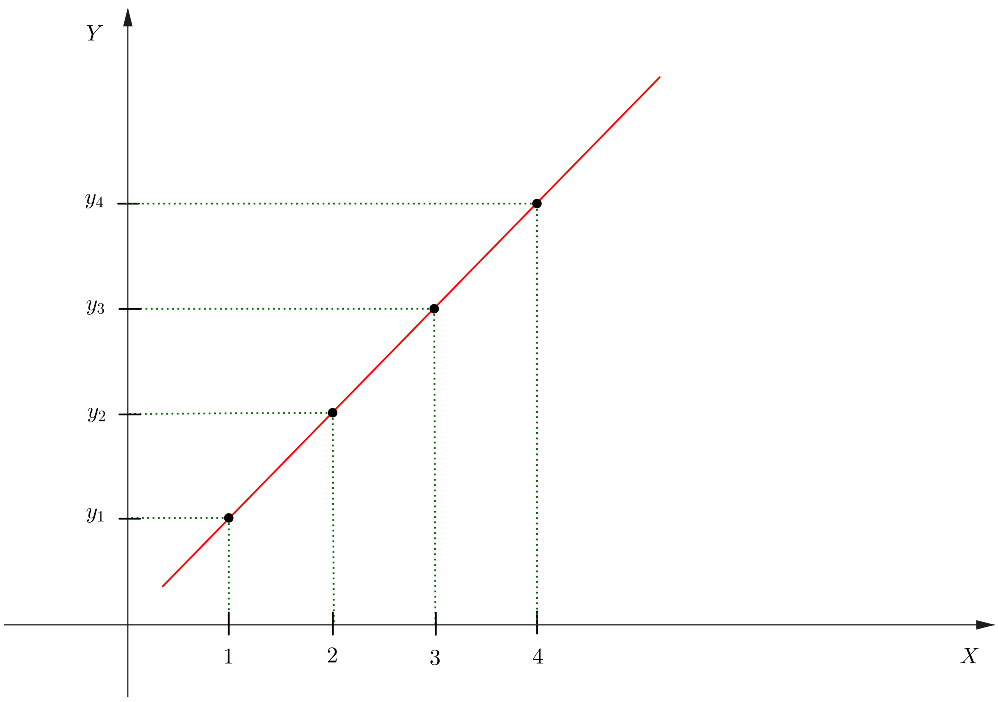

Figura 3.9: Gráfico de uma progressão aritmética.
Fonte: (Autor, 2026)

A recíproca da análise acima é verdadeira, como, segundo Lima (2023, p. 98), pode ser constatado no seguinte teorema.

Teorema 3. *Se uma função monótona $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa outra progressão aritmética $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$, $y_i = f(x_i), \ldots$, então f é uma função afim.*

Demonstração. Adotaremos, de início, uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(0)$ que transforma qualquer progressão aritmética em outra progressão aritmética. Note que, $g(0) = 0$. Se f é afim, então $f(x) = ax+b$. Logo $g(x) = ax+b-b = ax$. Basta, portanto, mostrar que g é linear que f será afim, visto que, $f(x) = g(x)+f(0)$ e $f(0) = b$.
Consideremos a progressão aritmética $-x$, 0, x, com $x \in \mathbb{R}$. Como g preserva progressões aritméticas, temos que $g(-x)$, $g(0)$, $g(x)$ também é uma (PA). Daí,

$$g(0) - g(-x) = g(x) - g(0) \Longrightarrow g(-x) = -g(x).$$

Consideremos agora $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números 0, x, $2x$, $3x, \ldots$, nx, formam uma progressão aritmética, da mesma forma, se aplica para suas respectivas imagens $g(0)$, $g(x)$, $g(2x)$, $g(3x), \ldots$, $g(nx)$. Tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo dessa (PA), obtemos como razão $g(x) - g(0) = g(x)$. Como a razão é constante, temos $g(nx) = ng(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
E por fim, sendo n um inteiro negativo, digamos $n = -m$, tal que $m \in \mathbb{N}$, temos

$$g(nx) = g(-mx) = -g(mx) = -(mg(x)) = (-m)g(x) = ng(x)$$

Assim, $g(nx) = ng(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue que g é linear, ou seja, $g(x) = ax$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, pondo $f(0) = b$, temos

$$f(x) \quad = \quad g(x) + f(0) = ax + b \qquad \forall \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Isso prova que f é uma função afim. $\square$

As caracterizações apresentadas neste capítulo evidenciam que a função afim pode ser identificada não apenas por sua expressão algébrica, mas principalmente pelo comportamento de seus acréscimos: incrementos iguais na variável independente produzem incrementos iguais na variável dependente. Essa perspectiva será fundamental nos capítulos seguintes, em que se investigará como padrões distintos de variação conduzem aos modelos quadrático e exponencial.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Neste capítulo, abordaremos um tipo particular de função conhecida como função quadrática. Serão destacadas suas principais propriedades algébricas e geométricas, com especial atenção ao estudo do gráfico da parábola. Além disso, será apresentada uma caracterização dessa função que evidencia sua relação com a progressão aritmética, estabelecendo uma conexão entre conceitos algébricos e propriedades de sequências numéricas.

4.1 Definição

Definição 12. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é denominada função quadrática quando são dados números reais $a,\ b,\ c$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

A condição $a \neq 0$ garante que o termo de maior grau seja efetivamente de ordem dois, distinguindo a função quadrática das funções afins ou lineares.

É possível estabelecer uma conexão direta entre uma função quadrática e o trinômio do segundo grau. Enquanto a função é uma regra que associa valores, o trinômio $(ax^2 + bx + c)$, com $a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$, é a expressão algébrica formal que a define. Essa correspondência é biunívoca, o que significa que para cada trinômio do segundo grau existe uma única função quadrática correspondente, e vice-versa.

Com efeito, uma propriedade fundamental da função quadrática é a unicidade de seus coeficientes a, b, c. Isso significa que se duas funções quadráticas, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, produzem o mesmo resultado para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$, então seus coeficientes devem ser idênticos ($a = a',\ b = b',$ e $c = c'$).

Suponha que as funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, assumam os mesmos valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ para três números reais distintos $x_1,\ x_2,$ e x_3. Assim

$$\begin{cases} f(x_1) - g(x_1) = 0 \\ f(x_2) - g(x_2) = 0 \\ f(x_3) - g(x_3) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} a\,x_1^2 + b\,x_1 + c - a'\,x_1^2 - b'\,x_1 - c' = 0 \\ a\,x_2^2 + b\,x_2 + c - a'\,x_2^2 - b'\,x_2 - c' = 0 \\ a\,x_3^2 + b\,x_3 + c - a'\,x_3^2 - b'\,x_3 - c' = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}(a-a')\,x_1^2+(b-b')\,x_1+(c-c')=0\\(a-a')\,x_2^2+(b-b')\,x_2+(c-c')=0\\(a-a')\,x_3^2+(b-b')\,x_3+(c-c')=0.\end{array}\right.$$

Escrevendo, $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$. Temos

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\,x_1^2+\beta\,x_1+\gamma=0\\\alpha\,x_2^2+\beta\,x_2+\gamma=0\\\alpha\,x_3^2+\beta\,x_3+\gamma=0.\end{array}\right.$$

Queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Subtraindo a primeira equação das outras duas, ficamos com

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\,(x_2^2-x_1^2)+\beta\,(x_2-x_1)=0\\\alpha\,(x_3^2-x_1^2)+\beta\,(x_3-x_1)=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha\,(x_2+x_1)(x_2-x_1)+\beta\,(x_2-x_1)=0\\\alpha\,(x_3+x_1)(x_3-x_1)+\beta\,(x_3-x_1)=0\end{array}\right.$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$, e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira destas equações por $x_2 - x_1$ e a segunda por $x_3 - x_1$, obtendo

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\,(x_1+x_2)+\beta=0\\\alpha\,(x_1+x_3)+\beta=0\ .\end{array}\right.$$

Subtraindo membro a membro, temos $\alpha(x_3 - x_2) = 0$. Como $x_3 - x_2 \neq 0$, resulta daí que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$.

Mostramos, então, que se duas funções quadráticas, assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2, x_3, então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.

O sistema que acabamos de analisar de três equações lineares cujas incógnitas são α, β, γ e os segundos membros iguais a zero é um sistema homogêneo. Provamos que a única solução desse sistema é a trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Em geral, quando um sistema homogêneo admite apenas a solução trivial, a substituição dos zeros do segundo membro por números arbitrários resulta em um sistema linear com solução única.

Assim, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2, y_3 existe um, e somente um terno ordenado de números a, b, c tais que

$$\begin{array}{r}a\,x_1^2+b\,x_1+c=y_1\\a\,x_2^2+b\,x_2+c=y_2\\a\,x_3^2+b\,x_3+c=y_3\ .\end{array}$$

Considerando como incógnitas a, b, c e como coeficientes x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2 e 1, 1, 1, adotando a mesma sequência de passos do caso homogêneo, obtemos

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right].$$

Podemos então afirmar o seguinte: dados três números reais distintos x_1, x_2, x_3 e números reais arbitrários y_1, y_2, y_3, existe um, e somente um, terno de números a, b, c tais que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpre $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$.

Note que, se não assegurarmos $a \neq 0$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, acima obtida, pode não ser quadrática. O valor de a que encontramos, mostra que a é zero se, e somente se, vale

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Essa igualdade revela que, ao considerarmos os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, as retas AC e AB possuem a mesma inclinação, o que significa que os pontos A, B e C são colineares.

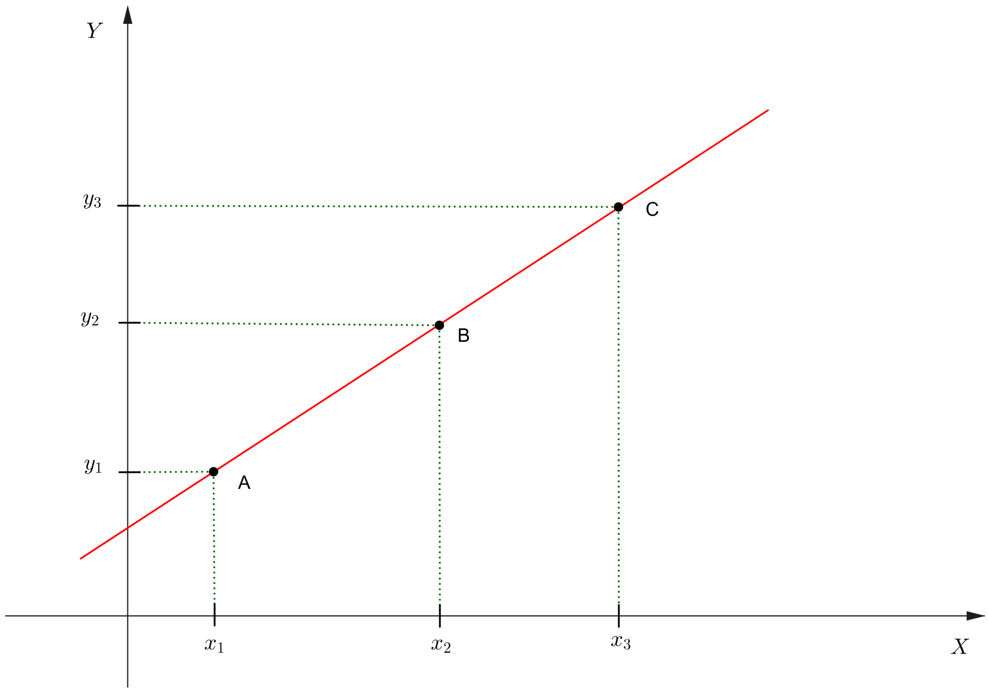

Figura 4.1: Colinearidade de três pontos no plano
Fonte: (Autor, 2026)

Em resumo, quando x_1, x_2, x_3 são três números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números reais tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ são não colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

4.2 Zeros da Função Quadrática

Inúmeras civilizações da antiguidade, tais como, babilônica, grega, hindu, árabe, já faziam uso de equações do segundo grau. Muito embora, não existisse a noção de função, já resolviam equações quadráticas usando raciocínio geométrico e métodos que lembram o complemento de quadrados.

Muitos dos problemas encontrados nessas civilizações envolviam situações como a determinação dos lados de um retângulo a partir do perímetro e da área, bem como a identificação de dois números a partir de sua soma e de seu produto, seja de forma direta, seja por meio de uma contextualização.

O estudo da função quadrática tem sua origem na resolução de equações do segundo grau.

O problema a seguir, aparece em registros cuneiformes feitos pelos babilônicos por volta do ano 1700 a.C; eles já conheciam regras para solucioná-lo.

Problema 4.2.1. *"Determinar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p".*

Uma forma prática de pensar é imaginar que x seja um dos números, então se a soma é s, o outro número será $(s-x)$. Assim o produto

$$p = x(s-x) = sx - x^2,$$

dado isso, os números procurados são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$.

Para determinar x, e, portanto, $(s-x)$, basta resolver a equação do $2^{\underline{o}}$ grau $x^2 - sx + p = 0$, isso significa, determinar os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula. Esses valores são chamados de zeros da função quadrática ou simplesmente, raízes da equação do $2^{\underline{o}}$ grau correspondente a $f(x) = 0$.

Por exemplo, os dois números cuja soma é 7 e cujo produto é 10, são 2 e 5, que são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ ou zeros da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

Note que, dados quaisquer s e p, nem sempre existem dois números reais cuja soma seja s e cujo produto seja p. Por exemplo, não há solução real para o caso em que $s = 3$ e $p = 7$.

Uma maneira muito eficiente para determinar as raízes de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau é o método de completar quadrado. Tomemos a equação anterior como exemplo.

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 = 0 &\iff x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ &\iff x - \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff x = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}\\
&\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 5.
\end{aligned}$$

A ideia de função quadrática, como objeto matemático e linguagem simbólica, é relativamente recente, consolidando-se apenas a partir do século $XVII$.

Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, como determinar os zeros dessa função algebricamente? A resposta a essa questão encontra-se no fato de que toda função quadrática pode ser reescrita em uma forma algébrica particular, denominada forma canônica, a qual permite a caracterização completa de suas propriedades analíticas e geométricas. Esse processo tem grande relação com o método de completar quadrado. Assim sendo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c\\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

pondo $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, temos para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ a forma canônica da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ em que $k = f(m)$.

A forma canônica nos direciona imediatamente à fórmula que resolve a equação do $2^{\underline{o}}$ grau, ou seja, nos dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Assim, sendo $a \neq 0$, fazendo $f(x) = 0$, temos as seguintes equivalências

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \tag{4.1}$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{4.2}$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.3}$$

$$\iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.4}$$

$$\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.5}$$

A passagem da equação (4.2) para a (4.3) só tem sentido quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equivalência entre as equações (4.1) e (4.2) fica prejudicada. Isto significa que a equação dada não possui solução real, visto que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ não pode ser negativo.

Segue da fórmula (4.5) que, se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais e distintas

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

com $x_1 < x_2$, cuja soma s é

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}}{2a} + \frac{-b\cancel{+\sqrt{\Delta}}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e cujo produto p é

$$p = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Em particular, a média aritmética das raízes é $-\frac{b}{2a}$, ou seja, as raízes x_1 e x_2 são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$.

Quando $\Delta = 0$ a equação dada possui uma única raiz, chamada raiz dupla, igual a $-\frac{b}{2a}$.

Suponhamos $a > 0$. A forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

revela, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre ≥ 0. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ é igual a zero, isto é, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ também atinge seu valor mínimo. Então, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \left(\frac{b^2}{4a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Por outro lado, se $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Em síntese, quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo: é uma função ilimitada superiormente. Já, quando $a < 0$ não assume valor mínimo: é ilimitada inferiormente.

Com o auxílio da forma canônica, podemos responder a seguinte pergunta: Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, para quais valores $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) = f(x_2)$?

Ao analisarmos a forma canônica, percebemos que $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$. Se dois quadrados são iguais, então os termos são opostos ou iguais, ou seja,

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right) = \pm\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)$$

como estamos supondo $x_1 \neq x_2$, isso significa que

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right) = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)$$

isto é

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$.

4.3 O Gráfico da Função Quadrática

Segundo Lima (2023), o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e a define da seguinte forma.

Definição 13. *Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d (veja Figura 4.2).*

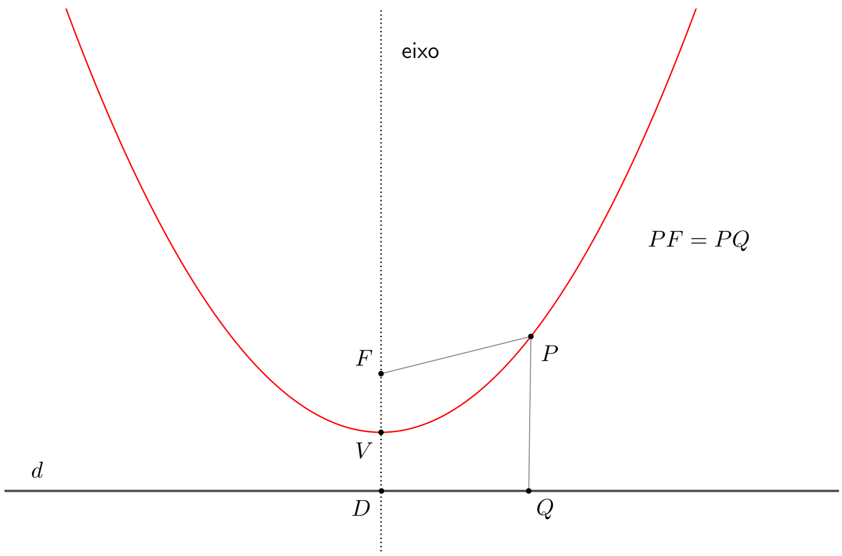

Figura 4.2: Representação gráfica da parábola com foco F e diretriz d.
Fonte: (Autor, 2026)

Fixados o foco e a diretriz, a parábola é o lugar geométrico de todas as posições que o ponto P pode assumir quando o ponto Q se deslocar sobre a diretriz d, obedecida a condição de que sempre teremos $d(P,F) = d(P,Q)$.

A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz recebe o nome de eixo da parábola. O ponto da parábola que se encontra mais próximo da diretriz é chamado de vértice. Esse vértice (V) corresponde exatamente ao ponto médio do segmento determinado pelo foco (F) e pelo ponto (D) de interseção entre o eixo e a diretriz.

A distância do foco até a diretriz se chama parâmetro, então, quando o foco se afasta da diretriz a parábola fica uma curva mais aberta, e quando o foco se aproxima da diretriz, a parábola assume forma mais fechada. Portanto, a forma da parábola depende, exclusivamente, dessa medida, que é a distância entre o foco e a diretriz.

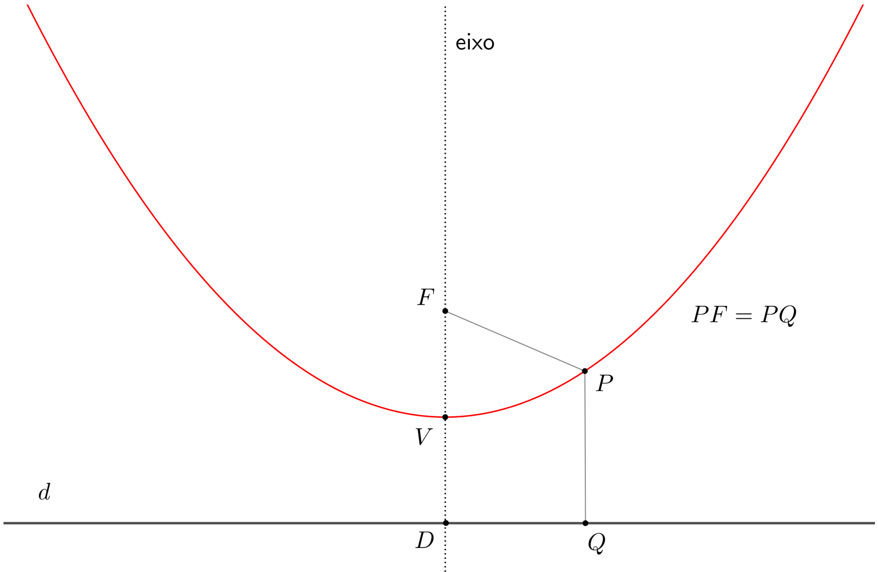

Figura 4.3: Representação gráfica da parábola com foco F mais distante da diretriz d.
Fonte: (Autor, 2026)

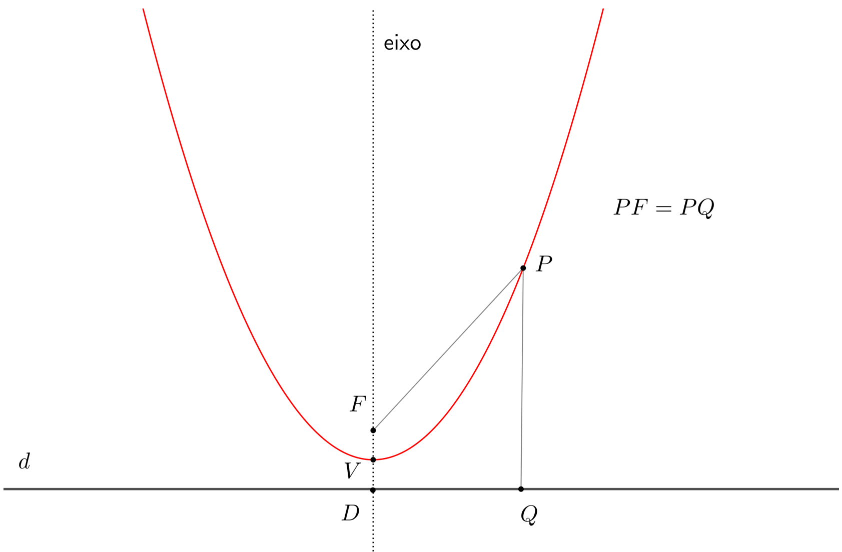

Figura 4.4: Representação gráfica da parábola com foco F mais próximo da diretriz d.
Fonte: (Autor, 2026)

Para demonstrar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, é necessário evidenciar que esse gráfico possui um foco, que é um ponto característico, e uma diretriz, que é uma reta associada a ele.

Teorema 4. *O gráfico da função $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ é uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$.*

Demonstração. Considere o gráfico da função $y = ax^2$ com $a \neq 0$. Como o termo ax^2 é simétrico em relação ao eixo vertical, a parábola tem seu eixo de simetria no eixo y. Por isso, esperamos que o foco esteja em algum ponto $F = (0, p)$ sobre o eixo y e que a diretriz seja uma reta horizontal

$$d : y = -p.$$

Tomando qualquer ponto $P(x, ax^2)$ do gráfico. A distância de P ao foco $F = (0, p)$ é

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (ax^2 - p)^2}$$

e a distância P à diretriz $y = -p$ é a diferença vertical

$$|ax^2 - (-p)| = |ax^2 + p|.$$

Como em uma parábola, um ponto P qualquer de seu gráfico é equidistante do foco e da diretriz, assim, igualando as distâncias temos,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (ax^2 - p)^2} = |ax^2 + p| \iff \quad \left(\sqrt{x^2 + (ax^2 - p)^2}\right)^2 &= |ax^2 + p|^2 \\
\iff \quad x^2 + (ax^2 - p)^2 &= (ax^2 + p)^2 \\
\iff \quad x^2 + \cancel{(ax^2)^2} - 2ax^2p + \cancel{p^2} &= \cancel{(ax^2)^2} + 2ax^2p + \cancel{p^2} \\
\iff \quad x^2 &= 4apx^2.
\end{aligned}$$

Se $x \neq 0$ dividimos por x^2 e obtemos $1 = 4ap$, ou seja, $p = \frac{1}{4a}$. Portanto o foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é

$$y = -\frac{1}{4a}.$$

□

Mostramos que o foco da função $y = ax^2$ é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$. Note que, o seu vértice tem coordenadas $V = (0, 0)$ e é a origem do sistema de coordenadas.

Se $a > 0$, então $\frac{1}{4a} > 0$. Isso significa que a coordenada y do foco é positiva. Logo, o foco está acima do vértice, no semieixo positivo de y. Geometricamente isso corresponde ao fato de que a parábola tem concavidade para cima. (Figura 4.5)

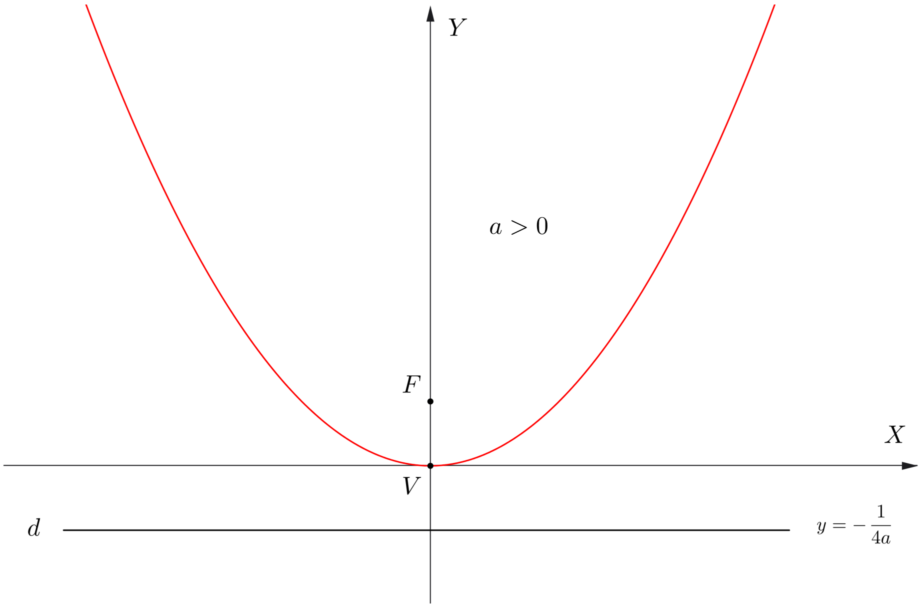

Figura 4.5: Representação gráfica da parábola $y = ax^2$ com $a > 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

Agora, se $a < 0$, temos $\frac{1}{4a} < 0$. Isto é, a coordenada y do foco é negativa. Portanto, o foco está abaixo do vértice, no semieixo negativo de y. Geometricamente isso significa que a parábola tem concavidade para baixo.

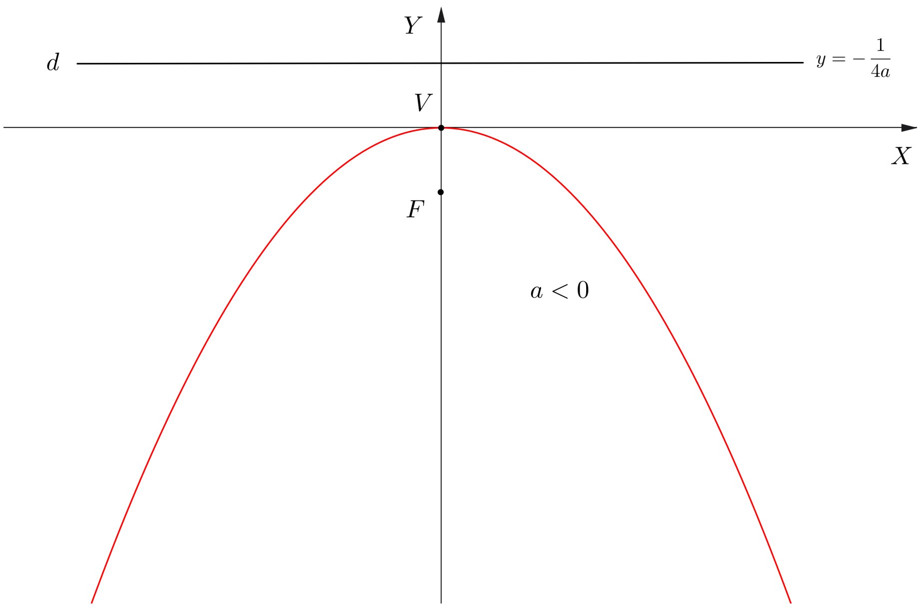

Figura 4.6: Representação gráfica da parábola $y = ax^2$ com $a < 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

A função quadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ na forma elementar, dada por

$$f(x) = ax^2, \quad a \neq 0,$$

constitui o modelo mais simples de parábola com vértice na origem $V = (0, 0)$ e eixo de simetria coincidente com o eixo das ordenadas. A partir dessa forma básica, é possível obter todas as demais parábolas por meio de operações de translação no plano cartesiano.

Do ponto de vista analítico, a adição ou subtração de uma constante à variável x ou ao valor da função resulta em um deslocamento do gráfico, mantendo a abertura e a concavidade inalteradas. O estudo dessas translações permite entender de forma sistemática a localização do gráfico da função quadrática no plano.

Seja, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função quadrática tal que $g(x) = f(x) + k$, assim

$$g(x) = ax^2 + k, \quad a \neq 0 \ \text{ e } \ k \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a parábola é obtida a partir de $f(x) = ax^2$ por meio de um deslocamento vertical $(x, y) \longrightarrow (x, y + k)$ de magnitude $|k|$. Quando $k > 0$, o gráfico é transladado para cima; quando $k < 0$, para baixo. O vértice que estava inicialmente $(0, 0)$, passa a ser o ponto $(0, k)$. Essa translação transforma cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f no ponto $(x, f(x) + k) = (x, g(x))$ do gráfico de g.

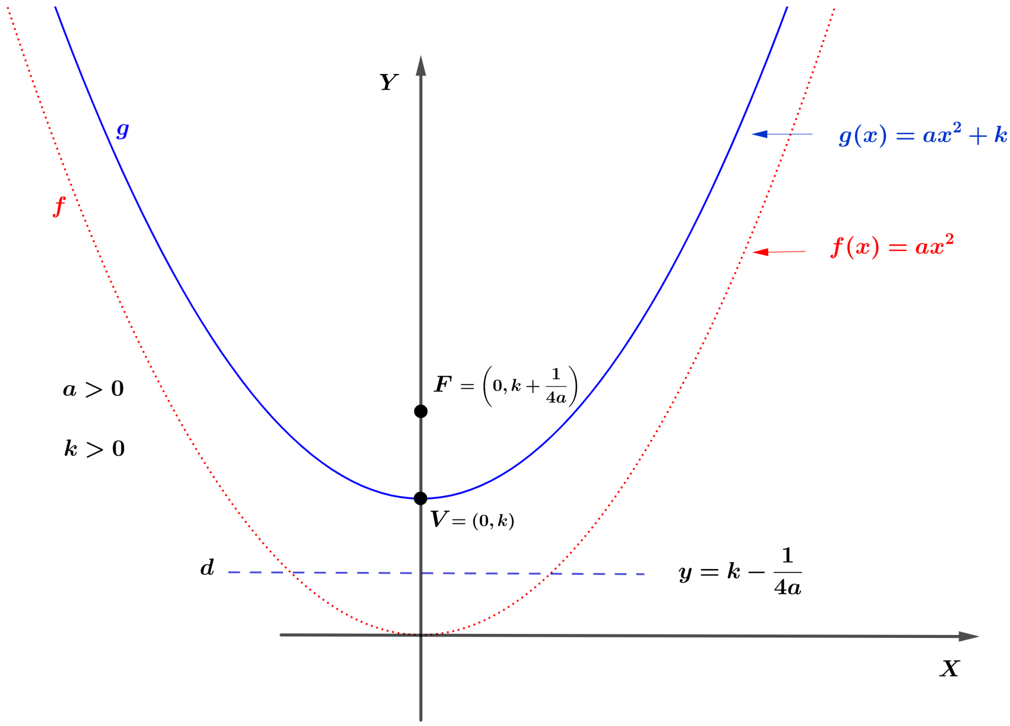

Figura 4.7: Gráfico da função quadrática $y = ax^2 + k$ com $a > 0$ e $k > 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

Consideremos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função quadrática, $h(x) = f(x - m)$, então

$$h(x) = a(x - m)^2, \quad a \neq 0, \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{R}.$$

Esse deslocamento resulta de uma substituição de x por $x - m$ na função $f(x) =$

ax^2. O efeito geométrico é a translação $(x, y) \longrightarrow (x + m, y)$ horizontal de magnitude $|m|$, ou seja, desloca todos os pontos do gráfico de f, m unidades. Se $m > 0$, o gráfico se desloca para a direita; se $m < 0$, para a esquerda. O vértice, portanto, encontra-se em $(m, 0)$. A diretriz não sofre alteração na ordenada, pois o deslocamento é só horizontal. Com efeito, essa translação transforma cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f no ponto $(x, f(x - m)) = (x, h(x))$ do gráfico de h.

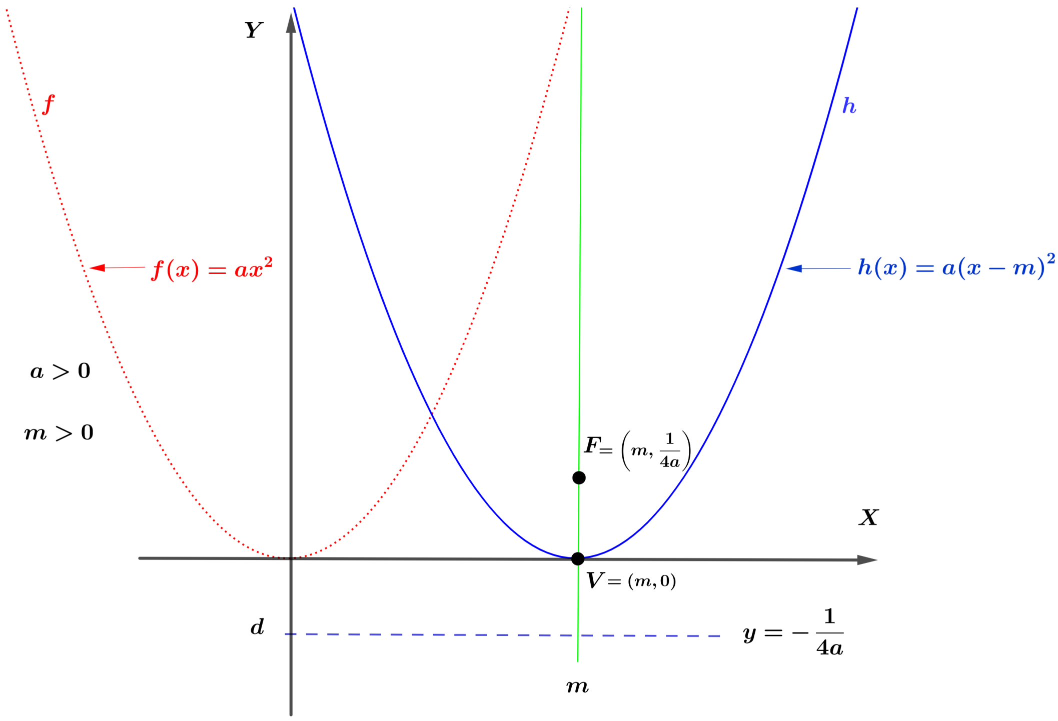

Figura 4.8: Gráfico da função quadrática $y = a(x - m)^2$ com $a > 0$ e $m > 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

De forma geral, dados a, m, $k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ e as funções quadráticas $r, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = ax^2$ e

$$r(x) = a(x - m)^2 + k.$$

O gráfico de r pode ser obtido a partir do gráfico de f por uma translação horizontal de m unidades e uma translação vertical de k unidades. Esta afirmação nos conduz a seguinte reflexão.

O gráfico de f é o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem

$$y = ax^2.$$

Tomemos um ponto genérico (x, y) desse gráfico. Se deslocarmos esse ponto horizontalmente em m unidades e verticalmente em k unidades, obtemos o novo ponto

(x', y'), com

$$x' = x + m \quad \text{e} \quad y' = y + k.$$

Como $y = ax^2$, temos

$$y' = ax^2 + k.$$

Substituindo $x = x' - m$

$$y' = a(x' - m)^2 + k.$$

Logo, o ponto (x', y') satisfaz a equação de $r(x)$. Isso mostra que todo ponto do gráfico de r surge de um ponto do gráfico de f após o deslocamento descrito.

Ainda em relação ao gráfico de r, temos como consequência geométrica:

(a) O vértice $(0, 0)$ de f é levado em $V = (m, k)$.

(b) O foco $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ é levado em $\left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$.

(c) A diretriz $y = -\frac{1}{4a}$ é levada em $d : y = k - \frac{1}{4a}$.

(d) O eixo de simetria da parábola r é $x = m$.

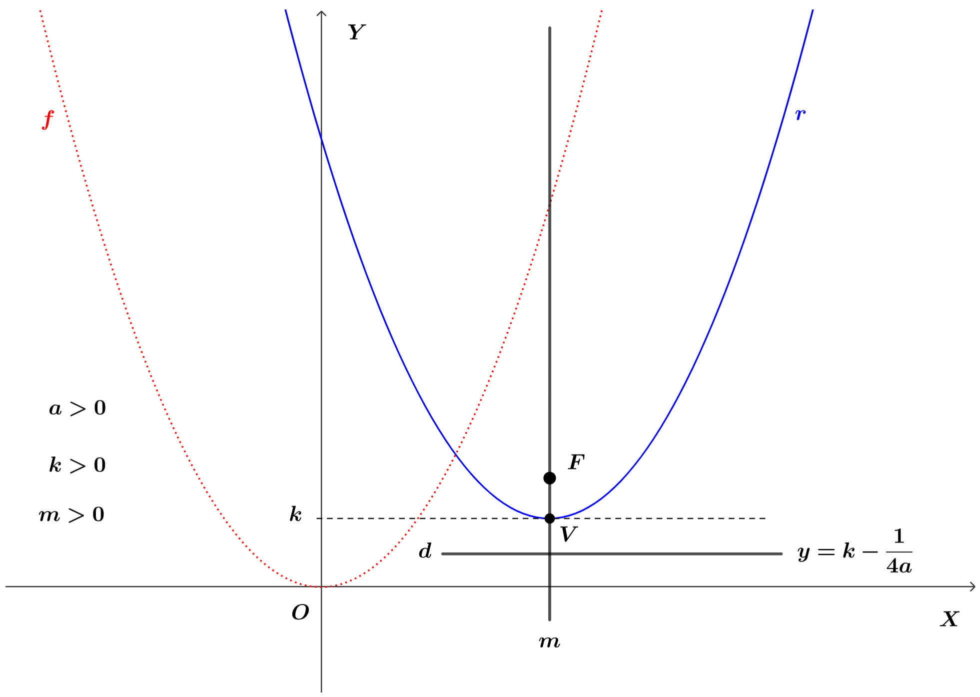

Figura 4.9: Gráfico da função $r(x) = a(x - m)^2 + k$ com $a > 0$, $k > 0$ e $m > 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

Exemplo 4.3.1. *Construir os gráficos das funções reais* $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 4(x+3)^2+1$ *e* $h(x) = 4(x-3)^2 + 1$.

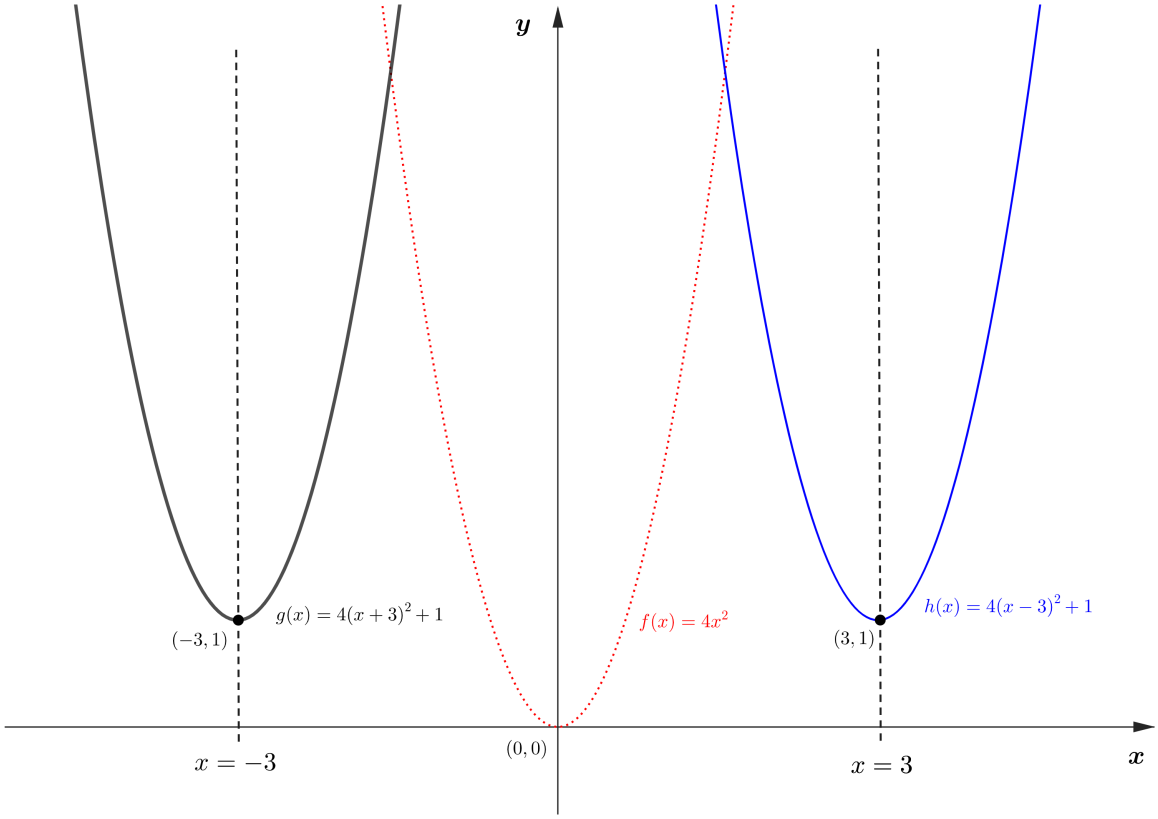

Figura 4.10: Gráfico das função $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 4(x+3)^2 + 1$ e $h(x) = 4(x-3)^2 + 1$.
Fonte: (Autor, 2026)

A parábola dada por $g(x) = 4(x+3)^2 + 1$ está 3 unidades à esquerda e 1 unidade acima da parábola dada $f(x) = 4x^2$ e é simétrica ao eixo $x = -3$. Por sua vez, a parábola dada por $h(x) = 4(x-3)^2 + 1$ está 3 unidades à direita e 1 unidade acima da parábola dada $f(x) = 4x^2$ e é simétrica ao eixo $x = 3$.

Diante do exposto, segue da análise da função $r(x) = a(x-m)^2 + k$ que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, pois pode ser escrita na forma canônica

$$f(x) = a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Isto é,

$$f(x) = a(x-m)^2 + k,$$

com

$$m = -\frac{b}{2a}, \qquad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Quando provamos a propriedade, segundo a qual a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores iguais $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são simétricos em relação a $-\frac{b}{2a}$ (ou seja, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$) significa que a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ é um eixo de simetria do gráfico de f, ou melhor, é o eixo dessa parábola.

O gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ constitui um recurso fundamental para a compreensão do comportamento dessa função. Os valores de x_1 e x_2, correspondentes às abscissas dos pontos de interseção do gráfico com o eixo OX, são justamente a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

O ponto médio do intervalo $[x_1, x_2]$ corresponde à abscissa do vértice da parábola. Caso o gráfico esteja totalmente acima ou totalmente abaixo do eixo horizontal OX, a equação não possui raízes reais. Se o gráfico apenas tangencia o eixo OX, então a equação apresenta uma única raiz real, de multiplicidade dupla.

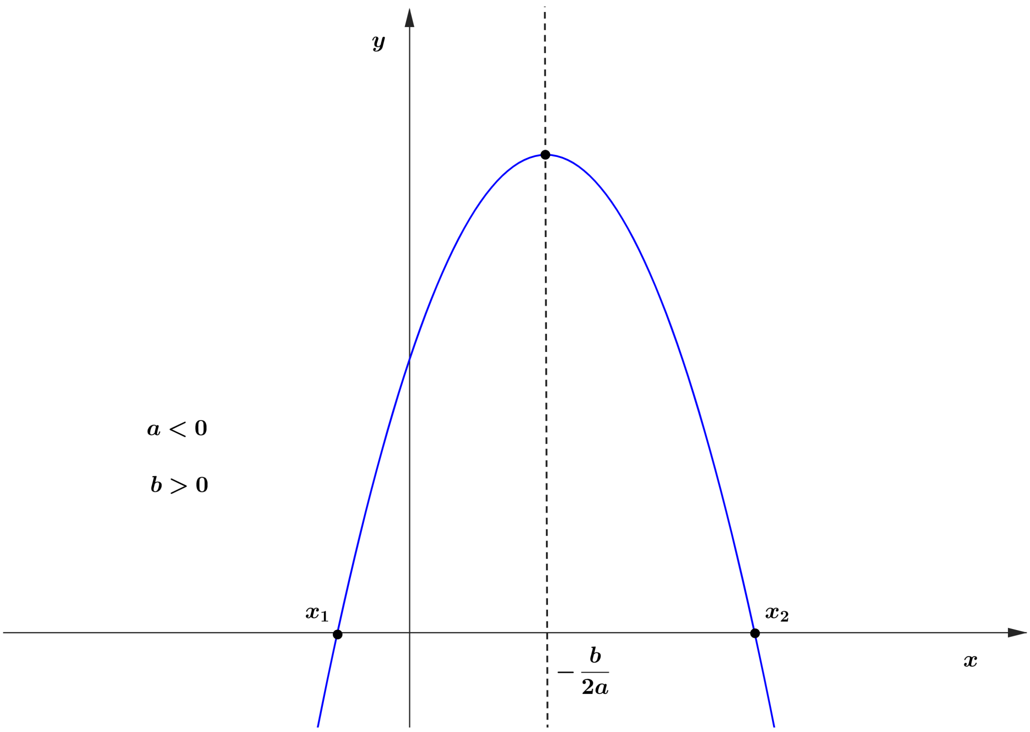

Figura 4.11: Gráfico das função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$ e $b > 0$.
Fonte: (Autor, 2026)

4.4 Caracterização da Função Quadrática

Enquanto nas funções afins acréscimos iguais na variável independente produzem acréscimos constantes nos valores da função, nas funções quadráticas essa regularidade se manifesta apenas no nível das segundas diferenças. Essa distinção permite identificar o comportamento quadrático a partir da análise discreta das variações sucessivas.

Uma caracterização alternativa associada à função quadrática está relacionada ao comportamento discreto.

Consideremos a função quadrática mais simples, $f(x) = x^2$ e a progressão aritmética

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

vejamos o que ocorre com

$$f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 16,\ \ldots,\ f(n) = n^2,\ f(n+1) = n^2 + 2n + 1,\ \ldots$$

Note que, obtemos a sequência

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ n^2 + 2n + 1,\ \ldots$$

Essa nova sequência não é uma progressão aritmética comum, ou seja, a diferença de dois termos consecutivos não é constante. Contudo, ao examinarmos as sucessivas diferenças entre os termos consecutivos desta última sequência, encontramos

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n + 1,\ \ldots$$

que é uma progressão aritmética de razão 2.

Isso não ocorre por acaso, não é uma propriedade apenas de $f(x) = x^2$. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária e

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$$

uma progressão aritmética qualquer, então a sequência

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots$$

dos valores $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3),\ y_4 = f(x_4)$, etc. goza da propriedade de que as diferenças sucessivas

$$d_1 = y_2 - y_1,\ d_2 = y_3 - y_2,\ d_3 = y_4 - y_3,\ d_4 = y_5 - y_4,\ \ldots$$

formam uma progressão aritmética. Mais precisamente, se $x_{i+1} - x_i = r$, para todo $i = 1, 2, 3 \ldots$ então

$$\begin{aligned}
d_i = y_{i+1} - y_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\
&= a(x_{i+1})^2 + b(x_{i+1}) \cancel{+c} - a(x_i)^2 - b(x_i) \cancel{-c} \\
&= a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + b(x_{i+1} - x_i) \\
&= a(x_i + r)^2 - ax_i^2 + b(x_i + r) - bx_i \\
&= \cancel{ax_i^2} + 2arx_i + ar^2 \cancel{-ax_i^2} \cancel{+bx_i} + br \cancel{-bx_i} \\
&= 2arx_i + ar^2 + br.
\end{aligned}$$

A diferença entre dois termos consecutivos de (d_i) é

$$\begin{aligned} d_{i+1} - d_i &= (2arx_{i+1} + ar^2 + br) - (2arx_i + ar^2 + br) \\ &= 2arx_{i+1} - 2arx_i \cancel{+ar^2} \cancel{-ar^2} \cancel{+br} \cancel{-br} \\ &= 2ar(x_{i+1} - x_i) \\ &= 2ar \cdot r \\ &= 2ar^2. \end{aligned}$$

Como $d_{i+1} - d_i$ é independente de i, segue que (d_i) tem razão constante igual a $2ar^2$, isto é, (d_i) é uma progressão aritmética.

Esse comportamento evidencia que a função quadrática não preserva diferenças constantes, como ocorre no caso afim, mas transforma incrementos igualmente espaçados na variável independente em variações cujas diferenças sucessivas crescem de forma regular. Assim, o caráter quadrático da função manifesta-se de maneira natural na estrutura de progressões aritméticas de segunda ordem.

Uma progressão aritmética (PA) de primeira ordem é uma sequência (x_n), $n \in \mathbb{N}$, em que a diferença entre termos consecutivos é constante:

$$x_{n+1} - x_n = r \qquad \text{(constante)}.$$

Já uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência em que as segundas diferenças são constantes. Isto é

$$(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = d \quad \text{(constante)}.$$

Em outras palavras

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = d \quad \text{(constante)}.$$

Como exemplo, a sequência $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, formada pelos quadrados dos números naturais, constitui uma progressão aritmética de segunda ordem. Isso ocorre porque a função quadrática $f(x) = x^2$ transforma a progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ na progressão de segunda ordem $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \ldots$. De modo mais geral, vimos que, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função quadrática e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ formam uma progressão aritmética qualquer, então os números

$$y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2),\, y_3 = f(x_3),\, y_4 = f(x_4),\, \ldots$$

constituem uma progressão aritmética de segunda ordem. Deste modo, consideremos as diferenças sucessivas

$$y_2 - y_1,\, y_3 - y_2,\, \ldots,\, y_{n+1} - y_n,\, \ldots$$

Essas diferenças formam uma (PA) de primeira ordem, cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão indicaremos por r. Assim, o termo geral, ou seja, o n-ésimo termo dessa progressão é dado por

$$y_{n+1} - y_n = d + (n-1)r, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

A partir disso, podemos expressar y_{n+1} como soma telescópica

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1 \\ &= [d + (n-1)r] + [d + (n-2)r] + \cdots + [d + r] + d + y_1 \\ &= nd + \frac{n(n-1)}{2} r + y_1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Essa igualdade também é válida quando $n = 0$, o que nos permite substituir n por $n - 1$ e escrever o termo geral

$$y_n = (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r + y_1.$$

Ou ainda,

$$y_n = \frac{r}{2} n^2 + \left(d - \frac{3r}{2}\right) n + r - d + y_1.$$

Portanto, y_n assume a forma quadrática

$$y_n = an^2 + bn + c,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com

$$a = \frac{r}{2}, \quad b = d - \frac{3r}{2}, \quad c = r - d + y_1.$$

Exemplo 4.4.1. *A sequência* 6, 7, 12, 21, 34, 51, ..., *é uma* (PA) *de segunda ordem, pois as diferenças sucessivas* $7-6$, $12-7$, $21-12$, $34-21$, $51-34, \ldots$ *formam a* (PA) *ordinária* 1, 5, 9, 13, 17, ..., *de razão* $r = 4$ *e primeiro termo* $d = 1$. *Vimos que o n-ésimo termo da sequência inicial é* $y_n = an^2 + bn + c$, *em que* $a = \frac{r}{2} = 2$, $b = d - \frac{3r}{2} = 1 - 6 = -5$ *e* $c = r - d + y_1 = 4 - 1 + 6 = 9$. *Isso significa que, o termo de ordem* n *da sequência* 6, 7, 12, 21, 34, 51, ... *é* $y_n = 2n^2 - 5n + 9$.

Note que, uma (PA) pode ter razão nula, isto é, $x_{n+1} - x_n = 0$. Nesse caso, trata-se de uma sequência constante $x_1, x_1, x_1, \ldots$. De modo análogo, uma (PA) de segunda ordem pode se reduzir a uma progressão aritmética comum quando a sua razão r (dada pelas diferenças sucessivas $y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots$) for igual a zero. Nessa situação, temos $a = \frac{r}{2} = 0$, de modo que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $y_n = f(n)$, deixa de ser quadrática, passando a ser simplesmente uma função afim $f(x) = bx + c$.

Diante do que foi apresentado, podemos concluir que, para identificar se um determinado problema pode ser modelado por uma função quadrática, é necessário que ele satisfaça a seguinte propriedade fundamental.

Se f é uma função quadrática, os acréscimos $f(x+h) - f(x)$ dependem de x por meio de uma função afim. Em particular, a sequência formada por $f(x), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h), \ldots$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, ou seja, as diferenças entre termos consecutivos formam uma progressão aritmética.

Essa propriedade nos diz que, em uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o acréscimo

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= a[(x+h)^2 - x^2] + b[(x+h) - x] \\ &= a(2xh + h^2) + bh \\ &= (2ax + b)h + ah^2 \end{aligned}$$

depende de x linearmente, ou seja, por meio de uma função afim. Para h fixo, o termo $(2ax + b)h$ mostra essa dependência e o termo ah^2 é constante. Trocando x por $x + h$, temos

$$\begin{aligned} f(x+2h) - f(x+h) &= [2a(x+h) + b]h + ah^2 \\ &= 2axh + 2ah^2 + bh + ah^2 \\ &= \underbrace{(2ax + b)h + ah^2} + 2ah^2 \\ &= [f(x+h) - f(x)] + 2ah^2, \end{aligned}$$

repetindo o processo, agora, trocando x por $x + 2h$,

$$\begin{aligned} f(x+3h) - f(x+2h) &= [2a(x+2h) + b]h + ah^2 \\ &= 2axh + 4ah^2 + bh + ah^2 \\ &= \underbrace{(2ax + b)h + ah^2 + 2ah^2} + 2ah^2 \\ &= [f(x+2h) - f(x+h)] + 2ah^2. \end{aligned}$$

Podemos ainda expressar essas diferenças da seguinte forma

$$\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= (2ax+b)h+ah^2\\
f(x+2h)-f(x+h) &= [2a(x+h)+b]h+ah^2 = f(x+h)-f(x)+2ah^2\\
f(x+3h)-f(x+2h) &= [2a(x+2h)+b]h+ah^2 = f(x+h)-f(x)+4ah^2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim, os acréscimos $f(x+h)-f(x)$, $f(x+2h)-f(x+h)$, $f(x+3h)-f(x+2h), \ldots$ formam uma progressão aritmética de razão $2ah^2$ e, em consequência, $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h), \ldots$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Agora, será que a recíproca é verdadeira? Isto é, será que toda função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Segundo Lima (2005), a resposta é afirmativa. No livro (A Matemática do Ensino Médio, vol.1, p. 149) está demonstrada, a recíproca, no seguinte teorema.

Teorema 5. *(Caracterização das Funções Quadráticas.) A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$.*

Destacamos que a função quadrática não pode ser monótona em todo o seu domínio ($\mathbb{R}$), apresentando comportamentos distintos de crescimento e decrescimento em relação ao seu vértice. Essa característica justifica a exigência da hipótese de continuidade para a função f.

Dessa forma, a análise das variações discretas fornece um critério eficaz para a identificação de modelos quadráticos em situações reais, permitindo distinguir esse tipo de função tanto das funções afins, associadas a progressões aritméticas simples, quanto das funções exponenciais, nas quais a regularidade se manifesta por meio de razões constantes.

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

A função exponencial configura-se como o modelo essencial na modelagem matemática de fenômenos nos quais o crescimento ou o decrescimento ocorre de forma proporcional ao valor atual da grandeza considerada. Diferentemente das funções afins, associadas a variações absolutas constantes, e das funções quadráticas, caracterizadas por variações cujas diferenças evoluem de modo linear, a função exponencial distingue-se por apresentar variações relativas constantes em intervalos regulares.

Este capítulo apresenta a definição formal da função exponencial e das funções do tipo exponencial, destacando suas restrições, suas propriedades fundamentais e sua importância para a modelagem matemática.

5.1 Definição

De acordo com Lima (2023, p. 166), a seguinte definição é apresentada para a função exponencial.

Definição 14. *Seja um número a positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$:*

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(2) $a^1 = a$.

(3) $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$ *e* $x < y \Longrightarrow a^y < a^x$ *quando* $0 < a < 1$.

Note que, a deve obedecer a duas restrições rigorosas: deve ser maior do que zero ($a > 0$) e diferente de um ($a \neq 1$).

A restrição ($a \neq 1$) é de particular importância para o propósito de modelar crescimento e decrescimento dinâmico. Se a base fosse igual a 1, a função se tornaria

$f(x) = 1^x$, o que, para qualquer x, resultaria em $f(x) = 1$. Isso transformaria a função exponencial em uma função constante.

A condição de que a base seja positiva ($a > 0$) garante a continuidade e a definição da função sobre o $\mathbb{R}$. Se a base fosse negativa, por exemplo, $f(x) = (-1)^x$, a função não estaria definida para todos os expoentes. Um exemplo é $f(\frac{1}{2}) = (-1)^{\frac{1}{2}}$, não apresenta um resultado real, pois a raiz quadrada de um número negativo não pertence ao conjunto dos números reais.

5.2 O Gráfico da Função Exponencial

O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ é uma figura chamada curva exponencial, em que para todo número real positivo a, diferente de 1, terá comportamento crescente se $a > 1$, e decrescente se $0 < a < 1$.

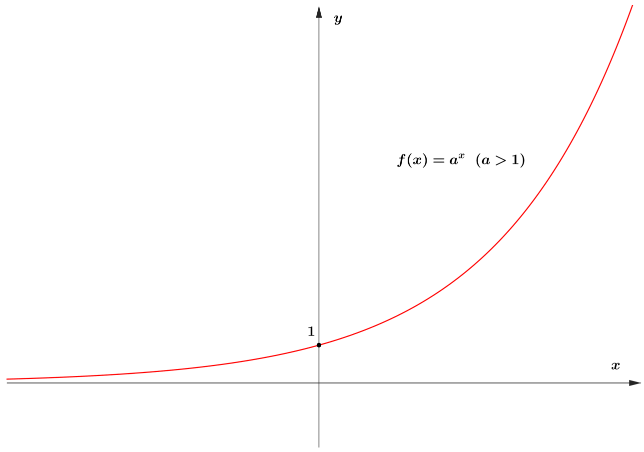

Figura 5.1: Gráfico da função exponencial de base $a > 1$.
Fonte: (Autor, 2026)

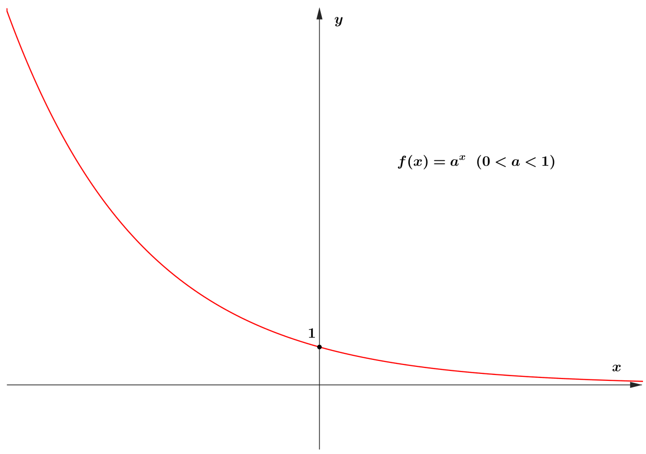

Figura 5.2: Gráfico da função exponencial de base $0 < a < 1$.
Fonte: (Autor, 2026)

Algumas observações podem ser extraídas a partir desses gráficos apresentados acima, tais como:

(a) o gráfico da função exponencial não toca o eixo das abscissas, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor zero (não existe x real tal que $f(x) = 0$) e intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

(b) o gráfico de $f(x) = a^x$ não tem pontos nos quadrantes III e IV.

(c) quando $a > 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um crescimento lento enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acentuado.

(d) a função exponencial é definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, logo o seu domínio é $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio $\mathbb{R}^+$. Como o conjunto imagem é $\mathbb{R}^+$, a função exponencial é sobrejetiva. Então temos $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}^+$ e $Im(f) = \mathbb{R}^+$.

(e) elementos distintos do domínio de f possuem imagens distintas no contradomínio de f. Assim $[x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$. Logo, a função exponencial é injetiva e portanto é bijetiva.

(f) por ser injetiva, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, isto é, se $a^{x_1} = a^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$.

5.3 Caracterização da Função Exponencial

Segundo Lima (2023), os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares são as funções afins, quadráticas e exponenciais.

Para que a escolha adequada possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Já abordamos a caracterização das funções afins e quadráticas e agora faremos o mesmo para as funções exponenciais.

No livro (A Matemática do Ensino Médio, vol. 1, p. 183), está demonstrado o teorema de caracterização da função exponencial que de acordo com Lima (2005):

Teorema 6. *[Caracterização da Função exponencial] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

O ponto principal do teorema é que essas três afirmações estão intimamente conectadas. Se uma função que é monótona e injetiva satisfaz uma delas, ela automaticamente satisfaz as outras duas.

Em outras palavras, se estamos diante de uma função que sabemos ser sempre crescente ou sempre decrescente, que possui a propriedade de transformar somas em produtos, então a função em questão é, por definição, uma função exponencial.

A Função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ tem utilidade limitada para a modelagem, porque o seu valor inicial $f(0) = a^0 = 1$. Para termos a flexibilidade necessária para modelar fenômenos é mais interessante considerarmos as funções do tipo exponencial.

Definição 15. *Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.*

Note que, agora o valor inicial da função $f(0) = b$. Funções do tipo exponencial são extremamente úteis para modelar situações-problema reais. E isso acontece em virtude da propriedade fundamental:

Se g é uma função do tipo exponencial, as razões de acréscimo $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ e os acréscimos relativos $\frac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)}$ dependem apenas de h (e não de x). Em particular, a sequência formada por $g(x)$, $g(x+h)$, $g(x+2h), \ldots$ é uma progressão geométrica.

Se a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer x, $h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h}}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x \cdot a^h}{b \cdot a^x} = a^h$$

e

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{g(x+h)}{g(x)} - \frac{g(x)}{g(x)} = \frac{g(x+h)}{g(x)} - 1 = a^h - 1$$

dependem apenas de h, mas não de x.

A condição de que o acréscimo relativo

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$$

dependa exclusivamente do incremento h é equivalente a exigir que o quociente (razões de acréscimos)

$$\frac{g(x+h)}{g(x)}$$

dependa apenas de h.

De fato, se existe uma função $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \varphi(h),$$

então

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \varphi(h)+1.$$

Reciprocamente, se existe uma função $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \psi(h),$$

então

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \psi(h)-1.$$

Assim, ambas as formulações são matematicamente equivalentes.

A recíproca da propriedade acima também é válida, desde que acrescentemos uma condição inicial sobre g, supondo-a monótona. Demonstra-se, assim, a recíproca dessa propriedade a partir do teorema em Lima (2005, p. 185):

Teorema 7. *[Caracterização das Funções do tipo exponencial] Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para x, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Observe que a hipótese equivale a supor que $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ não depende de x. Substituindo $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, isto é, como

$$g(x) = b \cdot a^x \implies \frac{g(x)}{b} = a^x \implies f(x) = a^x,$$

obtemos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é monótona e injetiva, com

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{a^{x+h}}{a^x} = \frac{a^x \cdot a^h}{a^x} = a^h$$

independente de x e ainda $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{f(0+h)}{f(0)} = \frac{f(h)}{1} = f(h)$$

para todo $h \in \mathbb{R}$. Daí, temos que f cumpre a condição $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$. Portanto, segue do Teorema 6 que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ em que $a = f(1)$. Logo $g(x) = b \cdot f(x)$, então

$$g(x) = b \cdot a^x$$

e $b = g(0)$, como queríamos demonstrar.

□

Uma outra forma de caracterizar a função do tipo exponencial consiste em observar a sua capacidade de transformar progressões aritméticas em progressões geométricas. Trata-se de um olhar discreto sobre situações em que ocorre crescimento ou decrescimento exponencial.

Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ g(x) = b{\cdot}a^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$g(x_1) = b \cdot a^{x_1},\ \ g(x_2) = b \cdot a^{x_2},\ \ \ldots,\ \ g(x_n) = b \cdot a^{x_n}, \ldots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h, pois

$$g(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n + h} = (b \cdot a^{x_n}) \cdot a^h = g(x_n) \cdot a^h\,.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + n \cdot h$, segue-se que

$$\begin{aligned} g(x_{n+1}) &= b \cdot a^{x_{n+1}} \\ &= b \cdot a^{x_1 + nh} \\ &= (b \cdot a^{x_1}) \cdot a^{nh} \\ &= g(x_1) \cdot \left(a^h\right)^n \\ &= g(x_1) \cdot A^n \end{aligned}$$

em que $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $g(x_1) = b$. Logo

$$g(x_{n+1}) = b \cdot A^n\,.$$

A recíproca dessa característica pode ser verificada atribuindo a condição de que a função g seja monótona e injetiva, como se transcreve no teorema a seguir:

Teorema 8. *Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona e injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n, \ldots$ numa progressão geométrica $y_1,\, y_2, \ldots,\, y_n = g(x_n)$. Se pusermos $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, teremos $g(x) = b{\cdot}a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $b = g(0)$. Definimos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$. Note que f é monótona e injetiva, além de preservar a propriedade de transformar quaisquer progressão aritmética em progressão geométrica. Observe ainda que $f(0) = \frac{g(0)}{b} = 1$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, assim temos que, $f(x), 1, f(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $f(-x)$. Daí, segue que

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$, é uma progressão aritmética. Aplicando f, obtemos a sequência $1, f(x), f(2x), \ldots, f(nx)$ que é uma progressão geométrica de razão $f(x)$. Como $f(0) = 1$, o termo $f(nx)$, correspondente ao $(n+1)$-ésimo termo da progressão, é dado por

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(0) \cdot f(x)^{(n+1)-1} \\ &= 1 \cdot f(x)^n \\ &= f(x)^n. \end{aligned}$$

Se n for inteiro negativo, escrevendo $n = -m$, com $m \in \mathbb{N}$. Nesse caso, temos

$$f(-mx) = \frac{1}{f(mx)} = \frac{1}{(f(x))^m} = f(x)^{-m}.$$

Portanto, para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, vale $f(nx) = f(x)^n$. Pelo Teorema 6 (Caracterização da Função Exponencial), segue que, pondo $a = f(1) = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $f(x) = a^x$, isto é,

$$g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

□

Exemplo 5.3.1. *Dadas a PA $0, 2, 4, 6, 10, \ldots$ e a função exponencial $f(x) = 2 \cdot 3^x$.*

(i) Verificar se a sequência $f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), \cdot$ é uma PG.

(ii) Determinar a razão dessa PG.

Calculando $f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), \cdot$, temos

$$\begin{array}{ll} f(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2 & f(2) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \\ f(4) = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162 & f(6) = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458 \\ f(8) = 2 \cdot 3^8 = 2 \cdot 6561 = 13122 & f(10) = 2 \cdot 3^{10} = 2 \cdot 59049 = 118098 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Observe que a sequência $2, 18, 162, 1458, 13122, 118098, \ldots$ é uma PG de razão $q = 9$.

5.4 O gráfico da Função do Tipo Exponencial

Funções do tipo exponencial modelam situações em que, aumentando o valor de uma grandeza em intervalos regulares, a outra fica multiplicada por um fator constante.

Assim, ao plotar os pontos do gráfico de $f(x) = b \cdot a^x$ com abscissas $x, x+h, x+2h, \ldots$ os acréscimos são cada vez maiores quando $a > 1$ ou os decréscimos são cada vez menores quando $0 < a < 1$.

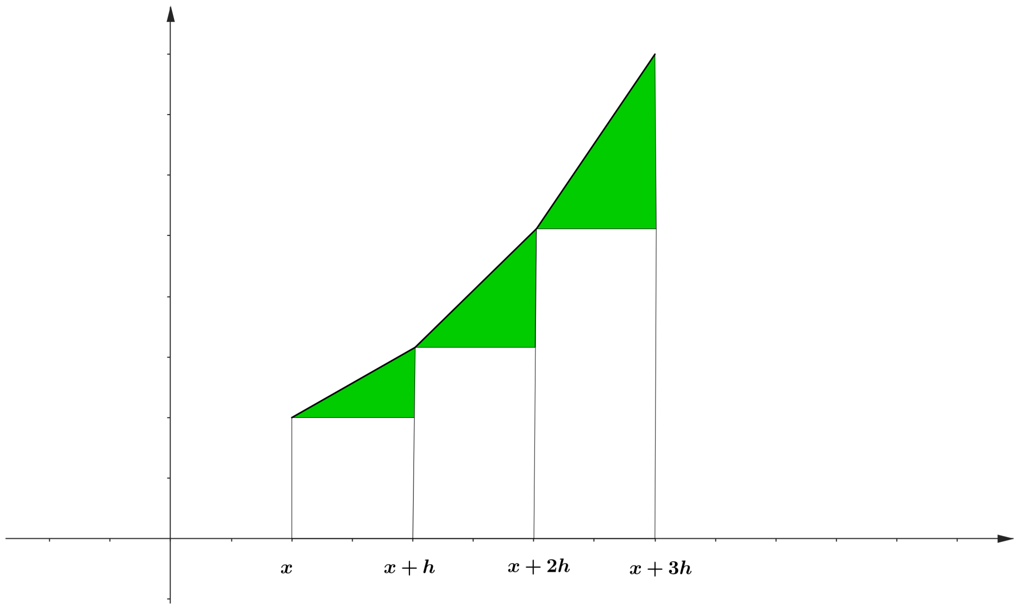

Figura 5.3: Gráfico da função do tipo exponencial de base $a > 1$.
Fonte: (Autor, 2026)

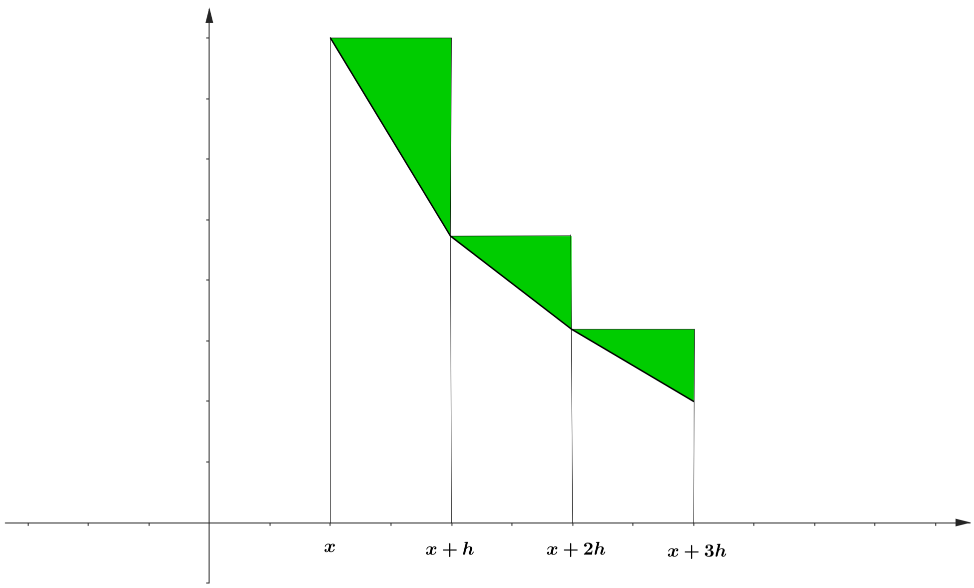

Figura 5.4: Gráfico da função do tipo exponencial de base $0 < a < 1$.
Fonte: (Autor, 2026)

Nos problemas de modelagem que envolvem funções do tipo exponencial, é frequente a necessidade de determinar o valor do expoente associado a uma determinada situação concreta. Questões como o instante em que uma população atinge certo nível, o tempo necessário para que uma grandeza se duplique ou se reduza à metade, ou ainda o número de ciclos associados a um crescimento relativo fixo, conduzem naturalmente à resolução de equações exponenciais. Nesse contexto, torna-se necessário introduzir a função logarítmica, não como um objeto independente, mas como a função inversa da exponencial. Assim, o estudo da função logarítmica surge de maneira natural como instrumento matemático essencial para a interpretação e resolução dos modelos exponenciais considerados ao longo deste trabalho.

5.5 A função logarítmica

Seja $a > 0$, com $a \neq 1$. A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é estritamente monótona e, portanto, inversível. Sua função inversa é denominada **função logarítmica de base** a.

Definição 16. *A função logarítmica de base $a > 0$, $a \neq 1$, é a função*

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como a inversa da função exponencial $f(x) = a^x$. Em particular, para todo $x > 0$,

$$\log_a(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x.$$

Como consequência imediata da definição, tem-se que

$$\log_a(a^x) = x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

e

$$a^{\log_a(x)} = x, \quad \text{para todo } x > 0.$$

Propriedades fundamentais

As principais propriedades da função logarítmica decorrem diretamente da relação de inversão com a função exponencial.

Proposição 1. *Sejam $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:*

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

3. $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.

Demonstração. Como $a^{\log_a(x)} = x$ e $a^{\log_a(y)} = y$, temos

$$xy = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}.$$

Aplicando $\log_a$ em ambos os lados, obtemos

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

As demais propriedades seguem de forma análoga, utilizando as regras de potência da função exponencial. □

Mudança de base

A função logarítmica permite ainda expressar logaritmos em bases distintas.

Proposição 2. *Se $a, b > 0$, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, então, para todo $x > 0$,*

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

Demonstração. Seja $y = \log_a(x)$. Então $x = a^y$. Aplicando $\log_b$ em ambos os lados, temos

$$\log_b(x) = y \log_b(a),$$

donde

$$y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

□

Interpretação na modelagem exponencial

No contexto dos modelos exponenciais estudados neste trabalho, a função logarítmica viabiliza algebricamente a determinação do expoente. Dado um modelo da forma

$$g(x) = b\,a^x,$$

com $b > 0$ e $a > 0$, $a \neq 1$, a resolução da equação $g(x) = k$ é equivalente a

$$a^x = \frac{k}{b},$$

de modo que

$$x = \log_a\left(\frac{k}{b}\right).$$

Assim, a função logarítmica permite interpretar quantitativamente o comportamento dos modelos exponenciais, determinando tempos, ciclos ou taxas associados a um crescimento ou decrescimento relativo fixo. Dessa forma, o estudo da função logarítmica não constitui um conteúdo isolado, mas uma exigência natural decorrente da própria estrutura dos modelos exponenciais.

Neste trabalho, as modelagens de fenômenos de crescimento ou decrescimento proporcional utilizam predominantemente funções da forma $f(x) = b \cdot a^x$. Essa escolha justifica-se pela clareza didática, em que o parâmetro b representa o valor inicial e a o fator de variação em intervalos regulares, alinhando-se aos objetivos da matemática escolar e às orientações da BNCC.

Contudo, é relevante destacar a função exponencial de base e. Ela surge naturalmente como o limite do crescimento discreto quando o número de períodos de atualização tende ao infinito, sendo definida por:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Embora a forma $f(t) = c_0 e^{\alpha t}$ apresente vantagens em contextos de cálculo avançado, optou-se pela forma $f(x) = b \cdot a^x$ por ser mais intuitiva para a análise de sequências e progressões, que é um dos objetos de estudo desta dissertação.

Com isso, conclui-se a análise das funções básicas sob a perspectiva da modelagem a partir de variações discretas e relativas. As funções afins, quadráticas e exponenciais revelam-se, assim, como respostas naturais a diferentes padrões de regularidade observados nos dados, permitindo reconhecer o modelo adequado a partir das propriedades do fenômeno, e não da simples imposição de uma expressão algébrica prévia.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, os conceitos e propriedades das funções afins, quadráticas e exponenciais, desenvolvidos nos capítulos anteriores, são mobilizados na construção e análise de situações-problema elaboradas sob a perspectiva da Modelagem Matemática. Diferentemente dos capítulos precedentes, o foco aqui não está na apresentação ou demonstração teórica dessas funções, mas na sua utilização como instrumentos para interpretar fenômenos reais e responder a questões oriundas de contextos significativos.

A proposta adotada privilegia a construção do modelo matemático a partir de dados, regularidades e interpretações do fenômeno em estudo, evitando a apresentação prévia da expressão funcional. Sob essa perspectiva, o reconhecimento de padrões de crescimento ou decrescimento, bem como o uso de progressões aritméticas, progressões geométricas e diferenças finitas, desempenha papel central no processo de modelagem.

As situações-problema apresentadas neste capítulo foram pensadas de modo a favorecer a compreensão conceitual das funções do Ensino Básico, articulando aspectos matemáticos, didáticos e aplicados. Assim, busca-se evidenciar que as propriedades estruturais dessas funções, tais como, acréscimos constantes, diferenças de segunda ordem constantes e crescimento relativo constante, emergem naturalmente da análise do fenômeno, reforçando sua relevância no ensino e na aprendizagem da Matemática.

6.1 Concepção de Modelagem Matemática

Historicamente, conforme analisa Dante (2011), o ensino da Matemática no Brasil foi marcado por uma abordagem formalista e conteudista, centrada na memorização de regras e procedimentos simbólicos. Essa tradição priorizou a transmissão de algoritmos em detrimento da construção de sentido, levando muitos estudantes a encarar a disciplina como algo inacessível ou destinado apenas a gênios. Em contrapartida, D'Ambrosio (2013) defende que a Matemática deve ser compreendida como uma manifestação cultural viva, composta por estratégias desenvolvidas por comunidades para lidar com situações de sobrevivência e transcendência. Sob essa ótica, a "matematização"da existência é um processo natural do ser humano para explicar e conhecer a realidade, o que justifica a transição de um ensino mecânico para uma prática baseada na modelagem e na resolução de problemas contextualizados.

Autores como D'Ambrosio (2011), Bassanezi (2002) e Biembengut (2007) argumentam que parte das dificuldades no ensino de Matemática decorre do distanciamento entre os conteúdos escolares e a Matemática vivida no cotidiano. Para esses pesquisadores, o ensino deve superar o formalismo algébrico, orientando-se pela construção de significados e pela modelagem de situações reais, de modo que o estudante reconheça a Matemática como linguagem de interpretação de fenômenos.

Mas, afinal, o que é modelagem matemática? Como essa prática pode nos ajudar a conectar conceitos abstratos a situações do mundo real?

A modelagem matemática é concebida como um processo que busca compreender, representar e explicar situações reais por meio da linguagem e das estruturas da Matemática. Em termos simples, é transformar um problema do mundo real em um modelo matemático, isto é, uma expressão, equação, função ou sistema que descreve e possibilita analisar o fenômeno em questão.

> A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão: *A educação inspirada nos princípios da liberdade e da solidariedade humana tem por fim o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhes permitem utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio.* (Lei 4024 - 20/12/61)(Bassanezi, 2002, p. 17).

Essa definição evidencia que modelar é mais do que aplicar fórmulas: é interpretar, abstrair e validar a Matemática dentro de um contexto. O processo envolve uma ida e volta entre a realidade e a teoria, em que o modelo é constantemente ajustado para representar de forma satisfatória o fenômeno estudado.

De forma complementar, Biembengut e Hein explicam: "...matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir". (Biembengut, 2007, p. 13)

Assim, a modelagem não deve ser vista apenas como um método de aplicação, mas como uma metodologia de construção do conhecimento matemático. Ela permite ao estudante desenvolver raciocínio lógico e crítico, compreender a relação entre conceitos matemáticos e fenômenos reais e perceber a Matemática como uma linguagem de descrição e previsão de comportamentos, construindo significados de forma ativa e contextualizada.

No campo do ensino, a modelagem é uma ponte entre o formalismo e a prática: exige tanto a compreensão conceitual (para formular o modelo) quanto a habilidade algébrica (para resolvê-lo). Quando bem conduzida, ela promove uma aprendizagem significativa e interdisciplinar, tornando o aluno sujeito do próprio processo de investigação.

A apresentação da Matemática nas escolas, segundo Lima (1991), deve ser feita levando-se em conta, conceituação, manipulação e aplicação, que são as três bases fundamentais da organização da Matemática e consequentemente do seu ensino. A conceituação diz respeito ao estabelecimento das definições, dos teoremas, da teoria, para que o aluno possa ter noção do que será usado e da veracidade das ferramentas que serão utilizadas. A manipulação significa, principalmente, atitude de natureza algébrica e geométrica, ou seja, saber fazer cálculos, resolver equações, lidar com as expressões algébricas de modo geral, realizar as construções geométricas, etc. E finalmente, a aplicação, frequentemente denominada contextualização no discurso pedagógico contemporâneo, é utilizar a matemática no dia a dia para resolver situações e problemas reais (modelagem).

O ensino da Matemática exige um equilíbrio entre essas três dimensões fundamentais: a conceituação teórica, a manipulação algébrica e geométrica e a contextualização. Quando uma dessas dimensões é sobrevalorizada em detrimento das outras, o processo de ensino-aprendizagem tende a se tornar fragmentado e ineficaz. Logo, o desafio contemporâneo consiste em construir pontes entre o formalismo matemático e o mundo real, de modo que a manipulação simbólica tenha significado e a modelagem preserve o rigor teórico característico da Matemática enquanto ciência.

Nesse sentido, o ensino de funções (afins, quadráticas e exponenciais) oferece um campo fértil para o desenvolvimento desse equilíbrio. Ao relacionar a análise conceitual das propriedades funcionais com a manipulação simbólica e a interpretação de fenômenos do cotidiano, o aluno constrói uma aprendizagem significativa, crítica e integrada. Assim, a consolidação dos três pilares (conceituação, manipulação e aplicação) evita o retorno aos antigos fracassos do ensino puramente formalista, promovendo uma Matemática viva, coerente e socialmente relevante.

Compreender essas funções apenas de forma algébrica, por meio de fórmulas e manipulações simbólicas, limita o aprendizado a um nível superficial. Em contrapartida, abordá-las sob a ótica da modelagem matemática, isto é, como instrumentos de leitura e representação de fenômenos cotidianos, econômicos, físicos ou biológicos, permite que o estudante perceba o significado dos parâmetros e dos comportamentos gráficos, desenvolvendo um pensamento matemático mais crítico, flexível e aplicável.

Dessa forma, a caracterização das funções afins, quadráticas e exponenciais, a partir de uma abordagem conceitual e aplicada, evidencia como cada uma delas pode ser utilizada na modelagem de problemas reais. Busca-se, assim, refletir sobre a importância de superar a visão tradicional e puramente algébrica da Matemática, promovendo um ensino que una rigor teórico e relevância prática, em consonância com as diretrizes contemporâneas da Educação Matemática. Nosso intuito é apresentar uma proposta de ensino da matemática a partir da modelagem em situações problemas reais para tais funções.

Conforme observa D'Ambrosio (2013), a matemática escolar é frequentemente identificada por um simbolismo e regras próprios que pouco se assemelham à prática cotidiana. Nesse sentido, nota-se que muitos livros didáticos apresentam problemas intitulados como contextualizados, mas que, na realidade, limitam-se a fornecer a expressão algébrica no enunciado, conforme ilustra o exemplo: "... a grandeza $y = f(x)$ varia com a grandeza x por meio da função

$$f(x) = \frac{1}{100}\left(20 + 10x - x^2\right),$$

ou seja, em que a função envolvida já é apresentada no texto do enunciado. Nas modelagens de situações reais isso não acontece. É preciso, a partir de situações-problema, aprender a identificar que tipo de função é adequada para modelá-la e obter seus coeficientes.

Para identificar a forma de representação mais conveniente em cada situação, é essencial compreender como ocorre a variação da função, isto é, de que modo se manifesta o aumento ou a diminuição dos valores de $f(x)$ conforme a variável x se altera. Em outras palavras, é necessário analisar o comportamento dos acréscimos

$$f(x+h) - f(x)$$

em cada classe de funções, pois é essa relação que revela a natureza do crescimento ou decrescimento de uma função afim, quadrática ou exponencial.

Nesta dissertação, a modelagem matemática é compreendida como um processo que envolve a análise de uma situação real, a identificação de regularidades e a construção de um modelo matemático capaz de descrever o fenômeno em estudo. Nesse sentido, não se pretende seguir rigidamente etapas pré-estabelecidas, mas valorizar a interpretação do problema e a mobilização de propriedades matemáticas adequadas ao contexto considerado.

Essa concepção orienta as situações-problema apresentadas neste capítulo, nas quais a expressão funcional não é fornecida a priori, sendo construída a partir da análise dos dados e do comportamento do fenômeno, em consonância com a perspectiva de modelagem adotada.

6.2 Função Afim como modelo matemático

As propriedades teóricas da função afim foram desenvolvidas anteriormente em capítulo próprio. Nesta seção, tais propriedades são retomadas apenas como um *critério técnico de identificação* do modelo matemático mais adequado em situações de variação linear.

Recorde-se que uma função afim é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. A característica fundamental que justifica o uso desse modelo em problemas de modelagem é a constância dos acréscimos: para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$,

$$f(x + h) - f(x) = ah,$$

isto é, o acréscimo da função depende apenas do incremento h, e não do ponto x considerado.

Em consequência, quando a variável independente assume valores igualmente espaçados, a sequência

$$f(x),\ f(x + h),\ f(x + 2h),\ \ldots$$

forma uma progressão aritmética. Essa propriedade fornece um critério prático de identificação do comportamento afim em situações reais: *incrementos constantes na variável independente produzem incrementos constantes na variável dependente.*

Reciprocamente, conforme apresentado em Lima (2005), se uma função monótona transforma qualquer progressão aritmética em outra progressão aritmética, então essa função é necessariamente afim.

Tal caracterização será utilizada implicitamente na análise dos problemas a seguir.

Problema 6.2.1. *A temperatura é uma grandeza física fundamental, e sua medição é essencial em diversas áreas da ciência e do cotidiano. Duas das escalas de temperatura mais comuns são a Celsius* (°C) *e a Fahrenheit* (°F).
Considere a relação entre a temperatura em graus Celsius °C *e a temperatura em graus Fahrenheit* °F. *Sabemos que a água congela a* $0\,$°C, *o que corresponde a* $32\,$°F. *Além disso, a água ferve a* $100\,$°C, *o que equivale a* $212\,$°F.
Com base nesses dois pontos, determine a função que descreve a temperatura em Fahrenheit (F) *em termos da temperatura em Celsius* (C). *Utilize-a para responder às seguintes questões:*

(a) Qual a temperatura em Fahrenheit quando a temperatura é de $25°C$*?*

(b) Qual a temperatura em Celsius quando a temperatura é de $68°F$*?*

(c) Existe uma temperatura em que as escalas Celsius e Fahrenheit apresentam o mesmo valor? Se sim, qual é essa temperatura?

Solução. A temperatura é uma mesma grandeza física, sendo apenas expressa em escalas distintas. Assim, variações iguais de temperatura em uma escala correspondem a variações iguais na outra, ainda que as unidades de medida sejam diferentes.

Observa-se que a escala Celsius vai de $0°C$ a $100°C$ entre os pontos de congelamento e ebulição da água, enquanto a escala Fahrenheit vai de $32°F$ a $212°F$ nesse mesmo intervalo. Logo, um acréscimo de $100°C$ corresponde a um acréscimo de $180°F$.

Isso indica que incrementos constantes em Celsius produzem incrementos constantes em Fahrenheit. De acordo com o **Teorema 2 (p. 43)**, essa propriedade de variações absolutas constantes caracteriza um comportamento afim entre as grandezas envolvidas. caracterizando um comportamento afim.

Seja C a temperatura em graus Celsius e $F(C)$ a temperatura correspondente em graus Fahrenheit. Admitimos, então, um modelo afim da forma $F(C) = aC + b$.

Para determinar os coeficientes, utilizamos os pontos de correspondência conhecidos. Como $F(0) = 32$, segue que

$$b = 32.$$

Além disso, de $F(100) = 212$, obtemos

$$100a + 32 = 212 \implies a = \frac{180}{100} = 1{,}8.$$

Portanto, a função que relaciona as duas escalas é

$$F(C) = 1{,}8\,C + 32.$$

Item (a) Para $C = 25$,

$$F(25) = 1{,}8 \cdot 25 + 32 = 77°F.$$

Item (b) Para $F = 68$,

$$68 = 1{,}8C + 32 \implies C = 20°C.$$

Item (c) Para que as duas escalas apresentem o mesmo valor T, impõe-se $F(T) = T$, o que fornece

$$T = 1{,}8T + 32 \implies T = -40.$$

Assim, a temperatura na qual as escalas Celsius e Fahrenheit coincidem é

$$-40°C = -40°F.$$

Observação. O coeficiente $a = 1{,}8$ representa a taxa de variação entre as escalas, isto é, quanto a temperatura em Fahrenheit se altera a cada unidade de variação em Celsius.

O termo independente $b = 32$ corresponde ao valor inicial da escala Fahrenheit quando $C = 0$.

Problema 6.2.2. *(Portal da Matemática-OBMEP)*
Um experimento de Agronomia mostra que a temperatura média da superfície do solo $t(x)$, em °C, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela seguinte.

$x\left[\frac{g}{m^2}\right]$	10	20	30	40	50	60	70
$t(x)\,[°C]$	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Tabela 6.1: Dados do problema 5.2.2

Qual a lei de formação da função $t(x)$?

Solução. A partir dos dados da tabela, observa-se que a variável independente x (quantidade de resíduo) varia em incrementos constantes de $10\,g/m^2$. Para cada um desses incrementos, a temperatura média do solo $t(x)$ aumenta sempre em $0{,}06°C$.

Essa regularidade de incrementos constantes na variável dependente em resposta a incrementos constantes na variável independente caracteriza, de acordo com o **Teorema 2 (p. 43)**, um comportamento afim. A fundamentação teórica assegura que, em fenômenos nos quais a variação absoluta é constante, a relação entre as grandezas é descrita por um modelo linear.

Assim, admite-se que a relação entre t e x possa ser descrita por uma função da forma

$$t(x) = ax + b.$$

O coeficiente a representa a taxa de variação da temperatura em função da quantidade de resíduo. Utilizando dois valores consecutivos da tabela, obtém-se

$$a = \frac{7{,}30 - 7{,}24}{20 - 10} = \frac{0{,}06}{10} = 0{,}006\ {}^{\circ}C/_{g/m^2}.$$

Para determinar o coeficiente b, observa-se que ele corresponde ao valor da temperatura quando $x = 0$, isto é, à extrapolação do modelo para a ausência de resíduo vegetal. Mantendo o padrão de variação apresentado na tabela, tem-se

$$b = t(0) = 7{,}24 - 0{,}06 = 7{,}18°C.$$

Portanto, a função que modela a temperatura média da superfície do solo em função da quantidade de resíduo é

$$t(x) = 0{,}006x + 7{,}18, \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

Interpretação. O coeficiente 0,006 indica o aumento médio da temperatura do solo, em graus Celsius, para cada unidade adicional de $1\,g/m^2$ de resíduo vegetal na superfície.

Problema 6.2.3. *Uma pessoa deseja presentear um amigo com um anel de formatura. Para descobrir o tamanho adequado, mediu-se a circunferência do dedo utilizando uma tira de papel. Em seguida, ao estender a tira sobre uma régua, observou-se que o comprimento medido era de $7,5$ cm. Ao chegar a uma joalheria, o comprador consultou uma tabela que relacionava a numeração dos anéis às medidas de circunferência em centímetros. No entanto, o valor obtido não constava na tabela. O vendedor, então, explicou que seria possível determinar o número correspondente seguindo o mesmo padrão de variação apresentado na tabela e aplicando o procedimento descrito a seguir.*

- *Envolva seu dedo com uma tira de papel e marque a quantidade necessária para dar uma volta nele.*
- *Estenda a fita sobre uma régua e leia o comprimento marcado.*
- *Veja na tabela a correspondência correta do comprimento em cm e o número do anel.*

Figura 6.1: Imagem do processo para medir o comprimento da circunferência do dedo.
Fonte: (https://www.hellenqueirozstore.com.br/medidas-e-tamanhos/)

Comprimento em (cm)	**(ARO)**		**Comprimento em** (cm)	**(ARO)**
5 cm	10		5,6 cm	16
5,1 cm	11		5,7 cm	17
5,2 cm	12		5,8 cm	18
5,3 cm	13		5,9 cm	19
5,4 cm	14		6 cm	20
5,5 cm	15		6,1 cm	21

Tabela 6.2: Dados do problema 5.2.3.

Como essa situação pode ser resolvida? Qual função elementar é o modelo matemático mais adequado para estabelecer a relação entre a medida do comprimento da circunferência do dedo, obtida com a régua, e a numeração do anel (aro)? Com base nessa relação, qual deve ser o número do aro do anel a ser comprado?

Solução. A tabela fornecida pela joalheria indica que a numeração dos anéis varia de forma regular em função do comprimento da circunferência do dedo, medido em centímetros. Observa-se que incrementos iguais no comprimento correspondem a incrementos iguais na numeração do aro, o que caracteriza um comportamento de variação uniforme.

De acordo com o **Teorema 2 (p. 43)**, a existência de variações absolutas constantes em ambas as grandezas assegura que o modelo matemático mais adequado para descrever essa relação é uma função afim.

Seja x a medida do comprimento do dedo, em centímetros, e $f(x)$ a numeração correspondente do aro. Escrevemos, então, o modelo

$$f(x) = ax + b.$$

Utilizando dois pares de valores fornecidos pela tabela, por exemplo, $f(5) = 10$ e $f(6) = 20$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 5a + b = 10, \\ 6a + b = 20, \end{cases}$$

do qual resulta $a = 10$ e $b = -40$.

Logo, a função que estabelece a correspondência entre o comprimento da circunferência do dedo e a numeração do anel é dada por $f(x) = 10x - 40$.

Para o comprimento medido de 7,5 cm, tem-se $f(7{,}5) = 10 \cdot 7{,}5 - 40 = 35$. Portanto, o anel a ser adquirido deve ser de aro 35.

Problema 6.2.4. *Em determinado site, encontra-se o anuncio de um dispositivo como da imagem abaixo, usado para medir o tamanho do pé de criança e determinar o número de seu calçado:*

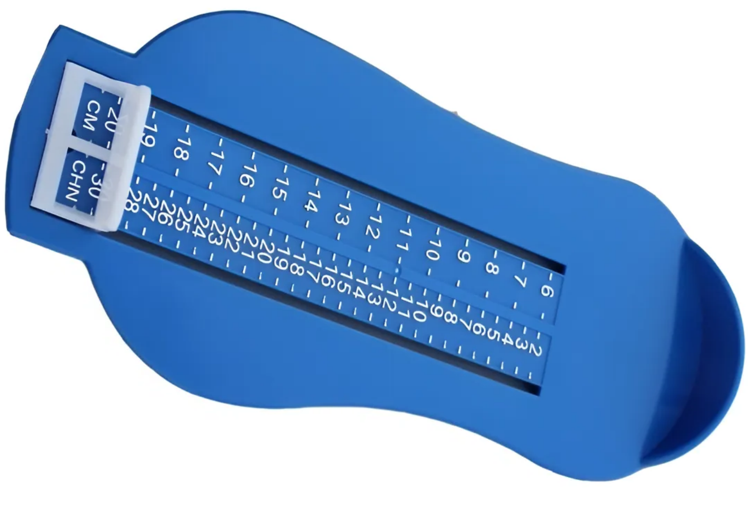

Figura 6.2: Régua para determinar o número do calçado.
Fonte: (https://www.mercadolivre.com.br/)

Analisando a imagem, é possível determinar a função que dá o número do calçado a partir do comprimento do pé, em centímetros? Qual é essa função?

Solução. A imagem do dispositivo indica que o comprimento do pé, medido em centímetros, e o número do calçado correspondente variam de forma regular. Nota-se que a cada aumento de 1 cm no comprimento do pé corresponde um aumento de 2 unidade na numeração do calçado, isto é, incrementos constantes no comprimento do pé estão associados a incrementos constantes na numeração do calçado, caracterizando um padrão de variação uniforme.

De acordo com o **Teorema 2 (p. 43)**, a constatação de que acréscimos constantes em x resultam em acréscimos constantes em $f(x)$ permite estabelecer que a relação entre as grandezas é representada por uma função afim. Assim, define-se o modelo matemático como:

$$f(x) = ax + b.$$

Para determinar os coeficientes da função, utilizamos dois pares de valores obtidos a partir da imagem. Por exemplo, observa-se que

$$f(6) = 2 \quad \text{e} \quad f(7) = 4.$$

Isso conduz ao sistema

$$\begin{cases} 6a + b = 2, \\ 7a + b = 4, \end{cases}$$

do qual se obtém

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -10.$$

Assim, a função que relaciona o comprimento do pé ao número do calçado é dada por

$$f(x) = 2x - 10.$$

6.3 Função Quadrática como modelo matemático

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ denomina-se quadrática quando pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

No contexto da modelagem matemática, funções quadráticas surgem como modelos adequados para descrever fenômenos em que a variação da grandeza observada não é uniforme. Nesses casos, a identificação do modelo pode ser realizada a partir da análise dos acréscimos sucessivos da função, sem que sua expressão algébrica seja fornecida previamente.

Recorde-se que, para uma função quadrática, os acréscimos

$$f(x+h)-f(x)$$

não são constantes, mas variam linearmente em função de x. De fato, para $f(x) = ax^2+bx+c$, tem-se

$$f(x+h)-f(x) = 2ahx + ah^2 + bh,$$

que é uma função afim da variável x, cujos coeficientes dependem apenas de h.

Como consequência, ao considerar valores igualmente espaçados da variável independente, a sequência

$$f(x),\ f(x+h),\ f(x+2h),\ f(x+3h),\ \ldots$$

constitui uma progressão aritmética de segunda ordem, isto é, suas diferenças de primeira ordem formam uma progressão aritmética de razão constante. Em particular, a diferença de segunda ordem é constante e igual a $2ah^2$.

Reciprocamente, conforme apresentado em Lima (2005), vale a seguinte propriedade de caracterização:

(Caracterização das Funções Quadráticas). *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, a sequência*

$$f(x),\ f(x+h),\ f(x+2h),\ f(x+3h),\ \ldots$$

é uma progressão aritmética de segunda ordem, isto é, suas diferenças de primeira ordem formam uma progressão aritmética não degenerada.

Com base nas propriedades discutidas, buscaremos agora instrumentalizar a escrita matemática por meio da definição de operadores de diferença. Tais operadores facilitam a investigação do comportamento funcional sem a necessidade de recorrer extensivamente à notação de incrementos explícitos. Dado $h \neq 0$, a variação discreta de f em x é dada por $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Quando o fenômeno em estudo apresenta uma variação de primeira ordem não constante, faz-se necessário analisar a "variação da variação", que é o caso da função quadrática. Para tanto, empregaremos o operador de segunda ordem

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x).$$

As situações-problema apresentadas a seguir foram elaboradas sob a perspectiva da Modelagem Matemática, ocultando intencionalmente a expressão algébrica da função envolvida. O objetivo é favorecer a identificação de comportamentos quadráticos por meio da análise dos acréscimos $f(x+h) - f(x)$ e de suas variações sucessivas, conduzindo à emergência do conceito de Progressão Aritmética de Segunda Ordem. Dessa forma, enfatiza-se o papel conceitual da função quadrática na descrição de fenômenos reais.

Problema 6.3.1. *Uma empresa de engenharia civil armazena tubos de concreto de grande diâmetro em um pátio limitado. Por questões de estabilidade e segurança, os tubos são empilhados em formato triangular: uma base com vários tubos, uma segunda camada com um tubo a menos que a base, e assim sucessivamente, até o topo que possui apenas um único tubo.*
O gerente de logística precisa criar uma tabela rápida para saber o total de tubos armazenados dependendo apenas do número de tubos que cabem na base da pilha, já que contar o total visualmente é propenso a erros.
Se a base tiver 20 tubos, qual será o total armazenado? Tente descobrir um padrão matemático ou uma expressão que permita prever esse total.

Figura 6.3: Tubos empilhados em forma de triângulo.
Fonte: (https://www.canva.com/design/)

Solução. Seja n o número de tubos dispostos na base da pilha e seja $f(n)$ o número total de tubos empilhados. De acordo com o enunciado, a pilha é formada por camadas sucessivas com $n, n-1, n-2, \ldots, 1$ tubos.

Organizando os primeiros valores, obtemos a seguinte tabela:

n	1	2	3	4	5	...
$f(n)$	1	3	6	10	15	...

Calculando os acréscimos sucessivos, temos:

$$f(2) - f(1) = 2, \quad f(3) - f(2) = 3, \quad f(4) - f(3) = 4, \quad f(5) - f(4) = 5, \ \ldots$$

Observa-se que o incremento $f(n+1) - f(n)$ cresce de forma linear com n, isto é, os acréscimos formam uma progressão aritmética de razão 1. Consequentemente, as diferenças de segunda ordem são constantes e iguais a 1, caracterizando a sequência $f(n)$ como uma progressão aritmética de segunda ordem.

Pela caracterização das funções quadráticas, **Teorema 5 (p. 67)**, segue que o total de tubos empilhados pode ser modelado por uma função quadrática da forma

$$f(n) = an^2 + bn + c.$$

Sabe-se que, para uma função quadrática, a diferença de segunda ordem associada a incrementos unitários ($h = 1$) é dada por

$$\Delta^2 f = 2a.$$

Como neste problema a diferença de segunda ordem é igual a 1, obtém-se

$$2a = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

Embora o enunciado trate apenas de bases com número positivo de tubos, considera-se o valor $n = 0$ como um estado limite natural do processo de empilhamento, no qual não há tubos armazenados. Assim, tem-se

$$f(0) = 0,$$

logo $c = 0$ e, consequentemente,

$$f(1) - f(0) = 1,$$

valor que representa o primeiro acréscimo efetivo no total de tubos ao se passar de uma base vazia para uma base com um único tubo. Para determinar o coeficiente b, utilizamos o incremento inicial:

$$f(1) - f(0) = 1.$$

Como

$$f(1) - f(0) = a + b,$$

segue que

$$\frac{1}{2} + b = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{2}.$$

Assim, o modelo matemático que fornece o número total de tubos empilhados em função do número de tubos da base é

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Para uma base com 20 tubos, o total armazenado será

$$f(20) = \frac{1}{2} \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 200 + 10 = 210.$$

Logo, a pilha conterá 210 tubos.

Problema 6.3.2. *Um grupo de engenheiros está testando um novo robô autônomo em uma pista retilínea. O robô possui um sensor de alta precisão que registra sua posição exata (em metros) a cada segundo. O cronômetro é disparado ($t = 0$) no momento em que o robô passa por um marco inicial, já em movimento.*
Os dados coletados durante o teste foram organizados na tabela a seguir:

Tempo (t) em segundos	**Posição (S) em metros**
0	2
1	5
2	10
3	17
4	26
5	37

Tabela 6.3: Dados de posição do robô em função do tempo

Com base ***apenas*** *nos dados da tabela, determine a função que relaciona a posição S em função do tempo t.*

Solução. Os dados apresentados indicam que a posição do robô não varia de forma uniforme ao longo do tempo, o que sugere que o fenômeno não é adequadamente descrito por uma função afim. Para identificar o tipo de modelo envolvido, analisamos os acréscimos sucessivos da posição.

Seja $S(t)$ a posição do robô no instante t. Definimos o incremento

$$\Delta S(t) = S(t+1) - S(t).$$

Aplicando essa definição aos dados da Tabela 6.3, obtemos:

$$\Delta S(t) = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}.$$

Observa-se que o incremento cresce de forma linear com o tempo, isto é, os acréscimos formam uma progressão aritmética de razão 2. Consequentemente, as diferenças de segunda ordem,

$$\Delta^2 S(t) = \Delta S(t+1) - \Delta S(t),$$

são constantes e iguais a

$$\Delta^2 S(t) = \{2,\ 2,\ 2,\ 2\}.$$

Esse comportamento caracteriza a sequência $S(t)$ como uma progressão aritmética de segunda ordem. De acordo com o **Teorema 5 (p. 67)**, segue que a posição do robô pode ser modelada por uma função da forma

$$S(t) = at^2 + bt + c.$$

Sabe-se que, para incrementos unitários ($h = 1$), a diferença de segunda ordem de uma função quadrática é dada por

$$\Delta^2 S(t) = 2a.$$

Como neste problema $\Delta^2 S(t) = 2$, obtém-se

$$2a = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = 1.$$

Para determinar os demais coeficientes, utilizamos condições diretamente extraídas dos dados experimentais. No instante inicial $t = 0$, o robô encontra-se na posição

$$S(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = 2.$$

Além disso, no instante $t = 1$, tem-se $S(1) = 5$, de modo que

$$1^2 + b + 2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad b = 2.$$

Assim, a função que descreve a posição do robô em função do tempo é

$$S(t) = t^2 + 2t + 2.$$

Interpretação física. O incremento $\Delta S(t)$ representa a velocidade média do robô no intervalo entre os instantes t e $t + 1$. O fato de esses incrementos crescerem linearmente indica que a velocidade está aumentando de forma regular. Já a constância da segunda diferença $\Delta^2 S(t) = 2$ expressa que a aceleração do robô é constante e igual a $2\,\mathrm{m/s^2}$.

Problema 6.3.3. *Um estudante analisa de que forma o* ***número de regiões*** *em que o plano fica dividido depende da quantidade de* ***retas*** *traçadas, obedecendo sempre às seguintes condições:*

- *nenhuma reta é paralela a outra;*
- *nenhuma três retas passam por um mesmo ponto.*

Inicialmente, nenhuma reta é traçada no plano. A partir de observações experimentais, o estudante registra os seguintes dados

Número de retas	*0*	*1*	*3*
Número de regiões	*1*	*2*	*7*

O estudante observa ainda que ***o padrão de crescimento identificado se mantém para qualquer quantidade de retas****. Com base nessas informações:*

a) Determine o número de regiões quando são traçadas 2 retas no plano.

b) Organize os dados em uma tabela para 0, 1, 2 e 3 retas.

c) Analise os acréscimos sucessivos no número de regiões e descreva o padrão observado.

d) A partir desse padrão, determine uma expressão algébrica que relacione o número de regiões ao número de retas.

e) Utilizando o modelo obtido, determine quantas regiões o plano ficará dividido quando forem traçadas 15 retas.

Solução. As condições impostas no enunciado garantem que, a cada nova reta traçada, o plano é dividido no máximo número possível de regiões. Essa regularidade geométrica permite estender o padrão observado nos dados iniciais para valores maiores do número de retas, viabilizando a construção de um modelo matemático.

Item (a) Com duas retas concorrentes, o plano é dividido em quatro regiões. Esse valor é compatível tanto com o raciocínio geométrico quanto com o padrão crescente sugerido pelos dados fornecidos.

Item (b) Completando a tabela, obtém-se:

Número de retas x	0	1	2	3
Número de regiões $R(x)$	1	2	4	7

Item (c) Considere os incrementos sucessivos $\Delta R(x) = R(x+1) - R(x)$. A partir da tabela, obtemos $\Delta R(0) = 1, \quad \Delta R(1) = 2, \quad \Delta R(2) = 3$. Logo, os acréscimos no número de regiões formam a sequência

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

que é uma progressão aritmética de razão 1. Consequentemente, as diferenças de segunda ordem são constantes e iguais a 1, caracterizando a sequência $R(x)$ como uma progressão aritmética de segunda ordem.

Item (d) De acordo com o **Teorema 5 (p. 67)**, uma função que transforma uma progressão aritmética em uma sequência cujas diferenças sucessivas formam uma progressão aritmética é necessariamente quadrática. Assim, admite-se um modelo da forma

$$R(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sabe-se que, para incrementos unitários ($h = 1$), a diferença de segunda ordem de uma função quadrática é dada por

$$\Delta^2 R = 2a.$$

Como neste problema as diferenças de segunda ordem são iguais a 1, obtém-se

$$2a = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

Além disso, como $R(0) = 1$, segue que

$$c = 1.$$

Para determinar o coeficiente linear, utiliza-se o valor $R(1) = 2$:

$$\frac{1}{2}(1)^2 + b(1) + 1 = 2,$$

o que implica

$$\frac{1}{2} + b + 1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a expressão algébrica que modela o número de regiões em função do número de retas é

$$R(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

Item (e) Aplicando o modelo obtido para $x = 15$, tem-se:

$$R(15) = \frac{1}{2}(15)^2 + \frac{1}{2}(15) + 1 = \frac{225}{2} + \frac{15}{2} + 1 = 121.$$

Logo, quando são traçadas 15 retas no plano, este fica dividido em 121 regiões.

Problema 6.3.4. *Durante a construção de um teatro, os assentos da plateia são organizados em fileiras, de modo que cada nova fileira possui mais lugares do que a anterior, seguindo um* ***padrão fixo de crescimento****. Por razões técnicas, o engenheiro responsável registra o número de assentos apenas a cada* ***duas fileiras construídas****. Os dados observados foram os seguintes:*

Número da fileira	*2*	*4*	*6*	*8*	...
Número de assentos	*10*	*16*	*24*	*34*	...

Sabe-se que ***esse padrão se mantém para todas as fileiras do teatro****. Com base nessas informações:*

a) Determine uma expressão algébrica que relacione o número de assentos ao número da fileira.

b) Utilizando o modelo obtido, determine o número de assentos na 20ª fileira.

Solução. Seja $A(n)$ o número de assentos na n-ésima fileira do teatro. Os dados observados indicam que o número de assentos é registrado apenas a cada duas fileiras, de modo que os incrementos considerados são do tipo $A(n+2) - A(n)$. Os valores fornecidos são:

$$A(2) = 10, \quad A(4) = 16, \quad A(6) = 24, \quad A(8) = 34.$$

Item (a) Calculando os incrementos sucessivos, obtemos:

$$A(4) - A(2) = 6, \quad A(6) - A(4) = 8, \quad A(8) - A(6) = 10.$$

Observa-se que esses acréscimos formam a sequência $6,\ 8,\ 10,\ \ldots$ que é uma progressão aritmética de razão 2. Consequentemente, as diferenças de segunda ordem são constantes e iguais a 2, caracterizando a sequência $A(n)$ como uma progressão aritmética de segunda ordem.

Pela caracterização das funções quadráticas, **Teorema 5 (p. 67)**, o número de assentos em função do número da fileira pode ser modelado por uma função da forma

$$A(n) = an^2 + bn + c.$$

Sabe-se que, para uma função quadrática, a diferença de segunda ordem associada a incrementos de razão h é dada por

$$\Delta^2 A = 2ah^2.$$

Como, neste problema, os dados são tomados com $h = 2$ e a diferença de segunda ordem observada é igual a 2, segue que

$$2a(2)^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad 8a = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{4}.$$

Para determinar os coeficientes restantes, utilizamos valores da tabela. Substituindo $n = 2$ em $A(n) = \frac{1}{4}n^2 + bn + c$, obtém-se:

$$\frac{1}{4}(2)^2 + 2b + c = 10 \quad \Longrightarrow \quad 1 + 2b + c = 10 \quad \Longrightarrow \quad 2b + c = 9. \qquad (1)$$

Substituindo $n = 4$, tem-se

$$\frac{1}{4}(4)^2 + 4b + c = 16 \quad \Longrightarrow \quad 4 + 4b + c = 16 \quad \Longrightarrow \quad 4b + c = 12. \tag{2}$$

Subtraindo (1) de (2), resulta, $2b = 3 \Longrightarrow b = \frac{3}{2}$. Substituindo em (1), obtém-se, $c = 6$. Assim, a expressão algébrica que modela o número de assentos em função do número da fileira é

$$A(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + 6.$$

Item (b) Para determinar o número de assentos na 20ª fileira, substituímos $n = 20$ no modelo obtido:

$$A(20) = \frac{1}{4}(20)^2 + \frac{3}{2}(20) + 6 = 100 + 30 + 6 = 136.$$

Logo, a 20ª fileira do teatro possuirá 136 assentos.

Problema 6.3.5. *Uma fábrica produz rolos de papel toalha enrolando uma folha de papel de espessura constante de* $0{,}2\,mm$ *em torno de um tubo cilíndrico interno. Em um determinado modelo de rolo, o diâmetro interno inicial do tubo é de* $4\,cm$*. Após a fabricação completa do rolo, mede-se um diâmetro externo final de* $8\,cm$*. Sabe-se que o papel é enrolado de forma uniforme, de modo que cada volta acrescenta exatamente uma camada de papel ao rolo.*

Figura 6.4: Rolo de papel toalha.
Fonte: (Autor, 2026)

Determine o comprimento total aproximado de papel, em metros, presente nesse rolo.

Solução. A espessura do papel é 0,2 mm, o que corresponde a 0,02 cm. O diâmetro interno inicial do tubo é 4 cm, logo o raio inicial é

$$r_0 = 2\,\text{cm}.$$

Ao final do processo, o diâmetro externo do rolo é 8 cm, o que implica um raio final

$$r_f = 4\,\text{cm}.$$

Assim, o aumento total do raio do rolo é

$$\Delta r = r_f - r_0 = 2\,\text{cm}.$$

Como cada volta acrescenta 0,02 cm ao raio, o número total de voltas é

$$N = \frac{2}{0{,}02} = 100.$$

Seja n o número de voltas completas do papel, com $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$, e seja $L(n)$ o comprimento total de papel (em centímetros) após n voltas.

Após n voltas, o raio do rolo é dado por

$$r(n) = 2 + 0{,}02n.$$

Cada nova volta corresponde a um incremento unitário em n e acrescenta ao rolo um comprimento aproximadamente igual ao comprimento da circunferência de raio $r(n)$. Assim, o acréscimo de comprimento na n-ésima volta é

$$\Delta L(n) = L(n) - L(n-1) = 2\pi r(n) = 2\pi(2 + 0{,}02n),$$

isto é,

$$\Delta L(n) = 4\pi + 0{,}04\pi n.$$

Observa-se que o acréscimo de comprimento por volta depende linearmente de n.

Calculando a diferença de segunda ordem, obtém-se

$$\Delta^2 L(n) = \Delta L(n) - \Delta L(n-1) = \big(4\pi + 0{,}04\pi n\big) - \big(4\pi + 0{,}04\pi(n-1)\big) = 0{,}04\pi.$$

Dada constância da segunda diferença, o **Teorema 5 (p. 67)** caracteriza $L(n)$ como uma função quadrática. Tomando

$$L(n) = an^2 + bn + c,$$

e sabendo que, para incrementos unitários ($h = 1$), vale a relação

$$\Delta^2 L(n) = 2a,$$

segue que

$$2a = 0{,}04\pi \quad \Longrightarrow \quad a = 0{,}02\pi.$$

Além disso, como $L(0) = 0$, tem-se $c = 0$.

Para determinar b, utiliza-se a expressão geral da primeira diferença de uma função quadrática:

$$\Delta L(n) = a(2n - 1) + b.$$

Substituindo $a = 0{,}02\pi$, obtém-se

$$\Delta L(n) = 0{,}04\pi n - 0{,}02\pi + b.$$

Comparando com

$$\Delta L(n) = 4\pi + 0{,}04\pi n,$$

conclui-se que

$$b = 4{,}02\pi.$$

Portanto, a função que modela o comprimento total de papel é

$$L(n) = 0{,}02\pi n^2 + 4{,}02\pi n.$$

Para $n = 100$ voltas, tem-se

$$L(100) = 0{,}02\pi(100)^2 + 4{,}02\pi(100) = 200\pi + 402\pi = 602\pi \text{ cm} = 6{,}02\pi \text{ m}.$$

Adotando $\pi \approx 3{,}14$, obtém-se

$$L \approx 18{,}9 \text{ metros}.$$

6.4 Função Exponencial como modelo matemático

As propriedades teóricas das funções exponenciais foram desenvolvidas no Capítulo 4. Nesta seção, tais propriedades são retomadas apenas como um *critério técnico de identificação* de modelos matemáticos associados a fenômenos cuja variação é proporcional ao estado atual da grandeza envolvida.

Chamamos de função do tipo exponencial toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ da forma

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

em que a é um número real positivo, com $a \neq 1$, e b é um número real não nulo. O parâmetro b representa o valor inicial da função, isto é, $b = f(0)$.

A característica fundamental utilizada na modelagem com funções do tipo exponencial é a constância dos acréscimos relativos. Se f é uma função do tipo exponencial, então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$$

depende apenas de h, e não de x. Equivalentemente, a razão entre termos consecutivos

$$\frac{f(x+h)}{f(x)}$$

é constante para incrementos iguais de x. Em particular, a sequência

$$f(x),\ f(x+h),\ f(x+2h),\ f(x+3h), \ldots$$

forma uma progressão geométrica.

A recíproca dessa propriedade também é válida sob hipóteses naturais de regularidade. Conforme demonstrado em Lima (2005), se uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, monótona e injetiva, apresenta acréscimos relativos que dependem apenas do incremento considerado, então g é necessariamente do tipo exponencial, isto é,

$$g(x) = b \cdot a^x, \quad \text{com} \quad b = g(0) \quad \text{e} \quad a = \frac{g(1)}{g(0)}.$$

Assim, enquanto as funções afins são caracterizadas pela constância dos acréscimos absolutos e as funções quadráticas pela constância dos acréscimos de segunda ordem, as funções do tipo exponencial caracterizam-se pela constância dos acréscimos relativos. Essa distinção orienta a escolha do modelo adequado nas situações de modelagem apresentadas a seguir.

Problema 6.4.1. *O ibuprofeno é um medicamento amplamente utilizado como analgésico e anti-inflamatório. Após a ingestão de uma dose única, sua concentração no organismo diminui ao longo do tempo devido aos processos metabólicos e de eliminação. Em um estudo farmacocinético simplificado, um adulto saudável ingeriu uma dose oral de* 600 mg *de ibuprofeno. A quantidade aproximada do fármaco presente na corrente sanguínea foi medida em alguns instantes, conforme os dados da tabela a seguir:*

Tempo (h)	*0*	*2*	*4*	*6*
Quantidade (mg)	*600*	*300*	*150*	*75*

Observa-se que o padrão de eliminação do medicamento se mantém ao longo do tempo.

a) Analise os dados e descreva o comportamento da quantidade de ibuprofeno em função do tempo.

b) Justifique qual é o tipo de função elementar mais adequado para modelar esse fenômeno.

c) Determine uma expressão matemática que represente a quantidade de ibuprofeno presente no organismo em função do tempo.

d) Após quantas horas a quantidade de ibuprofeno no organismo será reduzida a $100\,mg$*?*

Solução.

Item (a) Observa-se que a quantidade de ibuprofeno presente no organismo é reduzida à metade a cada intervalo de 2 horas:

$$\frac{300}{600} = \frac{150}{300} = \frac{75}{150} = \frac{1}{2}.$$

Isso indica que a eliminação do fármaco não ocorre por subtrações constantes, mas de forma proporcional à quantidade presente no organismo.

Item (b) A constância das razões entre valores sucessivos caracteriza um comportamento de **variação relativa constante**. De acordo com **Teorema 7 (p. 72)**, esse tipo de comportamento é adequadamente modelado por uma função do tipo exponencial.

Item (c) Dos dados apresentados na tabela, observa-se que a quantidade de fármaco no organismo é reduzida à metade a cada intervalo de 2 horas. Em termos matemáticos, essa informação pode ser expressa pela relação funcional

$$Q(t+2) = \frac{1}{2}\,Q(t),$$

válida para todos os instantes t considerados no experimento.

Para construir a expressão algébrica do modelo, analisamos os valores sucessivos da quantidade presente no organismo. Inicialmente, tem-se $Q(0) = 600$. Após o primeiro intervalo de 2 horas, a quantidade remanescente é $Q(2) = \frac{1}{2}\,Q(0) = 600 \cdot \frac{1}{2}$. Decorridos dois intervalos de 2 horas, isto é, após 4 horas, obtém-se

$$Q(4) = \frac{1}{2}\,Q(2) = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Prosseguindo de forma análoga, após 6 horas, tem-se $Q(6) = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Observa-se, portanto, que a cada intervalo adicional de 2 horas surge um novo fator $\frac{1}{2}$ multiplicando a quantidade inicial. Como o número de intervalos completos de 2 horas transcorridos até o instante t é dado por $t/2$, conclui-se que a quantidade de fármaco presente no organismo no instante t pode ser expressa por

$$Q(t) = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}.$$

Essa expressão descreve adequadamente o comportamento observado nos dados e evidencia que o expoente $t/2$ representa o número de intervalos de tempo nos quais ocorre a redução proporcional da quantidade de fármaco.

Item (d) Deseja-se determinar o instante em que a quantidade de fármaco presente no organismo atinge um valor específico, a saber, $Q(t) = 100\,\mathrm{mg}$.

Do item (c), o modelo que descreve a quantidade de fármaco no organismo em função do tempo é dado por $Q(t) = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$. Substituindo $Q(t) = 100$, obtemos a equação

$$600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} = 100.$$

Dividindo ambos os membros da equação por 600, resulta

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} = \frac{1}{6}.$$

Para isolar o expoente, aplicamos o logaritmo em ambos os lados da igualdade. Escolhendo o logaritmo natural (embora qualquer base seja possível), temos

$$\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right).$$

Utilizando a propriedade $\ln(a^x) = x\ln(a)$, segue que

$$\frac{t}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right).$$

Isolando t, obtemos

$$t = 2 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 2\,\frac{-1{,}7918}{-0{,}6931} \approx 5{,}2 \text{ horas}.$$

Como 0,2 hora corresponde a $0{,}2 \times 60 = 12$ minutos, conclui-se que

$$5{,}2 \text{ horas} = 5 \text{ horas e } 12 \text{ minutos}.$$

Assim, aproximadamente 5 horas e 12 minutos após a ingestão do medicamento, a quantidade presente no organismo reduz-se a 100 mg.

A figura 6.5 ilustra graficamente o comportamento da função exponencial obtida no modelo, bem como o procedimento adotado para a determinação do instante em que a quantidade de fármaco atinge 100 mg.

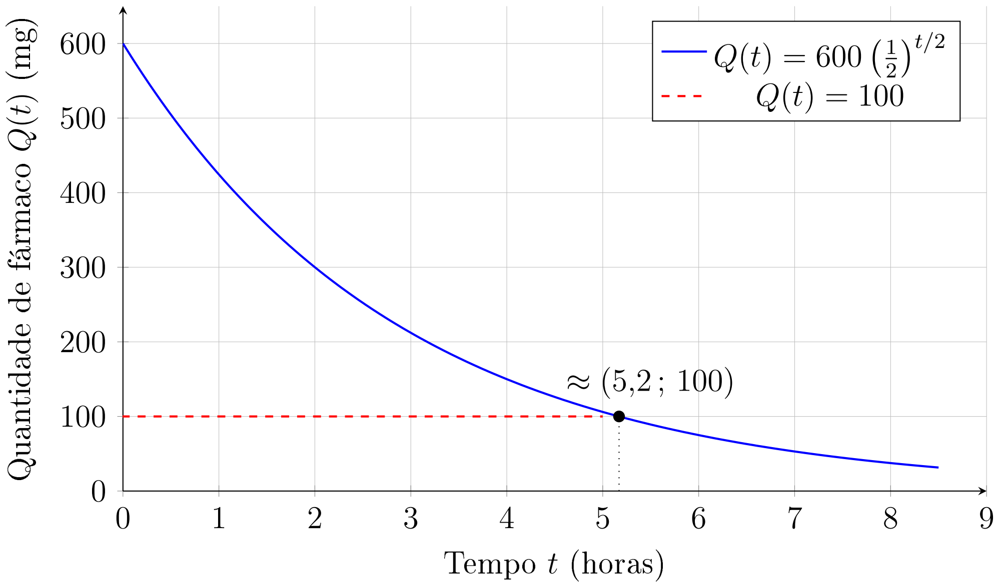

Figura 6.5: Gráfico da função $Q(t) = 600\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$, representando o decaimento da quantidade de fármaco no organismo. O ponto de interseção com a reta $Q(t) = 100$ indica o instante aproximado de 5 horas e 12 minutos.

Fonte: (Autor, 2026)

Problema 6.4.2. *Após a administração de um medicamento, a quantidade da substância ativa presente no organismo tende a diminuir ao longo do tempo em razão dos processos metabólicos de eliminação. Em diversos antibióticos de eliminação relativamente rápida, observa-se experimentalmente que, em intervalos de tempo de mesma duração, a fração da substância que permanece no organismo é aproximadamente constante.*

A gentamicina é um antibiótico cuja meia-vida plasmática, em condições fisiológicas padrão, é da ordem de 3 horas. Isso significa que, a cada intervalo de 3 horas, a quantidade da substância presente no organismo reduz-se à metade do valor anterior.

Suponha que uma pessoa tenha recebido uma dose inicial de 50 mg de gentamicina.

a) Determine a quantidade aproximada de antibiótico presente no organismo após 12 horas da administração.

b) Determine a quantidade aproximada de antibiótico presente no organismo após 1,5 horas da administração.

c) Determine a expressão matemática que associa a quantidade aproximada de antibiótico presente no organismo após t horas da administração.

Solução. Denote por $A(t)$ a quantidade de gentamicina (em mg) presente no organismo t horas após a administração da dose inicial.

(a) De acordo com a informação experimental fornecida, a meia-vida do antibiótico é de 3 horas. Isso significa que, a cada intervalo de 3 horas, a quantidade presente no organismo reduz-se à metade do valor anterior.

Em 12 horas decorrem exatamente 4 intervalos consecutivos de 3 horas. Assim, a quantidade de antibiótico presente no organismo após 12 horas é dada por

$$A(12) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3{,}125 \text{ mg}.$$

(b) Sabe-se, a partir das informações experimentais fornecidas, que a meia-vida do antibiótico é de 3 horas, o que significa que a razão entre a quantidade presente no organismo após esse intervalo e a quantidade inicial é dada por

$$\frac{A(3)}{A(0)} = \frac{1}{2}.$$

Essa característica de variações relativas constantes em intervalos de tempo de mesma duração identifica, segundo o **Teorema 7 (p. 72)**, um comportamento exponencial.

De acordo com a hipótese de que o processo de eliminação é governado por variações relativas constantes, a fração da substância que permanece no organismo em um intervalo de tempo depende apenas da duração desse intervalo, e não do instante em que ele se inicia. Assim, para cada $h > 0$, a razão $\frac{A(h)}{A(0)}$ depende apenas de h.

Observa-se agora que o intervalo de 3 horas pode ser decomposto em dois intervalos consecutivos de mesma duração:

$$3 = 1{,}5 + 1{,}5.$$

Pela propriedade de variação relativa constante, a razão entre a quantidade presente no organismo após o primeiro intervalo de 1,5 hora e a quantidade inicial é igual à razão entre a quantidade presente após o segundo intervalo de 1,5 hora e a quantidade no início desse segundo intervalo. Em termos algébricos, isso implica

$$\frac{A(3)}{A(0)} = \frac{A(1{,}5)}{A(0)} \cdot \frac{A(3)}{A(1{,}5)} = \frac{A(1{,}5)}{A(0)} \cdot \frac{A(1{,}5)}{A(0)}.$$

Conclui-se, portanto, que

$$\frac{A(3)}{A(0)} = \left(\frac{A(1{,}5)}{A(0)}\right)^2.$$

Substituindo o valor conhecido da razão correspondente à meia-vida, obtém-se

$$\left(\frac{A(1{,}5)}{A(0)}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Como a quantidade de substância presente no organismo é sempre positiva, toma-se a raiz quadrada positiva da igualdade acima, concluindo que

$$\frac{A(1{,}5)}{A(0)} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, como a dose inicial administrada foi de 50 mg, segue que

$$A(1{,}5) = 50 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 35{,}36 \text{ mg}.$$

(c) Se o tempo decorrido é um múltiplo de 3 horas, isto é, $t = 3n$ para algum número natural n, então a cada intervalo de 3 horas a quantidade de antibiótico é multiplicada pelo mesmo fator $\frac{1}{2}$.

Consequentemente, após n intervalos de 3 horas, a quantidade presente no organismo é dada por

$$A(t) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/3}.$$

ou simplesmente,

$$A(t) = 50 \cdot 2^{-t/3}.$$

Problema 6.4.3. *Um laboratório de microbiologia investiga o crescimento da bactéria Salmonella sp. em um meio de cultura nutritivo, mantido a temperatura constante de* 37°C*, condição considerada ideal para sua proliferação. O objetivo do estudo é compreender a dinâmica inicial do crescimento bacteriano e desenvolver um modelo matemático para estimar o risco de contaminação alimentar.*

A partir de uma amostra inicial contendo 100 *bactérias, observou-se experimentalmente que, sob essas condições, o tempo médio de geração, definido como o intervalo necessário para que a população dobre, é de aproximadamente* 30 *minutos, ao menos durante as primeiras horas do experimento.*

Seja $N(t)$ o número de bactérias presentes após t horas de observação.

a) Utilizando apenas a informação do tempo médio de geração, determine o número es-

perado de bactérias nos instantes $t = 0,\ 0{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ \ 2,\ \ 2,5$ *e* 3 *horas.*

b) Com base nos valores obtidos, descreva como o número de bactérias varia quando o tempo é incrementado sempre da mesma quantidade.

c) A partir dessa regularidade observada, deduza uma expressão para a função $N(t)$ *que modele o crescimento bacteriano durante o período inicial considerado.*

d) Utilizando o modelo obtido, estime o número de bactérias após 5 *horas; e o tempo necessário para que a população atinja aproximadamente* 51 200 *bactérias.*

Solução. Seja $N(t)$ o número de bactérias presentes após t horas. Os dados experimentais indicam que, durante as primeiras horas do experimento, a população bacteriana dobra a cada 30 minutos, isto é, a cada 0,5 hora.

(a) No instante inicial, tem-se $N(0) = 100$. Como o tempo médio de geração é de 0,5 hora, a cada incremento desse tamanho no tempo a população é multiplicada por um fator constante igual a 2. Assim, para os instantes considerados, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
N(0) &= 100,\\
N(0{,}5) &= 2 \cdot 100 = 200,\\
N(1) &= 2 \cdot 200 = 400,\\
N(1{,}5) &= 2 \cdot 400 = 800,\\
N(2) &= 2 \cdot 800 = 1\,600,\\
N(2,5) &= 2 \cdot 1\,600 = 3\,200\\
N(3) &= 2 \cdot 3\,200 = 6\,400.
\end{aligned}$$

Observa-se que os acréscimos absolutos no número de bactérias aumentam a cada intervalo de tempo, embora o fator de crescimento permaneça o mesmo.

(b) A análise dos valores obtidos mostra que, sempre que o tempo é incrementado em 0,5 hora, o número de bactérias é multiplicado por 2. Em termos funcionais, isso significa que a razão

$$\frac{N(t + 0{,}5)}{N(t)}$$

é constante para os instantes considerados.

Essa regularidade evidencia que o crescimento não é dado por acréscimos absolutos constantes, mas por variações relativas constantes associadas a incrementos regulares da variável tempo.

(c) A propriedade observada no item anterior, fundamentada pelo **Teorema 7 (p. 72)**, permite deduzir uma expressão para a função $N(t)$. Como a população dobra a cada 0,5 hora, após n intervalos consecutivos desse tamanho o número de bactérias é multiplicado por 2^n. Se t é medido em horas, então $t = 0{,}5\,n$, ou seja, $n = 2t$.

Assim, a quantidade de bactérias após t horas pode ser expressa por

$$N(t) = 100 \cdot 2^{2t}.$$

(d) Utilizando o modelo deduzido, o número de bactérias após 5 horas é dado por

$$N(5) = 100 \cdot 2^{2\cdot 5} = 100 \cdot 2^{10} = 102\,400.$$

Para determinar o instante em que a população atinge aproximadamente 51 200 bactérias, resolvemos a equação

$$100 \cdot 2^{2t} = 51\,200.$$

Dividindo ambos os lados por 100, obtém-se

$$2^{2t} = 512.$$

Como $512 = 2^9$, segue que $2t = 9$, e portanto

$$t = 4{,}5 \text{ horas}.$$

Esse resultado indica que, segundo o modelo considerado, a população bacteriana atinge cerca de 51 200 bactérias após aproximadamente 4,5 horas de crescimento nas condições descritas.

Problema 6.4.4. *Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) indicam que, em determinados períodos, a população de pequenas cidades pode apresentar um crescimento percentual aproximadamente constante ao longo do tempo.*

Considere uma cidade que possuía ***20 000 habitantes*** *no início de determinado ano. Após* ***5 anos****, um novo censo indicou que a população havia aumentado para* ***23 000 habitantes****. Admita que, nesse intervalo, o crescimento populacional tenha ocorrido segundo um padrão regular, mantendo-se a mesma* ***taxa percentual anual****.*

a) Compare o aumento absoluto da população no primeiro e no quinto ano e descreva qualitativamente o comportamento observado.

b) Determine a taxa percentual anual média de crescimento da população.

c) Construa um modelo matemático que permita estimar a população da cidade após t anos.

*d) Utilizando o modelo obtido, estime em quantos anos a população dessa cidade atingirá **30 000 habitantes**.*

Solução. Denote-se por $P(t)$ a população da cidade t anos após o início do período observado. Sabe-se que

$$P(0) = 20\,000 \quad \text{e} \quad P(5) = 23\,000.$$

Admite-se que o crescimento populacional ocorre segundo uma taxa percentual anual constante.

Item (a) No primeiro ano, o aumento absoluto da população é dado por

$$P(1) - P(0),$$

enquanto no quinto ano o aumento absoluto é

$$P(5) - P(4).$$

Em um crescimento de natureza percentual, esses acréscimos absolutos não são iguais: o aumento observado nos anos finais é maior do que nos anos iniciais, pois incide sobre uma população já ampliada. Esse comportamento indica que a variação da população não é constante em termos absolutos, mas proporcional ao valor atual da grandeza, característica de função exponencial segundo o **Teorema 7 (p. 72)**.

Item (b) Seja r a razão de crescimento anual da população. O fato de o crescimento percentual ser constante implica que, a cada ano, a população é multiplicada por um mesmo fator $r > 1$.

Após 5 anos, tem-se:

$$20\,000 \cdot r^5 = 23\,000.$$

Dividindo ambos os lados por 20 000, obtém-se:

$$r^5 = \frac{23\,000}{20\,000} = 1{,}15.$$

Logo,

$$r = \sqrt[5]{1{,}15} = 1{,}15^{1/5}.$$

Esse valor representa o fator multiplicativo anual da população.

Item (c) Uma vez identificado que a população é multiplicada anualmente por um mesmo fator r, o modelo matemático que descreve a população ao longo do tempo é dado por

$$P(t) = 20\,000 \cdot r^t.$$

Substituindo o valor obtido no item anterior,

$$P(t) = 20\,000 \cdot (1{,}15)^{t/5}.$$

Essa expressão permite estimar a população da cidade após t anos, sob a hipótese de manutenção da taxa percentual de crescimento.

Item (d) Deseja-se determinar o instante t em que a população da cidade atinge 30 000 habitantes. Para isso, impõe-se a condição

$$20\,000 \cdot r^t = 30\,000.$$

Dividindo ambos os lados por 20 000, obtém-se

$$r^t = \frac{30\,000}{20\,000} = 1{,}5.$$

Para determinar o valor de t, é necessário inverter a função exponencial. Nesse ponto, introduz-se o logaritmo decimal (base 10). Aplicando o logaritmo a ambos os membros da igualdade, tem-se $\log(r^t) = \log(1{,}5)$.

Utilizando a propriedade dos logaritmos das potências,

$$\log(r^t) = t \cdot \log r,$$

obtemos

$$t \cdot \log r = \log(1{,}5).$$

Isolando t, resulta

$$t = \frac{\log(1{,}5)}{\log r}.$$

Aplicando novamente a propriedade dos logaritmos das potências,

$$\log\Big(\sqrt[5]{1{,}15}\Big) = \log\big((1{,}15)^{1/5}\big) = \frac{1}{5}\log(1{,}15).$$

Substituindo essa expressão na fórmula de t, obtém-se

$$t = \frac{\log(1{,}5)}{\frac{1}{5}\log(1{,}15)} = \frac{5\log(1{,}5)}{\log(1{,}15)} = \frac{5 \cdot 0{,}1761}{0,0607} \approx 14,5.$$

Portanto, o modelo indica que a população da cidade atingirá o patamar de 30 000 habitantes após aproximadamente 14,5 anos, desde que a taxa percentual de crescimento se mantenha constante ao longo do período analisado.

Para fins de comparação conceitual, consideremos um modelo afim que descreva a evolução da população no mesmo intervalo inicial. Como a população passou de 20 000 para 23 000 habitantes em 5 anos, o acréscimo médio anual foi de 600 habitantes, conduzindo ao modelo afim $P_a(t) = 20\,000 + 600t$.

Esse modelo pressupõe variações absolutas constantes ao longo do tempo. Por outro lado, o modelo exponencial

$$P_e(t) = 20\,000 \cdot r^t, \quad r = \sqrt[5]{1{,}15},$$

pressupõe variações relativas constantes, isto é, um crescimento percentual proporcional ao valor atual da população.

Embora ambos os modelos coincidam nos instantes $t = 0$ e $t = 5$, seus comportamentos divergem significativamente para valores maiores de t. Por exemplo, após 15 anos, o modelo afim prevê uma população de 29 000 habitantes, enquanto o modelo exponencial estima aproximadamente 30 418 habitantes.

Essa comparação evidencia que a escolha do modelo matemático adequado depende da natureza da variação observada no fenômeno, reforçando a distinção conceitual entre crescimento linear e crescimento exponencial.

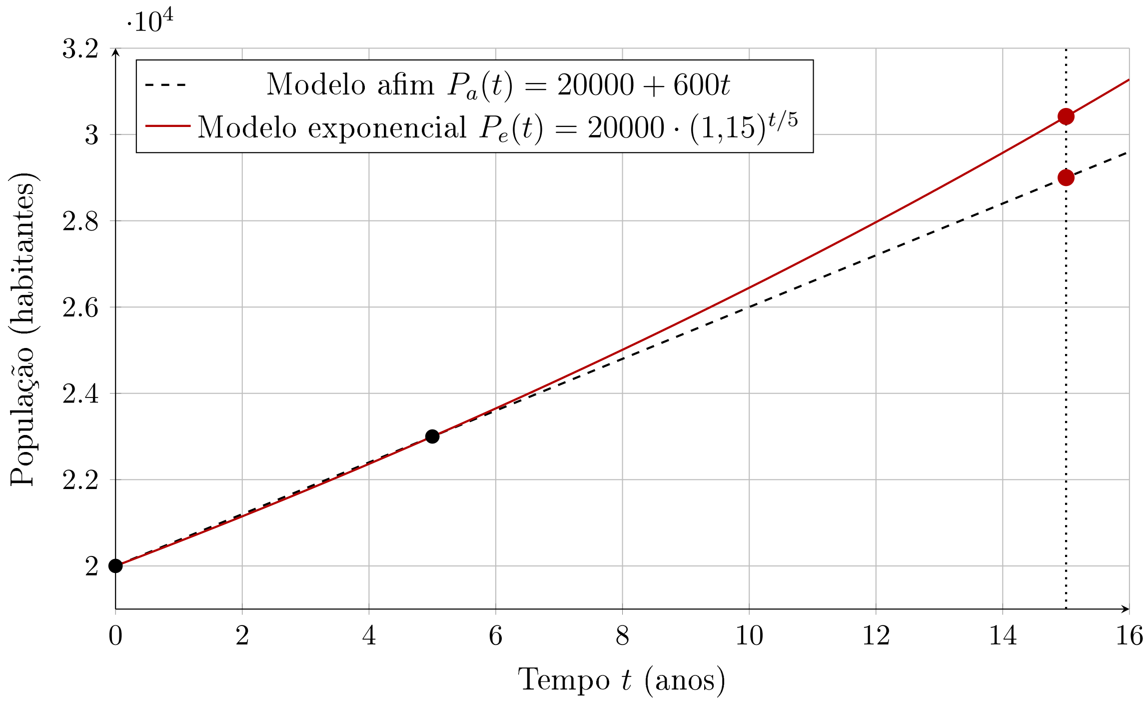

Figura 6.6: Comparação entre modelos afim e exponencial para o crescimento populacional.

Fonte: (Autor, 2026)

Problema 6.4.5. *No mercado financeiro brasileiro, a taxa CDI acompanha de perto a taxa Selic efetiva, geralmente situando-se 0,10 ponto percentual abaixo da Selic efetiva. Investimentos do tipo CDB atrelados a* 100% *do CDI apresentam, assim, uma rentabilidade muito próxima à taxa básica de juros definida pelo Banco Central.*

Considere um investidor que aplica uma quantia inicial em um CDB que rende 100% *do CDI, admitindo-se que, ao longo do período analisado, a taxa anual associada ao CDI permaneça aproximadamente constante. O rendimento do investimento é incorporado ao montante acumulado ao final de cada período, de modo que o valor aplicado cresce ao longo do tempo.*

Seja $V(t)$ o valor da aplicação após t meses.

a) Que tipo de comportamento matemático é compatível com a forma como o valor da aplicação evolui ao longo do tempo.

b) Determine, em função da taxa anual associada ao CDI, o tempo necessário para que o valor inicialmente aplicado seja duplicado.

c) Explique por que esse tempo depende apenas da taxa de crescimento do investimento e não do valor inicial aplicado.

Como referência, observe que, em um cenário no qual a taxa Selic efetiva seja de 15% *ao ano, a taxa CDI correspondente situa-se em torno de* 14,9% *ao ano. Além disso, desconsidere o IRPF atrelado ao investimento.*

Solução. Seja $V(t)$ o valor de uma aplicação em um CDB atrelado a 100% do CDI após t meses. Admite-se que, ao longo do período considerado, a taxa anual associada ao CDI permaneça aproximadamente constante. No cenário de referência adotado, uma taxa Selic efetiva de 15% ao ano corresponde a uma taxa CDI de aproximadamente 14,9% ao ano.

Item (a) O valor da aplicação é atualizado periodicamente, incorporando os rendimentos ao montante acumulado. Isso significa que o rendimento de cada período incide não apenas sobre o capital inicialmente aplicado, mas também sobre os rendimentos já incorporados nos períodos anteriores.

Do ponto de vista matemático, esse comportamento não é compatível com modelos de crescimento aditivo, nos quais os acréscimos absolutos em intervalos de tempo iguais são constantes. Aqui, os acréscimos aumentam à medida que o capital cresce, o que indica um crescimento proporcional ao valor acumulado.

Esse tipo de evolução é característico de processos em que, a cada período, o valor da grandeza considerada é multiplicado por um mesmo fator. Consequentemente, compatível com um modelo de crescimento exponencial segundo o **Teorema 7 (p. 72)**.

Item(b) Seja $i_m > 0$ a taxa mensal efetiva associada ao CDI. A incorporação sucessiva dos rendimentos implica que o valor da aplicação após um mês pode ser escrito como

$$V(1) = (1 + i_m)\, V(0).$$

No segundo mês, o rendimento incide sobre o capital já atualizado, de modo que

$$V(2) = (1 + i_m)V(1) = (1 + i_m)^2\, V(0).$$

Prosseguindo por indução, obtém-se a expressão geral

$$V(t) = (1 + i_m)^t\, V(0), \quad t \geq 0.$$

A taxa mensal i_m é determinada a partir da taxa anual do CDI. Como a aplicação rende aproximadamente 14,9% ao ano, tem-se

$$V(12) = (1 + 0{,}149)V(0).$$

Por outro lado, pelo modelo mensal,

$$V(12) = (1 + i_m)^{12}V(0).$$

Comparando as duas expressões, segue que

$$(1 + i_m)^{12} = 1{,}149.$$

O tempo necessário para que o capital inicialmente aplicado seja duplicado é determinado pela condição

$$V(t) = 2V(0).$$

Substituindo a expressão do modelo exponencial, obtém-se

$$(1 + i_m)^t\, V(0) = 2V(0),$$

e, como $V(0) > 0$,

$$(1 + i_m)^t = 2.$$

Tomando logaritmos em ambos os lados,

$$t \log(1 + i_m) = \log 2.$$

Assim,

$$t = \frac{\log 2}{\log(1 + i_m)}.$$

Usando a relação $(1+i_m)^{12} = 1{,}149$, tem-se

$$\log(1+i_m) = \frac{1}{12}\log(1{,}149),$$

e, portanto,

$$t = 12\,\frac{\log 2}{\log(1{,}149)}.$$

Realizando o cálculo numérico,

$$\log 2 \approx 0{,}6931 \quad \text{e} \quad \log(1{,}149) \approx 0{,}1390,$$

obtém-se

$$t \approx 12 \times \frac{0{,}6931}{0{,}1390} \approx 60.$$

Logo, o tempo necessário para a duplicação do capital é de aproximadamente 60 meses, isto é, cerca de 5 anos.

Item(c) Observa-se que a expressão obtida para o tempo de duplicação,

$$t = 12\,\frac{\log 2}{\log(1{,}149)},$$

não envolve o valor inicial $V(0)$. Isso decorre diretamente da estrutura do modelo exponencial, pois, ao impor a condição de duplicação $V(t) = 2V(0)$, o fator $V(0)$ aparece multiplicando ambos os lados da equação e pode ser simplificado.

Do ponto de vista conceitual, esse resultado indica que o tempo de duplicação é uma característica intrínseca do processo de crescimento proporcional, dependendo exclusivamente da taxa associada ao modelo. O capital inicial influencia os valores absolutos da aplicação, mas não altera o ritmo relativo de crescimento, que é determinado unicamente pela taxa do CDI.

Problema 6.4.6. *Considere uma quantia fixa de dinheiro mantida em espécie ao longo do tempo, sem qualquer tipo de aplicação financeira. Suponha que a economia seja caracterizada por uma taxa de inflação anual aproximadamente constante.*

Seja $P(t)$ o poder de compra dessa quantia após t anos, entendido como a quantidade de bens e serviços que pode ser adquirida no instante t em comparação com o instante inicial $t = 0$.

a) Do ponto de vista matemático, como a inflação afeta o poder de compra ao longo do tempo.

b) Admitindo que a taxa anual de inflação permaneça constante, determine um modelo funcional adequado para descrever a evolução de $P(t)$.

c) Explique por que, nesse contexto, o poder de compra decresce ao longo do tempo mesmo que o valor nominal da quantia considerada permaneça inalterado.

Como referência, considere um cenário em que a taxa anual de inflação seja de aproximadamente 5% *ao ano.*

Solução. Seja $P(t)$ o poder de compra de uma quantia fixa de dinheiro após t anos. Embora o valor nominal dessa quantia permaneça inalterado ao longo do tempo, a inflação provoca uma elevação generalizada dos preços, o que afeta diretamente a quantidade de bens e serviços que podem ser adquiridos.

Item(a) A inflação atua de forma cumulativa ao longo do tempo: a elevação dos preços em um determinado ano incide sobre os preços já corrigidos dos anos anteriores. Consequentemente, a perda do poder de compra não ocorre por reduções absolutas constantes, mas por reduções proporcionais sucessivas.

Do ponto de vista matemático, isso significa que o poder de compra em cada período é obtido multiplicando-se o poder de compra do período anterior por um fator constante menor que 1, associado à taxa de inflação. De acordo com o **Teorema 7 (p. 72)**, esse comportamento exclui modelos de decaimento aditivo e aponta para um processo de decaimento proporcional.

Item(b) Seja $r > 0$ a taxa anual de inflação. A cada ano, os preços aumentam por um fator $(1 + r)$, de modo que a mesma quantia monetária passa a adquirir apenas uma fração desse valor em termos reais. Assim, o poder de compra após um ano é dado por

$$P(1) = \frac{1}{1+r}\,P(0).$$

No segundo ano, a inflação incide novamente sobre os preços já corrigidos, o que conduz a

$$P(2) = \frac{1}{1+r}\,P(1) = \frac{1}{(1+r)^2}\,P(0).$$

Prosseguindo por indução, obtém-se, para t anos,

$$P(t) = \frac{1}{(1+r)^t}\,P(0).$$

No cenário de referência em que a taxa anual de inflação é de 5%, isto é, $r = 0{,}05$, o modelo assume a forma

$$P(t) = \frac{1}{(1{,}05)^t}\,P(0).$$

Item(c) A expressão obtida mostra que o poder de compra decresce ao longo do tempo segundo um modelo exponencial decrescente. Esse decaimento ocorre independentemente de qualquer variação no valor nominal da quantia considerada, sendo determinado exclusivamente pela taxa de inflação.

Do ponto de vista conceitual, esse resultado evidencia que a inflação atua como um processo de erosão proporcional do valor real do dinheiro. A cada período, a perda incide não apenas sobre o poder de compra inicial, mas também sobre as perdas acumuladas nos períodos anteriores, o que explica o caráter exponencial do fenômeno.

Observação. Nos problemas anteriores, foram estudados dois fenômenos distintos sob o ponto de vista da modelagem matemática. No primeiro, analisou-se a evolução do valor nominal de um capital investido em um CDB atrelado ao CDI, cujo crescimento ao longo do tempo é descrito por um modelo exponencial com fator anual $(1 + i)$. No segundo, investigou-se a perda do poder de compra de uma quantia monetária em um ambiente inflacionário, fenômeno igualmente governado por um modelo exponencial, agora com fator anual $(1 + r)^{-1}$.

Embora os contextos sejam distintos, observa-se que ambos os problemas compartilham a mesma estrutura matemática fundamental: em cada período de tempo, a grandeza considerada é multiplicada por um fator constante, maior que 1 no caso do investimento e menor que 1 no caso da inflação. Esses fatores expressam, respectivamente, um crescimento proporcional e um decaimento proporcional.

Quando se considera simultaneamente o rendimento de um investimento e a ação da inflação (situação que corresponde ao problema economicamente relevante), o comportamento do capital em termos reais é obtido pela composição direta dos dois modelos analisados anteriormente. Em particular, após um ano, o capital nominal é multiplicado por $(1 + i)$, enquanto o poder de compra de cada unidade monetária é multiplicado por $(1 + r)^{-1}$.

Consequentemente, o fator que descreve a evolução real do capital ao longo de um ano é dado pelo produto

$$(1 + i)(1 + r)^{-1}.$$

Esse fator não introduz um novo tipo de crescimento, mas resulta exclusivamente da combinação dos dois processos exponenciais já estudados. Escrevendo esse fator na forma $1 + \rho$, obtém-se a relação

$$1 + \rho = \frac{1 + i}{1 + r},$$

na qual ρ representa a taxa real de crescimento do capital.

Dessa forma, a noção de taxa real de juros surge como um elo conceitual entre os modelos analisados: ela expressa, em um único parâmetro, o efeito conjunto do crescimento nominal do investimento e da perda de poder de compra provocada pela inflação. Esse resultado evidencia que os dois problemas discutidos ao longo do capítulo não são independentes, mas manifestações distintas de uma mesma estrutura exponencial subjacente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta dissertação, investigou-se uma abordagem para o estudo das funções do Ensino Básico, em particular as afins, quadráticas e exponenciais, fundamentada na análise de diferenças absolutas e variações relativas associadas a incrementos regulares da variável independente.

Essa perspectiva permitiu compreender tais funções não apenas como expressões algébricas previamente estabelecidas, mas como estruturas matemáticas que emergem da observação de regularidades discretas, frequentemente associadas a situações reais de modelagem. Desse modo, o foco do trabalho deslocou-se da simples aplicação de fórmulas para a caracterização conceitual dos comportamentos funcionais.

Mostrou-se que funções afins podem ser caracterizadas pela constância das diferenças absolutas entre valores sucessivos, o que se traduz em acréscimos regulares nos valores da função quando a variável independente é incrementada de forma uniforme.

Quanto às funções quadráticas, evidenciou-se que, embora tais acréscimos não sejam constantes, as diferenças de segunda ordem o são, caracterizando um crescimento acelerado cuja estrutura pode ser compreendida a partir da análise sistemática de dados discretos.

Já as funções exponenciais foram estudadas a partir da constância das variações relativas, revelando-se como modelos adequados para fenômenos em que incrementos regulares da variável independente produzem crescimento ou decaimento multiplicativo nos valores da função. Assim, as três classes de funções foram tratadas de maneira equilibrada, a partir de um mesmo princípio metodológico, sem que nenhuma delas fosse privilegiada em detrimento das demais.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, tornou-se evidente que essa forma de caracterização das funções elementares é pouco explorada em grande parte dos livros didáticos brasileiros. Embora existam exceções, observa-se que, na maioria dos casos, a modelagem matemática é apresentada por meio de situações fictícias ou excessivamente simplificadas, o que tende a dificultar o interesse dos estudantes e a limitar as possibilidades de interdisciplinaridade. Além disso, é recorrente que os problemas propostos forneçam explicitamente a expressão da função a ser utilizada, não permitindo que o aluno participe do processo de construção do modelo matemático. Essa prática reduz a modelagem a um exercício de aplicação mecânica, esvaziando seu potencial formativo.

Nesse contexto, a principal contribuição prática deste trabalho consiste em apresentar uma alternativa metodológica em que a função não é entregue de antemão, mas deduzida a partir de dados e propriedades observáveis, como diferenças absolutas ou razões constantes. Tal abordagem favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático, estimula a interpretação crítica de informações e amplia as possibilidades de articulação da matemática com outras áreas do conhecimento, como física, biologia e economia, reforçando o papel da modelagem matemática no processo educativo.

Cabe ainda destacar que a motivação para o desenvolvimento desta pesquisa está diretamente relacionada ao meu percurso formativo no âmbito do PROFMAT. Ao ingressar no programa, a caracterização das funções elementares a partir da análise de diferenças discretas e variações relativas não fazia parte da formação matemática prévia do autor, apesar do uso frequente dessas funções no ensino básico. A descoberta dessa abordagem revelou-se particularmente significativa, pois evidenciou uma forma mais conceitual, estruturada e integrada de compreender funções afins, quadráticas e exponenciais, distinta da apresentação tradicional centrada em fórmulas prontas. Essa experiência foi determinante para a escolha do tema da dissertação e reforça a relevância de propostas que valorizem a compreensão conceitual de tais funções no contexto do ensino e da modelagem matemática.

Apesar dos resultados alcançados, esta pesquisa apresenta limitações. Destaca-se, em particular, a escassez de referencial teórico que articule, de forma sistemática, a caracterização de funções do Ensino Básico via diferenças discretas com as práticas de modelagem matemática escolar. A ausência de uma literatura consolidada sobre essa abordagem exigiu um esforço adicional de organização conceitual e justificativa metodológica, o que, ao mesmo tempo, evidencia o caráter exploratório do trabalho.

Como desdobramento natural, futuras pesquisas podem aprofundar essa perspectiva, investigando sua aplicação a outras classes de funções e avaliando empiricamente seu impacto no processo de ensino e aprendizagem. A elaboração de materiais didáticos baseados nessa abordagem, bem como a realização de estudos em sala de aula, pode contribuir para tornar o ensino de funções mais significativo, conceitualmente sólido e conectado a situações reais, fortalecendo a interdisciplinaridade e o papel formativo da matemática.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodiney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 4ª edição. Editora Contexto, 2007.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://https://www.planalto.gov.br>. Acesso em: 14 de dezembro de 2025.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 31 janeiro de 2026.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Funções e Modelagem**. PAPMEM, Janeiro, 2022. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/PAPMEM-janeiro-2022-Paulo-Cezar.pdf>. Acesso em: 28 de janeiro de 2026.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática-Elo entre as tradições e a modernidade**. 4ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Por que e como ensinar História da Matemática**. REMATEC, Natal (RN), ano 8, n. 12, p. 7-21, jan./jun. 2013. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/355>. Acesso em: 4 de março de 2026.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 3ª edição. São Paulo: Ática, 2016.

LIMA, Elon Lages et al. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1. 8ª edição. SBM Rio de Janeiro, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. 2ª edição. SBM Rio de Janeiro, 2023.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SALVADOR, José Antônio; ARENALES, Selma. **Modelagem Matemática Ambiental**. São Carlos: EdUfSCar, 2021.