

Caracterização e aplicação de funções afins, quadráticas e exponenciais em modelagem matemática para a resolução de problemas

Elves Rodrigues Pantoja 

Guzmán E. Isla Chamilco 

Resumo

Este artigo apresenta uma perspectiva conceitual para a identificação e aplicação de funções afins, quadráticas e exponenciais em contextos de modelagem matemática, fundamentada na análise da variação discreta sob incrementos constantes da variável independente. Demonstra-se como as propriedades estruturais dessas variações permitem caracterizar tais classes funcionais prescindindo do aparato do cálculo diferencial. Como corolário, a amostragem dessas funções em pontos equiespaçados do domínio revela, de forma natural, sequências com regularidades aritméticas e geométricas. A viabilidade da proposta é ilustrada por meio de situações de modelagem em diversos cenários, evidenciando seu potencial para o fortalecimento da compreensão conceitual e para a inovação didática no estudo das funções.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Variação discreta; Funções afins; Funções quadráticas; Funções exponenciais.

Abstract

This article presents a conceptual perspective for the identification and application of affine, quadratic, and exponential functions within mathematical modeling contexts, grounded in the analysis of discrete variation under constant increments of the independent variable. It demonstrates how the structural properties of these variations allow for the characterization of such functional classes without resorting to the apparatus of differential calculus. As a corollary, sampling these functions at equally spaced points in the domain naturally reveals sequences with arithmetic and geometric regularities. The feasibility of the proposal is illustrated through modeling situations in diverse scenarios, highlighting its potential for strengthening conceptual understanding and fostering pedagogical innovation in the study of functions.

Keywords: mathematical modeling; discrete variation; affine functions; quadratic functions; exponential functions.

1. Introdução

O estudo das funções ocupa um papel central na matemática escolar e aparece com frequência em problemas de modelagem associados a fenômenos econômicos, físicos e naturais. Em particular,

funções afins, quadráticas e exponenciais são amplamente utilizadas para descrever situações de crescimento, decaimento, custo, área e movimento. No entanto, em contextos de modelagem, a identificação do modelo funcional adequado nem sempre é imediata, sobretudo quando se parte da observação de dados obtidos em intervalos regulares.

Tradicionalmente, a escolha do modelo é conduzida por meio da análise gráfica ou pelo ajuste algébrico direto das expressões funcionais. Embora eficazes, essas abordagens nem sempre evidenciam as propriedades estruturais que distinguem uma função de outra. Nesse sentido, torna-se relevante buscar critérios conceituais que permitam reconhecer a natureza de uma função a partir do comportamento de suas variações, sem recorrer a ferramentas do cálculo diferencial.

Em muitos materiais didáticos, entretanto, os problemas associados às funções da Educação Básica são apresentados de forma que o modelo funcional já se encontra previamente determinado, cabendo ao estudante apenas aplicar a expressão fornecida para obter resultados numéricos ou interpretações pontuais. Embora tais abordagens tenham seu valor no treino algébrico, elas pouco contribuem para o desenvolvimento da capacidade de reconhecer, a partir dos dados ou do comportamento do fenômeno, qual modelo matemático é mais adequado à situação em análise.

Essa ênfase excessiva na expressão algébrica pode comprometer a compreensão conceitual por parte dos estudantes, uma vez que o foco recai predominantemente sobre a forma simbólica, e não sobre a função enquanto objeto matemático. Conforme destaca Lima [13], uma função não deve ser confundida com a fórmula utilizada para representá-la, pois é definida essencialmente pela correspondência estabelecida entre os elementos de seu domínio e de seu contradomínio. O autor ressalta ainda que diferentes expressões algébricas podem descrever uma mesma função, assim como uma mesma expressão pode definir funções distintas, dependendo do domínio considerado, o que evidencia a importância de abordagens que privilegiem propriedades estruturais das funções, para além de sua representação analítica.

Uma possibilidade consiste em analisar a variação discreta da função, expressa pela diferença $f(x+h) - f(x)$, quando o domínio é percorrido por incrementos constantes. Essa abordagem permite caracterizar tais funções a partir da regularidade de suas variações: variações constantes, variações que dependem linearmente da variável e variações proporcionais ao próprio valor da função revelam comportamentos fundamentalmente distintos.

O objetivo deste artigo é empregar essa caracterização por variação discreta como instrumento para a identificação de funções em problemas de modelagem matemática. Inicialmente, discutem-se propriedades da variação associadas às funções afins, quadráticas e exponenciais, destacando-se os aspectos conceituais que as diferenciam. Em seguida, mostra-se que, como consequência dessa caracterização, a avaliação dessas funções em pontos igualmente espaçados do domínio gera seqüências com estruturas específicas, o que pode ser explorado na identificação do modelo funcional adequado.

O texto está organizado da seguinte forma: a Seção 2 discute os fundamentos da Modelagem Matemática e sua relação com o ensino de funções, estabelecendo a base pedagógica do trabalho. Na Seção 3, introduz-se formalmente a noção de variação discreta e os operadores de diferença. As Seções 4, 5 e 6 constituem o núcleo analítico, dedicando-se, respectivamente, às caracterizações das funções afim, quadrática e exponencial. Em cada uma dessas seções, a fundamentação teórica é aplicada à resolução dos problemas de modelagem propostos, demonstrando como a regularidade das variações (absolutas, de segunda ordem ou relativas) permite identificar o modelo adequado. Por fim, a Seção 7 apresenta as considerações finais do estudo e a Seção 8 discute as implicações didáticas dessa abordagem para a sala de aula e a formação de professores.

2. Modelagem Matemática e o Ensino de Funções

Historicamente, conforme analisa Dante [7], o ensino da Matemática no Brasil foi marcado por uma abordagem formalista e conteudista, centrada na memorização de regras e procedimentos simbólicos. Essa tradição priorizou a transmissão de algoritmos em detrimento da construção de sentido, levando muitos estudantes a encarar a disciplina como algo inacessível ou destinado apenas a gênios. Em contrapartida, D'Ambrosio [6] defende que a Matemática deve ser compreendida como uma manifestação cultural viva, composta por estratégias desenvolvidas por comunidades para lidar com situações de sobrevivência e transcendência. Sob essa ótica, a "matematização" da existência é um processo natural do ser humano para explicar e conhecer a realidade, o que justifica a transição de um ensino mecânico para uma prática baseada na modelagem e na resolução de problemas contextualizados.

Autores como D'Ambrosio [6], Bassanezi [1] e Biembengut [2] argumentam que parte das dificuldades no ensino de Matemática decorre do distanciamento entre os conteúdos escolares e a Matemática vivida no cotidiano. Para esses pesquisadores, o ensino deve superar o formalismo algébrico, orientando-se pela construção de significados e pela modelagem de situações reais, de modo que o estudante reconheça a Matemática como linguagem de interpretação de fenômenos.

Mas, afinal, o que é modelagem matemática? Como essa prática pode nos ajudar a conectar conceitos abstratos a situações do mundo real?

A modelagem matemática é concebida como um processo que busca compreender, representar e explicar situações reais por meio da linguagem e das estruturas da Matemática. Em termos simples, trata-se de transformar um problema do mundo real em um modelo matemático, isto é, uma expressão, equação, função ou sistema que descreve e possibilita analisar o fenômeno em questão.

A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão. (Bassanezi, 2002, p. 17)

Essa definição evidencia que modelar é mais do que aplicar fórmulas: é interpretar, abstrair e validar a Matemática dentro de um contexto. O processo envolve uma ida e volta entre a realidade e a teoria, em que o modelo é constantemente ajustado para representar de forma satisfatória o fenômeno estudado.

De forma complementar, Biembengut e Hein [2] explicam: "...matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir".

Assim, a modelagem não deve ser vista apenas como um método de aplicação, mas como uma metodologia de construção do conhecimento matemático. Ela permite ao estudante desenvolver raciocínio lógico e crítico, compreender a relação entre conceitos matemáticos e fenômenos reais e perceber a Matemática como uma linguagem de descrição e previsão de comportamentos, construindo significados de forma ativa e contextualizada.

No campo do ensino, a modelagem é uma ponte entre o formalismo e a prática: exige tanto a compreensão conceitual (para formular o modelo) quanto a habilidade algébrica (para resolvê-lo).

Quando bem conduzida, ela promove uma aprendizagem significativa e interdisciplinar, tornando o aluno sujeito do próprio processo de investigação.

A apresentação da Matemática nas escolas, segundo Lima [11], deve ser feita levando-se em conta conceituação, manipulação e aplicação, que são as três bases fundamentais da organização da Matemática e conseqüentemente do seu ensino. A conceituação diz respeito ao estabelecimento das definições, dos teoremas, da teoria, para que o aluno possa ter noção do que será usado e da veracidade das ferramentas que serão utilizadas. A manipulação significa, principalmente, atitude de natureza algébrica e geométrica, ou seja, saber fazer cálculos, resolver equações, lidar com as expressões algébricas de modo geral, realizar as construções geométricas, etc. E, finalmente, a aplicação, frequentemente denominada contextualização no discurso pedagógico contemporâneo, é utilizar a matemática no dia a dia para resolver situações e problemas reais (modelagem).

O ensino da Matemática exige um equilíbrio entre essas três dimensões fundamentais: a conceituação teórica, a manipulação algébrica e geométrica e a contextualização. Quando uma dessas dimensões é sobrevalorizada em detrimento das outras, o processo de ensino-aprendizagem tende a se tornar fragmentado e ineficaz. Assim, o desafio contemporâneo consiste em construir pontes entre o formalismo matemático e o mundo real, de modo que a manipulação simbólica tenha significado e a modelagem preserve o rigor teórico característico da Matemática enquanto ciência.

Nesse sentido, o ensino de funções (afins, quadráticas e exponenciais) oferece um campo fértil para o desenvolvimento desse equilíbrio. Ao relacionar a análise conceitual das propriedades funcionais com a manipulação simbólica e a interpretação de fenômenos do cotidiano, o aluno constrói uma aprendizagem significativa, crítica e integrada. Assim, a consolidação dos três pilares (conceituação, manipulação e aplicação) evita o retorno aos antigos fracassos do ensino puramente formalista, promovendo uma Matemática viva, coerente e socialmente relevante.

Compreender essas funções apenas de forma algébrica, por meio de fórmulas e manipulações simbólicas, limita o aprendizado a um nível superficial. Em contrapartida, abordá-las sob a ótica da modelagem matemática, isto é, como instrumentos de leitura e representação de fenômenos cotidianos, econômicos, físicos ou biológicos, permite que o estudante perceba o significado dos parâmetros e dos comportamentos gráficos, desenvolvendo um pensamento matemático mais crítico, flexível e aplicável.

Conforme observa D'Ambrosio [6], a matemática escolar é frequentemente identificada por um simbolismo e regras próprios que pouco se assemelham à prática cotidiana. Nesse sentido, nota-se que muitos livros didáticos apresentam problemas intitulados como contextualizados, mas que, na realidade, limitam-se a fornecer a expressão algébrica no enunciado, conforme ilustra o exemplo: "...a grandeza $y = f(x)$ varia com a grandeza x por meio da função

$$f(x) = \frac{1}{100} (20 + 10x - x^2),$$

ou seja, em que a função envolvida já é apresentada no texto do enunciado. Nas modelagens de situações reais isso não acontece. É preciso aprender a identificar que tipo de função é adequada a partir de situações-problema como as que propomos abaixo:

Problema 1. Em determinado site, encontra-se o anúncio de um dispositivo como o da imagem abaixo, usado para medir o tamanho do pé de criança e determinar o número de seu calçado:

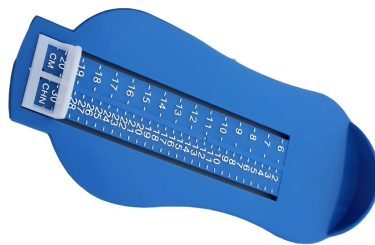


Figura 1: Régua para determinar o número do calçado.

Analisando a imagem, é possível determinar a função que dá o número do calçado a partir do comprimento do pé, em centímetros? Qual é essa função?

Problema 2. Um grupo de engenheiros está testando um novo robô autônomo em uma pista retilínea. Esse robô possui um sensor de alta precisão que registra sua posição exata (em metros) a cada segundo. O cronômetro é disparado ($t = 0$) no momento em que o robô passa por um marco inicial, já em movimento.

Os dados coletados durante o teste foram organizados na tabela a seguir:

Tabela 1: Dados de posição do robô em função do tempo

Tempo (t) em segundos	Posição (S) em metros
0	2
1	5
2	10
3	17
4	26
5	37

Com base **apenas** nos dados da tabela, determine a função que relaciona a posição S em função do tempo t .

Problema 3. No mercado financeiro brasileiro, a taxa CDI acompanha de perto a taxa Selic efetiva, geralmente situando-se 0,10 ponto percentual abaixo da Selic efetiva. Investimentos do tipo CDB atrelados a 100% do CDI apresentam, assim, uma rentabilidade muito próxima à taxa básica de juros definida pelo Banco Central.

Considere um investidor que aplica uma quantia inicial em um CDB que rende 100% do CDI, admitindo-se que, ao longo do período analisado, a taxa anual associada ao CDI permaneça aproximadamente constante. O rendimento do investimento é incorporado ao montante acumulado ao final de cada período, de modo que o valor aplicado cresce ao longo do tempo.

Seja $V(t)$ o valor da aplicação após t meses. Responda.

1. Que tipo de comportamento matemático é compatível com a forma como o valor da aplicação evolui ao longo do tempo?
2. Em função da taxa anual associada ao CDI, qual o tempo necessário para que o valor inicialmente aplicado seja duplicado?

3. Por que esse tempo depende apenas da taxa de crescimento do investimento e não do valor inicial aplicado?

Como referência, observe que, em um cenário no qual a taxa Selic efetiva seja de 15% ao ano, a taxa CDI correspondente situa-se em torno de 14,9% ao ano. Além disso, desconsidere o IRPF atrelado ao investimento.

Problema 4. Um laboratório de microbiologia investiga o crescimento da bactéria *Salmonella* sp. em um meio de cultura nutritivo, mantido a temperatura constante de 37°C, condição considerada ideal para sua proliferação. O objetivo do estudo é compreender a dinâmica inicial do crescimento bacteriano e desenvolver um modelo matemático para estimar o risco de contaminação alimentar.

A partir de uma amostra inicial contendo 100 bactérias, observou-se experimentalmente que, sob essas condições, o tempo médio de geração, definido como o intervalo necessário para que a população dobre, é de aproximadamente 30 minutos, ao menos durante as primeiras horas do experimento.

Seja $N(t)$ o número de bactérias presentes após t horas de observação.

1. Descreva como o número de bactérias varia quando o tempo é incrementado sempre da mesma quantidade.
2. A partir dessa regularidade observada, deduza uma expressão para a função $N(t)$ que modele o crescimento bacteriano durante o período inicial considerado.
3. Utilizando o modelo obtido, estime o número de bactérias após 5 horas; e o tempo necessário para que a população atinja aproximadamente 51 200 bactérias.

Observa-se que, em nenhuma das situações-problema propostas anteriormente, a expressão algébrica do modelo funcional é fornecida no enunciado. Diferente da abordagem tradicional criticada por Dante [7] e D'Ambrosio [6], em que o estudante apenas manipula uma fórmula pré-estabelecida, essas situações exigem que o modelo seja identificado a partir da análise dos dados e do comportamento do fenômeno. Para que essa transição entre a realidade e o formalismo seja feita com rigor, é necessário instrumentalizar o aluno com ferramentas que permitam reconhecer padrões de crescimento.

Para identificar a forma de representação mais conveniente em cada situação, é essencial compreender como ocorre a variação da função, isto é, de que modo se manifesta o aumento ou a diminuição dos valores de $f(x)$ conforme a variável x se altera. Em outras palavras, é necessário analisar o comportamento dos acréscimos

$$f(x + h) - f(x)$$

em cada classe de funções, pois é essa relação que revela a natureza do crescimento ou decréscimo de uma função.

Neste artigo, a modelagem matemática é compreendida como um processo que envolve a análise de uma situação real, a identificação de regularidades e a construção de um modelo matemático capaz de descrever o fenômeno em estudo. Nesse sentido, não se pretende seguir rigidamente etapas pré-estabelecidas, mas valorizar a interpretação do problema e a mobilização de propriedades matemáticas adequadas ao contexto considerado.

3. Variação discreta e caracterização funcional

Em problemas de modelagem matemática, é comum que dados sejam observados ou coletados em intervalos regulares do domínio, como instantes igualmente espaçados no tempo ou valores uniformemente distribuídos de uma grandeza independente. Nesses contextos, a análise do comportamento da função associada ao fenômeno pode ser conduzida a partir da comparação entre seus valores consecutivos, sem a necessidade de recorrer a ferramentas do cálculo diferencial.

Dado um número real $h \neq 0$ e uma função f definida em um subconjunto do \mathbb{R} tal que x e $x + h$ pertencem ao seu domínio, denomina-se *variação discreta* de f no ponto x , com passo h , a diferença

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Essa quantidade expressa a alteração do valor da função quando a variável independente sofre um incremento constante h , permitindo investigar regularidades no comportamento funcional ao longo do domínio.

Para fenômenos em que a variação de primeira ordem não é constante, faz-se necessária a análise da variação da variação. Define-se, assim, o operador de diferença de segunda ordem, Δ^2 , como a variação da variação discreta de primeira ordem

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x).$$

A análise da variação discreta revela propriedades estruturais importantes das funções. Em particular, a dependência (ou independência) dessa variação em relação à variável x fornece indícios sobre a natureza da função considerada. Variações constantes, variações que dependem linearmente da variável e variações proporcionais ao próprio valor da função correspondem a comportamentos qualitativamente distintos, os quais serão explorados nas seções seguintes. Essa perspectiva é compatível com discussões clássicas sobre variação discreta e o papel conceitual das diferenças na análise de funções reais [13].

É importante destacar que a abordagem adotada neste trabalho não se restringe ao cálculo pontual da diferença $f(x + h) - f(x)$, mas enfatiza a regularidade desse comportamento ao longo do domínio. Tal regularidade permite estabelecer critérios conceituais de caracterização funcional, especialmente adequados a situações em que se busca identificar modelos matemáticos a partir de dados observados em intervalos regulares.

Além disso, ao considerar sucessivos incrementos do tipo $x, x + h, x + 2h, \dots$, a variação discreta passa a desempenhar um papel análogo ao de um operador de análise do comportamento global da função, conectando naturalmente a caracterização funcional à interpretação dos dados em contextos de modelagem. Nas seções seguintes, essa perspectiva será aplicada às funções afim, quadrática e exponencial, evidenciando como diferentes padrões de variação conduzem a modelos matemáticos distintos.

4. Caracterização da função afim

Função afim é frequentemente associada, em contextos de modelagem matemática, a situações em que a variação da grandeza dependente ocorre de forma constante em relação à variável independente. Essa propriedade pode ser formalizada de maneira natural por meio da variação discreta, conforme definido na seção anterior.

Teorema 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, dada por

$$f(x) = ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo incremento $h \neq 0$, tem-se que

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = ah$$

não depende de x .

Demonstração. Seja $f(x) = ax + b$. Para $h \neq 0$, tem-se

$$f(x + h) - f(x) = (a(x + h) + b) - (ax + b).$$

Simplificando a expressão, obtemos

$$f(x + h) - f(x) = ax + ah + b - ax - b = ah.$$

Observa-se, portanto, que a diferença depende apenas do incremento h e não de x . □

Como consequência do Teorema 1, se tomarmos pontos no domínio equiespaçados do tipo $x, x + h, x + 2h, x + 3h, \dots$, os valores correspondentes da função

$$f(x), f(x + h), f(x + 2h), \dots$$

formam uma Progressão Aritmética de razão $r = ah$. Isso ocorre porque a diferença entre termos consecutivos é constante e independente de x

$$\Delta f(x + nh) = f(x + (n + 1)h) - f(x + nh) = ah, \quad 8n \in \mathbb{N}.$$

Observação 1. A recíproca do Teorema 1 também é verdadeira: Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h mas não de x , então f é uma função afim.

Uma demonstração dessa recíproca pode ser encontrada, por exemplo, em [12], no contexto da caracterização das funções afins.

4.1. Retomada do Problema 1: Numeração do calçado a partir do comprimento do pé em (cm)

A aplicação prática desse resultado teórico permite solucionar o Problema 1 por meio da análise direta dos dados. Ao organizarmos as medidas do comprimento do pé e a respectiva numeração em uma tabela, a regularidade da variação discreta torna-se evidente, confirmando a natureza afim do fenômeno estudado.

Tabela 2: Análise da variação discreta no Problema 1.

Comprimento (x)	Número (f(x))	Varição (Δf)
6	2	–
7	4	2
8	6	2
9	8	2

Ao analisarmos a terceira coluna, notamos que para cada incremento unitário no domínio ($h = 1$ cm), a variação na imagem é constante e igual a 2. Como a variação discreta independe de x , o Teorema 1 nos garante que o modelo adequado para este fenômeno é uma função afim.

Pela caracterização funcional, temos $\Delta f(x) = ah$. Substituindo os valores observados

$$a(1) = 2 \implies a = 2.$$

Com o coeficiente a determinado, o modelo assume a forma $f(x) = 2x + b$. Para encontrar o valor de b , utilizamos qualquer par ordenado da tabela, como $(6, 2)$, assim

$$2 = 2(6) + b \implies 2 = 12 + b \implies b = -10.$$

Dessa forma, obtemos o modelo matemático $f(x) = 2x - 10$. Note que a identificação da natureza do modelo precedeu a manipulação dos símbolos, surgindo da observação da regularidade estrutural dos dados.

Fica evidente que a constância da variação discreta é uma propriedade estrutural das funções afins. Em termos de modelagem matemática, essa característica está associada a fenômenos nos quais incrementos iguais da variável independente produzem incrementos iguais na grandeza observada, o que corresponde a uma taxa de variação constante.

5. Caracterização da função quadrática

Em diversos problemas de modelagem matemática, observa-se que a variação da grandeza estudada não ocorre de forma constante, mas apresenta um comportamento que se altera de maneira regular ao longo do domínio. Esse tipo de fenômeno pode ser adequadamente descrito por funções quadráticas, cuja caracterização pode ser analisada a partir da variação discreta definida na Seção 3.

Teorema 2. *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo incremento $h \neq 0$:*

1. *A variação discreta de primeira ordem $\Delta f(x) = 2axh + ah^2 + bh$ é uma função linear de x .*
2. *A variação discreta de segunda ordem $\Delta^2 f(x) = 2ah^2$ é constante.*

Demonstração. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para demonstrar o item (1), calculamos a primeira diferença

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) \\ &= a(x^2 + 2xh + h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c \\ &= 2axh + ah^2 + bh. \end{aligned}$$

Veja que o resultado é claramente uma expressão do tipo $Ax + B$, em que $A = 2ah$ e $B = ah^2 + bh$, caracterizando uma função linear em x .

Para o item (2), utilizando a definição do operador de segunda ordem $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$ aplicada ao resultado anterior, temos

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 f(x) &= [2a(x+h)h + ah^2 + bh] - [2axh + ah^2 + bh] \\
 &= 2axh + 2ah^2 + ah^2 + bh - 2axh - ah^2 - bh \\
 &= 2ah^2.
 \end{aligned}$$

Como a e h são constantes, o resultado não depende de x . □

O Teorema evidencia que a função quadrática apresenta uma regularidade de primeira ordem (variação linear) e uma regularidade de segunda ordem (variação constante). Como consequência, se avaliarmos a função em pontos igualmente espaçados do domínio $x, x+h, x+2h, \dots$, a sequência de valores

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots$$

gera uma Progressão Aritmética de Segunda Ordem, na qual a diferença entre termos consecutivos forma uma PA de razão $2ah^2$.

Observação 2. Reciprocamente, conforme apresentado em [12], a propriedade descrita no Teorema 2 também caracteriza as funções quadráticas. Mais precisamente, uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, ao se considerar valores igualmente espaçados do domínio, a sequência

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots$$

apresenta uma regularidade de segunda ordem, no sentido de que suas diferenças de primeira ordem formam uma progressão aritmética não degenerada. Em outras palavras, toda função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que transforma progressão aritmética (não-constante) em progressão aritmética de segunda ordem (não-degenerada) é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Esse resultado reforça o caráter estrutural da variação discreta na identificação de modelos quadráticos em problemas de modelagem matemática.

5.1. Retomada do Problema 2: Posição do robô em relação ao tempo

Com base na caracterização estabelecida pelo Teorema 2, podemos agora solucionar o Problema 2 a partir da análise dos dados experimentais fornecidos. Ao organizarmos as posições do robô e calcularmos as variações sucessivas de primeira e segunda ordens, obtemos a Tabela 3.

Tabela 3: Análise das variações sucessivas da posição do robô.

Tempo (t)	Posição (S)	ΔS (1ª dif.)	$\Delta^2 S$ (2ª dif.)
0	2	–	–
1	5	3	–
2	10	5	2
3	17	7	2
4	26	9	2
5	37	11	2

Ao analisarmos a terceira coluna, notamos que as variações de primeira ordem não são constantes, o que descarta o modelo afim. No entanto, as diferenças de segunda ordem são constantes e iguais

a 2. Pelo Teorema 2, essa regularidade identifica o fenômeno como sendo regido por uma função quadrática.

Para determinar os coeficientes do modelo $S(t) = at^2 + bt + c$, utilizamos a relação fundamental $\Delta^2 S = 2ah^2$. Como o intervalo de tempo na tabela é unitário ($h = 1$), temos

$$2a(1)^2 = 2 \implies 2a = 2 \implies a = 1.$$

Com o valor de a e os dados da tabela, determinamos os demais coeficientes. Para $t = 0$, temos $S(0) = c = 2$. Usando agora o valor para $t = 1$,

$$S(1) = (1)(1)^2 + b(1) + 2 = 5 \implies 1 + b + 2 = 5 \implies b = 2.$$

Assim, o modelo matemático que descreve a posição do robô em função do tempo é $S(t) = t^2 + 2t + 2$. A técnica da variação discreta permitiu não apenas identificar a natureza quadrática do movimento, mas também deduzir seus parâmetros de forma direta a partir dos dados.

Este processo demonstra que a modelagem matemática, quando fundamentada nas propriedades variacionais, transforma a manipulação algébrica em uma etapa posterior e justificada pela interpretação dos dados reais.

6. Caracterização das funções do tipo exponencial

Fenômenos de crescimento e decaimento, como os observados em processos populacionais, radioatividade, juros compostos e variação de concentrações, são comumente modelados por funções do tipo exponencial. Nessas situações, mais do que a função exponencial clássica, torna-se relevante considerar uma classe mais ampla de funções que preserva sua principal característica estrutural: a proporcionalidade entre a variação da função e o próprio valor da função.

Dizemos, portanto, que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

em que $b > 0$ e $a > 0$, $a \neq 1$. Se $a > 1$, f é crescente e se $0 < a < 1$, f é decrescente. Essa classe inclui a função exponencial usual como caso particular e é especialmente adequada à modelagem de fenômenos nos quais a taxa de variação depende do estado atual do sistema.

Teorema 3. *Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função do tipo exponencial, dada por*

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Então, para todo $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = (a^h - 1) \quad e \quad \frac{f(x+h)}{f(x)} = (a^h)$$

dependem apenas de h , mas não de x .

Demonstração. Seja $f(x) = b \cdot a^x$. Para um incremento h qualquer, calculamos primeiro a variação relativa

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h} - b \cdot a^x}{b \cdot a^x}.$$

Colocando o termo $b \cdot a^x$ em evidência no numerador, obtemos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^x(a^h - 1)}{b \cdot a^x} = a^h - 1.$$

Para a segunda expressão, referente à razão entre valores sucessivos, temos:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h}}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x \cdot a^h}{b \cdot a^x} = a^h.$$

Alternativamente, a segunda expressão decorre diretamente da primeira, uma vez que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+h)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+h)}{f(x)} - 1.$$

Igualando os resultados, temos $\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1 = a^h - 1$, o que implica $\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$. Em ambos os casos, o resultado final depende exclusivamente do parâmetro a e do incremento h , sendo independente da variável x . \square

Como consequência imediata do Teorema 3, se restringirmos a função do tipo exponencial a pontos do domínio igualmente espaçados, tais como $x, x+h, x+2h, \dots$, a sequência de valores correspondente

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots$$

constitui uma Progressão Geométrica (PG) de razão a^h . Diferentemente das funções afins e quadráticas, em que a regularidade é aditiva (somas de parcelas constantes), nas funções exponenciais a regularidade é multiplicativa: cada termo é obtido multiplicando-se o anterior por um fator constante que depende apenas do incremento h e da base a .

Observação 3. A recíproca da propriedade apresentada no Teorema 3 também é válida sob hipóteses naturais de regularidade. Conforme demonstrado em [12], se uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é monótona e injetiva e satisfaz a propriedade de que seus acréscimos relativos dependem apenas do incremento considerado, isto é,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} \quad \text{depende apenas de } h,$$

então g é necessariamente uma função do tipo exponencial, podendo ser escrita na forma

$$g(x) = b \cdot a^x,$$

com $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$.

Equivalentemente, essa caracterização pode ser expressa pela constância da razão entre valores sucessivos da função, no sentido de que, para incrementos iguais da variável independente,

$$\frac{g(x+h)}{g(x)}$$

permanece constante. Essa equivalência reforça o papel da variação discreta como critério conceitual para a identificação de modelos exponenciais em problemas de modelagem matemática.

6.1. Retomada do Problema 3: Modelo exponencial em contexto financeiro

A aplicação dos resultados estabelecidos no Teorema 3 permite fundamentar a análise do Problema 3, que investiga a dinâmica de um investimento em CDB remunerado a 100% da taxa CDI.

O valor da aplicação é atualizado periodicamente, incorporando os rendimentos ao montante acumulado. Isso significa que o rendimento de cada período incide não apenas sobre o capital inicialmente aplicado, mas também sobre os rendimentos já incorporados nos períodos anteriores.

Denotando por $V(t)$ o valor da aplicação após t meses, a observação direta dos dados revela que os acréscimos absolutos não são constantes. À medida que o capital acumulado cresce, os rendimentos incorporados tornam-se progressivamente maiores, o que descaracteriza o fenômeno como um processo de crescimento aditivo e, conseqüentemente, afasta a adoção de modelos afins.

Do ponto de vista da modelagem, esse comportamento indica que a estrutura de crescimento não reside na magnitude dos incrementos, mas sim na sua proporção em relação ao valor atual. Dessa forma, observa-se que os acréscimos relativos do investimento permanecem constantes ao longo do tempo. Em particular, para incrementos unitários ($h = 1$), a constância da taxa de juros i_m é expressa pela relação

$$\frac{V(t + 1) - V(t)}{V(t)} = i_m.$$

Essa igualdade, prevista no Teorema 3, revela que a variação da função é sempre proporcional ao seu estado atual. A partir dessa caracterização, é possível deduzir a relação multiplicativa entre valores sucessivos

$$V(t + 1) = (1 + i_m)V(t), \quad t \geq 0,$$

o que confirma, conforme o referido teorema, que a evolução do capital constitui uma progressão geométrica, sendo, portanto, adequadamente modelada por uma função do tipo exponencial, o que responde o item 1 do problema.

Seja $i_m > 0$ a taxa mensal efetiva associada ao CDI. Essa relação anterior expressa que, a cada período, o valor da aplicação é obtido multiplicando-se o montante do período anterior por um fator constante $(1 + i_m)$. Aplicando essa relação sucessivamente a partir do capital inicial $V(0)$, obtém-se

$$V(1) = (1 + i_m)V(0),$$

$$V(2) = (1 + i_m)V(1) = (1 + i_m)^2V(0),$$

e, por indução matemática, estabelece-se o modelo funcional

$$V(t) = V(0) (1 + i_m)^t.$$

Uma consequência estrutural desse modelo, e que responde o item 2 do problema, é a determinação do tempo necessário para que o capital inicialmente aplicado seja duplicado. Para isso, impõe-se a condição $V(t) = 2V(0)$, o que resulta na equação

$$(1 + i_m)^t = 2.$$

Ao aplicarmos o logaritmo em ambos os membros, obtemos

$$t \cdot \log(1 + i_m) = \log 2 \implies t = \frac{\log 2}{\log(1 + i_m)}.$$

Para responder o item 3 do problema, é fundamental observar que o tempo de duplicação depende exclusivamente da taxa de rendimento (i_m), sendo totalmente independente do valor inicial $V(0)$ investido. Esse fato decorre da natureza multiplicativa do modelo exponencial: a cada intervalo fixo de tempo, o capital cresce por um fator constante, independentemente de sua magnitude atual.

Para ilustrar essa dinâmica em um cenário real, consideremos uma taxa anual associada ao CDI de aproximadamente 14,9%. Sob a hipótese de capitalização mensal, o fator de crescimento anual $(1 + i_m)^{12} = 1,149$ permite estimar o tempo de duplicação como

$$t \approx 12 \frac{\log 2}{\log(1,149)} \approx 60 \text{ meses.}$$

Portanto, nessas condições, o capital investido dobra de valor em cerca de cinco anos. Esse exemplo evidencia como a análise dos acréscimos relativos permite não apenas identificar a função exponencial como o modelo adequado, mas também extrair previsões sobre o comportamento do capital no tempo.

6.2. Retomada do Problema 4: Modelo exponencial em contexto biológico

Para responder o item 1, que indaga sobre o tipo de comportamento compatível com a evolução da população de *Salmonella* ao longo do tempo, devemos analisar a variação dos dados observados. Diferente dos modelos de crescimento aditivo (em que um aumento constante no domínio implica uma soma constante na imagem) o fenômeno observado apresenta um comportamento no qual o acréscimo populacional é proporcional ao tamanho da colônia. Ao organizarmos os dados experimentais coletados em intervalos de $h = 0,5$ horas, obtemos a Tabela 4:

Tabela 4: Análise das variações e razão de crescimento da *Salmonella*.

Tempo (t)	População (N(t))	Acréscimo (ΔN)	Razão ($N(t+h)/N(t)$)
0,0	100	–	–
0,5	200	100	2
1,0	400	200	2
1,5	800	400	2
2,0	1600	800	2

A análise da terceira coluna revela que o acréscimo absoluto (ΔN) dobra a cada intervalo, o que descarta modelos afins ou quadráticos. Por outro lado, a quarta coluna demonstra que a razão entre termos sucessivos é constante e igual a 2. Essa regularidade multiplicativa é a característica distintiva dos modelos exponenciais, conforme estabelecido pelo Teorema 3.

Com a estrutura confirmada, respondendo ao item 2 do problema, podemos deduzir o modelo funcional $N(t) = b \cdot a^t$. A relação fundamental para o incremento $h = 0,5$ é dada por

$$\frac{N(t+0,5)}{N(t)} = a^{0,5} = 2.$$

Para determinar a base a , elevamos ambos os membros ao quadrado

$$(a^{0,5})^2 = 2^2 \Rightarrow a = 4.$$

Considerando que a população inicial no instante $t = 0$ é $N(0) = 100$, temos $b = 100$. Assim, o modelo matemático que descreve o crescimento é

$$N(t) = 100 \cdot 4^t.$$

Esse modelo permite, por exemplo, estimar a população em qualquer instante t . Para o item 3 do problema, que solicita a população após 5 horas, temos

$$N(5) = 100 \cdot 4^5 = 100 \cdot 1024 = 102.400 \text{ bactérias.}$$

Já para determinar o instante em que a população atinge 51.200 indivíduos, resolvemos a equação

$$100 \cdot 4^t = 51.200 \Rightarrow 4^t = 512 \Rightarrow 2^{2t} = 2^9 \Rightarrow t = 4,5 \text{ horas.}$$

O exemplo revela como a identificação de variações relativas constantes conduz naturalmente à adoção do modelo exponencial em problemas de modelagem matemática no contexto biológico.

7. Considerações finais

Este artigo discutiu uma abordagem conceitual para a identificação e aplicação de modelos afins, quadráticos e exponenciais, tomando como premissa a análise da variação discreta sob incrementos constantes da variável independente. Tal perspectiva permitiu descrever essas funções a partir de suas propriedades estruturais intrínsecas, prescindindo de ferramentas do cálculo diferencial.

Demonstrou-se que a constância da variação de primeira ordem caracteriza as funções afins, ao passo que a dependência linear dessa variação identifica o comportamento quadrático, cuja segunda diferença é constante. No que tange aos modelos exponenciais, a marca fundamental estabelecida foi a constância da variação relativa, que reflete a proporcionalidade entre o acréscimo da função e o seu valor atual. Como corolário, evidenciou-se que o mapeamento desses modelos em pontos equiespaçados do domínio origina sequências com estruturas típicas: progressões aritméticas (no caso afim), progressões aritméticas de segunda ordem (no caso quadrático) e progressões geométricas (no caso exponencial). Sob essa ótica, tais progressões não são vistas como definições isoladas ou pontos de partida arbitrários, mas sim como manifestações discretas das propriedades estruturais que regem as funções subjacentes. Embora, na prática da modelagem, a investigação se inicie pela análise dessas sequências de dados, é a natureza funcional que justifica e valida a escolha do modelo adequado.

A partir desses fundamentos, examinaram-se cenários de modelagem em contextos métricos, cinemáticos, financeiros e biológicos. Em cada estudo de caso, a seleção do modelo adequado foi norteada pela regularidade detectada no comportamento dos dados. Esse processo reforça que a compreensão da natureza do fenômeno pode, e deve, preceder a explicitação da lei de formação algébrica, em estrita consonância com a práxis da modelagem matemática.

Cabe ressaltar que, em situações reais, os fenômenos raramente seguem, em toda a sua extensão, um comportamento perfeitamente descrito por padrões matemáticos ideais. Frequentemente, a regularidade detectada restringe-se a intervalos específicos do domínio ou a condições controladas de observação. Assim, os modelos aqui explorados devem ser compreendidos como representações conceituais que capturam a essência da dinâmica em estudo, e não como descrições exatas da realidade em sua totalidade. Essa visão reitera o papel da modelagem como um processo interpretativo, no qual a validade da escolha do modelo está intrinsecamente vinculada ao contexto, à amostragem disponível e aos objetivos analíticos.

Sob o prisma educacional, a metodologia apresentada aponta para desdobramentos significativos no ensino de funções, pois prioriza a sua compreensão conceitual em detrimento da mera manipulação de expressões algébricas. Essas implicações, bem como suas potencialidades no contexto da modelagem matemática escolar, são exploradas de forma mais detalhada na seção seguinte.

8. Implicações didáticas da abordagem proposta

A estratégia desenvolvida neste artigo oferece subsídios relevantes para a transposição didática do conceito de função na Educação Básica e em cursos de licenciatura. Ao eleger a variação discreta como critério de diferenciação, o processo de ensino desloca-se da memorização de fórmulas em direção à percepção das propriedades estruturais que definem cada classe funcional.

Em muitos livros didáticos e práticas de sala de aula, os problemas são apresentados com o modelo algébrico previamente definido, restringindo a atividade do estudante à substituição de valores e execução de algoritmos. Embora tais tarefas desenvolvam competências operacionais, elas costumam obscurecer a lógica subjacente à escolha de uma função para descrever um fenômeno. A inversão proposta neste trabalho sugere que o reconhecimento do modelo seja uma consequência direta do comportamento dos dados observados, e não um pressuposto arbitrário.

A manipulação de diferenças e razões sucessivas em intervalos regulares funciona como um instrumento de leitura e interpretação, acessível antes mesmo do contato com o cálculo diferencial. Ao examinar se as variações seguem padrões aditivos ou multiplicativos, o aluno é instigado a identificar a natureza da progressão (aritmética, de segunda ordem ou geométrica) como um sintoma da função que rege o sistema. Essa dinâmica integra campos do currículo frequentemente fragmentados, unificando o estudo de seqüências e funções sob um mesmo arcabouço teórico.

A articulação entre as propriedades funcionais discutidas e as estruturas sequenciais correspondentes pode ser visualizada na Tabela 5, que consolida o eixo central da proposta didática apresentada.

Tabela 5: Síntese da caracterização por variação discreta

Modelo Funcional	Critério de Variação Discreta	Seqüência Gerada
Afim	Variação de 1ª ordem (Δf) constante	PA
Quadrática	Variação de 2ª ordem ($\Delta^2 f$) constante	PA de 2ª Ordem
Exponencial	Razão entre valores sucessivos constante	PG

Sob o aspecto metodológico, essa orientação incentiva a elaboração de atividades de cunho investigativo. Nelas, a ausência de uma lei de formação imediata exige que o estudante formule conjecturas e justifique sua tomada de decisão com base na regularidade das amostras e do comportamento do fenômeno em estudo. Esse exercício fomenta o pensamento crítico, pois exige a validação do modelo frente às evidências da tabela, do gráfico ou observações qualitativas.

Ademais, ao enfatizar que tais padrões descrevem a realidade apenas sob hipóteses simplificadoras ou em domínios restritos, a prática docente evita a idealização excessiva da Matemática. O estudante passa a compreender o modelo como uma ferramenta aproximativa, desenvolvendo uma postura reflexiva sobre as limitações das descrições matemáticas frente à complexidade dos fenômenos reais.

Em síntese, a utilização da variação discreta como eixo conceitual para a caracterização e aplicação das funções constitui uma alternativa didaticamente consistente, conceitualmente sólida e alinhada

às diretrizes da modelagem matemática no ensino. Tal perspectiva pode enriquecer tanto a prática docente quanto a formação de professores, ao promover uma aprendizagem mais significativa, integrada e fundamentada das funções afins, quadráticas e do tipo exponencial.

Referências

- [1] BASSANEZI, Rodiney Carlos. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Editora Contexto, 2002.
- [2] BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 4ª edição. Editora Contexto, 2007.
- [3] BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <<http://www.planalto.gov.br>>. Acesso em: 14 de dezembro de 2025.
- [4] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 31 janeiro de 2026.
- [5] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Funções e Modelagem*. PAPMEM, Janeiro, 2022. Disponível em: <<https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/PAPMEM-janeiro-2022-Paulo-Cezar.pdf>>. Acesso em: 28 de janeiro de 2026.
- [6] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Por que e como ensinar História da Matemática*. REMATEC, Natal (RN), ano 8, n. 12, p. 7-21, jan./jun. 2013. Disponível em: <<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/355>>. Acesso em: 4 de março de 2026.
- [7] DANTE, Luiz Roberto. *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2011.
- [8] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 3ª edição. São Paulo: Ática, 2016.
- [9] FILHO, Edgard de A. *Elementos de Álgebra Abstrata*. 4ª edição. Editora Nobel - 1990;
- [10] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [11] LIMA, Elon Lages et al. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- [12] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. 8ª edição. SBM Rio de Janeiro, 2005;
- [13] LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. 2ª edição. SBM Rio de Janeiro, 2023;
- [14] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [15] SALVADOR, José Antônio; ARENALES, Selma. *Modelagem Matemática Ambiental*. São Carlos: EdUFSCar, 2021.

Elves Rodrigues Pantoja
Universidade Federal do Amapá
<elversrp@hotmail.com>

Guzmán E. Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá
<isla@unifap.br>

Recebido: 29/01/2026
Publicado: 12/06/2026