



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA**  
**PROFMAT**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**FRANCISCO IVANILDO CAVALCANTE SOUSA**

**TRIGONOMETRIA EM MOVIMENTO:**  
**explorando animações no geogebra com comandos em português**

**REDENÇÃO – CEARÁ**  
**2026**

**FRANCISCO IVANILDO CAVALCANTE SOUSA**

**TRIGONOMETRIA EM MOVIMENTO:  
explorando animações no geogebra com comandos em português**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino da Matemática

Orientador: Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Sousa, Francisco Ivanildo Cavalcante.

S725t

Trigonometria em movimento: explorando animações no geogebra com comandos em português / Francisco Ivanildo Cavalcante Sousa. - Redenção, 2026.  
97f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2026.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório.

1. GeoGebra (software educacional). 2. Trigonometria. 3. Ensino de Matemática. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 510.285


---

**FRANCISCO IVANILDO CAVALCANTE SOUSA****TRIGONOMETRIA EM MOVIMENTO: explorando animações no geogebra com comandos em português**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, UNILAB - Campus Auroras.


Data de aprovação: 29/05/2026

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
 **WESLEY MARINHO LOZORIO**  
Data: 22/06/2026 15:40:57-0300  
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>


**Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório (Orientador)**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Documento assinado digitalmente  
 **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES**  
Data: 22/06/2026 16:50:26-0300  
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

**Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Documento assinado digitalmente  
 **DAVID CARNEIRO DE SOUZA**  
Data: 23/06/2026 16:51:30-0300  
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

**Prof. Dr. David Carneiro de Souza**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

*Este trabalho é dedicado aos meus filhos amados: Inaiza Lane, Davi Lucas, Marcos Kayrell, Ivina Laila e Yahuseph Yisrael.*

**Inaiza Lane**, minha filha mais velha, hoje com 22 anos. Foi por você que dei o primeiro passo e decidi voltar a estudar. Você foi o começo dessa caminhada e sempre será motivo do meu orgulho.

**Davi Lucas**, com seus 13 anos e sua curiosidade pela matemática, sempre perguntando como estão meus estudos. Seu interesse e suas perguntas me lembram todos os dias da importância de continuar aprendendo.

**Marcos Kayrell**, 12 anos, que assim como eu ama olhar para as estrelas. Que você nunca deixe de sonhar alto, tão alto quanto o céu que tanto admiramos.

**Ivina Laila**, 9 anos, meu xodózinho do coração, que enche minha vida de carinho, alegria e ternura.

E **Yahuseph Yisrael**, meu pequeno de 7 anos, por quem lutarei até o fim da minha vida, com todo amor, força e dedicação que um pai pode ter.

A vocês, meus filhos, dedico cada esforço, cada conquista e cada passo dessa caminhada. Vocês são minha maior motivação e o maior amor da minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Ao concluir este ciclo, expresso minha profunda gratidão àqueles que caminharam ao meu lado, tornando o desafio do mestrado uma jornada possível e compartilhada.

Agradeço imensamente ao meu orientador, **Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório**, pela paciência, orientação segura e por acreditar no desenvolvimento deste trabalho. Estendo esse agradecimento aos **professores do PROFMAT**, pela prontidão em sanar dúvidas e pelo conhecimento compartilhado durante as aulas.

Um agradecimento especial à **Wânia Waldilene** — esposa, companheira e amiga, peça fundamental nesta conquista. Obrigado por me incentivar desde a seleção, quando me inscreveu no ENA, por cuidar de toda a parte burocrática e por me motivar a cumprir cada disciplina com dedicação. Sem o seu apoio inicial, este caminho não teria começado.

Aos meus companheiros de estrada nos trajetos entre Fortaleza e Redenção: **Carlos Higor**, pelas dicas valiosas nas vésperas de provas; **Manuel**, cujas conversas incansáveis tornaram as viagens à UNILAB muito mais leves; **João Belo**, pela prontidão em ajudar com tudo, desde anotações simples até o suporte com o conteúdo, sendo a pessoa mais prestativa que conheci; e, de forma muito especial, ao **Elídio**, amigo de trabalho e do mestrado, que sempre nos fazia rir, não poderia ter tido um colega melhor para formar comigo uma dupla de trabalho na faculdade.

Ao colega **Jonas**, pela generosidade em abrir sua residência para nossas horas de estudo.

A todos vocês, que contribuíram para a realização deste trabalho e para o meu crescimento durante o mestrado, deixo minha sincera gratidão.

*Renda-se, como eu me rendi.  
Mergulhe no que você não conhece como eu mergulhei.  
Não se preocupe em entender,  
viver ultrapassa qualquer entendimento.  
(Clarice Lispector)*

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta pedagógica para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra com comandos na versão em português. O objetivo principal é desenvolver construções dinâmicas que permitam a visualização interativa de conceitos trigonométricos fundamentais, incluindo radianos, arcos côngruos, primeira determinação positiva e linhas trigonométricas de seno e cosseno. A metodologia consiste na criação de animações via linha de comando, organizadas em três construções principais: (1) relação entre comprimento de segmento e arco de circunferência unitária; (2) visualização de arcos maiores que uma volta completa e sua redução à primeira determinação; (3) projeções ortogonais no ciclo trigonométrico para demonstração das linhas de seno e cosseno. O referencial teórico alinha as construções com as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente EM13MAT306, EM13MAT307 e EM13MAT308, além dos descritores do SAEB e SPAECE. A abordagem também incorpora a metodologia de resolução de problemas de Polya e teorias de aprendizagem como o Construcionismo de Papert e as Representações Semióticas de Duval. Os resultados esperados incluem a democratização do acesso ao GeoGebra através de comandos em português, redução da abstração dos conceitos trigonométricos e fornecimento de material de apoio técnico-pedagógico para docentes. Conclui-se que o uso de tecnologias digitais, quando fundamentado teoricamente e alinhado às diretrizes curriculares, pode contribuir significativamente para a qualidade do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira.

**Palavras-chave:** GeoGebra. Trigonometria. Ensino de Matemática. BNCC. Tecnologias Digitais. Comandos em Português.

## ABSTRACT

This paper presents a pedagogical proposal for teaching Trigonometry in High School, using the dynamic geometry software GeoGebra with commands in the Portuguese version. The main objective is to develop dynamic constructions that allow interactive visualization of fundamental trigonometric concepts, including radians, congruent arcs, first positive determination, and trigonometric lines of sine and cosine. The methodology consists of creating animations via command line, organized into three main constructions: (1) relationship between segment length and unit circumference arc; (2) visualization of arcs greater than one complete revolution and their reduction to the first determination; (3) orthogonal projections on the trigonometric cycle to demonstrate sine and cosine lines. The theoretical framework aligns the constructions with the skills of the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC), specifically EM13MAT306, EM13MAT307 and EM13MAT308, in addition to SAEB and SPAECE descriptors. The approach also incorporates Polya's problem-solving methodology and learning theories such as Papert's Constructionism and Duval's Semiotic Representations. Expected results include democratizing access to GeoGebra through Portuguese commands, reducing the abstraction of trigonometric concepts, and providing technical-pedagogical support material for teachers. It is concluded that the use of digital technologies, when theoretically grounded and aligned with curricular guidelines, can contribute significantly to the quality of Mathematics education in Brazilian Basic Education.

**Keywords:** GeoGebra. Trigonometry. Mathematics Education. BNCC. Digital Technologies. Portuguese Commands.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Identificação de Habilidades para o Ensino Médio. Adaptado de . . .	19
Figura 2 – Definição geométrica do radiano . . . . .	55
Figura 3 – Representação geométrica do processo de retificação de um arco . . . . .	55
Figura 4 – Construção: retificação de arcos . . . . .	60
Figura 5 – Arcos côngruos. . . . .	64
Figura 6 – Construção: PDP e arcos côngruos . . . . .	68
Figura 7 – Projeções ortogonais no ciclo trigonométrico . . . . .	72
Figura 8 – Representação geométrica do cosseno no ciclo unitário. . . . .	76
Figura 9 – Representação geométrica do seno no ciclo unitário. . . . .	77
Figura 10 – Representação geométrica da tangente no ciclo unitário. . . . .	81
Figura 11 – Construção: Tangente. . . . .	84
Figura 12 – Plotagem do gráfico . . . . .	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Competências Específicas de Matemática . . . . .	18
Tabela 2 – Mapeamento de Habilidades BNCC . . . . .	19
Tabela 3 – Mapeamento BNCC (Matemática e Computação) – Construções Geométricas . . . . .	21
Tabela 4 – Competências Gerais da Educação Básica . . . . .	21
Tabela 5 – Eixos Cognitivos do SAEB . . . . .	25
Tabela 6 – Temas de Matemática do SAEB (Ensino Médio) . . . . .	25
Tabela 7 – Tema I: Espaço e Forma . . . . .	25
Tabela 8 – Tema II: Grandezas e Medidas . . . . .	26
Tabela 9 – Tema III: Números e Operações / Álgebra e Funções . . . . .	26
Tabela 10 – Tema IV: Tratamento da Informação . . . . .	28
Tabela 11 – Descritores de Matemática do SAEB (Ensino Médio) . . . . .	28
Tabela 12 – Contribuições do GeoGebra para os Descritores do SAEB . . . . .	28
Tabela 13 – Tópicos de Matemática do SPAECE (Ensino Médio) . . . . .	29
Tabela 14 – Matriz de Referência SPAECE - 2ª Série Ensino Médio . . . . .	30
Tabela 15 – Matriz de Referência SPAECE - 3ª Série Ensino Médio . . . . .	31
Tabela 16 – Descritores de Trigonometria do SPAECE (Ensino Médio) . . . . .	32
Tabela 17 – As Quatro Etapas de Polya para Resolução de Problemas . . . . .	33
Tabela 18 – Uso do GeoGebra na Etapa 1 de Polya: Compreensão . . . . .	35
Tabela 19 – Uso do GeoGebra na Etapa 2 de Polya: Estabelecimento de um Plano	35
Tabela 20 – Uso do GeoGebra na Etapa 3 de Polya: Execução do Plano . . . . .	36
Tabela 21 – Uso do GeoGebra na Etapa 4 de Polya: Retrospecto (Verificação) .	36
Tabela 22 – Registros de Representação Semiótica no GeoGebra . . . . .	37
Tabela 23 – Principais Achados de Pesquisa sobre Tecnologia e Educação Mate- mática . . . . .	39
Tabela 24 – Boas Práticas para Integração de Tecnologias no Ensino . . . . .	39
Tabela 25 – Mapeamento Integrado: BNCC Matemática, BNCC Computação, Saeb e SPAECE . . . . .	95
Tabela 26 – Comandos do GeoGebra: Tradução e Funcionalidade . . . . .	96

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CE	Ceará
D	Descritor
EM	Ensino Médio
ICEN	Instituto de Ciências Exatas e da Natureza
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEDUC	Secretaria da Educação do Estado do Ceará
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
STEM	<i>Science, Technology, Engineering, and Mathematics</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UFC	Universidade Federal do Ceará
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade de Campinas
UNILAB	Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1	OBJETIVOS	14
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>17</b>
2.1	FUNDAMENTAÇÃO DA PROPOSTA	17
2.2	BNCC COMPUTACIONAL	23
2.3	SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (SAEB)	24
2.4	SISTEMA PERMANENTE DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO CEARÁ (SPAECE)	29
2.5	METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA	33
2.6	TEORIAS DE APRENDIZAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS	37
2.7	PESQUISAS SOBRE GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	38
2.8	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO REFERENCIAL	40
<b>3</b>	<b>GEOGEBRA VIA COMANDOS</b>	<b>41</b>
3.1	APRESENTAÇÃO DA FERRAMENTA	41
3.2	CRIAÇÃO E MANIPULAÇÃO DE PONTOS	41
3.3	CONFIGURAÇÃO DE OBJETOS	42
3.4	RETAS, SEGMENTOS E ÂNGULOS	44
3.5	CÍRCULOS E ARCOS	46
3.6	POLÍGONOS	47
3.7	MEDIDAS	48
3.8	CONTROLE DESLIZANTE (SLIDER)	49
3.9	TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	50
3.10	TEXTO DINÂMICO E LATEX	51
3.11	COMANDOS ALGÉBRICOS ÚTEIS	52
3.12	DICAS E CONSIDERAÇÕES	53
<b>4</b>	<b>COMPRIENTO DE CIRCUNFERÊNCIA</b>	<b>54</b>
4.1	PROPÓSITO E OBJETIVO DA CONSTRUÇÃO	54
4.2	CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA	56
4.3	EXPLORAÇÃO E VERIFICAÇÃO DA CONGRUÊNCIA	61
4.4	APLICAÇÕES DIDÁTICAS	62
<b>5</b>	<b>PRIMEIRA DETERMINAÇÃO POSITIVA</b>	<b>64</b>
5.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA GEOMÉTRICO	64
5.2	CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA	65

5.3	ANÁLISE DA CONGRUÊNCIA DE ARCOS . . . . .	68
5.4	SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA . . . . .	69
<b>6</b>	<b>O CICLO TRIGONOMÉTRICO . . . . .</b>	<b>71</b>
6.1	OBJETIVO PEDAGÓGICO DA CONSTRUÇÃO . . . . .	73
6.2	CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA . . . . .	73
6.3	ANÁLISE GEOMÉTRICA DAS FUNÇÕES . . . . .	77
6.4	SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA . . . . .	79
<b>7</b>	<b>A FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO . . . . .</b>	<b>80</b>
7.1	OBJETIVOS DA MODELAGEM DA TANGENTE . . . . .	80
7.2	CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA . . . . .	82
7.3	ANÁLISE GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO . . . . .	84
7.4	SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA . . . . .	85
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>90</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE A – GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS</b>	<b>93</b>
	<b>APÊNDICE B – MAPEAMENTO HABILIDADES/DESCRITORES .</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICE C – RESUMO DE COMANDOS . . . . .</b>	<b>96</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática na Educação Básica brasileira tem passado por significativas transformações nas últimas décadas, impulsionadas pelas diretrizes curriculares nacionais e pelo avanço das tecnologias digitais. Nesse contexto, a Trigonometria destaca-se como um conteúdo fundamental, presente no Ensino Médio, que estabelece conexões essenciais entre álgebra, geometria e funções. No entanto, historicamente, seu ensino tem sido marcado por dificuldades de aprendizagem, frequentemente associadas ao alto nível de abstração dos conceitos e à dependência de representações estáticas em livros didáticos.

A integração de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, surge como uma estratégia pedagógica promissora para superar essas barreiras. Ao permitir a visualização interativa de objetos matemáticos, o GeoGebra facilita a experimentação, a formulação de conjecturas e a compreensão intuitiva de relações trigonométricas complexas. Contudo, para que o uso dessa ferramenta seja efetivo em sala de aula, é necessário que os docentes dominem não apenas a interface gráfica, mas também os comandos via linha de entrada, o que possibilita a criação de construções mais precisas, replicáveis e automatizadas.

Este trabalho, intitulado *“Trigonometria em Movimento: explorando animações no GeoGebra com comandos em português”*, tem como objetivo principal desenvolver e apresentar uma sequência de construções dinâmicas focadas no ensino de trigonometria, utilizando exclusivamente comandos na versão em português do software. A proposta visa oferecer aos professores um material de apoio técnico e pedagógico, alinhado às competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e às matrizes de avaliação externas (SAEB e SPAECE).

A relevância desta pesquisa justifica-se pela necessidade de produzir recursos didáticos que articulem rigor matemático, acessibilidade tecnológica e fundamentação teórica sólida. Ao focar nos comandos em português, busca-se reduzir a barreira linguística que muitos educadores enfrentam ao utilizar documentações internacionais, democratizando o acesso às funcionalidades avançadas do software.

### 1.1 OBJETIVOS

**Objetivo Geral** Desenvolver construções dinâmicas no GeoGebra, via linha de comando, para o ensino de conceitos trigonométricos, fundamentadas em teorias de aprendizagem e documentos curriculares oficiais.

## Objetivos Específicos

- Mapear as habilidades de trigonometria previstas na BNCC, SAEB e SPAECE;
- Compilar um manual de comandos do GeoGebra em português e inglês;
- Construir animações que demonstrem visualmente o conceito de radiano e comprimento de arco;
- Elaborar modelos interativos para o estudo de arcos côngruos e primeira determinação positiva;
- Implementar a visualização das linhas trigonométricas (seno e cosseno) no ciclo trigonométrico;
- Validar as construções à luz da metodologia de resolução de problemas de Polya.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Para atingir os objetivos propostos, este trabalho está estruturado em oito capítulos. A organização segue uma lógica que parte da fundamentação teórica, passa pelo domínio técnico da ferramenta e culmina nas aplicações práticas em sala de aula.

O **Capítulo 1** apresenta esta introdução, seus objetivos e a organização do trabalho.

No **Capítulo 2**, apresenta-se o *Referencial Teórico*. Neste capítulo, discute-se o cenário do ensino de matemática com tecnologias digitais, detalhando o alinhamento das atividades com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente as habilidades EM13MAT306, EM13MAT307 e EM13MAT308. Adicionalmente, dada a ênfase na utilização de comandos de programação no software, estabelece-se uma conexão interdisciplinar com a BNCC de Computação, contemplando habilidades como EM13CO02 (abstração e implementação de algoritmos), EM13CO11 (criação e exploração de modelos computacionais de simulação) e EM13CO21 (comunicação de ideias complexas por meio de objetos digitais). Além disso, são analisados os descritores de trigonometria do SAEB e do SPAECE, estabelecendo conexões com as avaliações externas. A seção também aborda a metodologia de resolução de problemas de George Polya e teorias de aprendizagem relevantes, como o Construcionismo de Papert e a Teoria das Representações Semióticas de Duval.

O **Capítulo 3**, intitulado *GeoGebra via Comandos*, funciona como um manual técnico de referência. Nele, são catalogados os principais comandos do software necessários para as construções propostas, apresentados em tabelas comparativas com as sintaxes

em português e inglês. Este capítulo cobre desde a criação de pontos e retas até transformações geométricas, controles deslizantes e texto dinâmico, servindo como guia de consulta rápida para o educador.

No **Capítulo 4**, desenvolve-se a construção sobre *Comprimento de Circunferência e Radianos*. O foco é demonstrar visualmente a congruência entre o comprimento de um segmento de reta e o arco correspondente na circunferência unitária. Esta etapa é crucial para a compreensão do radiano não apenas como um número, mas como uma medida de comprimento real, facilitando a transição entre geometria e funções trigonométricas.

O **Capítulo 5** aborda o conceito de *Primeira Determinação Positiva*. Através de controles deslizantes que permitem ângulos maiores que uma volta completa, os estudantes podem visualizar a relação entre arcos côngruos e identificar geometricamente o representante principal no intervalo  $[0^\circ, 360^\circ)$ . Esta construção integra álgebra e geometria para solidificar a compreensão de periodicidade angular.

O **Capítulo 6** detalha a construção do *Ciclo Trigonométrico* e as linhas de seno e cosseno. Utilizando projeções ortogonais dinâmicas, demonstra-se que as funções trigonométricas correspondem às coordenadas de um ponto em movimento circular. Este capítulo permite analisar a variação de sinais e magnitudes dessas funções em todos os quatro quadrantes, fechando o ciclo de conceitos básicos da trigonometria no Ensino Médio.

A seguir, o **Capítulo 7** aborda a Função Tangente no Ciclo Trigonométrico. Nesta etapa, amplia-se a modelagem geométrica para além das projeções ortogonais, construindo a linha tangente a partir da interseção entre a reta suporte do raio móvel e a reta tangente à circunferência unitária no ponto  $A=(1,0)$ . A animação resultante permite ao estudante visualizar de forma intuitiva o crescimento ilimitado da função, a ocorrência de assíntotas verticais e a alternância de sinais nos quadrantes, complementando e integrando os conceitos de seno e cosseno previamente desenvolvidos.

Por fim, no **Capítulo 8** são apresentadas as considerações finais, sintetizando os resultados alcançados e sugerindo caminhos para pesquisas futuras na área de educação matemática e tecnologias digitais. Espera-se que este material contribua para qualificar a prática docente, tornando o ensino de trigonometria mais dinâmico, visual e significativo para os estudantes.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta o referencial teórico que fundamenta o uso do software GeoGebra no ensino de trigonometria na Educação Básica brasileira. A análise contempla as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), os critérios do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) e a metodologia de resolução de problemas de George Polya. O objetivo é estabelecer conexões entre a prática pedagógica com tecnologias digitais e as competências e habilidades previstas nos documentos oficiais de avaliação e currículo.

### 2.1 FUNDAMENTAÇÃO DA PROPOSTA

A integração de tecnologias digitais no ensino de Matemática tem sido amplamente discutida nas últimas décadas, especialmente no que concerne ao uso de softwares de geometria dinâmica como o GeoGebra (Borba, 2012). Na trigonometria, especificamente, essas ferramentas oferecem possibilidades únicas de visualização e experimentação que transcendem as abordagens tradicionais baseadas exclusivamente em representações estáticas.

Este referencial teórico busca fundamentar pedagogicamente as construções apresentadas neste trabalho, articulando-as com os documentos oficiais que orientam a educação matemática no Brasil e com teorias consolidadas de ensino e aprendizagem.

#### **Contextualização da BNCC**

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (Ministério da Educação, 2018). Para o componente curricular de Matemática no Ensino Médio, a BNCC estrutura o conhecimento em cinco unidades temáticas, sendo uma delas especificamente dedicada à trigonometria.

#### **Unidade Temática: Números e Operações / Álgebra e Funções**

No Ensino Médio, a trigonometria está inserida principalmente na unidade temática de Álgebra e Funções, com as seguintes competências específicas: 3, 4 e 5.

**Tabela 1 – Competências Específicas de Matemática**

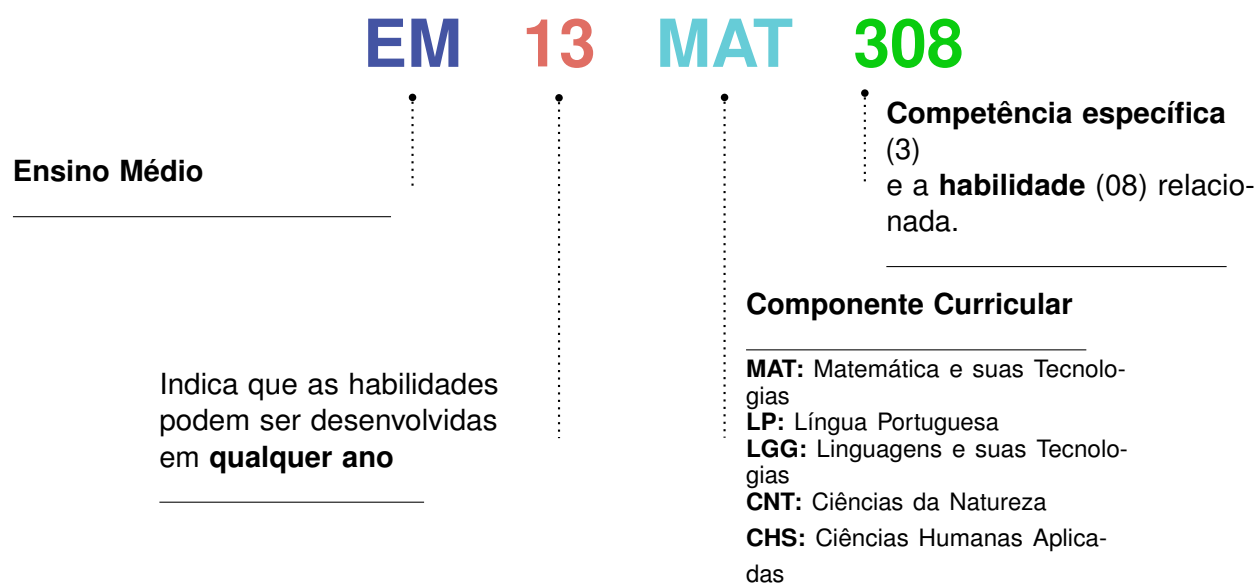
<b>Competência</b>	<b>Descrição</b>
<b>Competência 1</b>	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
<b>Competência 2</b>	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
<b>Competência 3</b>	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
<b>Competência 4</b>	Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
<b>Competência 5</b>	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (Ministério da Educação, 2018).

## A Estrutura da BNCC no Ensino Médio

O planejamento das atividades no GeoGebra baseia-se especialmente na habilidade **EM13MAT308**. Para melhor compreensão da fundamentação normativa, o diagrama abaixo detalha a estrutura alfanumérica desta habilidade, seguindo o padrão estabelecido para o Ensino Médio, com layout adaptado para clareza visual.

**Figura 1** – Identificação de Habilidades para o Ensino Médio. Adaptado de



Fonte: (Ministério da Educação, 2018)

## Habilidades de Trigonometria na BNCC

**Tabela 2** – Mapeamento de Habilidades BNCC

<b>Código</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
EM13MAT302	Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
EM13MAT306	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT308	Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

<b>Código</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
EM13MAT315	Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT404	Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT406	Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
EM13MAT505	Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

Fonte: [\(Ministério da Educação, 2018\)](#).

Para Matemática no Ensino Médio, as principais habilidades relacionadas à trigonometria são:

EM13MAT306

EM13MAT307

EM13MAT308

EM13MAT404

## Conexão com as Construções GeoGebra

As construções apresentadas neste trabalho atendem diretamente às habilidades da BNCC:

**Tabela 3** – Mapeamento BNCC (Matemática e Computação) – Construções Geométricas

<b>Construção no GeoGebra</b>	<b>BNCC Matemática</b>	<b>BNCC Computação</b>
Ciclo Trigonométrico com Linhas de Seno e Cosseno	EM13MAT404 – Gráficos e ciclo trigonométrico	EM13CO11 – Modelos computacionais de simulação
Primeira Determinação Positiva	EM13MAT404 – Representação no ciclo	EM13CO02 – Abstração e implementação de algoritmos
Relação Segmento-Arco (Radianos)	EM13MAT306 – Fenômenos periódicos	EM13CO11 – Simulação de fenômenos científicos
Funções Trigonômétricas Dinâmicas	EM13MAT306 e EM13MAT406	EM13CO02 e EM13CO21 – Objetos digitais e algoritmos
Exploração com Controles Deslizantes e Comandos	EM13MAT406 – Tecnologias digitais	EM13CO18 – Projetos integrados com artefatos computacionais

Fonte: Adaptado pelo autor (2026).

**Competências Gerais da BNCC** O desenvolvimento deste trabalho, pautado na utilização do software GeoGebra, alinha-se às competências gerais da Educação Básica propostas pela BNCC, apresentadas na Tabela 4.

**Tabela 4** – Competências Gerais da Educação Básica

<b>Competência</b>	<b>Descrição</b>
<b>1</b>	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Continua na próxima página...

Tabela 4 – Continuação

Competência	Descrição
2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

Continua na próxima página...

Tabela 4 – Continuação

Competência	Descrição
9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: (Ministério da Educação, 2018)

Para fins deste trabalho, as competências que fundamentam as atividades propostas são as de número **2, 4, 5 e 6**, visto que envolvem diretamente a investigação científica, o uso de linguagens tecnológicas e o protagonismo digital do estudante.

## 2.2 BNCC COMPUTACIONAL

### A Interseção com a BNCC de Computação

Além das competências da área de Matemática e suas Tecnologias, a proposta de utilizar o GeoGebra via linha de comando estabelece uma conexão direta e interdisciplinar com a **BNCC de Computação** para o Ensino Médio. Ao instruir o software através de sintaxes e comandos (como Girar, Intersecção, ControleDeslizante), o estudante não está apenas operando um software de desenho, mas engajando-se ativamente no desenvolvimento do **Pensamento Computacional**.

Especificamente, as construções dinâmicas desenvolvidas neste trabalho atendem a habilidades fundamentais da Computação, tais como:

- **(EM13CO02):** *Explorar e construir a solução de problemas por meio de refinamentos, utilizando diversos níveis de abstração desde a especificação até a implementação.* A tradução de conceitos geométricos para a barra de entrada exige do estudante a decomposição do problema e a implementação de algoritmos sequenciais passo a passo.
- **(EM13CO11):** *Criar e explorar modelos computacionais simples para simular e fazer previsões, identificando sua importância no desenvolvimento científico.* As

animações do ciclo trigonométrico, da relação segmento-arco e da reta tangente atuam como modelos de simulação de fenômenos periódicos e assintóticos.

- **(EM13CO18):** *Planejar e gerenciar projetos integrados às áreas de conhecimento de forma colaborativa, solucionando problemas, usando diversos artefatos computacionais.* O trabalho integra a Matemática e a Computação, utilizando o GeoGebra como artefato computacional para resolver problemas de ensino e aprendizagem.
- **(EM13CO21):** *Comunicar ideias complexas de forma clara por meio de objetos digitais como mapas conceituais, infográficos, hipertextos e outros.* Os *applets* gerados atuam como objetos digitais que traduzem a complexidade abstrata da trigonometria em uma linguagem visual, algébrica e interativa.

Dessa forma, valida-se o uso da tecnologia não apenas como ilustração estática, mas como uma linguagem de programação aplicada ao raciocínio matemático, promovendo uma abordagem integrada (STEM) que prepara o estudante para os desafios do mundo digital.

### 2.3 SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (SAEB)

**Contextualização do SAEB** As avaliações em larga escala também evidenciam a importância da trigonometria no currículo escolar. No Brasil, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) busca avaliar competências relacionadas à interpretação de gráficos, resolução de problemas geométricos e análise de relações entre grandezas (BRASIL. INEP, 2020).

Entre as habilidades avaliadas encontram-se aquelas relacionadas à interpretação de gráficos, resolução de problemas envolvendo medidas e análise de relações geométricas. Essas competências são essenciais para a compreensão de conceitos trigonométricos e sua aplicação em diferentes contextos.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala que permitem ao Ministério da Educação (MEC) realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de alguns fatores que podem influenciar o desempenho do estudante (BRASIL. INEP, 2021).

#### **Matriz de Referência de Matemática**

A Matriz de Referência do SAEB para Matemática no Ensino Médio organiza-se em dois eixos cognitivos e quatro temas:

**Tabela 5 – Eixos Cognitivos do SAEB**

<b>Eixo</b>	<b>Descrição</b>
<b>Eixo I</b>	Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
<b>Eixo II</b>	Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Fonte: Adaptado pelo autor (2026).

**Tabela 6 – Temas de Matemática do SAEB (Ensino Médio)**

<b>Identificador</b>	<b>Descrição do Tema</b>
<b>Tema I</b>	Números e Operações
<b>Tema II</b>	Funções
<b>Tema III</b>	Geometria
<b>Tema IV</b>	Tratamento da Informação

Fonte: (BRASIL. INEP, 2020)

### **Matriz de Referência do Saeb e Foco em Trigonometria**

A Matriz de Referência de Matemática do Saeb para a 3ª série do Ensino Médio é organizada em quatro temas fundamentais. A seguir, apresentam-se os descritores que compõem cada um desses eixos:

**Tabela 7 – Tema I: Espaço e Forma**

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D1	Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
D2	Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
D3	Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
D4	Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
D5	Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
D6	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D7	Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
D8	Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
D9	Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
D10	Reconhecer, entre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

**Tabela 8** – Tema II: Grandezas e Medidas

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D11	Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
D12	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D13	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Fonte: (BRASIL. INEP, 2021)

**Tabela 9** – Tema III: Números e Operações / Álgebra e Funções

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D14	Identificar a localização de números reais na reta numérica.
D15	Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
D16	Resolver problema que envolva porcentagem.
D17	Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
D18	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
D19	Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.
D20	Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

**Tabela 9 – Continuação**

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D21	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
D22	Resolver problema envolvendo P.A./P.G., dada a fórmula do termo geral.
D23	Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.
D24	Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau, dado o seu gráfico.
D25	Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.
D26	Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.
D27	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
D28	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
D29	Resolver problema que envolva função exponencial.
D30	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.
D31	Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.
D32	Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.
D33	Calcular a probabilidade de um evento.

Continua na próxima página...

**Tabela 10** – Tema IV: Tratamento da Informação

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D34	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
D35	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Fonte:(BRASIL. INEP, 2021)

Dentre os descritores apresentados na matriz geral, foram selecionados para este trabalho aqueles que fundamentam o ensino de Trigonometria, conforme detalhado na Tabela 11:

**Tabela 11** – Descritores de Matemática do SAEB (Ensino Médio)

<b>Descritor</b>	<b>Definição</b>
D5	Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
D30	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.
D2	Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

Fonte:(BRASIL. INEP, 2021)

### **Contribuição do GeoGebra para os Descritores**

O uso do GeoGebra em sala de aula contribui diretamente para o desenvolvimento das habilidades avaliadas pelos descritores:

**Tabela 12** – Contribuições do GeoGebra para os Descritores do SAEB

<b>Descritor</b>	<b>Contribuição do GeoGebra</b>
<b>D5</b>	Visualização dinâmica das razões trigonométricas no triângulo retângulo, permitindo a manipulação dos ângulos e a observação imediata das variações de seno, cosseno e tangente.
<b>D30</b>	Construção e exploração dos gráficos das funções trigonométricas com uso de controles deslizantes para alterar parâmetros como amplitude, período e deslocamento.

---

**Descritor Contribuição do GeoGebra**


---

<b>D2</b>	Reconhecimento de aplicações das relações métricas em problemas complexos, utilizando a representação interativa do ciclo trigonométrico e linhas de seno/cosseno vinculadas ao movimento.
-----------	--

---

Fonte: Elaborado pelo autor (2026), com base nas matrizes do INEP (2021).

## 2.4 SISTEMA PERMANENTE DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO CEARÁ (SPAECE)

### Contextualização do SPAECE

O SPAECE é o sistema de avaliação educacional do estado do Ceará, criado em 1992, que avalia a qualidade do ensino nas redes públicas estadual e municipais.

O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) também avalia competências matemáticas relacionadas à geometria e às relações trigonométricas. Essas avaliações priorizam a capacidade de interpretação, argumentação e resolução de problemas, aspectos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático (SEDUC, 2022).

Nesse contexto, o ensino de trigonometria deve contribuir para o desenvolvimento de habilidades como a interpretação de representações gráficas, a resolução de problemas envolvendo medidas e a análise de relações entre grandezas.

**Matriz de Referência SPAECE-EM Matemática** A matriz de referência do SPAECE-Alfa e SPAECE-EM segue estrutura similar ao SAEB, com adaptações para o contexto regional (SEDUC, 2020).

**Tabela 13** – Tópicos de Matemática do SPAECE (Ensino Médio)

<b>Tópico</b>	<b>Descrição</b>
<b>Espaço e Forma</b>	Relações geométricas entre figuras planas e espaciais.
<b>Grandezas e Medidas</b>	Compreensão e uso de sistemas de medida.
<b>Números e Operações</b>	Diversos significados dos números e operações.
<b>Tratamento da Informação</b>	Leitura e interpretação de dados.
<b>Funções e Álgebra</b>	Relações entre grandezas e modelos algébricos.

---

Fonte: (SEDUC, 2025)

**Descritores do SPAECE aplicados à Trigonometria** A Matriz de Referência do Sis-

tema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) para o Ensino Médio define as competências e habilidades fundamentais que estruturam o processo avaliativo na rede estadual. Estas habilidades, articuladas aos eixos temáticos da Matemática, são representadas por descritores que orientam o planejamento docente e as intervenções pedagógicas (SEDUC, 2025; CAEd/UFJF, 2025). Nas tabelas a seguir, apresentam-se os descritores que compõem a matriz para o ciclo de 2025:

**Tabela 14** – Matriz de Referência SPAECE - 2ª Série Ensino Médio

<b>Descritor</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
D16	Estabelecer relações entre representações fracionárias e decimais dos números racionais.
D17_9EF	Resolver situação-problema utilizando porcentagem.
D18_9EF	Resolver situação-problema envolvendo a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
D19	Resolver problema envolvendo juros simples.
D24	Fatorar e simplificar expressões algébricas.
D26_9EF	Resolver situação-problema envolvendo equação do 2º grau.
D28	Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial de 1º grau.
D40	Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.
D42	Resolver situação-problema envolvendo o cálculo da probabilidade de um evento.
D49	Resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas.
D50	Resolver situação-problema aplicando o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.
D51	Resolver problemas usando as propriedades dos polígonos (soma de ângulos, diagonais).
D52	Identificar planificações de alguns poliedros e/ou corpos redondos.
D53	Resolver situação-problema envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
D57	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
D64 a D72	Problemas envolvendo volume, capacidade, perímetro e área de figuras planas e sólidos.

Continua na próxima página...

Tabela 14 – Continuação

<b>Descritor</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
D75_9EF	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas ou gráficos.
D76	Associar informações apresentadas em listas/tabelas aos gráficos e vice-versa.
D78	Resolver problemas envolvendo medidas de tendência central: média, moda ou mediana.
D04_SAEB	Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros.
D09_SAEB	Relacionar o ponto de interseção de retas com a resolução de um sistema de equações.
D14_SAEB	Identificar a localização de números reais na reta numérica.
D18_SAEB	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
D19_SAEB	Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.
D20_SAEB	Analisar crescimento/decrescimento e zeros de funções reais em gráficos.
D21_SAEB	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
D25_SAEB	Resolver problemas que envolvam pontos de máximo ou de mínimo em funções do 2º grau.

Fonte: Adaptado de [SEDUC \(2025\)](#).

Tabela 15 – Matriz de Referência SPAECE - 3ª Série Ensino Médio

<b>Descritor</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
D20	Resolver problema envolvendo juros compostos.
D54	Calcular a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices.
D55	Determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
D56	Reconhecer equações do 2º grau que representam circunferências.
D58	Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

<b>Descritor</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
D22_SAEB	Resolver problema envolvendo P.A./P.G., dada a fórmula do termo geral.
D27_SAEB	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
D28_SAEB	Identificar a função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da exponencial.
D29_SAEB	Resolver problema que envolva função exponencial.
D30_SAEB	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades.
D31_SAEB	Determinar a solução de um sistema linear, associando-o a uma matriz.
D32_SAEB	Resolver problema de contagem utilizando princípio multiplicativo, permutações, arranjos ou combinações.

Fonte: Adaptado de [SEDUC \(2025\)](#).

Embora a Matriz de Referência apresente um amplo espectro de habilidades, este trabalho delimita-se à análise e ao ensino da Trigonometria. A escolha por este tema justifica-se pela sua natureza geométrica e funcional, que permite uma exploração rica por meio da visualização dinâmica.

Dessa forma, foram selecionados os descritores do SPAECE que fundamentam a proposta didática desenvolvida com o auxílio do software GeoGebra. O foco da intervenção concentra-se tanto na resolução de problemas métricos no triângulo retângulo quanto na identificação e análise de propriedades de funções periódicas. A Tabela 16 detalha os descritores selecionados para esta pesquisa:

**Tabela 16** – Descritores de Trigonometria do SPAECE (Ensino Médio)

<b>Descritor</b>	<b>Descrição da Habilidade</b>
D50	Resolver situação-problema aplicando o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.
D53	Resolver situação-problema envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
D57	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

Descritor	Descrição da Habilidade
D30_SAEB	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026), com base em [SEDUC \(2025\)](#).

### Alinhamento GeoGebra-SPAECE

As construções deste trabalho podem ser utilizadas como estratégia de preparação para o SPAECE:

#### Observação 1 (Estratégias SPAECE com GeoGebra). • **Simulação de Questões:**

Criar construções que representem situações-problema similares às avaliadas no SPAECE.

- **Visualização de Conceitos:** Permitir que os alunos manipulem figuras para compreender relações trigonométricas antes de resolver questões abstratas.
- **Feedback Imediato:** O GeoGebra fornece retorno visual instantâneo, ajudando na correção de concepções errôneas.
- **Diferenciação Pedagógica:** Adaptar o nível de complexidade das construções conforme o desempenho da turma.

## 2.5 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

### George Polya e a Resolução de Problemas

George Polya (1887-1985) foi um matemático húngaro que desenvolveu uma metodologia influente para o ensino e aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. Sua obra "How to Solve It" (A Arte de Resolver Problemas), publicada em 1945, estabelece quatro etapas fundamentais ([Polya, 1945](#)):

**Tabela 17** – As Quatro Etapas de Polya para Resolução de Problemas

Etapa	Descrição e Ações do Estudante
<b>1. Compreensão</b>	Entender o que é dado, o que é procurado e quais são as condições e restrições do problema.
<b>2. Plano</b>	Conceber uma estratégia ou roteiro para conectar as informações conhecidas ao objetivo final.

Etapa	Descrição e Ações do Estudante
<b>3. Execução</b>	Implementar a estratégia escolhida, verificando cuidadosamente a correção de cada passo efetuado.
<b>4. Retrospecto</b>	Examinar a solução, verificar o resultado e o argumento, e considerar outros métodos ou aplicações.

Fonte: (Polya, 1945)

No ensino da trigonometria, essa abordagem permite que os estudantes desenvolvam estratégias para resolver problemas envolvendo medições indiretas, relações métricas em triângulos e interpretação de fenômenos periódicos.

### Articulação entre a Metodologia de Polya e as Construções no GeoGebra

A fundamentação pedagógica deste trabalho apoia-se na obra seminal de George Polya, *How to Solve It* (1945), que posiciona a resolução de problemas como o eixo central da aprendizagem matemática. Polya (1945) estrutura o processo investigativo em quatro etapas interdependentes: compreensão do problema, concepção de um plano, execução do plano e retrospecto. No contexto desta pesquisa, as construções dinâmicas no GeoGebra foram deliberadamente desenhadas para materializar cada uma dessas etapas, transformando o software de um recurso de visualização estática em um ambiente de mediação cognitiva e experimentação matemática.

Na **compreensão**, o estudante interage diretamente com os elementos iniciais (pontos fixos, circunferência unitária, controles deslizantes) para identificar dados, incógnitas e condições de contorno. Por exemplo, na construção do Capítulo 4, a manipulação do ponto  $M$  sobre o segmento  $AB$  permite que o aluno perceba visualmente que a abscissa  $x(M)$  representa simultaneamente um comprimento linear e uma medida angular em radianos. No **estabelecimento do plano**, a sintaxe dos comandos em português exige a tradução do raciocínio geométrico para uma sequência lógica de instruções, incentivando a antecipação do comportamento dos objetos antes da digitação. Comandos como  $P = \text{Girar}(A, a^\circ, 0)$  ou  $T = \text{Intersecção}(r, \text{eixoTan})$  demandam que o estudante formule hipóteses sobre a relação entre o parâmetro  $a$  e a posição final dos pontos.

A **execução** ocorre de forma imediata e iterativa. Ao validar o comando na Caixa de Entrada, o aluno observa em tempo real as consequências geométricas, ajustando parâmetros e corrigindo desvios conceituais com feedback visual instantâneo. Por fim, o **retrospecto** é potencializado pela natureza dinâmica do software: variando o

controle deslizante, o estudante generaliza padrões (como a periodicidade da função tangente ou a redução à primeira determinação), verifica invariantes métricos (ex.:  $\text{comp}(\overline{AM}) = \text{comp}(\widehat{AP})$ ) e articula os registros figural, algébrico e numérico, cumprindo plenamente o ciclo de validação proposto por Polya.

Dessa forma, a referência a Polya (1945) não constitui apenas um apanhado bibliográfico, mas o alicerce epistemológico que justifica a escolha do GeoGebra como ferramenta de investigação. As construções apresentadas não se limitam a ilustrar definições trigonométricas; elas operacionalizam um processo ativo de resolução de problemas, no qual a conjectura é testável, o erro é diagnosticável e a compreensão conceitual emerge da interação contínua entre ação, observação e reflexão. Esse alinhamento garante que as atividades propostas transcendam a dimensão técnica e se consolidem como estratégias investigativas alinhadas às competências gerais da BNCC e às demandas do ensino de Matemática no século XXI.

### Etapas de Polya

O GeoGebra pode ser integrado em cada uma das quatro etapas de Polya:

**Tabela 18** – Uso do GeoGebra na Etapa 1 de Polya: Compreensão

<b>Ação</b>	<b>Descrição no GeoGebra</b>
Visualização	Visualizar geometricamente o enunciado do problema.
Identificação	Identificar dados e incógnitas através de construções dinâmicas.
Exploração	Explorar casos particulares para compreender o comportamento geral.
Representação	Representar múltiplas interpretações do mesmo problema.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

**Tabela 19** – Uso do GeoGebra na Etapa 2 de Polya: Estabelecimento de um Plano

<b>Ação</b>	<b>Descrição no GeoGebra</b>
Testagem	Testar diferentes estratégias visualmente antes da execução algébrica.
Identificação	Identificar relações geométricas que sugerem caminhos de solução.
Conjectura	Formular conjecturas baseadas em explorações dinâmicas.
Sequenciamento	Planejar a sequência de construções necessárias para a resolução.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

**Tabela 20** – Uso do GeoGebra na Etapa 3 de Polya: Execução do Plano

<b>Ação</b>	<b>Descrição no GeoGebra</b>
Implementação	Implementar as construções geométricas e algébricas passo a passo.
Verificação	Verificar cálculos através de ferramentas de medição automática.
Validação	Validar passos intermediários com feedback visual imediato.
Documentação	Documentar o processo através da análise da janela de construção.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

**Tabela 21** – Uso do GeoGebra na Etapa 4 de Polya: Retrospecto (Verificação)

<b>Ação</b>	<b>Descrição no GeoGebra</b>
Multirrepresentação	Verificar a solução através de diferentes janelas (Álgebra e Geometria).
Variação	Explorar variações do problema modificando parâmetros via controles deslizantes.
Generalização	Generalizar resultados observando padrões e invariantes geométricos.
Conexão	Conectar o resultado com outros problemas e conceitos matemáticos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### Exemplo de Aplicação: Problema Trigonométrico

**Exemplo 1** (Problema com Metodologia Polya + GeoGebra). **Problema:** Um observador está a 50 metros de um edifício. O ângulo de elevação do topo do edifício é de  $30^\circ$ . Qual a altura do edifício?

1. **Compreensão:** Construir no GeoGebra o triângulo retângulo com base 50m e ângulo  $30^\circ$ .
2. **Plano:** Usar a relação  $\text{tg}(30^\circ) = \frac{\text{altura}}{50}$  para encontrar a altura.
3. **Execução:** Calcular altura =  $50 \times \text{tg}(30^\circ) \approx 28,87$  metros.
4. **Retrospecto:** Variar o ângulo no GeoGebra e observar como a altura muda. Verificar com outros ângulos conhecidos ( $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ).

## 2.6 TEORIAS DE APRENDIZAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS

### Construcionismo de Papert

Seymour Papert, discípulo de Piaget, desenvolveu o construcionismo, que postula que a aprendizagem é mais efetiva quando o aluno está engajado na construção de um produto tangível (Papert, 1980). O GeoGebra se alinha perfeitamente a esta teoria:

- Observação 2** (GeoGebra e Construcionismo).
- Alunos constroem objetos matemáticos ativos
  - O produto (construção) é testável e modificável
  - Erros são visíveis e corrigíveis imediatamente
  - A construção pode ser compartilhada e refinada

### Teoria da Atividade de Vygotsky

A teoria sociocultural de Vygotsky enfatiza o papel da mediação e da interação social na aprendizagem (Vygotsky, 1978). O GeoGebra funciona como:

- Observação 3** (GeoGebra como Ferramenta de Mediação).
- **Instrumento psicológico:** Amplia capacidades cognitivas do aluno
  - **ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal):** Permite realizar tarefas além do nível atual com suporte
  - **Mediação semiótica:** Conecta representações verbais, algébricas e visuais
  - **Interação social:** Facilita colaboração em projetos matemáticos

### Representações Semióticas de Duval

Raymond Duval argumenta que a compreensão em Matemática requer coordenação entre diferentes registros de representação semiótica (Duval, 2003):

**Tabela 22** – Registros de Representação Semiótica no GeoGebra

Registro	Exemplo e Aplicação no Software
<b>Figural</b>	Construção de pontos, retas, círculos e polígonos na Janela de Visualização.

---

<b>Registro</b>	<b>Exemplo e Aplicação no Software</b>
<b>Algébrico</b>	Exibição de equações, funções e coordenadas na Janela de Álgebra.
<b>Numérico</b>	Valores de medidas (comprimento, área, ângulo) e cálculos em planilhas.
<b>Gráfico</b>	Representação dinâmica de funções trigonométricas no plano cartesiano.
<b>Verbal</b>	Inserção de textos dinâmicos, rótulos e explicações na interface.

---

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

O GeoGebra permite **conversão** e **tratamento** entre registros simultaneamente, facilitando a compreensão conceitual.

## 2.7 PESQUISAS SOBRE GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

### Tecnologias digitais no ensino de Matemática

O uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática tem sido cada vez mais incentivado pelas diretrizes educacionais contemporâneas. A BNCC destaca a importância de utilizar recursos tecnológicos para explorar conceitos matemáticos, realizar investigações e desenvolver o pensamento crítico ([Ministério da Educação, 2018](#)).

Nesse contexto, softwares educacionais tornam-se ferramentas importantes para apoiar o processo de ensino e aprendizagem, permitindo que os estudantes visualizem conceitos matemáticos de forma dinâmica e interativa.

### O GeoGebra no ensino de trigonometria

Entre as ferramentas tecnológicas utilizadas no ensino de Matemática, destaca-se o GeoGebra, um software livre que integra geometria, álgebra e cálculo em um ambiente dinâmico. Desenvolvido por Markus Hohenwarter, o GeoGebra permite a construção e manipulação de objetos matemáticos de forma interativa ([Hohenwarter; Jones, 2007](#)).

No ensino de trigonometria, o GeoGebra possibilita:

- a construção do ciclo trigonométrico;
- a visualização dinâmica das razões trigonométricas;

- a relação entre o movimento no ciclo trigonométrico e os gráficos das funções seno e cosseno;
- a exploração de fenômenos periódicos.

Essas possibilidades favorecem a aprendizagem significativa, pois permitem que os estudantes observem relações matemáticas em tempo real e construam seu próprio entendimento dos conceitos.

Além disso, o uso do GeoGebra pode contribuir para a implementação de metodologias investigativas em sala de aula, estimulando a formulação de conjecturas, a análise de padrões e a validação de resultados. Dessa forma, a tecnologia atua como mediadora no processo de aprendizagem, ampliando as possibilidades pedagógicas no ensino da trigonometria.

### Evidências de Efetividade

Diversas pesquisas têm demonstrado os benefícios do uso do GeoGebra no ensino de Matemática:

**Tabela 23** – Principais Achados de Pesquisa sobre Tecnologia e Educação Matemática

<b>Autor(es)</b>	<b>Principais Achados e Contribuições</b>
Zbiek et al. (2007)	Tecnologias de geometria dinâmica melhoram significativamente a compreensão conceitual em trigonometria.
Hohenwarter & Jones (2007)	O GeoGebra facilita a criação de conexões cognitivas entre as representações geométricas e algébricas.
Borba (2012)	A integração de tecnologias redefine o pensamento matemático através da coletividade "humanos-com-mídias".

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### Recomendações da Literatura

**Tabela 24** – Boas Práticas para Integração de Tecnologias no Ensino

<b>Diretriz</b>	<b>Descrição da Prática Pedagógica</b>
<b>Integração Regular</b>	Integrar o GeoGebra como parte do cotidiano escolar, evitando o uso isolado.

---

Diretriz	Descrição da Prática Pedagógica
<b>Exploração Livre</b>	Garantir tempo para a investigação autônoma antes de propor roteiros estruturados.
<b>Colaboração</b>	Equilibrar momentos de trabalho individual com atividades em grupo e discussões.
<b>Conexão Teórica</b>	Vincular as construções dinâmicas explicitamente aos conceitos formais da matemática.
<b>Avaliação Ampla</b>	Avaliar o percurso de construção lógica do aluno e não apenas o resultado final.
<b>Formação Docente</b>	Investir na capacitação contínua para o uso pedagógico (e não apenas técnico) das TICs.

---

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

## 2.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO REFERENCIAL

A fundamentação teórica apresentada demonstra que o uso do GeoGebra no ensino de trigonometria está alinhado com:

- **Diretrizes Curriculares:** Atende às habilidades e competências da BNCC.
- **Avaliações Externas:** Desenvolve habilidades mensuradas no SAEB e SPAECE.
- **Metodologias Consagradas:** Suporta a resolução de problemas no modelo de Polya.
- **Teorias de Aprendizagem:** Alinha-se com construcionismo, socioculturalismo e teoria das representações.
- **Evidências Empíricas:** Pesquisas demonstram efetividade na melhoria da aprendizagem.

Portanto, as construções apresentadas neste trabalho não são apenas exercícios técnicos de uso de software, mas ferramentas pedagógicas fundamentadas que podem contribuir significativamente para a qualidade do ensino de trigonometria na Educação Básica brasileira.

### 3 GEOGEBRA VIA COMANDOS

Este capítulo apresenta um compêndio abrangente dos principais comandos do software GeoGebra, organizados por categorias funcionais para facilitar a consulta durante aulas de Geometria e Trigonometria. Cada comando é apresentado com sua sintaxe em português, equivalente em inglês (para versões internacionais), exemplos práticos e observações técnicas importantes. O documento serve como referência rápida para professores e estudantes que desejam maximizar o uso do GeoGebra em construções matemáticas dinâmicas.

#### 3.1 APRESENTAÇÃO DA FERRAMENTA

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único pacote fácil de usar (GeoGebra Team, 2026). Dominar seus comandos é essencial para criar construções eficientes e profissionais.

**Objetivo 1.** Fornecer uma referência completa e organizada dos comandos mais utilizados no GeoGebra, com sintaxe em português e inglês, exemplos práticos e dicas de uso para construções em Geometria e Trigonometria.

#### Versões do GeoGebra e Idioma

**Observação 4** (Compatibilidade de Comandos). • **GeoGebra Classic 5/6:** Suporta comandos em português e inglês

- **GeoGebra Web:** Pode variar conforme configuração de idioma
- **Recomendação:** Use comandos em português para aulas em português, mas conheça os equivalentes em inglês para compatibilidade internacional

#### 3.2 CRIAÇÃO E MANIPULAÇÃO DE PONTOS

##### Ponto por Coordenadas

Cria pontos em posições específicas no plano cartesiano.

Português	English
A = (1, 0)	A = (1, 0)

**Observação 5.** O comando é idêntico em português e inglês. Use vírgula como separador decimal em algumas configurações regionais (ex: A = (1; 0)).

**Exemplo 2** (Pontos Notáveis).  $O = (0, 0)$                       % Origem  
 $A = (1, 0)$                       % Início do ciclo trigonométrico  
 $B = (-1, 0)$                       % Ponto diametral oposto  
 $C = (0, 1)$                       % Topo do ciclo  
 $D = (0, -1)$                       % Base do ciclo

### Ponto sobre Objeto

Cria um ponto restrito a um objeto geométrico (reta, círculo, segmento, etc.).

Português	English
$P = \text{Ponto}(c)$	$P = \text{Point}(c)$

**Observação 6.** O ponto  $P$  poderá ser arrastado apenas sobre o objeto  $c$ . Isso é útil para criar pontos móveis em construções dinâmicas.

**Exemplo 3** (Ponto na Circunferência).  $c = \text{Círculo}(0, 1)$   
 $P = \text{Ponto}(c)$                       %  $P$  move-se apenas sobre  $c$

### Ponto Médio

Calcula o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento.

Português	English
$M = \text{PontoMédio}(A, B)$	$M = \text{Midpoint}(A, B)$

**Observação 7.** Também funciona com segmento:  $M = \text{PontoMédio}(AB)$ .

**Teorema 3.2.1** (Coordenadas do Ponto Médio). *Se  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ , então:*

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (3.1)$$

## 3.3 CONFIGURAÇÃO DE OBJETOS

### Fixar e Liberar Objetos

Impede ou permite que um objeto seja movido pelo mouse.

Português	English
<ul style="list-style-type: none"> <li>• DefinirObjetoFixo(A)</li> <li>• DefinirObjetoFixo(A, true)</li> <li>• DefinirObjetoFixo(A, false)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• SetFixed(A, true)</li> <li>• SetFixed(A, false)</li> </ul>

**Atenção 1** (Comando Correto). O comando `DefinirObjetoFixo` em algumas versões mobile não funciona em todas as versões, podendo ser substituído por `DefinirComoFixo` nas versões atuais do GeoGebra.

**Observação 8** (Quando Fixar). • **Fixe:** Pontos de referência, origem, vértices de estruturas base

- **Não fixe:** Pontos móveis, controles deslizantes, objetos de exploração

## Mostrar e Ocultar Objetos

Controla a visibilidade de objetos na tela.

Português	English
<ul style="list-style-type: none"> <li>• ExibirObjeto(A, false)</li> <li>• ExibirObjeto(A, true)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ShowLabel(A, false)</li> <li>• ShowLabel(A, true)</li> </ul>

**Dica 1** (Atalho). Clique direito no objeto → Exibir Objeto (ou pressione Ctrl+Shift+A).

## Alterar Cor

Modifica a cor de um objeto usando valores RGB ou nomes.

Português	English
<ul style="list-style-type: none"> <li>• DefinirCor(A, 255, 0, 0)</li> <li>• DefinirCor(A, "Vermelho")</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• SetColor(A, 255, 0, 0)</li> </ul>

**Observação 9** (Cores Comuns). • Vermelho: (255, 0, 0) ou "Vermelho"

- Azul: (0, 102, 204) ou "Azul"

- Verde: (0, 153, 0) ou "Verde"
- Preto: (0, 0, 0) ou "Preto"
- Branco: (255, 255, 255) ou "Branco"

### Alterar Espessura

Modifica a espessura de linhas e contornos.

Português	English
DefinirEspessuraDaLinha(s, 5)	SetLineThickness(s, 5)

**Observação 10.** • Valores típicos: 1 (fino), 3 (médio), 5 (grossa). Máximo recomendado: 10.

- Em algumas versões o código é apenas "DefinirEspessura(s,5)"

## 3.4 RETAS, SEGMENTOS E ÂNGULOS

### Reta por Dois Pontos

Cria uma reta infinita passando por dois pontos.

Português	English
s = Reta(A, B)	s = Line(A, B)

**Observação 11.** A reta é infinita em ambas as direções. Use Segmento para limitar entre dois pontos.

### Segmento

Cria um segmento de reta entre dois pontos.

Português	English
r = Segmento(A, B)	r = Segment(A, B)

**Observação 12.** O segmento tem comprimento fixo determinado pela distância entre  $A$  e  $B$ .



Português	English
<code>m = Mediatriz(A, B)</code>	<code>m = PerpendicularBisector(A, B)</code>

**Observação 14.** Também funciona com segmento: `m = Mediatriz(AB)`. A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $A$  e  $B$ .

**Teorema 3.4.1** (Propriedade da Mediatriz). *Todo ponto  $M$  na mediatriz de  $\overline{AB}$  satisfaz:*

$$d(M, A) = d(M, B) \quad (3.2)$$

### Bissetriz de Ângulo

Cria a bissetriz de um ângulo definido por três pontos.

Português	English
<code>b = Bissetriz(A, O, P)</code>	<code>b = AngleBisector(A, O, P)</code>

**Observação 15.** O ponto do meio ( $O$ ) é o vértice do ângulo. A ordem dos pontos importa para determinar qual ângulo será bissectado.

## 3.5 CÍRCULOS E ARCOS

### Círculo com Centro e Raio

Cria um círculo com centro em  $O$  e raio de comprimento especificado.

Português	English
<code>c = Círculo(O, 1)</code>	<code>c = Circle(O, 1)</code>

**Observação 16.** O segundo parâmetro pode ser um número ou um segmento (usando seu comprimento como raio).

### Círculo por Dois Pontos

Cria um círculo com centro em  $O$  passando por  $A$ .

Português	English
<code>c = Círculo(O, A)</code>	<code>c = Circle(O, A)</code>

**Observação 17.** O raio será igual à distância  $OA$ . Útil quando o raio é determinado por outro objeto.

## Arco Circular

Cria um arco de circunferência definido por centro e dois pontos.

Português	English
<code>arco = ArcoCircular(O, A, P)</code>	<code>arc = CircularArc(O, A, P)</code>

**Observação 18** (Ordem dos Parâmetros). • Primeiro: Centro do círculo

- Segundo: Ponto inicial do arco
- Terceiro: Ponto final do arco

O arco é criado no sentido anti-horário.

**Exemplo 6** (Arco de  $90^\circ$ ).  $O = (0, 0)$

$A = (1, 0)$

$C = (0, 1)$

`arco = ArcoCircular(O, A, C) % Quarto de círculo`

## 3.6 POLÍGONOS

### Polígono Livre

Cria um polígono com vértices especificados.

Português	English
<code>pol = Polígono(A, B, C)</code>	<code>poly = Polygon(A, B, C)</code>

**Observação 19.** O polígono é fechado automaticamente (último vértice conecta ao primeiro). Mínimo de 3 pontos.

### Polígono Regular

Cria um polígono regular com lado definido e número de vértices especificado.

Português	English
<code>pr = PolígonoRegular(A, B, 5)</code>	<code>rp = RegularPolygon(A, B, 5)</code>

**Observação 20.** •  $A$  e  $B$ : Definem o primeiro lado

- 5: Número de vértices (pode ser 3, 4, 5, 6, etc.)

**Exemplo 7** (Polígonos Comuns). • Triângulo equilátero: `PolígonoRegular(A, B, 3)`

- Quadrado: `PolígonoRegular(A, B, 4)`
- Pentágono: `PolígonoRegular(A, B, 5)`
- Hexágono: `PolígonoRegular(A, B, 6)`

### 3.7 MEDIDAS

#### Medida de Ângulo

Cria e mede o ângulo definido por três pontos.

Português	English
$\alpha = \hat{\text{Angulo}}(A, O, P)$	$\alpha = \text{Angle}(A, O, P)$

**Atenção 2** (Configuração Importante). Para ângulos maiores que  $180^\circ$ , clique direito em

$\alpha$

→ Propriedades → Marque "**Permitir Ângulo Reflexo**".

**Observação 21** (Ordem dos Pontos). O ângulo é medido no sentido anti-horário de  $\overrightarrow{OA}$  para  $\overrightarrow{OP}$ .

#### Distância entre Pontos

Calcula a distância euclidiana entre dois pontos.

Português	English
$d = \text{Distância}(A, B)$	$d = \text{Distance}(A, B)$

**Teorema 3.7.1** (Fórmula da Distância). Se  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.3)$$

#### Área de Polígono

Calcula a área de um polígono ou círculo.

Português	English
$\text{área} = \text{Área}(\text{pol})$	$\text{area} = \text{Area}(\text{poly})$

**Exemplo 8** (Área de Círculo). `c = Círculo(0, 1)`

`área = Área(c)`

`área =  $\pi \approx 3.14159$`

### Comprimento de Segmento ou Arco

Calcula o comprimento de segmentos, arcos ou curvas.

Português	English
<code>comp = Comprimento(r)</code>	<code>len = Length(r)</code>

**Observação 22.** Funciona com segmentos, arcos, circunferências e funções.

## 3.8 CONTROLE DESLIZANTE (SLIDER)

### Criar Controle Deslizante

Cria uma variável controlável visualmente.

Português	English
<code>a = ControleDeslizante(0, 360, 1)</code>	<code>a = Slider(0, 360, 1)</code>

**Observação 23** (Parâmetros). • **Mínimo:** Valor inicial inferior (ex: 0)

- **Máximo:** Valor inicial superior (ex: 360)
- **Passo:** Incremento ao mover (ex: 1, 0.1, 0.05)

**Exemplo 9** (Controles Comuns).

`angulo = ControleDeslizante(0, 360, 1)`

% Ângulo em graus

`rad = ControleDeslizante(0, 2pi, 0.01)`

% Ângulo em radianos

`tempo = ControleDeslizante(0, 10, 0.1)`

% Para animações

### Usar Slider em Rotação

Aplica o valor do controle como ângulo de rotação.

Português	English
P = Girar(A, a°, 0)	P = Rotate(A, a°, 0)

**Atenção 3** (Símbolo de Grau). O símbolo ° é essencial. Sem ele, o GeoGebra interpreta como radianos.

### Animação Automática

Português	English
<ul style="list-style-type: none"> <li>• IniciarAnimação(a)</li> <li>• PararAnimação(a)</li> </ul>	StartAnimation(a)

**Dica 2** (Configurar Animação). Clique direito no slider → Configurações → Animação:

- Velocidade: 1 a 10 (quanto maior, mais rápido)
- Direção: Crescente, Decrescente, Oscilante

## 3.9 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

### Rotação (Girar)

Rotaciona um ponto ou objeto em torno de um centro.

Português	English
P = Girar(A, 45°, 0)	P = Rotate(A, 45°, 0)

**Observação 24.** Ângulo positivo = anti-horário. Ângulo negativo = horário.

### Translação

Desloca um ponto por um vetor especificado.

Português	English
Q = Transladar(A, (2, 3))	Q = Translate(A, (2, 3))

**Observação 25.** O vetor (2,3) move o ponto 2 unidades na direção  $x$  e 3 na direção  $y$ .

## Reflexão em Reta

Reflete um ponto em relação a uma reta (espelhamento).

Português	English
R = Refletir(A, s)	R = Reflect(A, s)

**Exemplo 10** (Simetria Axial). `s = Reta(0, C)`                      % Eixo de simetria  
`R = Refletir(P, s)`                      % P' é o reflexo de P

## Homotetia (Dilatação)

Aplica uma dilatação com centro e fator de escala. ( $O = (0, 0)$  e  $k = 2$ ).

Português	English
H = Homotetia(A, 2, 0)	H = Dilate(A, 2, 0)

**Observação 26** (Fator de Escala).      •  $k > 1$ : Ampliação

- $0 < k < 1$ : Redução
- $k < 0$ : Inversão + mudança de tamanho

## 3.10 TEXTO DINÂMICO E LATEX

### Texto Simples

Cria rótulos de texto na tela.

Português	English
Texto("Ângulo = "+ $\alpha$ )	Text("Angle = "+ $\alpha$ )

**Observação 27.** Use + para concatenar strings com valores numéricos.

### Texto com LaTeX

Exibe fórmulas matemáticas formatadas.

Português	English
Ang = Texto("Ângulo: "+ a + "°")	Ang = Text("Ângulo: "+ a + "°")

**Observação 28** (Símbolos LaTeX Comuns). •  $\alpha$ : `\alpha`

- $\pi$ : `\pi`
- $\sqrt{x}$ : `\sqrt{x}`
- $x^2$ : `x^2`
- $\frac{a}{b}$ : `\frac{a}{b}`

**Exemplo 11** (Texto Formatado). `Texto("sen(" + a + ") = " + sen(a°))`

`Texto("cos(" + a + ") = " + cos(a°))`

### 3.11 COMANDOS ALGÉBRICOS ÚTEIS

#### Definir Função

Cria uma função para plotagem e cálculo.

Português	English
<code>f(x) = x^2 - 3x + 2</code>	<code>f(x) = x^2 - 3x + 2</code>

**Observação 29.** A função será plotada automaticamente no gráfico. Use `f(2)` para avaliar.

#### Interseção de Objetos

Encontra pontos de interseção entre dois objetos.

Português	English
<code>I = Intersecção(s, c)</code>	<code>I = Intersect(s, c)</code>

**Observação 30.** Pode retornar múltiplos pontos ( $I_1, I_2$ , etc.) se houver mais de uma interseção.

#### Raízes de Função

Encontra os zeros de uma função.

Português	English
<code>R = Raiz(f)</code>	<code>R = Root(f)</code>

**Exemplo 12** (Função Quadrática). `f(x) = x^2 - 4`

`R = Raiz(f)`      % Retorna  $x = -2$  e  $x = 2$

### 3.12 DICAS E CONSIDERAÇÕES

**Dica 3** (Organização de Construção). 1. Nomeie objetos de forma lógica (A, B, C para pontos; a, b, c para retas)

2. Use cores consistentes (ex: azul para cosseno, vermelho para seno)

3. Fixe pontos de referência desde o início

4. Oculte objetos auxiliares não essenciais

5. Use controles deslizantes para parâmetros variáveis

**Dica 4** (Performance). • Evite muitos objetos com rastro ativado

• Use `ExibirObjeto` para ocultar construções intermediárias

• Limpe a janela algébrica de objetos não utilizados

**Dica 5** (Compatibilidade). • Teste construções em diferentes versões do GeoGebra

• Evite comandos muito específicos de versão

• Documente comandos usados para reprodução futura

#### **Sobre o Uso de Comandos.**

Este capítulo fornece uma referência abrangente dos comandos fundamentais do GeoGebra para construções em Geometria e Trigonometria. O domínio destes comandos permite criar materiais didáticos dinâmicos, interativos e visualmente claros, facilitando a compreensão de conceitos matemáticos abstratos.

A prática constante com estes comandos, combinada com a exploração criativa de possibilidades, é o caminho para desenvolver construções sofisticadas que enriquecem o processo de ensino-aprendizagem da matemática.er

## 4 COMPRIMENTO DE CIRCUNFERÊNCIA

Este capítulo apresenta uma construção detalhada no software GeoGebra para demonstrar visualmente a relação fundamental entre o comprimento de um segmento de reta e o comprimento do arco correspondente em uma circunferência unitária. A construção permite aos estudantes compreender de forma intuitiva o conceito de radiano como unidade de medida angular, estabelecendo a congruência entre medidas lineares e angulares.

### 4.1 PROPÓSITO E OBJETIVO DA CONSTRUÇÃO

A compreensão do conceito de radiano é fundamental para o estudo da trigonometria e das funções circulares. No entanto, muitos estudantes enfrentam dificuldades em entender por que um ângulo pode ser medido por um comprimento de arco (Mundo Educação, 2026).

Esta construção no GeoGebra tem como objetivo principal **demonstrar visualmente que o segmento de reta  $\overline{AM}$  possui o mesmo comprimento que o arco  $\widehat{AP}$  da circunferência unitária**, estabelecendo assim uma conexão concreta entre medidas lineares e angulares.

#### Fundamentação Teórica

**Definição 4.1.1** (Radiano). Um radiano é a medida de um ângulo central que subtende um arco de comprimento igual ao raio da circunferência (Mundo Educação, 2026). Em uma circunferência de raio  $r$ , se um arco tem comprimento  $s$ , sua medida em radianos é dada por:

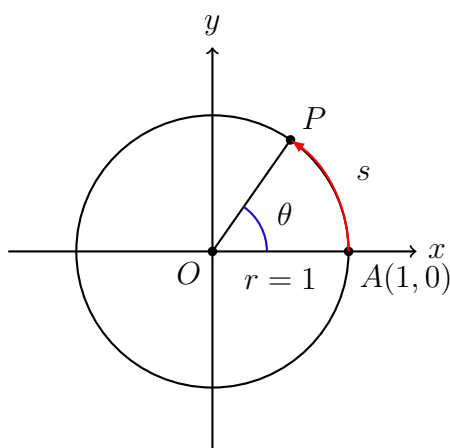
$$\theta = \frac{s}{r} \quad (4.1)$$

**Teorema 4.1.1** (Comprimento de Arco). *Em uma circunferência de raio  $r$ , o comprimento  $s$  de um arco subtendido por um ângulo central  $\theta$  (medido em radianos) é dado por:*

$$s = r \cdot \theta \quad (4.2)$$

**Observação 31** (Circunferência Unitária). Ao restringirmos a análise à circunferência trigonométrica, onde o raio é unitário ( $r = 1$ ), a Equação 4.2 simplifica-se para:

$$s = 1 \cdot \theta \implies s = \theta \quad (4.3)$$

**Figura 2** – Definição geométrica do radiano

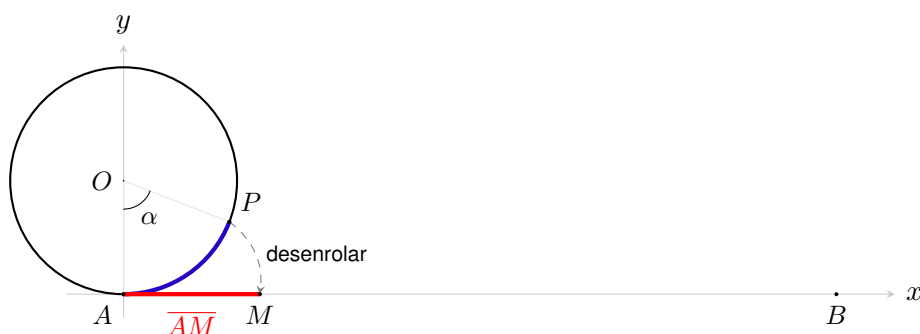
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Ou seja, **o comprimento do arco é numericamente igual à medida do ângulo em radianos** (CK-12 Foundation, 2026).

**Conexão com a Construção:** A igualdade  $s = \theta$  (Equação 4.3) é o pilar matemático da construção proposta neste capítulo. Ela justifica geometricamente por que, ao "desenrolar" o arco da circunferência unitária sobre o eixo das abscissas, o segmento de reta resultante terá exatamente o mesmo comprimento numérico que a medida do ângulo em radianos. O GeoGebra materializa essa abstração através da congruência de segmentos.

### Objetivo Pedagógico

**Objetivo 2.** Demonstrar que, ao mover o ponto  $M$  ao longo do segmento  $\overline{AB}$  (que representa o intervalo  $[0, 2\pi]$  no eixo das abscissas), o comprimento do segmento  $\overline{AM}$  é exatamente igual ao comprimento do arco  $\widehat{AP}$  na circunferência unitária, onde  $P$  é o ponto obtido pela rotação de  $A$  em torno de  $O$  pelo ângulo correspondente à posição de  $M$ .

**Figura 3** – Representação geométrica do processo de retificação de um arco

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### Por que esta congruência é importante?

A congruência entre o segmento  $\overline{AM}$  e o arco  $\widehat{AP}$  ilustra visualmente três conceitos fundamentais:

1. **Linearização da medida angular:** Transforma uma medida abstrata (ângulo) em uma medida concreta (comprimento de segmento);
2. **Compreensão do radiano:** Mostra que o radiano não é apenas um número, mas representa um comprimento real na circunferência (UEL, 2026);
3. **Preparação para funções trigonométricas:** Estabelece a base para entender que, no gráfico das funções seno e cosseno, o eixo horizontal representa tanto um ângulo quanto um comprimento de arco.

## 4.2 CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA

### Configuração Inicial dos Pontos Fixos

Na **Caixa de Entrada** do GeoGebra, crie três pontos iniciais com as seguintes coordenadas:

$$A = (0, 0)$$

$$B = (2\pi, 0)$$

$$O = (0, 1)$$

**Observação 32.** O ponto  $A$  representa a origem, o ponto  $B$  representa o valor  $2\pi$  (uma volta completa na circunferência), e o ponto  $O$  será o centro da circunferência unitária.

### Fixando os Pontos Base

Para garantir que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$  não sejam movidos acidentalmente durante a exploração, fixe-os utilizando:

```
DefinirObjetoFixo(A)
```

```
DefinirObjetoFixo(B)
```

```
DefinirObjetoFixo(O)
```

### Construção da Circunferência e do Segmento de Referência

Construa uma circunferência de raio 1, centrada no ponto  $O$ :

$c = \text{Círculo}(O, 1)$

Construa o segmento  $\overline{AB}$  que servirá como "régua" para medir o ângulo:

$AB = \text{Segmento}(A, B)$

**Observação 33.** O segmento  $\overline{AB}$  tem comprimento  $2\pi$ , que é exatamente o comprimento da circunferência completa de raio 1 ( $C = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ ).

### Criação do Ponto Móvel $M$

Crie um ponto  $M$  sobre o segmento  $\overline{AB}$ :

$M = \text{Ponto}(AB)$

**Observação 34.** Este ponto é móvel sobre o segmento  $\overline{AB}$  e pode variar sua abscissa de 0 a  $2\pi$ . A posição de  $M$  determinará o ângulo de rotação na circunferência.

### Obtenção da Abscissa de $M$

Para obter o valor da abscissa de  $M$  (que representa o comprimento do segmento  $\overline{AM}$ ), utilize:

$X = x(M)$

**Observação 35.** O comando  $x(M)$  extrai a coordenada  $x$  do ponto  $M$ . Este valor  $X$  representa:

- A distância do ponto  $A$  até o ponto  $M$
- A medida em radianos do ângulo que será construído
- O comprimento do arco correspondente na circunferência

### Conversão de Radianos para Graus

Embora o valor  $X$  esteja em radianos, o GeoGebra trabalha internamente com graus para algumas operações. Para converter, utilizamos:

$$a = X * 180^\circ / \pi$$

**Observação 36.** A fórmula de conversão é baseada na relação fundamental:

$$\pi \text{radianos} = 180^\circ \quad (4.4)$$

Portanto, para converter de radianos para graus, multiplicamos por  $\frac{180^\circ}{\pi}$  (Brasil Escola, 2026).

### Construção do Ponto P na Circunferência

Agora construímos o ponto  $P$  sobre a circunferência  $c$ , que se moverá conforme  $M$  se desloca. Para isso, rotacionamos o ponto  $A$  em torno do centro  $O$  pelo ângulo  $a$ :

$$P = \text{Girar}(A, a, O)$$

**Observação 37.** O comando  $\text{Girar}(\text{Ponto}, \hat{\text{Ângulo}}, \text{Centro})$  realiza uma rotação no sentido anti-horário. Quando  $M$  está em  $A$  (posição 0),  $P$  coincide com  $A$ . Quando  $M$  se move para  $B$  (posição  $2\pi$ ),  $P$  dá uma volta completa na circunferência.

### Construção do Segmento AM

Crie o segmento que representa o comprimento linear:

$$AM = \text{Segmento}(A, M)$$

**Teorema 4.2.1** (Congruência Fundamental). *O comprimento do segmento  $\overline{AM}$  é igual ao comprimento do arco  $\widehat{AP}$  na circunferência unitária.*

*Demonstração.* Seja  $X$  a abscissa do ponto  $M$ . Temos que:

$$\text{comp}(\overline{AM}) = X - 0 = X \text{ (unidades de comprimento)} \quad (4.5)$$

$$\text{med}(\angle AOP) = X \text{ (radianos)} \quad (4.6)$$

$$\text{comp}(\widehat{AP}) = r \cdot \theta = 1 \cdot X = X \text{ (unidades de comprimento)} \quad (4.7)$$

Portanto,  $\text{comp}(\overline{AM}) = \text{comp}(\widehat{AP})$ . □

## Construção do Arco Circular

Para visualizar o arco correspondente ao ângulo, construa:

```
arco = ArcoCircular(0, A, P)
```

Para nossa análise usaremos:

```
d = ArcoCircular(0, P, A)
```

**Observação 38** (Ordem dos parâmetros no comando `ArcoCircular`). A sintaxe do comando é `ArcoCircular(Centro, PontoInicial, PontoFinal)`. O arco é gerado no sentido anti-horário a partir do **segundo ponto** até o **terceiro ponto**. Assim:

- `ArcoCircular(0, A, P)` gera o arco subtendido pelo ângulo  $\alpha$ , cujo comprimento é numericamente igual a  $X$  (em radianos), representando a medida angular direta;
- `ArcoCircular(0, P, A)` gera o **arco complementar**, de comprimento  $2\pi - X$ , representando o percurso de retorno ao ponto de origem.

A escolha pela ordem  $(O, P, A)$  justifica-se pedagogicamente quando o objetivo é:

1. destacar visualmente o arco de fechamento da trajetória no ciclo, auxiliando na compreensão da periodicidade;
2. analisar a simetria angular em relação ao eixo horizontal, permitindo comparações entre  $\alpha$  e  $2\pi - \alpha$ ;
3. enfatizar que a circunferência unitária pode ser percorrida em dois sentidos, reforçando o conceito de arcos côngruos e a natureza cíclica das funções trigonométricas.

Ressalta-se que, para fins de demonstração da congruência métrica direta entre o segmento  $\overline{AM}$  e o arco  $\widehat{AP}$ , a ordem  $(0, A, P)$  permanece matematicamente mais adequada, pois preserva a igualdade:

$$\text{comp}(\overline{AM}) = \text{comp}(\widehat{AP}) = X, \quad (4.8)$$

alinhando-se rigorosamente à definição de radiano como razão entre comprimento de arco e raio da circunferência.

Portanto, a seleção da sintaxe deve refletir o foco da exploração didática: (O, A, P) para congruência linear-angular direta, ou (O, P, A) para análise do arco residual, complementaridade e periodicidade.

### Destacando Visualmente a Congruência

Para enfatizar visualmente a congruência entre o segmento e o arco, altere suas cores para vermelho:

```
DefinirCor(AM, "Azul")
```

```
DefinirCor(d, "Azul")
```

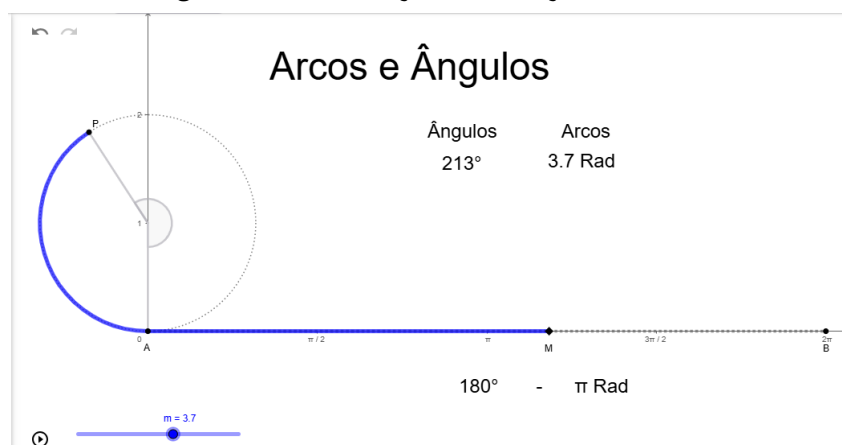
**Medidas do Arco e do Ângulo** Para que as medidas do arco e do ângulo sejam visualizadas na tela, use os seguintes comandos.

```
texto1= Texto("Arco: "+X)
```

```
texto2= Texto("Ângulo: "+a)
```

**Observação 39.** Ao usar a mesma cor para ambos os elementos, destacamos visualmente que eles representam a mesma medida, embora estejam em contextos geométricos diferentes (reta vs. curva).

**Figura 4 – Construção: retificação de arcos**



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 4.3 EXPLORAÇÃO E VERIFICAÇÃO DA CONGRUÊNCIA

#### Como Verificar a Congruência na Prática

Após construir todos os elementos, siga estes passos para verificar experimentalmente a congruência:

1. Mova o ponto  $M$  ao longo do segmento  $\overline{AB}$ ;
2. Observe que o ponto  $P$  se move na circunferência simultaneamente;
3. Note que o segmento  $\overline{AM}$  e o arco  $\widehat{AP}$  têm sempre a mesma cor (vermelho);
4. Use a ferramenta **Distância ou Comprimento** do GeoGebra para medir:
  - O comprimento do segmento  $\overline{AM}$
  - O comprimento do arco  $\widehat{AP}$
5. Verifique que as duas medidas são sempre iguais, independentemente da posição de  $M$ .

#### Casos Especiais para Observação

**Exemplo 13** (Ângulo de 1 radiano). Posicione  $M$  de modo que  $X = 1$ . Neste caso:

- $\text{comp}(\overline{AM}) = 1$  unidade
- $\text{med}(\angle AOP) = 1$  radiano
- $\text{comp}(\widehat{AP}) = 1$  unidade

Este é exatamente o conceito de radiano: um arco de comprimento igual ao raio ([Mundo Educação, 2026](#)).

**Exemplo 14** (Ângulo de  $\pi$  radianos ( $180^\circ$ )). Quando  $M$  está no ponto médio de  $\overline{AB}$ :

- $X = \pi \approx 3,14$
- $P$  está no ponto diametralmente oposto a  $A$
- O arco  $\widehat{AP}$  representa meia circunferência
- $\text{comp}(\widehat{AP}) = \pi \cdot 1 = \pi$

**Exemplo 15** (Ângulo de  $2\pi$  radianos ( $360^\circ$ )). Quando  $M$  coincide com  $B$ :

- $X = 2\pi \approx 6,28$
- $P$  completa uma volta e retorna a  $A$
- O arco  $\widehat{AP}$  é a circunferência completa
- $\text{comp}(\widehat{AP}) = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

#### 4.4 APLICAÇÕES DIDÁTICAS

##### Para o Ensino de Trigonometria

Esta construção é particularmente útil para:

- **Introduzir o conceito de radiano:** Os estudantes veem concretamente que radiano é um comprimento, não apenas um número abstrato (UEL, 2026);
- **Explicar o domínio das funções trigonométricas:** Mostra por que usamos números reais (comprimentos) como entrada para seno e cosseno;
- **Visualizar a periodicidade:** Quando  $M$  ultrapassa  $2\pi$ , o ponto  $P$  começa uma nova volta, ilustrando a natureza periódica das funções circulares.

##### Sugestões de Atividades Complementares

1. **Construção do gráfico do seno:** Adicione um ponto  $S = (X, y(P))$  e ative seu rastro. Ao mover  $M$ , o gráfico da função  $y = \text{sen}(x)$  será desenhado;
2. **Comparação entre graus e radianos:** Crie um mostrador que exiba simultaneamente a medida em graus e em radianos;
3. **Exploração de arcos negativos:** Estenda o segmento  $\overline{AB}$  para valores negativos e observe o movimento horário de  $P$ .

##### Reflexão sobre a Atividade

A construção apresentada demonstra de forma elegante e visual a relação fundamental entre medidas lineares e angulares na circunferência unitária. Ao estabelecer a congruência entre o segmento  $\overline{AM}$  e o arco  $\widehat{AP}$ , os estudantes podem:

- Compreender o radiano como uma medida concreta de comprimento;
- Visualizar a correspondência biunívoca entre pontos de um segmento e pontos de uma circunferência;
- Desenvolver intuição geométrica para conceitos que serão fundamentais no estudo de funções trigonométricas, números complexos e cálculo diferencial.

O uso do GeoGebra como ferramenta de visualização dinâmica permite que os estudantes explorem ativamente esta relação, movendo o ponto  $M$  e observando em tempo real como o arco correspondente se modifica, mantendo sempre a igualdade de comprimentos. Esta abordagem experimental e visual é essencial para a construção de significados matemáticos profundos e duradouros.

Como suporte didático para a visualização dos conceitos abordados, selecionou-se uma atividade de Geometria Dinâmica hospedada na plataforma GeoGebra (Autor (2026e)). A utilização desse recurso digital interativo tem como propósito oferecer ao estudante uma abordagem visual e manipulável da retificação da circunferência, permitindo a exploração das propriedades geométricas de maneira dinâmica e complementar às demonstrações teóricas tradicionais.

## 5 PRIMEIRA DETERMINAÇÃO POSITIVA

Este artigo apresenta uma construção dinâmica no software GeoGebra destinada ao ensino de trigonometria, focando especificamente no conceito de **Primeira Determinação Positiva**. Através da manipulação de um controle deslizante que representa ângulos maiores que uma volta completa, os estudantes podem visualizar a relação entre arcos côngruos e identificar geometricamente o representante principal no intervalo  $[0^\circ, 360^\circ)$ . A construção integra álgebra e geometria para solidificar a compreensão de periodicidade angular.

### 5.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA GEOMÉTRICO

No estudo da trigonometria, é comum trabalharmos com ângulos que ultrapassam uma volta completa no ciclo trigonométrico ( $360^\circ$ ). Embora esses ângulos representem rotações diferentes em termos de movimento, suas posições finais no círculo trigonométrico podem coincidir com ângulos menores.

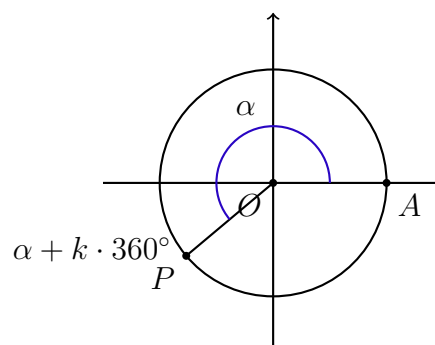
Este material tem como objetivo **demonstrar visualmente como qualquer ângulo positivo pode ser reduzido à sua primeira determinação positiva**, ou seja, o menor ângulo não negativo congruente a ele. Utilizaremos o GeoGebra para criar um modelo dinâmico onde um controle deslizante define o ângulo total e um ponto no círculo mostra a posição final equivalente.

### Fundamentação Teórica

**Definição 5.1.1** (Arcos Côngruos). Dois arcos são ditos **côngruos** quando suas extremidades coincidem no ciclo trigonométrico. Isso ocorre quando a diferença entre suas medidas é um múltiplo inteiro de  $360^\circ$  (ou  $2\pi$  radianos) (Mundo Educação, 2026).

$$\alpha \equiv \beta \pmod{360^\circ} \iff \alpha - \beta = k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.1)$$

**Figura 5 – Arcos côngruos.**



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

**Definição 5.1.2** (Primeira Determinação Positiva). A **primeira determinação positiva** de um arco é o único arco côngruo a ele cuja medida  $\theta$  satisfaz a condição:

$$0^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (5.2)$$

Ela representa a posição final do arco no ciclo trigonométrico, ignorando o número de voltas completas dadas (UEL, 2026).

**Observação 40** (Cálculo Algébrico). Para encontrar a primeira determinação positiva de um ângulo  $a$ , podemos utilizar a operação módulo (resto da divisão):

$$\theta = a \pmod{360^\circ} \quad (5.3)$$

Ou, algebricamente:

$$\theta = a - 360^\circ \cdot \left\lfloor \frac{a}{360^\circ} \right\rfloor \quad (5.4)$$

onde  $\lfloor x \rfloor$  representa a parte inteira de  $x$ .

### Objetivo Pedagógico da Construção

**Objetivo 3.** Criar um ambiente interativo onde o aluno possa manipular um ângulo  $a$  de até 10 voltas completas ( $3600^\circ$ ) e observar, em tempo real, qual é a posição equivalente no ciclo trigonométrico (primeira determinação), visualizando a relação entre o ângulo total e o ângulo reduzido.

### Por que esta construção é importante?

1. **Visualização da Periodicidade:** Mostra que adicionar  $360^\circ$  não altera a posição final do ponto no círculo;
2. **Conexão Algébrico-Geométrica:** Relaciona o valor numérico do controle deslizante com a posição geométrica do ponto  $P$ ;
3. **Compreensão de Voltas:** Permite contar quantas voltas completas foram dadas através da divisão por  $360^\circ$ .

## 5.2 CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA

### Configuração dos Pontos de Referência

Inicialmente, definiremos os pontos que compõem a estrutura básica do ciclo trigonométrico. Na **Caixa de Entrada**, digite:

$$A = (1, 0)$$

$$B = (-1, 0)$$

$$O = (0, 0)$$

**Observação 41.** O ponto  $O$  é a origem do sistema e centro do ciclo. O ponto  $A$  marca o início dos ângulos ( $0^\circ$ ), e o ponto  $B$  marca  $180^\circ$ .

### Fixando os Pontos Base

Para evitar movimentos acidentais durante a aula, fixe os pontos criados:

```
DefinirObjetoFixo(A)
```

```
DefinirObjetoFixo(B)
```

```
DefinirObjetoFixo(O)
```

### Construção dos Eixos e do Ciclo

Para contextualizar espacialmente, construiremos o eixo horizontal e o ciclo trigonométrico:

```
s = Reta(A, B)
```

```
m = Mediatriz(A, B)
```

```
c = Círculo(O, 1)
```

**Observação 42.** A reta  $s$  representa o eixo das abscissas (cossenos). A mediatriz  $m$  passa por  $O$  e representa o eixo das ordenadas (senos), pois  $A$  e  $B$  são simétricos em relação à origem. O círculo  $c$  é o ciclo trigonométrico unitário.

## Criação do Controle Deslizante (Ângulo Total)

O coração desta construção é o controle que simulará ângulos maiores que uma volta. Crie um controle deslizante  $a$ :

```
a = ControleDeslizante(0, 3600, 0.05)
```

**Observação 43.** • **Mínimo 0:** Começa em  $0^\circ$ .

- **Máximo 3600:** Permite até 10 voltas completas ( $10 \times 360^\circ = 3600^\circ$ ).
- **Passo 0.05:** Permite movimento suave para análise detalhada.

## Construção do Ponto Móvel P

O ponto  $P$  representará a extremidade do arco no ciclo. Ele será criado rotacionando o ponto  $A$  em torno de  $O$  pelo ângulo  $a$ :

```
P = Girar(A, a°, 0)
```

**Observação 44.** O símbolo  $^\circ$  é crucial aqui. Ele informa ao GeoGebra que o valor numérico de  $a$  deve ser interpretado como graus. O ponto  $P$  dará voltas no círculo conforme  $a$  aumenta, mas sua posição geométrica se repetirá a cada  $360^\circ$ .

## Destacando o Raio e o Ângulo Geométrico

Para visualizar a posição atual no primeiro ciclo, trace o raio e o ângulo interno:

```
r = Segmento(O, P)
```

```
alpha = Ângulo(A, O, P)
```

**Observação 45. Atenção nas Configurações do Ângulo:** Por padrão, o comando `Ângulo` pode retornar valores entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Para ver a primeira determinação completa ( $0^\circ$  a  $360^\circ$ ), clique com o botão direito no objeto  $\alpha$ , vá em **Propriedades** e marque a opção **"Permitir Ângulo Reflexo"** (ou "Ângulo entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ ").

## Exibindo as Informações Numéricas

Para fins didáticos, é essencial mostrar o valor do ângulo total, a primeira determinação e o número de voltas. Utilize o comando `Texto` para criar rótulos dinâmicos:

```
Texto1 = Texto("Ângulo Total: " + a + "°")
```

```
Texto2 = Texto("1ª Determinação: " + alpha + "°")
```

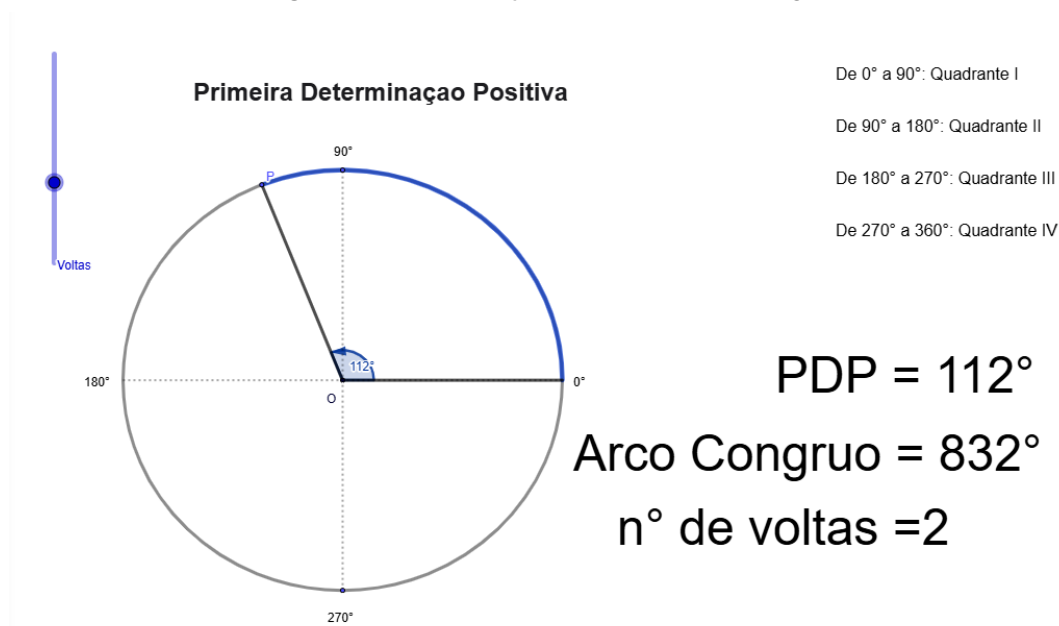
```
Texto3 = Texto("Voltas Completas: " + floor(a / 360))
```

**Observação 46.** O comando `Texto()` é o correto para criação de rótulos. Para exibir a fórmula matemática da primeira determinação calculada algebricamente, podemos criar um objeto numérico:

- $pdp = a - 360^\circ * \text{floor}(a / 360^\circ)$

E então exibi-lo no texto.

**Figura 6 – Construção: PDP e arcos côngrus**



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 5.3 ANÁLISE DA CONGRUÊNCIA DE ARCOS

#### Relação entre arcos e ângulos

A construção permite verificar experimentalmente a definição de arcos côngruos. Ao mover o controle deslizante  $a$ , observe o seguinte:

**Teorema 5.3.1** (Relação de Congruência). *Seja  $a$  o valor do controle deslizante e  $\alpha$  a primeira determinação positiva exibida pelo ângulo geométrico (configurado para  $0^\circ$ - $360^\circ$ ). Então:*

$$a = k \cdot 360^\circ + \alpha \quad (5.5)$$

onde  $k$  é o número de voltas completas (parte inteira de  $a/360^\circ$ ).

### Exemplos de Verificação

**Exemplo 16** (Uma volta completa). Configure  $a = 360^\circ$ .

- O ponto  $P$  retorna à posição de  $A$ .
- A primeira determinação  $\alpha = 0^\circ$ .
- Voltas completas = 1.

**Exemplo 17** (Ângulo grande). Configure  $a = 750^\circ$ .

- Cálculo:  $750 \div 360 = 2,083\dots$
- Voltas completas ( $k$ ): 2.
- Resto ( $\alpha$ ):  $750 - 2 \cdot 360 = 750 - 720 = 30^\circ$ .
- No GeoGebra, o ponto  $P$  estará na posição de  $30^\circ$ .

**Exemplo 18** (Múltiplo de 360). Configure  $a = 1080^\circ$ .

- $1080 \div 360 = 3$  exato.
- Voltas completas: 3.
- Primeira determinação:  $0^\circ$ .

## 5.4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA

1. **Caça ao Tesouro Angular:** O professor define uma primeira determinação (ex:  $120^\circ$ ) e os alunos devem encontrar três valores diferentes para  $a$  que colocam  $P$  nessa posição (ex:  $120^\circ$ ,  $480^\circ$ ,  $840^\circ$ ).
2. **Previsão de Posição:** Com o ponto  $P$  oculto, o professor define um valor alto para  $a$  (ex:  $1500^\circ$ ) e pede para os alunos calcularem mentalmente em qual quadrante  $P$  estará antes de revelar no GeoGebra.

3. **Análise de Funções:** Relacione esta construção com o gráfico da função seno. Quando  $a$  aumenta, o valor de  $\text{sen}(a)$  se repete periodicamente, exatamente porque  $P$  retorna às mesmas posições verticais.

### Reflexão sobre a Atividade

A construção da Primeira Determinação Positiva no GeoGebra oferece uma ponte visual poderosa entre a aritmética modular (restos de divisão) e a geometria circular. Ao permitir que os estudantes manipulem ângulos maiores que  $360^\circ$  e vejam instantaneamente sua redução ao primeiro ciclo, eliminamos a abstração excessiva do conceito de arcos côngruos.

A utilização de controles deslizantes com amplitude de  $3600^\circ$  garante que o conceito de periodicidade seja explorado além de apenas uma volta extra, solidificando a compreensão de que o ciclo trigonométrico se repete infinitamente. Esta ferramenta é indispensável para o ensino moderno de trigonometria.

Visando facilitar a visualização geométrica dos conceitos trigonométricos, foi selecionado um Objeto de Aprendizagem (OA) interativo na plataforma GeoGebra. O recurso digital proposto ([Autor \(2026d\)](#)) permite que o estudante manipule dinamicamente a medida de arcos e observe, em tempo real, o comportamento do ciclo trigonométrico para identificar a primeira determinação positiva de arcos côngruos, unindo de forma intuitiva a abstração geométrica à sua representação algébrica.

## 6 O CICLO TRIGONOMÉTRICO

Este artigo detalha a construção dinâmica das linhas trigonométricas de seno e cosseno no software GeoGebra. Através da projeção ortogonal de um ponto móvel sobre os eixos coordenados, demonstramos geometricamente que o seno e o cosseno de um ângulo correspondem, respectivamente, às medidas algébricas dos segmentos verticais e horizontais no ciclo trigonométrico. A construção permite analisar a variação de sinais e magnitudes dessas funções em todos os quatro quadrantes.

### Objetivos da Modelagem do Ciclo

O estudo das funções trigonométricas no ciclo unitário vai além da definição razão entre lados de um triângulo retângulo. No contexto do ciclo trigonométrico, o seno e o cosseno assumem uma definição geométrica poderosa baseada em projeções.

Este material tem como objetivo **construir visualmente as linhas de seno e cosseno**, demonstrando que, para qualquer ângulo  $\theta$ , o cosseno corresponde à abscissa do ponto no ciclo e o seno corresponde à ordenada. Utilizaremos o GeoGebra para criar um ponto móvel  $P$  e projetá-lo sobre os eixos, permitindo a observação dinâmica da variação dessas medidas conforme o ângulo percorre os quadrantes.

### Fundamentação Teórica

**Definição 6.0.1** (Ciclo Trigonométrico). O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio unitário ( $r = 1$ ), centrada na origem  $(0, 0)$  de um sistema de coordenadas cartesianas. O ponto  $A = (1, 0)$  é a origem dos arcos (UEL, 2026).

**Definição 6.0.2** (Linhas Trigonométricas). Seja  $P$  um ponto no ciclo trigonométrico associado ao ângulo  $\theta$ .

- **Linha do Cosseno:** É o segmento orientado no eixo das abscissas (eixo  $x$ ) que vai da origem  $O$  até a projeção ortogonal de  $P$  sobre esse eixo. Sua medida algébrica é  $\cos(\theta)$  (Mundo Educação, 2026).
- **Linha do Seno:** É o segmento orientado no eixo das ordenadas (eixo  $y$ ) que vai da origem  $O$  até a projeção ortogonal de  $P$  sobre esse eixo. Sua medida algébrica é  $\sin(\theta)$ .

No Ensino Fundamental, as razões trigonométricas são introduzidas no contexto restrito dos triângulos retângulos (ângulos agudos). No Ensino Médio, o ciclo trigonométrico

permite estender essas definições para qualquer ângulo real, unificando a geometria e a álgebra.

A equação reduzida desta circunferência é dada por:

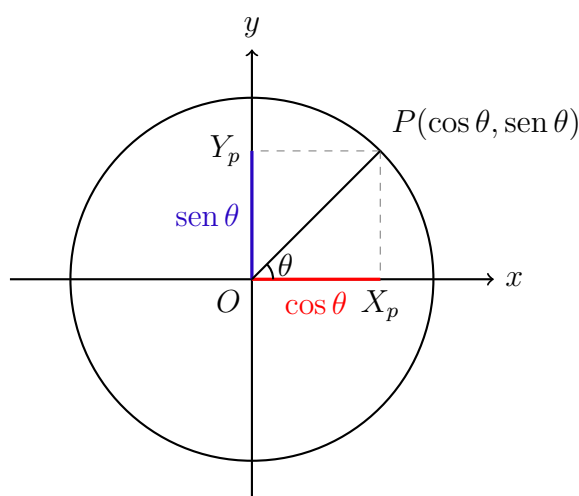
$$x^2 + y^2 = 1 \quad (6.1)$$

**Teorema 6.0.1** (Coordenadas Trigonométricas). *Seja  $P$  um ponto sobre o ciclo trigonométrico, associado a um arco de medida  $\theta$  (em radianos) a partir da origem  $A(1, 0)$ . As coordenadas cartesianas do ponto  $P$  são definidas, respectivamente, como o cosseno e o seno do ângulo  $\theta$ :*

$$P = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \quad (6.2)$$

**Observação 47** (Linhas Trigonométricas como Projeções). Geometricamente, o valor de  $\cos \theta$  corresponde à medida algébrica da projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre o eixo das abscissas (eixo dos cossenos). Analogamente,  $\operatorname{sen} \theta$  corresponde à medida algébrica da projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo das ordenadas (eixo dos senos).

**Figura 7** – Projeções ortogonais no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

**Conexão com a Construção:** A construção proposta no GeoGebra opera exatamente sobre o Corolário acima. Ao criar o ponto  $P$  via rotação e, em seguida, utilizar os comandos `Perpendicular` para projetar  $P$  nos eixos  $x$  e  $y$ , estamos materializando visualmente a definição analítica da Equação 6.2, permitindo ao aluno observar a variação de sinal e magnitude das funções em todos os quatro quadrantes.

**Observação 48** (Sinais nos Quadrantes). • **Cosseno:** Positivo nos quadrantes I e IV (direita do eixo  $y$ ); Negativo nos quadrantes II e III (esquerda do eixo  $y$ ).

- **Seno:** Positivo nos quadrantes I e II (acima do eixo  $x$ ); Negativo nos quadrantes III e IV (abaixo do eixo  $x$ ).

## 6.1 OBJETIVO PEDAGÓGICO DA CONSTRUÇÃO

**Objetivo 4.** Criar um modelo dinâmico onde um ponto  $P$  percorre o ciclo trigonométrico controlado por um ângulo  $\alpha$ , projetando-se ortogonalmente sobre os eixos  $x$  e  $y$  para formar os segmentos que representam geometricamente o cosseno e o seno, respectivamente.

### Por que esta construção é importante?

1. **Visualização de Sinais:** Permite ver claramente quando o segmento muda de direção (sinal negativo), algo abstrato apenas na fórmula;
2. **Compreensão de Projeção:** Conecta o conceito geométrico de projeção ortogonal com as funções trigonométricas;
3. **Variação Contínua:** Mostra que seno e cosseno variam suavemente entre -1 e 1, sem "saltos".

## 6.2 CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA

### Configuração dos Pontos de Referência

Inicialmente, definiremos o centro do ciclo e os pontos de referência nos eixos. Na **Caixa de Entrada**, digite:

$$O = (0, 0)$$

$$A = (1, 0)$$

$$B = (-1, 0)$$

**Observação 49.**  $O$  é a origem.  $A$  marca o início dos arcos (0 rad).  $B$  marca  $\pi$  rad (180°).

### Fixando os Pontos Base

Para evitar movimentos acidentais, fixe os pontos estruturais:

```
DefinirObjetoFixo(O)
```

```
DefinirObjetoFixo(A)
```

```
DefinirObjetoFixo(B)
```

**Observação 50.** Em algumas versões o comando correto, na versão em Português, é `DefinirComoFixo` e não é necessário o parâmetro `true`.

### Construção dos Eixos e do Ciclo

Construiremos o eixo horizontal e o eixo vertical (via mediatriz) para contextualizar o ciclo:

```
s = Reta(A, B)
```

```
m = Mediatriz(A, B)
```

```
c = Círculo(O, 1)
```

**Observação 51.** A reta  $s$  representa o eixo dos cossenos (abscissas). A mediatriz  $m$  passa por  $O$  e é perpendicular a  $s$ , representando o eixo dos senos (ordenadas). O círculo  $c$  é o ciclo trigonométrico.

### Criação do Controle Deslizante (Ângulo em Radianos)

Para controlar o movimento do ponto no ciclo, criaremos um controle deslizante  $a$  variando de  $-2\pi$  a  $2\pi$ :

```
a = ControleDeslizante(-2pi, 2pi, 0.05)
```

**Observação 52.**

- **Intervalo:** De  $-2\pi$  a  $2\pi$  permite explorar ângulos negativos e mais de uma volta completa.

- **Unidade:** O valor de  $a$  está em **radianos**, que é a unidade padrão do cálculo matemático.

- **Sintaxe:** Use pi em vez do símbolo  $\pi$  na caixa de entrada para evitar erros de codificação.

### Conversão para Graus e Criação do Ponto P

O comando de rotação do GeoGebra trabalha nativamente com graus quando usamos o símbolo '°. Portanto, precisamos converter o radiano  $a$  para graus  $\alpha$ :

$$\alpha = a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Agora, giramos o ponto  $A$  em torno de  $O$  pelo ângulo  $\alpha$  para obter  $P$ :

$$P = \text{Girar}(A, \alpha, O)$$

**Observação 53.** O ponto  $P$  tem coordenadas  $(\cos(a), \sin(a))$ . Ele se moverá no sentido anti-horário se  $a > 0$  e horário se  $a < 0$ .

### Desenho do Raio e do Ângulo

Para visualizar a posição angular, trace o raio e o ângulo:

$$r = \text{Segmento}(O, P)$$

$$AOP = \text{Ângulo}(A, O, P)$$

**Observação 54.** Lembre-se de configurar o objeto AOP nas propriedades para "**Permitir Ângulo Reflexo**" se desejar ver ângulos maiores que  $180^\circ$ .

### Projeção para o Cosseno (Eixo X)

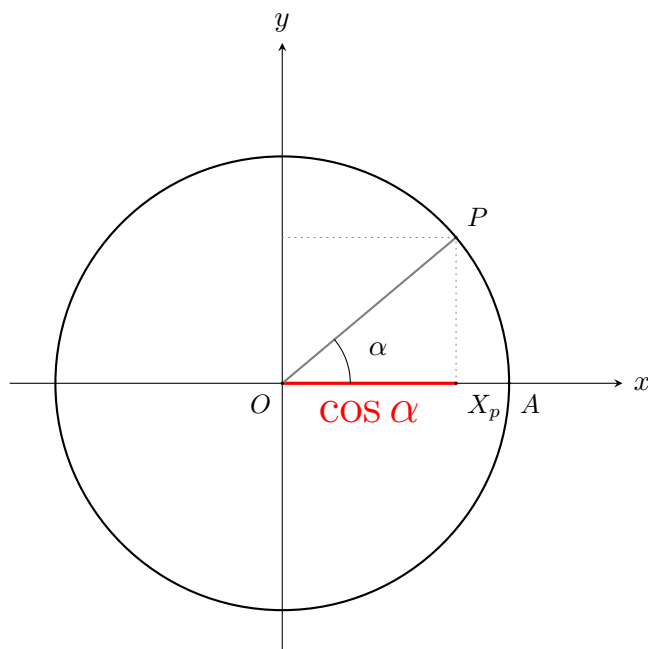
Para encontrar o valor do cosseno, projetamos  $P$  perpendicularmente sobre o eixo horizontal ( $s$ ):

$$t = \text{Perpendicular}(P, s)$$

$$X_p = \text{Intersecção}(s, t)$$

**Observação 55.** O ponto  $X_p$  é a projeção ortogonal de  $P$  no eixo  $x$ . O segmento  $\overline{OX_p}$  representa geometricamente o **cosseno** do ângulo.

**Figura 8** – Representação geométrica do cosseno no ciclo unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

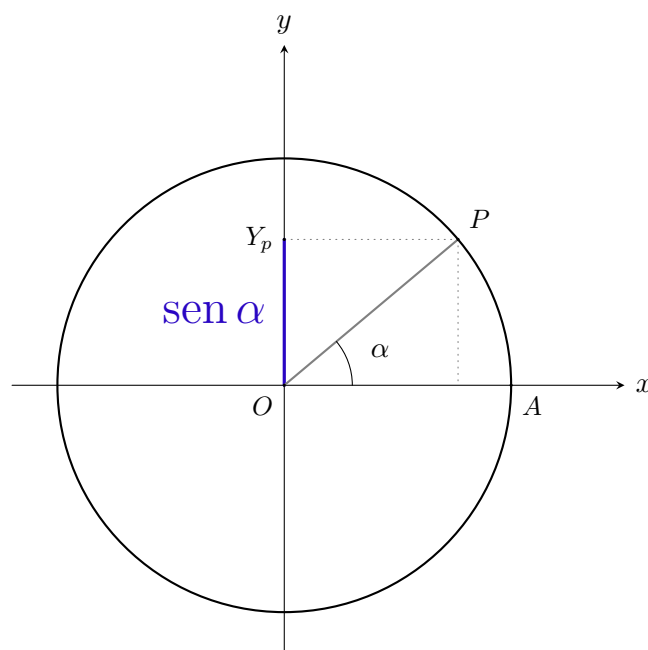
### Projeção para o Seno (Eixo Y)

Para encontrar o valor do seno, projetamos  $P$  perpendicularmente sobre o eixo vertical ( $m$ ). Isso pode ser feito traçando uma paralela ao eixo  $x$  passando por  $P$ :

$u = \text{Paralela}(P, s)$

$Y_p = \text{Intersecção}(u, m)$

**Observação 56.** A reta  $u$  é horizontal. Sua interseção com o eixo  $y$  (reta  $m$ ) define o ponto  $Y_p$ . O segmento  $\overline{OY_p}$  representa geometricamente o **seno** do ângulo.

**Figura 9** – Representação geométrica do seno no ciclo unitário.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### Destacando as Linhas Trigonométricas

Para fins didáticos, é recomendável destacar os segmentos que representam as funções:

`$SegCosseno = Segmento(0, X_p)$`

`$SegSeno = Segmento(0, Y_p)$`

`DefinirCor(SegCosseno, "Azul")`

`DefinirCor(SegSeno, "Vermelho")`

**Observação 57.** Usar cores distintas (ex: Azul para Cosseno, Vermelho para Seno) ajuda o aluno a distinguir visualmente as duas funções durante o movimento.

## 6.3 ANÁLISE GEOMÉTRICA DAS FUNÇÕES

### Relação entre Segmentos e Coordenadas

A construção valida algebricamente as definições trigonométricas:

**Teorema 6.3.1** (Coordenadas no Ciclo). *Se  $P$  é um ponto no ciclo trigonométrico determinado pelo ângulo  $a$  (em radianos), então as coordenadas de  $P$  são dadas por:*

$$P = (\cos(a), \sin(a)) \quad (6.3)$$

Na construção, isso corresponde a:

$$X_p = (\cos(a), 0) \quad e \quad Y_p = (0, \sin(a)) \quad (6.4)$$

### Comportamento nos Quadrantes

Ao mover o controle deslizante  $a$ , observe o comportamento dos segmentos coloridos:

1. **Quadrante I** ( $0 < a < \pi/2$ ):

- Segmento Azul (Cosseno) aponta para a direita (Positivo).
- Segmento Vermelho (Seno) aponta para cima (Positivo).

2. **Quadrante II** ( $\pi/2 < a < \pi$ ):

- Segmento Azul aponta para a esquerda (Negativo).
- Segmento Vermelho aponta para cima (Positivo).

3. **Quadrante III** ( $\pi < a < 3\pi/2$ ):

- Segmento Azul aponta para a esquerda (Negativo).
- Segmento Vermelho aponta para baixo (Negativo).

4. **Quadrante IV** ( $3\pi/2 < a < 2\pi$ ):

- Segmento Azul aponta para a direita (Positivo).
- Segmento Vermelho aponta para baixo (Negativo).

**Exemplo 19** (Ângulo de  $90^\circ$  ( $\pi/2$ )). Quando  $a = \pi/2$ :

- $P$  coincide com a interseção superior do ciclo com o eixo  $y$ .
- $X_p$  coincide com  $O$  (Cosseno = 0).
- $Y_p$  coincide com  $P$  (Seno = 1).

## 6.4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA

1. **Caça ao Zero:** Peça aos alunos para encontrarem todos os valores de  $a$  entre  $-2\pi$  e  $2\pi$  onde o segmento vermelho (seno) desaparece (vale zero). Repita para o segmento azul (cosseno).
2. **Comparação de Magnitudes:** Em quais regiões do ciclo o segmento azul é maior que o vermelho? (Isso ocorre quando  $|\cos(a)| > |\sin(a)|$ , ou seja, perto dos eixos horizontais).
3. **Simetria:** Compare o valor do seno em  $a$  e em  $\pi - a$ . O que acontece com o segmento vermelho? (Eles têm o mesmo tamanho e direção, ilustrando  $\sin(\pi - a) = \sin(a)$ ).

### Reflexão sobre a Atividade

A construção das linhas trigonométricas no GeoGebra transforma definições algébricas abstratas em objetos geométricos tangíveis. Ao visualizar o seno e o cosseno como segmentos orientados nos eixos, os estudantes desenvolvem uma intuição forte sobre sinais, valores máximos e mínimos, e periodicidade.

A capacidade de manipular o ângulo  $a$  e observar instantaneamente a alteração nos segmentos  $\overline{OX_p}$  e  $\overline{OY_p}$  reforça a compreensão de que as funções trigonométricas são, fundamentalmente, coordenadas de um ponto em movimento circular. Esta é uma base essencial para o estudo posterior de gráficos de funções, identidades trigonométricas e números complexos.

Para além da demonstração formal, propõe-se a exploração do conceito por meio de um recurso de Geometria Dinâmica disponível no GeoGebra ([Autor \(2026b\)](#)), onde é possível simular digitalmente a construção das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico e interagir com as variações dos arcos.

## 7 A FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Este capítulo detalha a construção dinâmica da linha trigonométrica tangente no software GeoGebra. Diferentemente do seno e do cosseno, que são projeções ortogonais sobre os eixos coordenados, a tangente é construída sobre uma reta tangente à circunferência no ponto de origem dos arcos. Esta construção permite visualizar geometricamente o crescimento ilimitado da função, as assíntotas verticais e a variação de sinais nos quadrantes, complementando o estudo das razões trigonométricas fundamentais.

### 7.1 OBJETIVOS DA MODELAGEM DA TANGENTE

O estudo da função tangente no ciclo unitário exige uma compreensão geométrica distinta das funções seno e cosseno. Enquanto estas últimas representam coordenadas do ponto na circunferência, a tangente representa o comprimento do segmento sobre o eixo das tangentes.

Este material tem como objetivo construir visualmente a linha de tangente, demonstrando que, para um ângulo  $\alpha$ , a tangente corresponde à ordenada do ponto de interseção entre a reta suporte do raio e a reta tangente à circunferência em  $A = (1, 0)$ . Utilizaremos o GeoGebra para criar um ponto móvel  $P$  e projetá-lo sobre o eixo das tangentes, permitindo a observação dinâmica do comportamento da função, incluindo suas descontinuidades.

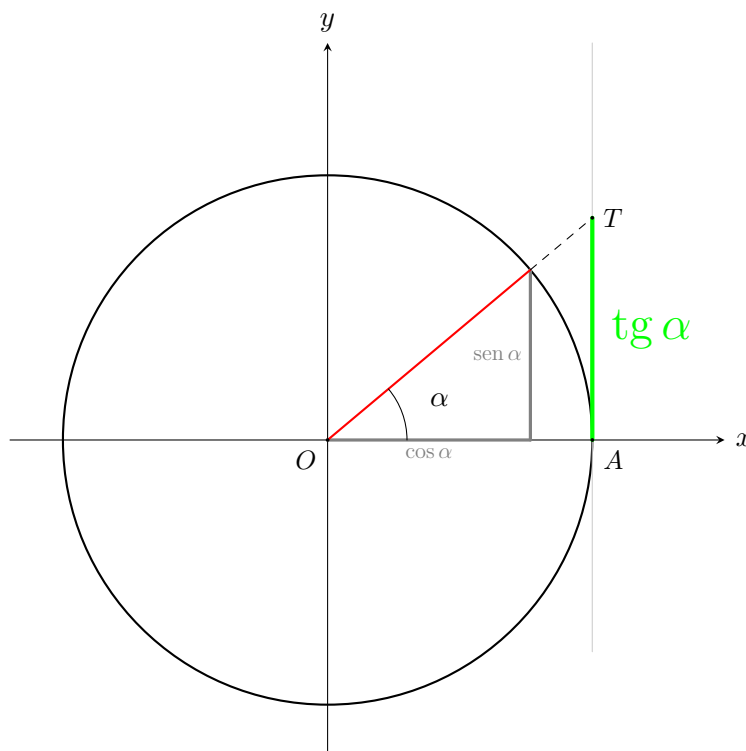
#### Fundamentação Teórica

**Definição 7.1.1** (Linha Tangente). Seja  $P$  um ponto no ciclo trigonométrico associado ao ângulo  $\alpha$ . A linha tangente é o segmento orientado sobre a reta tangente à circunferência no ponto  $A = (1, 0)$ , limitado pelo eixo das abscissas e pela extensão do raio  $\overline{OP}$ . Sua medida algébrica é dada por  $\text{tg}(\alpha)$  (Mundo Educação, 2026).

**Observação 58** (Relação Fundamental). Algebraicamente, a tangente é definida como a razão entre o seno e o cosseno:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} \quad (7.1)$$

Geometricamente, isso corresponde à semelhança entre o triângulo formado pelas linhas de seno e cosseno e o triângulo formado pela linha tangente e o raio unitário (UEL, 2026).

**Figura 10** – Representação geométrica da tangente no ciclo unitário.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

**Observação 59** (Domínio e Assíntotas). A função tangente não está definida quando  $\cos(\alpha) = 0$ , ou seja, para  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Nestes pontos, a reta suporte do raio  $\overline{OP}$  torna-se paralela ao eixo das tangentes, não havendo interseção (Brasil Escola, 2026).

### Objetivo Pedagógico da Construção

**Objetivo 5.** Criar um modelo dinâmico onde um ponto  $P$  percorre o ciclo trigonométrico, projetando-se sobre o eixo das tangentes (reta  $x = 1$ ) para formar o segmento que representa geometricamente a tangente do ângulo, permitindo a visualização de assíntotas e periodicidade.

### Por que esta construção é importante?

1. **Visualização de Assíntotas:** Permite observar o crescimento infinito da tangente quando o ângulo se aproxima de  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ ;
2. **Compreensão de Sinais:** Mostra claramente em quais quadrantes a tangente é positiva (I e III) ou negativa (II e IV);
3. **Conexão Algébrico-Geométrica:** Relaciona a razão  $\text{sen} / \text{cos}$  com um segmento físico mensurável no plano.

## 7.2 CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO NO GEOGEBRA

**Configuração dos Pontos de Referência** Inicialmente, definiremos o centro do ciclo e os pontos base. Na **Caixa de Entrada**, digite:

$$O = (0, 0)$$

$$A = (1, 0)$$

$$B = (-1, 0)$$

**Observação 60.**  $O$  é a origem.  $A$  é a origem dos arcos e também o ponto de tangência do eixo vertical que usaremos.  $B$  marca  $\pi$  rad.

**Fixando os Pontos Base** Para evitar movimentos acidentais, fixe os pontos estruturais:

```
DefinirObjetoFixo(O)
```

```
DefinirObjetoFixo(A)
```

```
DefinirObjetoFixo(B)
```

**Construção dos Eixos e do Ciclo** Construiremos o ciclo e o eixo das tangentes (reta vertical em  $x = 1$ ):

```
s = Reta(A, B)
```

```
m = Mediatriz(A, B)
```

```
c = Círculo(O, 1)
```

```
eixoTan = Perpendicular(s, A)
```

**Observação 61.** A reta `eixoTan` é a reta tangente à circunferência no ponto  $A$ . É sobre esta reta que mediremos o valor da tangente.

**Criação do Controle Deslizante (Ângulo em Radianos)** Para controlar o movimento do ponto no ciclo, criaremos um controle deslizante  $a$  variando de  $-2\pi$  a  $2\pi$ :

```
a = ControleDeslizante(-2pi, 2pi, 0.05)
```

**Observação 62.** O intervalo permite explorar ângulos negativos e múltiplas voltas, essencial para observar a periodicidade da tangente ( $\pi$ ).

**Conversão para Graus e Criação do Ponto P** Converta o radiano  $a$  para graus  $\alpha$  e crie o ponto  $P$ :

```
alpha = a * 180° / pi
```

```
P = Girar(A, alpha, 0)
```

**Construção da Linha Tangente** Para encontrar o valor da tangente, extendemos o raio  $\overline{OP}$  até interceptar o eixo das tangentes:

```
r = Reta(0, P)
```

```
T = Intersecção(r, eixoTan)
```

```
segTan = Segmento(A, T)
```

```
DefinirCor(segTan, "Verde")
```

**Observação 63.** O ponto  $T$  pode desaparecer quando  $a = \pi/2$  ou  $3\pi/2$ , pois a reta  $r$  será paralela ao  $eixoTan$ . Isso ilustra visualmente a indefinição da tangente nestes pontos.

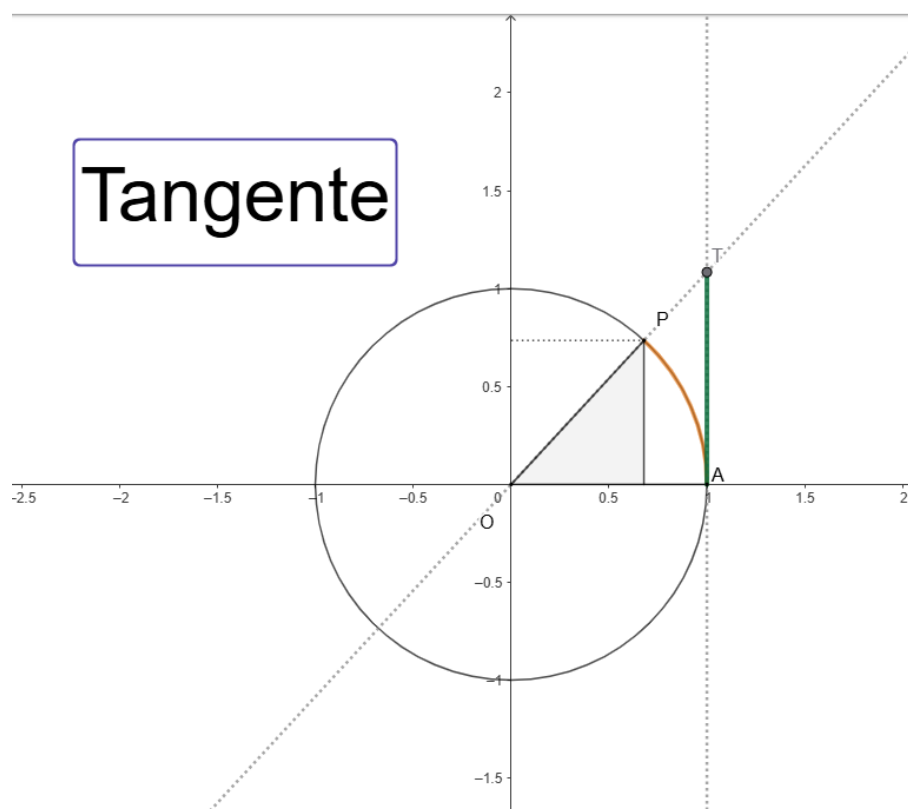
**Destacando a Linha Trigonométrica** Para fins didáticos, destaque o segmento e exiba o valor:

```
DefinirEspessura(segTan, 3)
```

Texto("tan = " + tan(a))

**Observação 64.** Usar a cor Verde diferencia a tangente do Cosseno (Azul) e Seno (Vermelho), facilitando a identificação visual simultânea.

**Figura 11 – Construção: Tangente.**



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 7.3 ANÁLISE GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO

**Relação entre Segmento e Razão** A construção valida algebricamente a definição de tangente:

**Teorema 7.3.1** (Coordenadas e Tangente). *Se  $P$  é um ponto no ciclo trigonométrico determinado pelo ângulo  $a$ , e  $T$  é a interseção da reta  $OP$  com a reta  $x = 1$ , então a ordenada de  $T$  é igual a  $\text{tg}(a)$ .*

$$T = (1, \text{tg}(a)) \quad (7.2)$$

**Comportamento nos Quadrantes** Ao mover o controle deslizante  $a$ , observe o comportamento do segmento verde:

1. **Quadrante I** ( $0 < a < \pi/2$ ):

- Segmento Verde aponta para cima (Positivo).
  - Cresce de 0 até  $+\infty$  quando  $a \rightarrow \pi/2$ .
2. **Quadrante II** ( $\pi/2 < a < \pi$ ):
- Segmento Verde aponta para baixo (Negativo).
  - Decresce de  $-\infty$  até 0.
3. **Quadrante III** ( $\pi < a < 3\pi/2$ ):
- Segmento Verde aponta para cima (Positivo).
  - Repete o comportamento do Quadrante I.
4. **Quadrante IV** ( $3\pi/2 < a < 2\pi$ ):
- Segmento Verde aponta para baixo (Negativo).
  - Repete o comportamento do Quadrante II.

**Exemplo 20** (Ângulo de  $45^\circ$  ( $\pi/4$ )). Quando  $a = \pi/4$ :

- $P$  está no ponto médio do primeiro quadrante.
- O triângulo formado é isósceles.
- O segmento  $\overline{AT}$  tem comprimento 1 ( $\text{tg}(45^\circ) = 1$ ).

#### 7.4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA

1. **Caça à Assíntota:** Peça aos alunos para moverem o controle  $a$  e encontrarem os valores onde o segmento verde "desaparece" ou fica extremamente grande. Qual a relação desses valores com  $\pi/2$ ?
2. **Comparação de Crescimento:** Compare a velocidade de crescimento do segmento verde (tangente) com o vermelho (seno) quando  $a$  se aproxima de  $90^\circ$ . Qual cresce mais rápido?
3. **Periodicidade:** Verifique qual é o menor intervalo necessário para que o segmento verde se repita exatamente igual (mesma posição e tamanho). (Resposta:  $\pi$  radianos).
4. **Gráfico da Tangente:** Crie um ponto  $G = (a, \text{tg}(a))$  e ative o **Rastro**. Mova  $a$  e observe a formação das curvas separadas pelas assíntotas verticais.

### Integração de Conceitos

A construção da linha tangente no GeoGebra complementa o estudo das funções trigonométricas, oferecendo uma representação geométrica para uma razão que frequentemente causa confusão quando apresentada apenas algebricamente. A visualização do segmento  $\overline{AT}$  crescendo infinitamente ao se aproximar de  $90^\circ$  fornece uma intuição poderosa sobre o conceito de assíntota vertical e limites, tópicos que serão fundamentais no Cálculo Diferencial.

Para além da demonstração formal, propõe-se a exploração do conceito por meio de um recurso de Geometria Dinâmica disponível no GeoGebra ([Autor \(2026a\)](#)), onde é possível simular digitalmente a construção da função tangente a partir do ciclo trigonométrico e interagir com as variações dos arcos e o comportamento de sua reta representativa.

Ao integrar esta construção com as de seno e cosseno, os estudantes podem observar simultaneamente as três razões principais, percebendo as relações de sinal e magnitude entre elas. Esta abordagem dinâmica reforça a compreensão de que a tangente não é apenas uma fórmula, mas uma relação geométrica concreta no ciclo trigonométrico, alinhada às habilidades EM13MAT404 e EM13MAT306 da BNCC.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho, intitulado *“Trigonometria em Movimento: explorando animações no GeoGebra com comandos em português”*, teve como propósito central desenvolver e sistematizar construções dinâmicas para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, utilizando o software GeoGebra com ênfase na linha de comando na versão em português. Ao longo dos capítulos, buscou-se articular o domínio técnico da ferramenta com fundamentação teórica sólida, alinhada às diretrizes curriculares nacionais e às teorias de aprendizagem contemporâneas.

A realização deste estudo permitiu atingir o objetivo geral de criar materiais didáticos que reduzam o nível de abstração dos conceitos trigonométricos. Especificamente, foram desenvolvidos três produtos educacionais principais: a visualização da relação entre comprimento de arco e radiano, a exploração de arcos côngruos e primeira determinação positiva, e a construção das linhas trigonométricas de seno e cosseno no ciclo unitário. Cada construção foi detalhada passo a passo, permitindo sua replicação por outros educadores, mesmo aqueles com menor familiaridade com o software.

Um diferencial significativo deste trabalho foi a compilação de um manual de comandos bilíngue (Português/Inglês), apresentado no Capítulo 2. Esta iniciativa visa democratizar o acesso às funcionalidades avançadas do GeoGebra, uma vez que grande parte da documentação disponível internacionalmente está em inglês. Ao fornecer a sintaxe em português, reduz-se a barreira linguística para professores da rede pública brasileira, facilitando a implementação de tecnologias digitais em sala de aula conforme preconizado pela Competência Geral 5 da BNCC ([Ministério da Educação, 2018](#)).

No âmbito teórico, demonstrou-se que as construções propostas estão em plena consonância com as habilidades da BNCC, especialmente EM13MAT306, EM13MAT307 e EM13MAT308, que exigem o uso de tecnologias digitais para modelar fenômenos periódicos e interpretar gráficos trigonométricos. Além disso, o alinhamento com os descritores do SAEB e SPAECE reforça o potencial deste material como estratégia de preparação para avaliações externas, sem perder o foco na compreensão conceitual profunda. A integração da metodologia de resolução de problemas de Polya garantiu que as atividades não fossem meramente ilustrativas, mas investigativas, estimulando os estudantes a passar pelas etapas de compreensão, planejamento, execução e retrospecto.

As teorias de aprendizagem de Papert, Vygotsky e Duval fundamentaram a escolha pelo GeoGebra como ferramenta de mediação. A possibilidade de converter entre

registros de representação semiótica (figural, algébrico e numérico) em tempo real, conforme destacado por Duval, foi explorada em todas as construções, permitindo que os alunos percebessem, por exemplo, que a variação do seno não é apenas uma fórmula, mas a projeção vertical de um ponto em movimento circular.

Contudo, reconhecem-se limitações neste estudo. A eficácia pedagógica das construções, embora fundamentada teoricamente e baseada em evidências da literatura citada nessa obra, carece de validação empírica em larga escala. A implementação destas atividades depende diretamente da infraestrutura tecnológica das escolas e da formação continuada dos docentes, fatores que ainda representam desafios no contexto da educação básica brasileira. Além disso, o escopo deste trabalho limitou-se aos conceitos introdutórios de trigonometria, não abrangendo tópicos avançados como equações trigonométricas, leis dos senos e cossenos em triângulos quaisquer, ou a extensão para números complexos.

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se:

- A aplicação das construções desenvolvidas em estudos de caso ou pesquisa-ação em salas de aula do Ensino Médio, para mensurar o impacto na aprendizagem e no engajamento dos estudantes;
- A expansão do manual de comandos para incluir scripts mais complexos (GeoGebra Scripting) e integração com outras ferramentas (como planilhas eletrônicas);
- O desenvolvimento de uma plataforma online ou repositório aberto onde professores possam baixar os arquivos .ggb prontos e acessar tutoriais em vídeo complementares;
- A extensão das construções para o ensino de Trigonometria no contexto do Cálculo Diferencial e Integral, explorando limites e derivadas de funções trigonométricas.

Em síntese, este trabalho reafirma que a tecnologia, quando utilizada com intencionalidade pedagógica e fundamentação teórica, tem o potencial de transformar o ensino de Matemática. O GeoGebra, acessível e poderoso, permite que a Trigonometria deixe de ser um conjunto de fórmulas memorizadas para se tornar um objeto de exploração visual e intuitiva. Espera-se que este material contribua para qualificar a prática docente, inspirando professores a incorporarem o dinamismo da geometria computacional em seu cotidiano escolar, promovendo assim uma aprendizagem mais significativa, crítica e alinhada às demandas do século XXI.

Por fim, conclui-se que a “Trigonometria em Movimento” não é apenas um título, mas um convite para que educadores e estudantes coloquem os conceitos matemáticos em ação, investigando, conjecturando e validando conhecimentos através da interação dinâmica proporcionada pelo software. A matemática, assim como o ponto  $P$  no ciclo trigonométrico construído, está em constante movimento, e cabe à educação fornecer as ferramentas para acompanhar e compreender essa trajetória.

## REFERÊNCIAS

- Autor. **Animação da Função Tangente**. 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/s9paunxc>. Acesso em: 02 jun. 2026.
- Autor. **Animação sobre Seno e Cosseno**. 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/jwjfpmwv>. Acesso em: 02 jun. 2026.
- Autor. **Gráficos das Funções Trigonométricas**. [S.l.], 2026. Recurso dinâmico interativo. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bka4mx2t>. Acesso em: 02 jun. 2026.
- Autor. **Primeira Determinação Positiva**. 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yzurwgvv>. Acesso em: 02 jun. 2026.
- Autor. **Retificação da Circunferência**. 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ugscwdp2>. Acesso em: 02 jun. 2026.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. Famílias de mídias digitais na educação matemática: Passado, presente e futuro. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (ed.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 2012. p. 55–74.
- Brasil Escola. **Comprimento de arco: como calcular, fórmula**. 2026. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/comprimento-um-arco.htm>. Acesso em: 31 mai. 2026.
- BRASIL. INEP. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Brasília, 2020. Documento oficial sobre as matrizes de referência e escalas de proficiência.
- BRASIL. INEP. **Matriz de Referência SAEB**. Brasília, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>.
- CAEd/UFJF. **Plataforma de Avaliação e Monitoramento da Educação do Ceará**. 2025. Acesso em: 28 mai. 2026. Disponível em: <https://avaliacaoemmonitoramentoceara.caeddigital.net/>.
- CK-12 Foundation. **Medida de Ângulos em Radianos**. 2026. Disponível em: <https://www.ck12.org/flexi/pt-br/mat-7-anos/medicao-de-angulos/>. Acesso em: 31 mai. 2026.
- DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (ed.). **Aprendizagem de Matemática: Registro de Representação Semiótica**. São Paulo: UNESP, 2003. p. 11–34.
- GeoGebra Team. **Plataforma GeoGebra**. [S.l.], 2026. Página oficial da plataforma com recursos, materiais didáticos e aplicativos dinâmicos. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 31 mai. 2026.
- HOHENWARTER, Markus; JONES, Keith. Ways of linking geometry and algebra: The case of geogebra. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, v. 27, n. 3, p. 126–131, 2007.

Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 08 mai. 2026.

Mundo Educação. **Radiano**. 2026. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/radiano.htm>. Acesso em: 31 mai. 2026.

PAPERT, Seymour. **Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas**. New York: Basic Books, 1980.

POLYA, George. **How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method**. Princeton: Princeton University Press, 1945. Tradução brasileira: *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SEDUC. **Matriz de Referência SPAECE-EM**. Fortaleza, 2020. Disponível em: <https://www.seduc.ce.gov.br>.

SEDUC. **Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – SPAECE**. Fortaleza, 2022. Matrizes de Referência e Documentos de Avaliação.

SEDUC. **Matriz de Referência de Matemática: Ensino Médio**. Fortaleza, 2025. Documento norteador da Avaliação Somativa.

UEL. **Matemática Essencial: Trigonometria (Módulos 01, 02 e 03)**. 2026. Disponível em: <https://www.uel.br/projetos/matessencial/>. Acesso em: 31 mai. 2026.

VYGOTSKY, Lev S. **Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes**. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Os procedimentos metodológicos descritos a seguir sistematizam a construção das representações gráficas das funções trigonométricas no software de geometria dinâmica *GeoGebra*. A estratégia fundamenta-se na parametrização de pontos no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , em que a variação de um controle deslizante atua como o argumento independente do domínio. Ao associar as coordenadas desses pontos às razões trigonométricas fundamentais, a ativação do rastro possibilita a transição da geometria pontual para a visualização do lugar geométrico contínuo, permitindo a análise das propriedades de amplitude, periodicidade e comportamento assintótico das funções seno, cosseno e tangente.

**Passo 1: Criação do Parâmetro** Crie um controle deslizante chamado  $a$ . Sugere-se configurar o intervalo de 0 a  $2\pi$  (ou 0 a  $360^\circ$ ).

```
a = ControleDeslizante(0, 2\pi, 0.01)
```

**Passo 2: Definição dos Pontos** Insira os pontos na barra de entrada para representar as coordenadas de cada função:

$$P = (a, \text{sen}(a)), \quad Q = (a, \text{cos}(a)), \quad R = (a, \text{tg}(a))$$

**Passo 3: Ativação do Rastro** Para que o movimento do ponto desenhe o gráfico, utilize os comandos:

- DefinirRastro(P, true) OU DefinirTraço(P, true)
- DefinirRastro(Q, true) OU DefinirTraço(Q, true)
- DefinirRastro(R, true) OU DefinirTraço(R, true)

**Passo 4: Personalização de Cores** Para diferenciar as funções visualmente, utilize o comando `DefinirCor(objeto, vermelho, verde, azul)`. Os valores variam de 0 a 1:

- **Seno (Azul):** `DefinirCor(P, blue)`
- **Cosseno (Vermelho):** `DefinirCor(Q, red)`

- **Tangente (Verde):** DefinirCor(R, green)

**Passo 5: Visualização** Movimente o controle deslizante  $a$  para observar simultaneamente a formação dos gráficos.

**Observação:** A função tangente não está definida para valores de  $a$  tais que

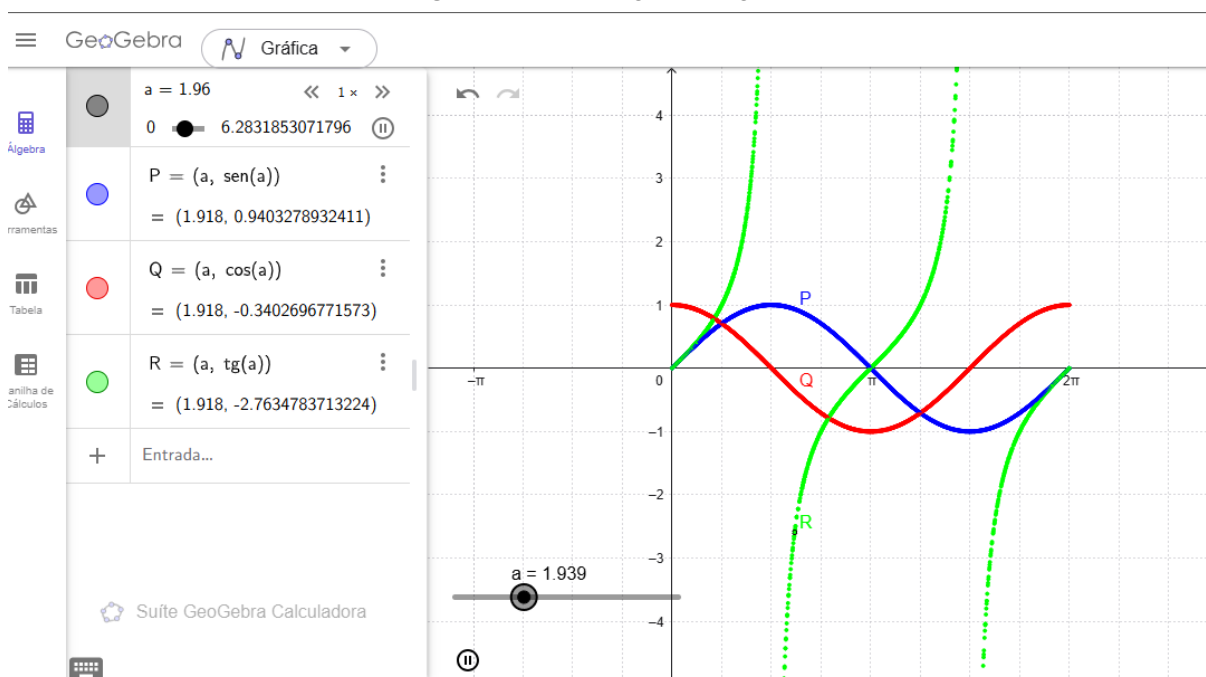
$$a = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

o que gera saltos verticais ou descontinuidades no rastro do ponto  $R$ .

**Conclusão:** Os rastros coloridos deixados pelos pontos representam as trajetórias das funções:

Seno, Cosseno e Tangente.

**Figura 12 –** Plotagem do gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Para observar o comportamento das funções trigonométricas de forma prática, utilizou-se o aplicativo interativo “Gráficos das Funções Trigonômicas”, disponível no site do GeoGebra (Autor, 2026c). Com este recurso, é possível modificar os valores diretamente no gráfico, o que ajuda a entender melhor os conceitos estudados.

## APÊNDICE B – MAPEAMENTO HABILIDADES/DESCRITORES

**Tabela 25** – Mapeamento Integrado: BNCC Matemática, BNCC Computação, Saeb e SPAECE

<b>Atividade bra</b>	<b>GeoGe-</b>	<b>BNCC Matemá- tica</b>	<b>BNCC Computa- ção</b>	<b>Saeb</b>	<b>SPAECE</b>
Razões no Triângulo Retângulo		EM13MAT302	EM13CO02	D5	D53
Teorema de Pitágo- ras e Áreas		EM13MAT302	EM13CO18	D2	D50
Ciclo Trigonométrico e Radianos		EM13MAT404	EM13CO11	<i>D30<sub>SAEB</sub></i>	<i>D30<sub>SAEB</sub></i>
Gráficos de Funções Periódicas		EM13MAT306	EM13CO11 EM13CO21	e <i>D30<sub>SAEB</sub></i>	<i>D30<sub>SAEB</sub></i>
Identidades e Redu- ção de Quadrante		EM13MAT404	EM13CO02	<i>D30<sub>SAEB</sub></i>	<i>D30<sub>SAEB</sub></i>
Leis dos Senos e Cossenos		EM13MAT302	EM13CO18	D2 / D5	D53 / D50
Animações e Para- metrização via Co- mandos		EM13MAT406	EM13CO02 EM13CO21	e D20 / D30	<i>D30<sub>SAEB</sub></i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

## APÊNDICE C – RESUMO DE COMANDOS

**Tabela 26** – Comandos do GeoGebra: Tradução e Funcionalidade

Português	Inglês	Descrição
Ponto(A,B)	Point(A,B)	Ponto sobre objeto
PontoMédio(A,B)	Midpoint(A,B)	Ponto médio
DefinirObjetoFixo(A)	SetFixed(A)	Fixar objeto
DefinirCor(A,"Azul")	SetColor(A,"Blue")	Alterar cor
Reta(A,B)	Line(A,B)	Reta por dois pontos
Segmento(A,B)	Segment(A,B)	Segmento de reta
Semirreta(A,B)	Ray(A,B)	Semirreta
Paralela(P,s)	Parallel(P,s)	Reta paralela
Perpendicular(P,s)	PerpendicularLine(P,s)	Reta perpendicular
Mediatriz(A,B)	PerpendicularBisector(A,B)	Mediatriz
Bissetriz(A,O,P)	AngleBisector(A,O,P)	Bissetriz
Círculo(O,1)	Circle(O,1)	Círculo centro e raio
ArcoCircular(O,A,P)	CircularArc(O,A,P)	Arco de círculo
Polígono(A,B,C)	Polygon(A,B,C)	Polígono livre
PolígonoRegular(A,B,n)	RegularPolygon(A,B,n)	Polígono regular
Ângulo(A,O,P)	Angle(A,O,P)	Medida de ângulo
Distância(A,B)	Distance(A,B)	Distância entre pontos
Área(pol)	Area(poly)	Área de figura
Comprimento(r)	Length(r)	Comprimento
ControleDeslizante(m,M,s)	Slider(m,M,s)	Controle deslizante
Girar(A,α,0)	Rotate(A,α,0)	Rotação
Transladar(A,(x,y))	Translate(A,(x,y))	Translação
Refletir(A,s)	Reflect(A,s)	Reflexão em reta
Homotetia(A,k,0)	Dilate(A,k,0)	Homotetia
Intersecção(s,c)	Intersect(s,c)	Interseção

Continua na próxima página...

**Tabela 26 – Continuação**

<b>Português</b>	<b>Inglês</b>	<b>Descrição</b>
Raiz(f)	Root (f)	Raízes de função

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).