UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO DA SILVA BELO FILHO

COMBINATÓRIA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: ESTRATÉGIAS RESOLUTIVAS E SUA RELAÇÃO COM AS HABILIDADES DA BNCC PARA O ENSINO MÉDIO

REDENÇÃO – CEARÁ
2026

JOÃO DA SILVA BELO FILHO

COMBINATÓRIA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: ESTRATÉGIAS RESOLUTIVAS E SUA RELAÇÃO COM AS HABILIDADES DA BNCC PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO – CEARÁ
2026

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Belo Filho, João da Silva.

B452c

Combinatória em problemas olímpicos: estratégias resolutivas e sua relação com as habilidades da BNCC para o ensino médio / João da Silva Belo Filho. - Redenção, 2026.
97f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2026.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Análise combinatória. 2. Resolução de problemas. 3. Olimpíadas de matemática. 4. Educação matemática. 5. Inteligência Artificial Generativa (IAgen.). 6. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). I. Diógenes, Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes. II. Título.

CE/UF/BSCA CDD 511.6

JOÃO DA SILVA BELO FILHO

COMBINATÓRIA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: ESTRATÉGIAS RESOLUTIVAS E SUA RELAÇÃO COM AS HABILIDADES DA BNCC PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, Campus das Auroras, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 27/02/2026

BANCA EXAMINADORA

Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dra. Claudia Rebouças Lima Fernandes
Universidade Estadual do Ceará - UECE

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 27/02/2026, às 17:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **JOAO FRANCISCO DA SILVA FILHO**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 28/02/2026, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **CLAUDIA REBOUÇAS LIMA FERNANDES**, **Usuário Externo**, em 02/03/2026, às 21:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Este trabalho é dedicado à minha família, Lilian Araújo, Luiz Felipe, Socorro, Márcia e Felipe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ser minha fonte de orientação e discernimento, iluminando o caminho e fortalecendo-me com as ferramentas fundamentais para a conclusão desta jornada acadêmica.

À minha família, por ser o alicerce de toda a minha formação. Expresso minha gratidão eterna à minha mãe, Maria do Socorro, e aos meus irmãos, Márcia Belo e Felipe Belo, que com amor incondicional e incentivo constante, sustentaram meus passos nesta árdua, porém recompensadora caminhada.

À Lilian Araújo, minha esposa e meu maior incentivo. Agradeço por estar ao meu lado em cada passo desta jornada, oferecendo o suporte necessário para que eu pudesse me dedicar integralmente aos estudos. Seu amor, sua confiança e sua paciência foram o combustível que me trouxe até aqui. Você é o melhor presente que a vida me deu.

Ao meu amado filho, Luiz Felipe. Sua alegria contagiante ao me receber com um "papai" a cada fim de semana é o combustível que renova minhas forças e me dá a certeza de que cada esforço vale a pena. Você é a razão de todas as minhas batalhas e a inspiração para que eu nunca desista de vencer.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela dedicação constante e pela orientação segura, fundamentais para a concepção e o desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (orientador), Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho e Profa. Dra. Claudia Rebouças Lima Fernandes, expresso minha profunda gratidão e respeito. Agradeço pela generosidade em aceitar o convite para avaliar este trabalho e, sobretudo, pelas valiosas contribuições, críticas e sugestões oferecidas durante o processo de defesa. Suas observações foram fundamentais para o refinamento desta pesquisa e para a minha maturação acadêmica, contribuindo significativamente para a qualidade final desta dissertação e para a minha trajetória como mestre em Matemática.

Aos meus colegas do PROFMAT — Benício, Neto, Wesley, Maurício, Marinaldo, Jonas, Rafael, Edgliz e Bosco —, pelas valiosas amizades estabelecidas ao longo do curso. Um agradecimento especial aos meus companheiros de viagem, Carlos Higor, Elídio Filho, Manuel e Ivanildo, pelos momentos inesquecíveis e pelas tantas gargalhadas que tornaram os trajetos de ida e vinda parte essencial desta jornada.

Ao meu grande amigo Carlos Higor, um presente que o PROFMAT me deu e que a vida transformou em irmão. Mais do que companheiro de incontáveis horas de estudo e dedicação, sua amizade tornou-se tão essencial que hoje o tenho com honra como padrinho do meu matrimônio. Obrigado por caminhar ao meu lado nesta jornada e na vida.

Ao meu caro amigo Elídio Filho, que o PROFMAT me apresentou como colega de sala, mas a vida consolidou como um grande parceiro. Agradeço pelas risadas e viagens já vividas, pela confiança mútua em nossos investimentos e, acima de tudo, pela amizade sólida que nos projeta para tantos outros destinos.

Ao seleto quadro de professores do PROFMAT — Rafael, Joserlan, João Francisco, Danila, Wesley, Rodrigo, Marcelo e Amanda, — expresso minha profunda gratidão pela excelência no ensino e pela generosidade com que partilharam seus conhecimentos. Suas orientações foram fundamentais para a minha evolução intelectual ao longo destes dois anos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de mestrado, apoio financeiro que foi fundamental para a minha dedicação integral a esta pesquisa e para a conclusão desta etapa da minha formação acadêmica. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Nesta trajetória de dois anos no PROFMAT, pude reafirmar minha vocação como professor de Matemática. Contudo, além das fórmulas e teoremas, carrego comigo o apreço pelos versos e pelas rimas. Como forma de eternizar os sentimentos que esta jornada despertou em meu peito, dedico aos que fizeram parte desta história o soneto a seguir:

Minha jornada no Mestrado em Matemática

Poderia retratar muita coisa, ao longo desses dois anos de curso.
Mas quero apenas deixar uma marca nesse tempo transcorrido!
Ao longo dos anos, muitas coisas eu tenho vivido,
Mas como essa jornada, reforço em meu discurso
que foi única! As amizades, os estudos, as batalhas!
Todas com seu alto grau de dificuldade.
Mas nesse Mestrado a palavra que fica é Lealdade!
Companheirismo, apoio, transpor muralhas,
Com a certeza que Deus reserva tudo no seu tempo!
Como se fosse em um simples vão momento,
Guardados no peito com mais puro amor!
Peço apenas uma simples coisa. Por favor,
Não esqueçam da Fortaleza que construímos. E, com louvor,
Fomos todos aprovados com um feliz e singelo sentimento.

"A vida é uma Análise Combinatória:
as possibilidades podem ser infinitas, mas a escolha
e a ordem dos elementos determinam
o sentido do resultado final."

RESUMO

A presente dissertação investiga o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio, abordando a lacuna entre a abordagem tradicional, focada na aplicação de fórmulas, e a crescente exigência de raciocínio lógico-combinatório por avaliações de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e competições científicas, como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). O objetivo principal é analisar o potencial pedagógico de problemas de contagem oriundos desses exames e, a partir desta análise, desenvolver um produto educacional que sirva como proposta pedagógica. Para tanto, realiza-se uma revisão bibliográfica sobre o raciocínio combinatório e a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, tendo como norte as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e autores de referência na área. A pesquisa culmina na análise qualitativa de uma coletânea de questões, utilizando-se de Inteligência Artificial Generativa (IAG) como ferramenta auxiliar na análise pedagógica e preditiva de erros conceituais, associando suas estratégias resolutivas às competências e habilidades matemáticas preconizadas. Como resultado, elabora-se um material didático com resoluções comentadas que explicitam essa conexão curricular. Conclui-se que a utilização estratégica de problemas de olimpíadas e vestibulares, apoiada por ferramentas contemporâneas, constitui um caminho fundamentado para um ensino de Análise Combinatória mais significativo, crítico e alinhado às competências exigidas na educação contemporânea.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Resolução de Problemas. BNCC. Educação Matemática. Olimpíadas de Matemática. ENEM. OBMEP. Inteligência Artificial Generativa.

ABSTRACT

This dissertation investigates the teaching and learning of Combinatorial Analysis in High School, addressing the gap between the traditional approach, focused on the application of formulas, and the growing demand for combinatorial logical reasoning by large-scale assessments, such as the National High School Exam (ENEM), and scientific competitions, such as the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP). The main objective is to analyze the pedagogical potential of counting problems originating from these exams and, based on this analysis, develop an educational product that serves as a pedagogical proposal. To this end, a bibliographic review is carried out on combinatorial reasoning and the teaching-learning methodology through problem-solving, guided by the directives of the National Common Curricular Base (BNCC) and reference authors in the field. The research culminates in the qualitative analysis of a collection of questions, utilizing Generative Artificial Intelligence (GAI) as an auxiliary tool in the pedagogical and predictive analysis of conceptual errors, associating their resolution strategies with the recommended mathematical competencies and skills. As a result, didactic material is elaborated with commented resolutions that make this curricular connection explicit. It is concluded that the strategic use of Olympiad and entrance exam problems, supported by contemporary tools, constitutes a well-founded path for a more significant, critical, and aligned teaching of Combinatorial Analysis with the competencies required in contemporary education.

Keywords: Combinatorial Analysis. Problem Solving. BNCC. Mathematics Education. Mathematics Olympiads. ENEM. OBMEP. Generative Artificial Intelligence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo
PIC Jr.	Programa de Iniciação Científica Jr.
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IAG	Inteligência Artificial Generativa
LLMs	Modelos de Linguagem Grande

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\notin$	Não Pertence
$\subset$	Está Contido
$\subseteq$	Está Contido ou é Igual
Ω	Omega, Conjunto Universo
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\varnothing$	Conjunto Vazio
$\cup$	União
$\cap$	Interseção
$\sum$	Somatório

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação tem como foco de investigação a Análise Combinatória no Ensino Médio, delimitando seu objeto ao estudo de problemas de contagem oriundos de competições como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e de avaliações em larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A pesquisa investiga como as estratégias resolutivas exigidas por esses problemas se articulam com as competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), visando ir além de um ensino pautado na memorização de fórmulas.

A justificativa para a escolha do tema reside na confluência de dois fatores: a notória dificuldade dos estudantes com o raciocínio combinatório e a crescente valorização de habilidades lógico-analíticas por avaliações nacionais e internacionais, como o ENEM, o PISA e o SPAECE. Em contrapartida à abordagem procedimental tradicional, os problemas olímpicos e de vestibulares oferecem um contexto rico para o desenvolvimento da criatividade, da modelagem e do pensamento crítico. Dessa forma, torna-se relevante e necessária a busca por abordagens pedagógicas que conectem o potencial desses problemas não-rotineiros às diretrizes curriculares da educação básica brasileira.

Diante do exposto, o objetivo geral deste trabalho é analisar o potencial pedagógico de problemas de contagem selecionados e, a partir dessa análise, desenvolver um produto educacional que sirva como proposta para o ensino de Análise Combinatória. Para tal, foram delineados os seguintes objetivos específicos: investigar como problemas de competições podem ser adaptados para a sala de aula; analisar quais habilidades da BNCC são mobilizadas em seu processo de resolução; e propor atividades que preparem os alunos para as exigências de avaliações externas.

Para alcançar tais objetivos, a dissertação foi estruturada em capítulos que constroem, progressivamente, a ponte entre a teoria e a prática.

O Capítulo 2, o Referencial Teórico, estabelece as bases que sustentam a pesquisa. Nele é discutido como as diretrizes da BNCC e a matriz do ENEM valorizam um pensamento matemático que transcende a aplicação de fórmulas. É analisada a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, com suporte em autores como Dante e Polya, e contextualizamos a urgência de novas abordagens a partir de diagnósticos como o do PISA. Por fim, caracterizamos a OBMEP como uma política educacional de impacto e aprofundamos o conceito de raciocínio combinatório defendido por pesquisadores da área.

No Capítulo 3, intitulado Análise Combinatória, é realizada uma revisão aprofundada do conteúdo matemático que é objeto deste estudo. Partindo de um resgate histórico sobre o surgimento da disciplina, o capítulo detalha os princípios fundamentais da contagem, os diferentes tipos de agrupamentos — permutações, arranjos e combinações (simples e com repetição) — e explora tópicos essenciais para a resolução de problemas mais complexos, como o Princípio da Casa dos Pombos, o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton, fundamentando a base de conhecimento necessária para a análise que se segue.

O Capítulo 4, Análise de Problemas, representa o núcleo prático desta dissertação. Neste ponto é apresentada uma coletânea de questões selecionadas do ENEM, de vestibulares da UECE e da OBMEP. Cada problema é acompanhado não apenas de uma resolução matemática detalhada, mas também de uma análise pedagógica que o conecta diretamente às competências e habilidades da BNCC. Este capítulo materializa a proposta do trabalho, demonstrando como a teoria discutida no referencial pode ser aplicada na prática para enriquecer o ensino da Análise Combinatória.

Finalmente, o Capítulo 5, "A Inteligência Artificial Generativa como ferramenta de Análise de Erros e Geração de Distratores", avança a discussão ao explorar o uso de tecnologias emergentes como apoio ao docente. Este capítulo investiga como a IAG pode ser estrategicamente empregada para analisar os erros conceituais recorrentes dos alunos — identificados na análise prática do capítulo anterior — e para gerar distratores qualificados, oferecendo ao professor uma ferramenta moderna para a elaboração de avaliações formativas mais eficazes.

A literatura recente do PROFMAT apresenta importantes contribuições sobre o ensino de Análise Combinatória sob diferentes prismas. Mourão (2018) explorou a aplicação do conteúdo em exames militares e olimpíadas; Rocha (2019) analisou as perspectivas de ensino alinhadas à Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e Neto (2024) investigou a eficiência da dedução de fórmulas especificamente para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O diferencial desta dissertação em relação aos trabalhos supracitados reside na integração da Inteligência Artificial Generativa (IAG) como ferramenta pedagógica inovadora. Enquanto as pesquisas anteriores focam em metodologias resolutivas tradicionais, este trabalho propõe o uso da IAG para a criação de distratores qualificados em questões de Combinatória no modelo do ENEM, permitindo uma análise preditiva de erros conceituais e oferecendo um suporte tecnológico inédito na elaboração de avaliações formativas mais eficazes.

Espera-se com este percurso, contribuir para a prática docente, oferecendo um material fundamentado, incluindo uma reflexão sobre a aplicação de novas tecnologias no processo avaliativo, que sirva de inspiração para um ensino de Análise Combinatória mais significativo, desafiador e alinhado às competências exigidas do estudante do século XXI.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo estabelece as bases teóricas que sustentam a investigação sobre o uso de problemas olímpicos no ensino de Análise Combinatória. Partindo de uma análise conjuntural, abordamos como as diretrizes educacionais do país, representadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), valorizam o desenvolvimento de um pensamento matemático crítico e aplicado, distanciando-se de uma abordagem puramente procedimental. Nesse contexto, a Análise Combinatória emerge não como um campo de memorização de fórmulas, mas como um terreno fértil para o desenvolvimento de habilidades essenciais de contagem, modelagem e argumentação.

Para conectar as exigências curriculares a uma prática pedagógica eficaz, este referencial explora a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, fundamentada em teóricos como Dante (2009), e detalha o método heurístico de Polya (1978) como em seu livro "A arte de resolver problemas" estruturando, dessa forma, um caminho para o desenvolvimento do raciocínio. A urgência de tais abordagens é reforçada pela análise do desempenho brasileiro em avaliações internacionais, como o PISA. Finalmente, apresentamos as competições científicas, em especial a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), como um ecossistema multifacetado que não apenas revela talentos, mas também oferece um acervo de problemas desafiadores capazes de potencializar o desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas preconizadas para o Ensino Médio.

2.1 O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: PARA ALÉM DAS FÓRMULAS

A Análise Combinatória é a área da matemática que estuda a contagem, a organização e a escolha de elementos de um conjunto finito. No contexto do Ensino Médio, seu ensino frequentemente se resume à aplicação de fórmulas de arranjos, permutações e combinações. No entanto, uma abordagem mais aprofundada, e em linha com as tendências da educação matemática, valoriza o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Este se caracteriza pela capacidade de organizar o pensamento de forma a enumerar todas as possibilidades de um evento, sem a necessidade de recorrer a fórmulas prontas, mas sim aos princípios fundamentais da contagem.

Essa perspectiva é corroborada por pesquisadoras brasileiras como Cristiane Pessoa e Rute Borba, referências na área. Elas defendem que o trabalho com a Análise Combinatória deve começar muito antes do Ensino Médio e ter como foco o desenvolvimento de uma forma de pensar específica. Segundo Borba e Pessoa (2013), o raciocínio combinatório é *"um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto"*. Essa visão destaca a Combinatória não como um mero tópico, mas como uma ferramenta para o desenvolvimento cognitivo do aluno. Pessoa (2009) reforça essa ideia ao afirmar que, *"do ponto de vista psicológico, a Combinatória é um esquema operacional fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico, ou seja, um modo de raciocinar"*.

Os Princípios Fundamentais da Contagem, o Aditivo e o Multiplicativo, são a base para a resolução de qualquer problema combinatório. O Princípio Aditivo é utilizado quando as escolhas são excludentes entre si, enquanto o Princípio Multiplicativo se aplica a decisões sucessivas e dependentes. A compreensão e aplicação desses princípios são essenciais para a construção de um entendimento sólido da Análise Combinatória.

Ainda sobre este tópico é válido salientar que autores brasileiros clássicos como Morgado *et al.* (2016) relatam em suas obras o quão importante é a resolução de problemas de análise combinatória sem recorrer ao uso de fórmulas.

Essa ideia evidencia que a ênfase nos princípios básicos não é apenas uma tendência pedagógica recente, mas uma recomendação de longa data por parte de matemáticos experientes, que veem na aplicação direta das fórmulas um obstáculo para a verdadeira compreensão e para o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas. A construção do raciocínio, portanto, precede e transcende a aplicação mecânica de expressões matemáticas.

2.2 A COMBINATÓRIA NA BNCC E NO ENEM: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM FOCO

Este trabalho explora a intersecção entre a Análise Combinatória, presente em desafios de olimpíadas de matemática como a OBMEP, e as diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio, com foco na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A proposta é fundamentar a pesquisa que investiga como o trabalho com problemas olímpicos de Combinatória, com suporte em obras de referência como as de Morgado *et al.* (2016), pode potencializar o desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas previstas para os estudantes dessa etapa da educação básica.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, enfatiza o desenvolvimento de competências que vão além da simples aplicação de algoritmos, valorizando a resolução de problemas, a argumentação e a capacidade de relacionar a matemática com o cotidiano.

No que tange à Análise Combinatória, a *Competência Específica 3* da BNCC (Brasil, 2018) é particularmente relevante:

> *Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos [...] para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentos consistentes.*

Esta competência se desdobra em habilidades. A principal é a **EM13MAT310**, que visa *"Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore"* (Brasil, 2018).

De forma complementar, a habilidade **EM13MAT311** conecta a contagem à probabilidade, estabelecendo a necessidade de *"Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando a contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade"* (Brasil, 2018).

Cada habilidade é identificada por um *código alfanumérico* cuja composição é a Figura 1:

Figura 1 – Código Alfanumérico

Fonte: BNCC (Brasil, 2018)

Segundo esse critério, o código **EM13LGG103**, por exemplo, refere-se à terceira habilidade proposta na área de Linguagens e suas Tecnologias relacionadas a competência específica 1, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

É preciso enfatizar que a organização das habilidades do Ensino Médio da BNCC (com explicação da vinculação entre competência especifica de área e habilidade) tem como objetivo definir claramente as aprendizagens essenciais a ser garantidas aos estudantes nessa etapa.

A abordagem da Análise Combinatória em problemas olímpicos dialoga diretamente com as diretrizes da BNCC. A resolução desses problemas é uma aplicação direta e aprofundada da habilidade **EM13MAT310**, desafiando o estudante a:

- **Interpretar e modelar:** Traduzir o enunciado de um problema para a linguagem da Análise Combinatória, identificando as decisões a serem tomadas e a natureza dos agrupamentos.
- **Desenvolver estratégias:** A escolha entre o princípio multiplicativo e o aditivo, a identificação de permutações ou combinações, e o uso de técnicas como a inclusão-exclusão são a essência da estratégia resolutiva.

- **Argumentar e justificar:** Uma solução em uma olimpíada não se resume à resposta numérica. É preciso construir um argumento lógico que justifique a contagem, habilidade que se conecta diretamente com a Competência Específica 3.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) segue uma linha convergente, avaliando a capacidade do candidato de mobilizar conhecimentos para resolver problemas cotidianos. A Análise Combinatória é uma ferramenta essencial para a Competência de Área 7 da Matriz de Referência de Matemática (INEP, 2023):

> *"Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade..."*

Dentro desta competência, a Habilidade 28 (INEP, 2023) é a mais relevante, pois exige do candidato:

> *"Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade."*

Problemas de probabilidade, muito comuns no exame, dependem intrinsecamente de uma contagem correta dos casos possíveis e favoráveis, reforçando a importância da Análise Combinatória como conhecimento de base para a resolução de itens do ENEM.

O raciocínio combinatório, ao forçar o estudante a pensar de forma sistemática, a considerar todos os casos e a evitar contagens duplas, desenvolve o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas de forma ampla, extrapolando o domínio da matemática.

Em suma, fica evidente a convergência entre as exigências da BNCC, a abordagem do ENEM e o potencial dos problemas olímpicos. O estudo da Análise Combinatória focado em estratégias resolutivas, conforme guiado por obras de referência e exigido em olimpíadas, constitui um treinamento intensivo no desenvolvimento de um pensamento matemático robusto e estratégico. Essa abordagem não apenas se alinha perfeitamente às competências delineadas pela BNCC, mas também capacita o estudante a enfrentar tanto os desafios de avaliações de larga escala, como o ENEM, quanto problemas complexos em diversas áreas do conhecimento.

2.3 A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Análise Combinatória é o campo da matemática que se dedica aos problemas de contagem. Tradicionalmente, seu ensino no Ensino Médio é marcado por uma abordagem procedimental, focada na aplicação de fórmulas de arranjos, permutações e combinações. Contudo, essa metodologia frequentemente resulta em uma aprendizagem mecânica, na qual os estudantes não desenvolvem a capacidade de interpretar e modelar situações-problema, que é a essência do pensamento combinatório.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio propõe uma mudança nessa perspectiva, valorizando o desenvolvimento de competências e habilidades em detrimento da mera memorização. Para a Combinatória, a BNCC enfatiza a necessidade de desenvolver o raciocínio combinatório, que envolve a organização de dados, a sistematização da contagem e a construção de estratégias para enumerar possibilidades.

A competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias orienta a *"utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados"* Brasil (2018). Dentro dessa competência, a habilidade EM13MAT310 é diretamente ligada ao tema.

A BNCC (Brasil, 2018), ao mencionar "estratégias diversas" e os "princípios multiplicativo e aditivo", sinaliza que o foco deve estar na compreensão dos processos de contagem, e não na escolha de uma fórmula pronta. Problemas olímpicos, por sua natureza desafiadora e não-rotineira, oferecem um terreno fértil para o desenvolvimento dessa habilidade, pois exigem que o estudante vá além do que é trivial e construa suas próprias estratégias resolutivas.

A metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas posiciona o problema não como um exercício de aplicação de um conceito já ensinado, mas como o ponto de partida para a construção do conhecimento matemático. O aluno se torna o protagonista de seu aprendizado, investigando, formulando hipóteses e desenvolvendo conceitos a partir da necessidade de superar um desafio.

Um dos maiores expoentes dessa metodologia no Brasil, Dante (2009), define um problema como uma situação que demanda a descoberta de informações desconhecidas e para a qual o estudante não possui uma solução imediata. Ele defende que essa abordagem é crucial para o desenvolvimento do pensamento crítico:

> "Se o exercício é um treino, o problema é um desafio. E é resolvendo desafios que se aprende a pensar e a raciocinar matematicamente. [...] o problema é o ponto de partida da atividade matemática e não uma aplicação, no final do capítulo, de fórmulas e algoritmos que o professor ensinou." (Dante, 2009, p. 22).

Nessa perspectiva, o papel do professor se transforma. Ele deixa de ser um mero expositor de conteúdos para se tornar um mediador, um proponente de desafios que instigam a curiosidade e a investigação dos alunos. A resolução de problemas, portanto, alinha-se perfeitamente às competências gerais da BNCC, como o pensamento científico, crítico e criativo (Competência Geral 2).

2.3.1 As Estratégias de Polya: Um Caminho para a Resolução de Problemas

Resolver um problema complexo, como os de olimpíadas de matemática, exige mais do que conhecimento técnico; demanda uma organização do pensamento e um plano de ação. O matemático húngaro George Polya, em sua obra seminal "A Arte de Resolver Problemas"

(1978), sistematizou um método heurístico para abordar problemas, aplicável a diversas áreas do conhecimento. Sua proposta não é um algoritmo rígido, mas um guia flexível dividido em quatro etapas fundamentais.

Polya (1978) acreditava que a habilidade de resolver problemas é uma habilidade prática, que se aprende pelo exemplo e pela prática. Ele afirma:

> "Um grande feito é um grande problema resolvido. [...] A resolução de problemas é uma habilidade prática, como, digamos, nadar. Adquirimos qualquer habilidade pela imitação e pela prática. [...] se quisermos aprender a nadar, teremos que entrar na água, e se quisermos aprender a resolver problemas, teremos que resolvê-los." (Polya, 1978, p. 1).

As quatro fases propostas por Polya são:

- **Compreender o Problema:** Esta é a fase inicial e crucial. O estudante precisa identificar a incógnita, os dados disponíveis e as condições do problema. Perguntas como "O que se pede?", "Quais são os dados?" e "É possível satisfazer as condições?" são essenciais. Em Análise Combinatória, esta etapa envolve entender a natureza do agrupamento (é uma sequência? um conjunto?), se a ordem importa e se há repetição de elementos.

- **Estabelecer um Plano (Elaborar uma Estratégia):** Com o problema compreendido, o próximo passo é traçar um caminho para a solução. Polya sugere uma série de estratégias heurísticas que podem ser aplicadas. Para problemas de combinatória olímpica, algumas das mais eficazes são:

  - Procurar um padrão: Resolver o problema para casos menores e mais simples ($n = 1, n = 2, n = 3\ldots$) para tentar identificar uma regularidade ou uma fórmula de recorrência.
  - Simplificar o problema: Relaxar algumas das condições do problema para resolvê-lo em uma versão mais simples e, depois, reintroduzir as restrições gradualmente.
  - Dividir o problema em casos: Separar o problema em subproblemas menores, mutuamente exclusivos, cuja soma das soluções resulta na solução total (Princípio Aditivo).
  - Construir uma solução passo a passo: Pensar na montagem do agrupamento como uma série de decisões sucessivas (Princípio Multiplicativo).
  - Usar o complementar: Às vezes, é mais fácil contar o número total de casos e subtrair os casos indesejados (contagem pelo complementar)

- **Executar o Plano:** Esta fase consiste em colocar a estratégia escolhida em prática, realizando os cálculos e os passos lógicos necessários. É uma etapa que exige atenção e organização. Cada passo deve ser verificado para garantir que está correto.

- **Fazer o Retrospecto (Olhar para Trás):** Concluída a execução, é fundamental revisar a solução. O estudante deve verificar o resultado, a lógica dos argumentos e refletir se seria possível resolver o problema de uma maneira diferente ou mais simples. Segundo Polya (1978), esta etapa é fundamental para a consolidação do aprendizado: *"mesmo uma ideia muito boa, se nos ocorrer de repente, aparece apenas como um lampejo. Para que se torne realmente nossa, temos de reconsiderá-la e reexaminá-la demoradamente"* (p. 33). No contexto olímpico, essa revisão permite solidificar o conhecimento e transformar a solução de um problema específico em uma ferramenta para resolver outros no futuro.

A aplicação consciente das etapas de Polya oferece aos estudantes uma estrutura mental para atacar problemas de combinatória que, à primeira vista, parecem intransponíveis. Ao internalizar esse método, os alunos não apenas se preparam para competições, mas também desenvolvem habilidades de resolução de problemas que são transferíveis para todas as áreas da vida acadêmica e profissional, em total consonância com os objetivos da BNCC.

2.4 DIFICULDADES NO APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

A qualidade do ensino de matemática é uma preocupação central para o desenvolvimento de qualquer nação, e avaliações em larga escala são ferramentas essenciais para diagnosticar desafios e orientar políticas públicas. Nesse contexto, o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), se destaca como a principal referência mundial para medir as competências de estudantes de 15 anos em Leitura, Ciências e, com ênfase, em Matemática. O objetivo do PISA não é medir a memorização de conteúdo, mas sim a capacidade dos jovens de aplicar seus conhecimentos para a resolução de problemas do mundo real.

Os resultados recentes do Brasil acendem um alerta. Segundo o relatório do PISA 2022, divulgado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o desempenho brasileiro em matemática permaneceu estagnado e em um patamar muito baixo. Os estudantes brasileiros obtiveram uma pontuação média de 379 pontos na disciplina, significativamente inferior à média de 472 pontos dos países da OCDE. O relatório aponta que "em matemática, 73% dos estudantes no Brasil não atingiram o Nível 2 de proficiência" (INEP, 2023), considerado o nível básico, no qual os alunos conseguem interpretar e reconhecer, sem instrução direta, como uma situação simples pode ser representada matematicamente.

Essa dificuldade em aplicar o conhecimento matemático em situações práticas, evidenciada pelo PISA, sugere que abordagens pedagógicas focadas excessivamente em procedimentos e memorização de fórmulas são insuficientes. A estagnação em um nível baixo de desempenho indica a urgência de se adotar metodologias que priorizem o desenvolvimento do raciocínio, da argumentação e da capacidade de resolver problemas, habilidades que estão no cerne do letramento matemático avaliado pelo programa.

2.4.1 Dificuldades no Aprendizado da Análise Combinatória e vivências em sala de aula

A Análise Combinatória é consistentemente apontada na literatura acadêmica como uma das áreas mais desafiadoras da matemática escolar, tanto para alunos quanto para professores. Sua natureza, que exige um raciocínio abstrato e uma interpretação cuidadosa dos problemas, distancia-se de procedimentos puramente algorítmicos, gerando obstáculos significativos no processo de ensino-aprendizagem.

Uma das principais dificuldades documentadas é a interpretação dos enunciados. Muitos estudantes lutam para diferenciar as três operações combinatórias básicas: arranjo, combinação e permutação. Segundo Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), um referencial teórico fundamental na análise de erros em combinatória, as dificuldades não residem apenas na aplicação de fórmulas, mas na identificação do modelo combinatório correto que corresponde à situação-problema. Os autores classificam os erros comuns em categorias, como a confusão sobre a relevância da ordem dos elementos e a presença ou ausência de repetição, que são cruciais para a correta modelagem do problema.

Outro obstáculo significativo é a tendência de focar na memorização de fórmulas em detrimento do desenvolvimento do raciocínio combinatório. Conforme aponta Handaya (2007), a ênfase excessiva em um ensino formulista leva os alunos a uma busca mecânica pela fórmula "certa", sem uma compreensão conceitual do porquê aquela fórmula se aplica. Essa abordagem falha em construir a base do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que é a ferramenta mais poderosa e flexível para resolver problemas de contagem. A ausência de um entendimento sólido do PFC impede que os alunos desenvolvam estratégias de resolução próprias, como a construção de diagramas de árvore ou a enumeração sistemática, que são essenciais para a compreensão do campo.

Do ponto de vista teórico, muitos pesquisadores analisam essas dificuldades através da *Teoria dos Campos Conceituais* de Vergnaud (1986). Essa teoria argumenta que um conceito não pode ser reduzido a uma simples definição; ele é formado por um tripé que inclui o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, o conjunto de invariantes operatórios (conceitos, teoremas e propriedades) e o conjunto de representações simbólicas (linguagem, notações). No caso da Análise Combinatória, a dificuldade estaria na incapacidade dos alunos de conectar as situações-problema (S) aos invariantes corretos (I) — como os conceitos de ordem e repetição — e, consequentemente, de escolher a representação simbólica (R) adequada, seja ela uma fórmula ou um diagrama.

Por experiência, o autor, lecionando a disciplina desde 2009 e trabalhando com problemas olímpicos, observou diversos casos que ilustram as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Análise Combinatória. Um fato curioso ocorreu com um excelente aluno do 2º ano do Ensino Médio, que se destacava pelo raciocínio rápido e cujas notas sempre refletiram sua alta capacidade. Contudo, ao se deparar com uma avaliação sobre o tema, ele se sentiu perdido, e o reflexo disso foi sua primeira nota baixa em todo o ano letivo. Hoje, cursando o 3º ano, a dificuldade persiste.

O estudante relata que seu maior obstáculo é a necessidade de "pensar de uma maneira diferente para cada problema".

O relato dele captura com precisão a essência do desafio combinatório: a exigência de um raciocínio focado na modelagem e na interpretação, em vez da simples aplicação de fórmulas. Portanto, a superação das dificuldades no aprendizado de Análise Combinatória passa por uma abordagem pedagógica que priorize a interpretação, a modelagem de problemas e o desenvolvimento do raciocínio.

2.5 PROBLEMAS OLÍMPICOS DE COMBINATÓRIA: UM CAMPO FÉRTIL PARA O DESENVOLVIMENTO DE ESTRATÉGIAS

Os problemas de Análise Combinatória encontrados em competições olímpicas de matemática distinguem-se dos exercícios tradicionais por sua natureza desafiadora e não-rotineira. Eles raramente se resolvem com a aplicação direta de uma única fórmula. Pelo contrário, exigem uma compreensão profunda dos conceitos, criatividade e a aplicação de diversas estratégias de resolução. Entre as principais estratégias, destacam-se:

- **Princípio da Inclusão-Exclusão:** Utilizado para contar os elementos da união de conjuntos não disjuntos.
- **Princípio da Casa dos Pombos (ou Princípio das Gavetas de Dirichlet):** Garante que, se mais de $n + 1$ objetos são colocados em n caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de um objeto. Esta é uma ferramenta poderosa para provar a existência de certas configurações.
- **Contagem Dupla (Double Counting):** Consiste em contar um mesmo conjunto de duas maneiras diferentes para estabelecer uma igualdade e, a partir dela, encontrar o valor desejado.
- **Bijeção:** Estabelecer uma correspondência um-a-um entre dois conjuntos para demonstrar que eles possuem o mesmo número de elementos.
- **Coloração:** Atribuir cores a elementos de um problema para identificar padrões e restrições.

A resolução de problemas olímpicos de Combinatória, ao exigir o desenvolvimento e a aplicação das estratégias mencionadas, vai ao encontro do que é preconizado pela BNCC e avaliado pelo ENEM. Ao se deparar com um problema que não pode ser resolvido por um método padrão, o estudante é levado a:

- **Desenvolver o pensamento crítico e a criatividade:** Buscando caminhos alternativos e originais para a solução.
- **Aprofundar a compreensão dos princípios fundamentais:** Uma vez que as fórmulas se mostram insuficientes, o aluno precisa retornar aos conceitos básicos da contagem.

- **Aprimorar a capacidade de argumentação:** A solução de um problema olímpico geralmente requer uma justificativa lógica e bem estruturada.

- **Construir resiliência e perseverança:** A natureza desafiadora desses problemas ensina o estudante a lidar com a frustração e a persistir na busca por uma solução.

Dessa forma, a introdução de problemas com características olímpicas nas aulas de matemática pode ser uma estratégia pedagógica eficaz para transcender o ensino puramente instrumental da Combinatória. Ao promover um ambiente de investigação e descoberta, o professor pode guiar os alunos no desenvolvimento das competências e habilidades previstas na BNCC, preparando-os não apenas para o sucesso em exames como o ENEM, mas também para enfrentar desafios complexos em diversas áreas do conhecimento e da vida. A pesquisa se propõe, portanto, a investigar e evidenciar essa relação, oferecendo subsídios para práticas pedagógicas mais ricas e significativas no ensino da Análise Combinatória.

2.6 CONHECENDO A OBMEP: UMA POLÍTICA EDUCACIONAL MULTIFACETADA

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi criada em 2005 por iniciativa do diretor-geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), César Camacho, e da presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Suely Druck, com o apoio da Presidência da República e do governo federal, especialmente do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações e do Ministério da Educação.

O jovem projeto se beneficiou muito de duas experiências prévias: A sua “irmã mais velha”, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), criada nos anos 70 pela SBM, que realiza competições em todo o Brasil e representa o país, com muito êxito, nos certames internacionais. O projeto Numeratizar, criado e realizado no Ceará pelo professor João Lucas Barbosa, do qual pode ser considerada uma expansão nacional (IMPA, 2017)

A OBMEP firmou-se como um evento importante e uma política pública de sucesso. Seus objetivos centrais são estimular o estudo da matemática e identificar jovens talentos em todo o Brasil. Embora tenha nascido com foco no sistema público de ensino, sua crescente relevância culminou na expansão para as escolas privadas a partir de 2017, consolidando-a como a maior competição científica do país.

Mais do que uma simples competição, a OBMEP funciona como uma abrangente política educacional, cujos efeitos positivos são mensuráveis. Um estudo de grande relevância sobre o tema é o de Machado e Leo (2014), que analisou o desempenho de milhares de estudantes. A pesquisa revelou que a participação na OBMEP tem um impacto estatisticamente significativo e positivo no desempenho dos alunos em avaliações nacionais e internacionais, como a Prova Brasil, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e até mesmo o PISA. Isso sugere que a preparação e o engajamento com os problemas da olimpíada desenvolvem habilidades que transcendem a própria competição.

O ecossistema de oportunidades criado em torno da olimpíada é um de seus maiores diferenciais. Para os estudantes premiados, a medalha é a porta de entrada para um ciclo de desenvolvimento acadêmico e suporte. A principal iniciativa é o *Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC Jr.)*, que concede bolsas de estudo do CNPq a milhares de medalhistas anualmente, permitindo que aprofundem seus conhecimentos em matemática com professores universitários por todo o país.

Além do PIC Jr., parcerias estratégicas ampliam o suporte aos talentos. Um exemplo notório é a Bolsa Instituto TIM, que oferece auxílio financeiro para medalhistas que ingressam em cursos superiores de áreas científicas e tecnológicas. Essa e outras iniciativas, como a modalidade de Vagas Olímpicas em Universidades, transformam o desempenho na competição em um passaporte para o ensino superior. Como destaca a reportagem de ARANHA (2019), diversas universidades de prestígio, como a UNICAMP e a USP, passaram a reservar vagas em seus cursos de graduação para medalhistas de competições de conhecimento, reconhecendo o alto nível de preparo desses estudantes.

O forte viés de inclusão social da OBMEP é, talvez, seu legado mais importante. Com uma capilaridade que alcança mais de 99% dos municípios brasileiros, a olimpíada premia jovens de todas as realidades socioeconômicas, incluindo beneficiários do Programa Bolsa Família. Histórias de superação reforçam o poder transformador do projeto, como a noticiada pelo IMPA (2019), que mostra o caso de jovens em cumprimento de medida socioeducativa que encontram na OBMEP um estímulo para a ressocialização e a continuidade dos estudos. Esses exemplos demonstram que a competição é uma ferramenta poderosa para promover a equidade e valorizar talentos independentemente de sua origem.

Dessa forma, a OBMEP se consolida como um programa multifacetado; ou seja, um plano, projeto ou iniciativa que aborda um objetivo ou problema de várias maneiras diferentes e complementares ao mesmo tempo que vai muito além da aplicação de provas. Ela atua como um motor para a melhoria do ensino, uma rede de apoio para estudantes talentosos e um instrumento de inclusão social. O próprio formato de suas questões, que valoriza o raciocínio lógico em detrimento da memorização, é um diferencial pedagógico. A natureza desses problemas é tão relevante que se tornou objeto de estudo acadêmico, como se observa na pesquisa de Silva (2020), que se dedicou a analisar especificamente as questões de Análise Combinatória presentes nas provas da OBMEP, foco deste trabalho.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

O presente capítulo dedica-se ao estudo da Análise Combinatória, explorando desde a sua fundamentação teórica até as suas aplicações práticas no raciocínio matemático. Inicialmente, estabelece-se a definição de Análise Combinatória, situando-a historicamente para compreender a evolução de seus conceitos e o surgimento dos primeiros estudos formais sobre contagem.

Essa contextualização histórica ampara-se, primordialmente, nas contribuições de Eves (2011) e Boyer (2011). Em um segundo momento, o capítulo aprofunda-se nas relações e nos princípios fundamentais da contagem, utilizando como base as obras de referência de Morgado *et al.* (2016) e Carvalho e Morgado (2023), essenciais para a compreensão das estruturas discretas que sustentam este campo da Matemática. Tais conceitos estabelecem a base necessária para a análise pedagógica e a resolução dos problemas que serão desenvolvidas nos capítulos subsequentes.

3.1 O QUE É COMBINATÓRIA?

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Seu objetivo principal é a contagem de elementos de um conjunto de objetos. Saber contar o número de elementos de um conjunto é fundamental para resolver problemas de Combinatória e Probabilidade.

A necessidade de contar objetos, individualmente ou em grupos, é uma das atividades mais antigas e essenciais da humanidade. Problemas de contagem podem ser, por vezes, muito difíceis, exigindo um alto grau de engenhosidade para sua resolução.

Exemplos Introdutórios

Exemplo 3.1.1 (O Problema das Torres de Hanói)**.** O problema das Torres de Hanói consiste em mover uma pilha de discos de tamanhos diferentes de uma haste de origem para uma haste de destino, utilizando uma haste auxiliar, se necessário.

As regras fundamentais para a execução dos movimentos são:

- **Um disco por vez:** Apenas um disco pode ser movido em cada jogada.
- **Topo da pilha:** Cada movimento consiste em retirar o disco superior de uma das hastes e posicioná-lo no topo de outra haste.
- **Regra de tamanho:** Um disco maior nunca pode ser colocado sobre um disco menor.

Utilizando o princípio do Problema das Torres de Hanói, qual é o número mínimo de movimentos necessários para transferir uma pilha de 3 discos da primeira haste para a terceira?

Solução: *O objetivo é determinar o número mínimo de movimentos (M_n) para n discos. A fórmula recursiva para este problema é* $M_n = 2M_{n-1} + 1$, *com* $M_1 = 1$.

Alternativamente, a fórmula fechada (resultado direto) é:

$$M_n = 2^n - 1.$$

Para o caso de $n = 3$ discos, temos:

$$M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Portanto, o número mínimo de movimentos necessários é 7. ■

Além da resolução algébrica apresentada, a Torre de Hanói possui uma vasta aplicabilidade no cenário educacional, servindo como ferramenta para a introdução de conceitos de recursividade, indução matemática e progressões. Para um aprofundamento teórico sobre as potencialidades pedagógicas deste jogo e relatos de experiências práticas no ensino de matemática, recomendam-se as leituras de Oliveira e Calejon (2016), que discute a construção de conceitos exponenciais, e Ferreira e Oliveira (2022), que explora especificamente as contribuições do jogo para o ensino de Progressões Geométricas (PG).

Exemplo 3.1.2 (Problemas de Ocupação)**.** Quantas maneiras existem para colocar duas bolas iguais em três caixas distintas?

Solução: *Este é um problema clássico de Combinação com Repetição. A resposta depende das condições do problema (bolas iguais, caixas distintas).*

Como as bolas são idênticas, a ordem não importa; apenas a quantidade de bolas em cada caixa é relevante. Podemos listar as possibilidades (onde C_1, C_2 e C_3 são as caixas):

1. ***Duas bolas em uma caixa:***
   - *(Caixa 1: 2 bolas), (Caixa 2: 0 bolas), (Caixa 3: 0 bolas).*
   - *(Caixa 1: 0 bolas), (Caixa 2: 2 bolas), (Caixa 3: 0 bolas).*
   - *(Caixa 1: 0 bolas), (Caixa 2: 0 bolas), (Caixa 3: 2 bolas).*

   (3 maneiras)

2. ***Uma bola em duas caixas:***
   - *(Caixa 1: 1 bola), (Caixa 2: 1 bola), (Caixa 3: 0 bolas).*
   - *(Caixa 1: 1 bola), (Caixa 2: 0 bolas), (Caixa 3: 1 bola).*
   - *(Caixa 1: 0 bolas), (Caixa 2: 1 bola), (Caixa 3: 1 bola).*

   (3 maneiras)

Somando os dois casos (Princípio Aditivo), o total é $3 + 3 = 6$ *maneiras.*

Este problema também é modelado pela fórmula de Combinação com Repetição $CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}$, *onde* $n = 3$ *(caixas) e* $p = 2$ *(bolas):*

$$CR_{3,2} = C_{3+2-1,2} = C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Outra maneira de resolver, seria pensar na resolução de uma equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$* + * + = 2$$

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

■

Exemplo 3.1.3 (Permutações Circulares)**.** São do tipo em que elementos distintos são organizados em um círculo, fixando um ponto de referência para evitar contagens repetidas (rotações).

Mesa Redonda (Permutação Circular)

Em um círculo, as disposições lineares A-B-C-D, B-C-D-A, C-D-A-B e D-A-B-C são idênticas, pois são apenas rotações uma da outra. Para corrigir essa contagem repetida, fixamos uma pessoa em um lugar e permutamos as outras $n - 1$ pessoas.

A fórmula da Permutação Circular é $PC_n = (n - 1)!$.

$$PC_4 = (4 - 1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Existem 6 maneiras distintas de sentarem-se em uma mesa redonda.

Esse exemplo demonstra que, embora a pergunta seja simplesmente “quantos?”, a resposta pode não ser trivial, e é necessário desenvolver métodos de contagem que evitem o trabalho de enumerar todos os casos possíveis.

3.2 UM POUCO DE HISTÓRIA

O desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso $n = 2$ já pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, em torno de 300 a.C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China (em torno de 1300), e antes disso pelos hindus e árabes. O matemático hindu Bhãskara (1114-1185) — a quem se atribui erroneamente, no Brasil, a exclusividade da “fórmula de Bhaskara” para a solução de equações do 2º grau, uma vez que métodos resolutivos já eram conhecidos por babilônios e outros matemáticos como Al-Khwarizmi conforme Viana (2019) — possuía notório conhecimento sobre o cálculo do número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos. O mesmo aconteceu com o matemático e filósofo francês Levi Ben Gerson (1288-1344), que nasceu e trabalhou no sul da França e que, entre outras coisas, tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides.

A Análise Combinatória, como um ramo estruturado da Matemática, teve seu desenvolvimento mais significativo a partir do século XVII. Embora existam vestígios de raciocínio combinatório em civilizações antigas, foi no contexto dos jogos de azar e do surgimento da Teoria da Probabilidade que a Análise Combinatória se consolidou.

De acordo com Boyer (2011), indícios de noções combinatórias são encontrados na Antiguidade, como no trabalho do matemático hindu Bhaskara no século XII. No entanto, uma das contribuições mais notáveis e formais antes do período clássico veio do filósofo e matemático judeu Levi ben Gerson (Gersonides) (1288–1444). Em sua obra *Maaseh hoshev* (A Arte do Cálculo), ele apresentou proposições que estabeleciam as fórmulas para o número de permutações de n objetos, $P_n = n!$, e para o número de combinações (ou arranjos) de n objetos tomados p de cada vez, $C_{n,p}$. O trabalho de Gersonides, no entanto, permaneceu relativamente isolado e não influenciou diretamente os matemáticos europeus do Renascimento.

Ambos os autores, Eves (2011) e Boyer (2011), concordam que o marco inicial para o desenvolvimento sistemático da Análise Combinatória e da Probabilidade foi a correspondência trocada entre Blaise Pascal (1623–1662) e Pierre de Fermat (1601–1665) em 1654.

O catalisador para essa colaboração foi Antoine Gombaud, o Chevalier de Méré, um nobre interessado em jogos de azar. Ele propôs a Pascal um antigo problema, o *"Problema dos Pontos"*: como dividir de forma justa as apostas de um jogo de azar que foi interrompido antes do final, conhecendo a pontuação de cada jogador e o número de pontos necessários para vencer?

Pascal e Fermat resolveram o problema por métodos diferentes, mas chegaram à mesma conclusão, estabelecendo os fundamentos da teoria.

- **Blaise Pascal:** Utilizou o seu famoso Triângulo Aritmético (hoje Triângulo de Pascal), detalhado em sua obra *Traité du triangle arithmétique*. Ele demonstrou como as propriedades do triângulo podiam ser usadas para determinar o número de combinações de n objetos tomados p a p, que é a chave para calcular as chances de cada jogador vencer. O método de Pascal era essencialmente recursivo e combinatório.

- **Pierre de Fermat:** Resolveu o mesmo problema através de um método diferente, que consistia em enumerar todas as combinações possíveis de resultados futuros do jogo, assumindo que cada uma era igualmente provável. Sua abordagem estava mais focada na enumeração direta dos casos possíveis, um princípio fundamental da Combinatória.

Após os trabalhos de Pascal e Fermat, a teoria foi aprofundada e formalizada por outros grandes matemáticos.

- **Jakob (James) Bernoulli** (1654–1705): Em sua obra póstuma *Ars conjectandi* (A Arte de Conjeturar), publicada em 1713, Bernoulli fez o primeiro grande tratado sobre a teoria da probabilidade. Ele sistematizou os resultados de Pascal e Fermat, trabalhou extensivamente com permutações e combinações e formulou a primeira versão da *Lei dos Grandes Números*, um teorema fundamental que conecta a probabilidade teórica com a frequência observada em experimentos.

- **Abraham De Moivre** (1667–1754): Um matemático francês que viveu na Inglaterra, De Moivre aprofundou os estudos em sua obra *The Doctrine of Chances* (A Doutrina das Chances). Ele é creditado com o desenvolvimento da aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, um resultado de imensa importância para a estatística, que depende diretamente de cálculos combinatórios.

A Análise Combinatória nasceu da necessidade prática de contar possibilidades em jogos de azar, mas rapidamente evoluiu para uma disciplina matemática rigorosa. A troca de ideias entre Pascal e Fermat estabeleceu seus princípios fundamentais, enquanto os trabalhos subsequentes de Bernoulli e De Moivre a consolidaram como uma área essencial da Matemática, intrinsecamente ligada à Teoria da Probabilidade e com vastas aplicações em outras ciências.

A Análise Combinatória, campo da matemática que se debruça sobre a contagem e a organização de elementos em conjuntos finitos, assume um papel de destaque na preparação de estudantes para olimpíadas de matemática. Suas estratégias e princípios fundamentais não apenas fornecem as ferramentas para a resolução de problemas complexos, mas também se alinham intrinsecamente ao desenvolvimento de habilidades preconizadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio. Tendo como referência e fundamentado nas obras de Morgado *et al.* (2016), vamos explorar as estratégias resolutivas da combinatória em problemas olímpicos e sua profunda relação com as competências e habilidades da BNCC.

3.3 BREVE REVISÃO DE CONJUNTOS

Nesta seção será exposta brevemente toda a teoria necessária para a resolução das questões apresentadas no capítulo seguinte, onde sempre que for necessário, faremos referências aos resultados aqui mostrados. Precisamos de alguns conceitos e serão usados como base: Morgado *et al.* (2016) e Carvalho e Morgado (2023).

O propósito desta seção é simplesmente revisar rapidamente essas noções básicas e, ao mesmo tempo, fixar a notação que usaremos nos capítulos posteriores.

Letras maiúsculas, como por exemplo $A, B, \ldots, Y, Z$, indicarão conjuntos. A letra grega Ω (ômega) representará o conjunto universal em uma situação determinada.

Letras minúsculas $a, b, \ldots, x, y, z$, indicarão elementos desses conjuntos. A relação de pertencer será indicada pela letra grega $\in$ e escreveremos por exemplo, $a \in A$.

O conjunto vazio será representado pelo símbolo $\varnothing$. Um conjunto com um número reduzido de elementos será indicado simplesmente listando seus elementos.

Por exemplo, o conjunto que consiste nos números 1, 2 e 3 será representado por $A = \{1, 2, 3\}$; $\{1\}$ representa o conjunto que tem como único elemento o número 1. Um conjunto pode também ser descrito por uma propriedade π, comum a todos os seus elementos, e escreveremos

$$A = \{x|x \text{ tem a propriedade } \pi\}.$$

Por exemplo,

$$A = \{x|x = 2k, k = 1, 2, \dots\}$$

descreve o conjunto dos inteiros pares positivos. Usaremos o símbolo $\#A$ para representar o número de elementos do conjunto A, isto é, a cardinalidade de A.

Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, diremos que A é um subconjunto de B e escreveremos simbolicamente $A \subset B$. Se $A \subset B$ mas existe um elemento $b \in B$ tal que $b \notin A$, (b não pertence a A), diremos que A é um subconjunto próprio de B.

Observe que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A. Com efeito, se isso não fosse verdade, deveria haver um elemento $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, o que é impossível.

Dados dois conjuntos A e B indicaremos por $A \cup B$ o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B, isto é, o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Este conjunto é chamado união de A com B. Simbolicamente,

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}.$$

A união de três conjuntos A, B, C será representada por $A \cup B \cup C$.

$$A \cup B \cup C = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \text{ ou } \omega \in C\}.$$

Mais geralmente, a união de n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é definida analogamente e representada por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto intersecção de A e B como o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B, ou seja,

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}.$$

No caso de termos por exemplo três conjuntos, A, B e C, a intersecção é representada por $A \cap B \cap C$:

$$A \cap B \cap C = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ e } \omega \in B \text{ e } \omega \in C\}.$$

A intersecção de n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é representada por

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Dizemos que dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \varnothing$. Quando temos mais de dois conjuntos, dizemos que eles são disjuntos quando forem disjuntos tomados 2 a 2.

Dado um conjunto A, chamaremos conjunto complementar de A o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem a A. Simbolicamente

$$A^c = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}.$$

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto

$$A \cap B^c = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ e } \omega \notin B\}$$

é chamado conjunto diferença de A e B, é representado geralmente por $A - B$. Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada diferença própria.

A Proposição 3.3.1, a seguir, lista as propriedades mais importantes que relacionam os conceitos definidos anteriormente.

Proposição 3.3.1. *(Morgado et al., 2016) Sejam os conjuntos A, B, C, vazio $\emptyset$ e Universo Ω. Então valem as seguintes propriedades:*

1. *Para todo conjunto $A \subset \Omega$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.*
2. *$A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.*
3. *$A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$.*
4. *$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.*
5. *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.*
6. *$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*
7. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.*
8. *$A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$, $\Omega^c = \emptyset$.*
9. *$(A^c)^c = A$; $A \subset B$ se e somente se $B^c \subset A^c$.*
10. *$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.*
11. *$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.*

A seguir, apresentamos as demonstrações formais das propriedades de Associatividade (itens 4 e 5) e Distributividade (item 6) listadas na Proposição 3.3.1 da dissertação e as demais iremos deixar a cargo do leitor.

A metodologia padrão para provar a igualdade entre dois conjuntos X e Y é a dupla inclusão:

1. Provar que $X \subseteq Y$ (todo elemento de X também está em Y).
2. Provar que $Y \subseteq X$ (todo elemento de Y também está em X).

Item 4: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **(Associatividade da União)**
Demonstração: *Para provar esta igualdade, usamos a equivalência lógica da definição de união ($\cup$) com o conectivo "ou" ($\vee$).*
Um elemento x pertence a $A \cup (B \cup C)$ *se, e somente se:*

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\iff (x \in A) \vee (x \in B \cup C) \\ &\iff (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)). \end{aligned}$$

Como a operação lógica "ou" ($\vee$) é associativa, podemos reagrupar os termos:

$$\begin{aligned} (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)) &\iff ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \\ &\iff (x \in A \cup B) \vee (x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

Como $x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cup C$, *os conjuntos são iguais.* ■

Item 5: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ **(Associatividade da Interseção)**
Demonstração: *Similarmente ao item 4, usamos a equivalência lógica da definição de interseção ($\cap$) com o conectivo "e" ($\wedge$).*
Um elemento x pertence a $A \cap (B \cap C)$ *se, e somente se:*

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff (x \in A) \wedge (x \in B \cap C) \\ &\iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C)). \end{aligned}$$

Pela associatividade da operação lógica "e" ($\wedge$), podemos reagrupar:

$$\begin{aligned} (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C)) &\iff ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \wedge (x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Como $x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C$, *os conjuntos são iguais.* ■

Item 6: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(Distributividade)**
Demonstração: *Para esta prova, usaremos a dupla inclusão.*
Parte 1: Provar que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Seja $x \in A \cap (B \cup C)$.

- *Pela definição de interseção,* $(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$.
- *Pela definição de união,* $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$.

Temos agora dois casos baseados na segunda cláusula (distributividade lógica):

- ***Caso 1:*** *Se* $(x \in A \wedge x \in B)$, *então* $x \in (A \cap B)$.

- ***Caso 2:*** *Se* $(x \in A \wedge x \in C)$*, então* $x \in (A \cap C)$.

Em ambos os casos, x *pertencerá à união* $(A \cap B) \cup (A \cap C)$*. Portanto,* $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Parte 2: Provar que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.
Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- *Pela definição de união,* $(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$.

Analisamos os dois casos:

- ***Caso 1:*** *Se* $x \in (A \cap B)$*, então* $(x \in A \wedge x \in B)$.
  - *Se* $x \in B$*, então* x *também pertence a* $(B \cup C)$.
  - *Logo,* $(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$*, o que significa* $x \in A \cap (B \cup C)$.
- ***Caso 2:*** *Se* $x \in (A \cap C)$*, então* $(x \in A \wedge x \in C)$.
  - *Se* $x \in C$*, então* x *também pertence a* $(B \cup C)$.
  - *Logo,* $(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$*, o que significa* $x \in A \cap (B \cup C)$.

Como em ambos os casos $x \in A \cap (B \cup C)$*, provamos que* $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Como as Partes 1 e 2 são verdadeiras, a igualdade está provada. ■

Introduzimos agora a noção de produto cartesiano de dois conjuntos. Dados dois conjuntos A e B, chamaremos de produto cartesiano de A por B o conjunto de pares ordenados (a, b), onde a é um elemento de A e b é um elemento de B. Simbolicamente

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, resulta que

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Em geral, se temos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é definido como o conjunto das n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

A última noção deste capítulo é a de partição de um conjunto.

Definição 3.3.1. Seja A um conjunto finito não vazio. Uma partição de A é uma família de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, todos não vazios, e tais que:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$.
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$.

Ou seja, os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são disjuntos dois-a-dois e sua união é o conjunto A.

3.4 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A jornada pela combinatória olímpica inicia-se com a maestria dos princípios aditivo e multiplicativo. Morgado *et al.* (2016), em sua obra "Análise Combinatória e Probabilidade", estabelece a simplicidade e a profundidade desses conceitos como o alicerce para a resolução de todos os problemas de contagem.

A formulação a seguir, presente no livro Morgado *et al.* (2016), sobre o Princípio Fundamental da Contagem é a espinha dorsal do estudo da Análise Combinatória, *"Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p \times q$"*. Em problemas olímpicos, raramente a aplicação é direta; ela exige do estudante a habilidade de decompor um problema complexo em uma sequência de decisões mais simples. A identificação de quais eventos são sucessivos e independentes é um exercício de interpretação e modelagem, habilidades essenciais para a competência matemática.

O Princípio Aditivo, por sua vez, é apresentado como a contraparte do princípio multiplicativo, aplicável a situações de escolha exclusiva e possui seguinte formulação em Morgado *et al.* (2016) *"Se uma decisão pode ser tomada de m maneiras ou de n maneiras, sendo que essas duas alternativas são mutuamente exclusivas, então o número total de maneiras de tomar a decisão é $m + n$."*

A sutileza em problemas olímpicos reside em discernir quando as possibilidades devem ser somadas ou multiplicadas, um reflexo direto da compreensão lógica da estrutura do problema.

Vamos resolver alguns exemplos para colocarmos esses conceitos prática.

Exemplo 3.4.1. Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Solução: *Podemos escolher o 1º algarismo de* 9 *modos (não podemos usar o zero). O 2º algarismo, também de* 9 *modos (não podemos usar o algarismo usado anteriormente) e o 3º algarismo de* 8 *modos (não usamos os dois anteriormente utilizados). Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, temos:* $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. ■

Exemplo 3.4.2. Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

Solução: *Como solução, teremos:*

- *Primeiro Algarismo (casa das unidades):* 1 *modo (tem que ser* 5*).*
- *Segundo Algarismo (casa das unidades de milhar):* 3 *modos (não pode ser* 5*).*
- *Terceiro Algarismo:* 4 *modos*
- *Quarto Algarismo:* 4 *modos*

Dessa forma, o total de números será: $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$. ■

Exemplo 3.4.3. As placas de automóveis no Brasil atualmente são principalmente do padrão Mercosul, com fundo branco, 7 caracteres (4 letras e 3 números) na sequência $LLLNLNN$ e uma faixa azul no topo com o nome "Brasil" e a bandeira. Quantas placas dessas podem ser formadas?

Solução: *Cada letra pode ser escolhida de* 26 *modos e cada algarismo de* 10 *modos distintos. A resposta é:*

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3 = 456976000.$$

■

Exemplo 3.4.4. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f : A \longrightarrow B$? Quantas são as funções injetoras $f : A \longrightarrow B$.

Solução: *Uma função de A em B deve associar cada elemento de A a um único elemento de B. Dessa forma, temos que cada elemento em A, tem 7 opções em B. Pelo PFC, temos:*

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401.$$

Para a Injetividade, temos: Uma função é injetora (ou injetiva) se elementos diferentes em A são mapeados para elementos diferentes em B. Ou seja, se $x_1 \neq x_2$ em A, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ em B. A pode ser mapeado para quaquer um dos 7 *elementos de B.*
Total de Funções Injetoras:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

■

3.5 PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

Uma vez dominados os princípios fundamentais, o foco se volta para os diferentes tipos de agrupamentos. Carvalho e Morgado (2023), e Morgado *et al.* (2016), tratam com clareza a distinção crucial entre arranjos, combinações e permutações.

Há alguns problemas de combinatória que embora sejam aplicações do princípio básico, aparecem com muita frequência. O primeiro deles é:

Exemplo 3.5.1 (Problema das permutações simples)**.** De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

Demonstração: *Para posicionar n objetos distintos em uma fila, devemos tomar uma sequência de n decisões sucessivas:*

1. ***1ª posição:*** *A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos.*

2. ***2ª posição:*** *Escolhido o primeiro objeto, a escolha do segundo lugar pode ser feita de $n - 1$ modos (qualquer um dos objetos restantes).*

3. ***3ª posição:*** *Para o terceiro lugar, restam* $n - 2$ *modos de escolha.*

4. ***Posições intermediárias:*** *O processo continua sucessivamente até as últimas posições.*

5. ***n-ésima posição:*** *Para a escolha do objeto que ocupará o último lugar, restará apenas* 1 *modo.*

*De acordo com o **Princípio Multiplicativo**, o número total de maneiras de se tomarem consecutivamente essas decisões é o produto das possibilidades de cada etapa:*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Pela definição de fatorial, esse produto é representado por $n!$*. Portanto a resposta é* $n!$. ■

Vale destacar que *"Uma permutação dos n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos"*, assim, o número de Permutações, denotado por P_n, de n elementos é dada por:

$$P_n = n!$$

Exemplo 3.5.2. Quantos são os anagramas da palavra "TRAPO"? Quantos começam com consoantes?

Solução: *Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. O número de anagramas é:*

$$P_5 = 5! = 120.$$

Para formar um anagrama começando por consoante, devemos primeiramente escolher a consoante (3 modos) e, depois, arrumar as quatro letras restantes em seguida à consoante ($4! = 24$ *modos). Há* $3 \cdot 24 = 72$ *anagramas começados por consoante.* ■

Exemplo 3.5.3. De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam sempre juntos?

Solução: *Podemos escolher a ordem das matérias de* $3!$ *modos. Feito isso, há* $5!$ *modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados,* $3!$ *modos para os de Estatística e* $2!$ *modos para os de Física.*

$$3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 6 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 2 = 8640.$$

■

Exemplo 3.5.4. Quantos são os anagramas da palavra "TATUAGEM"?

Solução: *Se as 8 letras fossem distintas, a resposta seria* $8!$*. Como as duas letras T são iguais, quando as trocamos entre si obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto; o mesmo* *acontece com as duas letras A. Devemos então dividir* $8!$ *por* $2!$ *e por* $2!$*, para compensar o fato de que anagramas com as letras T e A trocadas entre si são iguais.*

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} = 1680.$$

■

Exemplo 3.5.5. O número de permutações de n objetos dos quais n_1 são iguais a A, n_2 são iguais a B, ..., n_k são iguais a k é:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}.$$

Demonstração: *Utilizaremos apenas o Princípio Multiplicativo e a definição de Permutação Simples ($P_n = n!$).*

Considere um conjunto de n objetos, onde:

- n_1 *objetos são iguais a A;*
- n_2 *objetos são iguais a B;*
- ...
- n_k *objetos são iguais a K.*

De modo que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Sejam esses n objetos inicialmente considerados como se fossem todos ***distintos****. Nesse caso, o número total de maneiras de ordená-los em fila seria dado por uma permutação simples:*

$$P_n = n!. \tag{3.1}$$

Contudo, entre essas $n!$ *ordenações, muitas são idênticas porque a troca de posição entre objetos iguais não gera uma nova configuração. Pelo Princípio Multiplicativo, para cada ordenação distinta que buscamos (chamaremos de* $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$*), existem:*

- $n_1!$ *maneiras de permutar os elementos A entre si sem alterar o resultado visual;*
- $n_2!$ *maneiras de permutar os elementos B entre si;*
- ...
- $n_k!$ *maneiras de permutar os elementos K entre si.*

Assim, o número total de permutações simples ($n!$*) pode ser visto como o produto do número de permutações de elementos repetidos pelas permutações internas de cada grupo de itens iguais:*

$$n! = P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot (n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!). \tag{3.2}$$

Isolando o termo $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$*, obtemos a fórmula geral:*

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}. \tag{3.3}$$

■

Exemplo 3.5.6. Quantos são os anagramas da palavra BÚLGARO que não possuem duas vogais adjascentes?

Solução: *A palavra BÚLGARO tem 7 letras, sendo 4 consoantes (B, L, G, R) e 3 vogais (U, A, O). Para que as vogais não fiquem juntas, primeiro vamos arrumar as consoantes. O número de maneiras de fazer isso é a permutação das 4 consoantes:*

$$P_4 = 4! = 24.$$

Uma vez que as consoantes estão em seus lugares, por exemplo, B L G R, elas criam 5 espaços onde as vogais podem ser colocadas (um antes da primeira consoante, três entre as consoantes e um após a última):

$$\_\_ \quad B \quad \_\_ \quad L \quad \_\_ \quad G \quad \_\_ \quad R \quad \_\_$$

Agora, devemos escolher 3 desses 5 espaços para colocar as 3 vogais (U, A, O), e a ordem em que as colocamos importa. Portanto:
Para a 1ª vogal, temos: 5 opções; Para a 2ª vogal, temos: 4 opções; Para a 3ª vogal, temos: 3 opções;

Logo, pelo PFC, temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Pelo Princípio da Multiplicação, o número total de anagramas é o produto do número de maneiras de arrumar as consoantes pelo número de maneiras de arrumar as vogais nos espaços:

$$\textit{Total} = 24 \cdot 60 = 1440.$$

■

Outro problema importante é o: Problema das Combinações Simples. *"Uma combinação dos n objetos distintos tomados p a p é um subconjunto com exatamente p elementos".*

Exemplo 3.5.7. De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos dados?

Demonstração: *Seja* $C_{n,p}$ *a quantidade procurada, utilizando os Princípios de Contagem e Permutações, seguimos o raciocínio de construção e correção de contagem:*

1. ***Seleção Ordenada:*** *Primeiramente, escolhemos p objetos entre os n disponíveis onde a ordem da escolha importa. Pelo Princípio Multiplicativo, temos n opções para o primeiro objeto,* $(n-1)$ *para o segundo, e assim sucessivamente até o p-ésimo objeto, que terá* $n-(p-1)$ *opções. O número de maneiras de realizar essa tarefa é:*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{3.4}$$

2. ***Identificação de Agrupamentos Equivalentes:*** *Na definição de combinação, o subconjunto* $\{a, b\}$ *é idêntico ao subconjunto* $\{b, a\}$*. No entanto, no cálculo do passo anterior, esses agrupamentos foram contados como distintos. Para cada conjunto de p elementos selecionados, existem* $p!$ *maneiras de ordená-los (permutações simples).*

3. ***Ajuste pelo Princípio Multiplicativo:*** *Como cada combinação de p elementos gera* $p!$ *ordenações diferentes, o número total de seleções ordenadas é igual ao número de combinações* ($C_{n,p}$) *multiplicado pelas suas permutações internas* ($p!$)*:*

$$C_{n,p} \cdot p! = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{3.5}$$

4. ***Conclusão:*** *Isolando* $C_{n,p}$*, obtemos a fórmula geral da combinação simples:*

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}. \tag{3.6}$$

■

Com o resultado do Exemplo 3.5.7, o número de combinações de n elementos tomados p a p é dada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Observação 1. Se a ordem dos p elementos importasse, teríamos um processo de decisões sucessivas onde o primeiro elemento teria n opções, o segundo $n-1$, até o p-ésimo elemento com $n-p+1$ opções. Isso é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

A distinção entre a ordem ser ou não relevante é um dos pontos mais desafiadores para os estudantes e um tema recorrente em problemas olímpicos. A capacidade de identificar se a natureza do problema envolve uma fila (permutação) ou um comitê (combinação) é um indicativo do desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Exemplo 3.5.8. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens podem ser formadas?

Solução: *Para formar a comissão devemos escolher 3 dos homens e 2 mulheres.*

$$C_{5,3} \cdot C_{4,2} = 10 \cdot 6 = 60.$$

■

Exemplo 3.5.9. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta S paralela a R. Quantos triângulos e quantos quadriláteros convexos com vértices nesses pontos existem?

Solução: *Para formar um triângulo ou você toma um ponto em R e dois pontos em S, ou toma um ponto em S e dois pontos em R. O número de triângulos é dado por:*

$$5 \cdot C_{8,2} + 8 \cdot C_{5,2} = 140 + 80 = 220.$$

Poderíamos pensar de outro modo: De 13 pontos, escolher 3 e dessa contagem as escolhas de pontos colinerares. Daí:

$$C_{13,3} - C_{8,3} - C_{5,3} = 286 - 56 - 10.$$

Para formar um quadrilátero convexo, devemos tomar dois pontos em R e dois pontos em S, o que pode ser feito de:

$$C_{5,3} \cdot C_{8,2} = 280.$$

■

3.6 OUTRAS FÓRMULAS COMBINATÓRIAS

O uso do Princípio Fundamental da Contagem, com o apoio das expressões para o número de permutações e combinações simples, permite resolver a maior parte dos problemas de contagem no Ensino Médio. Porém, vamos analisar outras abordagens. O primeiro deles é a permutação circular.

Exemplo 3.6.1. De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

Solução: *Devemos tomar cuidado pois, nomeando as 5 crianças (A, B, C, D, E), temos que as rodas: ABCDE e EABCD são iguais, pois na roda o que importa é a posição realitiva das crianças entre si e a roda ABCDE pode ser virada. Como a roda pode ser virada de 5 modos, temos:*

$$(PC)_5 = \frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24.$$

■

Esse resultado pode ser estendido para um número qualquer.

Exemplo 3.6.2. O número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é dada por:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Demonstração: *Uma permutação linear de n objetos pode ser disposta em círculo. Entretanto, cada disposição circular corresponde a n permutações lineares diferentes (obtidas por rotação). Para encontrar o número de disposições circulares distintas, dividimos o total de permutações lineares pelo número de repetições geradas pelas rotações:*

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

■

Outro problema interessante é o problema das soluções inteiras e não negativas de uma equação.

Exemplo 3.6.3. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$?

Demonstração: *A solução para este problema pode ser visualizada utilizando um método conhecido como "barras e estrelas" ou "bolas e traços". Imagine que temos p unidades (representadas por •) que devem ser distribuídas entre n variáveis. Para separar as unidades que pertencem a cada variável, utilizamos $n - 1$ barras (representadas por |).*
Por exemplo, se tivéssemos a equação $a + b + c + d = 20$ (onde $n = 4$ e $p = 20$), a solução $a = 3, b = 7, c = 2, d = 8$ seria representada como:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{a=3} \quad | \quad \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{b=7} \quad | \quad \underbrace{\bullet\bullet}_{c=2} \quad | \quad \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{d=8}$$

Cada solução da equação corresponde a uma permutação de p sinais • e $n - 1$ sinais |. O número total de posições na fila é $p + (n - 1)$.
O problema se resume a encontrar o número de maneiras de arranjar esses $p + n - 1$ objetos, onde p são de um tipo (unidades) e $n - 1$ são de outro (separadores). Este é um problema de permutação com repetição.
O número de soluções é, portanto:

$$P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}.$$

■

Esta fórmula é exatamente a definição de uma combinação e este valor também é conhecido como o número de combinações com repetição (ou combinações completas) de n objetos tomados p a p, e é denotado por:

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}.$$

Exemplo 3.6.4. De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes em um bar que nos oferece em 6 sabores distintos?

Solução: *Sejam os sabores $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$. Queremos escolher 3 sorvetes. Uma possível compra seria, por exemplo, (2 sorvetes de s_1, 1 de s_3) ou (3 sorvetes de s_4).*
Este é um problema de combinações com repetição de 6 sabores tomados 3 a 3. Vamos associar a cada sabor s_i uma variável x_i, que representará o número de sorvetes do sabor i que compramos. Como o total de sorvetes a serem comprados é 3, temos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3.$$

Onde $x_i \geq 0$ são inteiros, pois representam a quantidade de sorvetes de cada sabor.

O número de modos de comprar os sorvetes é o número de soluções inteiras e não-negativas desta equação. Usando a fórmula de combinações com repetição, onde $n = 6$ (número de sabores) e $p = 3$ (número de sorvetes a escolher), temos:

$$CR_{6,3} = C_{6+3-1,3} = C_{8,3}.$$

Calculando o valor:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

Portanto, há 56 modos de comprar os 3 sorvetes. ∎

3.7 ESTRATÉGIAS RESOLUTIVAS AVANÇADAS EM PROBLEMAS OLÍMPICOS

Para além dos conceitos básicos, a resolução de problemas olímpicos de combinatória frequentemente exige o emprego de estratégias mais sofisticadas. Carvalho e Morgado (2023), aprofundam-se em técnicas que são a chave para a resolução de problemas não triviais.

Uma das ferramentas mais poderosas é Princípio da Inclusão-Exclusão.

> "Para encontrar o número de elementos na união de vários conjuntos, somamos os tamanhos de todos os conjuntos, subtraímos os tamanhos de todas as interseções de pares de conjuntos, somamos os tamanhos de todas as interseções de trios de conjuntos, subtraímos os tamanhos de todas as interseções de quádruplos de conjuntos, e assim por diante." (Carvalho; Morgado, 2023, p. 115)

Esta técnica é essencial para problemas de contagem onde há sobreposição de casos. A sua aplicação demanda um alto grau de organização e pensamento sistemático, habilidades cruciais para a resolução de problemas em geral.

Outras estratégias, como o Princípio das Gavetas de Dirichlet (ou Princípio da Casa dos Pombos) e a construção de relações de recorrência, são frequentemente exploradas nos livros de referência e são indispensáveis no arsenal de um competidor de olimpíadas.

Proposição 3.7.1 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** *Se N objetos são distribuídos em k caixas, então pelo menos uma caixa deve conter pelo menos $\lceil N/k \rceil$ objetos, onde $\lceil x \rceil$ é a função teto, que denota o menor inteiro maior ou igual a x.*

Demonstração: *Procederemos por contradição.*

Suponha que a afirmação seja falsa. Isso significa que todas as k caixas contêm menos de $\lceil N/k \rceil$ objetos. Seja n_i o número de objetos na caixa i, para $i = 1, 2, \ldots, k$. A nossa suposição é que:

$$n_i < \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \quad \textit{para todo } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Como o número de objetos n_i é um inteiro, a desigualdade estrita acima é equivalente a:

$$n_i \leq \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1.$$

Por definição da função teto, sabemos que $\lceil x \rceil - 1 < x$. Aplicando essa propriedade, temos:

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 < \frac{N}{k}.$$

Portanto, o número de objetos em cada caixa é estritamente menor que N/k:

$$n_i < \frac{N}{k}.$$

O número total de objetos N é a soma do número de objetos em todas as caixas. Somando sobre as k caixas, obtemos:

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i < \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{k} = k \cdot \left(\frac{N}{k} \right) = N.$$

Isso nos leva à contradição de que $N < N$.

Dessa forma, a suposição inicial é falsa. Conclui-se que pelo menos uma caixa deve conter pelo menos $\lceil N/k \rceil$ objetos. ∎

3.8 O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Chamamos de Triângulo de Tartaglia-Pascal, ou Triângulo de Pascal a representação abaixo formada com diversos valores de $C_{n,p}$ que também será denotado por $\binom{n}{p}$, isto é:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Dispondo os coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$ em um quadro, com n sendo o número da linha e p o da coluna (ambos começando em 0), obtemos o chamado Triângulo Aritmético ou Triângulo de Pascal:

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Substituindo os números binomiais por seus valores, temos:

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

A regra de construção do triângulo (exceto pelas bordas, que são sempre 1) é que cada número é a soma dos dois números que estão imediatamente acima dele, na linha anterior. Esta é a Relação de Stifel:

Proposição 3.8.1 (Relação de Stifel)**.** *Para $n \geq p \geq 1$ vale a seguinte relação:*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Demonstração: *O número de grupos de p pessoas que podemos formar com n pessoas é $\binom{n}{p}$. Vamos separar as pessoas em dois tipos: as que incluem um indivíduo particular (digamos, o Sálvio) e as que não o incluem.*

- *Grupos que incluem o Sálvio: para formar um grupo de p pessoas que inclua o Sálvio, devemos escolher $p-1$ pessoas dentre as $n-1$ restantes. O número de maneiras de fazer isso é $\binom{n-1}{p-1}$.*
- *Grupos que não incluem o Sálvio: para formar um grupo de p pessoas que não inclua o Sálvio, devemos escolher p pessoas dentre as $n-1$ restantes. O número de maneiras de fazer isso é $\binom{n-1}{p}$.*

Como o total de grupos é a soma desses dois tipos, temos a relação. ■

Proposição 3.8.2 (Teorema das Linhas)**.** *A soma dos elementos da linha n do Triângulo de Pascal é 2^n. Ou seja,*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração: *$\binom{n}{p}$ é o número de subconjuntos de p elementos de um conjunto com n elementos. A soma $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$ conta todos os subconjuntos de um conjunto de n elementos. Para formar um subconjunto, para cada um dos n elementos, temos duas possibilidades: o elemento pertence ou não pertence ao subconjunto. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de subconjuntos é $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n vezes), que é 2^n.* ■

Proposição 3.8.3 (Teorema das Colunas)**.** *A soma dos elementos de uma coluna do Triângulo de Pascal, de cima para baixo, é igual ao elemento que está abaixo e à direita do último termo da soma. Ou seja,*

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Demonstração: *O total de maneiras de escolher $p+1$ números do conjunto $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ é $\binom{n+1}{p+1}$. Vamos contar de outra maneira. Seja $k+1$ o maior número escolhido, $k+1 \in \{p+1, \ldots, n+1\}$. Se o maior número escolhido for $p+1$, devemos escolher os outros p números do conjunto $\{1, 2, \ldots, p\}$. Há $\binom{p}{p}$ maneiras. Se o maior número escolhido for $p+2$, devemos escolher os outros p números de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$. Há $\binom{p+1}{p}$ maneiras. ... Se o maior número escolhido for $n+1$, devemos escolher os outros p números de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Há $\binom{n}{p}$ maneiras. A soma de todas essas possibilidades deve ser igual ao total, o que prova a relação.* ■

Também conhecido como “Regra do Hóquei” devido ao seu formato no Triângulo de Pascal) é uma identidade combinatória poderosa. Ele relaciona a soma de elementos ao longo de uma diagonal específica do Triângulo de Pascal com um elemento na próxima linha.

Proposição 3.8.4 (Teorema das Diagonais)**.** *No triângulo de Pascal, a soma dos elementos de uma diagonal é igual a um coeficiente binomial da linha imediatamente seguinte. Ou seja,*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Demonstração: *Para demonstrar esta identidade, utilizaremos o método da dupla contagem, contando o número de subconjuntos de k elementos do conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n+k+1\}$. O número total de tais subconjuntos é, por definição, $\binom{n+k+1}{k}$.*

Alternativamente, particionamos a contagem com base no maior elemento do subconjunto de k elementos. Seja j o maior elemento do subconjunto.

1. *O maior elemento j deve ser no mínimo k. No nosso caso, o maior elemento j pode variar de k até $n+k+1$.*

2. *Se o maior elemento for j, devemos escolher os $k-1$ elementos restantes do conjunto $\{1, 2, \ldots, j-1\}$. O número de maneiras de fazer isso é $\binom{j-1}{k-1}$.*

Assim, a contagem total é a soma de todos esses casos:

$$\sum_{j=k}^{n+k+1} \binom{j-1}{k-1}.$$

Fazendo a substituição $i = j-k$, notamos que o limite superior da soma será $i = n+k+1-k = n+1$ e, reescrevendo a soma, chegamos à Regra das Colunas:

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Utilizando a propriedade de simetria dos coeficientes binomiais, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, podemos reescrever cada termo da soma e a conclusão:

- $\binom{n+i}{i} = \binom{n+i}{(n+i)-i} = \binom{n+i}{n}$
- $\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k+1}{(n+k+1)-k} = \binom{n+k+1}{n+1}$

A soma do Teorema das Diagonais pode, assim, ser vista como uma aplicação da Regra das Colunas, mas usando a notação $\binom{n+i}{i}$ (que está na diagonal) em vez de $\binom{i}{k-1}$ (que está na coluna vertical), resultando na identidade desejada. ■

Exemplo 3.8.1. Vamos usar $n = 3$ e $k = 4$. O teorema afirma que a soma dos elementos na diagonal, começando em $\binom{3}{0}$, será igual a $\binom{3+4+1}{4}$.

Solução:

1. ***Cálculo da Soma (Lado Esquerdo):***

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{4}\binom{3+i}{i} &= \binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}\\ &= 1+4+10+20+35\\ &= 70.\end{aligned}$$

2. ***Cálculo do Resultado (Lado Direito):***

$$\begin{aligned}\binom{n+k+1}{k} &= \binom{3+4+1}{4}\\ &= \binom{8}{4}\\ &= \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= 70.\end{aligned}$$

O resultado de ambos os lados é 70, o que confirma o teorema para o caso $n = 3$ e $k = 4$. ■

3.9 BINÔMIO DE NEWTON

O Binômio de Newton consiste na fórmula algébrica que permite realizar a expansão de potências da forma $(x + a)^n$, para n inteiro e positivo. O desenvolvimento desse binômio resulta em um somatório de termos cujos coeficientes são os números combinatórios $\binom{n}{p}$, estabelecendo uma ligação fundamental entre a álgebra polinomial e a Análise Combinatória.

Historicamente, embora o nome homenageie Isaac Newton por suas generalizações, as propriedades desses coeficientes e sua organização no triângulo aritmético já eram exploradas por matemáticos chineses, hindus e árabes séculos antes da formalização moderna. No contexto deste trabalho, o binômio será analisado como uma ferramenta estratégica para a contagem e para a compreensão de propriedades estruturais do Triângulo de Pascal.

Proposição 3.9.1 (Binômio de Newton)**.** *O Teorema Binomial nos dá uma fórmula para a expansão de* $(x+a)^n$*, onde* n *é um inteiro não-negativo. A fórmula é:*

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

Expandindo o somatório, temos:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Demonstração: *Vamos analisar o produto:*

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)\ldots(x+a)}_{n \text{ fatores}}.$$

Para formar cada termo do produto expandido, devemos escolher ou x *ou* a *de cada um dos* n *fatores e multiplicá-los.*

Por exemplo, para obter o termo $x^{n-p}a^p$*, devemos escolher* a *em* p *dos fatores e* x *nos restantes* $n-p$ *fatores. O número de maneiras de escolher os* p *fatores dos quais retiraremos o* a *é igual ao número de maneiras de escolher* p *objetos de um conjunto de* n *objetos, que é* $\binom{n}{p}$.

Portanto, ao expandir o produto, o termo $x^{n-p}a^p$ *aparecerá* $\binom{n}{p}$ *vezes. Assim, o coeficiente de* $x^{n-p}a^p$ *na expansão de* $(x+a)^n$ *é* $\binom{n}{p}$.

Termo Geral: *O termo de ordem* $p+1$ *no desenvolvimento de* $(x+a)^n$ *é chamado de Termo Geral e é dado por:*

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

Note que o expoente de a *é igual ao índice inferior do coeficiente binomial.* ■

4 PROBLEMAS

Neste capítulo, apresentamos uma coletânea de problemas de Análise Combinatória extraídos de avaliações de grande relevância no cenário educacional brasileiro: o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), vestibulares da Universidade Estadual do Ceará (UECE) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A escolha dessas fontes não é aleatória; juntas, elas oferecem um panorama diversificado de abordagens, que vão desde questões contextualizadas e interdisciplinares (ENEM) até problemas que exigem um elevado grau de raciocínio lógico e criatividade (OBMEP), passando por um modelo de vestibular tradicional e rigoroso (UECE).

O objetivo central deste capítulo é dissecar cada problema proposto, não apenas apresentando sua resolução detalhada, mas, fundamentalmente, analisando-o à luz das competências e habilidades preconizadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio. Para cada questão, será conduzida uma discussão que busca identificar quais habilidades específicas são mobilizadas, de que forma o problema contribui para o desenvolvimento da competência associada e como sua abordagem se alinha às diretrizes curriculares. Dessa forma, busca-se construir uma ponte entre a teoria curricular, a prática em sala de aula e a realidade das avaliações externas, demonstrando o potencial pedagógico de problemas bem selecionados no ensino da Análise Combinatória.

Síntese da Análise Pedagógica

A análise pormenorizada dos 20 problemas apresentados nas subseções posteriores constitui o núcleo prático desta dissertação, demonstrando a conexão intrínseca entre os desafios da Combinatória em contextos de Olimpíadas/Vestibulares e as diretrizes curriculares nacionais. Para consolidar os achados e facilitar a aplicação didática, a Tabela 1 sintetiza Fonte, Ano de aplicação e Habilidade da BNCC de cada um dos problemas.

A tabela 1 oferece uma visão integrada, destacando para cada problema a competência e habilidade de área do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Adicionalmente, identificamos a principal estratégia resolutiva empregada, reforçando que a complexidade desses problemas exige, frequentemente, a aplicação de heurísticas avançadas (como o Princípio da Exclusão e a Modelagem Algébrica) em detrimento da mera aplicação de fórmulas.

A Tabela 1 serve, portanto, como um recurso de pesquisa e um guia pedagógico para o professor de Matemática que busca selecionar e aplicar problemas com intencionalidade, alinhando a prática de sala de aula aos objetivos de desenvolvimento do raciocínio combinatório e das competências matemáticas para o Ensino Médio.

Tabela 1 – Relação entre problemas de Análise Combinatória, Habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e, Competências e Habilidades do ENEM

Problema	**Fonte (Origem)**	**Ano**	**Habilidade BNCC**	**Competência e Habilidade**
4.1.1	ENEM	2022	EM13MAT310	MTC1H2
4.1.2	ENEM	2017	EM13MAT310	MTC1H2
4.1.3	ENEM	2021	EM13MAT310	MTC1H2
4.1.4	ENEM	2020	EM13MAT310	MTC5H21
4.1.5	ENEM	2020	EM13MAT310	MTC5H21
4.1.6	ENEM	2012	EM13MAT310	MTC1H3
4.1.7	ENEM 2ª Apl	2017	EM13MAT310	MTC1H3
4.2.1	OBMEP	2023	EM13MAT310	MTC1H2
4.2.2	OBMEP	2022	EM13MAT310	MTC1H2
4.2.3	OBMEP	2019	EM13MAT310	MTC1H2
4.2.4	OBMEP	2018	EM13MAT310	MTC1H2
4.2.5	OBMEP	2018	EM13MAT310	MTC1H2
4.2.6a	OBMEP	2018	EM13MAT310	MTC1H3
4.2.6b	OBMEP	2018	EM13MAT310	MTC1H3
4.2.6c	OBMEP	2018	EM13MAT310	MTC1H2
4.2.7	OBMEP	2014	EM13MAT310	MTC1H2
4.3.1	UECE	2025	EM13MAT310	MTC1H2
4.3.2	UECE	2025	EM13MAT310	MTC1H2
4.3.3	UECE	2019	EM13MAT310	MTC1H2
4.3.4	UECE	2018	EM13MAT310	MTC1H2
4.3.5	UECE	2018	EM13MAT310	MTC1H2
4.3.6	UECE	2016	EM13MAT310	MTC1H2

Fonte: Autor.

4.1 PROBLEMAS DO ENEM

Problema 4.1.1 (ENEM 2022 - MTC1H2)**.** Um prédio com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em $3, 4, 5$ ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

A) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)!}$

B) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

C) $9 \times \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

D) $9 \times \dfrac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

E) $9 \times \left(\dfrac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1\right)$

Solução: *O problema exige a escolha de* 2 *apartamentos em um mesmo andar, com a condição de que ambos tenham pelo menos um quarto que receba sol pela manhã.*
Primeiro, identificamos os apartamentos que cumprem essa condição em qualquer andar.
Finais 1 *e* 2*: ambos os quartos recebem sol pela manhã.*
Finais $3, 4, 5$ *e* 6*: apenas um dos quartos recebe sol pela manhã.*
Finais 7 *e* 8*: nenhum quarto recebe sol pela manhã.*
Portanto, os apartamentos elegíveis são aqueles com finais $1, 2, 3, 4, 5$ *ou* 6*, totalizando* 6 *apartamentos por andar.*
A tarefa é escolher 2 *desses* 6 *apartamentos. Como a ordem da escolha não altera o par de apartamentos selecionado, usamos uma combinação. Para um único andar, o número de maneiras de escolher é:*

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!}.$$

Como o prédio tem 9 *andares e a escolha em cada andar é independente, multiplicamos o resultado de um andar pelo número total de andares:*

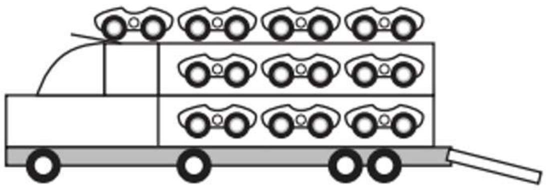
$$\textit{Total de maneiras} = 9 \times C_{6,2} = 9 \times \frac{6!}{(6-2)!2!}.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão mobiliza a habilidade da BNCC **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem) e alinha-se à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM ("Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais"). O objetivo da questão foi avaliar a capacidade do aluno de executar um processo de resolução em múltiplas etapas. Primeiramente, o aluno precisava demonstrar sua capacidade de interpretação e filtragem de dados, traduzindo as condições de incidência solar para identificar o conjunto de interesse, ou seja, os 6 apartamentos elegíveis em cada andar. Em seguida, esperava-se que o aluno realizasse a modelagem do problema, identificando que a escolha de 2 desses 6 apartamentos, onde a ordem não importa, é um problema de Combinação Simples ($C_{6,2}$). Por fim, o aluno deveria aplicar o Princípio Multiplicativo para estender a solução de um andar para os 9 andares do prédio, e reconhecer a notação de combinação em sua forma fatorial para assinalar a alternativa correta.

Problema 4.1.2 (ENEM 2017 - MTC1H2)**.** Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.
Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A) $C_{6,4}$

B) $C_{9,3}$

C) $C_{10,4}$

D) 6^4

E) 4^6

Solução: *Cada modelo do brinquedo é definido apenas pela quantidade de carrinhos de cada uma das* 4 *cores. Como a mudança de posição dos carrinhos não cria um novo modelo e deve haver pelo menos um carrinho de cada cor, o problema pode ser modelado por uma equação com soluções naturais.*
Seja x_1, x_2, x_3, x_4 *o número de carrinhos das quatro cores. Como o total de carrinhos é* 10*, temos a equação:* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$.
Como deve haver pelo menos um de cada cor, cada $x_i \geq 1$. *Para resolver isso, podemos fazer uma substituição de variáveis:* $y_i = x_i - 1$*, onde* $y_i \geq 0$. *A equação se torna:*

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) = 10 \rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6.$$

Este é um problema clássico de combinação com repetição, cuja fórmula é $C_{n+p-1,p}$, onde "p" é a soma (6) e "n" é o número de variáveis (4).

$$C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9!}{6!3!}.$$

Portanto, o número de modelos diferentes do brinquedo é $C_{9,3}$. ■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta é uma questão de alta complexidade, raramente vista no ENEM, e que se aproxima mais de um problema de nível olímpico. Ela mobiliza a habilidade **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem) em seu nível mais avançado, exigindo "estratégias diversas". Alinha-se também à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM. O objetivo da questão é avaliar a capacidade do aluno de identificar um problema de Combinação Completa (ou Combinação com Repetição). Para isso, o aluno precisaria, primeiramente, interpretar a restrição-chave "Mudança de posição... não gera um novo modelo", que elimina permutações e foca o problema na quantidade de carrinhos de cada cor. Em seguida, o aluno deveria modelar a situação pela equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$. A segunda restrição, "pelo menos um... de cada... cor", impõe a condição $x_i \geq 1$. O passo final, e mais técnico, seria aplicar a estratégia de substituição de variáveis (ou "estrelas e barras"), transformando o problema em $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$ (com $y_i \geq 0$), cuja solução é dada pela fórmula $C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = C_{9,3}$.

Problema 4.1.3 (ENEM 2021 - MTC1H2)**.** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.
Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913 é

A) 24

B) 31

C) 32

D) 88

E) 89

Solução: *Os números são formados com os* 5 *algarismos ímpares distintos:* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. *Para encontrar a posição do número* 75913, *contamos quantos números vêm antes dele na lista ordenada de forma crescente.*

- ***Números começados com 1:*** *Se o primeiro dígito é* 1*, os outros* 4 *podem ser arranjados de* $P_4 = 4! = 24$ *maneiras.*
- ***Números começados com 3:*** *Da mesma forma, há* $4! = 24$ *números.*
- ***Números começados com 5:*** *Novamente, há* $4! = 24$ *números.*

Até agora, contamos $24 + 24 + 24 = 72$ *números.*

- ***Números começados com 71...:*** *Os* 3 *dígitos restantes podem ser arranjados de* $P_3 = 3! = 6$ *maneiras.*
- ***Números começados com 73...:*** *Da mesma forma, há* $3! = 6$ *números.*

Contagem acumulada: $72 + 6 + 6 = 84$ *números.*

- ***Números começados com 751...:*** *Os 2 dígitos restantes podem ser arranjados de* $P_2 = 2! = 2$ *maneiras.*
- ***Números começados com 753...:*** *Da mesma forma, há* $2! = 2$ *números.*

Contagem acumulada: $84 + 2 + 2 = 88$ *números.*
O próximo número na ordem é o que começa com 759*. O menor deles é* 75913*. Portanto, ele é o próximo número após os* 88 *que já contamos.*
A posição é a soma de todos os números anteriores mais ele mesmo:

$$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão é uma aplicação da habilidade **EM13MAT310**, focando na contagem de permutações e na aplicação do Princípio Fundamental da Contagem em um contexto de ordenação. Alinha-se também à **Competência 1** da Matriz do ENEM, pois o aluno precisa "construir um modelo" para o problema. O objetivo principal é avaliar a capacidade do aluno de determinar a "posição" (ou "rank") de um elemento específico (75913) dentro de um conjunto ordenado de permutações. Para isso, o aluno precisava, primeiramente, interpretar as restrições, identificando que os números eram formados usando apenas os algarismos ímpares distintos $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Em seguida, deveria entender a ordenação, percebendo que precisaria contar quantos números vinham antes de 75913. A estratégia de resolução exigida é a Contagem por Posição (Lexicográfica), contando sistematicamente os casos menores: quantos começam com "1" ($4! = 24$), com "3" ($4! = 24$), com "5" ($4! = 24$), com "71" ($3! = 6$), com "73" ($3! = 6$), com "751" ($2! = 2$) e com "753" ($2! = 2$). Finalmente, o aluno deveria sintetizar o resultado, somando todas essas contagens (88) e concluindo que 75913, sendo o próximo da lista, estaria na 89ª posição.

Problema 4.1.4 (ENEM 2020 - MTC5H21)**.** Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".
Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.
Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

A) $9!$

B) $4! \times 5!$

C) $2 \times 4! \times 5!$

D) $\dfrac{9!}{2}$

E) $\dfrac{4! \times 5!}{2}$

Solução: *A frase a ser anagramada é "I AM POTTER", sem considerar os espaços. As letras são:*

- ***Vogais (V):*** *I, A, O, E (Total de 4).*
- ***Consoantes (C):*** *M, P, T, T, R (Total de* 5*, com a letra "T" repetida* 2 *vezes).*

O problema exige que vogais e consoantes apareçam sempre intercaladas. Como temos 5 *consoantes e* 4 *vogais, a única estrutura possível para o anagrama é começar e terminar com uma consoante:*

$$C\ V\ C\ V\ C\ V\ C\ V\ C$$

Agora, calculamos o número de maneiras de arranjar as vogais e as consoantes nessas posições.

- ***Permutação das Vogais:*** *Temos* 4 *vogais distintas para ocupar as* 4 *posições de "V". O número de maneiras é* $P_4 = 4!$.
- ***Permutação das Consoantes:*** *Temos* 5 *consoantes para ocupar as* 5 *posições de "C". Como a letra "T" se repete* 2 *vezes, usamos a fórmula da permutação com repetição:* $P_5^2 = \frac{5!}{2!}$.

O número total de anagramas é o produto das permutações das vogais e das consoantes:

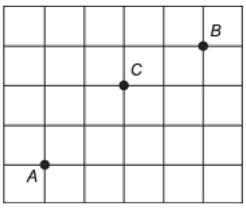
$$Total = (Permutação\ das\ Vogais) \times (Permutação\ das\ Consoantes) = 4! \times \frac{5!}{2!} = \frac{4!5!}{2}.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão é um excelente exemplo da habilidade **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem), pois exige uma estratégia complexa que decompõe o problema: primeiro, a modelagem da restrição (intercalação) e, segundo, a aplicação de diferentes tipos de permutação (simples para as vogais e com repetição para as consoantes). Alinha-se também à **Competência de Área 5** (MTC5H21), focada em "Modelar e resolver problemas". O desafio central é a modelagem: o aluno precisa traduzir a restrição "intercaladas" em uma estrutura fixa (CVCVCVCVC), transformando um problema complexo em dois problemas de permutação menores e independentes. O objetivo é avaliar a capacidade do aluno de resolver um problema de contagem não trivial que combina múltiplas técnicas. Esperava-se que o aluno, primeiramente, classificasse as letras em 4 vogais distintas (I, A, O, E) e 5 consoantes (M, P, T, T, R), notando a repetição da letra "T". Em seguida, deveria deduzir que a única estrutura alternada possível era CVCVCVCVC. Por fim, deveria resolver o problema em duas etapas, calculando $P_4 = 4!$ para as vogais e $P_5^2 = \frac{5!}{2!}$ para as consoantes, aplicando o Princípio Multiplicativo para sintetizar o resultado final.

Problema 4.1.5 (ENEM 2020 - MTC5H21)**.** Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ($\rightarrow$) ou para cima ($\uparrow$), segundo o esquema da figura.
O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

A) 4

B) 14

C) 17

D) 35

E) 48

Solução: *Para resolver o problema, usamos a estratégia de calcular o número total de caminhos possíveis e subtrair o número de caminhos que passam pelo ponto indesejado (a casa de Carlos, ponto C). O movimento é sempre para a direita (→) ou para cima (↑).*

1. Total de caminhos de André (A) até Bernardo (B):
Para ir de A até B, André deve se mover 4 *unidades para a direita e* 3 *para cima. Isso é um total de* 7 *movimentos. O número de caminhos é a permutação de* 7 *movimentos com* 4 *repetições (→) e* 3 *repetições (↑).*

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5040}{144} = 35 \textit{ caminhos totais.}$$

2. Caminhos que passam por Carlos (C):
Para encontrar os caminhos que passam por C, dividimos o trajeto em duas partes: de A até C e de C até B.

- ***De A até C:*** *São* 2 *movimentos para a direita e* 2 *para cima (total de* 4*).*

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6 \textit{ caminhos.}$$

- ***De C até B:*** *São* 2 *movimentos para a direita e* 1 *para cima (total de* 3*).*

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3 \textit{ caminhos.}$$

O total de caminhos de A até B passando por C é o produto dos caminhos de cada trecho:

$$6 \times 3 = 18 \textit{ caminhos.}$$

3. Caminhos que NÃO passam por Carlos:
Subtraímos os caminhos que passam por C do total de caminhos.

$$\textit{Caminhos válidos} = (\textit{Total de caminhos}) - (\textit{Caminhos que passam por C}) = 35 - 18 = 17.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão é um problema clássico que mobiliza a habilidade **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem). O desafio é duplo: primeiro, modelar a contagem de caminhos como uma Permutação com Repetição e, segundo, aplicar uma estratégia de contagem indireta (Princípio da Exclusão) para lidar com a restrição. A questão alinha-se perfeitamente à **Competência de Área 5** ("Modelar e resolver problemas..."), pois a modelagem é o ponto central: o aluno precisa enxergar que qualquer caminho de A para B é um "anagrama" de 4 setas para a direita e 3 para cima ($P_7^{4,3}$). O objetivo é avaliar a capacidade do aluno de aplicar a Análise Combinatória em um problema de geometria de posição (caminhos na malha), utilizando uma estratégia de contagem complexa (o método complementar). Esperava-se que o aluno estruturasse a solução calculando o total de caminhos (A $\rightarrow$ B) e subtraindo os caminhos "ruins" que passam por C (A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ B). O cálculo dos caminhos "ruins" exigia, por sua vez, a aplicação do Princípio Multiplicativo, multiplicando os caminhos do trecho (A $\rightarrow$ C) pelos do trecho (C $\rightarrow$ B), resultando em $35 - 18 = 17$.

Problema 4.1.6 (ENEM 2012 - MTC1H3)**.** O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.
Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).
De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

A) 14

B) 18

C) 20

D) 21

E) 23

Solução: *Para encontrar o total de cores que o sistema pode representar, somamos as quantidades de cada tipo de cor descrita.*

1. ***Cores Primárias:*** *O sistema usa símbolos para as* 3 *cores primárias (azul, amarelo, vermelho).*
   Total 1 = 3 *cores.*

2. ***Cores Secundárias:*** *A justaposição de dois símbolos de cores primárias forma uma cor secundária. O número de combinações de* 3 *cores primárias,* 2 *a* 2*, é:*

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \text{ cores (verde, laranja, roxo).}$$

3. ***Preto e Branco:*** *São identificados por símbolos próprios.*
   Total 3 = 2 *cores.*

4. ***Variações de Tom (Claro/Escuro):*** *Os símbolos de preto e branco podem ser associados a cada uma das cores primárias e secundárias para indicar se são claras ou escuras.*
   - *Cores primárias e secundárias:* $3+3=6$ *cores.*
   - *Variações para cada cor:* 2 *(claro ou escuro).*
   - *Total de variações:* $6\times 2=12$ *cores.*

O número total de cores representadas é a soma de todas as categorias:

$$Total=(Primárias)+(Secundárias)+(Preto/Branco)+(Variações)=3+3+2+12=20.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão avalia a habilidade da BNCC **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem), exigindo que o aluno aplique os Princípios Aditivo e Multiplicativo de forma combinada, além de testar a capacidade de identificar a necessidade de uma Combinação Simples ($C_{3,2}$) para um dos subproblemas. Na Matriz do ENEM, a questão foi classificada com o código **MTC1H3** ("Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos"). Embora pareça um problema puramente combinatório, seu foco principal é a interpretação de texto alinhado à **Competência 3** para identificar as diferentes categorias de contagem e aplicar as operações numéricas adequadas. O objetivo não é testar fórmulas complexas, mas sim a capacidade do aluno de dissecar um texto descritivo e modelar cada parte usando a ferramenta de contagem correta. Esperava-se que o aluno decompusesse o problema em quatro categorias mutuamente exclusivas (Primárias, Secundárias, Preto/Branco e Variações de Tom) e aplicasse o Princípio Aditivo. Para cada categoria, o aluno precisaria modelar a contagem: (1) contagem direta para as primárias (3) e para preto/branco (2); (2) interpretar "justaposição de dois" de três símbolos como $C_{3,2}=3$ para as secundárias; e (3) aplicar o Princípio Multiplicativo para as variações de tom (6 cores × 2 variações = 12). A síntese final, 3 + 3 + 2 + 12, levaria ao resultado 20.

Problema 4.1.7 (ENEM 2017 (2ª Aplicação) - MTC1H3)**.** Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 14 jan. 2012 (adaptado)
Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a

A) $26^3 + 9^4$

B) $26^3 \times 9^4$

C) $26^3(10^4 - 1)$

D) $(26^3 + 10^4) - 1$

E) $(26^3 \times 10^4) - 1$

Solução: *Para encontrar a quantidade de placas válidas, primeiro calculamos o número total de placas possíveis e, em seguida, subtraímos as placas que são proibidas pela regra.*
A placa tem o formato LLL-DDDD, onde L é uma letra e D é um dígito.

- ***Parte das Letras:*** *3 posições, com 26 opções de letras para cada.*
- ***Parte dos Dígitos:*** *4 posições, com 10 opções de dígitos (0 a 9) para cada.*

1. Total de placas possíveis (sem restrições): *O total é o produto das possibilidades para cada posição.*

$$Total = (26 \times 26 \times 26) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) = 26^3 \times 10^4.$$

2. Total de placas inválidas: *A restrição é que não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero. Isso significa que a parte numérica não pode ser "0000".*

- *A parte das letras pode ser qualquer combinação (26^3 possibilidades).*
- *A parte dos dígitos é fixa em "0000" (1 possibilidade).*

O número de placas inválidas é:

$$Inválidas = 26^3 \times 1 = 26^3.$$

3. Total de placas válidas: *Subtraímos as placas inválidas do total de placas possíveis.*

$$Válidas = (Total) - (Inválidas) = 26^3 \times 10^4 - 26^3.$$

Colocando 26^3 em evidência, temos:

$$26^3(10^4 - 1).$$

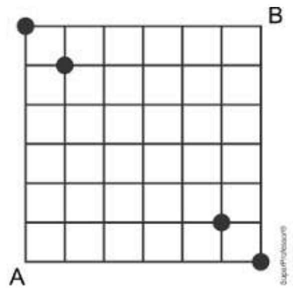
■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão é uma aplicação direta do Princípio Multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem), central para a habilidade **EM13MAT310** da BNCC. Além disso, a restrição ("Não são utilizadas placas...") exige a aplicação do Princípio Aditivo na sua forma de contagem complementar (Total - Exceções). A questão se enquadra na **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM ("Utilizar estratégias... para resolver problemas"), pois o aluno precisa modelar a situação LLL-DDDD e aplicar a estratégia da contagem pelo complementar. O objetivo é avaliar a capacidade do aluno de aplicar o Princípio Multiplicativo em um cenário com repetição e, crucialmente, de lidar com uma restrição. Esperava-se que o aluno modelasse as possibilidades totais ($26^3 \times 10^4$), modelasse a restrição (a parte numérica sendo "0000"), calculasse o total de exceções ($26^3 \times 1$), aplicasse a contagem complementar ($(26^3 \times 10^4) - (26^3)$) e, por fim, simplificasse algebricamente a expressão através da fatoração para $26^3(10^4 - 1)$, identificando a alternativa correta.

4.2 PROBLEMAS DA OBMEP

Problema 4.2.1 (OBMEP 2023 - MTC1H2)**.** Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados?



A) 4

B) 32

C) 36

D) 64

E) 74

Solução: *Para resolver, calculamos o número de caminhos que passam por cada um dos quatro pontos destacados e somamos os resultados. Os caminhos que passam por um dos pontos não passam pelos outros, pois os movimentos são sempre para a direita ou para cima. Vamos chamar os pontos de* $X(0,6), Y(1,5), Z(5,1)$ *e* $W(6,0)$*, considerando* $A(0,0)$ *e* $B(6,6)$*.*

- ***Caminhos passando por X(0,6):*** *Para ir de A(0,0) até X(0,6) há 1 caminho (só para cima). De X(0,6) até B(6,6) há 1 caminho (só para a direita). Total:* $1 \times 1 = 1$ *caminho.*
- ***Caminhos passando por W(6,0):*** *Para ir de A(0,0) até W(6,0) há 1 caminho (só para a direita). De W(6,0) até B(6,6) há 1 caminho (só para cima). Total:* $1 \times 1 = 1$ *caminho.*
- ***Caminhos passando por Y(1,5):*** *O trajeto é dividido em* $A \longrightarrow Y$ *e* $Y \longrightarrow B$.
  - *De A(0,0) a Y(1,5): 1 movimento para a direita e 5 para cima. O número de caminhos é a permutação com repetição* $P_6^{1,5} = \frac{6!}{1!5!} = 6$.
  - *De Y(1,5) a B(6,6): 5 movimentos para a direita e 1 para cima. O número de caminhos é* $P_6^{5,1} = \frac{6!}{5!1!} = 6$.

  Total de caminhos via Y: $6 \times 6 = 36$ *caminhos.*
- ***Caminhos passando por Z(5,1):*** *O trajeto é dividido em* $A \longrightarrow Z$ *e* $Z \longrightarrow B$.
  - *De A(0,0) a Z(5,1): 5 movimentos para a direita e 1 para cima.* $P_6^{5,1} = \frac{6!}{5!1!} = 6$.
  - *De Z(5,1) a B(6,6): 1 movimento para a direita e 5 para cima.* $P_6^{1,5} = \frac{6!}{1!5!} = 6$.

  Total de caminhos via Z: $6 \times 6 = 36$ *caminhos.*

O número total de maneiras é a soma dos caminhos que passam por cada ponto:

$$1 + 1 + 36 + 36 = 74.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão é um exemplo da habilidade **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem), exigindo a modelagem de caminhos em malha quadriculada, que é um caso particular de Permutação com Repetição. Alinha-se às **Competência 1** da Matriz do ENEM, pois o aluno precisa traduzir o movimento na malha para um “anagrama” de movimentos “Direita” (D) e “Cima” (C). O objetivo é avaliar a capacidade do aluno de aplicar os dois princípios fundamentais da contagem de forma combinada. Esperava-se que o aluno modelasse a contagem de caminhos (ex: $P_{a+b}^{a,b}$), aplicasse o Princípio Multiplicativo (para calcular rotas $A \longrightarrow Y \longrightarrow B$) e, crucialmente, aplicasse o Princípio Aditivo. A estratégia principal é a Decomposição em Casos Mutuamente Exclusivos. O aluno precisava reconhecer que a condição “passando por *algum* dos quatro pontos” é uma união de conjuntos e que, devido à regra (só direita/cima), os quatro pontos são mutuamente exclusivos, simplificando a contagem para uma soma direta dos casos. A ferramenta central (modelar caminhos como permutação com repetição) para este problema é usar a Soma de Casos Disjuntos.

Problema 4.2.2 (OBMEP 2022 - MTC1H2)**.** Um professor de educação física precisou escolher, dentre seus alunos, uma equipe formada por dois meninos e uma menina ou por duas meninas e um menino. Ele observou que poderia fazer essa escolha de 25 maneiras diferentes. Quantos meninos e meninas são alunos desse professor?

A) 5

B) 7

C) 9

D) 10

E) 25

Solução: *Sejam h o número de meninos e m o número de meninas. A escolha da equipe pode acontecer de duas formas mutuamente exclusivas:*

1. ***Dois meninos e uma menina:*** *O número de maneiras de fazer essa escolha é o produto da combinação de h meninos tomados 2 a 2 e da combinação de m meninas tomadas 1 a 1.*

$$C_{h,2} \cdot C_{m,1} = \frac{h(h-1)}{2} \cdot m.$$

2. ***Duas meninas e um menino:*** *O número de maneiras é o produto da combinação de m meninas tomadas 2 a 2 e da combinação de h meninos tomados 1 a 1.*

$$C_{m,2} \cdot C_{h,1} = \frac{m(m-1)}{2} \cdot h.$$

O total de maneiras é a soma das duas possibilidades, que o problema informa ser 25.

$$\frac{h(h-1)}{2} \cdot m + \frac{m(m-1)}{2} \cdot h = 25.$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$mh(h-1) + hm(m-1) = 50.$$

Colocando hm em evidência:

$$hm\left((h-1) + (m-1)\right) = 50.$$

$$hm(h+m-2) = 50.$$

Como h e m são inteiros, precisamos encontrar três fatores inteiros $(h, m, h+m-2)$ *cujo produto seja* 50*. Por inspeção ou testando as opções, vemos que se tivermos* 5 *meninos e* 2 *meninas (ou vice-versa), a equação é satisfeita:*

- *Se* $h = 5$ *e* $m = 2$*:* $5 \cdot 2(5+2-2) = 10(5) = 50.$

- *Se* $h = 2$ *e* $m = 5$*:* $2 \cdot 5(2+5-2) = 10(5) = 50.$

Em ambos os casos, o número total de alunos é a soma do número de meninos e meninas:

$$h + m = 5 + 2 = 7.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão da OBMEP 2022 avalia profundamente a habilidade **EM13MAT310** (Resolver problemas de contagem), exigindo que o aluno aplique os dois princípios fundamentais de forma interligada: o Princípio Aditivo (para os dois tipos de equipe: C1 ou C2) e o Princípio Multiplicativo (para a composição de cada equipe: Meninos e Meninas). Alinha-se também às **Competência 1** da Matriz do ENEM, focadas na construção de modelos. O objetivo da questão é avaliar a capacidade do aluno de realizar um "problema inverso" de contagem: em vez de fornecer as variáveis e pedir o resultado, o problema fornece o resultado (25) e pede as variáveis. Isso testa a capacidade de modelagem algébrica (traduzir a descrição na expressão $(C_{h,2} \cdot C_{m,1}) + (C_{m,2} \cdot C_{h,1}) = 25$), a manipulação algébrica (simplificar para $hm(h + m - 2) = 50$) e o raciocínio lógico-numérico (resolver a equação diofantina por fatoração). A estratégia central é, portanto, a Modelagem Algébrica via Princípios de Contagem. Esta abordagem de decompor o problema em casos mutuamente exclusivos (Princípio Aditivo) é uma heurística poderosa.

Problema 4.2.3 (OBMEP 2019 - MTC1H2)**.** A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

A) 10

B) 35

C) 45

D) 84

E) 126

Solução: *A cada salto, Zinza precisa escolher entre pular 1, 2 ou 3 pedras. Para que ela chegue à pedra 10 em 5 pulos, a soma dos comprimentos dos saltos deve ser igual a 9 (pois ela começa na pedra 1). As combinações de saltos possíveis são:*

- *4 saltos de 2 pedras e 1 salto de 1 pedra:*

$$\frac{5!}{4!1!} = 5.$$

- *2 saltos de 3 pedras e 3 saltos de 1 pedra:*

$$\frac{5!}{2!3!} = 10.$$

- *1 salto de 3 pedras, 2 saltos de 2 pedras e 2 saltos de 1 pedra:*

$$\frac{5!}{1!2!2!} = 30.$$

Portanto, o número de maneiras distintas que Zinza pode chegar na pedra 10 em 5 saltos é de:

$$5 + 10 + 30 = 45.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão da Rã Zinza é um problema de análise combinatória de nível avançado que avalia a habilidade da BNCC **EM13MAT310** (Resolver e elaborar problemas de contagem), exigindo que o aluno vá além da aplicação direta de fórmulas e mobilize estratégias diversas de raciocínio. A questão alinha-se às **Competência 1** da Matriz do ENEM, cujo foco é a construção e aplicação de modelos para a resolução de problemas, avaliando a capacidade de tradução precisa da situação física para a linguagem matemática através da Modelagem Algébrica. O aluno deve interpretar o deslocamento como uma partição do inteiro 9 em cinco parcelas, identificando de forma sistemática e exaustiva os casos mutuamente exclusivos (Princípio Aditivo). Para cada conjunto de pulos, exige-se a aplicação de Permutação com Repetição, pois a ordem dos saltos altera o percurso, testando a diferenciação conceitual entre a simples seleção de elementos e sua ordenação linear.

Problema 4.2.4 (OBMEP 2018 - MTC1H2)**.** Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

A) 56

B) 70

C) 71

D) 72

E) 80

Solução: *Primeiro, calcula-se o número total de maneiras de estacionar os dois carros distintos em 10 vagas, sem qualquer restrição. O primeiro carro tem 10 opções e o segundo tem 9.*

$$\textit{Total de possibilidades} = 10 \times 9 = 90.$$

Em seguida, calcula-se o número de casos em que os carros estacionam em vagas adjacentes. Vamos calcular isso considerando a escolha da vaga para o primeiro carro:

- *Se o primeiro carro estacionar em uma das 2 vagas da ponta, o segundo carro terá apenas 1 vaga adjacente para escolher.*
- *Se o primeiro carro estacionar em uma das 8 vagas centrais, o segundo carro terá 2 vagas adjacentes para escolher.*

O número de maneiras de estacionar lado a lado é a soma dessas possibilidades:

$$\textit{Vagas adjacentes} = (2 \times 1) + (8 \times 2) = 2 + 16 = 18.$$

Finalmente, o número de maneiras em que há pelo menos uma vaga livre entre os carros é a diferença entre o total de possibilidades e o número de casos em que eles são vizinhos.

$$\textit{Maneiras desejadas} = 90 - 18 = 72.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão mobiliza a habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao exigir que o aluno resolva problemas de contagem por meio de estratégias diversas, como o raciocínio indireto. O item alinha-se à **Competência 1** e à **Habilidade H2** da Matriz de Referência do ENEM, pois requer a interpretação e a construção de um modelo matemático para uma situação prática de ocupação de vagas. O objetivo central é avaliar a capacidade do estudante de simplificar um problema complexo através da Contagem Complementar, identificando que o cálculo direto da condição "pelo menos uma vaga livre" é mais trabalhoso do que subtrair os casos adjacentes do espaço amostral total. Para obter sucesso, o aluno deve aplicar o Princípio Fundamental da Contagem para definir o total de arranjos possíveis e, simultaneamente, gerenciar as restrições espaciais das vagas (posições extremas versus centrais) para modelar as exceções, demonstrando um domínio refinado do pensamento lógico-analítico em detrimento da aplicação mecânica de fórmulas.

Problema 4.2.5 (OBMEP 2018 - MTC1H2)**.** Helena tem três caixas com 10 bolas em cada uma. As bolas dentro de uma mesma caixa são idênticas, e as bolas em caixas diferentes possuem cores distintas. De quantos modos ela pode escolher 15 bolas dessas três caixas?

A) 91

B) 136

C) 150

D) 200

E) 210

Solução: *Sejam c_1, c_2, e c_3 as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas, respectivamente. O problema é encontrar o número de soluções inteiras para a equação:*

$$c_1 + c_2 + c_3 = 15.$$

Com a restrição de que o número de bolas de cada caixa não pode exceder 10:

$$0 \leq c_1, c_2, c_3 \leq 10.$$

Vamos enumerar as possibilidades. A estratégia consiste em fixar o número de bolas da primeira caixa (c_1) e, então, determinar de quantas maneiras as bolas restantes podem ser distribuídas entre as outras duas caixas (c_2 e c_3), respeitando a restrição.

- *Se $c_1 = 0$, então $c_2 + c_3 = 15$. Com a restrição $c_2, c_3 \leq 10$, as duplas (c_2, c_3) podem ser $(5, 10), (6, 9), \ldots, (10, 5)$, totalizando 6 possibilidades.*
- *Se $c_1 = 1$, então $c_2 + c_3 = 14$. As possibilidades para c_2 vão de 4 a 10, totalizando 7 possibilidades.*
- *Se $c_1 = 2$, então $c_2 + c_3 = 13$, totalizando 8 possibilidades.*
- *Se $c_1 = 3$, então $c_2 + c_3 = 12$, totalizando 9 possibilidades.*
- *Se $c_1 = 4$, então $c_2 + c_3 = 11$, totalizando 10 possibilidades.*
- *Se $c_1 = 5$, então $c_2 + c_3 = 10$, totalizando 11 possibilities.*

Por simetria, os casos para $c_1 > 5$ *espelham os resultados anteriores:*

- *Para* $c_1 = 6$*, há 10 possibilidades.*
- *Para* $c_1 = 7$*, há 9 possibilidades.*
- *Para* $c_1 = 8$*, há 8 possibilidades.*
- *Para* $c_1 = 9$*, há 7 possibilidades.*
- *Para* $c_1 = 10$*, há 6 possibilidades.*

O número total de maneiras é a soma de todas essas possibilidades:

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, a questão envolve a distribuição de objetos em recipientes, um problema clássico que mobiliza a habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao exigir a escolha e aplicação de modelos de contagem apropriados para situações de agrupamento. O item está diretamente relacionado à **Competência de Área 1** e à **Habilidade H2** da Matriz do ENEM, pois requer que o aluno identifique se os elementos são distinguíveis ou indistinguíveis para selecionar a estratégia correta. A análise pedagógica destaca a importância da transição do raciocínio intuitivo para a formalização matemática através do método de Combinação Completa (ou Método das Barras e Bolas). Ao resolver este problema, o estudante desenvolve a capacidade de abstração necessária para representar restrições (como caixas que podem ou não ficar vazias) em uma equação diofantina linear, avaliando sua competência em modelar fenômenos discretos e utilizar o Princípio Multiplicativo de forma integrada com as combinações, fugindo da aplicação mecânica de fórmulas de arranjo ou permutação simples.

Problema 4.2.6 (OBMEP 2018 - MTC1H2)**.** Um número inteiro positivo é chamado de interessante quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1.020 são interessantes, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 = 0$.

a) Qual deve ser o valor do algarismo A para que o número $14A8$ seja interessante?

b) Quantos números interessantes de quatro algarismos terminam com o algarismo 6?

c) Quantos números interessantes de cinco algarismos terminam com o algarismo 0?

Solução: *(item a) Para que o número* $14A8$ *seja interessante, o produto de seus três primeiros algarismos deve ser igual ao último algarismo, 8*

$$1 \cdot 4 \cdot A = 8 \rightarrow 4 \cdot A = 8 \rightarrow A = 2.$$

■

Solução: *(item b) Para que um número de quatro algarismos seja interessante, é necessário que os três primeiros algarismos pertençam a um dos conjuntos:* $\{1, 1, 6\}$ *ou* $\{1, 2, 3\}$.
Logo, a quantidade procurada vale:

$$P_3^2 + P_3 = \frac{3!}{2!} + 3! = 9.$$

■

Solução: *(item c) Para que um número de cinco algarismos* $(d_1 d_2 d_3 d_4 d_5)$ *seja "interessante" e termine em 0, o produto de seus quatro primeiros algarismos deve ser igual a zero* ($d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 0$)*. Como se trata de um número de cinco algarismos, o primeiro dígito* d_1 *não pode ser nulo* ($d_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$)*. Assim, para que o produto seja zero, pelo menos um dos algarismos entre* d_2, d_3 *ou* d_4 *deve ser obrigatoriamente 0.*

Dividimos a contagem em três casos mutuamente exclusivos:

- ***1º Caso: Apenas um dos algarismos** (d_2, d_3, d_4) **é igual a 0.** Existem* 3 *posições possíveis para o zero. O primeiro algarismo* (d_1) *tem* 9 *opções (1 a 9) e os outros dois algarismos restantes também têm* 9 *opções cada (1 a 9, pois não podem ser zero neste caso).*

$$9 \times 9 \times 9 \times 1 \times 3 = 2187.$$

- ***2º Caso: Exatamente dois dos algarismos** (d_2, d_3, d_4) **são iguais a 0.** Existem* $\binom{3}{2} = 3$ *maneiras de posicionar os dois zeros. O primeiro algarismo* (d_1) *tem* 9 *opções e o algarismo restante (não nulo) tem* 9 *opções.*

$$9 \times 9 \times 1 \times 1 \times 3 = 243.$$

- ***3º Caso: Todos os três algarismos** (d_2, d_3, d_4) **são iguais a 0.** Existe apenas* 1 *maneira de posicionar os três zeros. O primeiro algarismo* (d_1) *continua tendo 9 opções.*

$$9 \times 1 \times 1 \times 1 = 9.$$

Pelo Princípio Aditivo, somamos os resultados:

$$2187 + 243 + 9 = 2439.$$

■

Análise Pedagógica da Questão 13 (Item a)

Do ponto de vista pedagógico, o item (a) tem como objetivo testar a compreensão primária da regra de formação do "número interessante" e a capacidade do estudante de realizar uma substituição algébrica simples, servindo como ponto de entrada para garantir o domínio da lógica do problema antes de avançar para contagens complexas. A questão mobiliza a competência aritmética básica ao exigir que o aluno traduza a descrição do enunciado em uma equação do tipo $1 \cdot 4 \cdot A = 8$ para determinar o algarismo faltante. Na Matriz de Referência do ENEM, este item associa-se à **Competência de Área 1**, que trata de interpretar situações e construir argumentos com base em conhecimentos numéricos, relacionando-se também à **Habilidade H3**, que foca na resolução de problemas com números naturais. Embora de complexidade baixa, essa etapa inicial é crucial para o desenvolvimento do raciocínio lógico-analítico, pois consolida a base necessária para a modelagem direta e a resolução de equações elementares que fundamentam o pensamento matemático em problemas de nível olímpico.

Análise Pedagógica da Questão 13 (Item b)

Do ponto de vista pedagógico, o item (b) avalia a habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao exigir que o aluno resolva problemas de contagem que demandam a identificação de diferentes tipos de agrupamentos e a organização sistemática de dados. O objetivo central é testar a capacidade do estudante de particionar o problema, identificando inicialmente todos os conjuntos de algarismos cujo produto resulta em 6 (como $\{1, 1, 6\}$ e $\{1, 2, 3\}$), para então aplicar corretamente o Princípio Aditivo e o conceito de Permutação com Repetição. Na Matriz de Referência do ENEM, este item associa-se à **Competência de Área 1**, voltada à utilização de conhecimentos numéricos para resolver situações-problema, e à **Habilidade H3**, ao lidar com a natureza dos números naturais e suas propriedades operatórias. A estratégia exige que o aluno compreenda que a ordem dos algarismos altera o número formado, transformando a análise de fatores em um problema de permutação, o que previne erros comuns como a contagem parcial de casos ou a falha na distinção entre seleção e ordenação.

Análise Pedagógica da Questão 13 (Item c)

Do ponto de vista pedagógico, o item (c) eleva o nível de complexidade da questão ao introduzir o algarismo zero, o que mobiliza a habilidade **EM13MAT310** da BNCC através da necessidade de gerenciar restrições posicionais e múltiplas etapas de contagem. O objetivo principal é avaliar a capacidade do aluno de particionar o problema em casos mutuamente exclusivos com base na quantidade e na posição dos zeros entre os quatro primeiros dígitos, garantindo que o produto resulte em zero conforme a regra do “número interessante”. Na Matriz de Referência do ENEM, esta tarefa associa-se à **Competência de Área 1** e à **Habilidade H2**, pois exige a construção de um modelo matemático que considere a restrição de que o primeiro algarismo não pode ser nulo para que o número mantenha quatro algarismos significativos antes do dígito final. A estratégia exige a articulação do Princípio Multiplicativo com o uso de permutações para organizar os zeros nas posições permitidas, testando a precisão do aluno em evitar a dupla contagem e em aplicar corretamente o Princípio Aditivo para sintetizar os casos identificados, o que demonstra um domínio avançado do raciocínio combinatório e da lógica de formação numérica.

Problema 4.2.7 (OBMEP 2014 - MTC1H2)**.** O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se

$$n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13,$$

qual é o valor de n?

A) 13

B) 14

C) 15

D) 16

E) 18

Solução: *Para resolver este problema, comparamos a decomposição dada com o fatorial do maior número primo presente no produto, que é* 13.
Primeiramente, calculamos a decomposição em fatores primos de $13!$ *analisando os múltiplos de cada primo até* 13*:*

$$\begin{aligned}
13! &= 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
13! &= 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\
13! &= 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1.
\end{aligned}$$

Comparando o valor de $n!$ *fornecido no enunciado com* $13!$*, buscamos a razão entre eles:*

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{13!} &= \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11 \cdot 13} \\
\frac{n!}{13!} &= 2^{15-10} \cdot 3^{6-5} \cdot 5^{3-2} \cdot 7^{2-1} \\
\frac{n!}{13!} &= 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.
\end{aligned}$$

Agora, agrupamos esses fatores restantes para formar números inteiros consecutivos após o 13*:*

- $14 = 2 \cdot 7$
- $15 = 3 \cdot 5$
- $16 = 2^4$

Verificamos que $(2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$*, o que corresponde exatamente à razão encontrada. Assim:*

$$\begin{aligned}
n! &= 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \\
n! &= 16!.
\end{aligned}$$

Portanto, $n = 16$. ∎

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão da OBMEP representa um excelente exemplo de como problemas de Teoria dos Números se intersectam com a Análise Combinatória através da manipulação de fatoriais, mobilizando a habilidade **EM13MAT310** da BNCC, uma vez que o fatorial ($n!$) é a base para a contagem de permutações. O item avalia profundamente a **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM ao exigir a construção de argumentos baseados no Teorema Fundamental da Aritmética para realizar a decomposição única em fatores primos. O objetivo central é testar a capacidade do aluno de interpretar a estrutura de um fatorial e realizar a decomposição primal de forma sistemática para encontrar o limite superior do produto. Empregando uma estratégia heurística de contagem lógica, o estudante deve comparar as potências dadas com um fatorial conhecido (como o 13!) e aplicar a decomposição complementar para isolar os fatores restantes, confirmando que $n! = 16!$. Esse processo demonstra a transição de um cálculo mecânico para uma análise estrutural do número, exigindo precisão na identificação de potências de fatores primos e no uso da lógica dedutiva para a resolução do problema.

4.3 PROBLEMAS DE VESTIBULAR

Problema 4.3.1 (UECE 2025 - MTC1H2). O quadro numérico a seguir apresentado, conhecido com a denominação de "Triângulo Aritmético de Pascal – Tartáglia", envolve números combinatórios especiais: Os números que estão na linha L_i são do tipo $C_{i,P}$.

Linha	**Coeficientes Binomiais**
L_1	1
L_2	1 2 1
L_3	1 3 3 1
L_4	1 4 6 4 1
L_5	1 5 10 10 5 1
L_6	1 6 15 20 15 6 1
....	
L_n	1 n ... n 1
....	

Nota: Se um conjunto possui n elementos, $C_{n,P}$ é o número de combinações dos n elementos p a p. O número central da centésima linha (L_{100}) é sendo $n + p$ igual a $C_{n,p}$.

A) 152

B) 150

C) 148

D) 151

Solução: *A linha L_{100} do Triângulo de Pascal contém os coeficientes binomiais:*

$$C_{100,0}, C_{100,1}, C_{100,2}, ..., C_{100,100}.$$

Essa linha possui 101 elementos, e como o Triângulo de Pascal é simétrico, o número central está na posição 51 (lembrando que começamos do 0):
Número central $= C_{100,50}$.
O enunciado diz: "O número central da centésima linha (L_{100}) *é sendo* $n + p$ *igual a* $C_{n,p}$*." Isso quer dizer que:*

$$C_{100,50} = C_{n,p}$$

com $n + p =$ *? Sabemos que:* $C_{100,50} = C_{n,p}$.
Por simetria, $C_{n,p} = C_{n,n-p}$*, então podemos ter* $n = 100, p = 50$.
Logo, $n + p = 100 + 50 = 150$. ■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão de vestibular sobre o Triângulo de Pascal foca na compreensão das propriedades e da notação da Combinatória, avaliando indiretamente a habilidade **EM13MAT310** da BNCC através da manipulação de coeficientes binomiais. O item alinha-se à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM, pois exige que o aluno utilize conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações e identificar padrões em estruturas numéricas. O objetivo central é testar o conhecimento do estudante sobre a simetria dos coeficientes binomiais e a organização das linhas no Triângulo de Pascal, exigindo que ele reconheça que a centésima linha possui 101 elementos e identifique a posição central onde o índice inferior é a metade do índice superior. A estratégia resolutiva baseia-se na interpretação da notação e na aplicação da propriedade de simetria, transformando a análise combinatória em uma soma aritmética final, o que demonstra uma capacidade de abstração que vai além da simples contagem, focando nas propriedades aritméticas que regem os números combinatórios.

Problema 4.3.2 (UECE 2025 - MTC1H2)**.** O Colégio São Jorge possui um corpo docente composto por 20 professores, dos quais 6 são professores de Matemática. O número de comissões que se podem formar com quatro professores, dentre os quais pelo menos um seja professor de Matemática é

A) 3844

B) 3638

C) 2034

D) 1038

Solução: *Queremos formar comissões com* 4 *professores, sendo que pelo menos um deles deve ser de Matemática. Em vez de calcular diretamente todos os casos com pelo menos um professor de Matemática, é mais fácil usar o complemento:*
1. Total de comissões possíveis com 4 *professores (sem restrição):*

$$C_{20,4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845.$$

2. Comissões com nenhum professor de Matemática (ou seja, só com os 14 *outros professores):*

$$C_{14,4} = \frac{14!}{4!(14-4)!} = \frac{14!}{4!10!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1001.$$

3. Comissões com pelo menos 1 *professor de Matemática:*

$$C_{20,4} - C_{14,4} = 4845 - 1001 = 3844.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão constitui um exercício fundamental de Análise Combinatória que avalia diretamente a habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao exigir a resolução de problemas de contagem por meio de estratégias diversas. O item tem como objetivo principal testar o domínio da Contagem pelo Complementar, também conhecida como Princípio da Exclusão, que se apresenta como a estratégia heurística mais eficiente para simplificar problemas que contêm restrições do tipo “pelo menos um”. Na Matriz de Referência do ENEM, a questão alinha-se à **Competência de Área 1**, pois requer a aplicação estratégica de conceitos combinatórios para modelar situações-problema de forma indireta. O aluno deve ser capaz de reconhecer que a condição solicitada abrange múltiplos casos favoráveis e que a subtração do caso proibido — comissões formadas apenas por professores que não são de Matemática — do total de agrupamentos possíveis simplifica o cálculo. A resolução demanda que o estudante identifique a natureza do agrupamento como uma Combinação Simples, onde a ordem dos membros é irrelevante, demonstrando um pensamento lógico-analítico superior ao evitar a enumeração direta e exaustiva de cada possibilidade.

Problema 4.3.3 (UECE 2019 - MTC1H2)**.** Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece?

A) 136

B) 200

C) 176

D) 194

Solução: *A resolução do problema utiliza o método do complementar, que consiste em calcular o total de possibilidades e subtrair os casos que não satisfazem a condição pedida.*
1. Total de números inteiros positivos com três dígitos distintos: Para a casa das centenas, temos 9 opções (não se pode usar o zero). Para a casa das dezenas, temos 9 opções (podemos usar o zero, mas não o dígito já utilizado). Para a casa das unidades, temos 8 opções restantes.

$$9 \times 9 \times 8 = 648 \text{ } números.$$

2. Total de números inteiros positivos com três dígitos distintos em que o algarismo 5 *não aparece: Para a casa das centenas, temos* 8 *opções (não se pode usar o zero e o* 5*). Para a casa das dezenas, temos* 8 *opções (não se pode usar o* 5 *nem o dígito da centena). Para a casa das unidades, temos* 7 *opções restantes.*

$$8 \times 8 \times 7 = 448 \text{ } números.$$

3. Números que possuem o algarismo 5*: A quantidade de números com três dígitos distintos nos quais o algarismo* 5 *aparece é a diferença entre o total de números e aqueles em que o* 5 *não figura.*

$$648 - 448 = 200 \text{ } números.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão de vestibular constitui um caso de teste essencial para a habilidade **EM13MAT310** da BNCC, pois combina múltiplas restrições simultâneas: a exigência de três dígitos distintos, a restrição de que o primeiro dígito não pode ser zero e a presença obrigatória de um algarismo específico, o 5. A questão avalia o domínio da Contagem pelo Complementar, ou Princípio da Exclusão, como a estratégia mais eficiente para gerenciar restrições negativas, alinhando-se à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM. O objetivo é testar a capacidade do estudante de modelar o espaço amostral total através do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), descontando o algarismo zero da posição das centenas, e identificar o complemento exato, que consiste em contar números com dígitos distintos onde o algarismo 5 não figura. Ao realizar a subtração dos casos indesejados do total (648 − 448 = 200), o aluno demonstra um pensamento lógico superior que simplifica a resolução e evita os erros comuns associados à decomposição direta de casos positivos, que exigiria o gerenciamento fragmentado de restrições para cada posição do algarismo 5.

Problema 4.3.4 (UECE 2018 - MTC1H2)**.** O número de ternos (x, y, z) de números inteiros positivos, maiores do que cinco, que cumprem a condição $x + y + z = 30$ é

A) 71

B) 91

C) 61

D) 81

Solução: *O problema pede o número de ternos* (x, y, z) *de números inteiros positivos e maiores que cinco que satisfazem a equação* $x + y + z = 30$.
Como $x, y, z > 5$*, podemos fazer a seguinte substituição:*

$$x = a + 6, \quad y = b + 6, \quad z = c + 6, \quad \textit{com } a, b, c \in \mathbb{N} \textit{ (inteiros não negativos)}$$

Substituindo na equação original:

$$(a + 6) + (b + 6) + (c + 6) = 30$$

$$a + b + c + 18 = 30$$

$$a + b + c = 12.$$

Agora, o problema se resume a encontrar o número de soluções inteiras e não negativas da nova equação. Isso equivale ao número de combinações completas (ou com repetição) de 3 elementos tomados 12 *a* 12.
A fórmula para combinações completas é $CR_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$*. Neste caso,* $n = 3$ *e* $p = 12$.

$$CR_{12,3} = \binom{3 + 12 - 1}{12} = \binom{14}{12}.$$

Calculando o binomial:

$$\binom{14}{12} = \frac{14!}{12!(14 - 12)!} = \frac{14!}{12! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 7 \cdot 13 = 91.$$

Portanto, há 91 *soluções.* ■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão de vestibular caracteriza-se como um problema de Contagem com Restrição Inferior que avalia a habilidade **EM13MAT310** da BNCC em um nível de abstração elevado, exigindo que o aluno vá além da contagem direta para aplicar transformações de variáveis. O item alinha-se à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM, pois o foco reside na capacidade de modelar uma restrição aritmética complexa — a exigência de que as variáveis sejam maiores do que cinco — em um modelo combinatório padrão de Combinação Completa. O objetivo central é testar a habilidade do estudante em manipular algebricamente as condições do problema, utilizando a estratégia de substituição de variáveis para converter a restrição inferior em uma condição de não negatividade. Ao simplificar a equação diofantina original para o formato padrão, o aluno torna viável a aplicação da fórmula de combinações com repetição, demonstrando domínio do método de barras e estrelas para distribuir unidades em recipientes distintos. Esse processo de modelagem algébrica-combinatória é essencial para o desenvolvimento do pensamento estratégico, permitindo que problemas de difícil contagem manual sejam resolvidos de maneira sistemática e rigorosa.

Problema 4.3.5 (UECE 2018 - MTC1H2)**.** A quantidade de números inteiros positivos com quatro algarismos distintos que são múltiplos de quatro é

A) 1136

B) 1114

C) 1126

D) 1120

Solução: *Para que um número de quatro algarismos distintos seja múltiplo de* 4*, o número formado por seus dois últimos algarismos deve ser múltiplo de* 4*. A solução é dividida em dois casos, baseados ou não do algarismo* 0 *nos dois dígitos finais.*
Caso 1: Os dois últimos dígitos contêm o algarismo 0*. Os números terminam em:* $04, 08, 20, 40, 60$ *e* 80*. Temos* 6 *terminações possíveis. Para cada uma, já usamos dois dígitos distintos (ex:* 0 *e* 4*). Restam* 8 *dígitos para as duas primeiras posições.*

- *Para a casa dos milhares, temos* 8 *escolhas.*
- *Para a casa das centenas, temos* 7 *escolhas.*

O total para este caso é:

$$6 \times 8 \times 7 = 336 \text{ números}.$$

Caso 2: Os dois últimos dígitos não contêm o algarismo 0*. As terminações possíveis são:* $12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92$ *e* 96*. Temos* 16 *terminações possíveis. Para cada uma, já usamos dois dígitos distintos (ex:* 1 *e* 2*). Restam* 8 *dígitos, incluindo o* 0*.*

- *Para a casa dos milhares, não podemos usar o* 0 *nem os dois dígitos da terminação. Logo, temos* $10 - 3 = 7$ *escolhas.*
- *Para a casa das centenas, podemos usar o* 0*. Após escolher o dígito dos milhares, restam* 7 *dígitos.*

O total para este caso é:

$$16 \times 7 \times 7 = 784 \text{ números}.$$

Total de números: Pelo Princípio Aditivo, somamos os resultados dos dois casos para obter o total de números.

$$336 + 784 = 1120.$$

Portanto, há 1120 *números inteiros positivos com quatro algarismos distintos que são múltiplos de quatro.* ■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão de vestibular é um complexo problema de contagem com múltiplas restrições que avalia a habilidade **EM13MAT310** da BNCC, exigindo o uso articulado do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), da análise de casos pelo Princípio Aditivo e do gerenciamento da restrição posicional do algarismo zero na casa dos milhares. A questão alinha-se à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM por exigir a aplicação simultânea de critérios de divisibilidade, especificamente o do número 4, integrados às regras combinatórias de algarismos distintos. O objetivo central é testar a capacidade do aluno de dividir o problema em casos mutuamente exclusivos para sanar a ambiguidade da restrição do algarismo zero, garantindo que a condição de o primeiro dígito ser não nulo seja tratada corretamente em cenários onde o zero já foi ou não utilizado nas casas finais. Esse processo requer uma articulação lógico-aritmética refinada, na qual o estudante deve modelar a terminação do número com base no critério de divisibilidade e, em seguida, aplicar o PFC com restrições variáveis para as posições restantes, demonstrando domínio sobre a exaustão de possibilidades e a síntese de resultados.

Problema 4.3.6 (UECE 2016 - MTC1H2)**.** Uma urna contém 50 cartelas das quais 20 são azuis, numeradas de 1 a 20, e 30 são vermelhas, numeradas de 21 a 50. De quantas formas diferentes é possível retirar três cartelas (por exemplo, duas vermelhas e uma azul, três azuis,...) dessa urna?

A) 19600

B) 19060

C) 16900

D) 16090

Solução: *A solução consiste em calcular o número de maneiras para cada combinação de cores possível e somar os resultados. As possibilidades são:* 3 *azuis;* 2 *azuis e* 1 *vermelha;* 1 *azul e* 2 *vermelhas;* 3 *vermelhas.*
1. Três cartelas azuis: O número de maneiras de escolher 3 *cartelas azuis dentre as* 20 *disponíveis é:*

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140 \; modos.$$

2. Duas cartelas azuis e uma vermelha: O número de maneiras de escolher 2 *cartelas azuis (de* 20*) e* 1 *vermelha (de* 30*) é:*

$$\binom{20}{2} \cdot \binom{30}{1} = \frac{20!}{2!(18)!} \cdot 30 = 190 \cdot 30 = 5700 \; maneiras.$$

3. Uma cartela azul e duas vermelhas: O número de maneiras de escolher 1 *cartela azul (de* 20*) e* 2 *vermelhas (de* 30*) é:*

$$\binom{20}{1} \cdot \binom{30}{2} = 20 \cdot \frac{30!}{2!(28)!} = 20 \cdot 435 = 8700 \; modos.$$

4. Três cartelas vermelhas: O número de maneiras de escolher 3 *cartelas vermelhas dentre as* 30 *disponíveis é:*

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{3!(27)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060 \; maneiras.$$

Total de formas diferentes: Pelo Princípio Aditivo, o número total de formas é a soma de todas as possibilidades:

$$1140 + 5700 + 8700 + 4060 = 19600.$$

■

Análise Pedagógica da Questão

Do ponto de vista pedagógico, esta questão de vestibular constitui um teste direto e abrangente da habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao exigir a aplicação rigorosa e interligada de dois conceitos fundamentais: a Combinação Simples e o Princípio Aditivo por meio da análise de casos. A questão alinha-se à **Competência de Área 1** da Matriz do ENEM, focando na precisão da aplicação de procedimentos e conceitos matemáticos em um cenário claro de retirada de elementos de uma urna. O objetivo central é avaliar a capacidade do aluno de decompor o problema em um conjunto exaustivo e mutuamente exclusivo de possibilidades — como a retirada de três cartelas azuis, duas azuis e uma vermelha, entre outras combinações — e utilizar a regra combinatória apropriada para cada subcaso. Espera-se que o estudante reconheça que a ordem de retirada das cartelas é irrelevante para a composição final do grupo, modelando os subproblemas via Combinação Simples e aplicando o Princípio Multiplicativo para os casos mistos de cores. A síntese da solução, que culmina na soma dos resultados de todos os casos distintos, demonstra o domínio da estratégia de decomposição sistemática e exaustiva, essencial para os fundamentos da contagem.

5 A INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL GENERATIVA COMO FERRAMENTA DE ANÁLISE DE ERROS E GERAÇÃO DE DISTRATORES

A presente dissertação, ao longo dos capítulos anteriores, buscou evidenciar a lacuna existente entre o ensino tradicional da Análise Combinatória, frequentemente centrado na aplicação mecânica de fórmulas, e a crescente demanda por um raciocínio combinatório robusto, exigido tanto pelas diretrizes curriculares, como a BNCC, quanto por avaliações de larga escala e competições científicas. Conforme discutido no Capítulo 2, uma das barreiras mais significativas no processo de ensino-aprendizagem reside na dificuldade dos estudantes em interpretar corretamente os enunciados e modelar as situações-problema, o que os leva a cometer erros conceituais recorrentes, muitas vezes mascarados por um foco excessivo na memorização de procedimentos.

Nesse cenário desafiador, o advento e a popularização de tecnologias emergentes, notadamente a Inteligência Artificial Generativa (IAG), abrem novas perspectivas para a prática pedagógica no ensino de matemática. A pesquisa sobre o uso de IA na educação tem explorado diversas frentes, desde sistemas tutores inteligentes até a análise de dados educacionais. Mais recentemente, com o avanço dos modelos de linguagem ampla (LLMs), investiga-se o potencial da IAG para tarefas mais complexas, como a geração automática de conteúdo educacional e a análise qualitativa do trabalho do aluno (Kasneci *et al.*, 2023).

Este capítulo propõe-se a investigar e demonstrar como a IAG pode ser estrategicamente empregada como uma ferramenta pedagógica auxiliar para o professor de matemática no contexto específico da Análise Combinatória, focando em duas aplicações principais que se alinham com pesquisas sobre avaliação automatizada e feedback:

1. **Análise Preditiva de Erros:** A capacidade da IAG de processar padrões linguísticos e conceituais pode ser utilizada para antecipar os erros mais comuns que os alunos tendem a cometer ao resolver problemas específicos de combinatória. Essa abordagem se assemelha a estudos sobre diagnóstico de erros em sistemas de tutoria inteligente, mas aplicada de forma generativa. Ao fornecer um problema à IAG e solicitar uma análise das dificuldades potenciais (por exemplo, através de um *prompt* como: “Analisando este problema de contagem, quais são os 3 erros de raciocínio mais prováveis que um aluno do Ensino Médio cometeria?”), o professor obtém *insights* valiosos sobre os pontos que exigem maior atenção pedagógica, permitindo um planejamento mais direcionado (WANG; CHEN; ZOU, 2023).

2. **Geração Qualificada de Distratores:** A literatura sobre Geração Automática de Itens (AIG - Automatic Item Generation) já explora o uso de IA para criar questões de múltipla escolha (Gierl; Haladyna, 2013). A novidade trazida pela IAG é a capacidade de gerar distratores semanticamente plausíveis e baseados em erros conceituais específicos (Gao *et al.*, 2024). Ao instruir a IAG a criar alternativas incorretas baseadas nos erros previstos (por exemplo, com um *prompt* como: “Crie 3 alternativas incorretas para este problema, onde

cada alternativa seja o resultado de um dos seguintes erros conceituais: Trocar Arranjo por Combinação, Confundir Princípio Aditivo com Multiplicativo, não contar todos os casos possíves para a solução do problema; o professor pode construir avaliações formativas mais eficazes, capazes de diagnosticar não apenas *se* o aluno errou, mas *por que* errou, alinhando-se aos princípios da avaliação para a aprendizagem (Davier, 2019).

5.1 FUNDAMENTOS DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL E A INOVAÇÃO GENERATIVA

Para compreender o papel da tecnologia utilizada na análise pedagógica desta dissertação, é fundamental situá-la no contexto da evolução da Inteligência Artificial (IA).

Definição e Evolução da Inteligência Artificial (IA)

A Inteligência Artificial (IA) refere-se à capacidade de sistemas computacionais simularem a inteligência humana para executar tarefas como aprendizado, percepção, raciocínio e tomada de decisão. A IA não é uma tecnologia única, mas um campo vasto que abrange diversas metodologias e sub-áreas.

Historicamente, a IA passou por fases que incluíram sistemas baseados em regras (IA Simbólica) e, mais recentemente, o aprendizado de máquina (Machine Learning - ML). O Aprendizado de Máquina é um subcampo da IA onde os sistemas aprendem e melhoram automaticamente com a experiência, sem serem explicitamente programados.

Exemplos de IA amplamente existentes e utilizados incluem:

- **IA de Reconhecimento de Padrões:** Sistemas de reconhecimento facial, diagnóstico médico por imagem (que analisam e classificam dados visuais).
- **IA Preditiva:** Sistemas de recomendação de filmes ou produtos (*Netflix, Amazon*), previsão de risco de crédito (que utilizam ML para inferir resultados futuros).
- **IA de Processamento de Linguagem Natural (PLN):** Tradutores automáticos, assistentes virtuais (*Siri, Google Assistant*) e, crucialmente, os modelos de linguagem.

A Emergência da Inteligência Artificial Generativa

A Inteligência Artificial Generativa (IA Generativa) representa uma fronteira na IA baseada em *Deep Learning*. Ao contrário da IA Preditiva, que se concentra em classificar, prever ou identificar padrões em dados existentes, a IA Generativa tem a capacidade de criar conteúdo novo e original que nunca existiu no conjunto de dados de treinamento.

Os Modelos de Linguagem Grande (LLMs - *Large Language Models*), como o Gemini (utilizado como ferramenta de análise neste trabalho) e o ChatGPT, são exemplos proeminentes de IA Generativa. Eles são treinados em vastíssimos *datasets* de texto e código, o que lhes permite entender, resumir, traduzir e, mais importante, gerar texto coerente, seguir instruções complexas e simular processos de raciocínio.

Na área de Educação e Pesquisa, a IA Generativa atua como um poderoso motor de análise heurística. Sua capacidade de processar e sintetizar o conhecimento sobre um domínio específico (como a Combinatória em problemas olímpicos) a torna uma ferramenta eficaz para análise e produção de material didático especializado.

5.2 DISTRATORES E ANÁLISE DE ERROS NO CONTEXTO DO ENEM

Um dos pontos centrais deste trabalho é a utilização da IA para fortalecer a Análise de Erros e a subsequente Geração de Distratores em itens de Matemática, alinhados ao modelo de avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O Conceito de Distratores em Avaliações de Larga Escala

Em um item de múltipla escolha (como os apresentados nas Análises Pedagógicas), as opções de resposta são divididas em duas categorias:

1. **Gabarito:** A única opção correta, que deriva da aplicação bem-sucedida do modelo matemático e da correta execução dos procedimentos.

2. **Distratores:** São as alternativas incorretas em uma questão de múltipla escolha que, apesar de parecerem plausíveis, contêm erros sutis ou representam falhas comuns na compreensão do conteúdo. A função principal de um distrator é desviar a atenção de candidatos que não dominam completamente a habilidade ou o conceito avaliado, levando-os ao erro.

No contexto do ENEM e de outras avaliações de alta qualidade, os distratores não são escolhidos aleatoriamente. Eles são formulados para corresponder a erros conceituais ou procedimentais comuns cometidos pelos estudantes.

Características dos distratores no Enem:

- **Plausibilidade:** Eles não são respostas absurdas que podem ser facilmente eliminadas. São formulados para parecerem corretos à primeira vista, exigindo do candidato um domínio conceitual aprofundado para identificar a incorreção.

- **Erros Comuns:** Os elaboradores das provas criam os distratores com base em erros conceituais ou de cálculo frequentemente cometidos pelos alunos durante o processo de aprendizagem.

- **Avaliação de Habilidades:** A presença de distratores eficazes permite ao sistema de avaliação (como a Teoria de Resposta ao Item - TRI usada no Enem) medir com mais precisão o nível de proficiência real do estudante em determinada habilidade.

- **Distratores em Matemática:** Ser o resultado de um raciocínio parcialmente correto ou de um erro sistemático (por exemplo, confundir Arranjo com Combinação, ignorar uma restrição de zero, ou aplicar o Princípio Aditivo onde o Multiplicativo é necessário).

Ao analisar a solução de um problema, a identificação dos distratores corresponde à Análise de Erros inerente ao processo. Cada distrator é, essencialmente, a manifestação numérica de uma falha cognitiva ou procedimental esperada.

5.2.1 A IA Generativa na Análise de Erros e na Geração de Distratores

A utilização da IA Generativa, especificamente de um LLM como o Gemini, neste estudo permitiu qualificar e quantificar o processo de Análise Pedagógica:

1. **Análise Heurística Aprofundada:** A IA, treinada em uma vasta base de dados, é capaz de identificar rapidamente as estratégias de resolução de problemas de Combinatória, desmembrando-as nos Princípios Fundamentais (Aditivo, Multiplicativo, Exclusão).

2. **Identificação de Erros Sistêmicos:** Ao contrário de um algoritmo simples, o LLM pode simular o raciocínio incorreto, associando um erro procedimental (exemplo: contar 10×9 em vez de $C_{10,2}$ num problema de combinação) ao resultado numérico correspondente a um dos distratores fornecidos.

3. **Geração de Códigos e Estrutura:** Além da análise, a IA forneceu a estruturação das Análises Pedagógicas em código LaTeX, garantindo coerência, padronização e eficiência na documentação dos resultados, facilitando a transposição dos achados para o formato final da dissertação.

Portanto, o LLM não foi usado apenas como um mero gerador de texto, mas como uma ferramenta de apoio cognitivo e estrutural, permitindo que o foco da pesquisa fosse mantido na articulação entre as estratégias resolutivas e as habilidades da BNCC, com alta precisão e replicabilidade na análise dos padrões de erro.

O objetivo deste capítulo, portanto, não é propor a IAG como substituta do professor ou como fonte direta de respostas para o aluno, mas sim como uma *ferramenta de apoio ao trabalho docente*, ecoando a visão de que a IA deve complementar e potencializar as capacidades do educador. Ao demonstrar, através de exemplos práticos baseados nos problemas analisados no Capítulo 4, como utilizar a IAG para prever dificuldades e qualificar a elaboração de avaliações, busca-se oferecer ao professor de matemática um recurso adicional para enfrentar os desafios inerentes ao ensino do raciocínio combinatório. A exploração dessas técnicas representa um passo em direção à integração consciente e crítica das novas tecnologias na educação matemática contemporânea.

Para esta demonstração, selecionamos dois problemas desafiadores do Capítulo 4, oriundos da OBMEP e UECE, que exigem um raciocínio combinatório em múltiplas etapas.

1. Problemas Selecionados

Exemplo 1: (**Problema 4.2.3** [OBMEP 2019 - MTC1H2]) A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Solução: *A cada salto, Zinza precisa escolher entre pular* $1, 2$ *ou* 3 *pedras. Para que ela chegue à pedra* 10 *em* 5 *pulos, a soma dos comprimentos dos saltos deve ser igual a* 9 *(pois ela começa na pedra* 1*). As combinações de saltos possíveis são:*

- *4 saltos de 2 pedras e 1 salto de 1 pedra:*

$$\frac{5!}{4!1!} = 5.$$

- *2 saltos de 3 pedras e 3 saltos de 1 pedra:*

$$\frac{5!}{2!3!} = 10.$$

- *1 salto de 3 pedras, 2 saltos de 2 pedras e 2 saltos de 1 pedra:*

$$\frac{5!}{1!2!2!} = 30.$$

Portanto, o número de maneiras distintas que Zinza pode chegar na pedra 10 em 5 saltos é de:

$$5 + 10 + 30 = 45.$$

■

2. Análise Preditiva de Erros e Geração de Distratores

Solicitando a uma IAG uma "análise de erros prováveis", identificamos os seguintes pontos críticos de falha no raciocínio do aluno, que servem de base para a criação de distratores qualificados.

Prompt Gemini: "Atue como um especialista em avaliação pedagógica" e elaborador de itens de matemática para o ENEM. Eu vou te fornecer uma questão (baseada na OBMEP ou em outro contexto) e você deve realizar as seguintes etapas:

- **Resolução Comentada:** Resolva a questão passo a passo, identificando a resposta correta (Gabarito).

- **Mapeamento de Erros Preditivos:** Identifique pelo menos 4 caminhos de raciocínio incorretos que um aluno poderia seguir (erros conceituais, falhas de modelagem, erros de cálculo recorrentes ou interpretação equivocada do enunciado).

- **Criação de Distratores Qualificados:** Para cada erro identificado, calcule o valor numérico resultante. Esses valores serão as alternativas incorretas (A, B, C, D ou E).

- **Tabela de Justificativa Pedagógica:** Crie uma análise final explicando o que cada alternativa (distrator) sinaliza sobre a dificuldade do aluno, seguindo o padrão:

Alternativa X: [Descrição do Erro Conceitual] + [Cálculo que gera o número].
A questão base é: [COLE A QUESTÃO AQUI].
Porque esse Prompt funciona?

- **Definição de Papel (Persona):** Ao dizer "Especialista em Avaliação do ENEM", você força a IA a buscar padrões de TRI (Teoria de Resposta ao Item), onde os distratores não são números aleatórios, mas refletem o processo mental do aluno.
- **Comando de "Erro Preditivo":** Isso impede que a IA invente números qualquer. Ela precisa "simular" o erro do aluno antes de gerar a alternativa.
- **Estrutura de Saída:** Ao pedir a "Tabela de Justificativa", você garante que o resultado venha pronto para ser inserido em slides ou documentos pedagógicos (como o LaTeX que você usou).

Erro Conceitual 1: Partição Incompleta (Esquecimento de um Caso)

- **Descrição do Erro:** O aluno modela corretamente o problema (soma 9 em 5 pulos) e entende a necessidade de permutar. Contudo, ele falha em encontrar *todas* as partições de inteiros. O caso mais "esquecido" tende a ser o $\{3, 3, 1, 1, 1\}$.
- **Cálculo Resultante (Falso):** O aluno encontra apenas os casos

$$\{2, 2, 2, 2, 1\}$$

  (5 maneiras) e

$$\{3, 2, 2, 1, 1\}$$

  (30 maneiras).
- **Distrator Gerado:** $5 + 30 = 35$.

Erro Conceitual 2: Erro na Modelagem (Soma Incorreta)

- **Descrição do Erro:** O aluno interpreta "ir da pedra 1 até a pedra 10" como uma distância de 10 unidades, em vez de $10 - 1 = 9$.
- **Cálculo Resultante (Falso):** O aluno busca partições para $p_1 + ... + p_5 = 10$.
  - Caso A: $\{3, 3, 2, 1, 1\} \to P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$.
  - Caso B: $\{3, 2, 2, 2, 1\} \to P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!} = 20$.
  - Caso C: $\{2, 2, 2, 2, 2\} \to P_5^{5} = \frac{5!}{5!} = 1$.
- **Distrator Gerado:** $30 + 20 + 1 = 51$.

Erro Conceitual 3: Confusão entre Combinação e Permutação

- **Descrição do Erro:** O aluno identifica corretamente as *três* partições $\{2, 2, 2, 2, 1\}$, $\{3, 3, 1, 1, 1\}$ e $\{3, 2, 2, 1, 1\}$, mas falha em aplicar a permutação. Ele acredita que apenas o *conjunto* de pulos importa, e não a ordem.
- **Cálculo Resultante (Falso):** O aluno conta apenas o número de partições.
- **Distrator Gerado:** 3.

Erro Conceitual 4: Erro no Cálculo da Permutação (Repetição Parcial)

- **Descrição do Erro:** O aluno identifica as partições e sabe que precisa permutar, mas erra a fórmula de permutação com repetição no caso mais complexo $\{3, 2, 2, 1, 1\}$. Em vez de $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$, ele ignora uma das repetições e calcula $\frac{5!}{2!} = 60$.
- **Cálculo Resultante (Falso):** 5 (Caso C) + 10 (Caso A) + 60 (Caso B errado) = 75.

3. Resultado: Questão com Distratores Qualificados

Utilizando a análise anterior, o problema pode ser apresentado como uma questão de múltipla escolha robusta, onde cada alternativa incorreta (distrator) está ligada a um erro conceitual específico.

[Problema 4.2.3 - Adaptado] A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

A) 3

B) 35

C) 45

D) 51

E) 75

Análise dos Distratores:

A) 3: *(Erro Conceitual 3)* O aluno identificou os 3 tipos de combinações de pulos, mas esqueceu de calcular as permutações (ordens) para cada tipo.

B) 35: *(Erro Conceitual 1)* O aluno esqueceu-se de incluir a partição $\{3, 3, 1, 1, 1\}$. Ele calculou apenas as 5 maneiras do caso $\{2, 2, 2, 2, 1\}$ e as 30 maneiras do caso $\{3, 2, 2, 1, 1\}$.

C) 45: **(Gabarito)** Cálculo correto. 5 + 10 + 30 = 45.

D) 51: *(Erro Conceitual 2)* O aluno modelou o problema incorretamente, assumindo que a distância a ser percorrida era 10 (em vez de 9).

E) 75: *(Erro Conceitual 4)* O aluno errou o cálculo da permutação com repetição do caso $\{3, 2, 2, 1, 1\}$, calculando $\frac{5!}{2!}$ (60) em vez de $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$ (30), e somou com os outros casos (5 + 10).

Exemplo 2: (**Problema 4.3.3** [UECE 2019 - MTC1H2]) Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece?

A) 136

B) 200

C) 176

D) 194

Solução: *A resolução do problema utiliza o método do complementar, que consiste em calcular o total de possibilidades e subtrair os casos que não satisfazem a condição pedida.*
1. Total de números inteiros positivos com três dígitos distintos: Para a casa das centenas, temos 9 opções (não se pode usar o zero). Para a casa das dezenas, temos 9 opções (podemos usar o zero, mas não o dígito já utilizado). Para a casa das unidades, temos 8 opções restantes.

$$9 \times 9 \times 8 = 648 \ \textit{números}.$$

2. Total de números inteiros positivos com três dígitos distintos em que o algarismo 5 *não aparece: Para a casa das centenas, temos* 8 *opções (não se pode usar o zero e o* 5*). Para a casa das dezenas, temos* 8 *opções (não se pode usar o* 5 *nem o dígito da centena). Para a casa das unidades, temos* 7 *opções restantes.*

$$8 \times 8 \times 7 = 448 \ \textit{números}.$$

3. Números que possuem o algarismo 5*: A quantidade de números com três dígitos distintos nos quais o algarismo* 5 *aparece é a diferença entre o total de números e aqueles em que o* 5 *não figura.*

$$648 - 448 = 200 \ \textit{números}.$$

■

2. Análise Preditiva de Erros e Geração de Distratores

Identificamos pontos críticos de falha no raciocínio que servem de base para a criação de distratores baseados em dificuldades conceituais recorrentes.

Erro Conceitual 1: Negligência da Restrição do Zero na Centena

- **Descrição do Erro:** O aluno utiliza o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), mas ignora que o primeiro dígito de um número de três algarismos não pode ser zero, permitindo que o conjunto $\{0, 1, ..., 9\}$ seja usado integralmente na primeira posição.
- **Cálculo Resultante (Falso):** Total = $10 \times 9 \times 8 = 720$. Sem o algarismo 5 = $9 \times 8 \times 7 = 504$.
- **Distrator Gerado:** $720 - 504 = 216$.

Erro Conceitual 2: Falha na Identificação de Dígitos Distintos

- **Descrição do Erro:** O aluno ignora a restrição de que os dígitos devem ser "distintos", tratando o problema como se houvesse reposição de elementos em todas as posições.
- **Cálculo Resultante (Falso):** Total = $9 \times 10 \times 10 = 900$. Sem o algarismo 5 = $8 \times 9 \times 9 = 648$.
- **Distrator Gerado:** $900 - 648 = 252$.

Erro Conceitual 3: Contagem Direta Incompleta (Esquecimento do Zero)

- **Descrição do Erro:** O aluno tenta fixar o algarismo 5 em cada posição, mas esquece que o zero não pode ser o primeiro dígito quando o 5 ocupa a dezena ou a unidade, ou falha ao somar os casos disjuntos.
- **Cálculo Resultante (Falso):** Fixando o 5 na centena: $1 \times 9 \times 8 = 72$. Fixando na dezena: $8 \times 1 \times 8 = 64$. Fixando na unidade: $8 \times 8 \times 1 = 64$. Ao esquecer um dos casos ou cometer erro no Princípio Aditivo, obtém-se 136.
- **Distrator Gerado:** 136.

Erro Conceitual 4: Erro na Contagem de Casos Favoráveis (Complementar Parcial)

- **Descrição do Erro:** O aluno identifica as etapas do método complementar, mas comete um erro de contagem nos dígitos disponíveis para o caso sem o algarismo 5 ou erro na subtração final.
- **Cálculo Resultante (Falso):** $648 - 454 = 194$.
- **Distrator Gerado:** 194.

3. Resultado: Questão com Distratores Qualificados

[Problema 4.3.3 - Adaptado] Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece?

A) 136

B) 194

C) 200

D) 216

E) 252

Análise dos Distratores:

A) 136: *(Erro Conceitual 3)* O aluno falhou na gestão do zero durante a tentativa de contagem direta por posição.

B) 194: *(Erro Conceitual 4)* Erro aritmético na aplicação da estratégia do complementar.

C) 200: **(Gabarito)** Aplicação correta do Princípio da Exclusão e restrições posicionais.

D) 216: *(Erro Conceitual 1)* O aluno não aplicou a restrição de que o zero não pode ocupar a primeira posição do número.

E) 252: *(Erro Conceitual 2)* O aluno ignorou a exigência de que os algarismos devem ser distintos.

6 CONCLUSÃO

A presente dissertação cumpriu seu objetivo primordial de investigar e demonstrar o potencial pedagógico de problemas de Análise Combinatória oriundos de competições e exames de larga escala, articulando-os com as competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio. Ao longo desta jornada acadêmica, evidenciou-se que o ensino da Combinatória deve distanciar-se da mera aplicação procedimental de fórmulas para focar no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade de modelagem matemática.

No referencial teórico, fundamentado em autores como Dante e Polya, destacou-se que a resolução de problemas não é apenas uma aplicação de conceitos, mas o ponto de partida para a construção do conhecimento. A aplicação das etapas de Polya — compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer o retrospecto — mostrou-se essencial para que o aluno organize seu pensamento diante de desafios não-rotineiros. Além disso, a caracterização da OBMEP como uma política educacional multifacetada reforçou a importância de levar o clima de investigação olímpica para a sala de aula regular, visando não apenas identificar talentos, mas elevar o nível de proficiência de todos os estudantes.

O núcleo prático deste trabalho, materializado no Capítulo 4, ofereceu um guia metodológico através da análise de vinte problemas criteriosos do ENEM, OBMEP e UECE. A padronização das análises pedagógicas permitiu identificar que a habilidade **EM13MAT310** da BNCC é mobilizada de forma profunda quando o estudante é instigado a usar estratégias como a contagem pelo complementar, o Princípio da Casa dos Pombos e a modelagem via equações diofantinas. Tais problemas mostraram-se ferramentas eficazes para desenvolver a criatividade, a resiliência e a argumentação lógica, extrapolando o domínio puramente matemático.

A integração da Inteligência Artificial Generativa (IAG), explorada no Capítulo 5, representou uma inovação significativa no suporte ao trabalho docente. A capacidade de utilizar LLMs para realizar análises preditivas de erros e gerar distratores qualificados oferece ao professor uma nova dimensão de avaliação formativa. Identificou-se que os erros mais comuns — como a negligência de restrições posicionais do zero ou a confusão entre tipos de agrupamentos — podem ser antecipados e transformados em feedbacks produtivos, permitindo uma intervenção pedagógica muito mais precisa e personalizada.

Conclui-se, portanto, que a união entre problemas de alto nível cognitivo, metodologias ativas de resolução e o uso estratégico de tecnologias emergentes constitui um caminho sólido para um ensino de Matemática mais significativo. Como recomendações para trabalhos futuros, sugere-se a implementação desse conjunto de problemas em sequências didáticas aplicadas, bem como a investigação do impacto do uso da IA na autonomia do estudante durante o processo de resolução. Com este trabalho, espera-se contribuir para a prática docente no PROFMAT e para a melhoria do letramento matemático dos jovens brasileiros, capacitando-os a enfrentar com êxito os desafios da educação contemporânea.

REFERÊNCIAS

ARANHA, Carla. Medalha que vale vaga na universidade. **Revista Pesquisa FAPESP**, n. 282, p. 64–65, ago. 2019. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/medalha-que-vale-vaga-na-universidade/. Acesso em: 2 jan. 2026.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virginia; GODINO, Juan D. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. **Educational Studies in Mathematics**, v. 32, n. 2, p. 181–199, 1997.

BORBA, Rute E. S. R.; PESSOA, Cristiane A. S. Estudos de raciocínio combinatório. *In*: BORBA, Rute E. S. R.; MONTEIRO, Carlos E. F. (ed.). **Processos de ensino e aprendizagem em educação matemática**. Recife: UFPE, 2013.

BOYER, Carl B. **A História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 2 jan. 2026.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. (Coleção PROFMAT).

DANTE, Luiz Roberto. **Formulações e Resolução de Problemas de Matemática: Teoria e Prática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DAVIER, Alina A. von. Automatic item generation (aig) and its potential for assessment for learning. **Educational Measurement: Issues and Practice**, v. 38, n. 4, p. 69–78, 2019.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Débora Borges; OLIVEIRA, Edvan Pontes. Torre de hanói nas aulas de matemática: Contribuições para o ensino de progressão geométrica. **Sigmae**, UNIFAL-MG, v. 11, n. 2, p. 54–63, 2022.

GAO, Fei; ZHANG, Ling; CHEN, Guoyin; ZHANG, Jia. Assessing and improving the quality of llm-generated distractors for multiple-choice questions in education. *In*: **Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence**. [*S.l.: s.n.*], 2024. v. 38, n. 19, p. 21453–21461.

GIERL, Mark J.; HALADYNA, Thomas M. **Automatic item generation: Theory and practice**. New York: Routledge, 2013.

HANDAYA, A. Uma reflexão sobre dificuldade de aprendizagem de análise combinatória. **Revista Sinergia**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 53–58, 2007.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **BBC mostra sucesso de jovens internos na OBMEP**. 2019. Disponível em: https://impa.br/noticias/bbc-mostra-sucesso-de-jovens-internos-para-a-obmeep/. Acesso em: 18 ago. 2025.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **Revista OBMEP 12 anos: Uma trajetória de sucesso**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Disponível em: http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf. Acesso em: 2 jan. 2026.

INEP. **PISA 2022: Relatório Nacional**. Brasília, DF, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_nacional_pisa_2022.pdf. Acesso em: Acesso em: 19 dez. 2025.

KASNECI, Enkelejda; SESSLER, Kathrin; KÜCHMEI, Stefan; BANNERT, Maria; DEMENTIEVA, Daryna; FISCHER, Frank; GASSER, Urs; GROH, Georg; GÜNNEMANN, Stephan; HÜLLERMEIER, Eyke *et al.* Chatgpt for good? on opportunities and challenges of large language models for education. **Communications of the ACM**, ACM, v. 66, n. 11, p. 103–110, 2023.

MACHADO, Claudio de Moura; LEO, Erich. **Impacto da Olimpíada Brasileira de Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho em matemática na Prova Brasil, ENEM e PISA**. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/01/Texto_Discussao_1.pdf. Acesso em: 2 jan. 2026.

MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDES, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

MOURãO, William Lacerda. **A análise combinatória nos vestibulares militares e olimpíadas**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, 2018.

NETO, Gustavo Vilarinho Rodrigues. **Análise Combinatória: a dedução de fórmulas na resolução de problemas do ENEM**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Teresina, 2024.

OLIVEIRA, Sergiano Guerra; CALEJON, Laura Marisa Carnielo. O jogo torre de hanói para o ensino de conceitos matemáticos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Cruzeiro do Sul, v. 7, n. 4, p. 149–158, 2016.

PESSOA, Cristiane A. S. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio**. Tese (Tese (Doutorado em Educação)) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo.

ROCHA, Danilo Leonardo Vieira da. **As perspectivas do ensino-aprendizagem da análise combinatória à luz da Base Nacional Comum Curricular**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal do Piauí (UFPI), Teresina, 2019.

SILVA, Francisco Felipe Gomes da. **Um Estudo das Questões da OBMEP sobre Análise Combinatória**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2020.

VERGNAUD, Gérard. A multiple theory of conceptual fields. *In*: **Proceedings of the 8th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. East Lansing, Michigan: PME-NA, 1986. p. 240–256.

VIANA, Marcelo. **Índia criou numeração moderna, mas não a fórmula de Bhaskara**. 2019. Folha de S.Paulo. Coluna Marcelo Viana. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2019/10/india-criou-numeracao-moderna-mas-nao-a-formula-de-bhaskara.shtml. Acesso em: 6 mar. 2026.

WANG, Yuhang; CHEN, Yutong; ZOU, Dazhi. Can chatgpt diagnose student errors in mathematics? an evaluation study. *In*: **Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2023**. Association for Computational Linguistics, 2023. p. 8182–8193. Disponível em: https://aclanthology.org/2023.findings-emnlp.546. Acesso em: 3 mar. 2026.