INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FERNANDA COTRIM CATALDO NUNES

Do Radiano às Funções Trigonométricas: uma sequência didática mediada pelo GeoGebra com foco no ENEM

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Orientadora: Abigail Folha

NITERÓI
ABRIL/2026

Fernanda Cotrim Cataldo Nunes

Do Radiano às Funções Trigonométricas: uma sequência didática mediada pelo GeoGebra com foco no ENEM

Dissertação apresentada por **Fernanda Cotrim Cataldo Nunes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Abigail Folha

Niterói
2026

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

N972r Nunes, Fernanda Cotrim Cataldo
Do Radiano às Funções Trigonométricas : uma sequência didática mediada pelo GeoGebra com foco no ENEM / Fernanda Cotrim Cataldo Nunes. - 2026.
141 p.: il.

Orientador: Abigail Silva Duarte Folha.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2026.

1. Função trigonométrica. 2. Ensino médio. 3. Exame Nacional do Ensino Médio. 4. Tecnologia educacional. 5. Produção intelectual. I. Folha, Abigail Silva Duarte, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

FERNANDA COTRIM CATALDO NUNES

DO RADIANO ÀS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA MEDIADA PELO GEOGEBRA COM FOCO NO ENEM

Dissertação apresentada por **Fernanda Cotrim Cataldo Nunes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Aprovada em: 10/04/2026

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
ABIGAIL SILVA DUARTE FOLHA
Data: 11/05/2026 16:51:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profª Abigail Silva Duarte Folha - Orientadora
Doutora – Universidade Federal Fluminense

gov.br Documento assinado digitalmente
ROSIANE SOARES CESAR
Data: 12/05/2026 09:05:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profª Rosiane Soares Cesar - Membro
Doutora – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

gov.br Documento assinado digitalmente
DIRCE UESU PESCO
Data: 07/05/2026 11:01:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profª Dirce Uesu Pesco - Membro
Doutora – Universidade Federal Fluminense

gov.br Documento assinado digitalmente
CRISTHABEL JANETH CASANOVA VASQUEZ
Data: 11/05/2026 23:57:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profª Cristhabel Janeth Casanova Vasquez - Membro
Doutora – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI - 2026

Agradecimentos

A Deus, primeiramente, por ter me conduzido durante toda essa caminhada, fortalecendo-me nos momentos de dificuldade e colocando pessoas maravilhosas ao meu lado, que tornaram esse percurso mais leve e significativo. Em especial, agradeço às amigas Carolina, Cleide e Milena, pela parceria, apoio, incentivo e companheirismo ao longo do curso.

Ao meu esposo, pelo apoio constante, pela compreensão e pela ajuda na rotina do dia a dia, fundamentais para que eu pudesse me dedicar aos estudos. À minha mãe, minha fiel intercessora, pelo incentivo permanente, pelas palavras de encorajamento nos momentos em que pensei em desistir e por acreditar em mim mesmo quando eu mesma duvidei. Às minhas irmãs, pelo estímulo contínuo, pela confiança e por sempre acreditarem no meu potencial, transmitindo coragem nos momentos mais desafiadores dessa caminhada. Ao meu pai, por ter plantado em nós a convicção de que o estudo transforma destinos; por nunca ter permitido que pensássemos pequeno; por torcer, cobrar e acreditar com intensidade. Se hoje concluo esta etapa, é porque aprendi com ele que dedicação e conhecimento são caminhos que ninguém pode nos tirar. À minha sogra, por ser uma inspiração de perseverança e superação, exemplo de que o estudo é um caminho transformador e capaz de abrir possibilidades e vencer desafios ao longo da vida.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte desses dois anos de formação, sempre solícitos e dispostos a contribuir para o nosso aprendizado. Em especial, registro minha gratidão à professora Abigail Folha, minha orientadora, pela dedicação, pelas orientações criteriosas e pela condução segura durante o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio concedido ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), conforme estabelecido na Portaria nº 206, de 4 de setembro de 2018.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A sabedoria é mais preciosa do que os rubis;
nada do que vocês possam desejar compara-se a ela.”
(Provérbios 8:11)

Resumo

Esta dissertação investiga de que forma o uso do software GeoGebra pode contribuir para a aprendizagem do radiano e das funções trigonométricas seno e cosseno no Ensino Médio, com ênfase na articulação entre representações geométrica, algébrica e gráfica. A pesquisa foi motivada pelas dificuldades recorrentes dos estudantes na compreensão desses conteúdos quando abordados por metodologias tradicionais, predominantemente procedimentais e dissociadas do significado geométrico.

Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, desenvolvida com uma turma do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual do Rio de Janeiro. No âmbito do mestrado profissional, foram elaborados e aplicados dois produtos educacionais na forma de applets interativos no ambiente GeoGebra: Descobrindo o Radiano e Explorando as Funções Seno e Cosseno e suas Transformações.

A coleta de dados ocorreu por meio da observação das interações dos estudantes com os recursos digitais, da análise das atividades desenvolvidas e da aplicação de um simulado com questões inspiradas no ENEM. Os resultados indicam que o uso do GeoGebra favoreceu a compreensão conceitual do radiano como medida angular associada ao comprimento do arco e ao raio da circunferência, bem como a interpretação das transformações gráficas das funções seno e cosseno, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e para o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos trigonométricos em contextos avaliativos.

Palavras-chave: trigonometria; GeoGebra; radiano; funções seno e cosseno; ENEM.

Abstract

This dissertation investigates how the use of GeoGebra software can contribute to the learning of radians and sine and cosine functions in high school, with emphasis on the articulation between geometric, algebraic, and graphical representations. The study was motivated by the recurring difficulties students face in understanding these concepts when taught through traditional methodologies, which are predominantly procedural and disconnected from their geometric meaning.

From a methodological perspective, this is a qualitative case study conducted with a high school class from a public school in the state education system of Rio de Janeiro. Within the scope of the professional master's program, two educational resources were developed and applied in the form of interactive applets in the GeoGebra environment: Discovering the Radian and Exploring Sine and Cosine Functions and their Transformations.

Data were collected through observation of students' interactions with digital resources, analysis of the activities carried out, and the application of a test with questions inspired by ENEM. The results indicate that the use of GeoGebra promoted the conceptual understanding of radians as an angular measure associated with arc length and circle radius, as well as the interpretation of graphical transformations of sine and cosine functions, contributing to more meaningful learning and to the development of reading and interpretation of trigonometric graphs in assessment contexts.

Keywords: trigonometry; GeoGebra; radian; sine and cosine functions; ENEM.

Sumário

1 *Introdução*

1.1 Contextualização

O ensino de trigonometria no Ensino Médio constitui um dos pilares da formação matemática escolar, dada sua ampla aplicação em diversos campos do conhecimento, tais como Física, Engenharia, Arquitetura, Informática, Biologia e outros ramos da Ciência. Apesar de sua relevância, observa-se que, historicamente, estudantes apresentam dificuldades significativas na compreensão de conceitos fundamentais, como o radiano e o comportamento das funções seno e cosseno. Conforme aponta Oliveira (2020), esse cenário se agrava quando tais conteúdos são abordados por meio de práticas mecânicas e desarticuladas.

Grande parte dessas dificuldades decorre da predominância de práticas pedagógicas tradicionais, fortemente centradas em procedimentos algébricos e memorização de fórmulas, o que prejudica o desenvolvimento de uma compreensão conceitual mais profunda. A ausência de articulação entre as representações algébrica e geométrica compromete a aprendizagem significativa, especialmente quando os estudantes precisam interpretar fenômenos periódicos ou relacionar gráficos às suas expressões funcionais, visto que a construção de significados exige o estabelecimento de relações entre novos conceitos e conhecimentos prévios, conforme destaca AusubeL (1982):

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo.

Nesse sentido, a falta dessa articulação impede que o aluno utilize seus conhecimentos geométricos como subsunçores - isto é, como ideias âncoras já existentes em sua estrutura cognitiva - para a nova informação algébrica, resultando em uma aprendizagem mecânica e fragmentada.

Paralelamente, a presença crescente das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) na educação básica tem possibilitado novas formas de ensinar e aprender Matemática. O GeoGebra, em particular, destaca-se como um software interativo capaz de integrar álgebra, geometria e visualização dinâmica, permitindo ao aluno explorar conceitos que, antes, eram apresentados apenas de forma estática ou abstrata, consolidando-se como um exemplo prototípico de TDIC no ensino da Matemática. No contexto da escola pública, a utilização de ferramentas digitais representa não apenas uma inovação metodológica, mas também uma possibilidade concreta de superar dificuldades historicamente enraizadas no ensino de trigonometria.

É nesse cenário que se desenvolve a presente pesquisa, realizada com alunos do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino, em atividades envolvendo o radiano, a função seno, a função cosseno e suas transformações. A investigação busca compreender de que forma o uso do GeoGebra pode promover avanços na aprendizagem, ampliando a capacidade dos estudantes de interpretar gráficos, entender parâmetros funcionais e estabelecer conexões entre diferentes representações matemáticas.

1.2 Problema de Pesquisa

As dificuldades historicamente apresentadas pelos estudantes no estudo da trigonometria — muitas vezes restritas à memorização de fórmulas e procedimentos abstratos — tornam-se ainda mais evidentes durante a exploração de funções trigonométricas e suas representações. Diante da necessidade de promover uma aprendizagem que supere a mera reprodução mecânica e estabeleça relações significativas entre a geometria e a álgebra, emerge a seguinte questão central que delimita esta investigação:

Como o uso do software GeoGebra pode favorecer a compreensão do radiano e das funções trigonométricas seno e cosseno entre estudantes do Ensino Médio, especialmente no que se refere à interpretação gráfica, à compreensão dos parâmetros funcionais e à análise de fenômenos periódicos?

Esta pergunta norteia toda a investigação, servindo de base para o planejamento e o desenvolvimento das sequências de atividades propostas. Busca-se, portanto, compreender em que medida a visualização dinâmica e a manipulação direta proporcionadas pelo software atuam como facilitadoras na construção de novos significados matemáticos.

1.3 Justificativa

A escolha do tema se justifica por diversos fatores. O primeiro refere-se à relevância curricular: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) destaca a necessidade de que os alunos compreendam fenômenos periódicos e utilizem funções trigonométricas para interpretá-los. Ademais, tais conteúdos são amplamente cobrados em exames externos, como o ENEM e vestibulares de diversas instituições, reforçando sua importância no processo de preparação para o ensino superior.

O segundo fator é a dificuldade persistente observada entre os estudantes, sobretudo no que diz respeito ao conceito de radiano e às transformações das funções trigonométricas. A literatura especializada em Educação Matemática aponta que, quando esses conteúdos são abordados de forma estritamente tradicional e estática, há uma tendência de apropriação mecânica e fragmentada do conhecimento. Nesse sentido, Oliveira (2020) ressalta que a desarticulação entre a teoria e o uso de ferramentas tecnológicas pode aprofundar essas lacunas, defendendo o uso do GeoGebra como elemento mediador para uma compreensão alinhada às competências e habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

O terceiro fator reside na potencialidade pedagógica das tecnologias digitais. O GeoGebra, fundamentado nos princípios do construcionismo de Papert (1985) e na abordagem da aprendizagem criativa de Resnick (2020), possibilita que os estudantes assumam uma postura investigativa. Embora Papert (1985) tenha desenvolvido suas ideias originalmente em torno da linguagem Logo, seus princípios construcionistas sobre o computador como uma “máquina para pensar”aplicam-se perfeitamente ao uso dinâmico do GeoGebra no estudo de funções. Assim, o software permite que os alunos testem hipóteses e construam conceitos de forma ativa, rompendo com as limitações do ensino tradicional.

Por fim, a justificativa também se apoia nas necessidades e especificidades do ambiente escolar em que a pesquisa foi realizada, no qual se identificou a urgência de metodologias inovadoras para superar lacunas conceituais e promover maior engajamento dos estudantes.

1.4 Objetivos

Objetivo Geral:

Investigar como o uso do GeoGebra pode favorecer a construção de significados sobre o conceito de radiano e as funções seno e cosseno no Ensino Médio, promovendo a integração entre as representações geométrica, algébrica e gráfica.

Objetivos Específicos:

- Desenvolver applets interativos no software GeoGebra que funcionem como laboratórios virtuais para a exploração do radiano e das funções trigonométricas.

- Propor sequências de atividades investigativas mediadas por esses recursos, iniciando pela compreensão da medida de arcos em radianos e avançando para a manipulação dinâmica dos parâmetros a, b, c e d nas funções seno e cosseno, considerando suas expressões gerais $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx + c) + d$ e $g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$.

- Analisar indícios de aprendizagem significativa manifestados pelos estudantes durante a manipulação do software e a resolução das atividade.

- Verificar a capacidade de transferência do conhecimento construído no software para a resolução de questões em larga escala, como ENEM e vestibulares.

- Identificar dificuldades persistentes e compreender de que forma as atividades contribuíram para superá-las.

1.5 Metodologia da Pesquisa

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa, configurando-se como um estudo de caso focado na análise do processo de aprendizagem da trigonometria mediado pela tecnologia. A investigação foi realizada com 11 estudantes da turma 2003 do Ensino Médio, no contexto das atividades curriculares de Matemática. O cenário da intervenção foi a Sala Maker da escola, ambiente pedagógico voltado para a aprendizagem ativa, caracterizado pelo uso de tecnologias digitais, experimentação e desenvolvimento de atividades práticas e colaborativas. Para a execução das tarefas, os estudantes utilizaram Chromebooks e acessaram os applets desenvolvidos no software GeoGebra Classic. A coleta e o registro dos dados foram realizados de forma contínua durante a aplicação das sequências didáticas, utilizando os seguintes instrumentos:

- Atividades exploratórias com o GeoGebra;

- Registros das manipulações realizadas pelos alunos;

- Análises das respostas às atividades;

- Observações pedagógicas;

- Aplicação de um simulado com questões do ENEM e vestibulares;

- Registros fotográficos.

1.6 Estrutura da Dissertação

A dissertação está organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2 — Fundamentação Teórica.

- Capítulo 3 — Recursos Digitais e o Ensino Dinâmico da Matemática.

- Capítulo 4 — Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

- Capítulo 5 — Radiano e o Ciclo Trigonométrico.

- Capítulo 6 — As Funções Seno e Cosseno e suas Transformações.

- Capítulo 7 — Funções Trigonométricas no ENEM e demais Vestibulares.

- Capítulo 8 — Considerações Finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Ensino de Trigonometria no Ensino Médio

A trigonometria é historicamente reconhecida como um dos campos de maior complexidade no currículo de Matemática do Ensino Médio. Conforme aponta Dante (2008), essa dificuldade reside, muitas vezes, na abstração necessária para compreender as relações fundamentais entre ângulos e medidas, bem como na interpretação de gráficos e na articulação necessária entre a álgebra e a geometria. Quando esses elementos são ensinados de forma isolada, o estudante perde a capacidade de enxergar a trigonometria como um sistema integrado de representações.

Essas dificuldades estão, em grande parte, relacionadas a práticas pedagógicas fragmentadas. Nesse modelo tradicional, os conteúdos são frequentemente abordados de forma excessivamente mecânica, priorizando a memorização de fórmulas e procedimentos algorítmicos em detrimento da construção do significado geométrico. A consequência direta dessa abordagem é o que a literatura caracteriza como aprendizagem mecânica: o aluno retém informações de forma arbitrária e literal, sem o desenvolvimento de um raciocínio matemático profundo e duradouro.

Por outro lado, a trigonometria torna-se um campo fértil para o desenvolvimento do pensamento funcional e geométrico quando ensinada de forma integrada. Ao utilizar múltiplas representações — como o círculo trigonométrico, tabelas, expressões algébricas e recursos visuais dinâmicos — é possível converter o aprendizado puramente abstrato em um processo de investigação, permitindo que o estudante visualize as transformações das funções e compreenda a natureza periódica dos fenômenos trigonométricos.

2.2 Radiano como Unidade de Medida Angular

O radiano constitui a unidade fundamental para o estudo analítico das funções trigonométri- cas, pois permite que o argumento dessas funções seja tratado como um número real, e não apenas como uma abertura em graus. Sua definição — fundamentada na razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência — oferece uma perspectiva geométrica intrínseca à natureza do círculo. Enquanto o sistema sexagesimal (graus) baseia-se em uma divisão convencional e arbitrária da circunferência em 360 partes, o radiano emerge como uma unidade de medida natural, estabelecendo uma relação direta e proporcional entre o arco e o raio. No entanto, a transição entre esses sistemas é apontada como um dos principais obstáculos epistemológicos no Ensino Médio.

Conforme discute Eliane Oliveira (2020), muitos estudantes enfrentam dificuldades severas em transcender a mera conversão algébrica de unidades. Para a autora, o radiano é frequentemente reduzido a uma regra de três, o que impede o aluno de interpretar a medida como um comprimento de arco sobre o ciclo trigonométrico. Essa lacuna conceitual compromete a compreensão do radiano como um “número puro”(adimensional), dificultando a posterior visualização das funções trigonométricas no plano cartesiano, em que o eixo x (eixo das abscissas) passa a representar comprimentos reais.

Nesse cenário, a compreensão profunda do radiano é o primeiro passo para que o estudante deixe de ver a trigonometria como um conjunto de triângulos isolados e passe a compreendê-la como um estudo de fenômenos periódicos. A articulação entre a medida do arco e sua projeção nos eixos torna-se mais clara quando o aluno consegue visualizar o radiano como uma grandeza dinâmica, e não apenas como um símbolo estático acompanhado do π.

2.3 Funções Trigonométricas Fundamentais (Seno e Cosseno)

As funções seno e cosseno representam relações intrínsecas entre arcos e coordenadas no ciclo trigonométrico, transcendendo a geometria do triângulo retângulo para o domínio dos números reais. Quando associadas a parâmetros como amplitude, período e deslocamentos (horizontal e vertical), essas funções consolidam-se como modelos matemáticos fundamentais para a descrição de fenômenos periódicos naturais e tecnológicos, como oscilações sonoras, marés e correntes elétricas.

No entanto, a compreensão plena dessas funções e de suas transformações exige que o estudante articule, de forma simultânea, a interpretação gráfica, a leitura algébrica e o raciocínio geométrico, como discutido por Dante (2008). Conforme aponta Oliveira (2020), essa competência multirrepresentacional é frequentemente prejudicada em abordagens tradicionais, que tendem a focar na construção manual de tabelas de pontos isolados, negligenciando a natureza dinâmica e contínua das funções.

Nesse contexto, o estudo das funções seno e cosseno $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ deixa de ser apenas uma manipulação de fórmulas para tornar-se o estudo do pensamento funcional. Compreender como a variação de um ângulo (em radianos) reflete na variação de uma ordenada (seno) ou abscissa (cosseno) é o subsunçor necessário para que o aluno consiga, posteriormente, interpretar os efeitos dos parâmetros a, b, c e d na forma geral das funções trigonométricas, em que a representa a amplitude, b está relacionado ao período, c ao deslocamento horizontal (fase) e d ao deslocamento vertical.

2.4 Tecnologias Digitais e o Ensino de Matemática

O uso das tecnologias digitais no ambiente escolar tem sido amplamente discutido como uma estratégia fundamental para promover aprendizagens que superem a mera recepção passiva de informações. Conforme defende Papert (1985) , os ambientes computacionais não devem ser apenas repositórios de conteúdo, mas sim ferramentas que permitam ao aluno “pensar com o computador”, transformando a máquina em um objeto para a construção e depuração de ideias matemáticas.

Nessa perspectiva, a abordagem da aprendizagem criativa proposta por Resnick (2020) reforça que o conhecimento se consolida de forma mais profunda quando o estudante tem a liberdade de experimentar, testar hipóteses e realizar descobertas em ambientes interativos. No ensino da Matemática, essa experimentação é potencializada por softwares de geometria dinâmica, que permitem a visualização imediata de padrões e a compreensão de relações abstratas que seriam dificilmente percebidas em recursos estáticos.

Assim, recursos digitais, como o GeoGebra, atuam como mediadores no processo de abstração, favorecendo a construção de significados pelos estudantes. Ao manipular parâmetros e observar as reações gráficas em tempo real, o estudante deixa de ser um espectador de fórmulas prontas para se tornar um investigador de propriedades matemáticas, estabelecendo as conexões necessárias para uma aprendizagem significativa, conforme discutido por Oliveira (2020) ao analisar o impacto das tecnologias no ensino da trigonometria.

2.5 O GeoGebra como Ferramenta Didática

O GeoGebra consolida-se como um software de matemática dinâmica que integra, em uma única interface, geometria, álgebra e recursos gráficos. Essa característica de múltiplas representações simultâneas permite que o estudante explore conceitos matemáticos de forma integrada: ao alterar uma expressão algébrica, o gráfico e a geometria associada reagem instantaneamente. Essa interatividade é fundamental para favorecer a aprendizagem significativa conforme Ausubel(1982), pois oferece ao aluno a oportunidade de ancorar novos conceitos em uma estrutura visual e manipulável.

Pesquisas recentes na área de Educação Matemática reforçam o papel mediador dessa ferramenta no estudo de funções. Conforme destaca Novaes (2021), a dinamicidade do Geo- Gebra atua como um facilitador na transição entre o abstrato e o concreto, permitindo que o estudante visualize propriedades que, no ensino tradicional, pautado em representações estáticas da lousa, seriam dificilmente percebidas. Para o autor, o software funciona como um ambiente de experimentação onde o erro faz parte do processo de construção do saber.

Nesse sentido, a potencialidade do GeoGebra no ensino de funções trigonométricas reside na capacidade de manipular parâmetros e observar transformações em tempo real. Como corroboram Novaes (2021) e Oliveira (2020), essa visualização imediata dos efeitos dos parâmetros a, b, c e d — associados, respectivamente, à amplitude, ao período e aos deslocamentos horizontal e vertical — sobre as curvas seno e cosseno permite que o aluno estabeleça conexões substantivas entre a variação numérica e o comportamento gráfico, transformando a aprendizagem em um processo investigativo e dotado de sentido.

3 Recursos Digitais e o Ensino Dinânico da Matemática

3.1 Recursos Digitais e o Contexto Educacional Contemporâneo

O avanço das tecnologias digitais nas últimas décadas modificou profundamente a forma como os sujeitos aprendem, comunicam-se e interagem com o conhecimento. Na educação, essa transformação trouxe novos desafios e possibilidades, sobretudo na área da Matemática, campo que historicamente tem sido marcado por práticas de ensino baseadas na repetição e na memorização.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) orienta que o uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) sejam integradas às práticas pedagógicas como meio de desenvolver o pensamento científico, crítico e criativo. Nesse sentido, o ensino da Matemática deve trancender o domínio de algoritmos e procedimentos, incluindo também a compreensão conceitual e a capacidade de resolver problemas em contextos reais.

De acordo com Papert (1985), o computador não deve ser visto apenas como uma máquina de cálculos, mas como uma "ferramenta para pensar". Ao manipular objetos digitais, o estudante constrói modelos mentais e amplia sua compreensão dos conceitos matemáticos. Essa visão rompe com o paradigma tradicional e introduz uma concepção de aprendizagem em que o aluno assume o protagonismo, explorando e experimentando conceitos de forma ativa.

O uso de recursos digitais amplia as formas de representar o pensamento matemático e de construir significados. Resnick (2020) reforça essa perspectiva ao afirmar que os indivíduos aprendem melhor quando estão envolvidos na criação de algo que lhes seja significativo. Essa visão alinha-se à Aprendizagem Criativa, na qual o erro é compreendido como parte essencial do processo investigativo e a curiosidade atua como elemento motivador.

Essas tecnologias também respondem ao perfil dos estudantes contemporâneos, denominados por Prensky (2001) como “nativos digitais”. Trata-se de indivíduos que cresceram em contato constante com a tecnologia e possuem uma forma de processar informações mais interativa e visual. Ignorar esse contexto seria manter o ensino em um modelo ultrapassado, incapaz de dialogar com as novas gerações.

No caso da educação matemática, o uso de softwares como o GeoGebra favorece uma transição de uma **matemática mecânica**, voltada à reprodução de fórmulas, para uma **matemática dinâmica**, centrada na experimentação e na construção de significados. Essa mudança de paradigma é fundamental para uma formação que busque sentido, criatividade e autonomia intelectual.

3.2 O Papel das Tecnologias na Educação Matemática

A introdução de recursos digitais no ensino da Matemática representa mais do que um avanço tecnológico: constitui uma mudança epistemológica. A Matemática, tradicionalmente associada à exatidão e à rigidez, passa a ser vista como uma ciência viva, interativa e em constante transformação.

Conforme evidencia Boyer (1991) o ensino da Matemática deve promover a compreensão das ideias que estruturam os conceitos, e não apenas a execução de procedimentos. Para Dante (2008), a aprendizagem matemática ganha significado quando o aluno percebe sentido naquilo que faz, relacionando teoria, prática e contexto”.

A utilização de recursos digitais, portanto, não tem a função de substituir o professor, mas de potencializar o processo de ensino e aprendizagem. Iezzi et al. (2018) destacam que o uso de representações gráficas e tecnológicas permite ao estudante visualizar relações entre grandezas e compreender propriedades que, no ensino tradicional, permanecem abstratas.

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000) já indicavam a importância da tecnologia como instrumento de ampliação das possibilidades de representação e de investigação, reforçando que o aprendizado matemático deve estar vinculado à resolução de problemas, à experimentação e à construção de modelos.

Nesse contexto, a aprendizagem por descoberta propõe que o professor atue como um mediador, criando situações que levem o aluno a investigar e compreender conceitos em vez de apenas aplicar fórmulas prontas. Conforme destaca Terra (2025), o engajamento criativo em sala de aula ocorre quando o estudante é incentivado a explorar e construir o próprio conhecimento, transformando a curiosidade em um motor para o aprendizado significativo. Assim, as TDIC tornam-se aliadas na superação de práticas que reforçam o ensino mecânico, permitindo que a repetição de procedimentos dê lugar à compreensão real dos fenômenos matemáticos.

Segundo Oliveira (2020), o uso do GeoGebra é coerente com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e dos PCNEM, pois permite ao aluno explorar propriedades matemáticas em ambientes interativos, favorecendo o pensamento geométrico e o raciocínio dedutivo. De modo semelhante, Novaes (2021) observa que o uso de softwares interativos contribui para a compreensão de fenômenos periódicos e para o desenvolvimento da autonomia do estudante.

A integração entre teoria e prática, mediada pela tecnologia, proporciona uma aprendizagem mais significativa. Como destaca Ausubel (1982), “o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe”. Ao partir de conceitos prévios e promover novas conexões, o ambiente digital torna-se propício para que o conhecimento matemático seja construído de forma lógica e substancial.

3.3 O Software GeoGebra: História, Comandos e Potencialidades

O **GeoGebra** é um software livre de matemática dinâmica desenvolvido por Markus
Hohenwarter em 2001, com o propósito de integrar em um único ambiente representações geométricas, algébricas, gráficas, numéricas e estatísticas. Essa característica multimodal o diferencia de outros programas, pois permite que o estudante manipule objetos matemáticos e observe, em tempo real, os efeitos de suas ações sobre as construções realizadas.

A estrutura do GeoGebra pode ser interpretada à luz da a visão de Papert (1985), na medida em que possibilita que o aluno "pense com o computador" e desenvolva suas próprias construções matemáticas. Nesse sentido, o GeoGebra favorece o desenvolvimento da autonomia intelectual e do raciocínio lógico ao permitir que o aluno construa e teste hipóteses, explore propriedades e visualize conceitos abstratos de maneira concreta.

Além da janela gráfica principal, o GeoGebra oferece diferentes modos de trabalho — Geometria, Álgebra, Planilha, CAS (Cálculo Simbólico), 3D e Estatística — que ampliam suas possibilidades didáticas. Essa integração entre múltiplas representações possibilita que o estudante relacione expressões simbólicas, gráficos e objetos geométricos em um mesmo ambiente, fortalecendo o pensamento matemático de forma interativa e visual.

De acordo com Oliveira (2020), o GeoGebra cria condições para que o aluno visualize propriedades e compreenda relações que antes eram apresentadas apenas de forma simbólica. Já Novaes (2021) destaca que o uso do software "possibilita ao estudante interagir com o objeto matemático e descobrir regularidades por meio da manipulação", desenvolvendo uma compreensão mais profunda das relações funcionais e geométricas.

O potencial do GeoGebra vai além da visualização: ele também permite a exploração de situações-problema, a modelagem matemática, a análise de dados e a experimentação algébrica, sendo aplicável desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Essa versatilidade o torna um aliado do professor na construção de aulas investigativas, criativas e alinhadas às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que preconiza o uso das tecnologias digitais para promover o pensamento científico, crítico e criativo.

A pesquisa Floriano (2024) exemplifica uma dessas potencialidades. Em sua dissertação GeoGebra na Educação Básica: Uma Abordagem para o Ensino de Problemas de Otimização, o autor utiliza o software para explorar graficamente funções e analisar situações de máximo e mínimo, favorecendo a compreensão visual de conceitos matemáticos. Embora o estudo esteja voltado para problemas de otimização, o autor evidencia o potencial do GeoGebra como ambiente de exploração de funções e análise gráfica, aspecto que também fundamenta a proposta desta pesquisa.

Esse tipo de aplicação mostra que o GeoGebra pode ser explorado tanto como ambiente construtivo — quando o professor ou o aluno desenvolvem applets e simulações interativas — quanto como ferramenta analítica, para explorar gráficos, realizar medições e investigar propriedades de funções matemáticas.

Na presente pesquisa, o GeoGebra foi empregado de ambas as formas. Primeiramente, na criação de dois applets autorais — Descobrindo o Radiano e Explorando as Funções Seno e Cosseno —, elaborados especificamente para o produto educacional e aplicados em sala de aula. Além disso, nas atividades subsequentes (Atividades 3 e 4), o software também foi utilizado em sua forma plena, como ambiente de exploração algébrica e de autoavaliação digital, no qual os alunos puderam resolver e corrigir exercícios diretamente na plataforma.

Essas múltiplas possibilidades evidenciam que o GeoGebra é muito mais do que um recurso de visualização: trata-se de uma ferramenta de investigação e criação, que concretiza o princípio da aprendizagem significativa discutida por Ausubel (1982) e da aprendizagem criativa, segundo Resnick (2020), ao permitir que o aluno construa, teste, visualize e reflita sobre os conceitos matemáticos que estuda.

Assim, o uso do GeoGebra no ensino de Matemática representa uma síntese entre teoria e prática, entre o simbólico e o concreto, transformando o processo de ensino-aprendizagem em uma experiência dinâmica, interativa e coerente com as demandas da educação contemporânea. Essas potencialidades fazem do GeoGebra uma ferramenta pedagógica que integra teoria e prática, tornando o aprendizado da trigonometria mais acessível e envolvente.

3.4 Do Ensino Mecânico à Aprendizagem Dinâmica: o Papel das Tecnologias Digitais

Durante séculos, o ensino da Matemática foi conduzido sob uma perspectiva mecanicista, centrada na aplicação de fórmulas e na repetição de exercícios. Essa abordagem, embora útil em determinados contextos,tende a privilegiar procedimentos em detrimento da compreensão conceitual, limitando a construção de significados por parte do estudante.

Na perspectiva da teoria da aprendizagem significativa, destaca-se que o verdadeiro aprendizado ocorre quando novas informações se relacionam, de modo não arbitrário e substantivo, aos conhecimentos prévios do aluno (AUSUBEL, 1982). Quando essa conexão não se estabelece, o que se observa é uma aprendizagem mecânica, muitas vezes temporária e fragmentada.

Nesse contexto, Terra (2025) ao discutir a aprendizagem por descoberta, ressalta que o estudante precisa ser colocado diante de situações que o levem a investigar, formular hipóteses e construir relações por si próprio. A descoberta orientada, quando mediada pelo professor, favorece o envolvimento cognitivo e amplia a compreensão dos conceitos matemáticos.

A introdução dos recursos digitais dialoga diretamente com essa perspectiva. A chamada matemática dinâmica envolve experimentação, visualização e modelagem — práticas que favorecem o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia. O

GeoGebra, nesse cenário, atua como ferramenta mediadora, permitindo que o estudante explore conceitos, teste conjecturas e observe transformações em tempo real.

Papert (1985) defende que aprender envolve construir e testar hipóteses, e ambientes computacionais oferecem condições propícias para esse tipo de experiência. De modo complementar, Prensky (2001) argumenta que os estudantes contemporâneos respondem melhor a contextos interativos e participativos, o que demanda do professor uma postura mediadora.

Nesse sentido, o uso de tecnologias como o GeoGebra está em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e dos PCNEM (2000), que enfatizam o desenvolvimento de competências relacionadas à resolução de problemas, à investigação e à compreensão de fenômenos do cotidiano.

Dessa forma, o uso pedagógico dos recursos digitais ultrapassa o aspecto instrumental e contribui para a construção de um ambiente de aprendizagem mais investigativo e participativo, no qual o estudante assume papel ativo na construção do conhecimento matemático.

3.5 Considerações Finais do Capítulo

O uso de recursos digitais no ensino da Matemática, especialmente do GeoGebra, não é apenas uma inovação metodológica, mas uma necessidade diante das demandas da educação contemporânea. Como discutido ao longo desse capítulo, as TDIC favorecem a visualização de conceitos abstratos, a compreensão de relações complexas e o fortalecimento do raciocínio lógico-geométrico.

Ao integrar o uso de tecnologias à prática docente, o professor fomenta um ambiente de ensino mais inclusivo, interativo e significativo, rompendo com a lógica do ensino mecânico e aproximando os estudantes de uma Matemática viva e contextualizada. Nesse cenário, o erro deixa de ser um entrave para se tornar parte do processo investigativo, conforme os princípios da Aprendizagem Criativa.

Em suma, A Aprendizagem Significativa, proposta por Ausubel (1982) e a perspectiva de Resnick (2020) encontram, no ambiente digital, o suporte necessário para o estabelecimento de novas conexões cognitivas. O GeoGebra, portanto, é mais do que uma ferramenta: é um mediador de sentidos, transformando a sala de aula em um espaço de descoberta e autonomia intelectual para o estudante do ensino médio.

4 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Fundamentos para o Ciclo Trigonométrico

4.1 Introdução

A trigonometria no Ensino Médio inicia-se, habitualmente, pelo estudo do triângulo retân- gulo e pela definição das razões seno, cosseno e tangente. Embora essa abordagem seja clássica, ela constitui uma etapa indispensável para a construção do pensamento trigonométrico, pois permite ao estudante compreender as proporções fundamentais entre lados e ângulos.

Segundo Iezzi et al. (2018), a trigonometria estabelece relações naturais entre grandezas lineares e angulares, articulando a geometria e a álgebra na resolução de problemas que envolvem variação e proporcionalidade. Esse contato inicial com as razões trigonométricas contribui para formar o subsunçor necessário para o estudo das funções circulares, tema central desta dissertação.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) destaca a necessidade de explorar múltiplas representações e promover conexões significativas entre conceitos geométricos, algébricos e gráficos. Assim, antes de avançar para o ciclo trigonométrico e para o estudo do radiano (Capítulo 5), torna-se fundamental consolidar os fundamentos da trigonometria no triângulo retângulo.

Embora esses conteúdos sejam formalmente introduzidos no 9º ano do Ensino Fundamental, sua retomada neste capítulo é estratégica. A compreensão plena do ciclo trigonométrico — e, posteriormente, das funções seno e cosseno — depende da compreensão do significado geométrico das razões trigonométricas, isto é, da interpretação dessas razões como relações entre os catetos e a hipotenusa no triângulo retângulo e, posteriormente, como coordenadas $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ no ciclo trigonométrico.. Essa revisão permite ao estudante perceber que as coor- denadas no ciclo não surgem de forma arbitrária: elas derivam diretamente da relação entre os catetos e a hipotenusa (que no ciclo unitário assume valor igual a 1). Ao revisitar esses conceitos, evidencia-se a lógica da associação do cosseno ao eixo x e do seno ao eixo y, preparando o terreno conceitual para o estudo das funções trigonométricas.

4.2 Conceitos Fundamentais

No triângulo retângulo, consideram-se as seguintes relações para um ângulo agudo θ:

- **Seno:**
$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$
- **Cosseno:**
$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}.$$
- **tangente:**
$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

Dante (2008) destaca que tais definições permitem estabelecer relações simples e diretas entre medidas de um triângulo, constituindo a base necessária para resolver problemas envolvendo alturas, distâncias e inclinações. Na prática, essas situações despertam a curiosidade do estudante ao revelarem a utilidade da matemática em cenários cotidianos.

Um exemplo clássico é a atuação de um fiscal de urbanismo que, ao verificar se a altura de um prédio está em conformidade com as normas da prefeitura, pode utilizar a trigonometria para realizar a medição indireta a partir do solo, sem a necessidade de acessar o topo da edificação. Da mesma forma, o cálculo da inclinação de rampas de acessibilidade ou a determinação da altura de encostas em obras de engenharia demonstram que essas razões são ferramentas vivas em diversas profissões.

Essas definições, embora elementares, possuem grande relevância conceitual: elas fornecem os primeiros significados atribuídos ao seno e ao cosseno. De acordo com a teoria de Ausubel (1982), esse entendimento inicial é o que permitirá a expansão posterior desses conceitos no ciclo trigonométrico, onde as razões deixarão de ser apenas divisões entre lados de um triângulo para se tornarem funções de domínio real.

4.3 A Transição: dos Graus ao Pensamento Trigonométrico

Neste estágio da aprendizagem, optou-se pela utilização exclusiva da medida em graus, por ser a unidade mais familiar ao estudante e a mais adequada ao trabalho inicial, com os ângulos notáveis ($30°, 45°$ e $60°$). Essa escolha pedagógica fundamenta-se na intenção de consolidar as razões trigonométricas antes de introduzir a abstração do radiano, evitando uma sobrecarga cognitiva imediata.

Vale ressaltar que a busca por uma aprendizagem significativa não visa sobrepor-se ou descartar as bases do ensino tradicional, mas sim complementá-lo. O objetivo é despertar o interesse e a curiosidade do discente ao proporcionar a transição do pensamento abstrato para o concreto. Ao dominar as relações no triângulo retângulo, o aluno constrói o repertório necessário para perceber que a trigonometria não é um conjunto isolado de fórmulas, mas um sistema de proporções que rege o espaço.

Dessa forma, para que a evolução rumo ao ciclo trigonométrico ocorra de maneira fluida, é essencial que o estudante consiga:

- Compreender o ângulo como uma relação de inclinação e abertura;

- Estabelecer com clareza as razões de seno, cosseno e tangente;
- Reconhecer a proporcionalidade em triângulos de diferentes escalas.

Este capítulo cumpre, portanto, o papel de organizar os conhecimentos prévios. Tal Como preconiza Eliane Oliveira (2020), a construção de significados na trigonometria depende dessa ancoragem sólida. Ao final desta etapa, o aluno estará preparado para compreender que a medida por comprimento de arco (radiano) é uma extensão natural e necessária para o estudo das funções no ambiente dinâmico do GeoGebra.

Esse repertório será ativado no capítulo seguinte para compreender que medir ângulos por comprimento de arco é uma extensão natural da própria trigonometria.

4.4 Razões Trigonométricas como Funções

Ao analisar diferentes triângulos semelhantes, o estudante percebe que os valores $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$ são invariantes em relação ao tamanho dos lados, dependendo exclusivamente da medida do ângulo. Essa constatação, destacada por Iezzi et al. (2018), marca a transição da trigonometria puramente geométrica para a perspectiva funcional. Nesse estágio, as razões trigonométricas passam a ser compreendidas como leis de correspondência associadas ao ângulo, antecipando a interpretação das funções seno e cosseno que será consolidada no ciclo trigonométrico.

4.5 Limitações do Triângulo Retângulo

Apesar de sua importância como alicerce conceitual, o modelo do triângulo retângulo apresenta limitações intrínsecas que impedem o avanço para o estudo do cálculo e dos fenômenos físicos:

- Restrição a ângulos agudos ($\theta < 90°$)
- Impossibilidade de representar arcos completos ou voltas múltiplas;

- Ausência de uma representação que explicite a periodicidade;
- Inadequação para descrever fenômenos oscilatórios e ondas;
- Impedimento à generalização das funções para o domínio dos números reais ($\mathbb{R}$).

Como consequência dessas restrições, muitos estudantes consolidam a ideia de que seno e cosseno são apenas divisões estáticas de triângulos, o que gera um obstáculo epistemológico para a compreensão das funções trigonométricas. O ciclo trigonométrico surge, portanto, como a solução para essas limitações ao associar o ângulo a um ponto em uma circunferência unitária, estendendo as definições para além das fronteiras do triângulo.

4.6 Preparação para o Estudo do Radiano

O conteúdo desenvolvido neste capítulo cumpre uma função essencial: fornecer a base conceitual (subsunçor) necessária para compreender a medida em radianos e a definição das funções circulares. Do ponto de vista geométrico, antes de introduzir o radiano, o aluno precisa internalizar que a trigonometria expressa relações constantes e proporcionais, independentes das dimensões lineares das figuras. Essa percepção constitui o elo fundamental entre a trigonometria do triângulo e a trigonometria da circunferência (IEZZI et al., 2018).

Para que a passagem ao ciclo seja significativa, é crucial que o estudante reconheça a constância dessas razões em triângulos semelhantes. Essa ideia de proporcionalidade será a chave para compreender, no capítulo seguinte, o radiano como uma medida baseada na relação intrínseca entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.

Por fim, esta etapa prepara o aluno para a mudança de paradigma que ocorrerá no ambiente dinâmico do GeoGebra: o momento em que o seno e o cosseno deixam de ser interpretados como quocientes entre catetos e hipotenusa para serem compreendidos como as coordenadas (x, y) de um ponto em movimento. Esse domínio prévio das definições revisadas é o que garantirá que a nova interpretação no ciclo não seja vista como algo arbitrário, mas como uma evolução natural do conhecimento matemático.

4.7 Considerações Finais do Capítulo

Este capítulo apresentou uma revisão estruturada das razões trigonométricas no triângulo retângulo, reafirmando sua relevância como alicerce para a construção do pensamento trigonométrico. Mais do que uma simples retomada de conteúdos do Ensino Fundamental, buscou-se consolidar a base conceitual necessária para que o estudante compreenda a transição do pensamento geométrico estático para o pensamento funcional dinâmico.

A análise das limitações do triângulo retângulo evidenciou a necessidade de expandir o domínio da trigonometria para além dos ângulos agudos, justificando a introdução do ciclo trigonométrico. Dessa forma, as definições aqui revisadas deixam de ser vistas como fins em si mesmas e passam a ser compreendidas como o ponto de partida para a abstração do radiano e a modelagem de fenômenos periódicos.

Com essa base consolidada, o próximo capítulo dedicar-se-á ao estudo do radiano e do ciclo trigonométrico, explorando como o ambiente interativo do GeoGebra atua na ressignificação desses conceitos e na superação das dificuldades históricas de aprendizagem discutidas até aqui.

5 O Radiano e o Ciclo Trigonométrico: Uma Abordagem para a Aprendizagem Significativa da Medida Ângular

5.1 Introdução

O estudo do radiano foi integrado a esta pesquisa em virtude da dificuldade recorrente dos estudantes em compreendê-lo como uma medida de arco e não apenas como um valor numérico abstrato. Tal obstáculo é, muitas vezes, consequência da predominância do trabalho com eixos reais no plano cartesiano, o que leva muitos alunos a associarem ângulos exclusivamente ao sistema sexagesimal (graus). Segundo Dante (2008), a compreensão dos ângulos em radianos constitui um passo essencial para o estudo das funções trigonométricas, pois permite ao estudante relacionar grandezas lineares e angulares de forma natural, consolidando a ideia de proporcionalidade entre o arco e o raio.

A escolha de dedicar um capítulo exclusivo ao radiano busca favorecer a transição entre a geometria euclidiana e a análise funcional. Esse entendimento é indispensável para a interpretação de gráficos das funções seno e cosseno, bem como para a resolução de problemas aplicados em avaliações externas como o ENEM. Segundo a definição clássica de Iezzi et al. (2018). , o radiano (rad) é a “medida de um arco cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém”.

A partir dessa relação, o aluno passa a perceber a conexão direta entre o comprimento do arco e a variação angular, o que constitui um passo fundamental para o domínio da trigonometria moderna. A proposta aqui apresentada visa oferecer ao aluno uma experiência de aprendizagem significativa, na qual o conceito de radiano é construído por meio da experimentação e da observação em um ambiente dinâmico, utilizando o software GeoGebra.

5.2 Fundamentação Teórica

O estudo do radiano remonta ao desenvolvimento da trigonometria moderna. Segundo Boyer (1991), a busca por uma unidade de medida angular independente de convenções históricas, como o grau, conduziu à adoção do radiano no século XIX. Essa unidade permitiu estabelecer uma relação direta entre o comprimento do arco e o raio da circunferência, integrando de modo natural a geometria e a análise matemática.

Iezzi et al. (2018) definem o radiano como o ângulo central cujo arco tem comprimento igual ao raio da circunferência, destacando que essa definição é universal e independe do tamanho do círculo considerado. Essa característica torna o radiano uma unidade “natural”, amplamente utilizada em contextos científicos e tecnológicos, especialmente no cálculo diferencial e integral, nas funções periódicas e na física. Para Dante (2008), compreender o radiano é essencial para que o estudante possa estabelecer uma correspondência entre grandezas lineares e angulares, consolidando a ideia de proporcionalidade entre o arco e o raio.

Do ponto de vista pedagógico, antes da popularização das tecnologias digitais, o ensino do radiano era frequentemente mediado por construções com materiais concretos-como o uso de barbantes para medir o contorno de objetos circulares e réguas para aferir o raio.Embora essa metodologia ainda seja aplicada por muitos docentes para introduzir o conceito de forma tátil, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) reforça a necessidade de integrar as TDCI para potencializar a análise de diferentes representações. A orientação oficial destaca que o uso de recursos digitais permite visualizar propriedades que as ferramentas estáticas não alcançam, o que dialoga diretamente com a proposta desta pesquisa ao empregar o GeoGebra para a visualização dinâmica do radiano.

Nesse sentido, a Teoria da Aprendizagem Significativa, proposta por Ausubel (1982), destaca que o conhecimento se consolida quando o novo conteúdo é relacionado a estruturas cognitivas já existentes. No caso do radiano, isso implica partir das noções prévias de ângulo e circunferência para construir, de forma progressiva, o entendimento da medida angular em termos de arco. Dessa forma, o aprendizado deixa de ser uma simples memorização de equivalências numéricas e se transforma em uma experiência conceitual integrada.

Essa abordagem torna o aprendizado significativo, no sentido ausubeliano [1], porque liga novos conceitos (radianos e funções trigonométricas) a ideias previamente estruturadas (medidas de comprimento e ângulos em graus). Como define Ausubel (1982), "A aprendizagem significativa ocorre quando o novo conhecimento é incorporado a estruturas cognitivas já existentes, de modo não arbitrário e substantivo."

5.3 O Ensino Mecânico e os Obstáculos na Compreensão do Radiano

A realidade das escolas públicas brasileiras, em consonância com as preocupações apresentadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), ainda é marcada pela predominância de práticas pedagógicas que privilegiam a reprodução de procedimentos em detrimento da compreensão conceitual. No ensino do radiano, isso se manifesta na forma como o conteúdo é frequentemente introduzido: limitando-se à afirmação de que uma volta completa equivale a 360° ou 2π radianos, reduzindo a transição entre sistemas à aplicação mecânica de uma regra de três.

[1] O termo ausubeliano refere-se à teoria da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel, segundo a qual a aquisição de novos conhecimentos ocorre quando estes se conectam de forma não arbitrária às ideias já estabelecidas na estrutura cognitiva do aprendiz.

Essa abordagem, embora operacionalmente útil para exames, não favorece a construção de significados. O estudante torna-se capaz de efetuar a conversão numérica, mas não compreende a natureza geométrica de um ângulo de 1 radiano. Como resultado, perde-se a oportunidade de desenvolver a intuição e o raciocínio proporcional que fundamentam o estudo das funções trigonométricas. Conforme observa Oliveira (2020), essa desarticulação entre a álgebra da conversão e a geometria do arco cria um "vazio"conceitual que dificulta a posterior interpretação das funções seno e cosseno como modelos de variação contínua.

De acordo com Ausubel (1982), a aprendizagem mecânica ocorre quando a informação é memorizada de forma arbitrária, sem conexão substantiva com o conhecimento prévio. No caso do radiano, o ensino tradicional prioriza a manipulação algébrica em detrimento da exploração visual. Ao promover situações experimentais e múltiplas representações — como o uso do GeoGebra — o professor permite que o estudante construa o significado das relações, em vez de apenas aplicá-las automaticamente.

Trabalhar o conceito apenas como uma conversão de unidades impede que o estudante perceba que o radiano mede o arco de uma circunferência de raio unitário. Portanto, o ensino significativo deve partir da experiência concreta e evoluir para a formalização simbólica. É necessário que o aluno compreenda, por meio da investigação, o porquê de 2π radianos corresponderem a uma volta completa, superando a mera decoração de fórmulas e avançando para uma postura ativa diante da construção do conhecimento matemático.

5.4 O Radiano e o Ciclo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico constitui a representação geométrica fundamental para o estudo das funções seno e cosseno. Nele, cada ponto da circunferência de raio unitário está associa-se a um arco medido em radianos e a um par ordenado (x, y), que corresponde às coordenadas das funções trigonométricas. Portanto, a compreensão do radiano é o alicerce para o domínio do ciclo trigonométrico.

A medida angular em radianos é definida pela relação $\theta = \frac{s}{r}$, em que θ é o ângulo central, s é o comprimento do arco e r é o raio da circunferência. Quando o arco tem o mesmo comprimento que o raio, o ângulo mede 1 radiano. Dessa forma, uma volta completa corresponde a um arco de comprimento $2\pi r$, o que equivale a 2π radianos. Essa definição confere ao radiano um caráter universal, independente das dimensões da circunferência, estabelecendo uma conexão direta entre a geometria e a análise matemática, conforme ilustrado no ciclo trigonométrico apresentado na Figura 5.1.

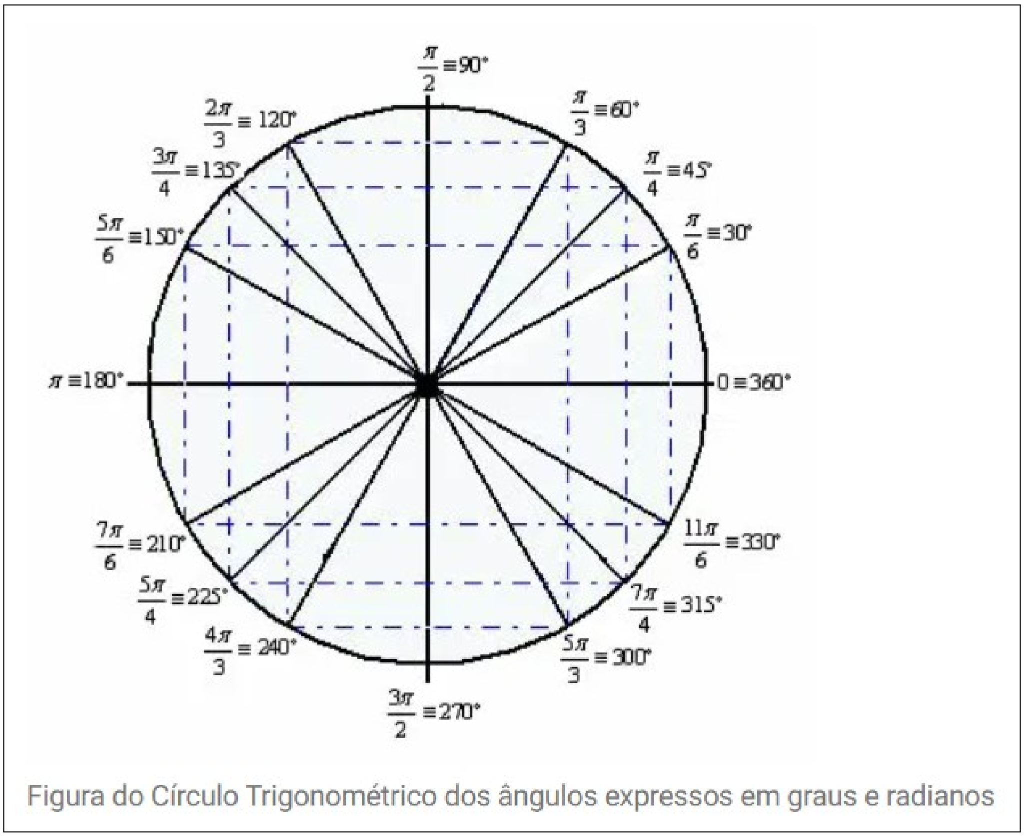

Figura 5.1: "Representação do ciclo trigonométrico com ângulos notáveis em radianos.".
Fonte: Toda Matéria(adaptado)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), recomenda que o ensino da trigonometria envolva diferentes representações, inclusive digitais, que permitam ao estudante visualizar as relações e compreender a periodicidade das funções.

O uso de softwares como o GeoGebra é, nesse contexto, uma ferramenta poderosa, pois permite a manipulação de variáveis,a visualização da variação dos arcos e observação da constância da medida total da circunferência em radianos.

Além disso, as avaliações nacionais, como o ENEM, frequentemente apresentam situações-problema que exigem a interpretação de gráficos cujas abscissas (eixo horizontal), estão marcadas em radianos. Nesses casos,a mera conversão algébrica é insuficiente; é preciso compreender o significado conceitual do radiano no contexto do plano cartesiano. A ausência dessa base sólida é uma das principais causas das dificuldades encontradas pelos estudantes na interpretação de fenôminos periódicos.

Conforme Dante (2008), o ensino de trigonometria deve priorizar o raciocínio geométrico e o uso de representações significativas, de modo que o aluno perceba o radiano não é apenas uma medida alternativa ao grau, mas uma forma natural e universal de expressar ângulos. Essa abordagem, quando associada a ambientes dinâmicos de aprendizagem, estimula a curiosidade, o pensamento investigativo e a autonomia intelectual.

5.5 Produto Educacional: Descobrindo o Radiano com o GeoGebra

Esta atividade foi elaborada com o propósito de proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma experiência prática e interativa que favoreça a compreensão do conceito de radiano como unidade de medida angular. A proposta utiliza o software GeoGebra Classic, que permite manipular dinamicamente o raio e o ângulo de uma circunferência, evidenciando a relação entre o comprimento do arco e o raio. Dessa forma, o aluno é convidado a perceber que uma volta completa corresponde a 2π radianos, independentemente das dimensões da circunferência.

O *applet* "Descobrindo o Radiano" foi construído pela autora e encontra- se disponível no endereço eletrônico: https://www.geogebra.org/classic/bt378x64, pode também ser acessado pelo QR-code Figura 5.2.

A atividade foi planejada para turmas do Ensino Médio, podendo ser aplicada tanto de forma introdutória quanto para revisão, conforme o nível de familiaridade da turma com os conceitos de trigonometria.

5.5.1 Objetivos

Objetivo Geral:

Compreender o conceito de radiano e sua relação com o comprimento do arco e o raio da circunferência, por meio de uma construção interativa no ambiente dinâmico do GeoGebra.

Objetivos Específicos:

- Visualizar o ângulo em radianos a partir de uma representação geométrica dinâmica.
- Relacionar o comprimento do arco com o raio da circunferência.
- Reconhecer que uma volta completa equivale a 2π radianos, independentemente do valor do raio.
- Favorecer a aprendizagem significativa por meio da observação e da experimentação.
- Promover o uso das **TDIC** como ferramenta didática no ensino da trigonometria.

5.5.2 Orientações para o Professor

O professor pode projetar o applet em sala de aula ou disponibilizá-lo para os alunos em dispositivos individuais (notebooks, tablets ou smartphones). Recomenda-se o uso da versão GeoGebra Classic em língua portuguesa para facilitar a compreensão dos comandos.

Ressalta-se que, para a adequada aplicação das atividades propostas, é desejável que o professor possua conhecimentos básicos sobre o uso do software GeoGebra, de modo a explorar suas funcionalidades e conduzir as investigações de forma pedagógica e intencional.

Caso o docente ainda não esteja familiarizado com o software, sugere-se a realização prévia de testes com os applets, com o objetivo de compreender sua dinâmica e potencialidades antes da aplicação em sala de aula.

Para a reprodução da atividade, as etapas de construção no software são:

1. Criar o controle deslizante r (tipo "Número"), com intervalo $1 \leq r \leq 10$ e incremento $0,5$.
2. Criar o controle deslizante α (tipo "Ângulo"), com intervalo $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e incremento $0,1$.
3. Inserir os pontos: $A = (0,0)$ e $B = (r,0)$.
4. Construira a circunferência $c = \text{Circunferência}(A, r)$.
5. Crie o ponto móvel $C = \text{Girar}(B, \alpha, A)$.
6. Traçar o arco $\text{arco} = \text{Arco}(c, B, C)$ e o ângulo $\beta = \text{Ângulo}(B, A, C)$.
7. Diferenciar os raios fixo e móvel com cores distintas (verde e azul) e espessura de 4 a 5 px.

Figura 5.2:
Fonte: Própria autora

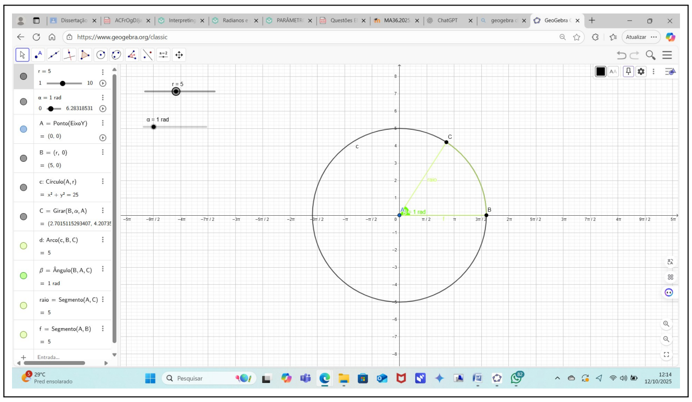

Figura 5.3: ”Construção do applet “Descobrindo o Radiano” no GeoGebra Classic.”
Fonte: elaboração da autora (2025)

5.6 Aplicação com os Alunos

5.6.1 Problematização Inicial

Antes de iniciar a manipulação do applet, promovi uma conversa diagnóstica com a turma 2003. Cabe destacar que os estudantes já haviam tido contato prévio com o conceito de radiano em aulas anteriores, abordado de forma tradicional no início do ano letivo. Nesse sentido, a conversa teve como objetivo resgatar conhecimentos prévios, sobre o número π, o comprimento da circunferência e sobre ângulos medidos em graus. O objetivo dessa etapa foi estimular a curiosidade sobre a unidade radianos e contextualizar os valores aos valores decimais que apareciam no controle deslizante do software, preparando os estudantes para compreender a equivalência entre graus e radianos.

Para mediar esse diálogo e provocar o raciocínio proporcional, utilizei as seguintes perguntas norteadoras:

1. Quantos graus tem uma volta completa?
2. Quantos radianos tem uma volta completa?
3. Então, sabendo que 360° correspondem a 2π radianos, qual seria o valor correspondente à meia volta - 180^0 em radianos?
4. Quanto vale aproximadamente 2π radianos em números decimais?
5. O que esse valor representa na circunferência?

Essas questões permitiram-me avaliar as concepções prévias da turma e planejar intervenções adequadas durante a atividade prática. O diálogo inicial foi essencial para que os alunos relacionassem o radiano ao arco da circunferência de forma lógica e não arbitrária.

5.6.2 Exploração no GeoGebra

Durante a aula na Sala Maker — ambiente de aprendizagem alinhado à cultura maker, que valoriza a experimentação e o aprendizado ativo, em consonância com as ideias de Papert (1985) e Resnick (2006) —, munidos de Chromebooks, os estudantes acessaram o applet “Descobrindo o Radiano”. Sob a orientação da pesquisadora, os alunos foram incentivados a manipular livremente os controles deslizantes r (raio) e α (ângulo), observando:

- A alteração dinâmica da circunferência conforme o raio r variava;
- O deslocamento do ponto C e a formação do arco proporcional ao ângulo α;
- A constância do valor total da volta, que permanecia em 2π radianos.

Essa etapa de experimentação, fundamentada na Aprendizagem Criativa de Resnick (2020), permitiu que os estudantes percebessem, por meio da observação direta, que a medida angular em radianos é uma razão intrínseca à geometria do círculo. O tempo investido de duas aulas, 100 minutos, foi essencial para que cada aluno pudesse realizar suas próprias descobertas no ritmo individual.

5.6.3 Discussão e Síntese

A discussão final organizou as observações realizadas, conduzindo os estudantes à formali- zação progressiva do conceito de radiano. Através da manipulação digital, através do Applet, os alunos reconheceram que o radiano expressa a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência, $\theta = \frac{s}{r}$, constituindo uma medida angular fundamentada em uma relação geométrica constante.

Nesse processo, consolidou-se a ideia de que que uma volta completa na circunferência corresponde a $360^\circ \approx 2\pi$ radianos, valor que independe do tamanho do raio. Essa constatação reforça a tese de Oliveira (2020) de que o radiano não deve ser entendido apenas como uma unidade alternativa de conversão algébrica, mas como uma forma natural de medir ângulos.

Para ampliar essa compreensão, discutiu-se também o motivo pelo qual os livros didáticos e as representações matemáticas adotam, de modo geral, o ciclo trigonométrico de raio unitário. Quando o raio é igual a 1, as coordenadas do ponto associado a um ângulo θ tornam-se $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$, simplificando a definição das funções trigonométricas e fazendo com que o comprimento do arco seja numericamente igual à medida do ângulo em radianos.

Essa síntese conceitual estabelece a base para a transição entre a geometria e o estudo das funções trigonométricas, preparando o terreno para o próximo capítulo, no qual relacionaremos o movimento circular às transformações dos gráficos das funções seno e cosseno.

5.7 Avaliação da Aprendizagem

A seguir, apresenta-se a análise pedagógica e a avaliação da aprendizagem fundamentada nas observações realizadas durante a aplicação do produto educacional "Descobrindo o Radiano com o GeoGebra". Esta análise busca compreender como os estudantes da turma 2003 construíram o conceito de radiano e de que modo o uso das TDIC contribuiu para a ocorrência da aprendizagem significativa.

A avaliação adotada possui caráter diagnóstico e formativo, sendo estruturada em três momentos complementares:

a) **Avaliação durante a exploração investigativa:** Observei o envolvimento dos alunos na Sala Maker, analisando a capacidade de justificar conclusões ao identificarem o que variava (arco) e o que permanecia constante (razão), relacionando a medida do ângulo em radianos ao percurso geométrico.

b) **Instrumento de avaliação individual:** Após a atividade no software, os alunos responderam um questionário reflexivo, que faz parte da Atividade sobre o Radiano. A Atividade completa encontra-se descrita no Apêndice A, seção 2.1.

As perguntas a seguir integram a atividade proposta e tiveram como objetivo favorecer a reflexão dos estudantes sobre o conceito de radiano.

(a) O que significa dizer que um ângulo mede 1 radiano?

(b) Quando o raio é alterado, o valor total da volta em radianos também muda?

(c) Quantos radianos mede uma volta completa?

(d) Qual é a relação entre o comprimento do arco e o raio?

(e) Em que situações o uso do radiano é mais conveniente do que o grau?

c) **Atividade de síntese e fechamento:** Como etapa final, foi proposta uma atividade de síntese, integrante do produto educacional, na qual os alunos deveriam, por meio do applet no GeoGebra, construir arcos correspondentes a $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$ radianos, comparando-os com as medidas em graus e registrando na própria atividade, as equivalências entre graus e radianos. Essa atividade corresponde à Parte 3 do material apresentado no Apêndice A, seção 2.1.7.

Para análise qualitativa do processo, utilizei os seguintes Critérios:

- Compreensão conceitual (identificação do radiano como unidade angular).
- Interpretação geométrica (entendimento do significado de 2π radianos).
- Uso do GeoGebra (manipulação consciente dos controles deslizantes).
- Raciocínio matemático (explicação das relações observadas).
- Participação (cooperação e contribuição nas discussões coletivas).

Esses critérios permitiram uma avaliação centrada no processo de construção do conhecimento, evidenciando como a interatividade do software auxiliou os estudantes na superação do ensino mecânico e na ancoragem de novos significados.

5.8 Análise Pedagógica e Relato da Aula

A atividade foi realizada em uma escola pública da rede estadual de ensino, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. A aplicação ocorreu em 16 de outubro de 2025, em ambiente do tipo Sala Maker, utilizando Chromebooks, com cada aluno operando seu próprio dispositivo. A turma 2003 da referida escola, correspondente ao 2º ano do Ensino Médio, foi selecionada por ser a única turma dessa série sob responsabilidade docente no período da aplicação. Essa turma é composta por 11 alunos; contudo, no dia da aplicação, apenas 5 estiveram presentes. Antes do início da atividade, foi necessário que os alunos realizassem a limpeza dos aparelhos, pois o acúmulo de poeira nos equipamentos dificultava o uso imediato. Dentre os presentes, dois não demonstraram envolvimento efetivo, limitando-se a aguardar as respostas dos colegas para completar suas anotações. Os demais alunos mostraram-se atentos, curiosos e conseguiram alcançar os objetivos propostos, construindo uma compreensão mais sólida sobre o conceito de radiano e sua relação com o comprimento do arco e o raio da circunferência.

Durante a aplicação, notei que os alunos foram capazes de reconhecer a proporcionalidade entre o comprimento do arco e o raio, compreendendo por que uma volta completa na circunferência corresponde sempre a 2π radianos, independentemente do tamanho do raio. Esse entendimento evidencia que deixaram de considerar o radiano como uma simples unidade de conversão, passando a concebê-lo como uma medida geométrica vinculada à variação angular representada pelo deslocamento sobre a circunferência.

No decorrer da atividade, foi necessário ajustar o incremento do arco no controle deslizante do GeoGebra. Inicialmente configurado para variar em incrementos de $0,1$ radiano, percebeu-se que esse valor impedia a visualização exata dos pontos correspondentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de volta, uma vez que o ponto C não parava precisamente nessas posições. Assim, optei por reduzir o incremento para 0,05 radiano, o que permitiu maior aproximação visual desses pontos e uma representação mais contínua do movimento do ponto sobre a circunferência. Contudo, é importante destacar que, independentemente do incremento utilizado, não é possível posicionar o ponto C exatamente nesses valores, uma vez que o número π é irracional — portanto, não pode ser representado de forma exata no sistema decimal do software.

Apesar dessa limitação, os alunos compreenderam a ideia de aproximação e utilizaram a calculadora para verificar os valores numéricos correspondentes às frações de volta, especialmente em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Esse procedimento articulou a experimentação digital com o cálculo numérico, fortalecendo a conexão entre representação geométrica, simbólica e aritmética.

A experiência de exploração da atividade no GeoGebra reforça a perspectiva da aprendizagem significativa proposta por Ausubel (1982), pois a compreensão prévia dos ângulos em graus serviu como alicerce para o entendimento do radiano. Do ponto de vista da abordagem construcionista de Papert (1980), o uso do GeoGebra favoreceu a construção ativa do conhecimento, permitindo que os estudantes "pensassem com o computador", isto é, formulassem e testassem hipóteses em um ambiente de experimentação. Essa prática também está alinhada à ideia de aprendizagem criativa defendida por Resnick (2020), segundo a qual o aluno aprende melhor quando cria, experimenta, compartilha e reflete sobre o que faz.

Além disso, o engajamento observado reflete o perfil dos chamados nativos digitais, descritos por Prensky (2001), que processam informações de forma mais visual e interativa. Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), a atividade promoveu o pensamento científico e crítico através das TDIC. Essa constatação corrobora as reflexões de Oliveira (2020) sobre a importância de situações experimentais para superar o ensino puramente mecânico.

De modo geral, a análise pedagógica confirma o potencial da proposta para promover uma aprendizagem significativa e interdisciplinar, em que a tecnologia atua não como um fim em si mesma, mas como meio de mediação cognitiva e de construção de sentido. Essa articulação entre teoria e prática evidencia o valor do GeoGebra como recurso pedagógico capaz de integrar visualização, experimentação e formalização matemática no ensino de trigonometria.

As respostas dos estudantes indicaram avanços na compreensão do conceito de radiano, especialmente no que se refere à relação entre o comprimento do arco e o raio, evidenciando a construção de significados ao longo da atividade e reforçando os indícios de aprendizagem significativa.

5.9 Considerações Finais

A análise pedagógica e a avaliação da aprendizagem, realizadas a partir da aplicação do produto educacional "Descobrindo o Radiano com o GeoGebra", permitiram compreender como os estudantes construíram esse conceito fundamental. O uso do software atuou como um facilitador para a ocorrência da aprendizagem significativa, transpondo a barreira da memorização mecânica.

A avaliação, de caráter diagnóstico e formativo, revelou que, apesar das limitações de infraestrutura e frequência, os alunos presentes conseguiram identificar o radiano como uma unidade geométrica intrínseca. Através das etapas de exploração e dos questionários reflexivos, observou-se que o domínio da relação entre o comprimento do arco e o raio foi consolidado, superando a visão do radiano como uma simples regra de conversão algébrica.

Os critérios de avaliação estabelecidos — compreensão conceitual, interpretação geométrica e fluência no GeoGebra — confirmaram que o ambiente digital estimulou a autonomia e o raciocínio matemático. Com essa base conceitual devidamente ancorada, os estudantes encontram-se preparados para o próximo estágio da pesquisa: o estudo das funções seno e cosseno, no qual o radiano deixará de ser apenas uma medida de arco para se tornar o domínio real das funções periódicas exploradas no Capítulo 6.

A seguir, apresentam-se registros fotográficos da aplicação da atividade com o applet "Descobrindo o Radiano". As imagens evidenciam momentos em que os estudantes exploram a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência, manipulando dinamicamente essas grandezas no GeoGebra.

Figura 5.4:
Fonte: Própria autora

Figura 5.5:
Fonte: Própria autora

6 As funções Seno e Cosseno e suas transformações: uma abordagem com o GeoGebra

6.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo explorar as funções seno e cosseno e suas transforma- ções, dando continuidade ao estudo iniciado no capítulo anterior, no qual foi abordado o conceito de radiano e introduzidos, de forma implícita, elementos do ciclo trigonométrico. O domínio dessas funções é essencial para compreender fenômenos periódicos, como movimentos oscilatórios, ondas sonoras e luminosas, correntes elétricas alternadas e diversas aplicações em ciências e engenharia.

A compreensão do comportamento das funções trigonométricas, especialmente das transfor- mações provocadas pelos parâmetros a, b, c e d - que controlam, respectivamente, a amplitude, o período, o deslocamento horizontal (fase) e o deslocamento vertical da função-, representa um avanço significativo no aprendizado matemático, pois amplia a capacidade de análise e generalização dos alunos. Segundo Dante (2008), o estudo das funções seno e cosseno é fundamental para o desenvolvimento do pensamento analítico e geométrico, pois essas funções permitem relacionar a geometria e a álgebra de modo dinâmico e visual.

Com esse propósito, a atividade proposta neste capítulo busca integrar teoria e prática, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de mediação. O ambiente dinâmico do aplicativo permite que os estudantes visualizem, manipulem e interpretem as transformações gráficas, associando conceitos matemáticos abstratos a representações visuais concretas. Assim, pretende-se promover uma aprendizagem significativa e investigativa, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que enfatiza o uso de tecnologias digitais como instrumentos para o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo dos estudantes.

6.2 Fundamentação Teórica

As funções seno e cosseno são pilares na construção do pensamento matemático e na interpretação de fenômenos periódicos. Historicamente, conforme aponta Boyer (1991), a trigonometria evoluiu da necessidade de estudar relações entre cordas e arcos na astronomia, transformando-se de tabelas numéricas em representações funcionais complexas. A formalização dessas funções marcou a integração definitiva entre a geometria e análise, possibilitando o estudo de variações contínuas e fonômenos ondulatórios.

Segundo Iezzi et al. (2018), as funções trigonométricas são fundamentais pois permitem associar grandezas lineares e angulares, fornecendo uma linguagem comum entre a geometria e o cálculo. Essa transição entre o geométrico e o analítico é um marco na formação matemática dos estudantes, pois amplia a compreensão das relações de proporcionalidade e periodicidade. No entanto, o ensino dessas funções ainda é frequentemente pautado por práticas mecânicas, baseadas na memorização de fórmulas e na repetição de exercícios. Como discutido nos capítulos anteriores, a compreensão profunda dessas funções exige experiências que articulem observação, visualização e interpretação geométrica, elementos muitas vezes negligenciados em abordagens tradicionais.

Autores como Papert (1985) e Resnick (2020) defendem a relevância das tecnologias digitais como mediadoras desse processo de aprendizagem. Papert destaca que o computador pode funcionar como uma “máquina para pensar”, permitindo que o aluno formule e teste hipóteses em um ambiente interativo. Resnick, por sua vez, propõe uma aprendizagem criativa, na qual o aluno aprende de forma mais robusta quando cria, explora e reflete sobre o que faz.

Essa concepção dialoga diretamente com os princípios da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1982), segundo a qual novos conceitos são assimilados de forma duradoura quando ancorados em conhecimentos prévios. No contexto do ensino de funções trigonométricas, isso significa partir das noções de ângulo e radiano (vistas no Capítulo 5) para compreender as propriedades e transformações das curvas senoide e cossenoide.

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) recomenda o uso de representações múltiplas e recursos digitais para promover o raciocínio geométrico e analítico. Eliane Oliveira (2020) reforça que o uso de softwares de matemática dinâmica favorece a compreensão conceitual ao permitir a visualização de propriedades e regularidades que, de outro modo, permaneceriam abstratas. Assim, o Geo-Gebra apresenta-se como um recurso pedagógico poderoso para integrar álgebra e geometria tornando a Matemática mais acessível, visual e dinâmica.

6.3 Definição e Propriedades no Ciclo Trigonométrico

A compreensão das funções seno e cosseno está diretamente relacionada ao conceito de medida angular em radianos, discutido no capítulo anterior, bem como aos elementos do ciclo trigonométrico, previamente abordados com a turma em aulas expositivas no início do ano letivo. Dessa forma, o seno e o cosseno deixam de ser compreendidos apenas como razões entre lados de um triângulo retângulo e passam a ser interpretados como coordenadas de um ponto em movimento sobre o ciclo trigonométrico. Nesse contexto, o estudo das funções trigonométricas no ambiente dinâmico do GeoGebra permite ao estudante visualizar simultaneamente a relação entre arco, ângulo e coordenadas, favorecendo uma compreensão integrada entre geometria e representação gráfica.

No estudo das funções trigonométricas, considera-se uma circunferência de raio r, na qual cada ponto está associado a um ângulo θ e a um par ordenado (x,y), sendo $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Dessa forma, o seno e o cosseno podem ser interpretados como razões que relacionam as coordenadas do ponto ao raio da circunferência.

Essas definições, entretanto, devem ser previamente exploradas pelo professor, retomando o conceito de triângulo retângulo e as razões trigonométricas, seno e cosseno, de um ângulo agudo, para que os estudantes reconheçam que as funções seno e cosseno representam a generali- zação dessas razões para qualquer ângulo do plano. Essa retomada favorece a aprendizagem significativa, pois estabelece um elo entre o conhecimento geométrico inicial e a representação funcional no ciclo trigonométrico.

Em particular, ao considerar a circunferência de raio unitário, obtém-se $x = \cos(\theta)$ e $y = \mathrm{sen}(\theta)$, de modo que os valores dessas funções correspondem diretamente às projeções do ponto sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente. Essa relação evidencia a ligação entre a representação geométrica no ciclo trigonométrico e a interpretação algébrica das funções trigonométricas (Figura 6.1).

Vale ressaltar que as funções $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas de período 2π, o que significa que seus valores se repetem a cada volta completa na circunferência. Essa periodicidade permite representar fenômenos oscilatórios e cíclicos, que ocorrem naturalmente em diversos contextos da Física e da Engenharia(Figura 6.2).

De acordo com Dante (2008), a visualização dessas propriedades no gráfico das funções seno e cosseno contribui para a formação de um raciocínio matemático mais intuitivo e articulado, no qual o aluno compreende o significado geométrico das expressões algébricas. Essa percepção é fundamental para que o aluno não apenas decore as coordenadas do ciclo, mas perceba como elas se transformam nas ondas senoidais e cossenoidais que serão exploradas a seguir.

float

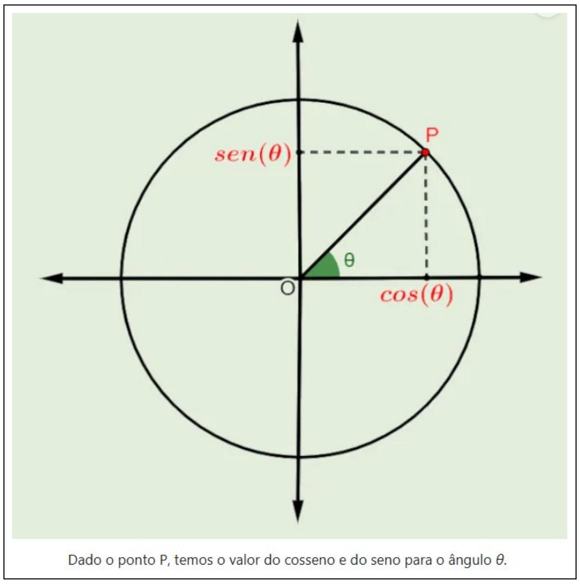

Figura 6.1: ”Representação do ciclo trigonométrico, destacando as projeções do seno e do cosseno nos eixos cartesianos”.
Fonte: Mundo Educação (adaptado).

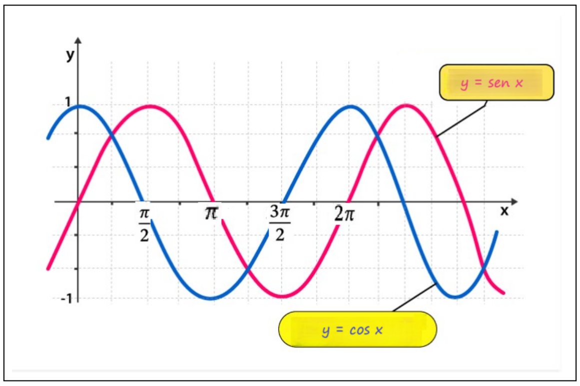

Figura 6.2: ”Gráficos das funções seno e cosseno em sua forma básica, evidenciando a periodicidade.”.
Fonte: Byju’s (adaptado).

6.4 Parâmetros das Funções Seno e Cosseno $(a, b, c$ e $d)$

As funções seno e cosseno podem ser expressas de forma genérica para representar as transformações em seus gráficos. Adotaremos as seguintes expressões para a análise das funções seno e cosseno:

$$f(x) = a\,\text{sen}(bx + c) + d \;\text{ e }\; g(x) = a\cos(bx + c) + d.$$

Cada parâmetro desempenha uma função específica na transformação do gráfico:

- **Parâmetro a:** determina a **amplitude** da função. Quando $|a| > 1$, o gráfico se estica verticalmente; quando $|a| < 1$, ocorre achatamento. Valores negativos refletem o gráfico em relação ao eixo horizontal.
- **Parâmetro b:** controla o **período** da função, ou seja, a frequência com que o ciclo se repete, definido por $T = \dfrac{2\pi}{b}$. Assim quanto maior o valor de $|b|$, mais ciclos ocorrem em um mesmo intervalo.
- **Parâmetro c:** realiza o **deslocamento horizontal** (fase). Valores positivos de c deslocam o gráfico para a esquerda; enquanto valores negativos, o deslocam para a direita.
- **Parâmetro d:** realiza o **deslocamento vertical**, Determina o deslocamento para cima ou para baixo no plano cartesiano.

A compreensão desses parâmetros é fundamental para interpretar o comportamento das funções trigonométricas e para reconhecer como cada alteração afeta o formato do gráfico.

O GeoGebra torna esse processo de aprendizagem mais concreto, permitindo que o aluno manipule os parâmetros por meio de controles deslizantes e observe, em tempo real, as transfor- mações correspondentes. Como afirma Novaes (2021), ao visualizar simultaneamente as mudan- ças algébricas e gráficas, o aluno deixa de apenas calcular e passa a compreender o comportamento da função.

Essa abordagem rompe com o ensino mecânico e favorece a Matemática dinâmica, em que o estudante constrói o conhecimento a partir da experimentação e da observação investigativa.

6.5 Produto Educacional: Explorando as Funções Seno e Cosseno com o GeoGebra

A proposta apresentada neste capítulo constitui o segundo produto educacional desenvolvido no âmbito desta pesquisa, dando continuidade à sequência iniciada com o estudo do radiano, que fundamenta a compreensão das funções trigonométricas. Seu principal propósito é possibilitar que o aluno compreenda o comportamento das funções seno e cosseno analisando as transformações gráficas provocadas pelos parâmetros a, b, c e d, por meio de uma atividade interativa no software GeoGebra.

A utilização do GeoGebra tem por objetivo transformar o estudo dessas funções em uma experiência dinâmica e investigativa, na qual o aluno manipula os controles deslizantes e observa, em tempo real, as modificações ocorridas no gráfico. Dessa forma, busca-se romper com o ensino tradicional e mecânico, centrado na memorização de fórmulas, para promover uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1982), fundamentada na exploração e na visualização.

De acordo com Papert (1985), o uso de ambientes computacionais como o GeoGebra permite que os estudantes “pensem com o computador”, formulando hipóteses e testando suas próprias conjecturas. Essa abordagem é coerente com os princípios de Aprendizagem Criativa de Resnick (2020), segundo os quais o aluno aprende melhor quando cria, explora e reflete sobre o que constrói.

6.5.1 Objetivo Geral

Compreender o comportamento das funções seno e cosseno e suas transformações no plano cartesiano, utilizando o GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem investigativa.

6.5.2 Objetivos Específicos

- Identificar os efeitos dos parâmetros a, b, c e d sobre os gráficos das funções seno e cosseno;
- Relacionar as alterações gráficas às propriedades trigonométricas e à periodicidade das funções;
- Promover a aprendizagem significativa por meio da observação, manipulação e análise das representações gráficas;
- Incentivar o uso de recursos digitais como instrumentos de construção e visualização matemática;
- Estimular a autonomia, o raciocínio geométrico e o pensamento crítico dos alunos.

6.5.3 Orientações para o professor

O produto educacional desenvolvido nesta etapa recebeu o título **"Explorando as Funções Seno e Cosseno e suas Transformações"**, e foi elaborado no ambiente GeoGebra Classic, disponível no link: https://www.geogebra.org/classic/mkanmhmn e também pode ser acessado pelo Qr-code da Figura 6.3

Por se tratar de um recurso hospedado on-line, recomenda-se que o professor verifique previamente a disponibilidade do applet no link indicado. Caso o acesso não esteja disponível no dia da aula, é possível recriar a ferramenta no GeoGebra seguindo o roteiro apresentado aqui nessa seção.

O applet foi elaborado no GeoGebra Classic, em sua versão em português, configurada para o modo de trabalho em radianos(Figura 6.4). A seguir, descreve-se o passo a passo detalhado de construção, de modo que outros professores possam recriá-lo caso o link original deixe de estar disponível.

Configurações iniciais

1. Abra o GeoGebra Classic (https://www.geogebra.org/classic).
2. No canto superior direito, clique na engrenagem e selecione Configurações.
3. Na aba Geral, altere a Unidade de Ângulo para Radianos.
4. Ative os Eixos e, se desejar, também a Grade (menu Exibir).
5. Clique com o botão direito sobre o eixo $x \rightarrow$ Propriedades $\rightarrow$ ajuste o intervalo para aproximadamente -4π a 4π e configure as marcas (distância) em múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ ou π.

   Inserção dos textos explicativos

6. Use a ferramenta Texto para adicionar as instruções no ambiente gráfico:
   - "Escolha a função que deseja trabalhar."
   - "Movimente os controles deslizantes para observar o efeito de cada parâmetro."

   Esses textos orientam o aluno durante a exploração, facilitando a compreensão da atividade sem a necessidade de explicações constantes do professor.

   Criação dos valores booleanos

7. Na barra de Entrada, digite e = true e h = true.
   - Esses valores booleanos permitem criar caixas de seleção para ativar ou ocultar as funções seno e cosseno de forma independente.
   - Nas propriedades, renomeie as caixas como "Exibir seno" e "Exibir cosseno".

Definição das funções

8. Ainda na Entrada, digite as expressões:
   - $f(x) = a\,\text{sen}(bx + c) + d$
   - $g(x) = a\cos(bx + c) + d$

   Essas funções dependem dos parâmetros a, b, c e d, que serão controlados pelos deslizantes.

Criação dos controles deslizantes

9. No menu Ferramentas, selecione controle deslizante e crie quatro variáveis numéricas:
   - a: intervalo de –5 a 5, incremento $0,1$, valor inicial 1;
   - b: intervalo de –5 a 5, incremento $0,1$, valor inicial 1;
   - c: intervalo de –5 a 5, incremento $0,1$, valor inicial 0;
   - d: intervalo de –5 a 5, incremento $0,1$, valor inicial 0.

   Esses controles permitem observar as transformações gráficas associadas à amplitude (a), à frequência (b), à fase (c) e à translação vertical (d).

Vinculação e Ajustes Visuais

10. Abra as Propriedades de cada função (botão direito $\rightarrow$ Configurações $\longrightarrow$ aba Avançado).
    - Em Condição para exibir objeto, associe e à função f e h à função g.
    - Isso permite mostrar ou ocultar cada gráfico conforme as caixas de seleção.
11. Acesse as Propriedades das funções e:
    - Escolha cores distintas (ex.: azul para seno, vermelho para cosseno).
    - Aumente a espessura da linha (4 ou 5 px).
    - Ative o traçado liso para uma aparência contínua.

12. Organize os deslizantes e textos para facilitar a visualização dos alunos.

    Salvar e compartilhar

13. Clique em Arquivo ⟶ Salvar.

14. Publique o applet em sua conta GeoGebra para gerar o link de acesso.

15. Para segurança, salve também o arquivo no formato .ggb localmente (Arquivo ⟶ Baixar) e exporte uma cópia em HTML se desejar disponibilizar o material offline.

Figura 6.3:
Fonte: Própria autora

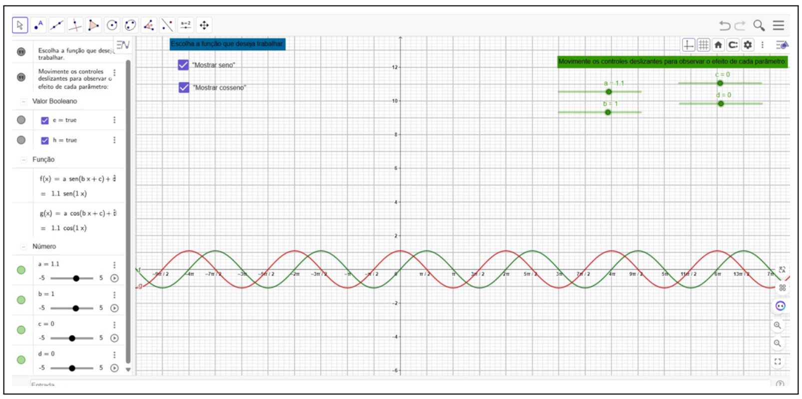

Figura 6.4: Applet “Explorando as Funções Seno e Cosseno e seus Parâmetros”, construído no GeoGebra Classic..
Fonte: Elaboração da autora (2025).

6.5.4 Considerações didáticas

Ao final da construção, o docente dispõe de um ambiente dinâmico no qual os alunos podem manipular os parâmetros e visualizar instantaneamente as consequências gráficas de cada modificação.

Como afirma Novaes (2021), o uso do GeoGebra favorece a autonomia do estudante e amplia a compreensão das transformações das funções trigonométricas, tornando visíveis as relações que antes eram apenas simbólicas.

Essa proposta visa proporcionar uma experiência de aprendizagem ativa e investigativa, na qual o aluno observa, formula hipóteses e valida suas conclusões, consolidando os conceitos de amplitude, frequência, fase e translação das funções seno e cosseno.

6.6 Aplicação

A atividade referente ao segundo produto educacional foi realizada em três etapas consecutivas, desenvolvidas na mesma instituição de ensino onde ocorreu a fase anterior da pesquisa. Para a execução, utilizei os Chromebooks disponíveis na sala Maker, de forma que cada aluno operasse seu próprio dispositivo.O roteiro detalhado desta atividade encontra-se no Apêndice A (Seção 2.2).

6.6.1 Primeira Etapa: Exploração e Investigação

Ocorreu no dia 20 de outubro de 2025, com início às 7h20, na turma composta por 11 alunos, dos quais 9 estiveram presentes.Durante os primeiros 25 minutos enfrentei um atraso no início da exploração devido à lentidão no carregamento dos dispositivos e à chegada tardia de alguns estudantes. Aproveitei esse tempo retomar os conceitos fundamentais de seno e cosseno, revisando as razões trigonométricas no triângulo no triângulo retângulo e o ciclo trigonométrico com arcos medidos em radianos, de modo a conectar com o capítulo anterior, que tratou da medida angular em radianos.

Com o início do uso do *applet*, orientei os alunos a manipularem os parâmetros

a, b, c e d, observando como cada um modificava o gráfico das funções. Em seguida, responderam a um questionário reflexivo com dez perguntas, disponível no Apêndice A, seção 2.2.6, elaborado para verificar a compreensão das transformações gráficas e algébricas observadas durante a atividade.

6.6.2 Segunda Etapa: Consolidação e Gamificação

Ocorreu no dia 21 de outubro de 2025, com a realização de um *quizz* interativo (Apendice A, seção 2.2.8) elaborado a partir do mesmo applet apresentado no momento anterior. Estavam presentes 8 alunos, e uma aluna — diagnosticada com lúpus — encontrava-se afastada por motivo de saúde. Entretanto, manifestou interesse em acompanhar a aula em tempo real e realizou integralmente a atividade de sua residência, enviando suas respostas via WhatsApp. Considerei essa participação remota um marco de engajamento, que garantiu sua continuidade no processo de aprendizagem através das TDCI. Os estudantes presentes utilizaram novamente os Chromebooks para responder ao quizz, que envolvia perguntas conceituais sobre a influência dos parâmetros a, b, c e d nas funções seno e cosseno. O objetivo dessa etapa era consolidar o que havia sido observado na manipulação inicial do applet, favorecendo uma compreensão mais investigativa e menos dependente de fórmulas decoradas.

De modo geral, os alunos apresentaram bom desempenho nas questões que envolviam amplitude, frequência e translação vertical. Entretanto, verifiquei uma dificuldade significativa na parte 4, que exigia a análise de uma função composta. A maior parte da turma não conseguiu reconhecer a estrutura algébrica da expressão, tampouco relacionar a forma simbólica ao gráfico correspondente. Essa dificuldade me revelou que, apesar da exploração visual, muitos ainda não conseguiam descrever a função a partir da observação do gráfico nem visualizar a influência simultânea dos parâmetros.

A partir dessa constatação, tornou-se evidente para mim que a turma precisava aprofundar a articulação entre representação gráfica e representação algébrica antes de avançar para o simulado em estilo ENEM. Por esse motivo, decidi aplicar uma Atividade 3, utilizando o *applet* com a janela de álgebra aberta, permitindo que os alunos observassem, em tempo real, como cada modificação nos parâmetros altera a lei da função

(Figuras 6.5 e 6.6). Essa atividade tem o papel de reforçar o entendimento estrutural das funções seno e cosseno, condição necessária para que, no simulado, os alunos possam resolver as questões de maneira rápida — habilidade fundamental nas avaliações externas.

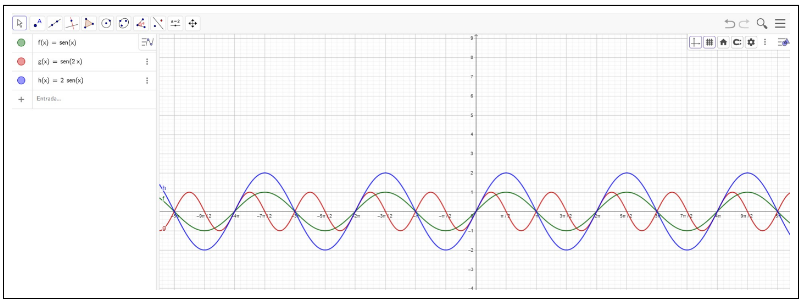

Figura 6.5: Manipulação da função seno com a janela de álgebra aberta no GeoGebra Classic.
Fonte: captura de tela do software GeoGebra Classic, realizada pela autora (2025).

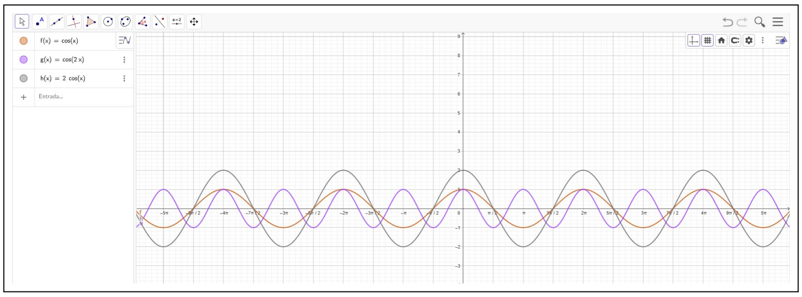

Figura 6.6: Manipulação da função cosseno com a janela de álgebra aberta no GeoGebra Classic.
Fonte: Manipulação da função cosseno com a janela de álgebra aberta no GeoGebra Classic.

6.6.3 Terceira Etapa: Articulação Álgebra- Geometria

Ocorreu no dia 03 de novembro de 2025, no Colégio Estadual Matemático Joaquim Gomes de Sousa – Intercultural Brasil-China, utilizando os Chromebooks disponíveis na sala Maker. Essa etapa tinha como objetivo aprofundar a relação entre representação algébrica e representação gráfica das funções seno e cosseno, uma vez que, nas atividades anteriores, parte dos alunos demonstrou dificuldade em identificar como cada parâmetro afeta simultaneamente a lei da função e seu respectivo gráfico.

A aplicação, no entanto, deu-se em um contexto adverso. A escola encontrava-se na semana anterior ao período oficial de provas e, devido ao sistema de aprovação vigente — no qual o estudante é considerado aprovado ao atingir a soma de 15 pontos no ano letivo —, muitos alunos já haviam alcançado a pontuação necessária, demonstrando baixo interesse em realizar novas atividades avaliativas. Dos 11 alunos da turma, poucos participaram efetivamente da aula, enquanto os demais mostraram-se apáticos.

Além do desinteresse, motivado pelo sistema de notas, enfrentei dificuldades operacionais. Assim como em atividades anteriores, foi necessário reorganizar a sala, conectar os Chrome- books à rede e aguardar o carregamento dos dispositivos, que apresentam lentidão significativa. Esse processo consumiu parte importante do tempo da aula, reduzindo o período efetivo de exploração do applet e de preenchimento da tabela analítica (Apendice A, seção 2.2.10).

Apesar desses desafios, os alunos que participaram ativamente — incluindo uma outra aluna que estava afastada por motivo de saúde e acompanhou integralmente a atividade de sua residência — demonstraram boa compreensão dos objetivos da proposta. Ao manipularem os parâmetros a, b, c e d no applet com a janela de álgebra aberta, conseguiram observar como a expressão algébrica era atualizada automaticamente, estabelecendo conexões claras entre alterações numéricas e modificação do comportamento do gráfico.

Identifiquei que esses estudantes compreenderam a relação entre amplitude e valor absoluto de a, reconheceram que o parâmetro b altera o período da função e observaram que c provoca deslocamentos horizontais, enquanto d atua como translação vertical.

Em contrapartida, os alunos que não se engajaram limitaram-se a copiar as respostas dos colegas ou ignorar a tarefa, reforçando a influência direta do contexto escolar e da sensação de “aprovação garantida” no processo de aprendizagem.

Mesmo diante das dificuldades, a aplicação da Atividade 3 cumpriu seu papel pedagógico, permitindo identificar avanços significativos nos alunos que se engajaram, fornecendo dados valiosos para a etapa seguinte da pesquisa.

6.7 Avaliação da Aprendizagem

A avaliação desta etapa possui caráter diagnóstico e formativo, fundamentado na observação aluno durante as três etapas de aplicação na Sala Maker e na análise das respostas ao questionário reflexivo (Apendice A, seção 2.2).

As questões buscaram verificar se os alunos compreenderam a função de cada parâmetro e se conseguiram relacionar as transformações gráficas às expressões algébricas. Para análise qualitativa do desempenho da turma 2003, utilizei os seguintes critérios de avaliação:

- Compreensão conceitual: identificação correta da função de cada parâmetro;
- Interpretação geométrica: reconhecimento da correspondência entre variações na ”onda”e alteração na lei da função;
- Uso do GeoGebra: manipulação intencional e consciente dos controles deslizantes para testar hipóteses;
- Raciocínio matemático: capacidade de explicar com clareza observações realizadas;
- Participação: cooperação nas discussões coletivas e produtividade na resolução dos desafios propostos.

6.8 Análise Pedagógica e Discussão dos Resultados

A análise pedagógica das atividades desenvolvidas sobre as funções seno e cosseno evidencia avanços significativos na compreensão dos parâmetros que determinam as transformações dessas funções, bem como identifica lacunas que orientaram a necessidade de intervenções adicionais ao planejamento original.

No primeiro momento da aplicação, após a retomada teórica sobre o ciclo trigonométrico, os estudantes manipularam o *applet* construído no GeoGebra, ajustando individualmente os parâmetros a, b, c e d. Observei que a maioria dos alunos conseguiu identificar, de maneira intuitiva, o efeito da amplitude e da translação vertical, estabelecendo relações diretas entre o movimento do gráfico e os valores numéricos apresentados nos controles deslizantes. Essa interação inicial com o ambiente dinâmico favoreceu a aprendizagem significativa, (AUSUBEL, 1982), uma vez que os novos conhecimentos se ancoraram nas estruturas prévias relacionadas às noções de máximo, mínimo e periodicidade das funções trigonométricas. Essa facilidade inicial de visualização corrobora a tese de Floriano (2024), que destaca que ao afirmar que o GeoGebra atua como facilitador da percepção geométrica, permitindo que propriedades abstratas tornem-se visíveis e manipuláveis.

Entretanto as respostas do questionário reflexivo revelaram que, embora houvesse segurança ao explicar a amplitude (a) e a translação vertical (d), surgiu uma dificuldade em articular a relação entre o parâmetro b e o período da função (T= $2\pi/b$). Essa dificuldade é coerente com os apontamentos de Oliveira (2020) que ressalta que muitos estudantes possuem familiaridade com a manipulação mecânica, mas não compreendem a estrutura conceitual que vincula a variação angular ao comportamento do gráfico.

A aplicação do quizz interativo, no segundo dia, ratificou essa percepção. Na parte 4, que envolvia a análise de uma função composta, a maioria da turma não conseguiu interpretar a expressão simbólica apresentada nem relacioná-la ao gráfico correspondente. Verifiquei, assim, uma compreensão fragmentada: Os alunos conseguiam ”ver”a transformação, mas não sabiam ”explicar”matematicamente o que a definia. Conforme discutem Dante (2008) e Novaes (2021), a simples observação da imagem não garante, por si só, a internalização do conceito sem que haja uma articulação sólida com a linguagem algébrica.

Essa lacuna entre o visual e o algébrico também é discutida por Floriano (2024), que destaca a importância de o aluno perceber a função como um modelo dinâmico e não apenas como um desenho estático. Diante disso, realizei a intervenção pedagógica da Atividade 3, utilizando o applet com a Janela de Álgebra aberta. Essa escolha estratégica permitiu que os alunos acompanhassem, em tempo real, a atualização da lei da função simultaneamente ao movimento do gráfico.

Essa intervenção alinha-se às recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que enfatiza a importância da articulação entre diferentes representações matemáticas, como a algébrica, a gráfica e a geométrica. Ao utilizar o GeoGebra com a Janela de Álgebra aberta, os alunos puderam relacionar, de forma simultânea, a expressão algébrica da função e sua representação gráfica, favorecendo a compreensão das transformações provocadas pelos parâmetros e promovendo uma aprendizagem mais significativa. Como apontam Papert (1985) e Resnick (2014), o ambiente digital permitiu que os estudantes "pensem com o computador", testando hipóteses e validando conclusões. Assim, a terceira etapa funcionou como a ponte conceitual necessária para reduzir a distância entre a percepção visual e a compreensão formal, fornecendo os dados fundamentais para o sucesso do simulado estilo ENEM que encerra esta pesquisa.

6.9 Considerações Finais do Capítulo

O estudo das funções seno e cosseno mediado pelo GeoGebra demonstrou ser uma abordagem eficaz para a compreensão das transformações trigonométricas. A visualização dinâmica e a manipulação direta dos parâmetros a, b, c e d favoreceram o raciocínio exploratório, permitindo que a tecnologia atuasse como um meio de mediação cognitiva que integra a visualização geométrica à simbolização algébrica.

A atividade evidenciou que o uso de recursos digitais transforma o modo como o estudante interage com o conhecimento. Conforme afirmam Dante (2008) e Oliveira (2020), compreender a Matemática por meio da experimentação permite superar o ensino mecânico, promovendo uma aprendizagem visual e reflexiva. Os resultados obtidos nas três etapas da aplicação mostraram progressos consistentes, mas também revelaram lacunas importantes: enquanto a exploração inicial permitiu desenvolver intuições sobre amplitude e translações, o quiz investigativo mostrou que dificuldades emergiam ao relacionar simultaneamente a expressão algébrica e o comportamento gráfico em funções compostas.

Essas dificuldades justificaram a intervenção pedagógica que originou a Atividade 3, realizada com a janela de álgebra aberta. Essa etapa cumpriu um papel fundamental ao tornar explícita a estrutura funcional, permitindo que os alunos acompanhassem, em tempo real, como cada parâmetro alterava a forma simbólica da função. Tal estratégia alinha-se às recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e aos princípios da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1982), ao fortalecer as conexões conceituais necessárias para a autonomia do aluno.

Além disso, o relato das etapas revelou a influência de fatores externos — como o sistema de aprovação por pontos e o desinteresse típico do final do ano letivo — no engajamento da turma. Ainda assim, como observado por Floriano (2024) em contextos similares, os estudantes que participaram ativamente demonstraram avanços expressivos, consolidando conceitos essenciais para a interpretação de fenômenos periódicos.

Por fim, este capítulo prepara o terreno para a etapa seguinte, na qual apresentarei o Simulado estilo ENEM. Elaborado com base nas dificuldades identificadas ao longo desta sequência didática, o simulado representa não apenas uma avaliação, mas um prolongamento do processo formativo, permitindo verificar em que medida os estudantes são capazes de articular as múltiplas representações da trigonometria em situações contextualizadas.

A seguir, são apresentados registros fotográficos da aplicação da atividade com o applet “Explorando as Funções Seno e Cosseno”. As imagens mostram os estudantes manipulando os parâmetros das funções, observando, em tempo real, as transformações gráficas relacionadas à amplitude, período e deslocamentos. Tais registros evidenciam um ambiente de aprendizagem investigativo, no qual os alunos analisam o comportamento das funções e estabelecem conexões entre as representações algébrica e gráfica.

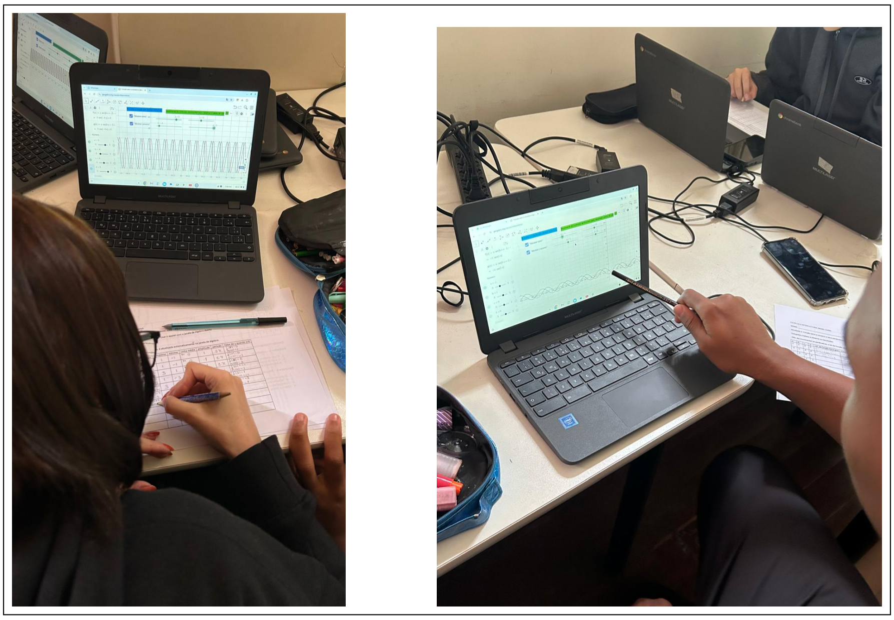

Figura 6.7: Fonte:Própria Autora

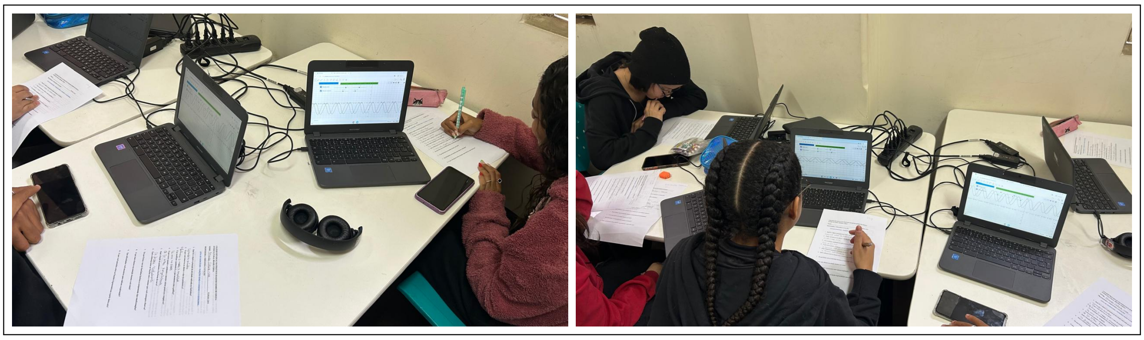

Figura 6.8: Fonte:Própria Autora

7 As Funções Trigonométricas no ENEM e nos demais vestibulares: uma proposta com o uso do GeoGebra

7.1 Introdução

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) tem se consolidado como um dos principais instrumentos de avaliação da educação básica brasileira, servindo não apenas como porta de entrada para o Ensino superior, mas também como referência norteadora para a formulação de práticas pedagógicas em sala de aula. Na área de Matemática e suas Tecnologias, as funções trigonométricas ocupam um papel de destaque por sua relevância na modelagem de fenômenos periódicos, na interpretação de gráficos e na resolução de situações-problema contextualizadas. Complementarmente, a recorrência desse tema em diversos vestibulares nacionais reforça a necessidade de o estudante compreender tais conceitos em múltiplos formatos avaliativos.

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP, 2025), a matriz referência do ENEM busca avaliar a capacidade do estudante de compreender, analisar e aplicar conceitos matemáticos em contextos reais, exigindo não apenas a memorização de fórmulas, mas também a leitura crítica de dados, gráficos e relações funcionais. Assim, o ensino de trigonometria no ensino médio deve ir além da abordagem algébrica tradicional, privilegiando estratégias que estimulem o raciocínio geométrico e a interpretação de fenômenos do cotidiano.

Nesse cenário, o uso do GeoGebra apresenta-se como uma ferramenta potente para promover uma aprendizagem ativa e significativa (AUSUBEL,1982), permitindo ao aluno visualizar, manipular e interpretar os comportamentos das funções seno e cosseno de maneira dinâmica. Ao utilizar a janela de álgebra, o estudante pode inserir as funções, observar as variações gráficas em tempo real e comparar os resultados com as expressões analíticas, desenvolvendo uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos.

Dessa forma, este capítulo tem como objetivo analisar o comportamento das funções trigonométricas no contexto do ENEM, apresentando uma sequência de atividades que integram tecnologia e investigação matemática. A proposta visa demonstrar como o uso do GeoGebra pode contribuir para que o aluno compreenda as transformações das funções, seno e cosseno, interprete fenômenos periódicos e se prepare de forma mais autônoma e reflexiva para avaliações externas. Assim, este capítulo analisa não apenas o papel das funções trigonométricas no ENEM, mas também em vestibulares de diferentes instituições, evidenciando a transversalidade e a relevância desse conteúdo no acesso ao ensino superior.

7.2 Conteúdos e Descritores Segundo o INEP

A Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio (MRMT, 2025) organiza os conteúdos por competências e habilidades, destacando a importância da resolução de problemas em contextos reais. No eixo "Grandezas e Medidas", as funções trigonométricas são abordadas como ferramentas essenciais para a compreensão de fenômenos periódicos, oscilatórios e cíclicos, permitindo que o estudante interprete situações relacionadas a movimentos, sons, luz e outras manifestações do cotidiano.

Entre os descritores do ENEM, destacam-se aqueles que envolvem a interpretação de gráficos e o reconhecimento de propriedades das funções seno e cosseno, bem como a análise de variações e periodicidade (INEP, 2025, p. 17). Como exemplo, a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias, (MRMT, 2025), inclui, no item ‘Conhecimentos algébricos’, a expressão ‘relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas’. A Figura 7.1, a seguir, apresenta o trecho da matriz onde esse conteúdo está evidenciado.

2. Matemática e suas Tecnologias

• **Conhecimentos numéricos**: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• **Conhecimentos geométricos**: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

• **Conhecimentos de estatística e probabilidade**: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• **Conhecimentos algébricos**: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

• **Conhecimentos algébricos/geométricos**: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Figura 7.1: Recorte da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (ENEM 2025), [**?**].
Fonte: INEP(2025)

O exame avalia a capacidade do aluno compreender as relações entre grandezas que variam no tempo, identificar padrões e utilizar representações gráficas para justificar conclusões. Esses descritores convergem com as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que propõem o desenvolvimento do pensamento científico, crítico e criativo por meio da investigação e da utilização de tecnologias digitais.

Segundo Dante (2008), o ensino da Matemática deve ultrapassar o caráter meramente técnico e promover a compreensão de significados, permitindo que o aluno estabeleça conexões entre o conceito e sua aplicação. Nesse sentido, as funções trigonométricas assumem papel central na construção do raciocínio matemático, pois articulam o pensamento algébrico e o geométrico. Essa integração é reforçada por Oliveira (2020) que defende o uso de recursos digitais como o GeoGebra para favorecer a visualização das propriedades e transformações das funções, tornando a aprendizagem mais dinâmica e significativa.

Além disso, o ENEM exige que o estudante saiba interpretar fenômenos periódicos e representar funções por meio de modelos matemáticos, o que requer não apenas domínio de cálculos, mas também compreensão das relações envolvidas. O uso de ferramentas como o GeoGebra, portanto, contribui para que o aluno visualize a variação das grandezas e relacione os parâmetros das funções às suas representações gráficas. Essa abordagem estimula a autonomia investigativa, conforme propõe Resnick (2020), ao permitir que o aluno explore e experimente, desenvolvendo uma postura ativa frente ao conhecimento matemático.

Assim, compreender os descritores do ENEM e suas implicações pedagógicas é fundamental para o planejamento de aulas que promovam uma aprendizagem efetiva. O professor, ao integrar tecnologia e análise conceitual, cria condições para que o estudante desenvolva competências voltadas à resolução de problemas, à leitura crítica de gráficos e à aplicação de modelos trigonométricos em contextos reais — competências amplamente valorizadas nas avaliações externas e alinhadas às diretrizes curriculares nacionais.

7.3 O Uso do GeoGebra na Resolução de Questões com Foco no ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio apresenta, com frequência, situações-problema que envolvem fenômenos periódicos e a interpretação de funções trigonométricas expressas em radianos. De modo semelhante, vestibulares de diversas universidades também exploram fenômenos periódicos, exigindo interpretações análogas das funções trigonométricas. Tais questões demandam que o aluno vá além da mera memorização de fórmulas, compreendendo o significado geométrico e gráfico das funções seno e cosseno. Nesse contexto, o uso do GeoGebra em sua forma plena torna-se uma estratégia pedagógica essencial, pois permite ao estudante visualizar, manipular e testar suas hipóteses de maneira dinâmica e interativa.

De acordo com Papert (1985), ambientes computacionais que favorecem a exploração permitem ao aluno "pensar com o computador", transformando a sala de aula em um espaço de investigação e construção ativa do conhecimento. Essa abordagem dialoga com a concepção de Aprendizagem Significativa de Ausubel (1982), na qual o novo saber se ancora em conceitos já estabelecidos, integrando o raciocínio simbólico à experiência concreta. O GeoGebra, ao reunir álgebra, geometria e cálculo em uma única interface viabiliza esse processo, permitindo que os estudantes associem cada parâmetro às transformações observadas no gráfico.

Durante a proposta do capítulo anterior, os alunos utilizaram o GeoGebra Classic, em sua Janela de Álgebra, para explorar os parâmetros a, b, c e d das funções seno e cosseno. As atividades estiveram centradas na análise desses parâmetros em contextos que simulam situações reais, como o comportamento das marés, o movimento de pêndulos, a propagação de ondas sonoras e a oscilação da altura de uma roda-gigante. A manipulação direta do software possibilitou compreender como cada parâmetro afeta a amplitude, o período, a fase e o deslocamento vertical, favorecendo a construção de uma visão integrada entre modelo matemático e fenômeno real, tal como exigido em exames externos, como o ENEM.

Segundo Oliveira (2020), o GeoGebra "cria condições para que o aluno visualize propriedades e compreenda relações que antes eram apresentadas apenas de forma simbólica", o que é particularmente relevante em questões de interpretação gráfica, típicas do ENEM. De modo semelhante, Novaes (2021) destaca que o software potencializa a compreensão conceitual ao possibilitar que o estudante interaja com o objeto matemático e descobra regularidades por meio da manipulação. Essa interação contribui para o desenvolvimento das habilidades exigidas pela matriz do exame (MRMT, 2025), como a leitura de gráficos, a análise de periodicidade.

O uso da tecnologia também favorece a autonomia do estudante, permitindo que ele verifique resultados e valide respostas. Essa postura investigativa reforça o papel do aluno como sujeito ativo, em consonância com a abordagem construcionista de Papert (1985) e a perspectiva criativa de Resnick (2020), segundo a qual aprender é criar, testar e refinar ideias. Em termos pedagógicos, o emprego do software contribui para alinhar o ensino da Matemática às competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e às demandas do ENEM (INEP, 2025), promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, da análise crítica e da capacidade de resolver problemas complexos. Assim, o GeoGebra não se limita a um recurso ilustrativo, mas atua como um instrumento de mediação cognitiva, tornando o processo de aprendizagem mais dinâmico, interativo e significativo.

Desse modo, a utilização do software nas aulas de trigonometria representa uma prática pedagógica coerente com as demandas do ensino contemporâneo e com as competências avaliadas pelo ENEM, promovendo uma compreensão integrada entre teoria, tecnologia e contexto.

7.4 O simulado aplicado

Com base nos descritores do ENEM e nos principais conteúdos cobrados em vestibulares tradicionais, elaborou-se um simulado (Apêndice A, seção 2.3.5) composto por dez questões envolvendo funções trigonométricas, fenômenos periódicos, interpretação gráfica, modelagem e análise de parâmetros.

O instrumento reúne questões majoritariamente oriundas do ENEM, complementadas por itens de provas como UERJ e EsPCEx, ampliando o repertório avaliativo e dialogando com diferentes abordagens utilizadas nos processos seletivos nacionais. A escolha dessas questões justifica-se pela relevância do ENEM como referência nacional para avaliação do Ensino Médio, especialmente por sua ênfase na resolução de situações-problema e na interpretação de gráficos associadas a fenômenos periódicos.

As questões selecionadas contemplam situações reais, tais como: movimentos harmônicos simples, deslocamento de pistões, variações sazonais de preço, comportamento térmico, ondas sonoras e a cinemática de rodas-gigantes. Esses contextos permitem que o estudante perceba a aplicabilidade da trigonometria para além do ambiente escolar, ao mesmo tempo em que reforçam a compreensão dos parâmetros que estruturam as funções seno e cosseno — amplitude, período, deslocamento vertical e horizontal.

O simulado, portanto, teve como objetivos:

(a) avaliar o grau de consolidação dos conceitos trabalhados nas três etapas da sequência didática;

(b) identificar persistências de dificuldades associadas à interpretação simbólica e gráfica;

(c) verificar a autonomia dos estudantes no uso dos conhecimentos trigonométricos em situações contextualizadas.

7.5 Relato da aplicação do simulado

A aplicação do simulado ocorreu no dia 11 de novembro de 2025, com todos os alunos presentes em sala, sendo realizada de forma convencional, semelhante à aplicação de uma prova escrita, sem o uso de recursos tecnológicos, como o GeoGebra, conforme ocorre em exames externos, como o ENEM. No entanto, conforme já observado nas etapas anteriores da sequência didática, o engajamento variou significativamente entre os estudantes. Dois alunos entregaram o simulado praticamente em branco, tendo assinalado apenas a primeira questão sem realizar qualquer leitura ou tentativa de resolução — comportamento que se alinha ao padrão de desmotivação observado anteriormente, motivaddo pelo fato de já estarem aprovados no trimestre pelo sistema de pontuação da escola.

A maior parte da turma respondeu rapidamente às questões, sem dedicar o tempo necessário para análise das situações-problema, evidenciando uma postura de "chute" motivada pela falta de interesse no final do ano letivo. Por outro lado, um grupo quatro alunos demonstrou comprometimento e permaneceu cerca de cinquenta minutos resolvendo cuidadosamente as questões, buscando interpretar gráficos, identificar os parâmetros e aplicar conceitos estudados anteriormente.

Esses quatro estudantes, que participaram ativamente das atividades com o GeoGebra - incluindo a Atividade 3 com janela de álgebra aberta -, mostraram maior segurança na leitura de gráficos e no reconhecimento das transformações trigonométricas. Esse resultado reforça a hipótese de que os ambientes digitais promoveram uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1982) mais sólida entre os alunos que se engajaram nas propostas investigativas. A postura desses discentes revelou que a manipulação prévia no software permitiu a ancoragem de conceitos que, no momento do simulado, foram mobilizados com autonomia e clareza.

7.6 Análise dos Resultados

A correção do simulado revelou um padrão consistente com as etapas anteriores da sequência didática. Identifiquei que os quatro alunos que se dedicaram efetivamente à resolução acertaram todas as questões que envolviam interpretação gráfica — especialmente aquelas nas quais era necessário identificar máximos, mínimos, amplitude, linha média e período. Esse desempenho sugere que a exploração visual e dinâmica possibilitada pelo GeoGebra contribuiu diretamente para a construção de uma compreensão significativa desses conceitos.

Na questão 5, que abordava o fenômeno de batimentos cardíacos, observei um detalhe interessante: apesar de terem compreendido corretamente a estrutura da função periódica e o deslocamento vertical, os estudantes demonstraram incerteza quanto à interpretação do número de batimentos por segundo, o que é compreensível dada a complexidade da questão. No entanto, o raciocínio matemático foi sólido: eles identificaram corretamente o deslocamento vertical ao calcular $120 - 78 = 42$, dividindo o resultado por 2 para obter a amplitude acima da média (21), e posteriormente somar com

78. A dificuldade residiu não na operação matemática, mas na transferência desse raciocínio para a interpretação do fenômeno biológico — um desafio comum em questões contextualizadas.

Entre os demais alunos, observei um elevado número de acertos aleatórios (chutes) e erros previsíveis em itens que exigiam leitura detalhada de gráficos ou compreensão da estrutura funcional. Esse comportamento reforça que o baixo desempenho não estava vinculado à complexidade intrínseca das questões, mas sim ao engajamento reduzido e à ausência de uma leitura atenta, motivada pelo contexto de final de ano letivo já mencionado.

Em síntese, os resultados corroboram a análise realizada ao longo dessa pesquisa:

- Os estudantes que se envolveram ativamente com os ambientes digitais e com as etapas investigativas da sequência didática desenvolveram competências sólidas e autonomia na resolução;
- Os que não se engajaram mantiveram dificuldades estruturais, especialmente em interpretação de situações-problema e análise de representações gráficas.

7.7 Considerações Finais

A aplicação do simulado evidenciou que a sequência didática fundamentada no uso do GeoGebra contribuiu significativamente para a compreensão das funções trigonométricas entre os estudantes que participaram ativamente das atividades, demonstrando autonomia, precisão e capacidade de articular representações gráficas e simbólicas — competências exigidas tanto pelo ENEM quanto por vestibulares tradicionais.

Além disso, o simulado confirmou a relevância da Atividade 3 como intervenção pedagógica necessária. A observação simultânea da expressão algébrica e do gráfico permitiu aos discentess consolidar conceitos de parâmetros e periodicidade que não haviam sido integralmente assimilados nas etapas iniciais.

Contudo, também ficou evidente que fatores externos, como a desmotivação de alunos já aprovados e a proximidade do período de avaliações que ocorrem próximo ao encerramento do ano letivo, impactaram diretamente o engajamento da turma como um todo. Tais limitações, amplamente discutidas na teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1982), reforçam que o ensino deve ser acompanhado de estratégias que busquem o envolvimento contínuo do estudante, superando barreiras meramente burocráticas ou de pontuação.

Por fim, este capítulo demonstrou que a integração entre tecnologia digital, investigação matemática e análise de questões de exames nacionais configura uma abordagem potente para o ensino de trigonometria. O uso do GeoGebra não apenas facilitou a visualização e a modelagem de fenômenos periódicos, mas também favoreceu a construção de significados, preparando os estudantes para enfrentar avaliações externas de maneira mais crítica, reflexiva e fundamentada.

8 Considerações Finais

A presente dissertação teve como objetivo investigar de que forma o uso do software GeoGebra pode contribuir para a aprendizagem do radiano e das funções trigonométricas seno e cosseno no Ensino Médio, promovendo a integração entre representações geométrica, algébrica e gráfica. Tal investigação partiu da constatação de dificuldades recorrentes dos estudantes na compreensão desses conteúdos, especialmente quando abordados por meio de práticas tradicionais, excessivamente procedimentais e dissociadas do significado geométrico.

O objetivo geral do estudo foi alcançado por meio do desenvolvimento e da aplicação de dois produtos educacionais interativos no ambiente GeoGebra: o applet "Descobrindo o Radiano"e o applet "Explorando as Funções Seno e Cosseno e suas Transformações". Os objetivos específicos também foram contemplados, uma vez que as atividades propostas permitiram analisar a influência dos parâmetros a, b, c e d nos gráficos das funções trigonométricas, observar evidências de Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1982) a partir das interações dos estudantes com o software, avaliar o desempenho em questões inspiradas no ENEM, identificando as potencialidades e as dificuldades persistentes ao longo do processo.

A síntese dos resultados evidencia que o uso do GeoGebra favoreceu a compreensão conceitual do radiano como medida angular associada ao comprimento do arco e ao raio da circunferência, superando a visão restrita do radiano como mera unidade de conversão. Além disso, a exploração dinâmica, das funções seno e cosseno, possibilitou aos estudantes perceberem, de forma investigativa, os efeitos das transformações gráficas provocadas pelos parâmetros funcionais, fortalecendo a articulação entre a expressão algébrica e o comportamento gráfico das funções.

No que se refere às contribuições do estudo, destaca-se, em primeiro lugar, a relevância pedagógica dos produtos educacionais desenvolvidos, que possuem caráter de reprodutibilidade e podem ser adaptados por outros docentes da Educação Básica. A pesquisa reforça o potencial do GeoGebra como ferramenta de mediação cognitiva, capaz de transformar o ensino da trigonometria em uma experiência alinhada aos princípios da aprendizagem criativa de Resnick (2020) e ao construcionismo de Papert (1985).

Como toda investigação educacional, esta pesquisa apresenta limitações. O estudo foi realizado com uma turma específica e com número reduzido de alunos, o que não permite generalizações universais dos resultados. Fatores externos, como a instabilidade técnica dos equipamentos e o contexto de final de ano letivo, influenciaram o engajamento e o ritmo das aplicações. Toda via tais limitações abrem caminhos para pesquisas futuras que podem ampliar o escopo para diferentes redes de ensino ou analisar, de forma longitudinal, os efeitos dessa abordagem no desmpenho em avaliações de larga escala.

Como desdobramento deste estudo, pretende-se, em trabalhos futuros, ampliar a aplicação da sequência didática desenvolvida para outros contextos e turmas, a fim de investigar sua eficácia em diferentes realidades educacionais. Além disso, almeja-se expandir o uso do GeoGebra para outros conteúdos matemáticos, explorando suas potencialidades no ensino de diferentes tópicos da Matemática, contribuindo para o fortalecimento de práticas pedagógicas inovadoras mediadas por tecnologias digitais.

Por fim, este trabalho reafirma que a integração entre tecnologia, teoria pedagógica e prática docente constitui um caminho relevante para a superação de dificuldades históricas no ensino da trigonometria. Ao promover a articulação entre múltiplas representações, o uso do GeoGebra contribui para uma aprendizagem mais sólida e coerente com as demandas da educação contemporânea, formando sujeitos capazes de aplicar conceitos matemáticos de forma crítica e autônoma.

Referências Bibliográficas

AUSUBEL, D. P. *A aprendizagem significativa*: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 12 fev. 2025.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias – ENEM 2025*. Brasília, DF: INEP, 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: ensino médio. Brasília, DF: MEC/SEB, 2000.

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2008.

FLORIANO, M. V. C. *GeoGebra na educação básica*: uma abordagem para o ensino de problemas de otimização. 2024. 274 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2024.

GEOGEBRA. *GeoGebra Classic*. [S. l.], 2025. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/. Acesso em: 12 out. 2025.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PEREIRA, D. *Matemática*: ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2018.

NOVAES, C. de P. R. *Funções trigonométricas no ENEM com o auxílio do GeoGebra*. 2021. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

OLIVEIRA, E. *O uso das tecnologias digitais no ensino da trigonometria*: um estudo com o GeoGebra à luz da BNCC. 2020. 237 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufba.br. Acesso em: 25 fev. 2024.

PAPERT, S. *Logo*: computadores e educação. Tradução de José Armando Valente. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PRENSKY, M. Digital natives, digital immigrants. *On the Horizon*, [s. l.], v. 9, n. 5, p. 1–6, out. 2001.

QCONCURSOS. *Questões de matemática – funções trigonométricas*. [S. l.], 2025. Disponível em: https://www.qconcursos.com/. Acesso em: 10 out. 2025.

RESNICK, M. *Jardim de infância para a vida toda*: por uma aprendizagem criativa, mão na massa e relevante para todos. Porto Alegre: Penso, 2020.

TERRA, R. Aprendizagem por descoberta: engajamento criativo em sala de aula. *MakerZine*, [S. l.], 7 out. 2025. Disponível em: https://www.makerzine.com.br/educacao/aprendizagem-por-descoberta-engajamento-criativo-em-sala-de-aula/. Acesso em: 26 fev. 2026.

APÊNDICE A

Recurso Educacional

PROFMAT

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

uff

Recurso Educacional:
GeoGebra no Estudo do Radiano e das Funções Seno e Cosseno: Uma Proposta Didática com Foco no ENEM

FERNANDA COTRIM CATALDO NUNES
ABIGAIL FOLHA

Niterói
2026

Resumo

Este recurso educacional apresenta uma sequência didática voltada ao ensino de conceitos fundamentais da trigonometria no Ensino Médio, mediada pelo uso do software GeoGebra. A proposta está organizada em três etapas complementares: a exploração do conceito de radiano por meio da construção e investigação de arcos em uma circunferência; o estudo das funções seno e cosseno e de seus parâmetros, com foco na análise das transformações gráficas; e a aplicação desses conhecimentos na resolução de questões inspiradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). As atividades foram elaboradas com o objetivo de promover uma aprendizagem investigativa e significativa, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem representações gráficas e algébricas das funções trigonométricas em um ambiente dinâmico. Ao articular exploração conceitual, experimentação com tecnologias digitais e resolução de problemas contextualizados, o material busca contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a compreensão das funções trigonométricas em diferentes contextos de avaliação. O recurso destina-se a professores e estudantes do Ensino Médio e pode ser utilizado como material de apoio em aulas de trigonometria que integrem tecnologias digitais ao processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Trigonometria; GeoGebra; Radiano; Funções seno e cosseno; Ensino Médio; ENEM.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A presente sequência didática constitui um recurso educacional desenvolvido a partir da dissertação de mestrado intitulada “Do Radiano às Funções Trigonométricas: Uma Sequência Didática Mediada pelo Geogebra com Foco no Enem”, elaborada no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), vinculado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense (UFF).

Este material tem como objetivo apresentar uma proposta de atividades para o ensino de conceitos fundamentais da trigonometria no Ensino Médio, em especial o estudo do radiano e das funções seno e cosseno, mediada pelo uso do software GeoGebra. A utilização desse recurso digital busca favorecer uma abordagem mais investigativa e significativa, permitindo que o estudante explore representações gráficas e algébricas das funções trigonométricas em um ambiente dinâmico e interativo. Dessa forma, pretende-se que o aluno compreenda o papel dos parâmetros presentes nas funções seno e cosseno e desenvolva maior autonomia na interpretação de seus gráficos, evitando uma aprendizagem baseada exclusivamente na memorização de fórmulas.

A proposta também considera a relevância desse conteúdo em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no qual questões envolvendo interpretação gráfica e análise de funções aparecem com frequência. Nesse contexto, o uso do GeoGebra pode contribuir para que o estudante visualize e compreenda o comportamento das funções trigonométricas de maneira mais intuitiva, favorecendo a resolução de problemas em diferentes contextos.

A elaboração das atividades baseia-se nos princípios da aprendizagem significativa, conforme proposto por Ausubel (AUSUBEL, 1982), segundo o qual novos conhecimentos são mais facilmente assimilados quando se relacionam aos conhecimentos prévios do estudante. Considera-se também o contexto atual da educação, marcado pela presença constante das tecnologias digitais e pelo perfil dos estudantes contemporâneos, frequentemente caracterizados como “nativos digitais”, conforme discutido por Prensky (PRENSKY, 2001). Assim, a utilização de ferramentas tecnológicas no ensino de Matemática pode favorecer a participação ativa dos alunos e estimular a construção do conhecimento de forma mais dinâmica.

A sequência didática aqui apresentada foi organizada de forma progressiva, partindo da construção e compreensão do conceito de radiano, avançando para o estudo das funções seno e cosseno e de seus parâmetros e culminando na aplicação desses conhecimentos em atividades inspiradas em questões do ENEM. Espera-se que este material possa servir como apoio a professores de Matemática do Ensino Médio que desejem integrar tecnologias digitais ao ensino da trigonometria, promovendo um aprendizado mais significativo e contextualizado.

2 ORGANIZAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA

A sequência didática apresentada neste recurso educacional está estruturada em três etapas, organizadas de forma progressiva, com o objetivo de favorecer a construção gradual dos conceitos trigonométricos pelos estudantes do Ensino Médio.

A primeira etapa é dedicada à compreensão do conceito de radiano. Nessa atividade, os alunos são conduzidos a investigar a relação entre o comprimento de um arco de circunferência e o raio, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de exploração e visualização. O objetivo é que o estudante compreenda o radiano como unidade natural de medida angular, construindo esse conceito a partir da experimentação e da observação das relações geométricas envolvidas.

Na segunda etapa, a sequência didática aborda o estudo das funções seno e cosseno e de seus parâmetros. Com o auxílio do GeoGebra, os estudantes exploram as transformações gráficas dessas funções, analisando o papel de cada parâmetro na modificação do gráfico. Essa atividade busca favorecer a interpretação das funções trigonométricas de forma dinâmica, permitindo que os alunos compreendam como as alterações nos parâmetros influenciam amplitude, período, deslocamentos horizontais e verticais.

A terceira etapa consiste na aplicação dos conceitos estudados por meio de um simulado composto por questões inspiradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Nessa fase, os alunos são convidados a aplicar os conhecimentos construídos nas etapas anteriores para resolver problemas que envolvem interpretação gráfica e análise de funções trigonométricas em contextos avaliativos.

Cada etapa da sequência apresenta as atividades propostas aos estudantes, acompanhadas de orientações para o professor e de um gabarito comentado, possibilitando que o material seja utilizado como apoio em aulas de trigonometria no Ensino Médio.

2.1 Sequência didática – Radiano

2.1.1 Contextualização

O ensino da trigonometria no Ensino Médio frequentemente enfrenta o desafio da abstração excessiva. A introdução do conceito de radiano, em particular, costuma ser reduzida à memorização da equivalência $\pi \approx 180^\circ$, o que impede o estudante de compreender a natureza geométrica dessa medida. Sem essa base sólida, o estudo das funções seno e cosseno torna-se um exercício de repetição de fórmulas, dissociado da realidade física e geométrica. Nesse contexto, este recurso educacional propõe uma mudança de perspectiva: o radiano deixa de ser um "número"; para se tornar uma medida de arco. Ao utilizar o GeoGebra como instrumento de mediação cognitiva, busca-se integrar o raciocínio simbólico à experimentação concreta. A visualização simultânea da variação do raio (r) e do comprimento do arco (s) permite que o aluno descubra a invariância da razão $\theta = \frac{s}{r}$, consolidando a definição de radiano de forma intuitiva e duradoura.

2.1.2 Metodologia, objetivos e finalidade

A metodologia adotada fundamenta-se na Aprendizagem Baseada em Investigação, em que o software GeoGebra atua como um instrumento de mediação cognitiva. O aluno não recebe o conceito pronto; ele o constrói ao manipular as grandezas de arco (s) e raio (r) e observar a invariância da razão que define o radiano.

Objetivo Geral:
Compreender a definição de radiano como a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Objetivos Específicos:

- Identificar que a medida angular em radianos independe do tamanho do raio da circunferência;
- Relacionar o perímetro da circunferência ($2\pi\ r$) com o valor de uma volta completa em radianos (2π);
- Desenvolver a fluidez tecnológica no uso do GeoGebra para a validação de hipóteses geométricas.

A finalidade principal é promover a transição do pensamento puramente algébrico, frequentemente associado à conversão de unidades, para a percepção geométrica do radiano. Dessa forma o professor oferece uma ferramenta capaz de estimular a autonomia do estudante, transformando a sala de aula em um ambiente de investigação matemática.

2.1.3 Orientações ao professor(Guia de Mediação)

Para a aplicação bem-sucedida desta unidade, recomenda-se:

- **Ambiente:** Sala Maker ou Laboratório de Informática com acesso à internet.
- **Tempo Estimado:** 2 tempos de 50 minutos.
- **Papel do Docente:** Atuar como mediador, evitando fornecer respostas prontas. O foco deve estar nas perguntas que provoquem o conflito cognitivo.
- **Mediação Oral:** Antes de abrir os computadores, realize a "conversa diagnóstica"; utilizando as questões norteadoras apresentadas na seção anterior, garantindo a ativação dos conhecimentos prévios (subsunçores).

2.1.4 Orientações ao estudante(passo a passo)

Caro estudante, para explorar o conceito de radiano, siga os passos abaixo no seu Chromebook:

1. Acesse o applet disponibilizado no GeoGebra pelo professor.(*link* do *applet* GeoGebra: www.geogebra.org).
2. Identifique o controle deslizante (slider) do Raio (r) e do Ângulo (α).
3. Realize as manipulações solicitadas no roteiro da atividade, observando atentamente as mudanças nos valores do arco (s).
4. Registre suas observações e conclusões na folha de atividades, buscando identificar padrões entre os números apresentados.

2.1.5 Atividade Mediadora - Roteiro de Mediação Pedagógica: A conversa Diagnóstica

A aplicação deste recurso fundamenta-se na Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1982), que pressupõe a identificação dos conhecimentos prévios antes da introdução de novos conceitos. Por essa razão, esta sequência didática inicia-se com uma etapa de mediação oral, na qual o docente atua como provocador, estimulando o raciocínio investigativo dos estudantes.

As perguntas a seguir devem ser realizadas oralmente, promovendo um debate em sala de aula antes da abertura dos Chromebooks. O objetivo é ativar os subsunçores (conceitos- âncora) sobre ângulos e comprimentos:

1. Quantos graus tem uma volta completa?
2. Quantos radianos tem uma volta completa?
3. Então, sabendo que 360° correspondem a 2π radianos, qual seria o valor de meia volta - 180°em radianos?
4. Quanto vale aproximadamente 2π radianos em números decimais?
5. O que esse valor representa na circunferência?

Esta etapa é crucial para que o aluno perceba a necessidade de uma nova unidade de medida (o radiano) que relacione o arco ao raio, preparando o terreno para a investigação no GeoGebra (ver Seção 5.6).

2.1.6 Guia Técnico e Atividade Investigativa sobre o Radiano no GeoGebra

Após a consolidação das hipóteses levantadas na discussão oral, os estudantes iniciam a fase de experimentação digital. Esta etapa utiliza o Applet ”Descobrindo o Radiano” (https://www.geogebra.org/classic/bt378x64) e visa a validação das ideias discutidas anteriormente (ver Seção 5.7).

2.1.7 Atividade – Descobrindo O Radiano no GeoGebra

Responda às questões com atenção, justificando sempre que possível.

Parte 1 – Compreendendo o conceito de radiano

1. O que significa dizer que um ângulo mede 1 radiano?

---

2. Quando o raio da circunferência é alterado, o valor total da volta em radianos também muda? Justifique.

3. Quantos radianos mede uma volta completa na circunferência?

4. Complete:

- Meia volta corresponde a _____ radianos.

- Um quarto de volta corresponde a _____ radianos.

- Três quartos de volta correspondem a _____ radianos.

Parte 2 – Relação entre arco, raio e ângulo

5. Descreva a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.

6. No applet, ao aumentar o ângulo α, o que acontece com o ponto C e com o arco?

7. Mesmo alterando o raio (r), o número total de radianos para completar a volta muda? Por quê?

Parte 3 – Aplicando o que aprendeu

8. Sabendo que π radianos $\approx 180^0$, calcule:

a) $\frac{\pi}{2}$ radianos $\approx$ _____$^\circ$

b) $\frac{3\pi}{2}$ radianos $\approx$ _____$^\circ$

c) 2π radianos $\approx$ _____$^\circ$

9. Observe: um ângulo de 1 radiano $\approx 57^0$. Quantos ângulos de 1 radiano cabem em uma volta completa?

10. Em sua opinião, por que é útil medir ângulos em radianos ao estudar funções trigonométricas?

Parte 4 – Autoavaliação (opcional) Marque com um "X" o quanto você acredita ter aprendido com esta atividade:

Aspecto avaliado	Aprendi bem	Aprendi mais ou menos	Preciso **revisar**
Entendo o que é um radiano	☐	☐	☐
Sei relacionar oarco com o raio	☐	☐	☐
Compreendo que uma volta tem 2π radianos	☐	☐	☐
Consegui usar o applet corretamente	☐	☐	☐
Gostei de aprender com o GeoGebra	☐	☐	☐

Observação da professora: Este questionário complementa a atividade prática e integra o Produto Educacional "Descobrindo o Radiano com o GeoGebra", desenvolvido no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT/UFF). Esta atividade tem como objetivo verificar a compreensão do estudante sobre o conceito de radiano e sua relação geométrica com o arco e o raio da circunferência, após a exploração dinâmica no applet correspondente. Além disso, busca estabelecer as bases necessárias para o estudo das funções trigonométricas seno e cosseno.

2.1.8 Gabarito

Parte 1 – Compreendendo o conceito de radiano

1. O que significa dizer que um ângulo mede 1 radiano?

Resposta: Significa que o comprimento do arco (s) correspondente a esse ângulo é exatamente igual à medida do raio (r) daquela circunferência (s=r) Dica Pedagógica: É o momento em que o aluno percebe que a unidade de medida vem da própria geometria do círculo.

2. Quando o raio da circunferência é alterado, o valor total da volta em radianos também muda? Justifique.

Resposta: Não. O valor total da volta permanece constante (2π radianos). Justificativa: Como o comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$) aumenta proporcionalmente ao raio (r), a razão entre o comprimento total e o raio será sempre a mesma: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Portanto, o radiano é uma medida invariante.

3. Quantos radianos mede uma volta completa na circunferência? Resposta: 2π radianos (ou aproximadamente 6,28 radianos).

4. Complete: Meia volta corresponde a π radianos. Um quarto de volta corresponde a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Três quartos de volta correspondem a $\frac{3\pi}{2}$ radianos.

Parte 2 – Relação entre arco, raio e ângulo

5. Descreva a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.
Resposta: A medida do ângulo em radianos (Θ) é definida pela razão entre o comprimento do arco (s) e o raio (r) da circunferência. Matematicamente, essa relação é expressa pela fórmula: $\Theta = \frac{s}{r}$.
Dica Pedagógica: O objetivo é que o aluno perceba que o radiano não é uma unidade "inventada", mas uma proporção natural do círculo.

6. No applet, ao aumentar o ângulo α, o que acontece com o ponto C e com o arco?
Resposta: O ponto C desloca-se sobre a linha da circunferência e o comprimento do arco (s) aumenta proporcionalmente ao aumento do ângulo.
Observação: Se o ângulo dobrar, o arco também dobrará, mantendo o raio fixo.

7. Mesmo alterando o raio (r), o número total de radianos para completar a volta muda? Por quê?
Resposta: Não muda. O valor continua sendo 2π radianos.
Justificativa: Isso ocorre porque o comprimento da circunferência e o raio são grandezas diretamente proporcionais. Quando aumentamos o raio, o comprimento total da volta ($2\pi r$) aumenta na mesma proporção, mantendo a razão entre eles sempre igual a 2π.

Parte 3 – Aplicando o que aprendeu

8. Sabendo que π radianos $\approx 180^0$,, calcule:

a) $\frac{\pi}{2}$ radianos $\approx 90°$

b) $\frac{3\pi}{2}$ radianos $\approx 270°$

c) 2π radianos $\approx 360°$

9. Observe: um ângulo de 1 radiano $\approx 57^0$. Quantos ângulos de 1 radiano cabem em uma volta completa?
Resposta: Cabem aproximadamente $6,28$ ângulos (ou, de forma exata, 2π radianos). Se algum aluno responder apenas "6";, considere correto, mas use o GeoGebra para mostrar que sobra um "'pedacinho"$(0,28)$, que é justamente a parte decimal do 2π.
Nota pedagógica: O objetivo é que o aluno perceba que uma volta completa (360^0) dividida por

57^0 resulta em aproximadamente $6,36$, o que o aproxima do valor de $2\pi \approx 2 \times 3{,}14$.

10. Em sua opinião, por que é útil medir ângulos em radianos ao estudar funções trigonométricas?

Como é uma questão de opinião, aceite variações. O importante é o aluno mencionar que ”fica mais fácil no gráfico”ou que ”tem a ver com o raio do círculo”.

Resposta Sugerida: O uso do radiano é útil porque ele é uma medida real e adimensional (baseada na razão entre comprimentos). Isso permite que o ângulo seja representado no eixo x de um gráfico de função na mesma escala numérica do eixo y. Diferente dos graus (uma unidade convencionada), o radiano conecta diretamente o arco ao raio, facilitando a visualização de fenômenos periódicos e a modelagem matemática.

Parte 4: Autoavaliação:

Não tem gabarito. Essa parte serve para medir o sentimento de competência do aluno, algo muito valorizado por Resnick e Papert (RESNICK, 2020; PAPERT, 1985).

2.2 Sequência Didática – Funções seno e cosseno e suas transformações

2.2.1 Contextualização

Após a construção do conceito de radiano e a compreensão de sua relação com o comprimento de arco e o raio da circunferência, torna-se possível avançar para o estudo das funções trigonométricas. No Ensino Médio, as funções seno e cosseno constituem um dos conteúdos centrais da trigonometria, sendo fundamentais para a compreensão de fenômenos periódicos e para a interpretação de gráficos que representam variações cíclicas.

Entretanto, na prática escolar, é comum que o estudo dessas funções seja conduzido de forma excessivamente algorítmica, centrada na manipulação de fórmulas e na memorização de propriedades. Esse tipo de abordagem pode dificultar a compreensão do significado dos parâmetros presentes nas expressões algébricas das funções trigonométricas, bem como das transformações que esses parâmetros produzem em seus gráficos.

Nesse contexto, o uso de recursos tecnológicos pode contribuir para tornar esse estudo mais significativo. O software GeoGebra permite que os estudantes visualizem simultaneamente as representações algébricas e gráficas das funções, favorecendo a investigação das transformações associadas aos parâmetros presentes nas expressões das funções seno e cosseno.

A sequência didática proposta nesta etapa tem como objetivo explorar essas transformações por meio da experimentação e da análise gráfica, permitindo que os estudantes identifiquem o papel de cada parâmetro na modificação do comportamento das funções. Ao manipular os controles deslizantes no ambiente do GeoGebra, os alunos podem observar, de forma dinâmica, como ocorrem alterações na amplitude, no período e nos deslocamentos horizontal e vertical dos gráficos.

Essa abordagem busca favorecer uma aprendizagem baseada na investigação e na interpretação de representações matemáticas, aproximando o estudo das funções trigonométricas das demandas presentes em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), nas quais a análise de gráficos e a compreensão do comportamento de funções aparecem com frequência.

2.2.2 Metodologia, objetivos e finalidade

A sequência didática apresentada nesta etapa fundamenta-se em uma abordagem investigativa de aprendizagem, na qual o estudante é incentivado a explorar e analisar as propriedades das funções seno e cosseno por meio da experimentação e da observação de suas representações gráficas. Nesse processo, o software GeoGebra é utilizado como instrumento de mediação pedagógica, possibilitando a manipulação dinâmica dos parâmetros das funções e a visualização imediata das transformações ocorridas em seus gráficos.

A proposta metodológica busca favorecer uma aprendizagem mais ativa, na qual o aluno deixa de ser apenas receptor de informações e passa a desempenhar um papel participativo na construção do conhecimento. Ao interagir com o ambiente digital e observar as alterações provocadas pela modificação dos parâmetros nas expressões algébricas das funções trigonométricas, os estudantes são conduzidos a identificar padrões, formular hipóteses e estabelecer relações entre os elementos algébricos e suas representações gráficas.

Objetivo geral:
Compreender o comportamento das funções seno e cosseno e identificar o papel dos parâmetros presentes em suas expressões algébricas, analisando as transformações produzidas em seus gráficos.

Objetivos específicos:

- Investigar, com o auxílio do GeoGebra, as transformações associadas às funções seno e cosseno;

- Identificar o efeito dos parâmetros na amplitude, no período e nos deslocamentos horizontal e vertical dos gráficos dessas funções;
- Relacionar as expressões algébricas das funções trigonométricas com suas representações gráficas;
- Desenvolver a capacidade de interpretação de gráficos envolvendo funções trigonométricas;
- Utilizar ferramentas digitais como apoio à investigação e à compreensão de conceitos matemáticos.

A finalidade desta sequência didática é possibilitar que os estudantes compreendam as funções seno e cosseno para além da manipulação algébrica de fórmulas, favorecendo a interpretação de seus gráficos e a análise do comportamento dessas funções em diferentes situações. Dessa forma, busca-se contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a resolução de problemas que envolvam funções trigonométricas, especialmente em contextos avaliativos como os presentes em exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

2.2.3 Orientações ao professor (Guia de mediação)

Para a aplicação desta sequência didática, recomenda-se que o professor organize previamente o ambiente de aprendizagem de modo a possibilitar a utilização do software GeoGebra pelos estudantes. A atividade pode ser desenvolvida em laboratório de informática, sala maker ou em sala de aula, desde que os alunos tenham acesso a computadores, tablets ou smartphones com acesso à internet.

Tempo estimado: aproximadamente 3 a 4 tempos de aula de 50 minutos, considerando a realização das três atividades propostas e a discussão coletiva dos resultados obtidos pelos estudantes.

O papel do professor nesta sequência didática é atuar como mediador do processo de aprendizagem, incentivando os estudantes a observar, levantar hipóteses e interpretar as transformações ocorridas nos gráficos das funções seno e cosseno. Em vez de apresentar diretamente as propriedades dessas funções, o docente deve estimular a investigação por meio de questionamentos que levem os alunos a perceber as relações entre os parâmetros das funções e as modificações observadas em seus gráficos.

Durante a realização das atividades, recomenda-se que o professor incentive a participação ativa dos estudantes, promovendo momentos de discussão coletiva sobre as observações realizadas no ambiente digital. Esse processo de socialização das ideias contribui para que os alunos confrontem diferentes interpretações e consolidem a compreensão dos conceitos trabalhados.

Também é importante que o docente acompanhe o desenvolvimento das atividades, auxiliando os estudantes na manipulação das ferramentas do GeoGebra sempre que necessário, sem, contudo, antecipar conclusões ou apresentar respostas prontas. O objetivo é favorecer um ambiente de investigação matemática, no qual os alunos possam construir gradualmente o entendimento sobre o comportamento das funções seno e cosseno e sobre o papel de seus parâmetros.

Ao final de cada atividade, recomenda-se a realização de uma discussão coletiva, na qual os estudantes possam apresentar suas conclusões e comparar os resultados obtidos. Esse momento permite sistematizar os conceitos explorados durante a investigação e relacioná-los à interpretação de gráficos de funções trigonométricas, habilidade frequentemente exigida em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

2.2.4 Orientações ao estudante (Passo a passo)

Caro estudante,

Nesta etapa da sequência didática, você irá explorar o comportamento das funções seno e cosseno e investigar as transformações que ocorrem em seus gráficos quando determinados parâmetros são modificados. Para isso, será utilizado o software GeoGebra, que permite visualizar e manipular, de forma dinâmica, as representações gráficas dessas funções. Siga as orientações abaixo para a realização das atividades:

1. Acesse o applet disponibilizado pelo professor no GeoGebra, por meio do link indicado em sala de aula.
2. Observe atentamente o gráfico das funções seno e cosseno apresentado no ambiente digital.
3. Utilize os controles deslizantes (sliders) disponíveis no applet para modificar os parâmetros das funções e observe as alterações que ocorrem no gráfico.
4. Analise como cada modificação influencia características do gráfico, como amplitude, período e deslocamentos.
5. Registre suas observações e responda às questões propostas nas atividades, buscando identificar padrões e relações entre as expressões algébricas e suas representações gráficas.

6. Discuta suas conclusões com seus colegas e participe das reflexões conduzidas pelo professor durante a aula.

Ao longo dessas atividades, procure observar como pequenas alterações nos parâmetros das funções podem produzir diferentes comportamentos gráficos. Essa investigação permitirá compreender melhor o funcionamento das funções trigonométricas e desenvolver maior autonomia na interpretação de seus gráficos.

2.2.5 Guia técnico – Experimentação digital com o GeoGebra

Após as orientações iniciais, os estudantes iniciarão a etapa de experimentação digital, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de investigação das transformações das funções seno e cosseno.

Para o desenvolvimento desta etapa, será utilizado um applet interativo disponibilizado no GeoGebra, no qual é possível manipular os parâmetros das funções trigonométricas e observar, de forma dinâmica, as alterações produzidas em seus gráficos. Por meio dos controles deslizantes presentes no ambiente digital, os estudantes podem modificar os valores dos parâmetros das funções e analisar como essas variações influenciam características do gráfico, como a amplitude, o período e os deslocamentos horizontal e vertical.

O applet utilizado nesta sequência didática pode ser acessado por meio do seguinte endereço eletrônico:

Link do GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic/mkanmhmn

Durante a exploração do applet, os estudantes devem observar atentamente as modificações que ocorrem nos gráficos das funções seno e cosseno à medida que os parâmetros são alterados. Essa etapa tem como objetivo favorecer a visualização das transformações das funções trigonométricas, permitindo que os alunos estabeleçam relações entre as expressões algébricas das funções e suas representações gráficas.

A utilização do GeoGebra nesta atividade busca promover uma aprendizagem mais investigativa, na qual os estudantes possam experimentar, formular hipóteses e validar suas observações a partir da manipulação direta dos elementos presentes no ambiente digital.

2.2.6 Atividade 1 – Exploração das funções seno e cosseno

A primeira atividade desta sequência didática tem como objetivo introduzir a análise gráfica das funções seno e cosseno, permitindo que os estudantes observem suas características fundamentais por meio da exploração no ambiente do GeoGebra. Nessa etapa, os alunos são incentivados a investigar o comportamento dessas funções e identificar padrões em seus gráficos, relacionando as representações algébricas às representações gráficas.

A atividade proposta aos estudantes encontra-se apresentada a seguir.

QUESTIONÁRIO
Função Seno e Cosseno e o GeoGebra

1. Qual foi o objetivo principal da atividade realizada no GeoGebra

2. O que você observou ao alterar o valor do parâmetro a?

3. E ao modificar o parâmetro b, o que aconteceu com o gráfico?

4. O que ocorre quando o parâmetro c assume valores positivos e negativos?

5. Qual a função do parâmetro d na forma da curva?

6. Qual a diferença entre as funções seno e cosseno que você conseguiu observar?

7. De que forma o uso do GeoGebra facilitou a compreensão das transformações?

8. O que mais chamou sua atenção durante a atividade?

9. Que dificuldades você encontrou para realizar a exploração?

10. O que você aprendeu sobre as funções trigonométricas a partir desta aula?

2.2.7 Gabarito Atividade 1

1. Qual foi o objetivo principal da atividade realizada no GeoGebra?
Resposta esperada: Explorar o comportamento das funções seno e cosseno no GeoGebra, observando como seus gráficos se modificam quando os parâmetros são alterados.
Comentário ao professor: O importante é que o aluno reconheça que a atividade teve caráter investigativo e que o GeoGebra foi utilizado para compreender graficamente as funções trigonométricas.

2. O que você observou ao alterar o valor do parâmetro a? Resposta esperada: O parâmetro a altera a amplitude da função. Quando $|a|$ aumenta, a onda fica mais "alta"; quando $|a|$ diminui, ela fica mais "achatada". Se a for negativo, ocorre reflexão em relação ao eixo x, provavelmente o aluno irá dizer que ele "vira de cabeça para baixo".
Comentário ao professor: O ideal é que o estudante perceba que o parâmetro a controla a amplitude e pode também inverter o gráfico.

3. E ao modificar o parâmetro b, o que aconteceu com o gráfico?
Resposta esperada: O parâmetro b altera o período da função. Quando $|b|$ aumenta, as ondas ficam mais "apertadas", isto é, o ciclo se repete mais rapidamente. Quando $|b|$ diminui, as ondas ficam mais "largas".
Comentário ao professor: Espera-se que o aluno relacione b com a frequência/período do gráfico.

4. O que ocorre quando o parâmetro c assume valores positivos e negativos?
Resposta esperada: O parâmetro c provoca deslocamento horizontal (fase). Valores positivos deslocam o gráfico em uma direção horizontal e valores negativos na direção oposta.
Comentário ao professor: Se o aluno identificar que a forma da curva não muda, mas apenas sua posição horizontal, a resposta deve ser considerada correta.

5. Qual a função do parâmetro d na forma da curva?
Resposta esperada: O parâmetro d realiza a translação vertical do gráfico. Quando d aumenta, a curva sobe; quando d diminui, a curva desce.
Comentário ao professor: É importante que o aluno perceba que d altera a linha média da função.

6. Qual a diferença entre as funções seno e cosseno que você conseguiu observar?
Resposta esperada: Os gráficos têm a mesma forma geral e o mesmo período básico, mas começam em posições diferentes. Em geral, a função cosseno inicia no valor máximo quando os parâmetros básicos são mantidos, enquanto a função seno inicia em zero.

Comentário ao professor: Aceite respostas que mencionem a diferença no ponto inicial ou no "deslocamento" entre as duas curvas.

7. De que forma o uso do GeoGebra facilitou a compreensão das transformações?

Resposta esperada: O GeoGebra facilitou a compreensão porque permitiu visualizar, em tempo real, as alterações no gráfico ao modificar os parâmetros, tornando mais clara a relação entre a expressão algébrica e a representação gráfica.
Comentário ao professor: Trata-se de uma resposta pessoal, mas o foco esperado é a visualização dinâmica e a facilidade de interpretar as transformações.

8. O que mais chamou sua atenção durante a atividade?

Resposta esperada: Resposta pessoal. Espera-se que o aluno destaque algum aspecto das transformações gráficas, da manipulação dos sliders ou da comparação entre seno e cosseno.
Comentário ao professor: Valorize a observação individual do estudante.

9. Que dificuldades você encontrou para realizar a exploração?

Resposta esperada: Resposta pessoal. Entre as dificuldades possíveis estão: compreender o papel de cada parâmetro, identificar o período, interpretar deslocamentos horizontais ou manusear o GeoGebra.
Comentário ao professor: Essa questão pode ajudar a diagnosticar pontos que merecem retomada.

10. O que você aprendeu sobre as funções trigonométricas a partir desta aula?

Resposta esperada: Espera-se que o aluno reconheça que as funções seno e cosseno podem ser analisadas graficamente e que os parâmetros modificam amplitude, período e deslocamentos, alterando o comportamento da curva.
Comentário ao professor: O mais importante é perceber se o aluno compreendeu que as funções trigonométricas não devem ser vistas apenas como fórmulas, mas também como representações gráficas dinâmicas.

2.2.8 Atividade 2 – Transformações das funções seno e cosseno

A segunda atividade da sequência didática é estruturada na forma de um quiz, caracterizado como um jogo de perguntas e respostas voltado à revisão e consolidação dos conceitos relacionados às transformações das funções seno e cosseno.

Nesta etapa, os estudantes são convidados a responder a uma série de questões que envolvem a interpretação dos gráficos das funções trigonométricas e a análise do papel dos parâmetros presentes em suas expressões algébricas. Para responder às perguntas, os alunos podem utilizar o applet disponibilizado no GeoGebra, manipulando os controles deslizantes e observando as alterações que ocorrem nos gráficos das funções.

A dinâmica da atividade assume um caráter lúdico e interativo, pois os estudantes participam do quiz buscando identificar as respostas corretas no menor tempo possível. Dessa forma, a atividade promove um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, estimulando a participação ativa dos alunos e favorecendo a consolidação dos conceitos trabalhados nas etapas anteriores da sequência didática.

A atividade proposta aos estudantes é apresentada a seguir.

Quizz Interativo
Descobrindo as funções Seno e Cosseno no GeoGebra

Parte 1 – Parâmetro a (amplitude)

1. Quando colocamos $a = 1$, o gráfico da função seno varia entre:

   a) -1 e 1

   b) -2 e 2

   c) -3 e 3

   d) -5 e 5

2. Ao mudar para $a = 3$, o que acontece com o "tamanho" da onda?

   a) Aumenta

   b) Diminui

   c) Inverte

   d) Some

3. E quando colocamos $a = -2$?

   a) O gráfico fica espelhado em relação ao eixo x

   b) O gráfico se desloca para cima

   c) O gráfico fica "mais largo"

   d) O gráfico não muda

Parte 2 – Parâmetro b (frequência / período)

4. Compare os gráficos com $b = 0,5, b = 1$ e $b = 2$. Quando o valor de b aumenta...

   a) As ondas ficam mais "apertadas"

   b) As ondas ficam mais "espalhadas"

   c) O gráfico não muda

   d) A curva se inverte

5. O que acontece se b for negativo (por exemplo, $b = -1$)?

a) A onda se reflete horizontalmente (inverte o sentido da leitura)

b) A amplitude muda

c) O gráfico se desloca para cima

d) Nada muda

Parte 3 – Parâmetro d (translação vertical)

6. Para $d = 2$, o que acontece com a curva?

   a) Sobe duas unidades

   b) Desce duas unidades

   c) Inverte o sentido

   d) Fica mais larga

7. Para $d = –3$, o gráfico:

   a) Desce três unidades

   b) Sobe três unidades

   c) Fica invertido

   d) Aumenta a amplitude

Parte 4 – Funções Compostas

Agora explore as funções completas (combinando os parâmetros). Use o applet e visualize as transformações.

8. Considere $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$. Qual é a amplitude, o período e o deslocamento vertical dessa função? (Responda numericamente no caderno ou no formulário.)

9. Compare $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$ e $g(x) = 2\cos(2x) + 1$. Qual das duas começa no ponto máximo?

   a) $f(x)$

   b) $g(x)$

   c) As duas

   d) Nenhuma

10. Podemos concluir que...

a) Cada parâmetro controla um tipo diferente de transformação.

b) Mudanças pequenas em a, b e d alteram significativamente o gráfico.

c) O GeoGebra facilita a visualização dessas mudanças.

d) Todas as alternativas estão corretas.

2.2.9 Gabarito da atividade 2

1. Quando colocamos $a = 1$, o gráfico da função seno varia entre:
   Resposta: a) –1 e 1.

2. Ao mudar para $a = 3$, o que acontece com o "tamanho" da onda?
   Resposta: a) Aumenta.
   Comentário: a amplitude passa a ser 3.

3. E quando colocamos $a = -2$?
   Resposta: a) O gráfico fica espelhado em relação ao eixo x.
   Comentário: além da reflexão, a amplitude passa a ser 2.

4. Compare os gráficos com $b = 0,5; b = 1$ e $b = 2$. Quando o valor de b aumenta…
   Resposta: a) As ondas ficam mais "apertadas".
   Comentário: o período diminui quando $|b|$ aumenta.

5. O que acontece se b for negativo, por exemplo $b = -1$?
   Resposta: a) A onda se reflete horizontalmente (inverte o sentido da leitura).

6. Para $d = 2$, o que acontece com a curva?
   Resposta: a) Sobe duas unidades.

7. Para $d = -3$, o gráfico:
   Resposta: a) Desce três unidades.

8. Considere $f(x) = 2\,\text{sen}(2x) + 1$. Qual é a amplitude, o período e o deslocamento vertical dessa função?
   Resposta:

   - amplitude $= 2$
   - período = π
   - deslocamento vertical $= +1$

Comentário: o período é dado por $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

9. Compare $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(2x) + 1$ e $g(x) = 2\cos(2x) + 1$. Qual das duas começa no ponto máximo?
Resposta: b) $g(x)$.
Comentário: a função cosseno, nessa forma, inicia no valor máximo.

10. Podemos concluir que...
Resposta: d) Todas as alternativas estão corretas.
Comentário: cada parâmetro controla um tipo de transformação, pequenas mudanças em a, b e d alteram o gráfico, e o GeoGebra facilita essa visualização.

2.2.10 Atividade 3 – Articulação ágebra-geometria

A terceira atividade desta sequência didática foi elaborada a partir das dificuldades observadas na etapa anterior, especialmente nas questões que envolviam a análise de funções trigonométricas compostas. Verificou-se que, embora os estudantes conseguissem identificar algumas transformações de forma visual, ainda apresentavam dificuldades em relacionar os parâmetros presentes na expressão algébrica ao comportamento do gráfico correspondente.

Com o objetivo de retomar e aprofundar esse conteúdo, esta atividade propõe uma nova exploração no GeoGebra, agora com a janela de Álgebra aberta, permitindo que os alunos acompanhem simultaneamente a expressão da função e as alterações produzidas em seu gráfico. A proposta é que os estudantes movimentem os parâmetros conforme orientado no roteiro da atividade, registrem a função obtida e analisem as modificações provocadas no gráfico.

Durante essa exploração, os alunos são levados a observar como cada parâmetro interfere em características importantes da função trigonométrica, como amplitude, período, linha média, valores máximos e mínimos e deslocamentos do gráfico. Dessa forma, busca-se favorecer a compreensão das relações entre a expressão algébrica da função e suas propriedades gráficas.

Essa etapa tem como finalidade consolidar a articulação entre a representação algébrica e a representação gráfica das funções seno e cosseno, permitindo que os estudantes compreendam de maneira mais clara o papel de cada parâmetro na transformação do gráfico dessas funções.

A atividade proposta aos estudantes é apresentada a seguir. (O ideal é que o professor imprima a tabela no sentido horizontal, para que o aluno tenha mais espaço para fazer as anotações necessárias.

Função seno e cosseno e seus parâmetros

Usar o applet com a janela de álgebra aberta Complete a tabela e observe os resultados. Obs: Ao movimentar os parâmetros, a lei da função é atualizada automaticamente na janela de álgebra.

a	b	c	d	Lei da função $f(x)$ e $g(x)$	máximo	minino	linha média	amplitude	período	valor de y quando $x = 0$
1	1	0	0				$Y =$			
-1	1	0	0				$Y =$			
1	1	0	2				$Y =$			
2	2	0	-1				$Y =$			
-2	$0,5$	0	1				$Y =$			
4	-2	0	-3				$Y =$			
3	-4	0	5				$Y =$			
-1	$-0,2$	0	-2				$Y =$			
$0,5$	4	0	$0,5$				$Y =$			
-5	$\frac{3}{2}$	0	-5				$Y =$			
1	1	1	1				$Y =$			
-2	1	-2	3				$Y =$			
2	-1	2	4				$Y =$			
-3	$-0,5$	$0,5$	-2				$Y =$			
$3/5$	2	2	-3				$Y =$			

Questões investigativas após o preenchimento da tabela

Parâmetro a – Amplitude

1. O que acontece com o gráfico quando o valor de a aumenta? E quando diminui?
2. O sinal de a (positivo ou negativo) altera a posição dos máximos e mínimos (picos e vales)?
3. A linha média se altera quando mudamos a?

Parâmetro b – Frequência e Período

1. O que muda no gráfico quando aumentamos o valor de b? O "tamanho do ciclo" (período) fica maior ou menor?
2. Como podemos estimar o período observando o gráfico?
3. Qual é a relação entre o período $T = \frac{2\pi}{b}$ e a largura do ciclo?

Parâmetro c – Deslocamento Horizontal (fase)

1. Quando o parâmetro c é positivo, o gráfico se desloca para a direita ou para a esquerda?
2. E quando é negativo?
3. O formato da curva muda ou apenas sua posição?
4. Como essa diferença ajuda a identificar se a função é seno ou cosseno?

Parâmetro d – Deslocamento Vertical

1. O que acontece com o gráfico quando alteramos o valor de d?
2. A linha média sobe ou desce?
3. Como determinar a linha média observando apenas os valores máximo e mínimo?

Valor de y para $x = 0$ nas funções seno e cosseno

1. Qual a importância desse ponto?

As questões abaixo são questões no estilo do ENEM. Responda com base nas observações realizadas na atividade anterior.

Questão 1 – Marés

Em uma cidade litorânea, o nível da maré em função do tempo t (em horas) pode ser modelado por: $M(t) = 2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6}t) + 4$

a) Determine o valor máximo e mínimo da maré.

b) Qual o período do fenômeno?

c) Qual a altura média da maré? (Amplitude)

d) Interprete o parâmetro $+4$ no modelo.

Questão 2 – Roda-gigante

O movimento de uma cabine de roda-gigante pode ser descrito pela função: $H(t) = 10 + 8\cos(\frac{\pi t}{15})$ em que $H(t)$ representa a altura (em metros) da cabine em função do tempo t (em segundos).

a) Qual a altura máxima e mínima atingida pela cabine?

b) Quanto tempo leva para completar uma volta?

c) Qual parâmetro corresponde ao raio da roda-gigante?

Questão 3 – Oscilação de pêndulo

O movimento de um pêndulo pode ser aproximado por: $\Theta(t) = 30\,\mathrm{sen}(\frac{\pi t}{2})$ onde $\Theta(t)$ é o ângulo de oscilação (em graus) no instante t (em segundos).

a) Qual a amplitude da oscilação?

b) Qual é o período do movimento?

c) O que aconteceria se trocássemos sen por cos?

Questão 4 – Som senoidal

Uma onda sonora pode ser representada por: $S(t) = 3\,\mathrm{sen}(440t)$, em que $S(t)$ mede a intensidade da onda em função do tempo t (em segundos).

1. Qual a amplitude da onda?
2. O que significa o valor 440?
3. Teste, no GeoGebra, o efeito de aumentar/diminuir esse número: como isso altera o som representado?

Questão 5 – Interpretação de gráfico Qual a função que descreve o gráfico abaixo:

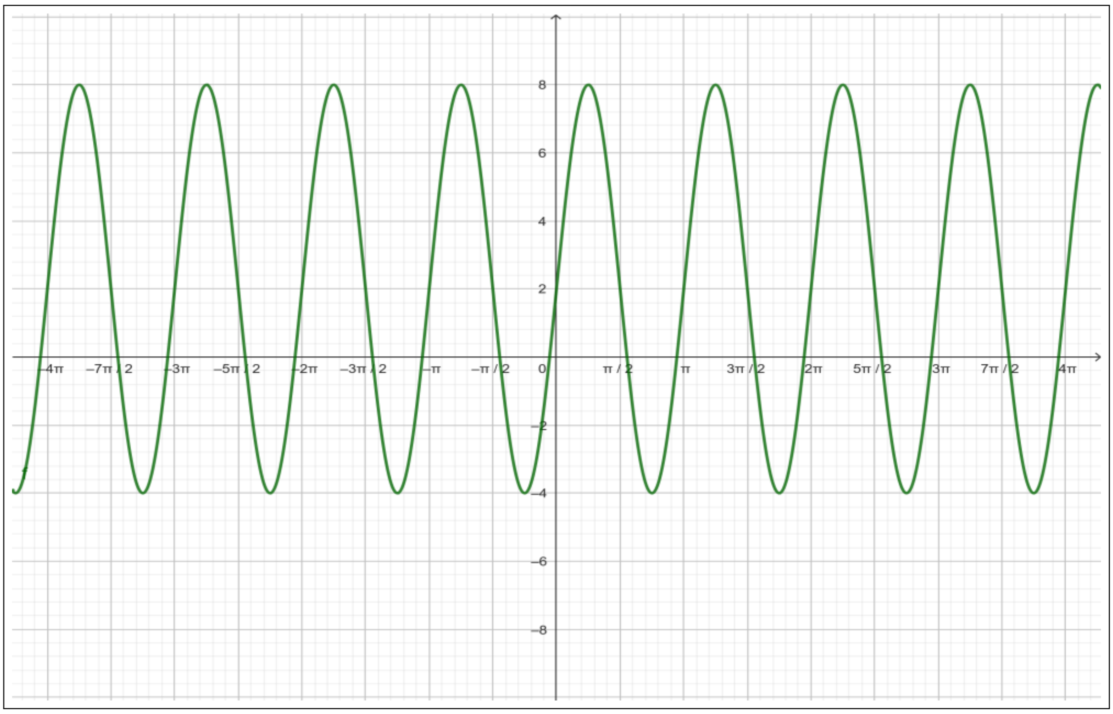

Figura 2.1: Fonte: Própria autora

2.2.11 Gabarito

Complete a tabela e observe os resultados.
Ao manipular os parâmetros da função trigonométrica no GeoGebra, espera-se que os estudantes identifiquem as seguintes relações:

Amplitude

- Amplitude: corresponde ao valor absoluto do parâmetro a. Ela indica a distância entre a linha média da função e seus valores máximos ou mínimos. $A = |a|$

Linha média

- Linha média: é determinada pelo parâmetro d. Esse valor indica o deslocamento vertical do gráfico e representa a reta em torno da qual a função

oscila.
$y = d$

Valor máximo da função

- Valor máximo: pode ser obtido somando-se a amplitude à linha média, ou seja
  máximo $= d + |a|$

Valor mínimo da função

- Valor mínimo: corresponde à linha média menos a amplitude, ou seja
  mínimo $= d - |a|$

Período da função

- Período: depende do parâmetro b e é dado por
  $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$

Parâmetro a – Amplitude

1. O que acontece com o gráfico quando o valor de a aumenta? E quando diminui?

Quando o valor de a aumenta em módulo, a amplitude da função aumenta, fazendo com que os picos e vales fiquem mais distantes da linha média. Quando diminui, a amplitude também diminui, deixando o gráfico mais "achatado".

2. O sinal de a altera a posição dos máximos e mínimos?

Sim. Quando a é negativo, ocorre uma reflexão do gráfico em relação ao eixo horizontal, invertendo a posição dos máximos e mínimos.

3. A linha média se altera quando mudamos a?

Não. A linha média permanece a mesma, pois ela depende apenas do parâmetro d.

Parâmetro b – Frequência e Período

1. O que muda no gráfico quando aumentamos o valor de b?

O número de oscilações aumenta e o gráfico fica mais “comprimido” horizontalmente.

2. O período fica maior ou menor?

O período diminui quando $|b|$ aumenta.

3. Como podemos estimar o período observando o gráfico?

Observando a distância horizontal entre dois máximos consecutivos, dois mínimos consecutivos ou dois pontos equivalentes da curva.

4. Qual é a relação entre $T = \frac{2\pi}{|b|}$ e a largura do ciclo?

O período T representa a largura de um ciclo completo da função no eixo horizontal.

Parâmetro c – Deslocamento horizontal (fase)

1. Quando c é positivo, o gráfico se desloca para onde?

O gráfico se desloca para a esquerda.

2. E quando é negativo?

O gráfico se desloca para a direita.

3. O formato da curva muda?

Não. Apenas ocorre translação horizontal, mantendo a forma da curva.

4. Como essa diferença ajuda a identificar seno ou cosseno?

Observando o ponto inicial do gráfico e o deslocamento horizontal, é possível perceber se a curva corresponde ao seno ou ao cosseno.

Parâmetro d – Deslocamento vertical

1. O que acontece quando alteramos d?

O gráfico sofre uma translação vertical.

2. A linha média sobe ou desce?

Sim. A linha média passa a ser $y = d$.

3. Como determinar a linha média observando máximo e mínimo?

$$\text{linha média} = \frac{\text{máximo} + \text{mínimo}}{2}$$

Valor de y para x = 0 nas funções seno e cosseno

1. Qual a importância desse ponto?

Esse ponto ajuda a identificar qual função está sendo representada.

- Para o seno: $\text{sen}(0) = 0$
- Para o cosseno: $\cos(0) = 1$

Questões estilo ENEM

Questão 1 – Marés

Modelo: $M(t) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$

a) Valor máximo: 4+2=6

Valor mínimo: 4-2=2

b) Período $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Logo, o período é 12 horas.

c) Altura média da maré: A linha média é 4.

d) Interpretação do +4: Representa o deslocamento vertical, ou seja, o nível médio da maré.

Questão 2 – Roda-gigante

Modelo: $H(t) = 10 + 8\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$

a) Altura máxima: $10 + 8 = 18$ m

Altura mínima: $10 - 8 = 2$ m

b) Tempo para uma volta: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$. Logo, a cabine leva 30 segundos para completar uma volta.

c) Parâmetro que representa o raio: O valor 8, que corresponde à amplitude.

Questão 3 – Pêndulo

Modelo: $\theta(t) = 30\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

a) Amplitude: 30^0

b) Período: $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$. Logo, o período é 4 segundos.

c) Se trocarmos seno por cosseno: O movimento permanece periódico, apenas ocorre deslocamento de fase.

Questão 4 – Som senoidal

Modelo: $S(t) = 3\text{sen}(440t)$

a) Amplitude: 3

b) Significado de 440: Representa a frequência angular, relacionada ao número de oscilações por unidade de tempo.

c) Se aumentar ou diminuir esse valor A onda fica mais rápida ou mais lenta, alterando a frequência do som.

Questão 5 – Interpretação do gráfico

Espera-se que o estudante identifique uma função trigonométrica do tipo: $f(x) = a\text{sen}(bx+c)+d$ ou $f(x) = a\cos(bx+c)+d$ de acordo com:

1. amplitude observada
2. período do gráfico
3. deslocamentos vertical e horizontal.

2.3 Sequência didática – Simulado ENEM

2.3.1 Contextualização

Após a exploração do conceito de radiano e o estudo das funções seno e cosseno e de suas transformações, a terceira etapa da sequência didática propõe a aplicação de um simulado com questões no estilo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Essa etapa tem como objetivo proporcionar aos estudantes a oportunidade de aplicar os conhecimentos construídos ao longo das atividades anteriores em situações-problema contextualizadas, semelhantes às encontradas em avaliações externas.

O ENEM tem priorizado questões que exigem do estudante a capacidade de interpretar gráficos, reconhecer padrões de comportamento de funções e relacionar modelos matemáticos a fenômenos periódicos presentes em diferentes contextos, como marés, ondas sonoras e movimentos oscilatórios. Nesse sentido, as funções trigonométricas aparecem frequentemente associadas à modelagem de situações reais.

Assim, a aplicação do simulado busca aproximar o conteúdo trabalhado em sala de aula das demandas presentes nas avaliações externas, incentivando os estudantes a mobilizar os conhecimentos adquiridos sobre amplitude, período, deslocamentos e interpretação de gráficos de funções trigonométricas.

Além de possibilitar a aplicação dos conceitos estudados, essa etapa também permite ao professor identificar possíveis dificuldades dos alunos na interpretação e resolução de problemas, favorecendo a realização de discussões posteriores sobre as estratégias utilizadas na resolução das questões.

2.3.2 Metodologia, objetivos e finalidade

A aplicação do simulado foi planejada como uma etapa de avaliação formativa e de consolidação dos conteúdos trabalhados ao longo da sequência didática. Após o estudo do conceito de radiano, da construção do ciclo trigonométrico e da análise das funções seno e cosseno e de suas transformações, os estudantes são convidados a resolver questões que exigem a mobilização desses conhecimentos em situações contextualizadas.

A proposta metodológica busca estimular a interpretação de gráficos, a análise de expressões algébricas e a identificação de padrões de comportamento de funções trigonométricas, habilidades frequentemente exigidas em avaliações externas, especialmente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Durante a realização do simulado, os estudantes resolvem individualmente as questões propostas, que apresentam situações-problema relacionadas a fenômenos periódicos, como movimentos oscilatórios, variações de marés e ondas sonoras. Esse tipo de abordagem contribui para que os alunos percebam a aplicabilidade das funções trigonométricas na modelagem de fenômenos reais.

Objetivo geral

Consolidar a compreensão dos conceitos relacionados às funções trigonométricas, por meio da resolução de questões contextualizadas que envolvem interpretação de gráficos, análise de parâmetros e modelagem de fenômenos periódicos.

Objetivos específicos

- Desenvolver a capacidade de interpretar gráficos de funções trigonométricas;
- Relacionar os parâmetros das funções seno e cosseno ao comportamento de seus gráficos;
- Aplicar conceitos como amplitude, período e deslocamentos na resolução de problemas;
- Estimular o raciocínio matemático e a análise de situações contextualizadas;
- Familiarizar os estudantes com o formato de questões presentes no ENEM.

Finalidade

A finalidade desta atividade é proporcionar aos estudantes um momento de aplicação e síntese dos conhecimentos construídos ao longo da sequência didática, permitindo que utilizem os conceitos estudados em situações semelhantes às encontradas em avaliações externas. Além disso, o simulado oferece ao professor a oportunidade de identificar possíveis dificuldades dos alunos e promover discussões posteriores que contribuam para o aprofundamento da compreensão dos conteúdos trabalhados.

2.3.3 Orientações ao professor (Guia de mediação)

Para a aplicação desta atividade, recomenda-se que o professor organize previamente o ambiente de sala de aula de modo a possibilitar a realização do simulado em condições semelhantes às de uma avaliação. A atividade pode ser aplicada em sala de aula regular, preferencialmente após a conclusão das atividades relacionadas ao estudo do radiano e das funções seno e cosseno e de suas transformações.

Tempo estimado: aproximadamente 1 a 2 tempos de aula de 50 minutos, dependendo do ritmo da turma e da quantidade de questões propostas.

Durante a realização do simulado, recomenda-se que os estudantes resolvam as questões individualmente, buscando interpretar as situações apresentadas e aplicar os conceitos estudados ao longo da sequência didática. Esse momento permite observar de que maneira os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos para resolver problemas que envolvem interpretação de gráficos, análise de parâmetros e modelagem de fenômenos periódicos.

Após a realização do simulado, é importante que o professor promova uma discussão coletiva das questões, analisando as estratégias utilizadas pelos estudantes e esclarecendo possíveis dúvidas. Esse momento de socialização das soluções contribui para a consolidação dos conceitos trabalhados e para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Além disso, a análise das respostas permite ao professor identificar dificuldades recorrentes na interpretação de gráficos ou na compreensão das funções trigonométricas, possibilitando a retomada de conceitos sempre que necessário.

2.3.4 Orientações ao estudante

Caro estudante,

Nesta etapa da sequência didática você irá participar de um simulado composto por questões no estilo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). As questões propostas envolvem situações que podem ser resolvidas utilizando os conceitos estudados ao longo das atividades anteriores, especialmente aqueles relacionados ao radiano, às funções seno e cosseno e às transformações de seus gráficos.

Leia atentamente cada questão antes de iniciar a resolução e procure identificar as informações relevantes apresentadas no enunciado. Em muitas situações, será necessário interpretar gráficos ou relacionar fenômenos periódicos com modelos matemáticos representados por funções trigonométricas.

Durante a resolução das questões, busque aplicar os conhecimentos construídos nas atividades anteriores da sequência didática, como a interpretação da amplitude, do período e dos deslocamentos presentes nas funções trigonométricas.

Este simulado tem como objetivo ajudá-lo a consolidar os conceitos estudados e a desenvolver habilidades importantes para a resolução de problemas semelhantes aos que aparecem em avaliações externas, como o ENEM.

Após a realização da atividade, participe da discussão coletiva conduzida pelo professor, na qual serão analisadas as estratégias utilizadas na resolução das questões.

2.3.5 Aplicação do simulado

O simulado foi aplicado após a realização das atividades relacionadas ao estudo do radiano e à análise das funções seno e cosseno e de suas transformações. A atividade foi realizada em sala de aula, em formato semelhante ao de uma avaliação, permitindo que os estudantes resolvessem as questões individualmente.

As questões propostas foram elaboradas com base no estilo das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), priorizando a interpretação de gráficos, a análise de funções trigonométricas e a resolução de problemas contextualizados.

Após a realização do simulado, foi promovida uma discussão coletiva das questões, na qual os estudantes puderam compartilhar suas estratégias de resolução e esclarecer possíveis dúvidas sobre os conceitos envolvidos.

1. (ENEM-2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura a direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A\cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm \text{sen}(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máxima e ω é a frequência que se relaciona com o período T pela fómula $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

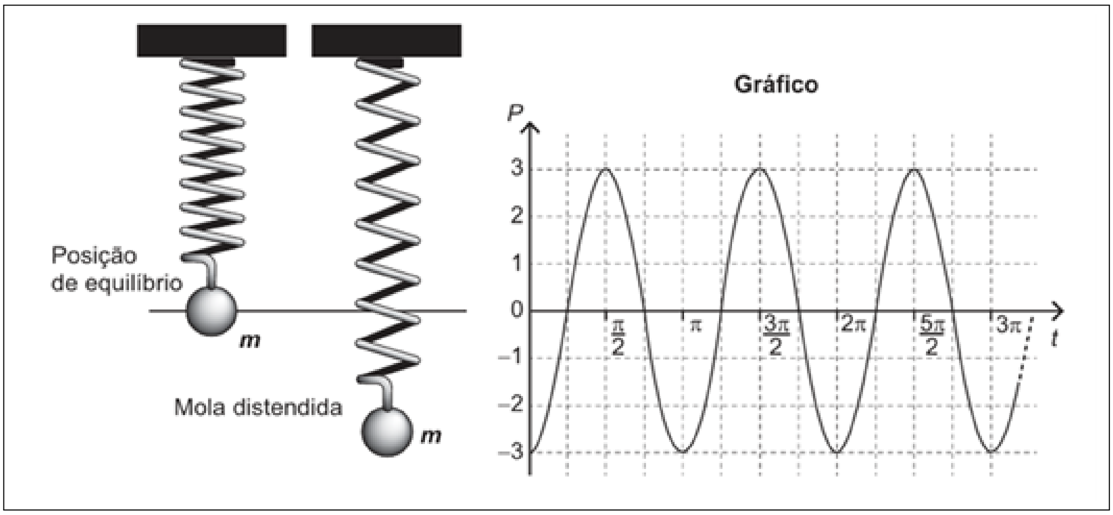

Figura 2.2: Fonte: Enem 2021

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas. A expressão algébrica que representa as posições P(t) da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é:

(a) $-3\cos(2t)$

(b) $-3\text{sen}(2t)$

(c) $3\cos(2t)$

(d) $6\cos(2t)$

(e) $6\text{sen}(2t)$

2. (ENEM- 2019 PPL) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $A\,\text{sen}(\omega t + \theta)$, que apresentam parâmetros

com significados físicos importantes, tais como a frequência $\omega = \frac{2\pi}{7}$, em que 7 é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < 2\pi/\omega$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento. O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.

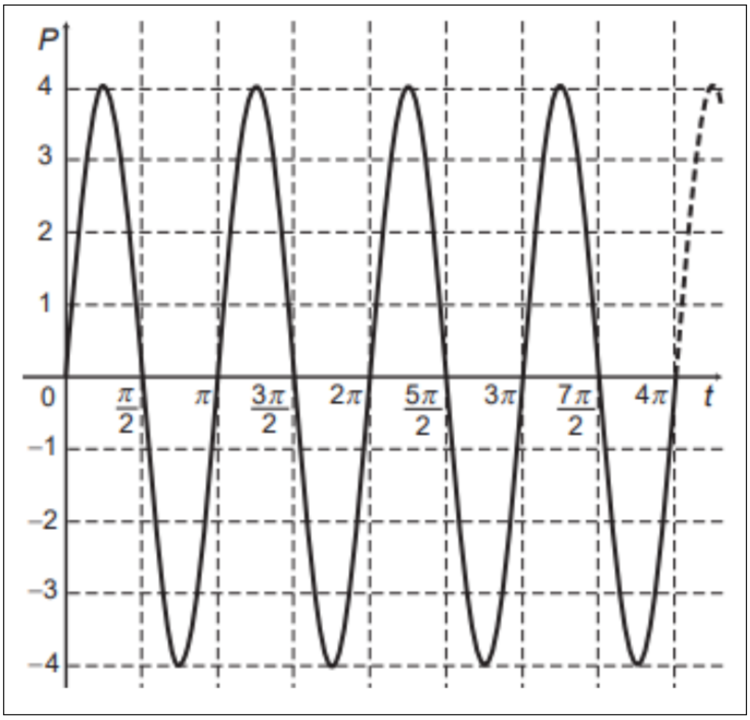

Figura 2.3: Fonte: Enem 2019

A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t é:

a) $P(t) = 4\text{sen}(2t)$

b) $P(t) = -4\text{sen}(2t)$

c) $P(t) = -4\text{sen}(4t)$

d) $P(T) = 4\text{sen}\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

e) $P(t) = 4\text{sen}\left(4t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

3. (ENEM – 2018) Em 2014 foi inaugurada maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

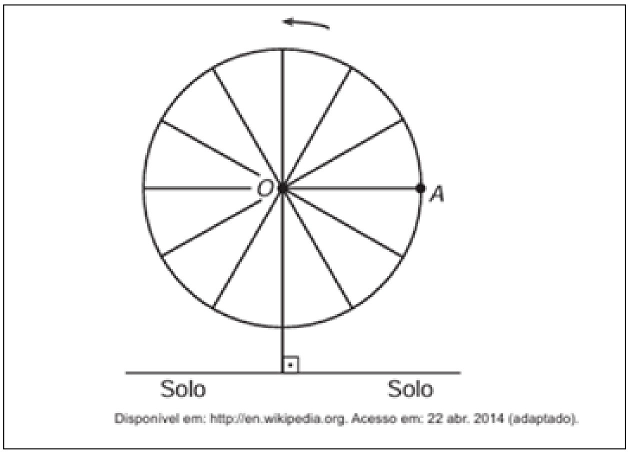

Figura 2.4: Fonte: Enem 2018

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do porto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento AO em relação a sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

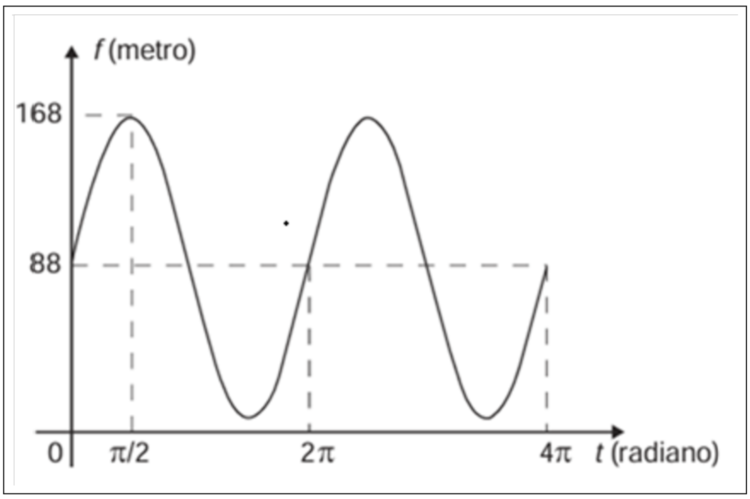

Figura 2.5: Fonte: Enem 2018

A expressão da função altura é dada por:

(a) $f(t) = 80\,\text{sen}(t) + 88$

(b) $f(t) = 80\cos(t) + 88$

(c) $f(t) = 88\cos(t) + 168$

(d) $f(t) = 168\,\text{sen}(t) + 88\cos(t)$

(e) $f(t) = 88\,\text{sen}(t) + 168\cos(t)$

4. (ENEM – 2018) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

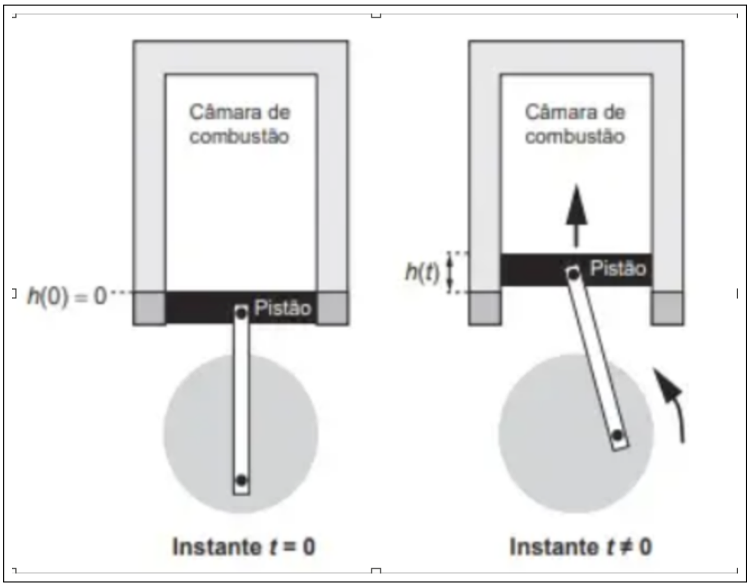

Figura 2.6: Fonte: Enem 2018

A função $h(t) = 4 + 4\,\text{sen}\left(\dfrac{\beta t}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$, definida para $t \geq 0$, descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π. O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 5

e) 8

5. (ENEM- 2017) Um cientista em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pesoa, utiliza uma função do tipo P(t)= A + B em que A,B e são constantes reais positivas e t representa a variável de tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

Figura 2.7: Fonte: Enem 2017

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

6. (ENEM – 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, obervou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro. (Disponível em WWW.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago.2012 (adaptado)).

   Na safra, o mês de produção máxima desse produto é :

   a) janeiro

   b) abril

   c) junho

   d) julho item outubro

7. (ENEM-2015 PPL) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado.A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$ sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0h < 24)$ e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular.

   Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18$ e $B = 8$

b) $A = 22$ e $B = -4$

c) $A = 22$ e $B = 4$

d) $A = 26$ e $B = -8$

e) $A = 26$ e $B = 8$

8. (ENEM -2014) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a.\operatorname{sen}[b.(x+c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

   O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são):

   a) a.

   b) b.

   c) c.

   d) a e b.

   e) b e c.

9. (UERJ) O gráfico a seguir representa a função periódica definida por $f(x) = 2\operatorname{sen}(x),\ x \in \mathbb{R}$. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função.

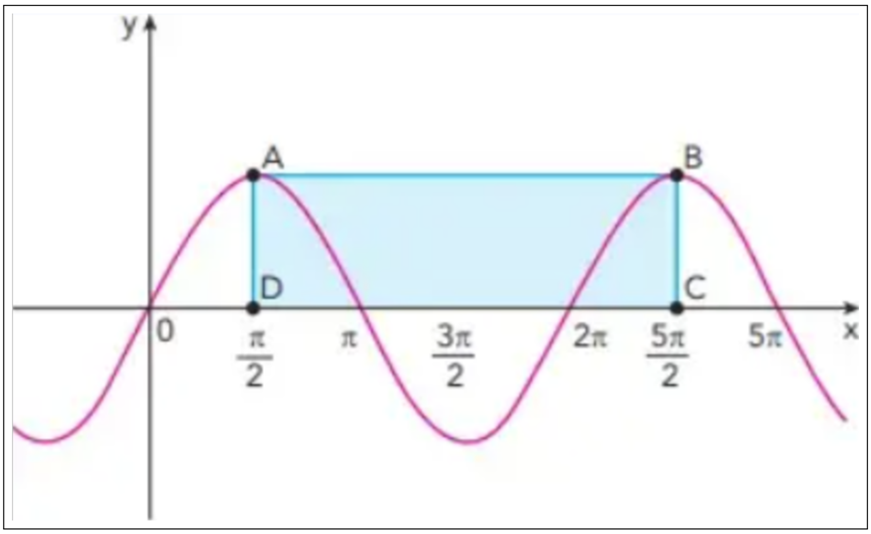

Figura 2.8: Fonte: UERJ

A área do retângulo $ABCD$ é:

a) 6π

b) 5π

c) 4π

d) 3π

10. (EsPCEx) Na figura abaixo está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma $y = m.\text{sen}(nx) + k$, com $n > 0$.

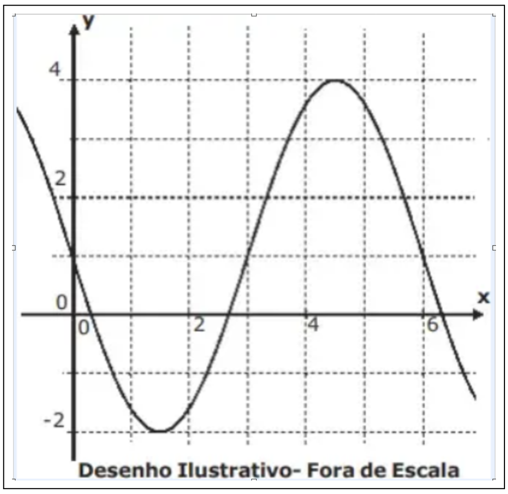

Figura 2.9: Fonte: EsPCEx

Os valores de m, n e k são, repsectivamente:

a) $3, \dfrac{\pi}{3}$ e 1

b) $6, \dfrac{\pi}{6}$ e 1

c) $-3, \dfrac{\pi}{6}$ e 1

d) $-3, \dfrac{\pi}{3}$ e 1

e) $3, \dfrac{\pi}{6}$ e 1

2.3.6 Gabarito comentado do simulado

Questão 1: A.

O gráfico tem amplitude 3; linha média é 0, então $d = 0$; período π, então $b = 2$ e inicia em -3, o que corresponde a: $P(t) = -3\cos(2t)$.

Questão 2: A.

O gráfico tem amplitude 4; período π, então $b = 2$; linha média é 0 e parte de 0 com crescimento inicial, o que corresponde a: $P(t) = 4\text{sen}(2t)$.

Questão 3: A.

Pelo gráfico, a linha média é 88, o máximo é 168 então a amplitude é 80; O perído é 2π, então $b = 1$ Além disso, em $t = 0$ a função parte da linha média e cresce, caracterizando seno: $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$.

Questão 4: D.

Temos : $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$. Queremos que a altura atinja 6 cm três vezes em menos de 4 s: $4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 6 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Usando $\pi \approx 3$, o menor valor inteiro que satisfaz a condição é $\beta = 5$.

Questão 5: A.

Da tabela:

- pressão mínima = 78

- pressão máxima = 120
- 90 batimentos por minuto

Logo, $A = \frac{120+78}{2} = 99$, $\quad B = \frac{120-78}{2} = 21$. Como são 90 batimentos por minuto, o período é $T = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ s, e então $k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$. Assim, $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

Questão 6: D.

A função é $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{6}\right)$. O mês de produção máxima da safra corresponde ao menor preço. Isso ocorre quando o cosseno vale -1: $\frac{\pi(x-1)}{6} = \pi \Rightarrow x - 1 = 6 \Rightarrow x = 7$. Portanto, o mês é julho.

Questão 7: B.

A temperatura máxima é 26 e a mínima é 18, então linha média 22, logo $A = 22$: $A = \frac{26+18}{2} = 22$, $\quad |B| = \frac{26-18}{2} = 4$. Como a temperatura da tarde deve ser menor que a da manhã, o coeficiente deve ser negativo: $B = -4$. (observe que na função dada, houve um deslocamento horizontal)

Questão 8: B.

Na função $y = a\text{sen}[b(x+c)]$, o período depende de b. Para tornar o som mais agudo, é preciso diminuir o período, o que exige alterar apenas o parâmetro b.

Questão 9: C.

A função é $f(x) = 2\text{sen}(x)$. Os máximos no intervalo dado ocorrem em $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{5\pi}{2}$, com altura 2. Assim, o retângulo tem: base igual a $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$ e altura igual a 2. Logo, a área é $A = (2\pi) \cdot 2 = 4\pi$.

Questão 10: D.

Pelo gráfico, o valor máximo é 4 e o valor mínimo é -2. Então:

$m = \frac{4-(-2)}{2} = 3$ e $k = \frac{4+(-2)}{2} = 1$. Como o gráfico inicia em $y = 1$ e decresce, o coeficiente do seno deve ser negativo. O período observado é 6, então $n = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Logo, $y = -3\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$.

Referências Bibliográficas

AUSUBEL, D. P. A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. Apresentada por MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. São Paulo: Moraes, 1982.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias – ENEM 2025. Brasília: INEP, 2025.

GEOGEBRA. GeoGebra Classic. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/. Acesso em: 12 out. 2025.

GEOGEBRA. Descobrindo o radiano. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/bt378x64. Acesso em: 2026.

GEOGEBRA. Funções seno e cosseno e seus parâmetros. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mkanmhmn. Acesso em: 2026.

NUNES, Fernanda Cotrim Cataldo. *Do Radiano às Funções Trigonométricas: uma sequência didática mediada pelo GeoGebra com foco no ENEM*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2026.

PAPERT, S. Logo: computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PRENSKY, M. Digital natives, digital immigrants. *On the Horizon*, v. 9, n. 5, p. 1–6, 2001.

QCONCURSOS. Questões de Matemática – Funções Trigonométricas. Disponível em: https://www.qconcursos.com/. Acesso em: 10 out. 2025.

RESNICK, M. Jardim de infância para a vida toda: por uma aprendizagem criativa, mão na massa e relevante para todos. Porto Alegre: Penso, 2020.