INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FÁBIO BERNARDO DA SILVA NUNES

DESENVOLVIMENTO E USO DE UM JOGO DE CARTAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

IFSP

SÃO PAULO

2026

FÁBIO BERNARDO DA SILVA NUNES

DESENVOLVIMENTO E USO DE UM JOGO DE CARTAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas.

IFSP

SÃO PAULO

2026

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

n972d Nunes, Fábio Bernardo da Silva
Desenvolvimento e uso de um jogo de cartas para o ensino de geometria plana na educaÇÃo bÁsica / Fábio Bernardo da Silva Nunes. São Paulo: [s.n.], 2026.
140 f. il.

Orientador: Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2026.

1. Jogo Didático. 2. Geometria Plana. 3. Produto Educacional. 4. Jogo de Geometria Plana. 5. Jogo de Matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
Campus São Paulo

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DESENVOLVIMENTO E USO DE UM JOGO DE CARTAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Autor: Fábio Bernardo da Silva Nunes

Orientador: Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou essa dissertação:

____
Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas
IFSP – Câmpus São Paulo

____
Prof. Me. Lucas Casanova Silva
IFSP – Câmpus São Paulo

____
Prof. Dr. Rogério Osvaldo Chaparin
IFSP – Câmpus Guarulhos

São Paulo, 08 de abril de 2026

"São Jorge, cavaleiro corajoso, protegei-me
com sua espada e escudo. Dai-me força e coragem
para vencer todas as batalhas da vida.
Amém."

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela vida, pelas oportunidades e por ter me fortalecido ao longo desta jornada. A fé me sustentou nos momentos mais difíceis, e, com a ajuda de São Jorge, pude seguir firme, determinado e confiante até a conclusão deste trabalho.

Ao meu pai, exemplo de dedicação e sabedoria, agradeço por todo apoio, amor e inspiração. À minha irmã, pela presença constante e palavras de incentivo. À minha namorada, pelo carinho, paciência e compreensão em todos os momentos, especialmente nos dias mais desafiadores.

Agradeço também aos amigos que estiveram ao meu lado durante o mestrado, oferecendo apoio e motivação.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo, que contribuíram significativamente para minha formação. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas, por sua orientação dedicada, seus conselhos e por ter sido uma referência essencial neste processo.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo desenvolver e analisar um jogo didático de cartas voltado ao Ensino Médio, estruturado para a retomada e aprofundamento de conteúdos de Geometria Plana. A pesquisa parte da constatação das dificuldades frequentemente apresentadas pelos estudantes na interpretação de propriedades geométricas e na construção de argumentações matemáticas, especialmente no que se refere ao raciocínio dedutivo. Fundamentada em referenciais da Educação Matemática e nos princípios da Aprendizagem Baseada em Jogos, a investigação adota abordagem exploratória, contemplando revisão de literatura, construção do Produto Educacional e alinhamento pedagógico às habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O jogo, de natureza analógica, organiza-se por meio de cartas-problema e cartas teóricas, mediadas pela figura do juiz, favorecendo a análise crítica dos passos de resolução e a justificativa matemática. A proposta busca contribuir para práticas pedagógicas mais dinâmicas, sem comprometer o rigor conceitual, oferecendo ao professor uma ferramenta com potencial avaliativo e aplicabilidade concreta em sala de aula. Assim, o trabalho evidencia que o uso planejado de jogos pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio geométrico, da argumentação e da participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Jogo didático; Geometria Plana; Ensino Médio; Produto Educacional; Argumentação matemática; BNCC.

ABSTRACT

This dissertation aims to develop and analyze an educational card game for high school students, structured to review and deepen concepts in Plane Geometry. The research stems from the observation of difficulties frequently encountered by students in interpreting geometric properties and constructing mathematical arguments, especially regarding deductive reasoning. Grounded in the frameworks of Mathematics Education and the principles of Game-Based Learning, the investigation adopts exploratory approach, encompassing literature review, the construction of the Educational Product, and pedagogical alignment with the skills foreseen in the Brazilian National Curriculum Base (BNCC). The game, of an analogical nature, is organized through problem cards and theoretical cards, mediated by the figure of the judge, favoring the critical analysis of the solution steps and mathematical justification. The proposal seeks to contribute to more dynamic pedagogical practices, without compromising conceptual rigor, offering the teacher a tool with evaluative potential and concrete applicability in the classroom. Thus, this work demonstrates that the planned use of games can foster the development of geometric reasoning, argumentation, and active student participation in the learning process.

Keywords: Educational game; Plane Geometry; High School; Educational Product; Mathematical argumentation; BNCC (Brazilian National Curriculum).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxo da dissertação 36
Figura 2 - Problema 1 Fácil 48
Figura 3 - Carta Branca 2 49
Figura 4 - Carta Branca 7 50
Figura 5 - Carta Branca 8 51
Figura 6 - Carta Branca 4 52
Figura 7 - Carta Branca 11 53
Figura 8 - Carta Branca 5 54
Figura 9 - Carta Branca 20 55
Figura 10 - Problema 2 Fácil 56
Figura 11 - Carta Branca 4 57
Figura 12 - Carta Branca 2 58
Figura 13 - Carta Branca 1 59
Figura 14 - Carta Branca 14 60
Figura 15 - Carta Branca 11 61
Figura 16 - Carta Branca 7 62
Figura 17 - Carta Branca 20 63
Figura 18 - Problema 11 Fácil 65
Figura 19 - Cartas Brancas 3 e 4 65
Figura 20 - Cartas Brancas 5, 6, 7 e 17 66
Figura 21 - Problema 6 Fácil 67
Figura 22 - Cartas Brancas 4 e 7 67
Figura 23 - Cartas Brancas 10, 15, 16, 18 e 20 68
Figura 24 - Problema 5 Fácil 69
Figura 25 - Cartas Brancas 4 e 7 69
Figura 26 - Cartas Brancas 8, 10, 11, 18 e 19 70
Figura 27 - Problema 12 Fácil 71
Figura 28 - Cartas Brancas 1 e 4 71
Figura 29 - Cartas Brancas 5, 7, 16, 19 e 20 72
Figura 30 - Carta Branca (Passo: 1 e 2) – Apêndice B 93
Figura 31 - Carta Branca (Passo: 3, 4, 5 e 6) – Apêndice B 94
Figura 32 - Carta Branca (Passo: 7, 8, 9 e 10) – Apêndice B 95
Figura 33 - Carta Branca (Passo: 11, 12, 13 e 14) – Apêndice B 96
Figura 34 - Carta Branca (Passo: 15, 16, 17 e 18) – Apêndice B 97
Figura 35 - Carta Branca (Passo: 19, 20, e 21) – Apêndice B 98
Figura 36 - Carta Laranja 1 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 100
Figura 37 - Carta Laranja 2 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 101
Figura 38 - Carta Laranja 3 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 102
Figura 39 - Carta Laranja 4 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 103
Figura 40 - Carta Laranja 5 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 104
Figura 41 – Carta Laranja 6 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 105
Figura 42 - Carta Laranja 7 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 106
Figura 43 - Carta Laranja 8 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 107
Figura 44 - Carta Laranja 9 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 108
Figura 45 - Carta Laranja 10 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 109
Figura 46 - Carta Laranja 11 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 110
Figura 47 - Carta Laranja 12 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C 111
Figura 48 - Manual do Juiz (DEFINIÇÃO) – Apêndice D 112

Figura 49 - Manual do Juiz (PROBLEMA 1) – Apêndice D 113
Figura 50 - Manual do Juiz (PROBLEMA 1 e 2) – Apêndice D 114
Figura 51 - Manual do Juiz (PROBLEMA 3) – Apêndice D 115
Figura 52 - Manual do Juiz (PROBLEMA 3 e 4) – Apêndice D 116
Figura 53 - Manual do Juiz (PROBLEMA 5 e 6) – Apêndice D 117
Figura 54 - Manual do Juiz (PROBLEMA 7 e 8) – Apêndice D 118
Figura 55 - Manual do Juiz (PROBLEMA 8) – Apêndice D 119
Figura 56 - Manual do Juiz (PROBLEMA 9) – Apêndice D 120
Figura 57 - Manual do Juiz (PROBLEMA 9 e 10) – Apêndice D 121
Figura 58 - Manual do Juiz (PROBLEMA 10) – Apêndice D 122
Figura 59 - Manual do Juiz (PROBLEMA 11) – Apêndice D 123
Figura 60 - Manual do Juiz (PROBLEMA 12) – Apêndice D 124

LISTA DE QUADROS

Tabela 1 - Correspondência entre o problema e o código da habilidade - Carta Laranja 43
Tabela 2 - Habilidades da BNCC do ensino médio..88
Tabela 3 - Habilidades da BNCC do ensino fundamental..89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
GP	Geometria Plana (nome do jogo)
LDBEN / LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
P.E.	Produto Educacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
u.a.	Unidades de área
u.c.	Unidades de comprimento
u.m.	Unidades de medida

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 19
2.1 Aprendizagem e desenvolvimento cognitivo 19
2.2 Game-based Learning (Aprendizagem baseada em jogos) como ferramenta 22
2.3 O papel dos jogos no processo de ensino-aprendizagem 25
2.4 O Jogo como estratégia para desenvolver habilidades 27
2.5 Ensino de Matemática com materiais manipuláveis 28
2.6 A Geometria nos ensinos fundamental e médio 30
2.7 A importância do jogo no ensino da Geometria Plana no Ensino Médio 31
2.8 A legislação educacional e as diretrizes para o ensino da Matemática 32
3 METODOLOGIA 35
3.1 Revisão da literatura 36
3.2 Construção do produto educacional 38
3.3 Alinhamento pedagógico 42
4 PRODUTO EDUCACIONAL 45
4.1 Simulação professor-jogo 45
4.2 Turma: 3º ano do Ensino Médio – Sala A 47
4.3 Segunda rodada 57
4.4 Segunda sexta-feira com a turma (3º ano do Ensino Médio – Sala A) 63
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO 78
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 82
REFERÊNCIAS 84
ANEXO 88
APÊNDICE A (REGRAS) 91
Preparação 91
Dinâmica do jogo 91
Critérios de justificativa 92
Exemplo de partida 92
APÊNDICE B (CARTAS BRANCAS) 93
Definição 93
APÊNDICE C (CARTAS LARANJAS) 99
APÊNDICE D (MANUAL DO JUIZ) 112

Função do Manual do Juiz 112
APÊNDICE E (RESOLUÇÃO LARANJA) 125

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, muitas vezes vista como uma das disciplinas mais desafiadoras pelos alunos, e enfrenta diversos obstáculos no ambiente escolar para sua compreensão, desde conceitos básicos até os mais complexos. Desde os primeiros anos de escolarização, muitas crianças e adolescentes são expostas à ideia de que a Matemática é difícil ou inalcançável, o que contribui para a formação de uma percepção negativa da disciplina (D'Ambrosio, 1996). Essa percepção pode ser fundamentada em vários elementos, como o método de ensino tradicional, refletindo na falta de conexão com a vida cotidiana (a relação com o objetivo prático) e até mesmo a influência familiar.

Ao compartilharem suas próprias dificuldades e frustrações em relação à Matemática, muitos pais e responsáveis, mesmo sem perceber, acabam transmitindo essa insegurança ao público infanto-juvenil (Campo; Manrique, 2020). Além disso, existe a dificuldade inerente a uma disciplina cumulativa: quando um estudante não entende adequadamente um conteúdo básico, tende a encontrar cada vez mais dificuldades nos conteúdos subsequentes. A frustração resultante dessas circunstâncias pode levar a dificuldades, falta de interesse e até mesmo ansiedade. Além disso, o ensino se torna ainda mais difícil e distante quando os alunos não enxergam aplicações práticas nos conteúdos, como no caso de equações ou fórmulas que não se conectam a situações reais. O aprendizado torna-se maçante e desmotivador quando os métodos de ensino se baseiam apenas em repetição e memorização, sem permitir criatividade ou resolução de problemas contextualizados.

> A Matemática ocupa lugar no imaginário social como uma das áreas do conhecimento mais complexas. No contexto da Educação brasileira, a rejeição à Matemática tem-se constituído em fenômeno frequentemente observável, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior. Quando se fala em Matemática, comumente nos deparamos com declarações como: "não gosto de matemática", "matemática é difícil", "matemática é para poucos", "é normal reprovar em matemática", dentre outras. (Santos; Almeida, 2022, p. 1278).

Nesse contexto, aplicar jogos didáticos no ensino da Matemática, em especial no que se refere à Geometria Plana, é uma alternativa viável. Quando bem elaborados, os jogos ultrapassam a mera diversão e se transformam em poderosas ferramentas pedagógicas que despertam o interesse dos alunos, tornando o ambiente mais leve, participativo e acolhedor. Como afirma Gallagher (1997, p. 244), "as habilidades adquiridas sob condições agradáveis de aprendizagem geralmente ficam retidas por longos períodos de tempo".

Assim, o uso de jogos, conforme o conceito chamado de *Game-Based Learning* (Aprendizagem baseada em jogos), consiste em empregar jogos (digitais ou não) como ferramenta para favorecer a aquisição de conhecimentos, habilidades e atitudes. A ideia central é de que o jogo funcione como um ambiente onde o aluno aprende por meio da experiência, tomada de decisão, tentativas e erros, interação e motivação (Carvalho, 2015).

Neste sentido, os jogos auxiliam no desenvolvimento cognitivo, emocional e social dos alunos como consequência do papel lúdico no ensino, podendo ele ser aplicado ao aprendizado da Matemática além de funcionar como resposta à crítica de que muitos estudantes consideram esta disciplina difícil e desmotivadora, que gera medo e bloqueios na aprendizagem. Segundo Kishimoto (2003, p. 10), o jogo é um elemento fundamental para o equilíbrio emocional da criança.

O lúdico é apresentado como estratégia que transforma o aprendizado em algo prazeroso, promovendo participação ativa, curiosidade, criatividade e raciocínio lógico. O professor atua como mediador, incentivando o aluno a formular hipóteses, experimentar soluções e refletir sobre estratégias. De acordo com Julia Borin (1996), o jogo é entendido não como mero entretenimento, mas como ferramenta pedagógica que aproxima o estudante, especialmente aquele que apresenta bloqueios em relação à aprendizagem, do conteúdo.

No entanto, os jogos devem ter intencionalidade e objetivos claros, para que o aluno aprenda matemática ao participar de atividades lúdicas, e não apenas participe do jogo. Quando bem aplicado, o lúdico desenvolve autonomia, memória, coordenação, concentração e resolução de problemas, competências essenciais para o pensamento matemático.

No que tange ao jogo que foi criado no decorrer deste trabalho, a ideia é exatamente essa: aprofundar a assimilação de noções como figuras geométricas, ângulos, áreas e teorema através de uma atividade prática e cativante. No jogo, o aluno não é mais um simples receptor de informações, mas sim um protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Ele experimenta, comete erros, faz correções, discute e cria conhecimento, e além dos conteúdos da geometria plana, desenvolve habilidades como raciocínio lógico, cooperação, concentração e resolução de problemas. Isso é o que vários autores sustentam: o jogo educativo é fundamental para a formação do pensamento crítico e criativo, desenvolvendo competências que extrapolam o conteúdo curricular. "O erro para Piaget é algo positivo. Para ele, toda aprendizagem é acompanhada de erros e acertos." (Brasil, 2005, p. 25).

Ainda na visão de Piaget (1978), a aprendizagem é um processo ativo, pois a criança constrói conhecimento a partir de suas ações sobre o mundo. Isso significa que ela aprende fazendo, experimentando, errando e reorganizando seus pensamentos. Nesse sentido, o uso de jogos na educação favorece o desenvolvimento cognitivo, pois estimula a interação, o raciocínio e a resolução de problemas. Portanto, os jogos podem ser considerados ferramentas educativas porque permitem que a criança construa conhecimento ativamente, passando por desafios que estimulam seu desenvolvimento cognitivo. O brincar não é apenas lazer, mas um processo de aprendizagem que envolve raciocínio, interação social e autonomia intelectual.

> [...] o jogo em seu aspecto pedagógico, apresenta-se produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentalizador e, portanto, facilitador da aprendizagemde estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação (Grando, 2004, p. 26).

Além disso, jogos ajudam a criar um ambiente de ensino mais positivo, onde o estudante se sente seguro para aprender. Essa conexão mais amigável com a Matemática é muito importante, especialmente para alunos que têm dificuldade na disciplina. Os jogos aproximam o aluno do conteúdo, fazendo com que a aprendizagem se torne mais significativa e relacionada à sua realidade. Assim, o processo de ensino-aprendizagem fica mais eficazes, uma vez que o conhecimento é aprendido com o seu potencial, respeitando o ritmo de cada aluno e aumentando seu envolvimento emocional. No jogo apresentado neste trabalho, a Geometria Plana deixa de ser algo abstrato de entender e passa a ser vivenciado, permitindo que os alunos usem os conceitos enquanto trabalham com os colegas. O jogo não substitui a aula expositiva tradicional, mas é auxiliar, funcionando como uma ligação entre o que se ensina e o que se pratica.

> A utilização de jogos didáticos apresenta-se como importante ferramenta no processo ensino-aprendizagem, tendo em vista seu aspecto colaborativo e motivador, que impulsiona o educando a ter uma atuação ativa, fomentando o pensamento crítico e a habilidade de (re)construção do conhecimento. O lúdico possibilita a ampliação do conhecimento do indivíduo, uma vez que estimula áreas ligadas à aprendizagem. Tratando-se dos alunos, a aprendizagem com o uso de jogos didáticos estimula o desenvolvimento e aperfeiçoa as habilidades; sendo assim, os jogos tornam-se ferramentas capazes de despertar o seu potencial criativo (Barros; Miranda; Costa, 2019, p. 2).

Este trabalho tem como objetivo ajudar o professor no processo de desenvolvimento dos alunos, usando uma abordagem diversificada ao mobilizar o conteúdo de Geometria Plana a partir de uma atividade lúdica. A proposta apresenta uma sugestão prática de plano de aula para ensinar e retomar conceitos de Geometria Plana, incluindo o uso de jogos tradicionais com papel, lápis e cartas, além de recursos interativos, visando auxiliar na retomada deste conteúdo durante nas aulas ou como processo avaliativo.

A pergunta que deixo em aberto é: como o jogo de cartas elaborado nesta pesquisa pode se constituir em uma ferramenta efetiva para o desenvolvimento das habilidades de Geometria Plana no Ensino Médio?

Portanto, considerando o potencial do uso de jogos como recurso didático no ensino, o presente trabalho tem como objetivo propor e descrever a elaboração de um jogo de cartas como ferramenta pedagógica para o ensino de Geometria Plana no Ensino Médio. Nesse contexto, fundamenta-se em referenciais teóricos que discutem o uso de jogos no ensino de Matemática, os quais apontam que tais recursos podem favorecer a aprendizagem ao promover maior participação dos estudantes. Assim, busca-se refletir sobre como essa abordagem pode tornar o processo de aprendizagem mais significativo, explorando suas potencialidades teóricas no contexto educacional.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Aprendizagem e desenvolvimento cognitivo

A compreensão sobre como se dá o processo de ensino-aprendizagem na escola demanda uma reflexão cuidadosa sobre as teorias que explicam como o aluno desenvolve seu pensamento e conhecimento. Uma das contribuições mais importantes nesse tema vem do trabalho de Jean Piaget (1975), que nos ajuda a enxergar como o conhecimento se constrói a partir da participação ativa do aluno junto ao meio onde vive e aprende.

Piaget (1975) dedicou muitos anos a pesquisas que mostraram que o desenvolvimento intelectual não acontece de qualquer jeito, mas sim em etapas que seguem uma sequência e são comuns a todas as crianças. Cada uma dessas fases traz mudanças profundas na forma como a criança pensa, interpreta o mundo e resolve problemas, fazendo com que ela avance do pensamento mais concreto para níveis cada vez maiores de abstração e raciocínio lógico.

Um dos pontos mais importantes dessa teoria é a ideia de que aprender é muito mais do que só receber informações passivamente. Para Piaget (1975), aprender é um processo ativo: o aluno está sempre reorganizando o que pensa para conseguir incorporar experiências novas. Isso muda completamente a forma tradicional de ensinar, que costuma colocar o professor como o único dono do saber, enquanto o aluno fica só na posição de receptor. Na visão de Piaget (1975), o estudante é protagonista da construção do seu próprio conhecimento.

Nessa perspectiva construtivista, o aluno não deveria aceita tudo o que recebe sem questionar, ele interpreta, pondera, modifica seus esquemas mentais para entender melhor o que está acontecendo. Esse vai e volta entre assimilação (quando ele integra as novidades ao que já sabe) e acomodação (quando ajusta suas ideias para encaixar as informações novas) é o que faz seu pensamento crescer, ficando mais sofisticado e complexo. E quando o professor assume uma postura, cria um ambiente onde aprender realmente faz sentido, é duradouro e capaz de transformar a forma como o estudante vê e interage com o conhecimento.

> É então que a aquisição da linguagem, ou sistema de signos coletivos, torna se possível e que, graças ao conjunto tanto de símbolos individuais como desses signos, os esquemas sensório-motores acabam por transformar-se em conceitos ou por desdobrar-se em novos conceitos (Piaget, 1975, p.13)

Jean Piaget (1975) nos ajuda a entender como as pessoas vão construindo seu conhecimento ao longo da vida por meio de quatro etapas principais do desenvolvimento do pensamento.

A primeira fase, chamada sensório-motora, acontece desde o nascimento até mais ou menos os 2 anos. Nesse período, o bebê aprende explorando o mundo exatamente com os sentidos e os movimentos do corpo. É quando ele começa a perceber que suas ações têm consequências, como entender que ao chutar um brinquedo ele pode fazê-lo se mover, é o começo da ideia de causa e efeito.

Depois vem a fase pré-operatória, que vai dos 2 aos 7 anos. Aqui, a criança desenvolve a linguagem e começa a pensar de forma simbólica. Ela já consegue usar palavras e imagens para representar coisas e situações, mas ainda tem dificuldades para raciocinar logicamente ou enxergar o ponto de vista dos outros. Por exemplo, pode imaginar que uma caixa está vazia, só porque não vê o que existe dentro.

A terceira etapa é o estágio operatório-concreto, dos 7 aos 11 anos, muito importante para os primeiros anos do ensino fundamental. Nessa fase, a criança começa a fazer operações mentais, mas ainda precisa de coisas concretas para entender melhor. Ela vai entendendo melhor conceitos de volume de água, quantidade (que a água continua a mesma, mesmo que mude de copo), organizar objetos em grupos, identificar ordem e perceber o espaço ao seu redor. Tudo isso com bastante ajuda da observação e da manipulação, tocar, mexer e experimentar são fundamentais.

Por último, temos o estágio operatório-formal, que começa a partir dos 11 anos, normalmente na adolescência. É quando o pensamento abstrato e hipotético ganha força. O aluno passa a conseguir pensar em ideias que não estão concretamente diante dele, formular hipóteses, fazer generalizações e lidar com problemas complexos. Essa fase é essencial para que ele avance em disciplinas como Matemática e Ciências, conseguindo trabalhar com conceitos mais complexos da Geometria, por exemplo.

Entender essas fases é essencial para que os professores planejem as aulas de forma adequada, escolhendo recursos e atividades que estejam de acordo com o modo como os alunos pensam em cada etapa. Isso ajuda a tornar o aprendizado mais significativo para eles.

No ensino da Matemática, em especial na Geometria, as fases operatório-concreto e operatório-formal são as mais importantes. Isso porque, para aprender sobre formas, espaço, simetria, congruência e proporcionalidade, o aluno precisa desenvolver a capacidade de representar, manipular e compreender objetos geométricos. Nessa trajetória, a compreensão de movimentos como translação, rotação e reflexão de figuras também se torna essencial, pois permite ao estudante perceber relações espaciais, reconhecer padrões e compreender a transformação de objetos no plano. Segundo Piaget (1964), o conhecimento lógico-matemático não é algo que o estudante simplesmente recebe. Ele constrói esse saber a partir da sua interação e ação nos objetos ao redor. Por isso, experimentar, manipular materiais e resolver problemas são caminhos essenciais para que a criança ou o adolescente ampliem suas estruturas de pensamento e consigam desenvolver habilidades como a prevista na EM13MAT509, que favorece o desenvolvimento do pensamento abstrato e complexo ao explorar as deformações provocadas por projeções cartográficas. É essa vivência concreta que prepara o estudante para avançar rumo a níveis mais sofisticados de raciocínio formal. De acordo com Piaget (1964), no estágio do desenvolvimento operações concretas: “[...] a criança consegue realizar operações, no entanto, precisa de realidade concreta para realizá-las” (Piaget, 1964, p. 22).

Piaget destaca as características e limitações do estágio operatório-concreto:

> Porém, a limitação desse estágio é a necessidade da presença do concreto, ou seja, a criança necessita dos objetos para poder raciocinar. As estruturas cognitivas que se formam a partir do período operatório correspondem à construção dos conceitos de conservação. A conservação prevê a possibilidade de volta ao início, com argumentos não somente intuitivos (identidade), mas de reversibilidade ou reciprocidade. (Piaget, 2015, p. 51).

Nesse caminho, o papel do professor é muito importante: ele precisa criar situações na sala de aula que incentivem o aluno a agir sobre o que está aprendendo, apresentando desafios que o façam pensar, questionar e até entrar em conflito com as ideias que já possui. Para Piaget (2015), aprender não é só ouvir ou decorar o que o professor fala, mas construir o conhecimento com as próprias mãos, envolvendo um processo ativo em que o erro é mais que permitido, é fundamental e faz parte do crescimento. Quando o estudante se depara com problemas, pode ser levado a levantar hipóteses e buscar soluções, assumindo um papel mais ativo no processo de aprendizagem, e assumindo um papel de protagonista.

Pensando assim, a teoria de Piaget (2015), fornece um suporte para pensarmos em atividades que vão além do tradicional, como jogos, experimentos, uso de materiais palpáveis e dinâmicos que estimulem o raciocínio e despertem o interesse dos alunos. Mesmo que aqui não estejamos falando de uma proposta concreta ou pronta, essa visão abre caminho para defender métodos de ensino que coloquem o aluno no centro, valorizando seu envolvimento e a construção significativa do conhecimento. Isso é especialmente importante quando falamos de Matemática, e mais especificamente da geometria plana, onde o entendimento profundo e ativo dos conceitos faz toda a diferença.

A perspectiva piagetiana confere ao jogo um papel essencial no desenvolvimento infantil, mas aqui apenas queremos deixar claro a ideia de algo alternativo no ensino. Em sua obra seminal, o autor define que o jogo é uma atividade fundamental para o desenvolvimento da criança, pois possibilita a construção do conhecimento por meio da ação, experimentação e da resolução de problemas em um contexto motivador.

> O jogo é, portanto, sob as suas duas formas essenciais de exercício sensório-motor e de simbolismo, uma assimilação da real à atividade própria, fornecendo a esta seu alimento necessário e transformando o real em função das necessidades múltiplas do eu. (Piaget 1976, p.159).

Para compreender o jogo dentro do contexto pedagógico, é importante considerar as teorias acerca deste elemento considerando que a aprendizagem pode ocorrer dentro de processos lúdicos e que contribuem para que o aluno possa exercer dentro de regras do jogo suas funções cognitivas de forma a aprender e reter conhecimento. Portanto, no próximo tópico será abordada a aprendizagem baseada em jogos.

2.2 Game-Based Learning (Aprendizagem baseada em jogos) como ferramenta

A discussão sobre práticas pedagógicas inovadoras tem crescido significativamente nas últimas décadas, impulsionada pelas transformações sociais e tecnológicas que impactam diretamente os ambientes de aprendizagem. Nesse contexto, o *Game-Based Learning* (ou aprendizagem baseada em jogos) pode auxiliar a prática pedagógica dos professores, possibilitando um ensino mais dinâmico e atrativo, promovendo engajamento, motivação e participação ativa dos estudantes.

Neste sentido, a inserção de jogos no processo de ensino-aprendizagem configura-se como uma estratégia eficaz para a aplicação de pedagogias construtivistas, estimulando abordagens ativas e participativas tanto na aprendizagem quanto na prática docente (Barradas, 2017). Diversos jogos se fundamentam na resolução de problemas e na formulação de perguntas como eixo de desenvolvimento, oferecendo experiências contextualizadas que impulsionam o aprendizado por meio da prática, do erro, da reflexão e da repetição.

Além disso, os jogos incorporam diferentes recursos voltados para o engajamento e a imersão, características que podem ser aproveitadas em ambientes educacionais. Elementos como cenários estruturados, objetivos claros, desafios graduais, regras bem definidas e sistemas de recompensas, como rankings, conquistas ou aquisição de novas habilidades, são utilizados para manter a motivação dos participantes (Barradas, 2017).

Contudo, embora compartilhe elementos motivacionais semelhantes, o *game-based learning* (ou aprendizagem baseada em jogos) não deve ser confundido com gamificação (*gamification*). O primeiro refere-se à aprendizagem mediada diretamente por jogos, enquanto o segundo diz respeito ao uso de elementos e mecanismos típicos dos jogos em contextos que não são necessariamente lúdicos.

O autor Rezende (2022), estabelece que aprendizagem baseada em jogos (*Game-Based Learning*) busca adotar jogos educativos que possibilitem desenvolver a capacidade de trabalhar em colaboração, discutir estratégias, negociar melhores caminhos e criar outras habilidades, enquanto gamificação (*gamification*), não implica a utilização de jogos completos, mas a incorporação de elementos característicos dos jogos, como pontuação, níveis, recompensas e sistemas de progressão, em contextos educacionais, com a intenção de promover maior engajamento e participação dos estudantes.

Portanto, a aprendizagem baseada em jogos, *Game-Based Learning*, refere-se ao uso de jogos, digitais ou analógicos, como recursos centrais do processo educativo, auxiliando a dinâmica da mediação pedagógica, com a finalidade de promover a construção ativa do conhecimento por meio da interação, experimentação e resolução de problemas.

Do ponto de vista teórico, a aprendizagem baseada em jogos dialoga diretamente com princípios construtivistas, segundo os quais o estudante aprende de forma mais efetiva quando participa ativamente do processo, manipulando informações, testando hipóteses e elaborando significado por meio da ação (Piaget, 1976). Nesse contexto, os jogos tornam-se em ambientes privilegiados de aprendizagem, pois permitem ao aluno experimentar, cometer erros, refletir e tentar novamente, favorecendo a autonomia.

Outro aspecto da aprendizagem baseada em jogos é estimular habilidades cognitivas, como pensamento crítico, cooperação, criatividade, atenção, memória, resolução de problemas e tomada de decisão. Em situações de jogo, o estudante é desafiado a elaborar estratégias, trabalhar coletivamente, lidar com incertezas e desenvolver a autorregulação, uma vez que exige monitoramento constante das ações, análise de resultados e adaptação de comportamentos. Segundo Gallagher (1997, p. 244), “as habilidades adquiridas sob condições agradáveis de aprendizagem geralmente ficam retidas por longos períodos de tempo”. O espaço do jogo é um momento agradável, prazeroso, desafiador, condizente com o universo ativo, dinâmico.

Entretanto, é importante ressaltar que o uso de jogos deve ser fruto de um planejamento pedagógico. Para que a aprendizagem baseada em jogos seja efetiva, o jogo deve ser selecionado ou construído intencionalmente, alinhado aos objetivos de aprendizagem, conteúdos curriculares e avaliação formativa, pois são ferramentas valiosas na educação quando utilizados de forma estratégica e integrada ao currículo, e não como ação isolada ou meramente recreativa. Além disso, é fundamental que os docentes recebam formação adequada para implementá-la de forma ética, inclusiva e eficiente, evitando seu uso como mero recurso estético ou motivacional, mas sim como uma estratégia pedagógica estruturada e fundamentada teoricamente.

> O trabalho com jogos nas aulas de Matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (Smole et al., 2007, p. v).

No contexto da Matemática, tradicionalmente percebida como uma disciplina abstrata e de alto nível de exigência cognitiva, que frequentemente apresenta desafios no processo de ensino-aprendizagem, sobretudo no que diz respeito ao engajamento, à motivação e à superação de obstáculos emocionais como a ansiedade matemática, a aprendizagem baseada em jogos surge como uma estratégia pedagógica, capaz de transformar a relação dos estudantes com o conhecimento matemático, promovendo envolvimento ativo, aprendizagem significativa e maior interação entre pares e com professores.

A aprendizagem da Matemática envolve processos cognitivos complexos, como o raciocínio lógico, a natureza formal dos conceitos, a resolução de problemas e a modelagem. No entanto, grande parte dos estudantes apresenta dificuldades persistentes nessa área, frequentemente associadas à falta de motivação, ao predomínio de metodologias tradicionais excessivamente expositivas e à ausência de conexão entre os conteúdos e a realidade cotidiana, aspecto criticado por D’Ambrosio (2012), ao destacar a necessidade de um ensino mais contextualizado e significativo.

Adicionalmente, esta opção pedagógica favorece a aprendizagem matemática ao utilizar elementos que dialogam diretamente com as características da disciplina, como por exemplo: 1. a progressão em níveis (considerando que a Matemática é uma disciplina cumulativa. A proposta de avançar por níveis, típica dos jogos, proporciona organização e reconhecimento dos progressos individuais, permitindo que o estudante compreenda sua evolução em conceitos como operações, frações, geometria ou resolução de problemas.); 2. o *feedback* é imediato (jogos oferecem respostas rápidas aos erros, algo que é incorporado na gamificação. Isso é particularmente importante na Matemática, onde o *feedback* imediato possibilita autocorreção, favorecendo a aprendizagem contínua) e 3. desafios e resolução de problemas (estimulam o pensamento lógico e a criatividade na busca por soluções. Ao transformar exercícios em missões, enigmas ou competições cooperativas, o professor consegue trabalhar habilidades essenciais com maior engajamento).

> A GBL facilita a aprendizagem ao se fixar no jogo, já que o processo é mais facilmente seguido enquanto os conceitos são assimilados, uma vez que o jogo cria um ambiente virtual que recria situações típicas da realidade (simuladores) e dessa forma os usuários (alunos) aprendem a se desenvolver em um contexto sem riscos. Mas com regras, interatividade e feedback (Conegundes, 2023, p. 3).

Assim, a aprendizagem baseada em jogos constitui uma abordagem promissora para ambientes educativos contemporâneos, pois integra engajamento, interatividade, resolução de problemas e desenvolvimento de habilidades essenciais para a formação crítica e colaborativa e, quando bem planejado, tem potencial para transformar a relação dos estudantes com o processo de aprender, tornando-o mais significativo, dinâmico e motivador.

2.3 O papel dos jogos no processo de ensino-aprendizagem

Usar jogos como ferramenta no ensino de Matemática, principalmente na Geometria Plana, é uma estratégia que se apoia fortemente nas ideias de Jean Piaget (1978) sobre o papel fundamental da brincadeira no desenvolvimento do pensamento. Para Piaget (1978), jogar não é só uma forma de se divertir, mas um momento essencial para construir conhecimento. É por meio do jogo que crianças e jovens conseguem enfrentar situações que exigem organização, planejamento, adaptação, um verdadeiro treino para o cérebro. Enquanto jogam, eles usam o que já sabem e, ao mesmo tempo, constroem novas formas de pensar, resolvendo desafios.

E segundo Piaget (1978), aprender acontece quando o aluno interage ativamente com o que está ao seu redor, absorvendo novas informações e ajustando suas ideias para dar conta dessas novidades. Por isso, o jogo funciona como um espaço perfeito para isso, pois cria situações em que o estudante precisa tomar decisões, imaginar possibilidades, testar suas soluções e modificar suas estratégias. Segundo Piaget (1978, p. 208) a “[...] o jogo constitui o pólo extremo da assimilação do real ao eu, tanto como participante quanto como assimilador, daquela imaginação criadora que permanecerá sendo o motor de todo pensamento ulterior e mesmo da razão”. No ensino médio, isso é ainda mais importante, especialmente na Geometria Plana, já que alguns jogos ajudam o aluno a explorar na prática conceitos como congruência, semelhança e as propriedades das figuras, fugindo do ensino puramente teórico, e criando uma conexão real com o que ele vive.

Nesta fase da vida, quando o adolescente começa a pensar de maneira mais abstrata e lógica, o chamado estágio das operações formais, desenvolver essas habilidades é fundamental. Considerando o pensamento piagetiano, Garcia (2010, p. 51) afirma que na adolescência “O grupo de pares se constituirá como um lugar privilegiado de trocas cognitivas e afetivas, proporcionando ao adolescente o fortalecimento de ideias, valores e sentimentos”. O jogo didático, então, ganha um papel de destaque, porque exige que o estudante siga regras, analise como as figuras se relacionam no espaço e elabore justificativas para suas jogadas. No jogo criado para este trabalho, as cartas apresentam problemas e conceitos geométricos, e o aluno não só enfrenta esses desafios, mas também precisa organizar suas ideias e explicar o raciocínio por trás de cada ação: um exercício valioso para o desenvolvimento do pensamento lógico e matemático.

Mas o valor do jogo vai além do aspecto cognitivo. Piaget (1975) também reforça que ele tem um papel social muito importante. Jogar em grupo faz com que o aluno aprenda a respeitar regras, negociar significados e trabalhar em equipe. Em sala de aula, essa interação social potencializa o aprendizado, pois incentiva os estudantes a compartilhar ideias, argumentar com fundamentos e ouvir as opiniões dos colegas. Na proposta que apresentamos, o papel do juiz e a troca de jogadas entre os participantes criam um ambiente rico, onde o diálogo e o confronto de pensamentos geram aprendizado, tanto individual quanto coletivo.

Portanto, apoiar o uso dos jogos no ensino a partir de Piaget (1975), e de outros pensadores, é reconhecer o que acontece quando a gente age, pensa e interage com os outros. O jogo, longe de ser só uma distração, se transforma numa ponte que conecta a Matemática ao cotidiano dos estudantes, tornando o aprender algo mais concreto, envolvente, significativo e divertido. No ensino da geometria plana, essa abordagem traz clareza aos conceitos e dá mais motivação para o aluno seguir explorando a Matemática de um jeito ativo e prazeroso. Essas metodologias mostram-se valiosas ferramentas de apoio ao ensino de diversas temáticas, ao passo que introduzem e demonstram conceitos antes da apresentação destes em sala de aula, ou auxiliando na fixação do conhecimento (Valente, 2022).

> Em suma, nos dois casos, a assimilação lúdica envolve um número mais elevado de inúrmediários do que anteriormente, desligandose ainda mais da ação do sujeito; daí resulta uma dissociação completa entre o simbolizante e o simbolizado, a qual vai

> encontrar a sua generalização nas duas categorias seguintes de símbolos lúdicos. (Piaget, 1975, p. 160)

2.4 O Jogo como estratégia para desenvolver habilidades

A utilização de jogos no ensino da Geometria Plana no Ensino Médio vai além de ser uma simples ferramenta de motivação. Ela se configura como uma estratégia pedagógica potente para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e matemáticas específicas, alinhando-se a competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A experiência lúdica transforma a aprendizagem de conceitos complexos em uma vivência concreta, onde o aluno mobiliza e integra diversas habilidades. Entre essas habilidades, destacam-se aquelas contempladas no jogo proposto, as quais são apresentadas e relacionadas às competências da BNCC na tabela em anexo.

O jogo desenvolvido dialoga diretamente com as habilidades previstas na BNCC para os Ensinos fundamental e médio em Matemática, sobretudo no eixo da Geometria Plana. Ao abordar conceitos como área, perímetro, propriedades de figuras geométricas (quadrados, circunferências), ângulos complementares e suplementares, além de teoremas fundamentais (Teorema de Pitágoras, tangência, bissetriz interna), a atividade promove a articulação prática com diversas competências elencadas no documento oficial.

Entre elas, destaca-se a habilidade EF09MA16, que orienta o aluno a propor ou participar de ações de medição e cálculo em situações reais, relacionando-se ao uso do jogo para explorar cálculos de área e perímetro. Além disso, as habilidades EF09MA13 e EF09MA14 são contempladas quando o estudante se depara com problemas que envolvem a aplicação do Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos, ou seja, quando há um ângulo de 90 graus.

A habilidade EM13MAT308 é contemplada pela resolução de situações envolvendo relações métricas, como as leis dos senos e dos cossenos, bem como propriedades de congruência e semelhança, que emergem nas justificativas dos movimentos e soluções propostas pelos jogadores. Adicionalmente, a habilidade EF09MA12 é mobilizada ao reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Assim, no momento em que o estudante precisa aplicar a ideia de semelhança entre triângulos, essa habilidade está sendo trabalhada.

Assim, o jogo não apenas promove o aprendizado de conteúdos de Geometria Plana, mas também garante o alinhamento pedagógico com a BNCC, reforçando seu caráter didático ao integrar teoria, prática e ludicidade no processo de ensino-aprendizagem.

Ressalta-se que os exemplos aqui mencionados constituem apenas um recorte das habilidades mobilizadas pelo jogo. Trata-se, portanto, de uma demonstração inicial e parcial das articulações possíveis com a BNCC. Futuramente, será apresentada uma análise detalhada, estabelecendo uma ponte clara entre cada problema proposto pelo jogo e as respectivas habilidades da Base envolvidas no seu desenvolvimento.

2.5 Ensino de Matemática com materiais manipuláveis

Ensinar Matemática, especialmente Geometria, fica muito mais eficaz quando o aluno tem a chance de manusear materiais concretos que o ajudem a ver, tocar e experimentar os conceitos antes de trabalhar com eles de forma abstrata. Sérgio Lorenzato (2006) é um autor que defende bastante essa ideia, afirmando que o contato direto com objetos físicos ajuda a construir o conhecimento matemático de forma mais forte e duradoura. Como ele diz: "[...] para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto" (Lorenzato, 2006, p. 22), e essa frase mostra bem por que é tão importante ligar a experiência prática com a representação simbólica.

Materiais manipuláveis são recursos físicos que o estudante pode pegar nas mãos, explorar e (re)organizar para entender melhor um conceito matemático. Lorenzato (2006) divide esses materiais em dois tipos: estáticos e dinâmicos. Os materiais estáticos não mudam de forma quando o aluno os manuseia, como blocos de madeira, cartolina ou aqueles blocos de encaixe que ficam fixos. Eles ajudam muito a observar, comparar e medir. Já os materiais dinâmicos são aqueles que podem ser transformados na hora, como dobraduras, o geoplano, o tangram ou peças que desmontam e montam de novo. Esses materiais dinâmicos são ótimos para que o aluno faça descobertas, perceba propriedades e estabeleça relações de um jeito mais ativo. Isso é ainda mais importante na Geometria, onde temas como congruência, semelhança e área viram experiências visuais e táteis.

Lorenzato (2006) também ressalta que usar esses materiais pode tomar mais tempo no começo, porque o professor precisa preparar as atividades, orientar os estudantes e dar espaço para que explorem sozinhos. Mas esse tempo investido vale muito a pena! Quando o aluno manipula e experimenta, não só entende o conceito, como também consegue pensar sobre ele, aplicar em situações diferentes e fazer conexões com outras ideias. Essa compreensão mais profunda tende a durar mais, diminuindo aquela necessidade de ficar decorando e revisando somente de forma mecânica.

Outro ponto importante é que o trabalho com materiais manipuláveis ajuda a valorizar o erro como parte do aprendizado. Lorenzato (2006) afirma que o MC (Material Concreto) pode ser um excelente catalisador para o aluno construir o seu saber matemático, dependendo da forma que os conteúdos são conduzidos pelo professor. Quando a criança testa uma hipótese com algo concreto, ela percebe rapidamente quando algo não deu certo e, então, tem a chance de pensar no motivo, tentar de novo e encontrar soluções novas. Esse vai-e-volta é fundamental para desenvolver autonomia, pensamento crítico e persistência. Na Geometria, isso pode ser, por exemplo, montar uma figura que não está correta, identificar o erro e ir ajustando até que ela se adequa.

Além disso, esse tipo de material também incentiva a colaboração entre os alunos. Quando fazem atividades em grupo, eles conversam sobre estratégias, dividem as tarefas, discutem ideias e buscam soluções juntos. Esse ambiente cooperativo ajuda não só no aprendizado, mas também no desenvolvimento de habilidades sociais importantes, como saber se comunicar, respeitar o colega e escutar de verdade. No ensino médio, essas competências são essenciais para formar jovens capazes de argumentar, defender suas opiniões com base em argumentos e respeitar pontos de vista diferentes.

> Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza (Brasil, 2017, p. 10).

Por isso, usar materiais manipuláveis no ensino da Matemática, é muito mais que uma simples técnica: é um jeito de ensinar que unifica observação, experimentação, descoberta e reflexão. Isso permite que o aluno construa o conhecimento matemático de forma que realmente faça sentido para ele e, na Geometria, isso ganha ainda mais força, porque ajuda a transformar conceitos complexos em vivências concretas, facilitando o entendimento, fortalecendo a autonomia e tornando a aprendizagem mais interessante e motivadora.

> O material concreto, quando bem utilizado, pode auxiliar o aluno na construção de conceitos matemáticos. No entanto, é preciso que ele seja manipulado pelo aluno em situações significativas, e não apenas apresentado pelo professor como uma demonstração. Só assim deixará de ser um simples objeto e se tornará um instrumento de aprendizagem. (Lorenzato, 2006, p. 21).

2.6 A Geometria nos ensinos fundamental e médio

De acordo com a BNCC (2018, p. 271), “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”. Assim, a Geometria é uma parte essencial da Matemática nos ensinos fundamental e médio e tem um papel muito importante no desenvolvimento do raciocínio lógico, da percepção do plano, relação e espaço (tanto no plano quanto no volume) e na capacidade de resolver problemas envolvendo formas, medidas e relações, que vai muito além daqueles conceitos, definições e fórmulas. A Geometria oferece aos alunos a chance de entender melhor o espaço ao seu redor e de relacioná-lo com situações da vida real e do cotidiano.

Nesse sentido, o ensino da Geometria oferece um campo rico para o desenvolvimento intelectual do aluno, especialmente no que se refere à construção do raciocínio lógico. Sob a perspectiva piagetiana, esse processo ocorre por meio da passagem progressiva das ações sobre objetos concretos para a elaboração de operações mentais mais complexas, possibilitando ao estudante avançar do estágio das operações concretas para o das operações formais. Nesse contexto, não se dá de forma imediata, mas como resultado da construção gradual de estruturas cognitivas que permitem ao sujeito organizar, relacionar e sistematizar conceitos matemáticos. Nessa perspectiva Pais (1996, p.66) defende que “o trabalho com esses elementos experimentais constitui, principalmente para o aluno de primeiro grau, um recurso necessário à transposição de um nível pré-categorial para o mundo das ideias abstratas”, evidenciando a importância dos recursos concretos na construção progressiva do pensamento matemático.

Quando o professor trabalha temas como figuras planas, ângulos, áreas, perímetros e relações métricas, está ajudando o aluno a desenvolver habilidades que não servem apenas para a escola, mas que também podem ser aplicadas em situações práticas e em áreas avançadas do conhecimento científico e tecnológico. Isso porque a Geometria incentiva o pensar, o olhar para o mundo de maneira mais crítica e estruturada, e a resolver desafios variados.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece essa importância, destacando que o estudo da Geometria nos ensinos fundamental e médio precisa ir além de decorar propriedades e fórmulas prontas. O foco deve estar na exploração dos conceitos, na argumentação e na resolução de problemas reais, algo que ajuda o aluno a construir um entendimento verdadeiro e significativo. Porém, sabemos que a realidade nem sempre é fácil, muitas vezes, os estudantes encontram dificuldades principalmente na Geometria Plana.

Essas dificuldades podem ter várias causas. Entre elas, está o fato de a Matemática ser ensinada com exigência de raciocínio dedutivo. Muitos conceitos, como semelhança e congruência, são apresentados só com definições formais e exemplos prontos, sem que as crianças e jovens tenham a chance de experimentar, investigar e construir esses conhecimentos por si mesmos. Teoremas importantes, como o de Pitágoras ou aqueles que falam sobre ângulos em polígonos, dão a impressão de serem regras decoradas, em vez de descobertas feitas pelos próprios estudantes, o que limita muito a compreensão e o aprendizado real.

> A Matemática é diferente das outras disciplinas quando focamos a especificidade de sua forma e de seu conteúdo. Seu saber científico depende do rigor do raciocínio, validado pela precisão, clareza e estética, por um avançar complexo da abstração. Esse aspecto muitas vezes pode mostrar-se fator significativo nas dificuldades apresentadas para sua aprendizagem (Suleiman, 2022, p. 2).

É nesse contexto que os jogos didáticos aparecem como uma solução muito interessante e promissora. Ao trazer elementos lúdicos para o ensino, os jogos criam um ambiente onde o aluno pode testar suas ideias, fazer hipóteses, errar e corrigir suas estratégias, tudo isso de forma ativa e envolvente. Jogos que desafiam o raciocínio espacial, que pedem a identificação de propriedades ou a aplicação de teoremas, acabam despertando a curiosidade e a motivação, além de ajudar a desenvolver habilidades fundamentais como a análise, a síntese e a argumentação matemática.

2.7 A importância do jogo no ensino da Geometria Plana no Ensino Médio

A Geometria Plana é um dos eixos estruturantes da Matemática escolar, pois possibilita ao estudante compreender e analisar propriedades de figuras, relações espaciais e medidas que fazem parte da realidade cotidiana. Apesar de sua relevância, esse campo da Matemática muitas vezes é percebido pelos alunos como abstrato e descontextualizado, resultando em dificuldades de compreensão, memorização mecânica de fórmulas e perda de interesse. Essa resistência é ainda mais visível no Ensino Médio, quando os conteúdos geométricos exigem maior capacidade da complexidade das relações entre propriedades.

Outro ponto importante dos jogos é sua capacidade de integrar vários conceitos ao mesmo tempo, de maneira dinâmica. Em uma única atividade lúdica, é possível trabalhar semelhança, congruência, classificação de figuras e raciocínio espacial juntos, que fazem parte do desenvolvimento cognitivo. Como o jogo costuma ser uma atividade social, ele favorece o trabalho em grupo, a comunicação das ideias e a troca entre os alunos. Assim, os estudantes aprendem a defender seus pensamentos, ouvir o ponto de vista dos colegas e desenvolver a cooperação e a escuta ativa, servindo para uma integração num mundo social.

Por tudo isso, especificamente, a Geometria no ensino fundamental e médio não deve ser vista apenas como uma disciplina obrigatória, mas como uma área estratégica para o desenvolvimento de habilidades já mencionadas anteriormente. Usar metodologias ativas, especialmente jogos didáticos, pode ser um caminho eficiente para superar as dificuldades comuns no ensino da Geometria, tornando o aprendizado mais acessível, interessante para quem está estudando. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, “os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.” (Brasil, 1998, p. 46)

2.8 A legislação educacional e as diretrizes para o ensino da Matemática

O ensino de Matemática no Brasil não se estrutura apenas pela tradição pedagógica dos professores ou pelas práticas que historicamente se consolidaram em sala de aula. Ele está diretamente vinculado às legislações e documentos normativos que orientam a Educação Básica em nível nacional. Esses documentos representam consensos construídos ao longo de décadas de debates acadêmicos, políticos e pedagógicos, e têm como objetivo estabelecer finalidades, diretrizes e princípios que norteiam a formação dos estudantes.

Entre os principais marcos legais que organizam a educação no Brasil, destacam-se a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, 1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM, 2006) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017). Cada um desses documentos apresenta contribuições específicas para a compreensão do ensino de Matemática e, em especial, para a reflexão sobre metodologias inovadoras que contemplem o lúdico, os jogos e outras práticas pedagógicas.

2.8.1 A LDBEN e a formação integral do estudante

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996), conhecida como LDBEN, é considerada o marco fundamental da organização educacional brasileira. Em sua redação, a LDBEN estabelece como finalidade da Educação Básica a formação integral do estudante, preparando-o para o exercício da cidadania, para o mundo do trabalho e para o desenvolvimento de sua autonomia intelectual, “o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico” (Brasil, 1996).

No caso específico do Ensino Médio, o Artigo 35 da LDBEN define objetivos claros, como o aprimoramento do educando como pessoa humana, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. Tais finalidades revelam que o ensino não pode restringir-se à transmissão de conteúdos descontextualizados, mas precisa proporcionar experiências significativas que desenvolvam competências cognitivas, sociais e culturais. Nesse ponto, o uso de metodologias diferenciadas, como jogos didáticos, atividades lúdicas e recursos tecnológicos, aparece como possibilidade concreta de tornar a Matemática mais significativa e formativa.

2.8.2 Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Publicados a partir de 1997 e 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram elaborados para orientar a prática docente em nível nacional, garantindo certa unidade pedagógica ao mesmo tempo em que respeitam a diversidade regional do país. No caso da Matemática, os PCN enfatizam que a disciplina deve ser compreendida como uma forma de interpretar o mundo e resolver problemas, e não apenas como um conjunto de técnicas de cálculo. Cabe destacar que muitos dos professores de Matemática em atuação hoje foram alunos formados dentro da vigência dos PCNs, o que evidencia o impacto dessa política curricular tanto na formação de professores quanto nas práticas pedagógicas vigentes.

No que diz respeito aos jogos e à ludicidade, os PCN são explícitos ao reconhecer o potencial pedagógico dessas práticas. Para os autores do documento, “[…] o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um ‘fazer sem obrigação externa e imposta’” (Brasil, 1998, p. 35). Essa afirmação demonstra que, ainda no final da década de 1990, já havia um entendimento de que os jogos poderiam ser incorporados ao ensino da Matemática como recurso que alia prazer e aprendizagem, ao mesmo tempo em que desenvolve competências cognitivas e sociais.

2.8.3 As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)

As OCEM, publicadas em 2006, foram elaboradas com o objetivo de detalhar e aprofundar as orientações para a Educação Básica, especialmente no Ensino Médio. No campo da Matemática, as OCEM destacam a importância de desenvolver competências relacionadas à resolução de problemas, à formulação de hipóteses e à argumentação lógica.

O documento enfatiza que a metodologia adotada pelo professor deve sempre ter um caráter formativo, valorizando o raciocínio matemático e não apenas a reprodução mecânica de técnicas. Segundo a OCEM: “É importante, para o exercício da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões necessárias à sua resolução” (Brasil, 2006, p. 84).

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (Brasil, 2006, p. 69).

Essa orientação dialoga diretamente com o uso de jogos e atividades lúdicas, uma vez que tais práticas exigem do estudante exatamente essas habilidades: analisar situações, elaborar hipóteses, tomar decisões e justificar suas escolhas.

2.8.4 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A mais recente das orientações normativas é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017 para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental e em 2018 para o Ensino Médio. A BNCC representa um avanço no sentido de definir, de forma clara, as competências e habilidades que todos os estudantes brasileiros têm direito de desenvolver ao longo da Educação Básica.

No caso da Matemática, a BNCC propõe como eixo central o letramento matemático, que vai além da simples execução de cálculos. Trata-se da capacidade de interpretar, modelar, comunicar e resolver situações-problema em contextos diversos. Essa perspectiva coloca a Matemática como ferramenta para a compreensão do mundo e para a atuação cidadã.

Em relação ao Ensino Médio, a BNCC dá ênfase à resolução de problemas e à aplicação de conceitos em situações concretas. Destaca-se que o ensino deve desenvolver competências como raciocínio lógico, argumentação, criatividade, comunicação e colaboração. Essas orientações abrem espaço para metodologias ativas, como projetos, investigações, uso de tecnologias e, evidentemente, jogos pedagógicos.

A Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC) (Brasil, 2017) dá ênfase ao letramento matemático e à resolução de situações-problema como macro competência. Conforme destaca, o que deve ser priorizado em Matemática é o desenvolvimento de competências. A Base determina os conteúdos essenciais que devem ser ensinados em Matemática, mas não define o método e a forma que vão levar, de fato, à aprendizagem. O progresso das habilidades e competências pode ser facilitado por meio de atividades que “[...] raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos [...]” (Brasil, 2017, p. 264).

2.8.5 Síntese e implicações para o ensino da Matemática

Ao analisarmos os quatro documentos: LDBEN, PCN, OCEM e BNCC. É possível perceber uma convergência clara: todos apontam para a necessidade de um ensino de Matemática que vá além da transmissão de conteúdos e fórmulas, valorizando a formação integral do estudante, o desenvolvimento do pensamento crítico e o exercício da cidadania.

Nesse sentido, a legislação brasileira abre espaço para a incorporação de metodologias inovadoras, entre elas os jogos e demais recursos lúdicos, como instrumentos pedagógicos capazes de articular prazer e aprendizagem, motivação e raciocínio, criatividade e rigor. Como afirma Borin (1998), o valor educacional dos jogos está justamente no fato de que eles estimulam o raciocínio dedutivo e a elaboração de hipóteses, habilidades centrais para o pensamento matemático, pois “aparece com maior clareza na escolha de lances que se baseia tanto nas jogadas certas quanto nas erradas e que obriga o jogador a elaborar e a reelaborar suas hipóteses a todo momento” (Borin, 1998, p. 9).

Portanto, ao propor o uso de jogos no ensino da Geometria Plana, esta pesquisa encontra respaldo não apenas na literatura acadêmica e nas experiências práticas já relatadas, mas também na própria legislação educacional brasileira, que orienta a escola a buscar estratégias inovadoras para formar cidadãos críticos, autônomos e preparados para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

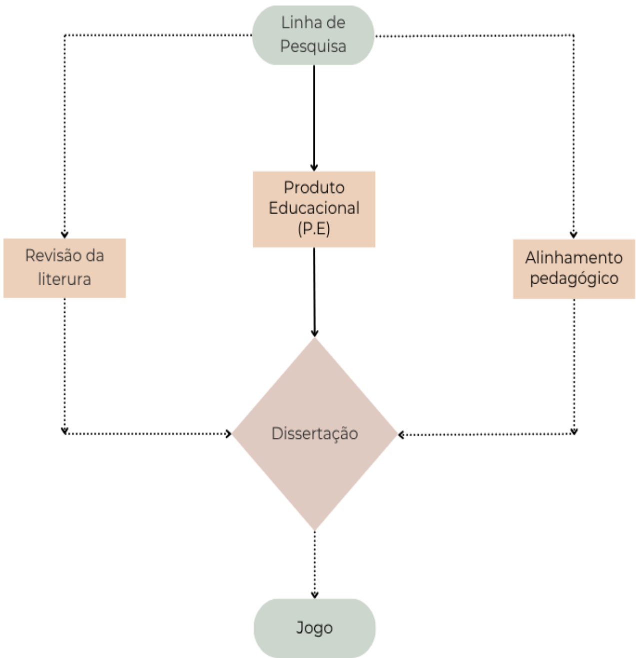
3 METODOLOGIA

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo de natureza teórica e exploratória, pois se apoia em referenciais já existentes sobre o uso do conceito de aprendizado baseado em jogos, com a proposta do uso de jogos didáticos no ensino de Matemática, em especial no Ensino Médio. A abordagem adotada privilegia a interpretação e a compreensão de conceitos, servindo como base para a construção de um produto educacional, neste caso, um jogo manual, portanto analógico. Diferente de pesquisas quantitativas, que buscam medir fenômenos a partir de dados numéricos e estatísticos, o presente trabalho valoriza as ideias e os significados envolvidos no processo de ensino-aprendizagem (Lakatos; Marconi, 2005).

A pesquisa foi desenvolvida em três etapas principais: revisão da literatura, construção do produto educacional e alinhamento pedagógico.

A Figura 1 a seguir, sintetiza os elementos que orientam a elaboração da dissertação.

Figura 1 – Fluxo da dissertação



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Observação: a linha principal e vertical do trabalho é o Produto Educacional (jogo), que constitui o centro da pesquisa. No entanto, sua elaboração exige o embasamento proveniente da revisão da literatura e o alinhamento pedagógico com a BNCC, aspectos que estão destacados no diagrama.

3.1 Revisão da literatura

O tema desta pesquisa fundamenta-se em uma revisão de literatura voltada ao uso de jogos na Educação Matemática, especialmente no Ensino Médio, conforme apresentado na Fundamentação Teórica. Entre os trabalhos consultados, destacam-se o artigo de Suleiman

(2024), a dissertação de Domingues (2023) e o estudo de Rony Freitas (2021). Também foram analisadas as contribuições de autores clássicos que discutem o papel dos jogos no ensino da Matemática, como Piaget (1978), Kishimoto (2003) e Lorenzato (2006), além de pesquisas mais recentes sobre metodologias lúdicas aplicadas ao Ensino Médio e também conceitos sobre Aprendizagem baseada em jogos, que oferecem suporte teórico e metodológico à presente investigação. Ressalta-se que esta revisão possui caráter introdutório, não tendo como objetivo o aprofundamento exaustivo do tema.

Suleiman (2024), em artigo publicado na Revista Educação Pública: "O jogo e a Educação Matemática: possibilidades pedagógicas no Ensino Médio", apresenta uma revisão bibliográfica sobre as possibilidades pedagógicas do uso de jogos no Ensino Médio. A autora discute contribuições de pensadores clássicos como Piaget (1978), Kishimoto (2003), que, cada um a seu modo, defendem a importância do jogo (lúdico) no desenvolvimento humano e no processo de raciocínio geométrico. O artigo evidencia que a utilização de recursos lúdicos, inclusive por meio da gamificação, pode favorecer o engajamento dos estudantes e tornar a Matemática mais atrativa.

Já a dissertação de Domingues (2023), intitulada Aprendizagem em Geometria por meio do jogo de tabuleiro "Trilha Geométrica", investigou a Geometria Espacial por meio de um jogo de tabuleiro aplicado no Ensino Médio. Embora seu foco seja a Geometria Espacial, os fundamentos teóricos e pedagógicos apresentados se aplicam também à Geometria Plana, sobretudo no que se refere ao papel do jogo como recurso didático. A autora se apoia em documentos normativos como a LDBEN, a BNCC, os PCN e as OCEM, além de autor como Piaget (1978). Destaca ainda, com base em Lorenzato (2006), a necessidade de intervenção do professor como mediador do processo lúdico em sala de aula e o cumprimento das regras estabelecidas.

As informações apresentadas evidenciam que os jogos, quando bem estruturados e mediados, podem favorecer a mobilização de conhecimento e despertar maior interesse dos alunos pela Matemática. No caso específico deste trabalho, o jogo foi desenvolvido incorporando problemas matemáticos coletados e adaptados de diversas fontes, incluindo recursos educacionais disponíveis em plataformas digitais. As regras e a dinâmica do jogo foram elaboradas especialmente para atender ao propósito desta pesquisa, que busca unir o caráter lúdico à construção do raciocínio geométrico no contexto da Geometria Plana.

3.2 Construção do produto educacional

A elaboração do jogo foi estruturada como um recurso didático voltado ao ensino dos conteúdos de Geometria Plana. Sua concepção baseou-se na fundamentação teórica e pedagógica discutida ao longo do trabalho, bem como na preocupação em atender aos requisitos estabelecidos pela CAPES para produtos educacionais desenvolvidos em Programas de Pós-Graduação Profissionais.

Conforme orienta Rony Freitas (2021) no artigo “Produtos Educacionais na Área de Ensino da CAPES: o que há além da forma?”, publicado na Revista Educação Profissional e Tecnológica (EPT), a elaboração de um produto educacional deve contemplar não apenas o formato final, mas também aspectos que assegurem sua relevância pedagógica.

A partir dessa perspectiva, de acordo com o artigo de Freitas (2021), o recurso educacional desenvolvido foi um jogo de cartas voltado ao ensino de Geometria Plana, construído com base na necessidade de tornar o aprendizado/retomada mais significativo e acessível aos estudantes. Sua elaboração partiu da seleção de conceitos essenciais da Geometria, como teoremas, definições e propriedades, organizados em cartas que desafiam os alunos a argumentar, justificar e aplicar o raciocínio matemático. O jogo foi estruturado para promover a participação ativa dos estudantes, por meio de interações que valorizam a comunicação, o trabalho em grupo e a defesa de ideias. Além disso, sua construção foi fundamentada em referenciais teóricos da Educação Matemática e em documentos normativos como BNCC, PCN e LDB, assegurando coerência com as diretrizes educacionais vigentes. A estrutura modular e adaptável do jogo permitem que professores o ajuste a diferentes contextos de sala de aula, sem necessidade de recursos complexos, o que reforça seu potencial como ferramenta prática e replicável para o ensino.

3.2.1 Projeto de pesquisa

Todo trabalho científico parte de uma questão que orienta o desenvolvimento da investigação e delimita o foco da análise. No caso desta pesquisa, o problema foi definido a partir das discussões teóricas sobre o ensino da Geometria Plana e das possibilidades pedagógicas do uso de jogos didáticos como recurso de mobilização de conhecimento.

Assim, formula-se a seguinte questão norteadora:

3.2.2.1 Problema de pesquisa

Como o jogo de cartas elaborado nesta pesquisa pode se constituir em uma ferramenta efetiva para o desenvolvimento das habilidades de Geometria Plana no Ensino Médio?

Com base na fundamentação teórica mencionada anteriormente, compreende-se que o jogo de cartas desenvolvido nesta pesquisa pode se constituir em uma ferramenta didática eficaz para o ensino de Geometria Plana no Ensino Médio, ao promover um raciocínio geométrico ativo, participativa e significativa. Autores como Huizinga (1971), Kishimoto (2003), Lorenzato (2006) destacam que o jogo, quando inserido em contextos educativos, estimula a interação social, o raciocínio lógico e a construção de significados, aspectos fundamentais para o desenvolvimento cognitivo do estudante.

No contexto da Geometria Plana, o uso de jogos permite que o aluno vivencie conceitos matemáticos de forma concreta e contextualizada, o que favorece a visualização de formas, propriedades e relações. A dinâmica competitiva e cooperativa do jogo estimula a participação ativa, possibilitando que o professor atue como mediador do conhecimento, conforme conduz a abordagem social.

Além disso, o produto está alinhado às competências gerais da BNCC, especialmente àquelas que envolvem o pensamento científico, crítico e criativo e a resolução de problemas por meio da argumentação matemática.

E esse questionamento dialoga com a preocupação de D'Ambrosio (2001, p. 15), ao afirmar que "o grande desafio que nós, educadores matemáticos, encontramos é tornar a Matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje". Nesse sentido, busca-se, por meio de um recurso lúdico, oferecer um estímulo prazeroso que, ao mesmo tempo em que diverte, desperte o interesse dos estudantes pela Geometria, contribuindo para superar os obstáculos frequentemente associados à aprendizagem desse campo da Matemática favorecendo o desenvolvimento das habilidades cognitivas e socioemocionais previstas no currículo.

Considerando o problema de pesquisa proposto e as discussões apresentadas na fundamentação teórica, foram elaboradas as seguintes hipóteses, que orientam a investigação sobre a aplicação do jogo de cartas.

3.2.2.2 Hipótese(s)

Considerando o problema de pesquisa proposto e as discussões apresentadas na fundamentação teórica, foram elaboradas algumas hipóteses. Ressalta-se que, embora a aplicação do jogo com alunos seja uma simulação de uma situação real, as hipóteses aqui formuladas têm caráter prospectivo e encontram-se fundamentadas nos referenciais teóricos. Tais hipóteses orientaram a ideia do produto educacional e podem ser testadas por outros professores-pesquisadores.

Se os alunos forem expostos ao jogo de cartas de Geometria Plana desenvolvido nesta pesquisa, então espera-se que:

a) O recurso lúdico possa atuar como ferramenta de apoio ao professor, permitindo identificar dificuldades e potencialidades dos alunos no processo de mobilização de conhecimento da Geometria;
b) O uso do jogo de cartas didático contribui para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e raciocínio geométrico, auxiliando os estudantes a interpretar propriedades e relações entre elementos das figuras;
c) A aplicação do jogo em sala de aula torna o processo de retomada da Geometria Plana mais atrativo e prazeroso, favorecendo o interesse dos alunos pela disciplina;
d) O jogo possibilita que os estudantes construam estratégias de resolução de problemas geométricos, priorizando a lógica dedutiva e argumentação matemática.

A partir do problema de pesquisa e das hipóteses apresentadas, definiram-se os seguintes objetivos, que orientam o desenvolvimento e a aplicação do jogo.

3.2.2.3 Objetivos

Objetivo Geral:

Desenvolver um jogo didático de aplicação, voltado ao Ensino Médio, estruturado para retomar conteúdos essenciais de Geometria Plana e concebido com potencial avaliativo, especialmente para subsidiar o professor na análise da argumentação matemática dos estudantes, alinhando-se às habilidades da BNCC e aos princípios da Educação Matemática.

Objetivos Específicos:

a) Definir regras, procedimentos, tipos de cartas e elementos conceituais que constituem o jogo, assegurando o raciocínio geométrico e avaliação;
b) Retomar propriedades, relações métricas, critérios de semelhança, congruência e leis trigonométricas;
c) Caracterizar o jogo como um recurso didático com potencial avaliativo, apresentando possibilidades de uso pelo professor na interpretação das estratégias e justificativas dos estudantes, sem realizar aplicação prática como prova escrita;

d) Contribuir com a construção situações-problema de desafios que possam favorecer, em potencial, a argumentação matemática dos estudantes em geometria plana escolar.

3.2.2.4 Justificativa

A proposta de desenvolver um jogo de cartas para o ensino de Geometria Plana no Ensino Médio se justifica por várias razões de ordem teórica e prática, que apontam tanto para demandas da realidade escolar quanto para melhoria na Educação Matemática. A Geometria é frequentemente apontada como uma disciplina de elevada dificuldade para muitos estudantes, e tem sido trabalhada com distanciamento entre representação e conceito. Conforme Rigonatto (s.d., n.p.), “sabemos que a Geometria Plana trata de uma parte muito abstrata da Matemática e de difícil compreensão para crianças e até mesmo adolescentes nas séries iniciais, pois sua capacidade de abstração ainda não se encontra bem amadurecida.”

Esse cenário contribui para o distanciamento e a falta de engajamento dos alunos com a Matemática. Ao oferecer um recurso lúdico que privilegie o pensamento geométrico, em vez da mera construção gráfica, espera-se promover uma mudança de atitude, tornando a Geometria mais acessível e atrativa, especialmente para estudantes que apresentam maiores dificuldades na disciplina. Além disso, por estar alinhado a habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como EF09MA13, EF09MA16 e EM13MAT308, entre outras, este trabalho pode impactar positivamente a prática docente e a experiência de mobilização de conhecimento em salas de aula reais.

Entre as contribuições esperadas, considera-se que a pesquisa possa fornecer evidências sobre como um jogo de cartas didático pode facilitar o diagnóstico das dificuldades e potencialidades dos alunos, servindo como instrumento de apoio ao professor. Como citam os Parâmetros Curriculares de Matemática:

> Mudanças na definição de objetivos para o ensino fundamental, na maneira de conceber a aprendizagem, na interpretação e na abordagem dos conteúdos matemáticos implicam repensar sobre as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia, num trabalho que inclui uma variedade de situações de aprendizagem, como a resolução de problemas, o trabalho com jogos, o uso de recursos tecnológicos, entre outros. (Brasil, 1997, p. 41).

Adicionalmente, espera-se favorecer o desenvolvimento de habilidades cognitivas centrais da Geometria, como conceitos geométricos, interpretação de propriedades e planejamento de solução, conforme previsto nos documentos curriculares da BNCC, como EF09MA07 e EF09MA15. Além disso, o jogo pode proporcionar aos alunos uma experiência de desenvolvimento de estratégias mais motivadora, contribuindo para elevar o interesse pela Matemática em geral. Essas contribuições podem servir como subsídio para professores, gestores e demais pesquisadores que busquem diversificar metodologias de ensino da Geometria ou integrar jogos e recursos lúdicos ao ensino regular.

A literatura de Educação Matemática reconhece o uso de jogos como uma estratégia poderosa, mas evidencia lacunas, deficiências ou pontos que não estão sendo bem trabalhados no ensino ou na compreensão da Geometria Plana, especialmente em estudos que investiguem aspectos mais específicos, e ainda mais quando o foco está na interpretação de propriedades, mais do que na construção gráfica. Lorenzato (1995, p.3) confirma isso quando diz que "o ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desvairador" e que "no Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula."

Alguns trabalhos concentram-se no uso de jogos para temas mais gerais ou introdutórios, mas poucos exploram o papel de um jogo no desenvolvimento de habilidades cognitivas relacionadas ao raciocínio dedutivo e ao planejamento de soluções em Geometria. Essa constatação indica que existe espaço para aprofundamento e inovação, especialmente no contexto do Ensino Médio brasileiro.

Ao propor um recurso concreto, como um jogo de cartas, esta pesquisa apresentou o potencial de contribuir para a transformação das práticas pedagógicas, uma vez que professores poderão incorporar uma ferramenta diferenciada em suas aulas e adaptá-la conforme a realidade de suas turmas.

3.3 Alinhamento pedagógico

Durante o levantamento das publicações, foram inicialmente identificados cerca de 30 problemas de Geometria Plana. Desses, foram selecionados 12 que se destacavam pela clareza conceitual, pela possibilidade de múltiplas estratégias de resolução e por envolverem conteúdos essenciais, como relações métricas, semelhança, congruência, propriedades de triângulos e o teorema de Pitágoras, entre outros.

A elaboração das cartas laranjas, responsáveis por apresentar esses problemas no jogo, foi realizada de forma cuidadosa e intencional. As questões selecionadas têm como base a Geometria Euclidiana Plana e seguem o estilo de problemas presentes em competições matemáticas, como olimpíadas, priorizando situações que exigem raciocínio lógico-dedutivo e o uso de construções auxiliares. A seleção dos problemas considerou seu potencial didático, especialmente no que se refere ao desenvolvimento da intuição geométrica e à articulação entre diferentes conceitos, indo além da simples aplicação de fórmulas.

Após a seleção inicial, cada problema foi cuidadosamente reformulado para se adequar ao formato do jogo, mantendo-se a essência do conteúdo, mas adaptando o enunciado e redesenhando as figuras no Geogebra (plataforma computacional de geometria). Esse processo garantiu que os problemas se tornassem mais acessíveis aos estudantes, sem perder sua correção matemática. Assim, a escolha não foi feita por meio de critérios estatísticos, mas com base no valor pedagógico e na relevância didática de cada questão.

Para alinhar o jogo aos objetivos curriculares da Educação Básica, realizou-se a associação de cada problema às habilidades correspondentes da BNCC. Nessa análise, considerou-se não apenas o contexto pedagógico geral do jogo, mas também as habilidades diretamente mobilizadas durante a resolução de cada problema. Dessa forma, a tabela a seguir apresenta, de maneira organizada, os códigos das habilidades envolvidos em cada situação proposta (problema), relacionando como o jogo contribui efetivamente para o desenvolvimento das competências previstas no documento oficial.

Para complementar essa relação, o detalhamento de cada código, com sua descrição completa e significado pedagógico, encontra-se disponível no anexo, permitindo uma compreensão mais profunda da conexão entre os problemas apresentados e as habilidades da BNCC.

Tabela 1 - Correspondência entre o problema e o código da habilidade - Carta Laranja

# Problema	Problema	Código das Habilidades
1	Determine a área do triângulo ABC	EF06MA24, EF06MA29, EF07MA27, EF08MA17, EF08MA19, EF09MA16, EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT506
2	Determine o valor do segmento AD=x	EF09MA13, EM13MAT105, EM13MAT308
3	Determine o valor do raio R da circunferência	EF06MA29, EF07MA28, EF07MA32, EF07MA33, EF08MA14, EF09MA13, EF09MA14, EM13MAT308
4	Calcule a área do quadrado ABCD	EF06MA25, EF06MA26, EF06MA27, EF06MA29, EF07MA23, EF07MA28, EF07MA31, EF07MA32, EF08MA14, EF09MA12, EF09MA13, EF09MA14,

		EM13MAT201, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT505
5	Calcule o valor do segmento CD, indicado por X	EF08MA14, EF09MA13, EF09MA14, EM13MAT308
6	Calcule a área do triângulo ABC, sendo AB=BC	EF06MA24, EF06MA25, EF06MA26, EF06MA27, EF07MA31, , EF08MA19, EF09MA12, EF09MA13, EF09MA14, EM13MAT307, EM13MAT308
7	Determine a medida do ângulo OBC	EF06MA25, EF06MA26, EF07MA23, EF07MA27, EF09MA11, EM13MAT509
8	Descubra o valor de x, que representa o lado AC	EF09MA13, EF09MA14, EM13MAT308
9	Qual é o valor do segmento OA	EF06MA25, EF06MA26, EF06MA27, EF07MA23, EM13MAT308
10	Calcule o raio da circunferência (OA = OB)	EF06MA25, EF06MA26, EF06MA27, EF07MA23, EM13MAT308
11	Calcule o valor de X (segmento CE)	EF07MA22, EF07MA33, EF09MA13, EM13MAT308
12	Calcule a área do quadrilátero ABCO	EF06MA20, EF06MA29, EF07MA25, EF07MA26, EF07MA27, EF07MA31, EF07MA32, EF08MA14, EF08MA19, EF09MA12, EF09MA13, EM13MAT201, EM13MAT307, EM13MAT309, EM13MAT308

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Conforme apresentado na Tabela, os problemas propostos mobilizam um conjunto de 31 habilidades da BNCC, distribuídas entre o Ensino Fundamental (anos finais) e o Ensino Médio. Embora envolvam ambos níveis, o enfoque desta pesquisa recai sobre o Ensino Médio, pois os problemas apresentam um nível mais elevado de complexidade e exigem raciocínios geométricos e matemáticos compatíveis com esse público.

As habilidades específicas do Ensino Médio foram previamente mencionadas na Fundamentação Teórica, onde foram comentadas de forma introdutória, oferecendo uma breve explicação sobre sua correspondência com a BNCC. Nesta seção, o foco desloca-se para a relação direta entre tais habilidades e os problemas apresentados no jogo, destacando quantas e quais competências são mobilizadas em cada situação.

Outro ponto relevante é que, à medida que a resolução de um problema exige mais de dois passos ou etapas, o que implica a mobilização simultânea de diversas habilidades, o grau de complexidade aumenta de forma expressiva, caracterizando como um problema de nível elevado e mais desafiador para o estudante.

4 PRODUTO EDUCACIONAL

Temos a intenção de construir uma narrativa fictícia que represente a dinâmica do jogo dentro do contexto da proposta de aula. A ideia é apresentar uma simulação narrativa das jogadas, das interações e das possibilidades de ação dos estudantes, utilizando detalhes imaginativos como instrumentos de reflexão pedagógica.

A defesa da presença de elementos fictícios e narrativos está na compreensão de que tais recursos ampliam a capacidade de visualização, engajamento e análise das situações educacionais, permitindo que o professor ilustre processos, decisões e estratégias de utilização de conhecimentos que nem sempre aparecem de forma explícita no cotidiano. Dessa forma, a narrativa funciona como um recurso metodológico, capaz de tornar visíveis conceitos, comportamentos, dificuldades e avanços esperados durante a aplicação do produto educacional.

Assim, o uso de uma narrativa com elementos ficcionais apoia a abordagem pedagógica baseada em jogos, reforçando que aspectos simulados podem contribuir para:

- demonstrar possíveis caminhos e tomadas de decisão dos estudantes;
- antecipar situações didáticas relevantes;
- promover interpretações reflexivas sobre o funcionamento do jogo;
- justificar a pertinência da atividade dentro de um contexto educacional real.

> Este artigo apresenta uma reflexão sobre a inserção da ficção científica no ensino de Ciências, no qual buscamos identificar como a ficção científica incorpora elementos na estrutura conceitual dos educandos partindo do pressuposto de que teria um papel de desencadeadora e/ou organizadora da aprendizagem. (Gomes-Maluf e Souza, 2008, p. 1).

Segue o detalhamento:

4.1 Simulação professor-jogo

O professor leciona para uma turma do Ensino Médio nas últimas aulas de sexta-feira. Observa-se que essa realidade pode ocorrer tanto no período da manhã (escola regular), quanto à tarde ou após as 19h, em escolas PEI. Por ser o encerramento da semana e, ainda, por se tratar da disciplina de Matemática, os alunos demonstram baixo interesse e pouca participação nas atividades.

Diante disso, o professor busca estratégias para envolver os estudantes e promover um ambiente mais acolhedor e participativo. Ele passa a considerar a utilização de jogos didáticos, especialmente relacionados ao conteúdo de geometria, como uma alternativa metodológica capaz de despertar engajamento. Assim como defende Julia Borin, o professor compreende a importância de tentar resgatar estudantes com bloqueios na área da Matemática: "Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática [...]" (Borin, 1998, p. 9). Ao mesmo tempo, mantém-se atento ao desafio proposto por D'Ambrosio (2001) ao refletir sobre o papel do educador: "O grande desafio que nós, educadores matemáticos, encontramos é tornar a Matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje" (D'Ambrosio, 2001, p. 15).

O professor já vinha trabalhando conteúdos de geometria plana e espacial durante algumas semanas. Percebendo que os alunos necessitavam de uma retomada significativa dos conceitos e, simultaneamente, de uma experiência menos tradicional, decide transformar a próxima avaliação em um momento lúdico, utilizando um jogo como instrumento pedagógico. A intenção é tornar a aula mais prazerosa, ao mesmo tempo em que avalia a argumentação matemática de forma dinâmica.

Tal escolha é sustentada pelas orientações das OCEM, que reconhecem a legitimidade dos jogos como ferramenta avaliativa: "[...]de jogos que permitam ao professor avaliar o desenvolvimento da consciência crítica e a condição argumentativa dos alunos, sua formação ética e suas posições quanto aos valores pessoais e sociais" (Brasil, 2006, p. 41). Assim, o professor entende que é possível realizar uma avaliação séria, porém leve, baseada em interação, comunicação e raciocínio, sem recorrer necessariamente a atividades formais ou exaustivas.

Nesse momento, o professor se lembra de um jogo que havia desenvolvido anteriormente, durante seu curso de mestrado, o Jogo de Geometria Plana, e decide aplicá-lo. Ele reconhece que essa escolha oferece significados importantes para os estudantes, pois o jogo proporciona experiências que envolvem sentido e valoração, conforme destacam Macedo et al. (2000), ao afirmarem que o uso de jogos possibilita vivências que se tornam significativas para os alunos.

4.2 Turma: 3º ano do Ensino Médio – Sala A

Na sexta-feira, durante suas últimas aulas do dia, o professor encontra uma turma composta por 20 alunos, dos quais aproximadamente 16 estão presentes com regularidade. Considerando a heterogeneidade da sala e a necessidade de manter a atenção dos estudantes no final do expediente, o professor opta por dividir a turma em dois grandes blocos de oito alunos.

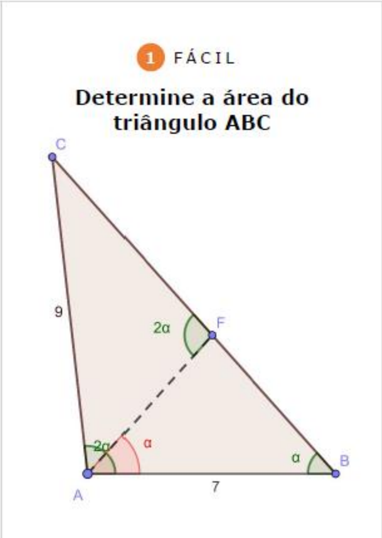
O primeiro bloco, formado por 8 alunos, recebe autonomia para escolher entre três atividades possíveis: colocar o caderno em dia com as respectivas anotações; registrar no caderno a devolutiva da prova corrigida; ou finalizar os exercícios restantes do livro adotado em sala. Essa flexibilidade favorece tanto a organização individual dos estudantes quanto a individualização do tempo pedagógico.

O segundo bloco, também composto por 8 alunos, é organizado em 4 duplas para participar da dinâmica do jogo didático. Nesse momento, o professor retoma o jogo previamente desenvolvido e explica novamente suas regras, funções e condições de participação. Ele assume a figura de juiz, papel que é essencial em jogos pedagógicos, pois garante a mediação, a tomada de decisão e a condução da atividade, coerente com o que defendem Sérgio Lorenzato (2006), Julia Borin (1996) e Piaget (1978). Como Borin (1998, p. 79) afirma: "não é ensinar os alunos a jogar, mas mantê-los mentalmente ativos, para que possam construir o seu conhecimento através do pensamento lógico matemático".

Com autonomia docente, o professor seleciona as cartas 1, 2 e 3 do nível fácil e organiza as duplas da seguinte maneira: Ana e Aline, Bruno e Breno, Caio e Cecília, Danilo e Daniel.

O juiz (professor) apresenta aos quatro grupos o Problema 1 (carta laranja – nível fácil).

Figura 2 - Problema 1 Fácil



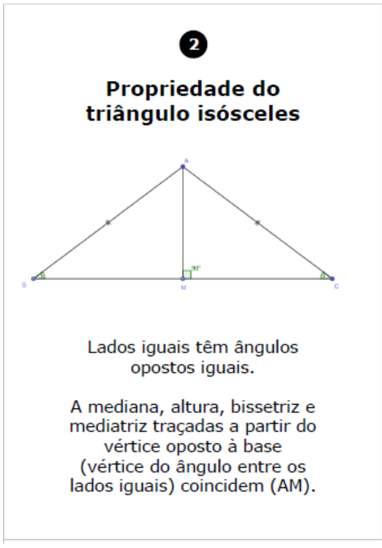
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Enquanto os alunos analisam a situação e começam a discutir possíveis caminhos, o professor também coloca sobre a mesa as 7 cartas brancas relacionadas ao primeiro problema, posicionando-as de forma misturada e sem explicações adicionais. A intenção é apenas permitir que os estudantes tenham contato com as possibilidades conceituais disponíveis. Essa escolha metodológica foge deliberadamente da regra original do jogo, mas está alinhada com a concepção flexível do material, construída segundo a filosofia pedagógica da CAPES, e com a perspectiva de que o jogo deve ser apresentado dentro de uma intencionalidade didática clara. Como afirmam Smole et al. (2007, p. v): "o trabalho com jogos nas aulas de Matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades [...]", reforçando que o jogo pode (e deve) ser adaptado para atender aos objetivos da sala de aula, desde que preservado o planejamento e o propósito pedagógico.

O professor deixa em aberto o tempo de análise das cartas (laranjas e brancas), respeitando o ritmo individual e coletivo de cada dupla, sugerindo apenas um intervalo aproximado entre 10 e 20 minutos. Durante essa fase inicial, o professor já observa uma forte mobilização argumentativa entre os estudantes. Nota-se uma socialização produtiva e uma integração simultânea de vários conceitos, favorecida pelo fato de as cartas brancas estarem misturadas. Essa dinâmica confirma a perspectiva de Garcia (2010, p. 51), que aponta que, na adolescência, "O grupo de pares se constituirá como um lugar privilegiado de trocas cognitivas e afetivas, proporcionando ao adolescente o fortalecimento de ideias, valores e sentimentos".

Início da partida: o professor apresenta a primeira carta branca (nº 2):Propriedade do triângulo isósceles, direcionando-a à dupla Ana e Aline.

Figura 3 - Carta Branca 2



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

O juiz pergunta: – É válida?

Ana e Aline respondem: – Não sabemos, professor.

O juiz então dirige a mesma pergunta à dupla Bruno e Breno, que arriscam um palpite após cerca de dois minutos de reflexão:

– Não é válido, professor.

O juiz anuncia: – Está errada. Mas vocês sabem, pelo menos, sugerir alguma alternativa de resolução?

O aluno Bruno balança a cabeça com negatividade, e o juiz da continuidade.

Em seguida, dirige-se à dupla Caio e Cecília, perguntando:

– A carta: Propriedade do triângulo isósceles é útil?

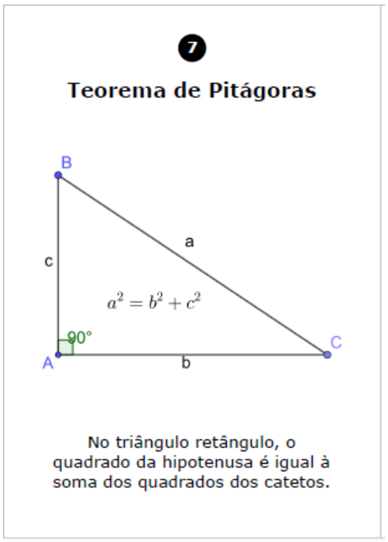
Caio responde imediatamente: – É útil. Eu vejo que existe um triângulo isósceles em ABF.

O juiz confirma: – Certa resposta.

O professor registra 1 ponto na folha de acompanhamento para a dupla Caio e Cecília, marcando o início formal do desenvolvimento da partida.

O juiz dirige-se à dupla Danilo e Daniel e apresenta a carta nº 7: Teorema de Pitágoras, perguntando: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 4 - Carta Branca 7



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

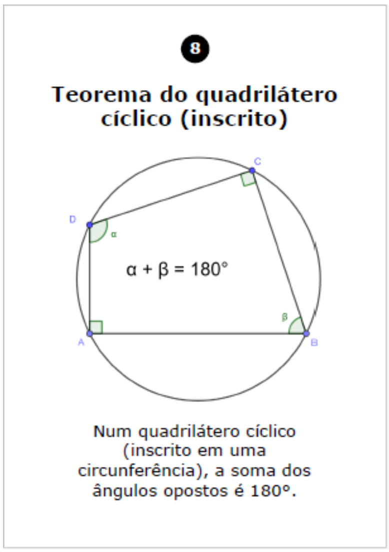
Daniel responde: – Não professor, porque eu não vejo em nenhum instante um ângulo de 90 graus presente, então acredito que neste caso não colabore. Apesar de Daniel demonstrar pouca convicção, sua argumentação é correta. A estrutura do jogo prevê exatamente esse tipo de justificativa: as cartas válidas exigem argumentações consistentes, enquanto as cartas inválidas demandam justificativas lógicas que expliquem sua inaplicabilidade. Nesse sentido, o modo fácil do jogo foi projetado com menos cartas válidas, justamente para não exigir um nível elevado de formalização matemática dos alunos do ensino médio. O baralho, portanto, passou por um processo de adaptação didática, criando uma espécie de "ponte" de aprendizagem, um andaime cognitivo. Esse processo, conhecido na pedagogia e na psicologia educacional como *scaffolding*, consiste em fornecer apoios graduais que permitem ao aluno alcançar níveis mais complexos de raciocínio. Da mesma forma, a construção do jogo se alinha à ideia de variação estruturada (*task variation*), pois o problema original é "quebrado" em versões e análises progressivamente simplificadas, favorecendo o aprofundamento conceitual de maneira gradual.

> Por isto, é que tanto os pais como os professores devem orientar e direcionar a aprendizagem do aluno. Esta orientação mediada pelo professor, pai, aluno experiente para conduzir a aprendizagem do aluno menos experiente, até que este alcance autonomia na atividade concreta, ou possa resolver o problema sozinho durante o

> processo de ensino e aprendizagem é chamada de scaffolding (andaimento) (Cumbe, 2024, p 106).

Em seguida, o juiz apresenta a carta nº 8: Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito), para a dupla Ana e Aline, perguntando: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 5 - Carta Branca 8



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

As alunas observam a carta com atenção, analisam seus possíveis usos e comentam entre si, buscando uma suposição, como se estivessem testando hipóteses preliminares. Após momentos de reflexão, respondem:

– Não é útil porque não existe a figura de uma circunferência na figura, apenas um triângulo, com outros triângulos dentro, e como a outra dupla disse que é um triângulo isósceles.

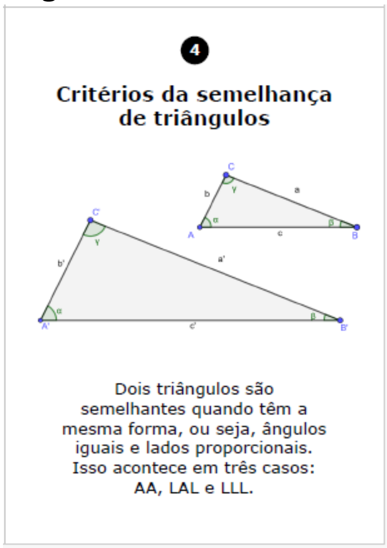
Nesse momento, evidencia-se a importância da presença de um mediador, capaz de conduzir a partida e favorecer a construção intelectual dos alunos. Essa mediação é coerente com o pensamento de Piaget, que afirma:

> Esta definição aplica-se também à própria inteligência. A inteligência é de fato assimilação na medida em que incorpora todos os dados da experiência. Quer se trate do pensamento que, graças ao juízo, faz entrar o novo no já conhecido, reduzindo assim o Universo às suas próprias noções, quer se trate da inteligência sensório-motora que estrutura igualmente as coisas que percebe reconduzindo-as aos seus esquemas, nos dois casos a adaptação intelectual comporta um elemento de assimilação, quer dizer, de estruturação por incorporação da realidade exterior às formas devidas à atividade do sujeito. (Piaget, 2010, p. 30).

O juiz percebe claramente que Ana e Aline estão mobilizando processos de análise, testando hipóteses, articulando ideias e exercitando argumentação matemática, exatamente o tipo de movimento cognitivo esperado no jogo. Isso confirma o caráter exploratório da atividade, alinhado à perspectiva de Jerome S. Bruner, para quem o ato lúdico possui o poder de criar condições ricas para exploração e resolução de problemas.

A partida segue. O juiz apresenta à dupla Bruno e Breno a carta nº 4, Critérios de semelhança de triângulos, perguntando: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 6 - Carta Branca 4



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Os alunos respondem: – Ajuda.

O juiz questiona: – Por quê?

A dupla tenta justificar, mas não consegue estruturar uma explicação correta. Eles mencionam uma suposta proporcionalidade entre os triângulos AFB e AFC, o que, neste caso, está incorreto.

O juiz responde: – A resposta está errada. A carta até ajuda porque os triângulos são congruentes, mas faltou detalhar melhor a resposta de vocês aqui.

O placar em pontos ficou assim: Ana/Aline obteve 1 ponto; Bruno/Breno, 0 pontos; Caio/Cecília, 1 ponto; e Danilo/Daniel, 1 ponto.

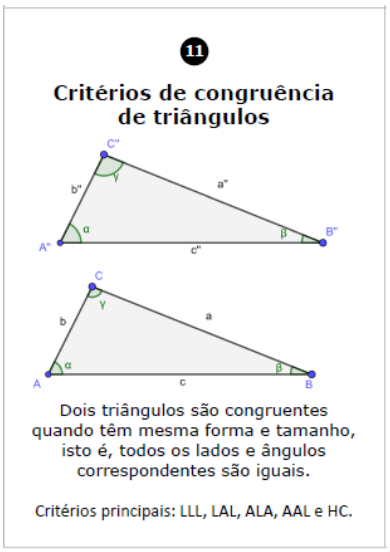
Em seguida, o juiz repassa a questão à dupla Caio e Cecília. Os dois observam a resposta anterior e, com base nos elementos identificados por eles no desenho, afirmam:

– A carta é útil, professor, porque existe uma proporcionalidade entre AFC com o triângulo BAC.

O juiz confirma: – Certa resposta.

O juiz apresenta à dupla Danilo e Daniel a carta nº 11: Critérios de congruência de triângulos, perguntando: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 7 - Carta Branca 11



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Assim que manuseiam a carta branca, os dois alunos imediatamente iniciam um diálogo entre si, analisando as informações e compartilhando conhecimentos prévios. O professor observa com satisfação esse movimento, pois o próprio uso do jogo, com seus elementos manipuláveis, favorece a construção do conhecimento ao envolver os estudantes em processos de tomada de decisão, resolução de problemas e interação social. Nesse contexto, a organização das informações presentes nas cartas contribui para a estruturação do pensamento e para a formulação e validação de hipóteses, valorizando inclusive o erro como parte do processo de aprendizagem. Essa percepção dialoga com Lorenzato (2006), que afirma que do abstrato se chega ao concreto, reforçando que o manuseio de elementos palpáveis auxilia na internalização de conceitos.

Após a troca de ideias, Danilo e Daniel respondem:

– Não ajuda, professor, porque não existe relação de triângulos dentro dele.

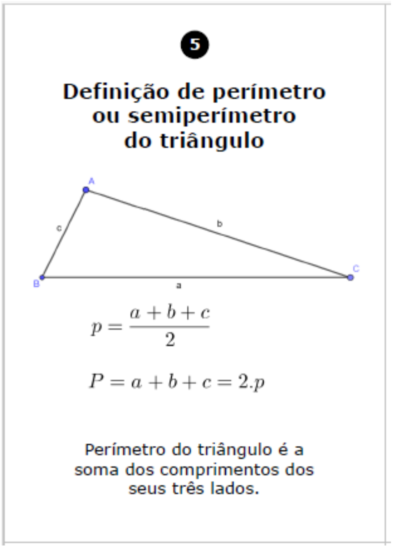
O juiz confirma: – Certa resposta.

Com isso, o placar atualiza-se assim: Ana/Aline obteve 1 ponto; Bruno/Breno, 0 pontos; Caio/Cecília, 2 pontos; e Danilo/Daniel, 2 pontos.

Nesse momento, a dupla Bruno e Breno demonstra indignação e preocupação com sua posição no jogo, percebendo que estão ficando para trás. Essa reação é um indicativo valioso do potencial pedagógico da dinâmica: o ambiente social do jogo favorece a autorregulação, o desejo de melhorar e o engajamento ativo na tarefa. A interação, portanto, torna-se um motor de mobilização de conhecimento, já que, como afirma a literatura, os sujeitos se desenvolvem na e pela relação com o meio onde vivem e aprendem.

O juiz pergunta à dupla Ana e Aline, que estão com a carta nº 5: Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 8 - Carta Branca 5



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Ana e Aline respondem: – Não ajuda em nada, professor, porque o foco está em calcular a área, e não os lados da figura.

O professor, então, intervém: – A resposta está incorreta. Vocês estão olhando só para o cálculo, mas a Matemática não é só aplicar fórmula. Analisar os lados da figura ajuda a entender melhor a estrutura do problema, e isso é fundamental para chegar à solução correta.

Imediatamente, Ana e Aline protestam: – Ah, não vale, professor! Assim o senhor está ajudando a próxima dupla!

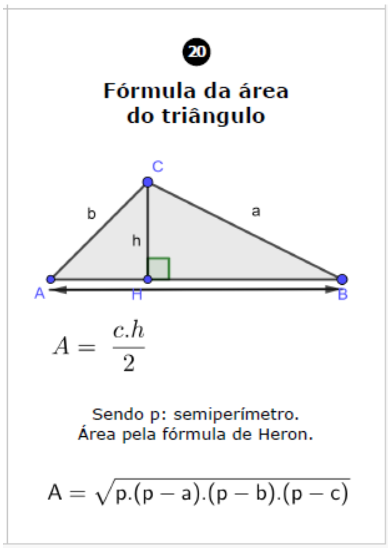
Antes mesmo de o juiz concluir a mediação, Bruno e Breno, a dupla seguinte, se antecipam e dizem:

– Professor, essa carta ajuda sim. Quando a gente descobre os lados do triângulo, fica mais fácil entender a figura como um todo. A partir disso, conseguimos calcular o perímetro e pensar melhor na resolução do problema.

O professor observa a resposta com atenção ao perceber avanços no raciocínio dos alunos, especialmente ao relacionarem os elementos da figura com a resolução do problema. Essa situação evidencia como a atividade lúdica promove a retomada de conceitos fundamentais da Geometria Plana e, ao mesmo tempo, está alinhada com os princípios pedagógicos contemporâneos. Além disso, a dinâmica reforça habilidades previstas na BNCC, destacando que a construção coletiva do conhecimento, por meio da interação e da argumentação, favorece o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

O juiz pergunta à dupla Caio e Cecília, que estão com a carta nº 20: Fórmula da área do triângulo: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 9 - Carta Branca 20



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A aluna Cecília observa a carta com atenção, comentando brevemente com o colega, demonstrando certa dúvida e o desejo de tomar uma decisão cuidadosa. Normalmente mais reservado, Caio se manifesta e responde:

– Sim, professor, ela é válida. Porque essa carta está diretamente relacionada com a pergunta inicial do problema, já que o objetivo final é calcular a área da figura. Ainda não sabemos exatamente como aplicar o cálculo, mas entendemos a importância da carta número 20.

O professor, então, acrescenta: – Correto.

Em seguida, anuncia o placar: Ana/Aline obteve 1 ponto; Bruno/Breno, 1 pontos; Caio/Cecília, 3 pontos; e Danilo/Daniel, 2 pontos.

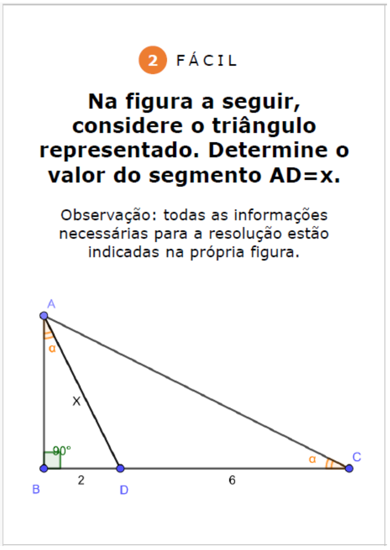
Já se passaram 15 minutos. [1:30 da aula – 35 min de atividade]

O professor pergunta: – Podemos seguir para a próxima carta?

Um dos alunos responde: – Sim!

O professor então retoma a dinâmica inicial. Apresenta o Problema 2, da modalidade fácil, e separa, durante cinco minutos, as sete cartas brancas indicadas no manual. Afirma que, apesar de o jogo obedecer a uma sequência lógica de etapas, o ponto de partida consiste em misturar as cartas e apresentá-las embaralhadas sobre a mesa, para que os grupos possam raciocinar e debater durante dez minutos.

Figura 10 - Problema 2 Fácil



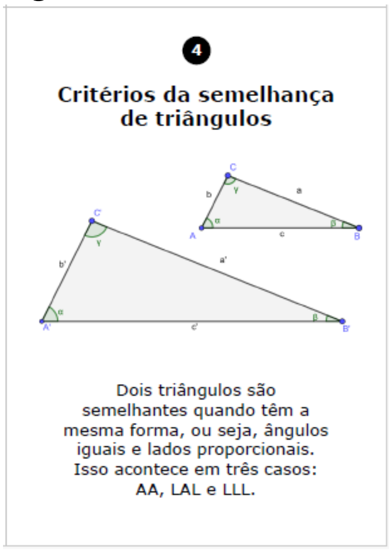
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Após quinze minutos de análise coletiva, o professor dá início à nova rodada, seguindo o mesmo procedimento utilizado no primeiro problema.

4.3 Segunda rodada

O juiz pergunta à dupla Ana e Aline, que agora estão com a carta nº 4: Critérios de semelhança de triângulos: – A carta é válida?

Figura 11 - Carta Branca 4



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Aline observa a figura, comenta discretamente com Ana e, após alguma reflexão, justifica que não conseguem enxergar como a carta poderia contribuir para a resolução do problema.

O juiz, então, passa a vez para a dupla seguinte. Breno responde rapidamente: — Não ajuda, professor. Não faz sentido aqui.

O juiz anuncia: – Resposta incorreta.

A dupla Caio e Cecília se antecipa, afirmando que a carta é válida.

O juiz questiona: – E por quê?

Cecília arrisca: – Talvez porque exista uma semelhança entre o triângulo ADC e o triângulo ABD.

O juiz intervém: – Errado!

Em seguida, o juiz direciona a pergunta para Danilo e Daniel:

– Alguma ideia? Dupla do Daniel alguma sugestão?

O professor faz questão de envolver Daniel, por ele estar desatento, buscando trazê-lo para o foco do jogo e incentivando sua participação ativa, estimulando o que se espera de um estudante protagonista.

Daniel responde: – Professor, acho que é válido. Existe uma semelhança entre ADC e ABD.

No entanto, a resposta é praticamente idêntica à da dupla anterior, revelando que Daniel tentou replicar a fala sem uma análise própria.

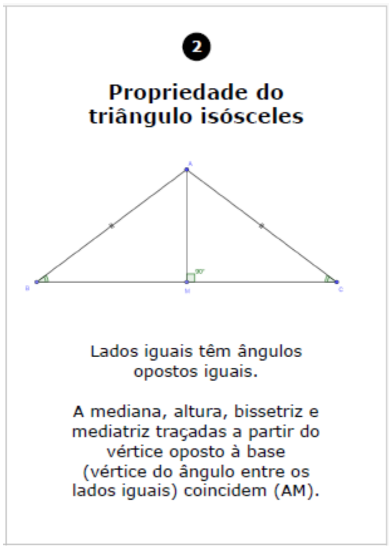
O juiz conclui: – Também está incorreto. Como todos erraram logo a primeira carta, cabe a mim explicar seu papel. Mas vocês estavam muito próximos, “bateram na trave”. A semelhança presente nessa figura ocorre entre os triângulos CBA e ABD.

O professor, então, demonstra no material impresso onde estão localizados os dois ângulos congruentes que estabelecem a semelhança por AA (ângulo-ângulo). Nesse momento, torna-se evidente a importância da presença de um mediador durante o jogo, conforme defende Lorenzato (2006), ao afirmar que o professor funciona como o elemento que corrigi o pensamento do aluno e o conduz do esforço individual ao entendimento coletivo.

O placar permanece, juiz comenta: Ana/Aline obteve 1 ponto; Bruno/Breno, 1 ponto; Caio/Cecília, 3 pontos; e Danilo/Daniel, 2 pontos.

O juiz segue para a segunda pergunta da sequência do problema, retornando à dupla inicial Ana e Aline, que agora estão com a carta nº 2: Propriedade do triângulo isósceles: — É válida?

Figura 12 - Carta Branca 2



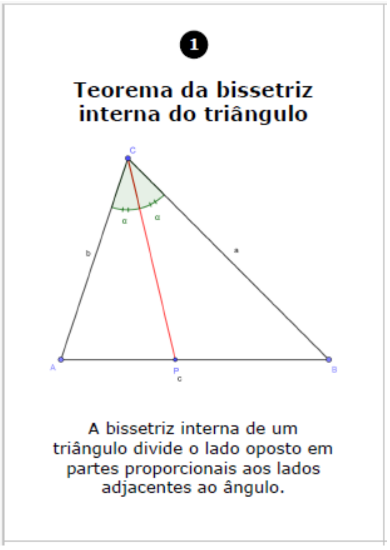
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A dupla reflete por alguns instantes e responde: – Não, professor, não é válida, porque não há nenhum ângulo igual nem lado igual na figura, como a própria definição da carta nº 2 indica.

O juiz confirma: – Certa resposta.

Em seguida, o juiz avança para a terceira pergunta, direcionada à dupla Bruno e Breno, que está com a carta nº 1: Teorema da bissetriz interna do triângulo: – É válida?

Figura 13 - Carta Branca 1



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A dupla conversa entre si e comenta que, apesar de a carta tratar da presença de uma bissetriz, eles não conseguem identificar claramente essa construção na figura. Eles levantam algumas hipóteses, inclusive sugerindo se o segmento AD poderia representar a bissetriz destacada em vermelho na carta, mas percebem que a relação não se sustenta. Esse raciocínio é rapidamente reorganizado por Bruno.

Esse momento, contudo, é rico do ponto de vista pedagógico, pois a troca entre Bruno e Breno evidencia a construção do conhecimento por meio da interação. Ao dialogarem, os estudantes compartilham estratégias, confrontam ideias e reformulam seus pensamentos, o que favorece a compreensão dos conceitos envolvidos. Essa dinâmica colaborativa cria um ambiente em que o aluno pode avançar em seu raciocínio a partir das contribuições do colega proporcionada pelo jogo, alcançando níveis de entendimento que dificilmente atingiria de forma isolada.

A dupla heterogênea como dupla produtiva: Quando um aluno com mais domínio e outro com menos domínio interagem, ambos crescem, um ao explicar, outro ao reconstruir o conceito. A literatura pedagógica destaca que a aprendizagem se fortalece por meio da participação e da interação em sala de aula (Libâneo, 2013).

Após a discussão, Bruno responde: – Não é válida, professor, porque, por essa linha de raciocínio, o teorema não se aplica ao problema proposto.

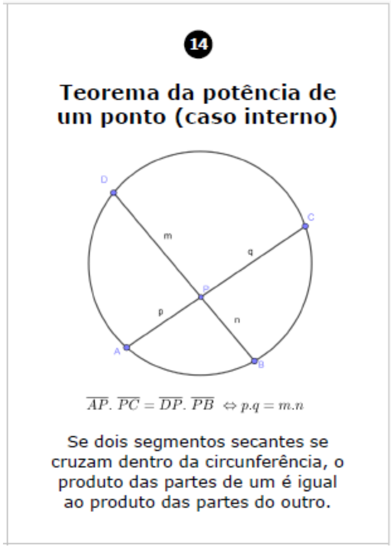
O juiz confirma: – Certa resposta.

A dupla marca mais um ponto.

Placar atualizado: Ana/Aline obteve 2 pontos; Bruno/Breno, 2 pontos; Caio/Cecília, 3 pontos; e Danilo/Daniel, 2 pontos.

A quarta pergunta da sequência é destinada à dupla Caio e Cecília, com a carta nº 14: Teorema da potência de um ponto (caso interno): Imediatamente, Cecília responde: – Não é válida, professor, porque não existe nenhum círculo na figura.

Figura 14 - Carta Branca 14



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

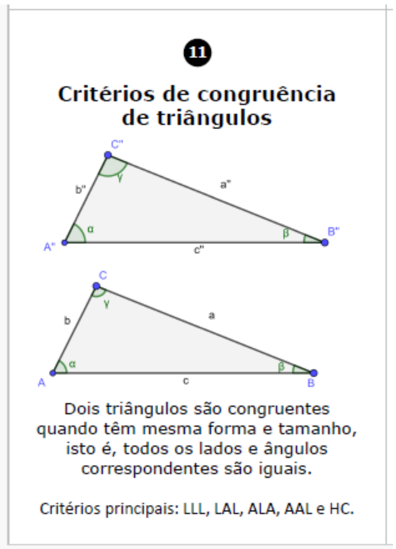
O juiz, comenta: – Resposta correta!

Cecília acrescenta: – Se eu fosse pelo nome da carta, talvez não conseguisse identificar, mas o desenho da carta me ajudou. Ele funciona como uma ponte para entender a figura.

A dupla marca mais um ponto. O placar é atualizado: Ana/Aline obteve 2 pontos; Bruno/Breno, 2 pontos; Caio/Cecília, 4 pontos; e Danilo/Daniel, 2 pontos.

A quinta pergunta é destinada à dupla Danilo e Daniel, que agora está com a carta nº 11: Critérios de congruência de triângulos: Sabendo que trabalharam recentemente os conceitos de semelhança e congruência, e reconhecendo bem suas diferenças, a dupla responde com segurança:

Figura 15 - Carta Branca 11



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

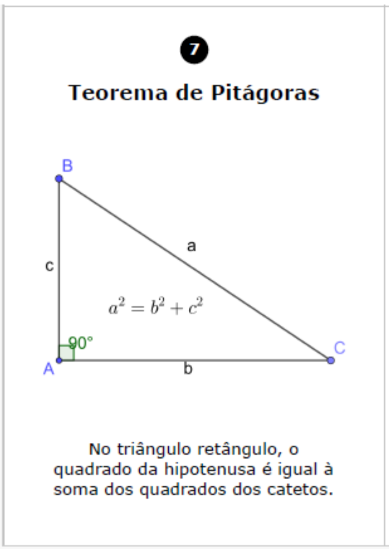
– Não é válida, professor, porque a gente já usou um conceito parecido, o de semelhança, logo na primeira carta, e aqui os critérios de congruência não aparecem.

O juiz comenta: – Certa resposta! Vocês estão indo muito bem.

Nesse contexto, o jogo não se configura apenas como uma atividade de entretenimento, mas como um recurso voltado à construção da aprendizagem. Trata-se de um instrumento formativo que contribui para o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico dos estudantes. Nesse sentido, evidencia-se sua consonância com a legislação educacional, em especial com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a qual estabelece que o Ensino Médio deve promover "o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico" (Brasil, 1996).

O juiz pega a sexta pergunta da sequência do problema, agora destinada à dupla Ana e Aline, que está com a carta nº 7: Teorema de Pitágoras: – Essa carta é válida?

Figura 16 - Carta Branca 7



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A dupla responde: – Não, professor, não é válida.

O juiz responde: – Resposta errada.

Aline, surpresa, questiona: – Mas por quê, professor?

O juiz explica brevemente: – Neste momento não posso esclarecer; explicarei depois.

Em seguida, a dupla Bruno e Breno, percebendo que a negação não fazia sentido, reorganiza o raciocínio com base no que já sabiam e no que estavam construindo no decorrer do jogo. Eles respondem:

– Professor, é válida, porque há um ângulo de 90° na figura. Como já temos um lado medindo 2 e outro que descobrimos em um passo anterior, conseguimos encontrar o valor de x, que corresponde ao segmento AD.

O juiz confirma: – Certa resposta.

Ana e Aline demonstram certa frustração por terem errado algo que dominavam.

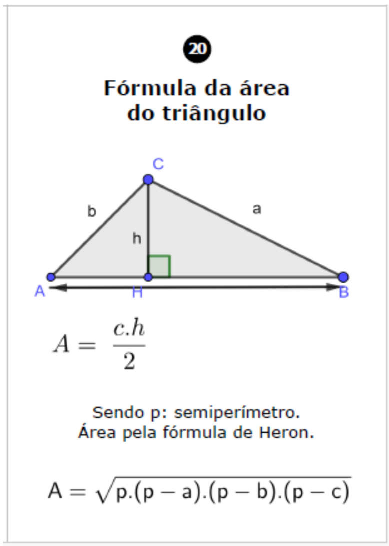
O professor, contudo, intervém pedagogicamente:

– Pessoal, errar faz parte da aprendizagem. Aqui o erro é mais do que permitido, ele é essencial para a construção dos seus saberes.

Placar atualizado: Ana/Aline obteve 2 pontos; Bruno/Breno, 3 pontos; Caio/Cecília, 4 pontos; e Danilo/Daniel, 3 pontos.

O juiz passa então à sétima pergunta, destinada à dupla Caio e Cecília, que está com a carta nº 20 – Fórmula da área do triângulo: – Essa carta ajuda a resolver o problema?

Figura 17 - Carta Branca 20



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A dupla, que no momento estava um pouco dispersa conversando sobre outros assuntos e sem acompanhar o andamento final da atividade, responde:

– Ajuda, professor. Porque a área sempre colabora para a resolução de um problema.

O aluno Danilo ri na mesma hora, o que deixa a dupla sem entender o motivo.

O juiz então corrige: – Errado. Danilo?

Danilo responde prontamente: – Não ajuda, professor, porque o exercício já foi encerrado. Não há mais necessidade de calcular área, perímetro ou qualquer outra coisa.

O juiz confirma: – Certa resposta.

E anuncia: – Finalizamos esta carta e encerramos a partida por falta de tempo, por mais que seja dobradinha chegou ao fim. Não houve tempo para iniciar a terceira carta. E o placar final do jogo ficou assim: Ana/Aline obteve 2 pontos; Bruno/Breno, 3 pontos; Caio/Cecília, 4 pontos; e Danilo/Daniel, 4 pontos.

O professor fala: – Temos um empate, pelo visto!

4.4 Segunda sexta-feira com a turma (3º ano do Ensino Médio – Sala A)

O professor encerrou a aula anterior por falta de tempo, lembrando aos alunos que, na quinta-feira seguinte, aplicaria novamente o jogo com os demais oito estudantes que ainda não haviam participado, pois estavam passando a limpo o caderno e corrigindo a prova. Ele também reforçou que os alunos que jogaram receberam pontos na média avaliativa.

Na sexta-feira, o professor retomou o conceito do jogo trabalhado em sala e comunicou aos estudantes que aplicaria uma versão modificada, agora com outro propósito. Como na aula anterior alguns alunos não se comportaram adequadamente enquanto esperavam sua vez, conversando exageradamente e desviando a atenção da atividade principal, o professor concluiu que não seria produtivo deixar parte dos alunos sem tanto foco. Por isso, decidiu transformar a nova rodada em uma atividade coletiva, realizada no pátio da escola.

O professor levou a turma ao pátio, que estava vazio, e explicou como funcionaria esta nova etapa do jogo.

Havia exatamente 19 alunos presentes. A organização seria assim:

A dupla dos A (Ana e Aline) ganharia mais três alunos; a dupla dos B (Bruno e Breno) também receberia mais três; e assim sucessivamente.

Como o número total de alunos não era múltiplo de cinco, um dos grupos ficaria com um participante a menos. Após cerca de 10 minutos de organização, formaram-se quatro grupos, cada um identificado pela letra referente à dupla original da semana anterior.

O professor então sorteou 12 números, exceto os números 1 e 2.

Os problemas foram distribuídos da seguinte forma: grupo A recebeu o problema 11; grupo B, o problema 6; grupo C, o problema 5; e grupo D, o problema 12.

Após a organização das cartas, o professor apresentou os números associados a cada problema. No problema 11, os passos correspondentes foram: 3, 4, 5, 6, 7 e 17 (com repetição do número coringa).

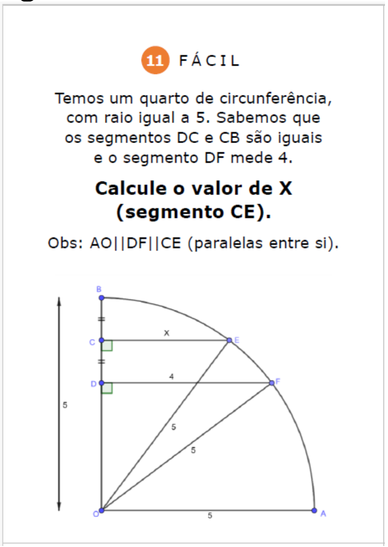
Para os demais problemas, a distribuição dos passos ocorreu da seguinte forma:

– Problema 6: 4, 7, 10, 15, 16, 18 e 20;
– Problema 5: 4, 7, 8, 10, 11, 18 e 19;
– Problema 12: 1, 4, 5, 7, 16, 19 e 20.

A seguir, são apresentadas as cartas correspondentes a cada problema, com seus respectivos passos.

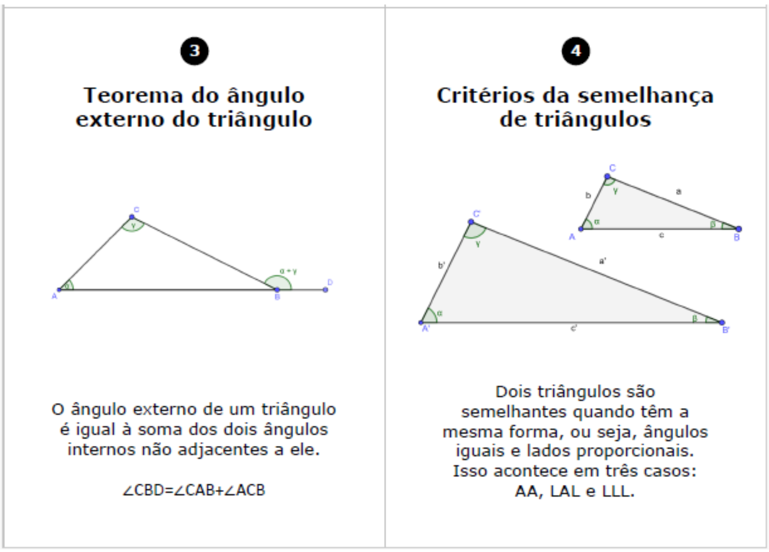
Problema 11:

Figura 18 - Problema 11 Fácil



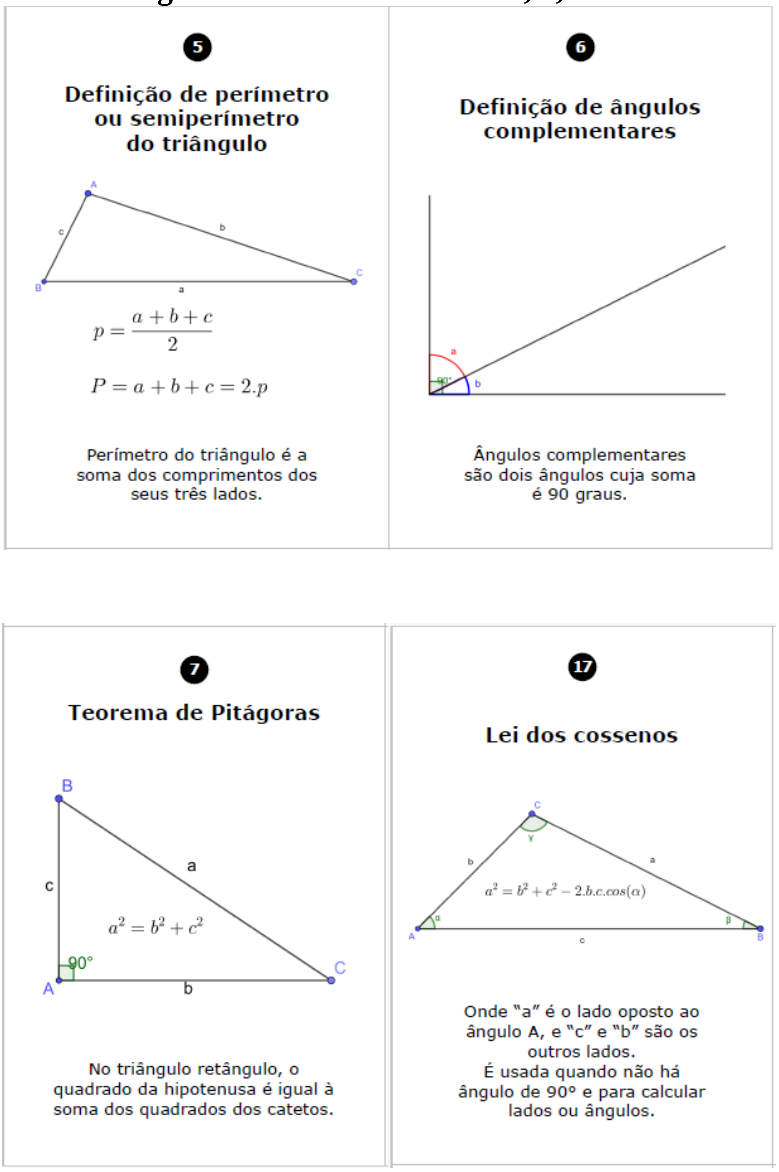
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 19 - Cartas Brancas 3 e 4



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

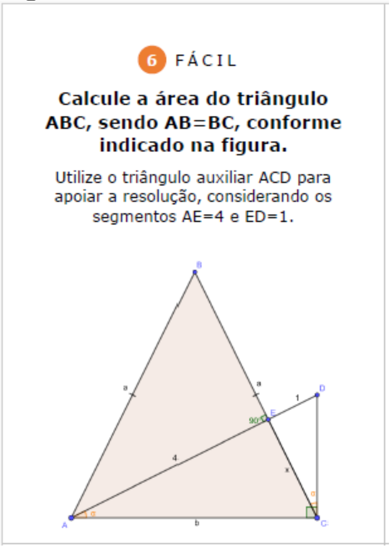
Figura 20 - Cartas Brancas 5, 6, 7 e 17



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

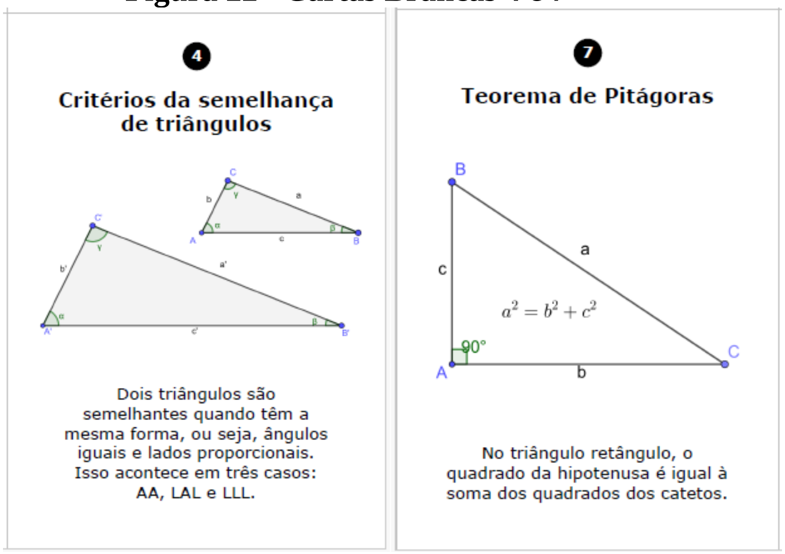
Problema 6:

Figura 21 - Problema 6 Fácil



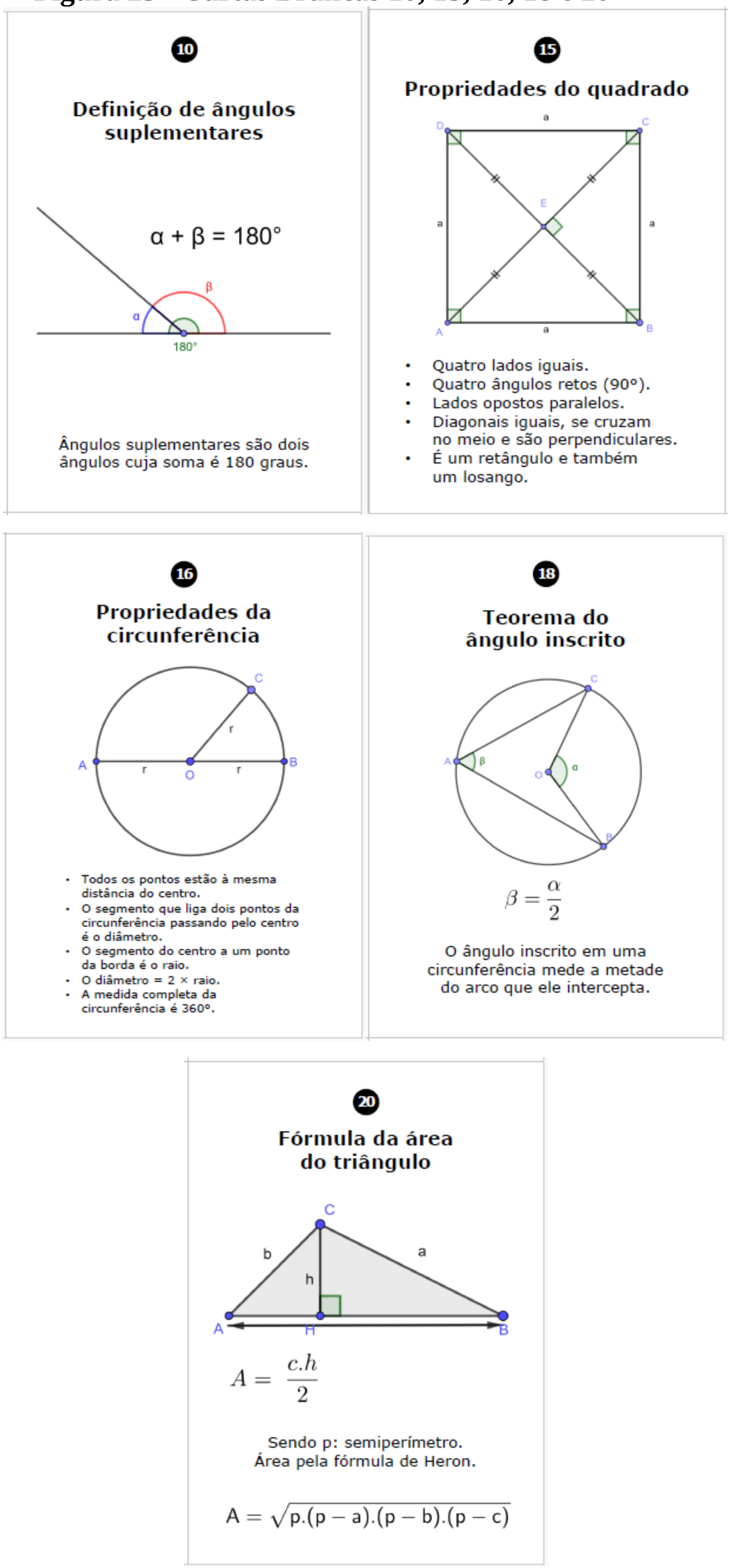
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 22 - Cartas Brancas 4 e 7



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

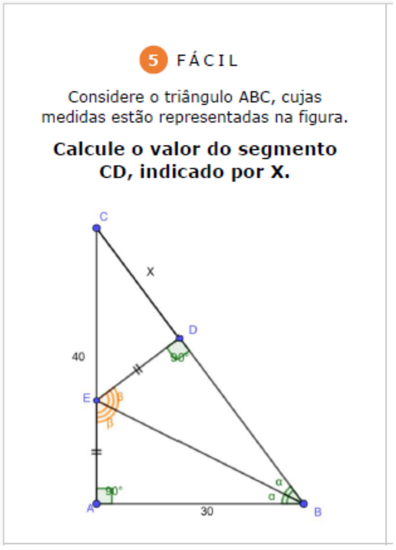
Figura 23 - Cartas Brancas 10, 15, 16, 18 e 20



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

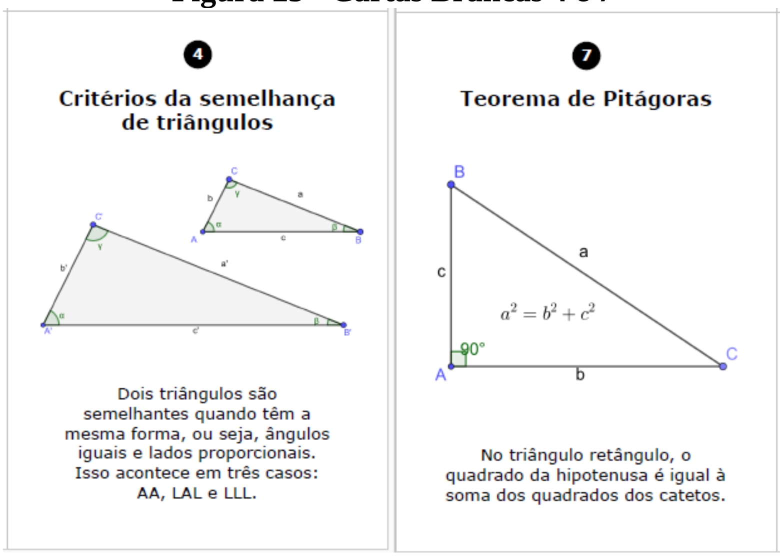
Problema 5:

Figura 24 - Problema 5 Fácil



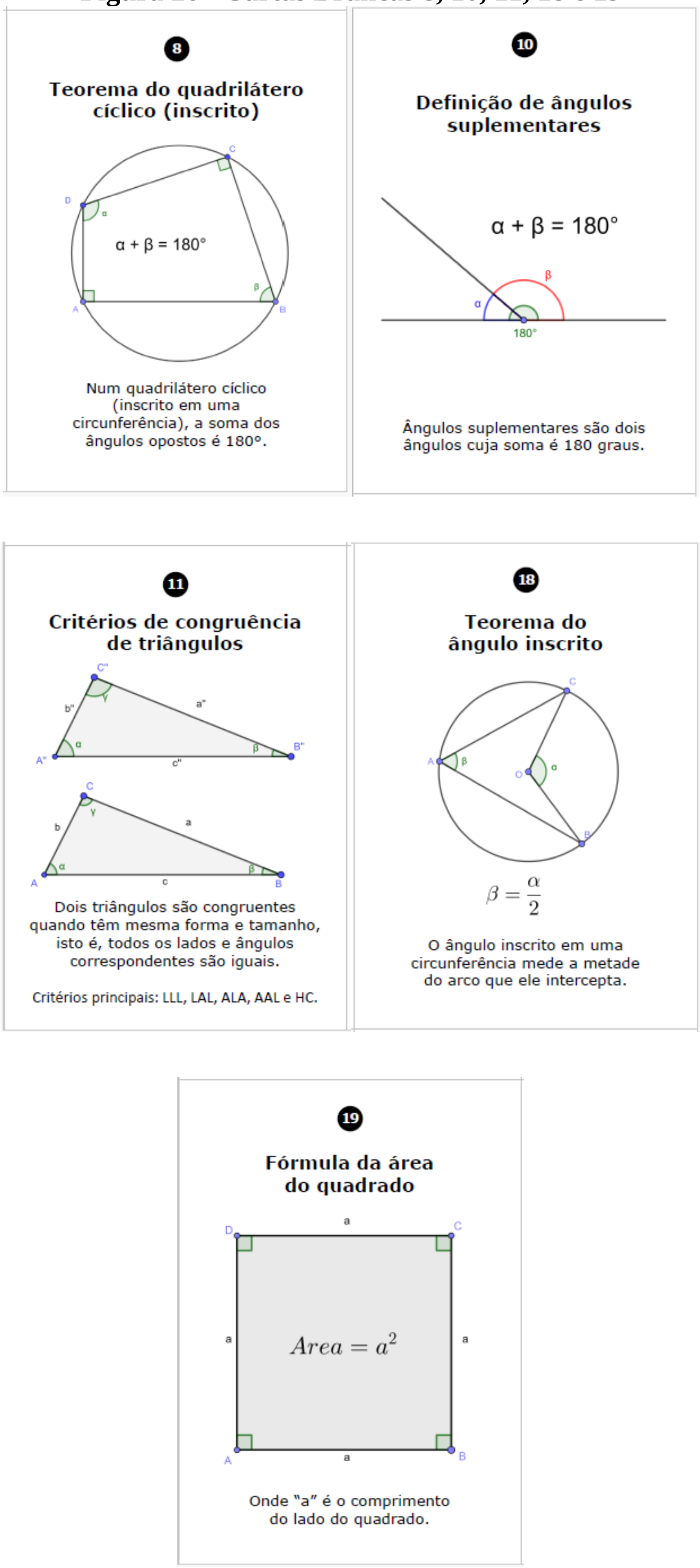
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 25 - Cartas Brancas 4 e 7



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

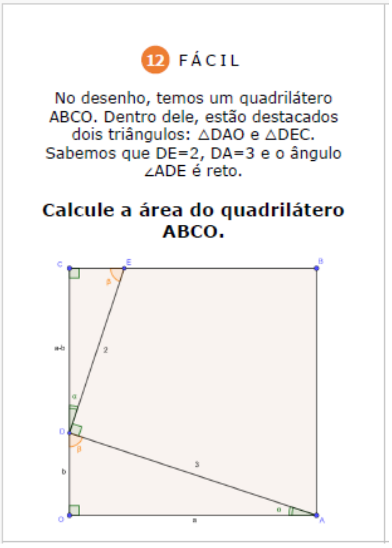
Figura 26 - Cartas Brancas 8, 10, 11, 18 e 19



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

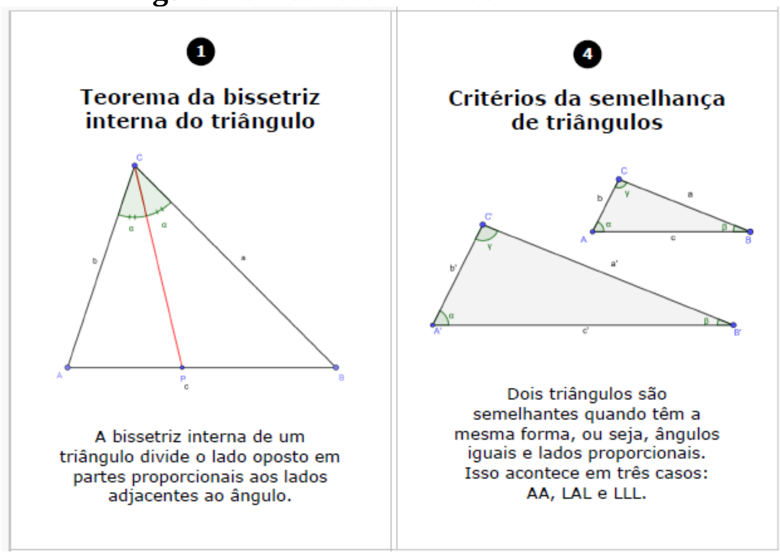
Problema 12:

Figura 27 - Problema 12 Fácil



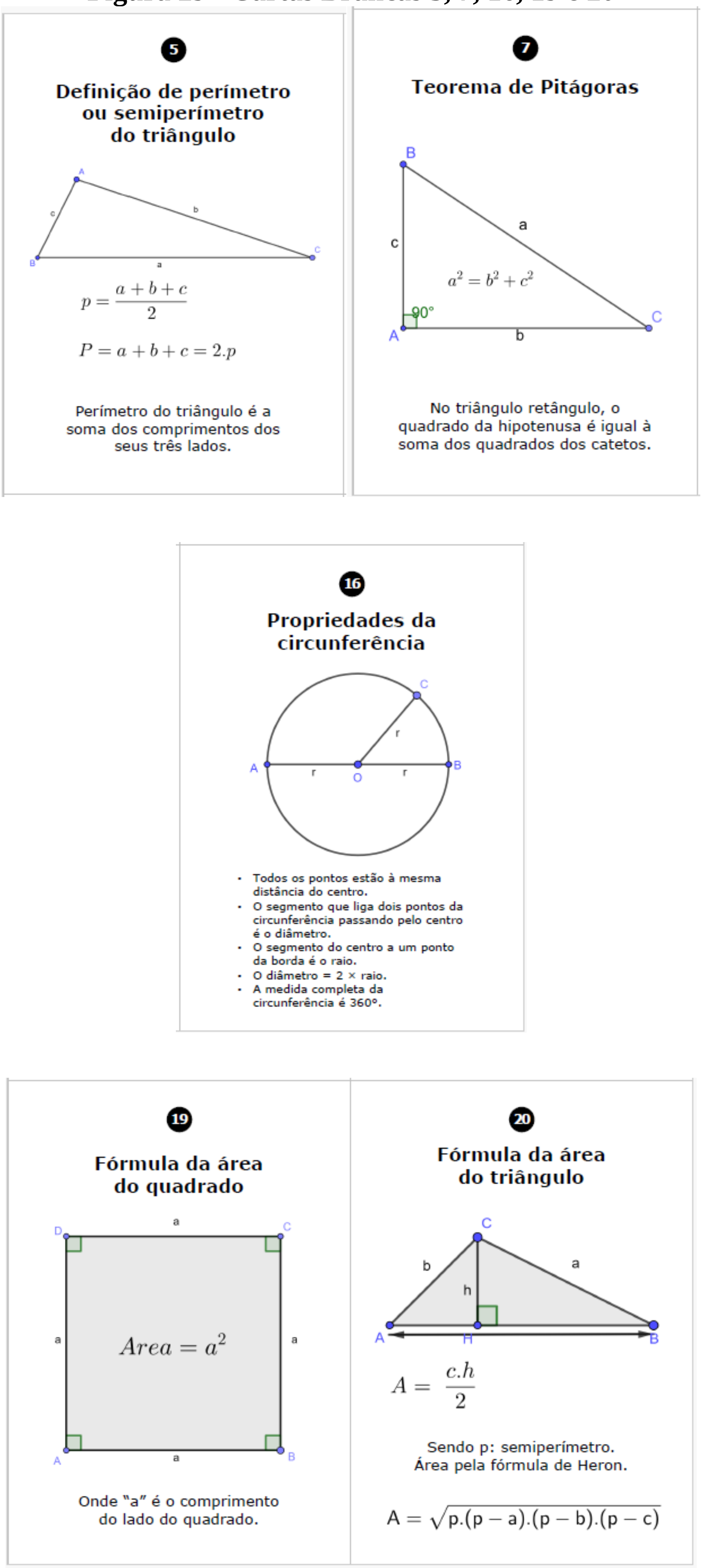
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 28 - Cartas Brancas 1 e 4



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 29 - Cartas Brancas 5, 7, 16, 19 e 20



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Cada grupo, com base no seu número de problema, deveria: ordenar em uma folha a sequência de cartas válidas para resolver o problema e justificar cada passo, explicando por que cada carta se aplicava e, se possível, usar cálculos para validar as escolhas.

Essas produções seriam recolhidas e, na semana seguinte, apresentadas por cada grupo na lousa, momento em que o professor faria a validação final.

Durante esse processo, o professor não ajudaria na resolução do problema. Sua intenção era que o jogo promovesse trabalho em equipe, negociação de significados, divisão de tarefas, discussão de ideias, argumentação, respeito às regras e busca coletiva de soluções, elementos essenciais para o desenvolvimento social dos estudantes.

Ele estimou um tempo de 20 a 30 minutos para a atividade. Nesse intervalo, realizou a chamada, organizou materiais, verificou cadernos e esclareceu apenas dúvidas sobre regras do jogo ou pequenos pontos conceituais das cartas.

Em certo momento, uma aluna perguntou: – Professor, quem vai apresentar? Quem vai escrever? Como decidimos isso?

O professor respondeu: – Isso deve ser resolvido dentro do grupo, considerando o diálogo interno e o potencial de cada colega. Por exemplo: quem tem letra mais organizada pode escrever; quem é menos tímido pode apresentar; quem tem maior facilidade com o conteúdo pode elaborar as justificativas, sempre ensinando aos demais.

Como de costume, surgiram questionamentos sobre o modelo de aula.

O aluno Cleiton perguntou: – Professor, por que a gente não fica só no computador ou na quadra jogando bola?

O professor respondeu: – Aqui também estamos brincando. Trata-se de um jogo que desenvolve o pensamento matemático. No jogo, vocês aprendem a enfrentar desafios, tomar decisões e pensar estrategicamente. Além disso, estou utilizando um ritmo diferenciado, como previsto na BNCC.

E acrescentou, apoiado no documento oficial: "Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares [...]" (Brasil, 2018, p. 17).

Assim, o professor justificou pedagogicamente que poderia, e deveria, recorrer a conteúdos complementares para retomar aprendizagens, explorando diferentes ambientes escolares.

Ele concluiu reforçando a importância da brincadeira no desenvolvimento cognitivo e social: Segundo Kishimoto (2003), o brincar pode ser compreendido como uma situação imaginária construída a partir das interações da criança com a realidade social. Nesse espaço simbólico, desenvolvem-se habilidades como raciocínio lógico, argumentação, criatividade, comunicação e colaboração, elementos também mobilizados durante o jogo.

O aluno Bruno é considerado o estudante com maior facilidade em matemática na sala. Porém, na última sexta-feira, durante o jogo, não obteve o desempenho que esperava. Já na nova dinâmica em grupo, conseguiu se superar. Ele imediatamente exclui as cartas 16 e 18, justificando que não existe a ideia de circunferência no problema. Também exclui a carta branca número 15, pois não há quadrado envolvido. As demais cartas, segundo ele, provavelmente são úteis para a resolução.

Bruno questiona os colegas sobre o conceito de triângulo isósceles, que não aparecia entre as opções, e, com a ajuda do grupo, relembra o que significa “ângulo suplementar”, pois não se recordava. Nessa mobilização coletiva de conhecimentos, o grupo percebe que as cartas “Fórmula da área do triângulo”, por se tratar da pergunta principal, “Teorema de Pitágoras”, devido à presença de um ângulo de 90 graus, “Definição de ângulos suplementares”, por poder auxiliar, e “Critérios da semelhança de triângulos”, por ser necessária, serão utilizadas.

O passo seguinte é ordenar as cartas. Após alguns minutos de trabalho, o grupo monta uma sequência inicial e a apresenta ao professor, perguntando se está correta. O professor consulta o gabarito e comenta:

– Está quase lá, falta pouco.

Ele aponta discretamente o primeiro ponto de partida e, em seguida, indica onde deve aparecer a semelhança. Essa pequena pista é suficiente para que os alunos reorganizem corretamente a sequência das cartas, que fica: 10 – 4 – 7 – 20.

O grupo C produz uma proposta de solução em uma folha de sulfite, justificando cada carta da seguinte maneira:

(4) Critérios da semelhança de triângulos: Sim, é válido.

(7) Teorema de Pitágoras: Sim, é válido.

(8) Teorema do quadrilátero cíclico: Não é válido, pois não há círculo no problema.

(10) Definição de ângulos suplementares: Não, pois não identificam lógica para aplicá-lo.

(11) Critérios de congruência de triângulos: Sim, é válido.

(18) Teorema do ângulo inscrito: Não é válido pela ausência de círculo.

(19) Fórmula da área do quadrado: Não é válido, já que não aparece área de quadrado na figura.

A principal dúvida do grupo aparece ao comparar os itens 4 e 11, que consideram muito parecidos, pois não conseguem definir a ordem correta entre eles.

O grupo chama o professor e pergunta o que devem fazer. Ele responde:

– Neste momento, eu aceito os dois, desde que vocês saibam justificar na lousa, na próxima aula, a diferença entre eles. Agora, por favor, coloquem em ordem.

Após discutirem entre si, analisarem novamente o modelo da figura e tentarem reinterpretar o significado das cartas (inclusive observando discretamente a carta retirada da mão do outro grupo), concluem que o problema não é simples, mas chegam, finalmente, ao seguinte resultado: 4 = 11, seguido da carta 7.

Em paralelo às ações dos demais grupos, o grupo A, formado por Ana e Aline, trabalhava com o problema 11 da modalidade fácil, assim como os outros. Quando o professor apresentou o desafio, mostrou também as cartas disponíveis: 3, 4, 5, 6, 7 e 17. Nesse caso específico, avisou que alguma carta poderia aparecer duas vezes no processo de resolução.

Alguns alunos ficaram confusos com o significado dos "dois pauzinhos" no desenho e com a notação AO||DF||CE. Entretanto, os próprios colegas esclareceram esses pontos, evidenciando que o jogo didático favorece a superação de dificuldades por meio da interação social. As meninas, sendo bastante organizadas, replicaram a metodologia usada pelo grupo vizinho, anotando cada carta, sua utilidade e justificativa, um método de organização já discutido anteriormente com o professor em sala.

O professor reforça: – Anotem na folha os dados que vocês têm, podendo ser na vertical, horizontal ou até em tabela. O importante é estar organizado para esclarecer as ideias.

Assim, elas montaram a seguinte tabela:

Esboço da tabela (Grupo A)

(3) Teorema do ângulo externo do triângulo → O grupo ainda não chegou na resposta.

(4) Critérios da semelhança de triângulos → Sim. Entre os triângulos ODF e OCE.

(5) Definição de perímetro ou semiperímetro → Não. Não se encaixa.

(6) Definição de ângulos suplementares → Não. Apesar de existir a ideia, não veem utilidade neste problema.

(7) Teorema de Pitágoras → Sim. Permite calcular OD = 3.

(8) Lei dos cossenos → Não. Não há outro ângulo além do de 90° para aplicação.

Obs.: Nr. 2x

Durante a construção da tabela, o grupo observou diversas vezes as cartas brancas para compreender cada definição. A estrutura continha: número da carta, nome, utilidade (sim/não) e justificativa.

Vários grupos pediram ao professor para confirmar raciocínios antes da apresentação. O professor autorizou esse apoio.

No caso do grupo A, o professor esclareceu a carta (3), explicando o teorema do ângulo externo. Disse que, embora houvesse dois triângulos nítidos, o foco não era ângulos, exceto o ângulo reto. Um aluno anotou: “Não. Não se usa.”

Ao conferir o “Manual do Juiz”, o professor percebeu que quase todas as justificativas estavam corretas, exceto o item 4, que constava como inválido. Nesse momento, o aluno Bernardo defendeu seu ponto de vista inicial sobre a semelhança entre os triângulos. O professor revisou a situação e concluiu:

– Parabéns, Bernardo. Esta é outra linha de ideia, e está correta. Descobrindo OD pelo teorema de Pitágoras, como vocês já falaram, automaticamente obtemos CE = x, que é igual a OD, portanto vale 3. Eu não tinha percebido essa abordagem. Meus parabéns.

Esse momento ilustra que, trabalhando com alunos acima de 11 anos, enquadrados no estágio operatório formal de Piaget, observa-se que o pensamento abstrato e hipotético se fortalece, gerando argumentações críticas e bem fundamentadas, tanto em matemática quanto em situações reais.

O grupo A também pediu para analisar a carta correspondente ao problema 11 da modalidade difícil. O professor buscou no baralho e entregou a eles, mais por curiosidade que por necessidade.

Grupo D (Daniel e Danilo): Enquanto isso, no grupo D, formado por Daniel, Danilo e colegas, as discussões evoluíam em paralelo ao tempo dos demais grupos.

Antes mesmo de olhar as cartas brancas, um dos alunos comenta:

– O que vocês acham que temos aqui? Eu vejo que existe o conceito de área, que é a pergunta principal do problema.

Daniel responde: – Já percebi que existem dois triângulos isósceles: DAO e DEC. Foi fácil perceber, era quase uma dica escondida no enunciado.

Um colega pergunta o porquê, e Daniel explica: – Pelos três ângulos iguais destacados no desenho: alfa em verde, beta em amarelo e o ângulo reto em verde também.

Outro aluno então reage: – Ahhh, entendi. E é verdade… por existir ângulo reto, talvez dê para aplicar o Teorema de Pitágoras. Eu acho…

Cinco minutos depois, quando finalmente puderam manusear as cartas brancas, após o grupo ao lado terminá-las, confirmaram todas as hipóteses levantadas.

Eles descartaram:

Carta 1 – não identificaram bissetriz, mas pesquisaram o conceito e discutiram com o outro grupo.

Carta 5 – perímetro não fazia sentido no contexto.

Carta 19 e 20 – apesar de se relacionarem com área, concluíram que, por se tratar de um quadrado, a carta 20 (área do triângulo) não seria necessária.

Carta 16 – descartada por tratar de circunferência.

Aceitaram como válidas:

Carta 4 – semelhança, conceito que já haviam identificado previamente.

Carta 7 – Teorema de Pitágoras, já previsto antes de verem a carta.

Apresentaram ao professor, que confirmou: – Sim, está certo.

Encerramento da aula. Os quatro grupos haviam alinhado suas ideias, validado com o professor e finalizado suas sequências de cartas.

Restando alguns minutos na aula, o professor sugeriu que organizassem: a sequência de apresentação, quem iria falar, o colega que daria suporte nas explicações, e como estruturariam a narrativa matemática.

Alguns grupos decidiram que todos falariam; outros, que apenas dois apresentariam; e outro, que quem menos participou falaria mais.

O professor reforçou que essa divisão era pessoal, responsabilidade do grupo, e que ele apenas sugeriria caminhos.

Na aula seguinte, as apresentações ocorreram divididas em duas sessões: dois grupos apresentaram na primeira aula e os outros dois na segunda. As apresentações foram produtivas, com intervenções do professor e questionamentos entre colegas.

A etapa do jogo foi concluída com sucesso.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A ideia do jogo didático apresentado neste trabalho surge justamente das teorias construtivistas de Jean Piaget (1978) e das valiosas contribuições pedagógicas de Sérgio Lorenzato (2006) e de outros pensadores como Tizuko Morchida Kishimoto (2003), Kátia Stocco Smole (2007), etc e bem como com os conceitos relacionados à Aprendizagem baseada em jogos (*Game-based learning*). Essas referências foram fundamentais para definir a escolha da mecânica, dos materiais e das estratégias de ensino que o jogo utiliza. O objetivo principal é transformar o aprendizado da Geometria Plana em algo ativo, concreto e, acima de tudo, significativo, lúdico e prazeroso, fugindo daquela abordagem tradicional que, muitas vezes, acaba se resumindo à mera memorização e repetição de fórmulas.

Piaget (1978) nos lembra que aprender não é só receber informações passivamente, é construir conhecimento, colocando a mão na massa. O jogo se torna um espaço privilegiado de avanço, durante a interação lúdica, seja com colegas ou com o professor, o aluno é desafiado a ir além do que sabia, internalizando conceitos e estratégia. O jogo, assim, não apenas potencializa a construção do conhecimento, como destacou Piaget (1978), mas também socializa o aprendizado, tornando-o significativo e colaborativo, uma vez que possibilita o engajamento e proatividade dos alunos envolvidos.

Durante o jogo, o estudante precisa assimilar novos conceitos, mas também reorganizar seu jeito de pensar ao enfrentar desafios que pedem raciocínio e reflexão. Por isso, o formato do jogo, que usa cartas com problemas geométricos e exige seguir etapas lógicas para resolver cada desafio, está completamente alinhado com essa ideia construtivista. Ao mexer nas cartas, planejar a jogada e justificar as decisões, o aluno se torna protagonista do próprio aprendizado, construindo, passo a passo, um entendimento mais sólido e real dos conceitos da Geometria. Não é um conteúdo dado de forma pronta, mas um convite para descobrir, experimentar e validar hipóteses a partir da própria vivência. O erro faz parte do processo e o desafio é um fator motivador e lúdico.

Complementando isso, Sérgio Lorenzato (2006) traz um olhar muito importante: ele defende que trabalhar com materiais concretos no ensino da Matemática é uma maneira eficaz de facilitar a compreensão. É na visualização, na manipulação e na reflexão sobre esses materiais que o conhecimento se torna mais real e compreensível. No jogo proposto, as cartas funcionam como esses instrumentos concretos, que representam símbolos e situações geométricas, ajudando o aluno a fazer a ponte entre o complexo e o concreto. Além disso, Lorenzato (2006) ressalta que o papel do professor é fundamental para guiar essa atividade. Ele deve acompanhar de perto, certificando-se de que o aprendizado está realmente acontecendo e que o jogo não vire apenas uma distração. E também confirmado por Borin (1998, p. 79): “não é ensinar os alunos a jogar, mas mantê-los mentalmente ativos, para que possam construir o seu conhecimento através do pensamento lógico matemático”, ou seja, ter um mentor para intermediar a partida, no caso um juiz (mediador ou um avaliador).

A presença de um juiz durante o jogo é fundamental para garantir que a experiência seja não apenas divertida, mas também formativa. Essa figura atua como, um mediador, aplicando as regras com clareza e imparcialidade, o que assegura um ambiente justo, sem vantagens indevidas, participativo e desafiador. Além disso, o mediador transmite conhecimentos no momento mais propício: quando o aluno está engajado e motivado pela dinâmica lúdica. Ele explica conceitos, esclarece dúvidas, ajuda os jogadores a relacionarem as jogadas com os conteúdos matemáticos em estudo e faz a manipulação de materiais como cartas de modo organizado e pedagógico. Dessa forma, o juiz não só mantém a fluidez do jogo, mas também potencializa a aprendizagem, transformando cada partida em uma oportunidade de construção ativa do saber.

A mecânica do jogo é estruturada em fases e desafios gradativos, pensando sempre no ritmo de cada estudante. Isso respeita o tempo de cada um e permite que os conceitos sejam absorvidos em níveis que aumentam sua complexidade aos poucos. Assim, o pensamento lógico vai se organizando à medida que o aluno reflete sobre cada etapa necessária para solucionar os problemas geométricos, algo essencial para fortalecer o raciocínio matemático. Como as cartas trazem diferentes graus de dificuldade, o jogo pode ser adaptado a vários perfis de alunos, promovendo inclusão e um ensino mais personalizado.

A escolha de um jogo como ferramenta para ensinar Geometria plana tem um motivo claro: tornar o aprendizado mais prazeroso e envolvente. A dimensão lúdica desperta o interesse do estudante e mantém seu engajamento durante a atividade. Ao seguir o pensamento de Piaget (2010) e Lorenzato (2006), fica evidente que o jogo não é um fim, mas um meio, um recurso que estimula a construção ativa do conhecimento, a experimentação e uma reflexão crítica que são tão importantes para desenvolver o pensamento geométrico, especialmente no ensino médio.

> Esta definição aplica-se também à própria inteligência. A inteligência é de fato assimilação na medida em que incorpora todos os dados da experiência. Quer se trate do pensamento que, graças ao juízo, faz entrar o novo no já conhecido, reduzindo assim o Universo às suas próprias noções, quer se trate da inteligência [...] (Piaget, 2010, p. 30).

Outro aspecto importante é, segundo Lorenzato (2006), o erro, quando trabalhado pelo professor como um indicador de caminhos a revisar, torna-se um aliado da construção do conhecimento.

Desta forma, a presente investigação evidencia a importância das metodologias ativas e recursos didáticos inovadores no ensino da Matemática, especialmente na Geometria Plana. O desenvolvimento do Jogo de Cartas de Geometria Plana constitui uma proposta que se alinha às demandas da educação, contribuindo para tornar o aprendizado mais dinâmico, participativo e significativo.

O produto educacional proposto possibilita ao aluno desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a autonomia intelectual por meio da ludicidade. Assim como defendido por autores como Lorenzato (2006) e Piaget (2010), o jogo atua como mediador entre o conhecimento formal e o processo de descoberta individual e coletiva, favorecendo a construção de saberes a partir da interação social e da resolução de desafios.

A validação do Jogo foi conduzida em nível conceitual e pedagógico, considerando sua coerência com as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e sua aplicabilidade no contexto do Ensino Médio. Embora o produto ainda não tenha sido testado empiricamente em sala de aula, a análise de estudo de natureza teórica realizada permite compreender seu potencial didático e sua relevância como recurso de apoio ao professor.

O jogo propicia o desenvolvimento de competências como a identificação e o reconhecimento de propriedades geométricas, o estabelecimento de relações entre conceitos e a aplicação prática dos conteúdos estudados. Através de cartas que representam definições, teoremas, elementos de congruência e semelhança, os estudantes são incentivados a aplicar seus conhecimentos de maneira criativa e contextualizada. Essa dinâmica favorece a comunicação matemática, a troca de ideias e o trabalho colaborativo, reforçando o protagonismo discente.

Entre os principais resultados esperados, a partir da análise da situação proposta, é possível inferir que a hipótese estabelecida na metodologia se sustenta parcialmente:

a) Apresenta potencial para atuar como uma ferramenta de apoio ao professor;
b) Possibilita a identificação de possíveis dificuldades e potencialidades dos alunos no estudo da Geometria;
c) O uso do recurso lúdico pode contribuir para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e raciocínio geométrico, favorecendo a interpretação de propriedades e relações entre figuras;
d) Pode despertar o interesse e a motivação dos estudantes, tornando o processo de retomada de conhecimento mais prazeroso e interativo;

e) Apresenta potencial para incentivar a construção de estratégias de resolução de problemas geométricos, priorizando o raciocínio lógico e a argumentação dedutiva.

Esses resultados esperados sugerem que o produto educacional apresenta potencial para atender aos objetivos propostos, reforçando o potencial dos jogos didáticos como instrumentos mediadores no ensino da Matemática. O Jogo de Geometria Plana, mais do que um simples baralho, apresenta aderência ao contexto escolar ao oferecer um material concreto, configurando-se como um Produto Educacional pela maneira como os conceitos matemáticos são trabalhados e pela metodologia pensada para seu uso em sala.

Seu impacto nos processos cognitivos manifesta-se ao possibilitar práticas pedagógicas mais dinâmicas, incentivando metodologias lúdicas e interativas que não comprometem o rigor conceitual, mas dialogam com a necessidade de tornar as aulas mais significativas. A aplicabilidade do recurso se evidencia pelo uso de materiais de baixo custo e por regras claras, facilitando sua reprodução em diferentes contextos escolares e permitindo que outros professores adotem o jogo sem dificuldades.

A inovação está em propor uma abordagem voltada à análise crítica dos passos de resolução, incorporando elementos que promovem reflexão e argumentação matemática. Nesse processo, a complexidade pedagógica aparece com a inclusão da figura do “juiz”, que valoriza o papel do educador ao mesmo tempo em que organiza a dinâmica coletiva, estimulando colaboração e debate entre os estudantes.

Assim, o Jogo de Geometria Plana integra-se a um conjunto de experiências que mostram como novas metodologias podem tornar as aulas mais atrativas e participativas, promovendo uma relação mais horizontal entre professor e aluno quando adequadamente planejadas e orientadas. Em síntese, o produto educacional desenvolvido contribui para o aprimoramento das práticas pedagógicas e possibilita ao aluno uma vivência significativa dos conceitos geométricos, com formato acessível e fácil reprodução que favorece sua utilização em diversos cenários escolares.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, buscamos evidenciar como a inserção de práticas lúdicas nas aulas de Matemática pode transformar significativamente a experiência de mobilização de conhecimento dos estudantes do Ensino Médio. Observamos que a construção de um espaço pedagógico em que o prazer e o desafio intelectual caminham juntos representa uma alternativa viável para superar as dificuldades tradicionalmente enfrentadas no ensino dessa disciplina.

Os jovens que frequentam o Ensino Médio encontram-se em uma fase de transição, na qual os conceitos matemáticos se intensificam consideravelmente. Nesse contexto, torna-se fundamental oferecer metodologias que dialoguem com suas expectativas e que os mantenham engajados no processo educativo. As abordagens lúdicas emergem como uma resposta adequada a essa demanda, favorecendo uma retomada de conteúdo ativa, significativa e prazerosa.

Com base no referencial teórico consultado, que reúne contribuições de pesquisadores reconhecidos nas áreas de Educação e Educação Matemática, podemos afirmar que existe um consenso crescente sobre os benefícios pedagógicos dessas estratégias. Os jogos, quando criteriosamente planejados e integrados ao currículo assumem uma função didática relevante, capaz de mobilizar diferentes habilidades cognitivas dos estudantes.

A aplicação de atividades lúdicas no Ensino Médio estimula competências essenciais, como o raciocínio lógico, a capacidade de antecipar consequências, a formulação e testagem de hipóteses, além de promover a interação social e o trabalho colaborativo. Esses elementos são fundamentais não apenas para a compreensão dos conteúdos matemáticos, mas também para a formação integral dos jovens, preparando-os para os desafios acadêmicos e profissionais futuros.

Nossa experiência teórica e as evidências coletadas por outros autores durante este estudo demonstram que os estudantes respondem positivamente quando são expostos a metodologias diferenciadas. O aumento da motivação e do interesse pela disciplina reflete-se em uma compreensão mais sólida dos conceitos trabalhados, além de contribuir para a construção de uma relação mais positiva com a Matemática.

Diante desse cenário, o presente trabalho surgiu a partir de uma preocupação social que aflige grande parte das escolas, especialmente as da rede pública estadual, a defasagem no aprendizado da Matemática. Desde a introdução desta dissertação, foi apresentado que essa lacuna é evidenciada pelos baixos índices de aproveitamento escolar e pela falta de interesse de muitos alunos pela disciplina. Assim, buscou-se propor uma alternativa metodológica capaz de tornar o ensino mais atrativo e significativo, recorrendo a uma abordagem prazerosa e participativa.

A partir dessa perspectiva, desenvolveu-se um jogo didático voltado ao ensino da Geometria Plana, concebido como uma ferramenta pedagógica inovadora. O Jogo constitui, portanto, o produto educacional desta dissertação, assumindo o papel de mediador entre o conhecimento formal e a de mobilização de conhecimento ativa.

Paralelamente à elaboração do jogo, foi estruturado um referencial teórico sólido, fundamentado em autores clássicos da Educação, Aprendizagem baseada em jogos e da Psicologia da Aprendizagem, que justificam o uso do lúdico como instrumento de ensino. Também foram analisados trabalhos similares, que serviram como referência e contribuíram para fortalecer a relevância desta proposta. Além disso, assegurou-se que o produto estivesse alinhado às legislações e diretrizes educacionais vigentes, especialmente às habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), garantindo sua coerência com as demandas da educação atual. Dessa forma, o jogo não se apresenta apenas como um recurso recreativo, mas como um instrumento que mobiliza conteúdos disciplinares, promove o raciocínio lógico e estimula o protagonismo do aluno.

Na elaboração do produto, buscou-se atender aos critérios estabelecidos pela CAPES para os Produtos Educacionais da área de Ensino, assegurando que o projeto contemplasse uma questão de pesquisa, objetivos, hipóteses e justificativa pedagógica. Todos esses elementos mostraram-se coerentes entre si e plenamente atendidos pelo desenvolvimento do Jogo, confirmando a contribuição desta dissertação para o campo do Ensino de Matemática.

Portanto, defendemos a incorporação intencional de estratégias lúdicas no planejamento pedagógico dos professores de Matemática do Ensino Médio. Essas práticas devem ser compreendidas não como um recurso complementar ou eventual, mas como uma ferramenta legítima e eficaz dentro do processo de ensino e de revisão de conhecimento. Quando articuladas aos objetivos curriculares e às necessidades dos alunos, as atividades lúdicas revelam seu potencial transformador, tornando a Matemática mais acessível, compreensível e, sobretudo, significativa para os estudantes.

REFERÊNCIAS

BARRADAS, Rolando; LENCASTRE, José. **Gamification e game-based learning: estratégias eficazes para promover a competitividade positiva nos processos de ensino e de aprendizagem.** Revista Investigar em Educação, v. 2, n. 6, 2017. Disponível em: https://ojs.up.pt/index .php/spce/article/view/1697/1000. Aceso em 06 dez. 2025.

BARROS, Márcia Graminho Fonseca Braz; MIRANDA, Jean Carlos; COSTA, Rosa Cristina. **Uso de jogos didáticos no processo ensino-aprendizagem**. Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 19, n. 23, 1º out. 2019. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu. br/artigos/19/23/uso-de-jogos-didaticos-no-processo-ensino-aprendizagem>. Acesso em: 22 out. 2025.

BISSOLOTTI, Mariane de Lima; TITON, Flaviane Predebon. **Diagnóstico sobre as dificuldades de aprendizagem da geometria no ensino médio e os potenciais elementos facilitadores.** *Contraponto: Discussões Científicas e Pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação*, Blumenau, v. 3, n. 4, p. 5–22, 2022.

BORIN, Julia Ferreira. **O jogo e o lúdico na formação de conceitos matemáticos**. 2. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1996.

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática.** São Paulo: IME-USP, 1998.

BRASIL. MEC/SEB. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 24 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. MEC/SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 5ª a 8ª séries.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ matematica.pdf>. Acesso em: 24 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília**: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental / Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal .pdf>. Acesso em: 24 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03 /Leis/L9394.htm>. Acesso em: 24 set. 2025.

CAMPOS, Ana Maria Antunes de; MANRIQUE, Ana Lúcia. **Ansiedade matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: a influência dos pares, pais e professores**. VIDYA, Santa Maria, v. 40, n. 2, p. 459–473, jul./dez. 2020.

CARVALHO, Carlos Vaz de**. Aprendizagem baseada em jogos**. In: *WORLD CONGRESS ON SYSTEMS ENGINEERING AND INFORMATION TECHNOLOGY (WCSEIT)*, 2., 2015, Vigo, Espanha. Anais [...]. Vigo: COPEC, 2015. p. 176–181.

CUMBE, Sónia Sara. **Scaffolding: um recurso sociointeracional na sala de aula de língua chinesa (Moçambique).** REH - Revista Educação e Humanidades, [S. l.], v. 5, n. 1, p. 102–123, 2024. Disponível em: [link se houver]. Acesso em: 22 abr. 2026.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Desafios da Educação Matemática no novo milênio. Educação Matemática em Revista,** São Paulo, ano 8, n. 11, p. 14–17, dez. 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 2012.

DINIZ, Maria Ignez. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio: Matemática.** [S.l.]: [s.n.], 2018. Disponível em: <https://www.institutoreuna.org.br/uploads/2020/06/percurso_AF_MAT_Livro_-1.pdf>. Acesso em: 22 out. 2025.

DOMINGUES, Cristiane Coelho Barbosa. **Aprendizagem em Geometria por meio do jogo de tabuleiro "Trilha Geométrica": algumas contribuições.** 2023. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira. **Produtos educacionais na área de ensino da CAPES: o que há além da forma?** *Revista Educação Profissional e Tecnológica (EPT)*, [S. l.], v. 4, n. 1, 2021. DOI: <https: //doi.org/10.36524/profept.v5i2.1229>.

GALLAGHER, Kevin. **Resolvendo problemas com o uso da Matemática recreativa**. In : KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (org.). A resolução de problemas naMatemática Escolar. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 235-246.

GARCIA, H. H. G. O. **Adolescentes em grupo: aprendendo a cooperar em oficina de jogos**. 2010. Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

GOMES-MALUF, Marcilene Cristina; SOUZA, Aguinaldo Robinson de. **A ficção científica e o ensino de ciências: o imaginário como formador do real e do racional.** *Ciência & Educação (Bauru),* Bauru, v. 14, n. 2, p. 271–282, 2008.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto de sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. Trad. João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 1971.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **O jogo e a Educação Infantil**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2005.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar Geometria?** *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, São Paulo, n. 4, p. 3–13, 1995.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artmed, 2000.

MATH10, José. [@josemath10]. (s.d.). **Publicações [Perfil do Instagram].** Instagram. Recuperado em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://www.instagram.com/josemath10/>.

PAIS, Luis Carlos. **Intuição, experiência e teoria geométrica.** Zetetiké, Campinas, v.4, n. 6, p. 65-74, jul.-dez.1996.

PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recurso didático na formação de professores. In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2012. p. 11–32.

PIAGET, Jean. **Play, dreams and imitation in childhood.** New York: W. W. Norton & Company, 1951.

PIAGET, Jean**. Seis estudos de psicologia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1964.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança**: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Tradução de Álvaro Cabral e Othon Montenegro Vilela. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PIAGET, J. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas**. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação.** Trad. Álvaro Cabral; Christiano Monteiro Oiticica. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia.** Trad. Maria A. M. D’Amorim. 17. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1999.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

PIAGET, Jean**. A psicologia da criança.** 11. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2015.

REZENDE, Adriano Alves de; CARRASCO, Eduardo; SILVA-SALSE, Ângela. **Aprendizagem baseada em jogos e gamificação como instrumentos para o desenvolvimento do pensamento crítico na matemática: uma revisão teórica.** *Revista de Estudos em Educação e Diversidade (REED)*, [S. l.], v. 3, n. 8, p. 1–18, 2022. DOI: 10.22481/reed.v3i8.10654. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/reed/article/view/10654. Acesso em: 6 dez. 2025.

RODRIGUES, Wilton Conegundes**. Aprendizagem baseada em jogos aplicada ao ensino de Matemática.** *Revista Científica FESA*, [S. l.], v. 3, n. 10, p. 58–67, 2023. Disponível em: https://revistafesa.com/index.php/fesa/article/view/334. Acesso em: 9 dez. 2025.

SANTOS, Silvano Messias dos; ALMEIDA, Inês Maria Marques Zanfolin Pires de. **Medo de Matemática e trauma na relação com o aprender: uma leitura psicanalítica**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1263–1282, dez. 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/7vQhs3s9MYBFVpJ7xLWTPyR/?lang=pt>. Acesso em: 22 out. 2025.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. **Cadernos do Mathema: jogos de Matemática de 6º a 9º ano.** Porto Alegre: Artmed, 2007.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática: Ensino Médio.** v. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SULEIMAN, Amal Rahif. **O jogo e a Educação Matemática: possibilidades pedagógicas no Ensino Médio**. Revista Educação Pública, v. 22, n. 31, 16 de agosto de 2022.

SULEIMAN, Amal Rahif. **O jogo e a Educação Matemática: possibilidades pedagógicas no Ensino Médio.** Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 24, n. 41, 5 nov. 2024. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/41/o-jogo-e-a-educacao-matematica-possibilidades-pedagogicas-no-ensino-medio>. Acesso em: 22 out. 2025.

VALENTE, Adriano Felix. **Aplicação de jogos no ensino de geometria plana**. 2022. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Desenvolvimento de Jogos Digitais) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

ANEXO

Tabela 2 - Habilidades da BNCC do ensino médio

Código	Definição
EM13MAT105	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.
EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT505	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
EM13MAT506	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
EM13MAT509	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação (2018)

Tabela 3 - Habilidades da BNCC do ensino fundamental

Código	Definição
EF06MA20	Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
EF06MA24	Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
EF06MA25	Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.
EF06MA26	Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.
EF06MA27	Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
EF06MA29	Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
EF07MA22	Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
EF07MA23	Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
EF07MA25	Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
EF07MA26	Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
EF07MA27	Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
EF07MA28	Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
EF07MA31	Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
EF07MA32	Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

EF07MA33	Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
EF08MA14	Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
EF08MA17	Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
EF08MA19	Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
EF09MA11	Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
EF09MA12	Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
EF09MA13	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
EF09MA14	Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
EF09MA16	Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação (2018)

APÊNDICE A (REGRAS)

Este apêndice apresenta as regras do Jogo GP em sua forma original, mantendo o formato e o estilo que serão utilizados na versão impressa do produto educacional:

O JOGO GP
Preparação

O jogo é formado por **1 juiz** (mediador/avaliador/professor ou alguém com maior conhecimento do conteúdo) e por **3 jogadores** (alunos).

- O jogo possui **12 problemas de Geometria Plana**, divididos em três níveis de dificuldade: fácil, médio e difícil.
- A sugestão é que a partida seja jogada escolhendo **um nível de dificuldade** (somente fáceis, somente médios ou somente difíceis).
- Dentro do nível escolhido, o juiz seleciona **3 problemas** para a rodada.
- Para cada problema existem **7 cartas de passos de resolução**, algumas válidas e outras inválidas, que devem ser apresentadas **em ordem sequencial**, conforme indicado no **manual do juiz**.

Dinâmica do jogo

1. O juiz apresenta a primeira carta de um problema e pergunta ao jogador da vez:
    - “Essa carta é válida para resolver o problema? Por quê?”
2. O jogador deve responder **sim ou não**, sempre justificando sua escolha.
3. O juiz avalia a resposta:
    - Se correta → o jogador recebe **1 ponto**.
    - Se incorreta → não pontua, e a mesma pergunta passa para o próximo jogador.
4. Esse procedimento se repete até que todas as 7 cartas dos 3 problemas escolhidos tenham sido analisadas.
5. Caso os três jogadores (A, B e C) errem a resposta de uma carta, o juiz deve apresentar a resposta correta e explicar a justificativa conforme o manual do juiz. Em seguida, a partida prossegue normalmente, retornando a vez para o Jogador A na próxima carta.
6. O **manual do juiz** é fundamental, pois organiza a ordem das 7 cartas de cada problema e fornece as explicações correspondentes, servindo como guia para a condução correta da partida.

Critérios de justificativa

- A justificativa deve ter **ênfase maior nas cartas válidas**, destacando os conceitos matemáticos corretos que fundamentam a jogada.
- Para as cartas não válidas, também é necessária uma breve justificativa, explicando por que aquele passo não contribui para a resolução.
- O jogo valoriza a **flexibilidade pedagógica**: se o aluno apresentar uma justificativa alternativa bem fundamentada, mesmo que a carta não esteja marcada previamente como válida, o juiz (professor) tem autonomia para aceitar a resposta, desde que haja coerência matemática.

Exemplo de partida

- O juiz escolhe o **nível fácil** e seleciona 3 problemas desse grupo.
- No **Problema 1**, a primeira carta apresentada é:

  “Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa.”

- O juiz pergunta ao **Jogador A**:
  - “Essa carta é válida para resolver o problema 1? Por quê?”
- O Jogador A responde:
  - “Sim, é válida, porque o problema pede para encontrar a diagonal de um retângulo, e o Teorema de Pitágoras relaciona os lados ao comprimento da diagonal.”
- O juiz confirma a resposta, atribui **1 ponto** ao Jogador A, e passa a vez para o Jogador B com a próxima carta.
- Mais adiante, surge uma carta não válida:

  “Aplicar a fórmula da área do triângulo equilátero.”

- O **Jogador B** responde:
  - “Não, porque o problema envolve um retângulo, e essa fórmula não se aplica neste contexto.”
- O juiz valida a justificativa, atribui **1 ponto** ao Jogador B, e segue o jogo.
- Esse processo continua até o término das 7 cartas de cada um dos 3 problemas selecionados.
- Ao final, o juiz soma os pontos e declara o vencedor.

Observações adicionais

O exemplo apresentado não se concretiza no jogo, servindo apenas como **referência ilustrativa** para compreensão da dinâmica.

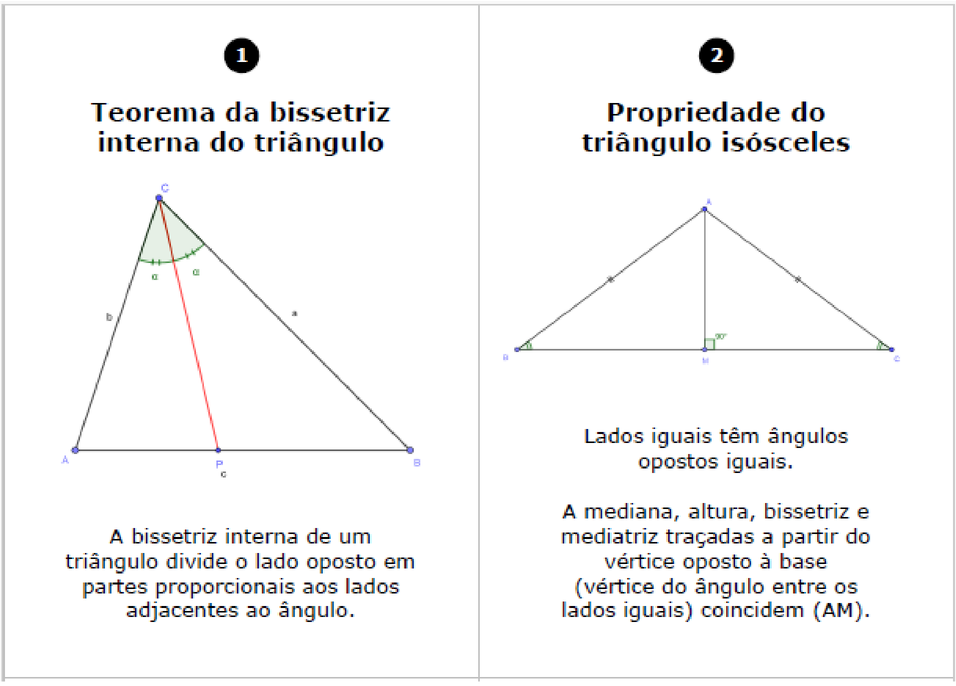
APÊNDICE B (CARTAS BRANCAS)

A seguir, apresenta-se o modelo completo das cartas brancas, conforme constam na versão impressa do jogo.

Definição

- As cartas brancas representam passos teóricos para a resolução dos problemas, baseados em conceitos matemáticos como definições, propriedades, teoremas e ideias gerais.
- Essas cartas não apresentam cálculos numéricos, mas sim os fundamentos que sustentam o raciocínio matemático.
- Nem todos os problemas permitem que todas as evidências conceituais estejam nítidas ou completas. Por isso, em cada problema são selecionados apenas os principais passos que conduzem à solução.
- O juiz (mediador) apresentará, em ordem, as cartas brancas correspondentes ao problema. Cada jogador deve analisar e responder se a carta ajuda (sim) ou não ajuda (não) na resolução do problema, sempre com justificativa.
- Dessa forma, o foco central do jogo está na análise crítica das cartas brancas, e não necessariamente em reconstruir toda a resolução passo a passo.
- Segue abaixo:

Figura 30 - Carta Branca (Passo: 1 e 2) – Apêndice B

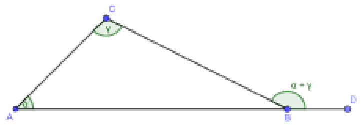


Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 31 - Carta Branca (Passo: 3, 4, 5 e 6) – Apêndice B

3

Teorema do ângulo externo do triângulo

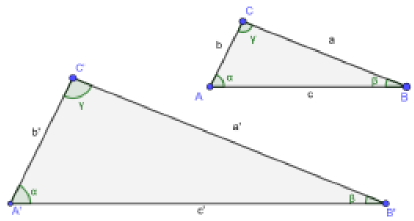


O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

∠CBD=∠CAB+∠ACB

4

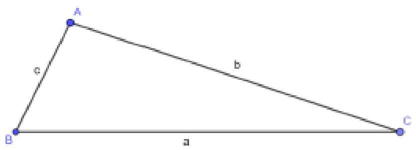
Critérios da semelhança de triângulos



Dois triângulos são semelhantes quando têm a mesma forma, ou seja, ângulos iguais e lados proporcionais. Isso acontece em três casos: AA, LAL e LLL.

5

Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo



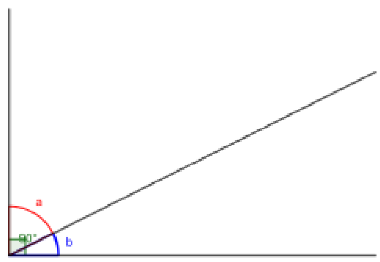
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = a+b+c = 2.p$$

Perímetro do triângulo é a soma dos comprimentos dos seus três lados.

6

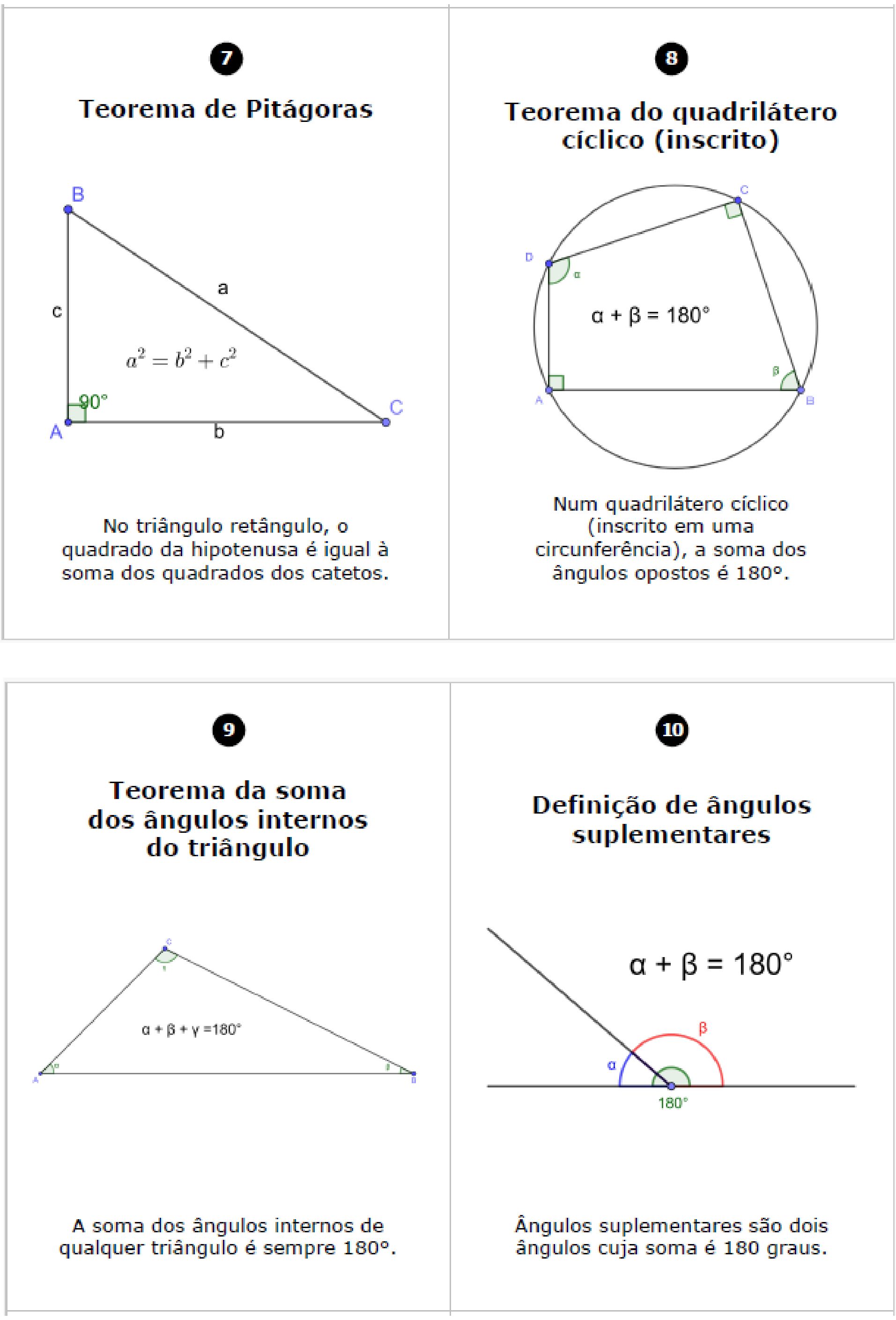
Definição de ângulos complementares



Ângulos complementares são dois ângulos cuja soma é 90 graus.

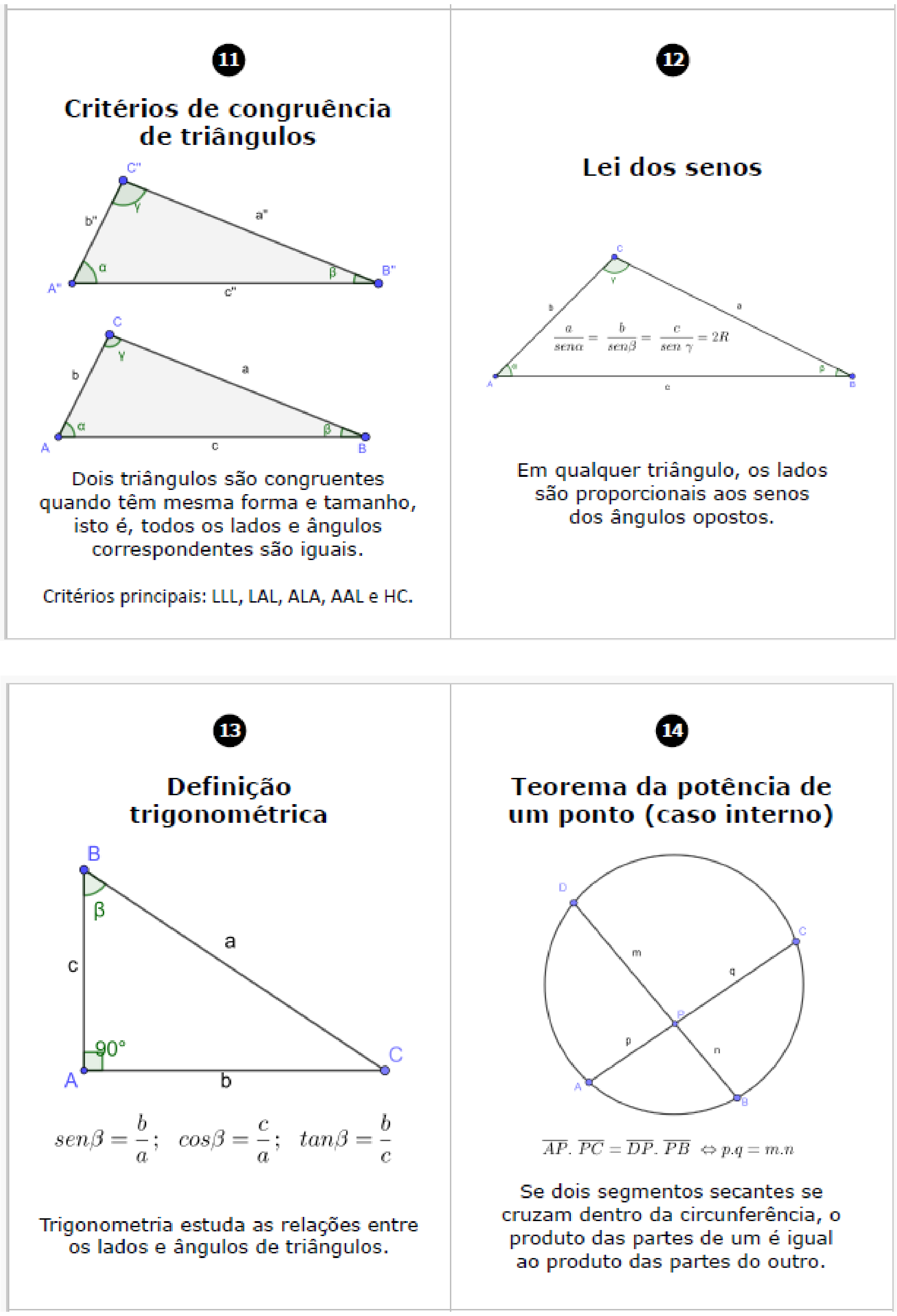
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 32 - Carta Branca (Passo: 7, 8, 9 e 10) – Apêndice B



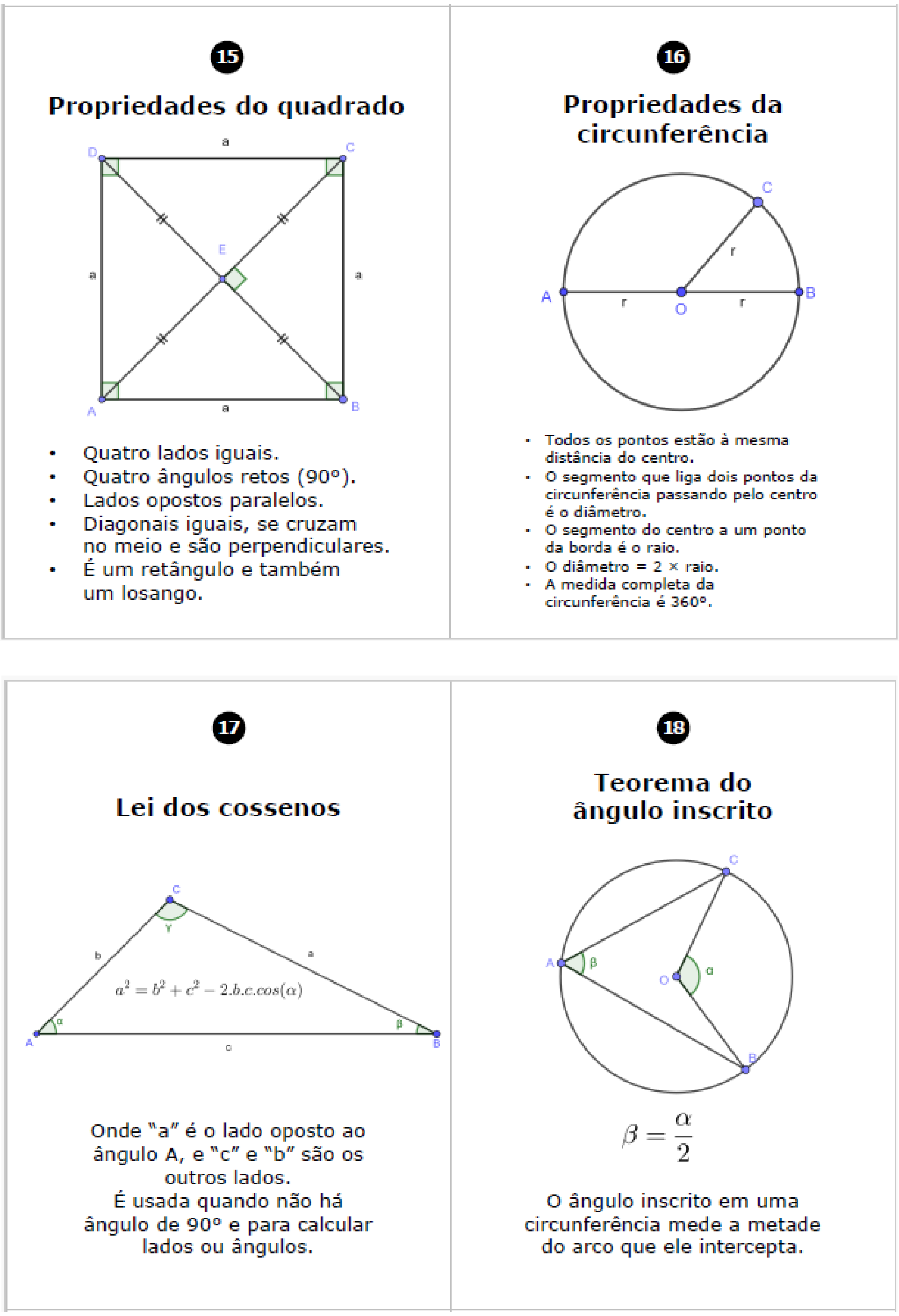
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 33 - Carta Branca (Passo: 11, 12, 13 e 14) – Apêndice B



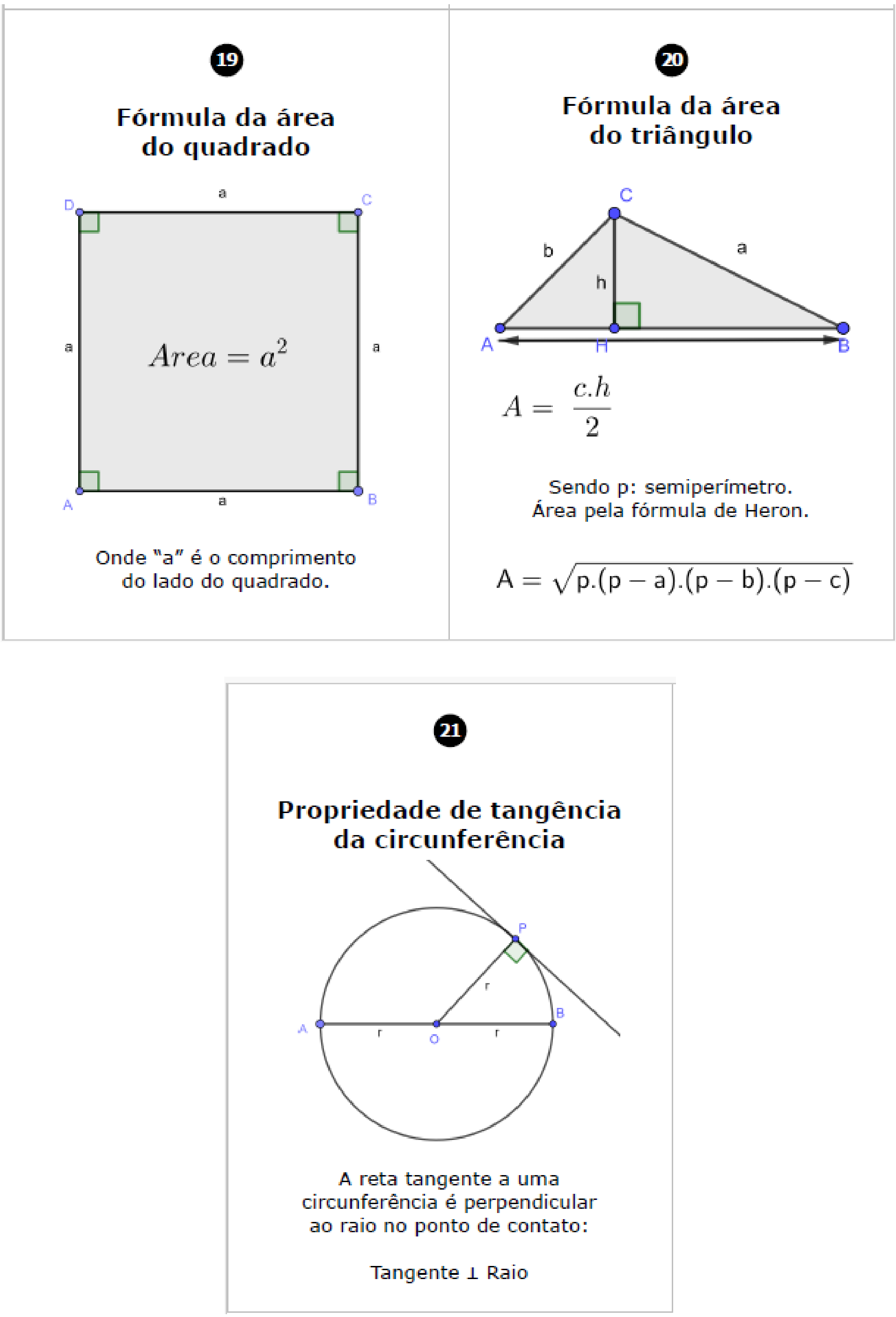
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 34 - Carta Branca (Passo: 15, 16, 17 e 18) – Apêndice B



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 35 - Carta Branca (Passo: 19, 20, e 21) – Apêndice B



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

APÊNDICE C (CARTAS LARANJAS)

Abaixo estão as definições e os problemas das cartas laranjas do jogo, conforme o material que será impresso e entregue aos participantes.

Definição

As cartas laranjas, conforme mencionado nas regras do jogo, representam os problemas de Geometria Plana. No total, são 12 perguntas, divididas em três níveis de dificuldade: **fácil, médio e difícil**.

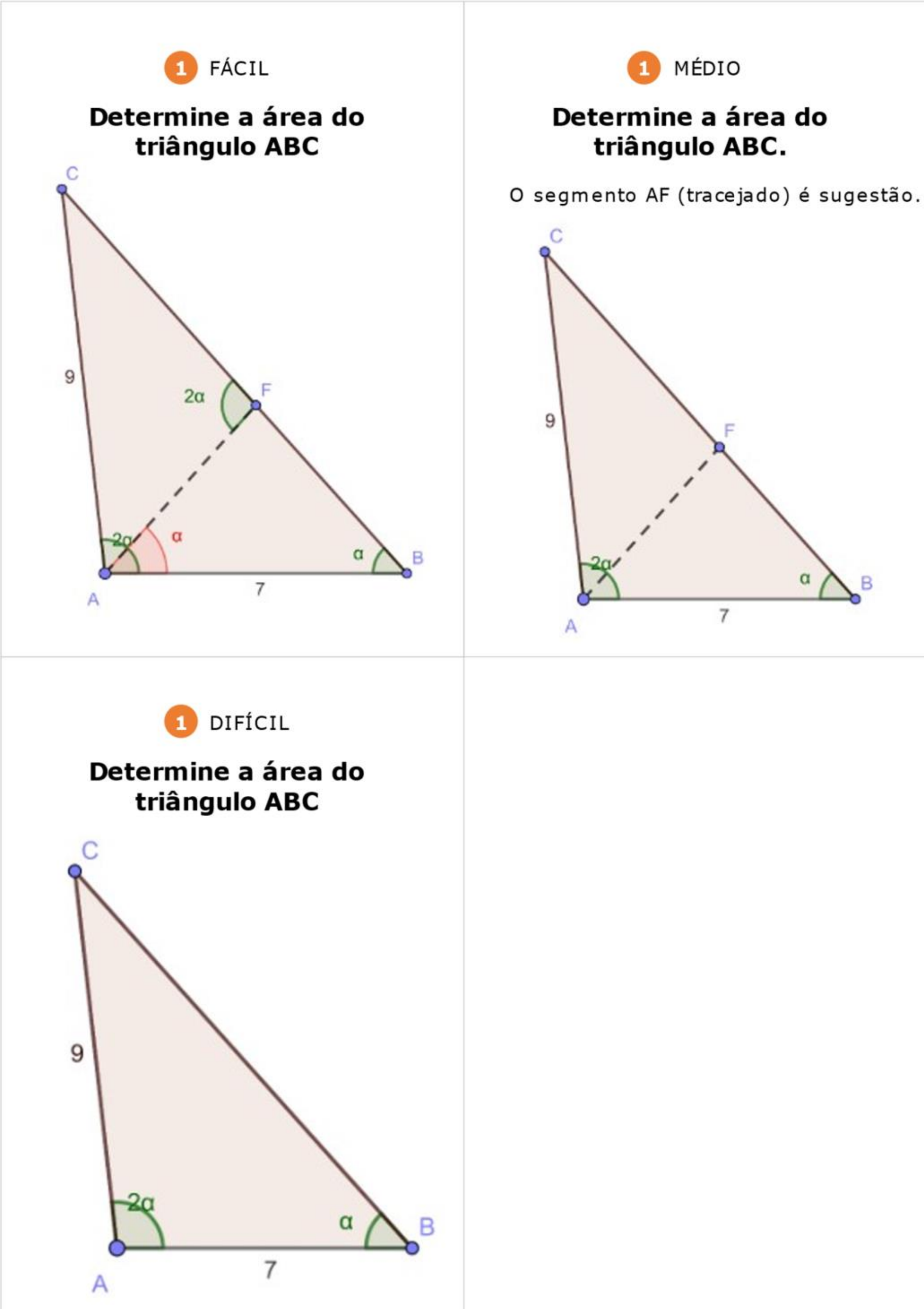
A pergunta difícil corresponde ao enunciado original do problema, enquanto as versões fáceis e médias foram adaptadas a partir dela, de modo a tornar o jogo mais acessível e dinâmico.

Durante a partida, o juiz seleciona três cartas laranjas, que podem ser escolhidas de forma aleatória ou proposital. Cada problema possui **sete passos possíveis** que aparecem como cartas brancas, podendo ou não contribuir para a sua resolução.

É importante destacar que o foco do jogo está na **análise crítica das cartas brancas**, e não necessariamente na reconstrução completa da solução passo a passo. Assim, uma carta laranja não implica, obrigatoriamente, na utilização de todas as sete cartas brancas correspondentes nem significa que apresentará todos os passos minuciosos da resolução.

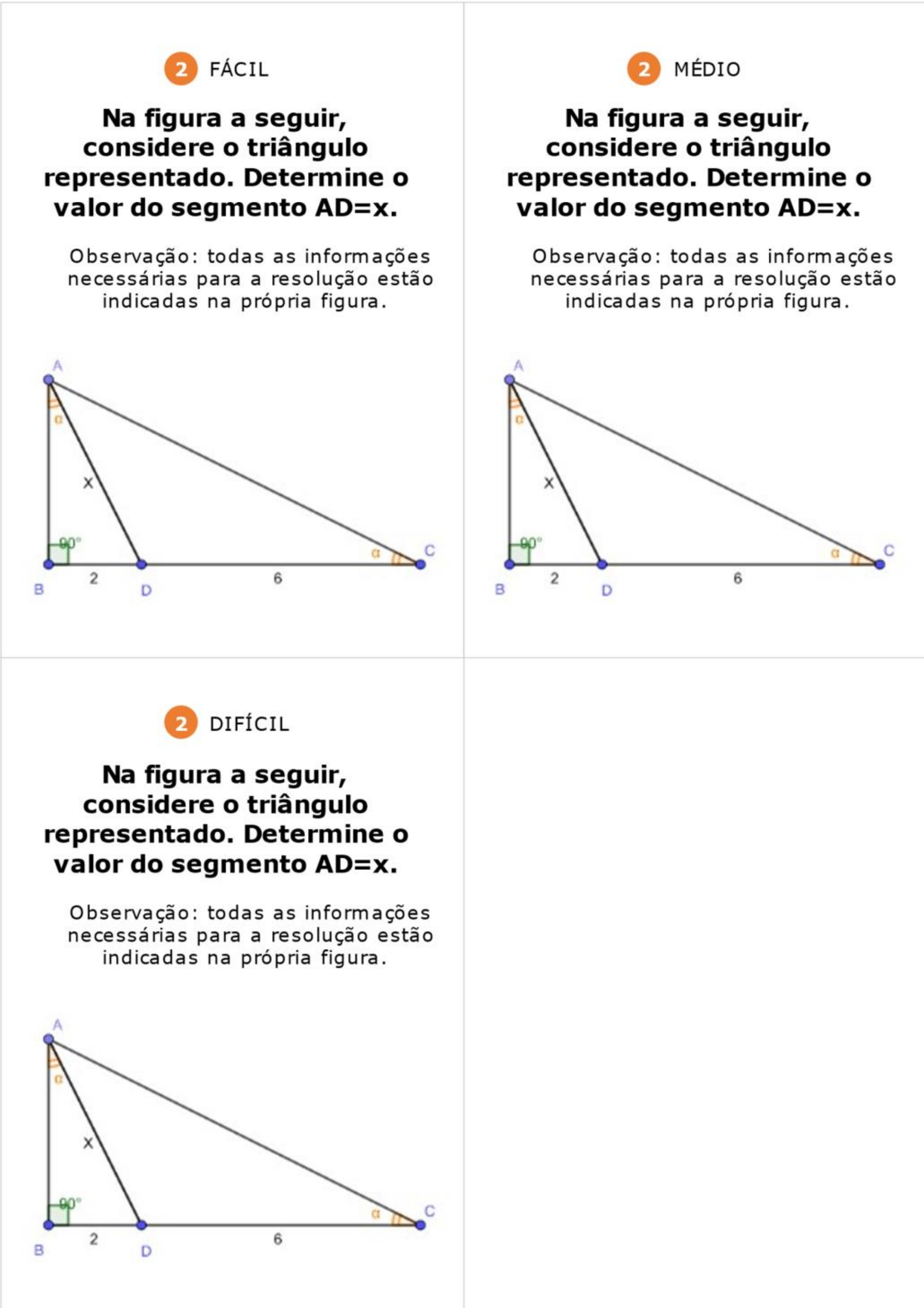
Segue abaixo os 12 problemas:

Figura 36 - Carta Laranja 1 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



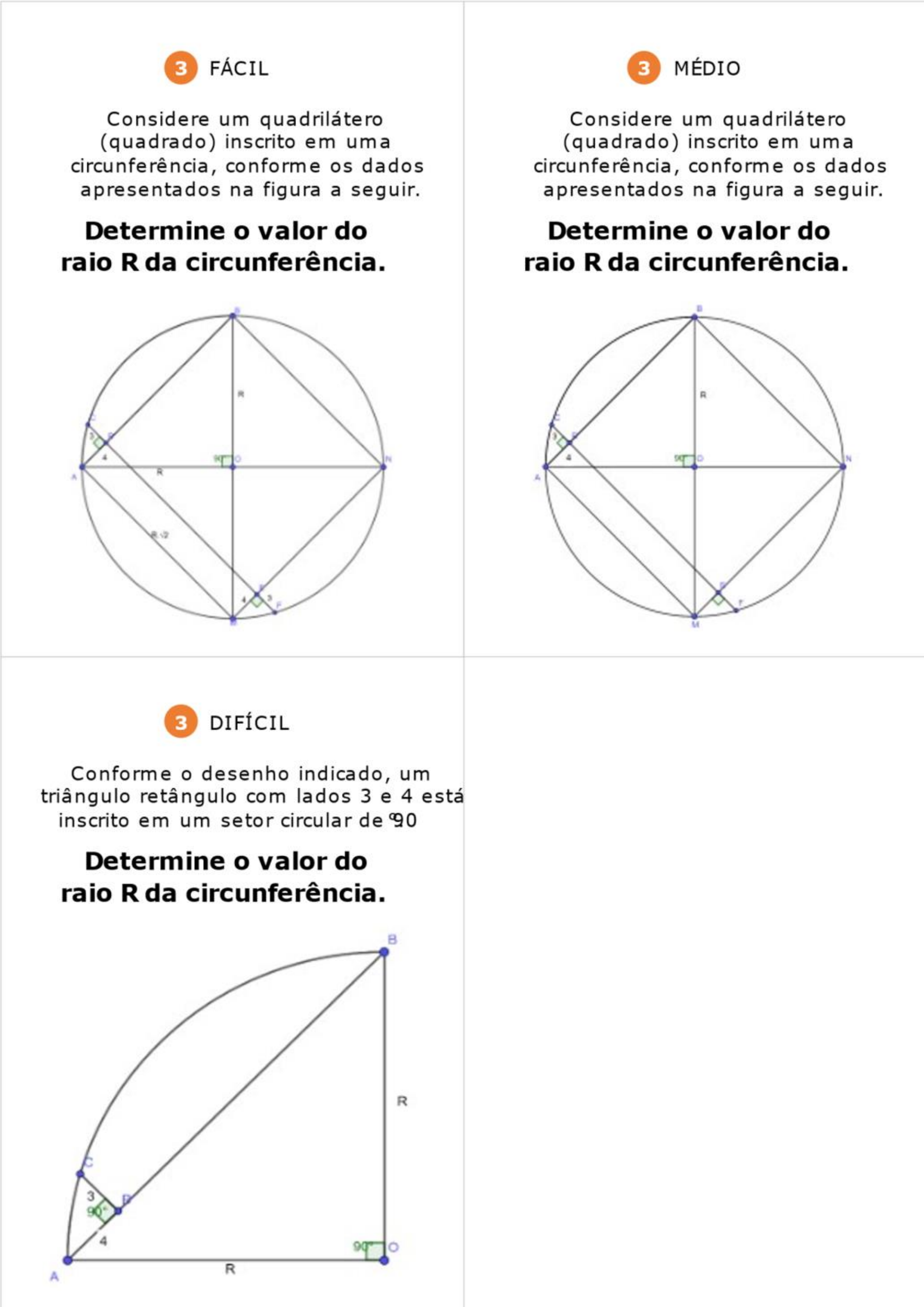
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 37 - Carta Laranja 2 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



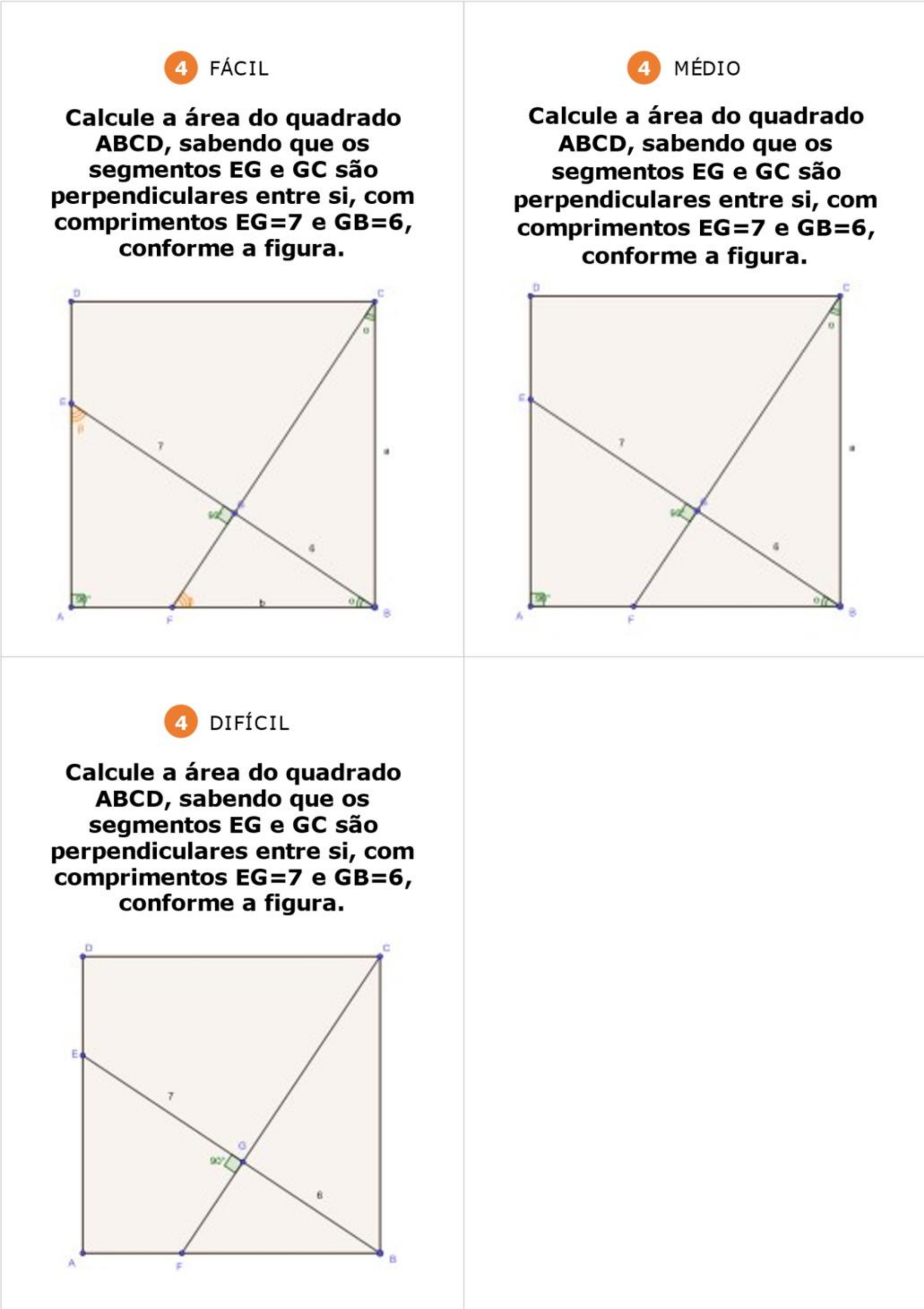
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 38 - Carta Laranja 3 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



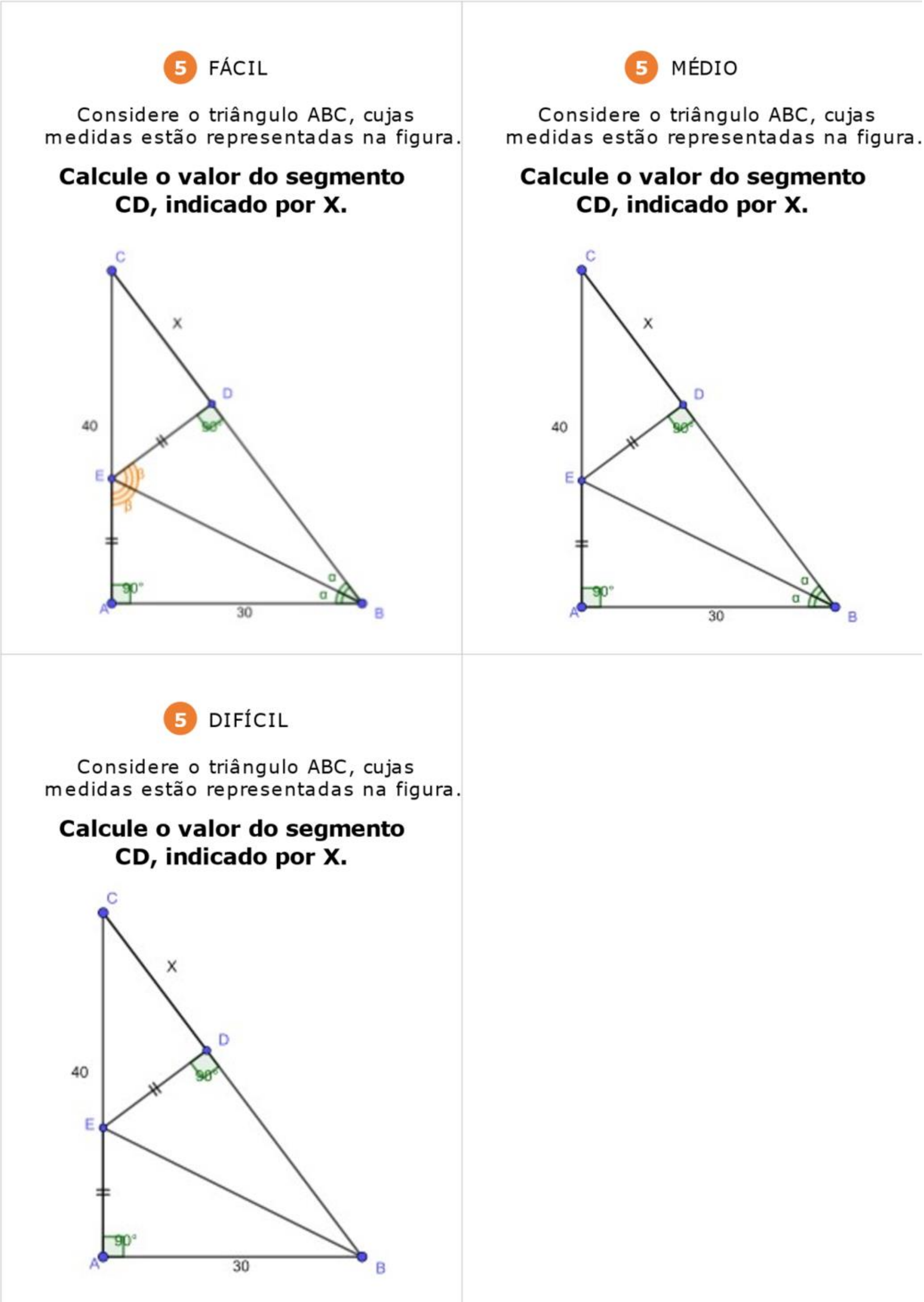
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 39 - Carta Laranja 4 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



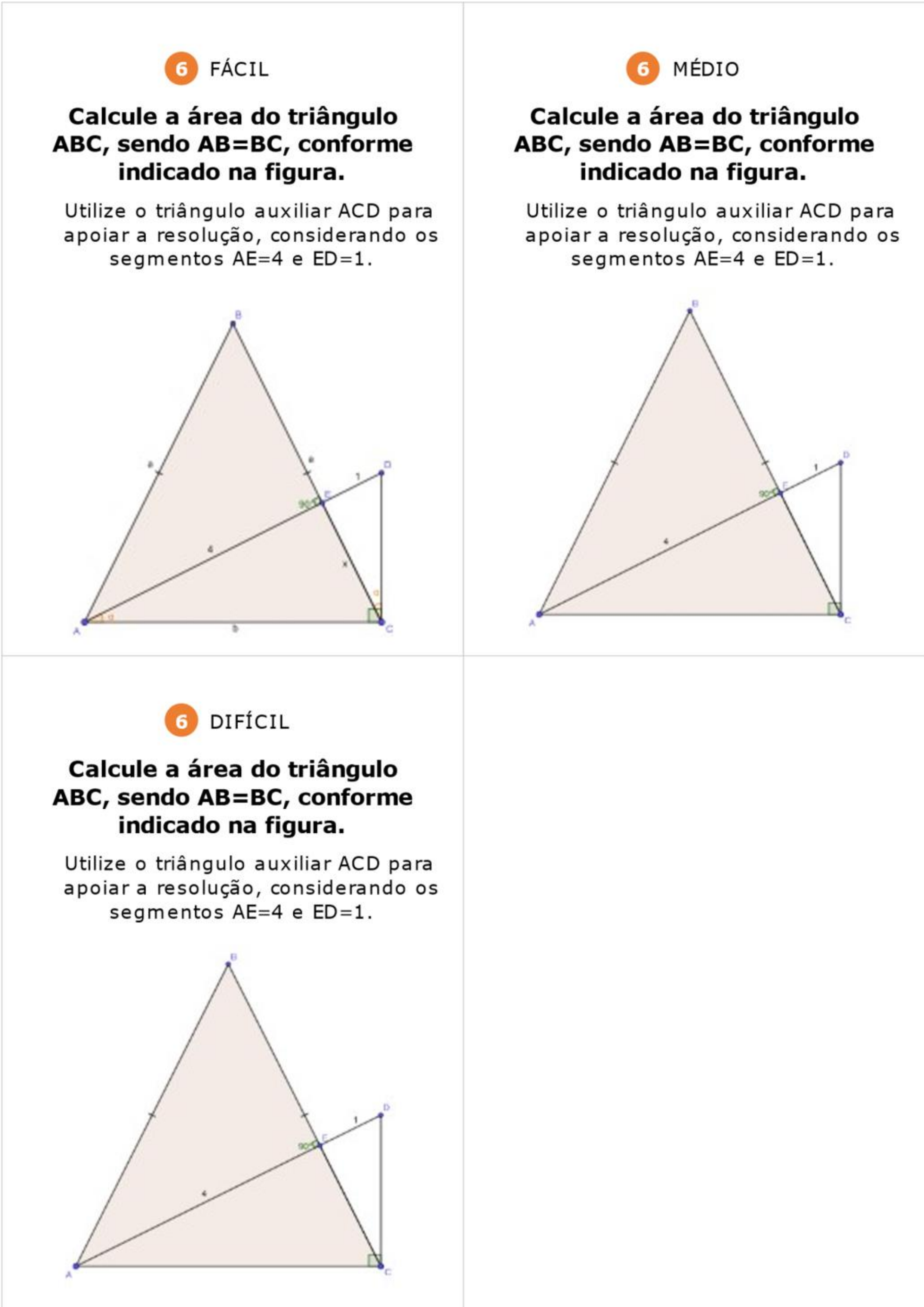
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 40 - Carta Laranja 5 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



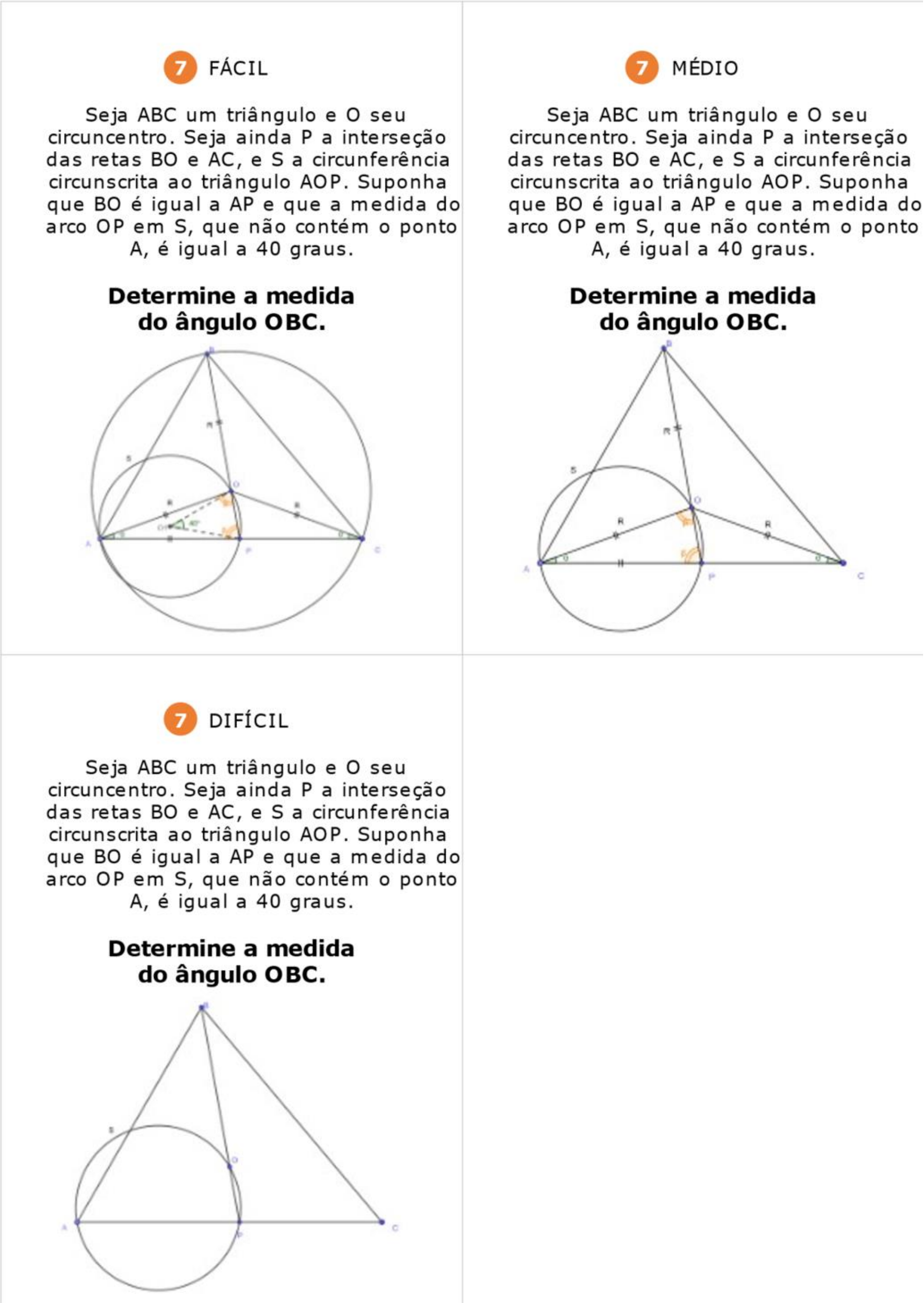
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 41 – Carta Laranja 6 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



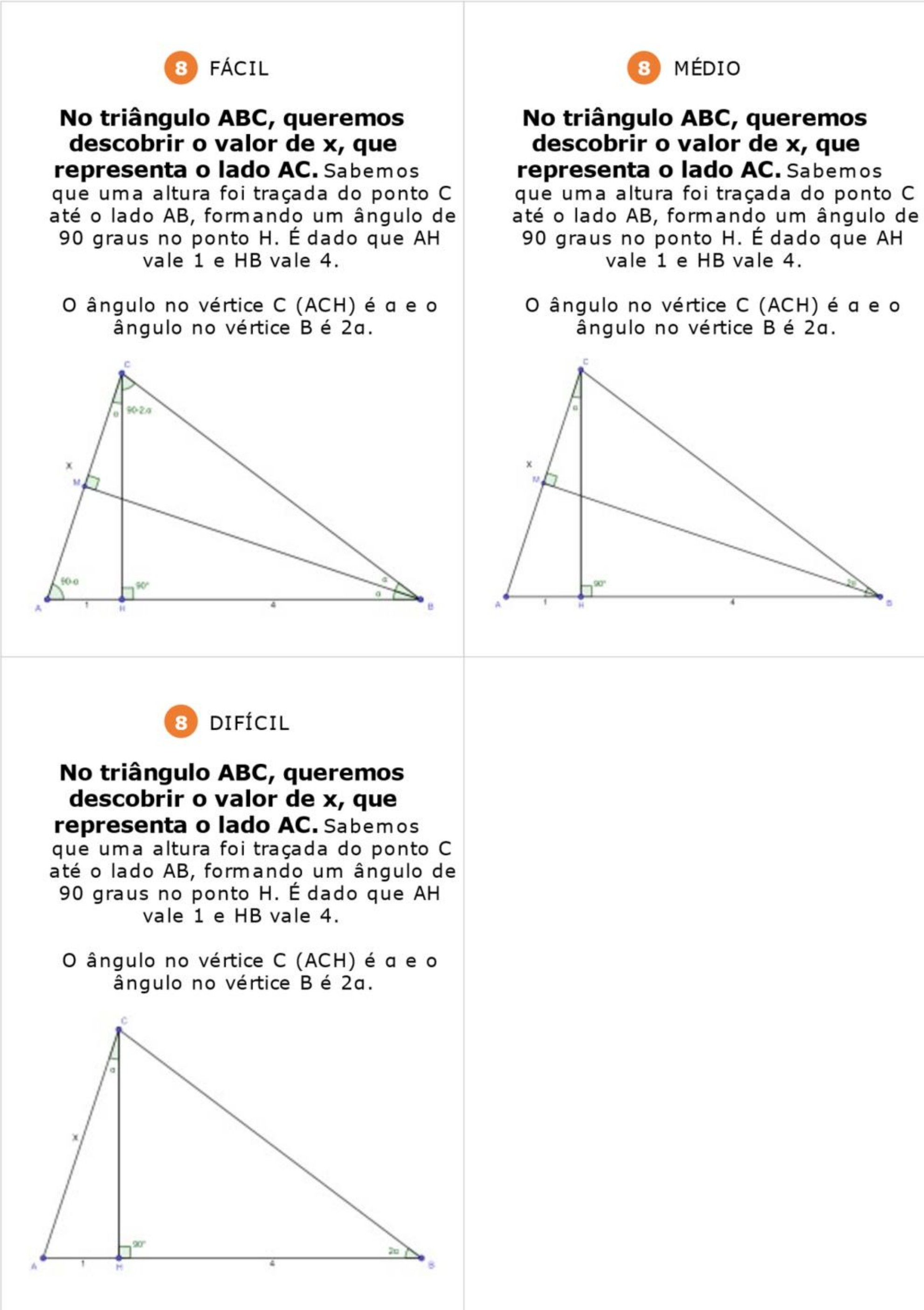
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 42 - Carta Laranja 7 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



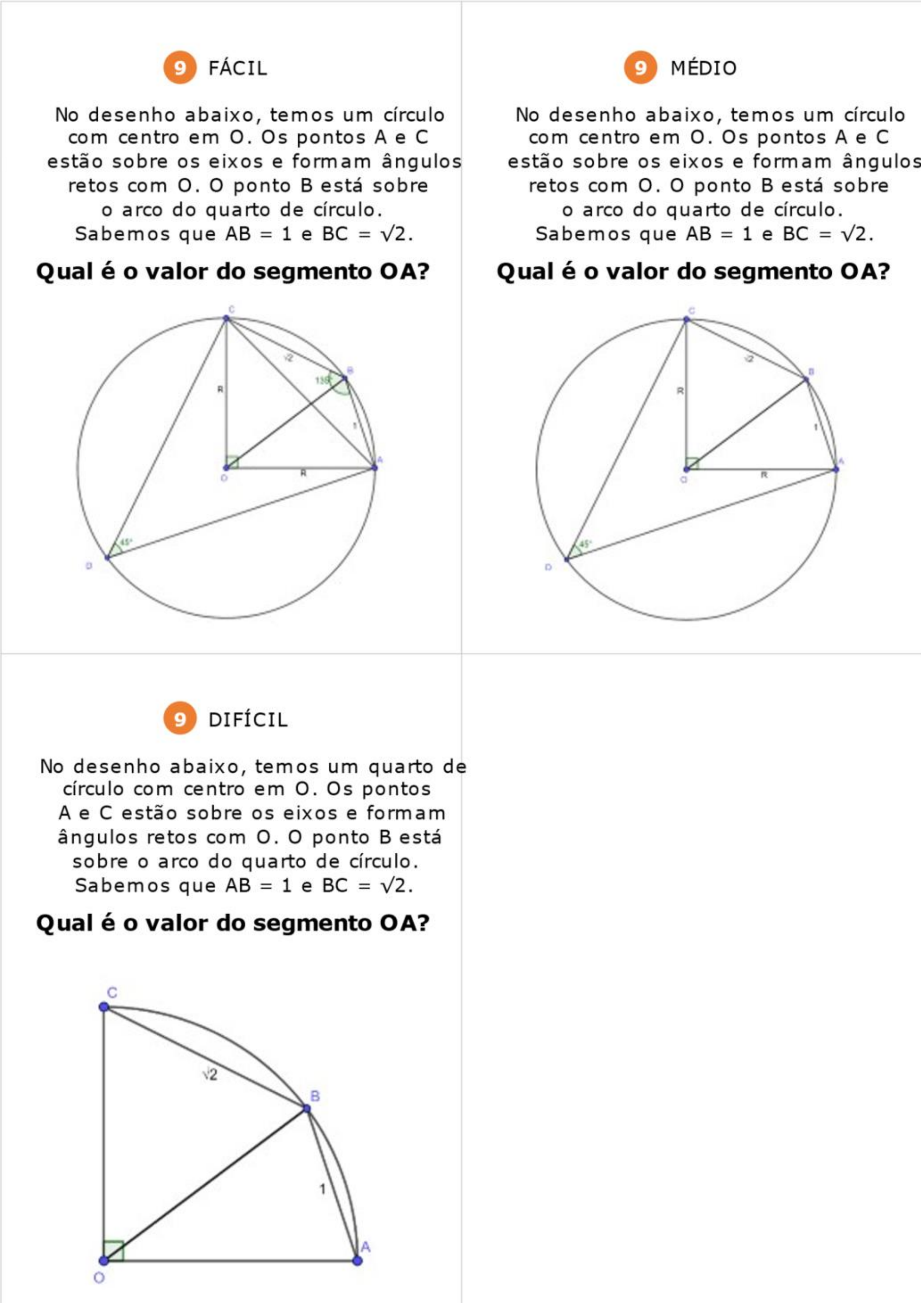
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 43 - Carta Laranja 8 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



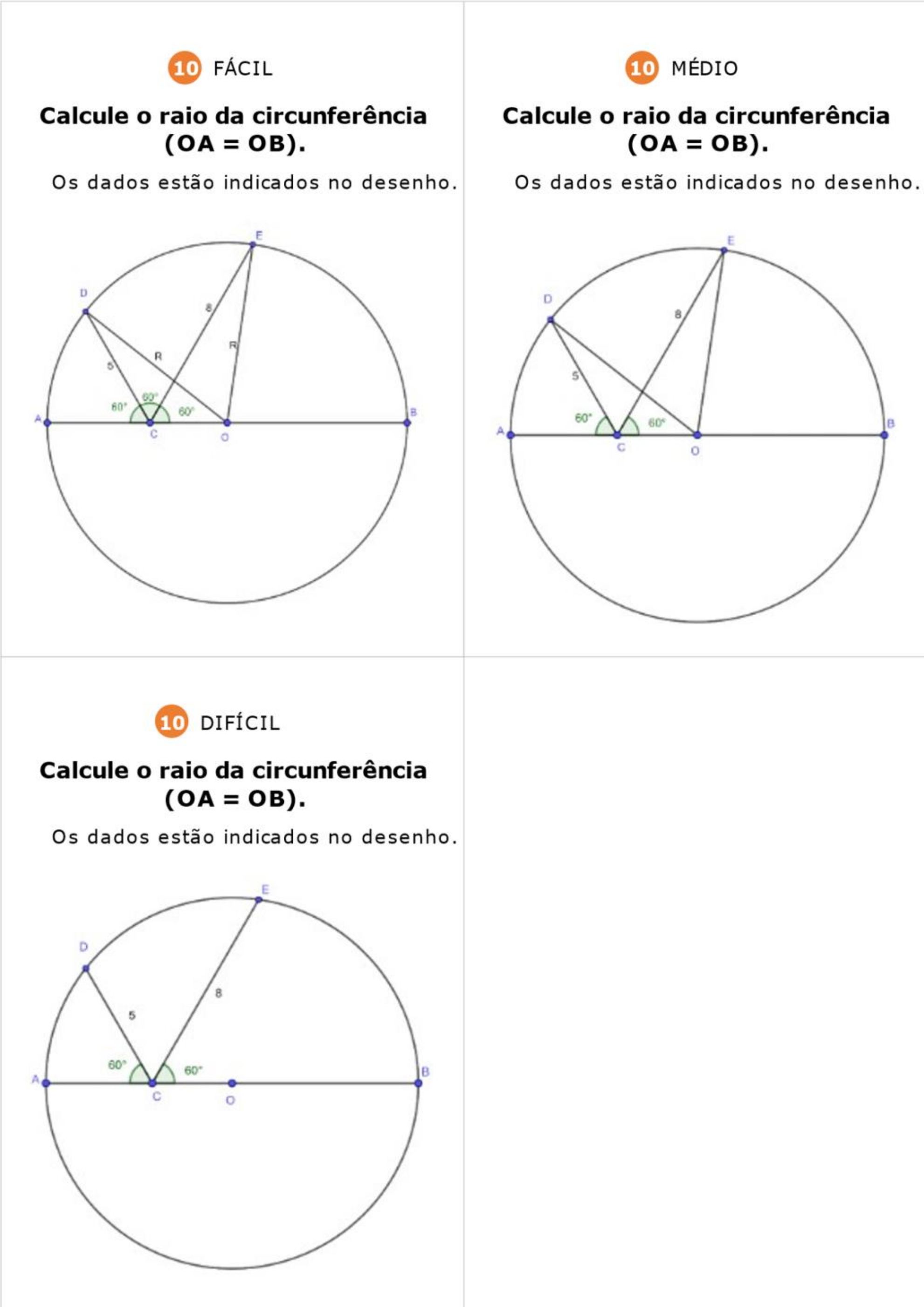
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 44 - Carta Laranja 9 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



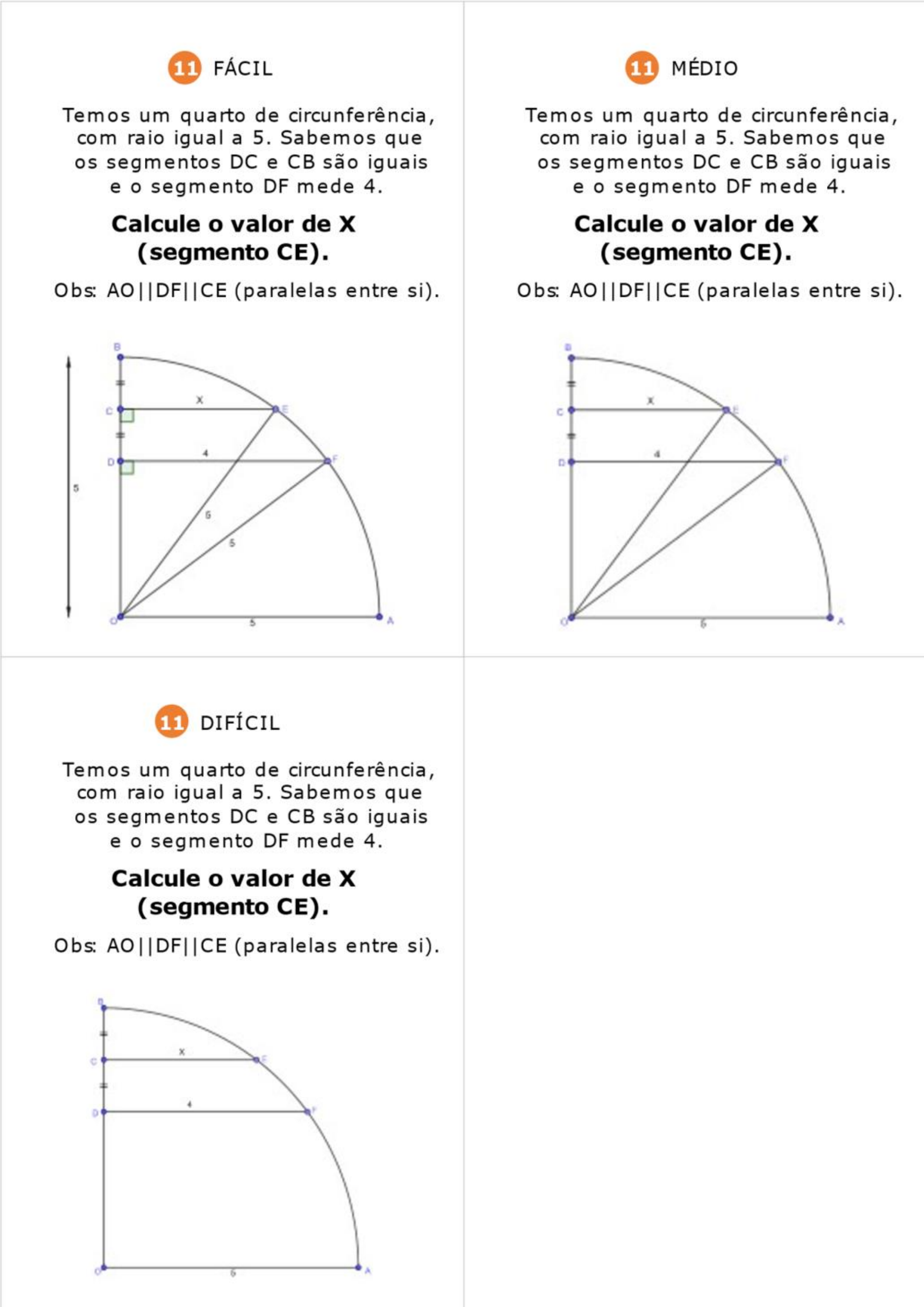
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 45 - Carta Laranja 10 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



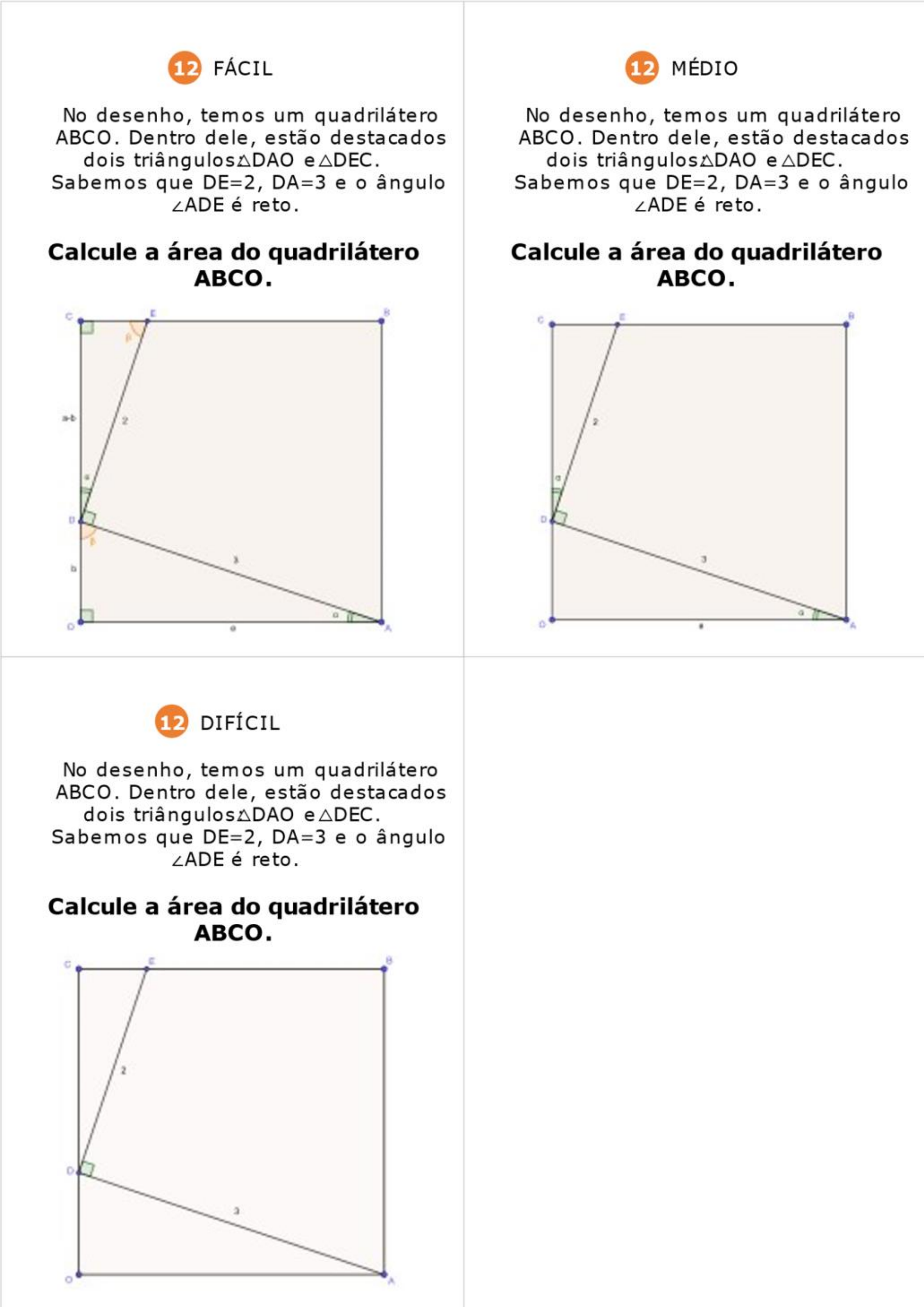
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 46 - Carta Laranja 11 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 47 - Carta Laranja 12 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

APÊNDICE D (MANUAL DO JUIZ)

Função do Manual do Juiz

O manual tem o propósito de servir como um guia de orientação para o juiz (mediador/avaliador), auxiliando-o na condução das partidas e na mediação das interações entre os jogadores. Ele funciona como uma bússola didática, permitindo que o juiz mantenha a sequência correta das cartas, acompanhe as etapas de resolução dos problemas e assegure que as regras do jogo sejam respeitadas. Além disso, o manual oferece critérios de avaliação e instruções claras, garantindo que o desenvolvimento do jogo ocorra de forma organizada, imparcial e coerente com os objetivos pedagógicos propostos.

A seguir, apresentam-se os elementos que compõem o jogo didático, conforme versão entregue aos alunos, segue abaixo:

Figura 48 - Manual do Juiz (DEFINIÇÃO) – Apêndice D

DEFINIÇÃO

Dinâmica das Cartas e Justificativas

Cada problema do Jogo - nas categorias fácil, médio e difícil - é acompanhado de 7 cartas que representam possíveis passos para a resolução.

Essas cartas podem ser:
- **Válidas:** contribuem de forma correta e coerente para a resolução.
- **Não válidas:** não ajudam ou não se aplicam à resolução do problema.

O papel do jogador é analisar cada carta e responder:
- "Sim" (válida) ou "Não" (não válida).
- Sempre justificando sua resposta.

A justificativa deve ter ênfase maior nas cartas válidas, evidenciando os conceitos matemáticos corretos que sustentam a jogada. Já para as cartas não válidas, também é necessário justificar, ainda que de forma mais breve, explicando por que não se encaixam no contexto do problema.

Além disso, o jogo traz um elemento de flexibilidade pedagógica: caso o aluno apresente uma justificativa alternativa, mesmo que a carta não esteja marcada previamente como válida, o juiz (avaliador/professor) tem autonomia para aceitar a resposta, desde que haja coerência matemática.

Por fim, é importante destacar que:
- O problema original de cada conjunto é sempre o difícil.
- Os problemas fácil e médio são variações simplificadas do problema difícil, criados para facilitar a progressão da partida e adaptar o nível de desafio aos jogadores.

DEFINIÇÃO

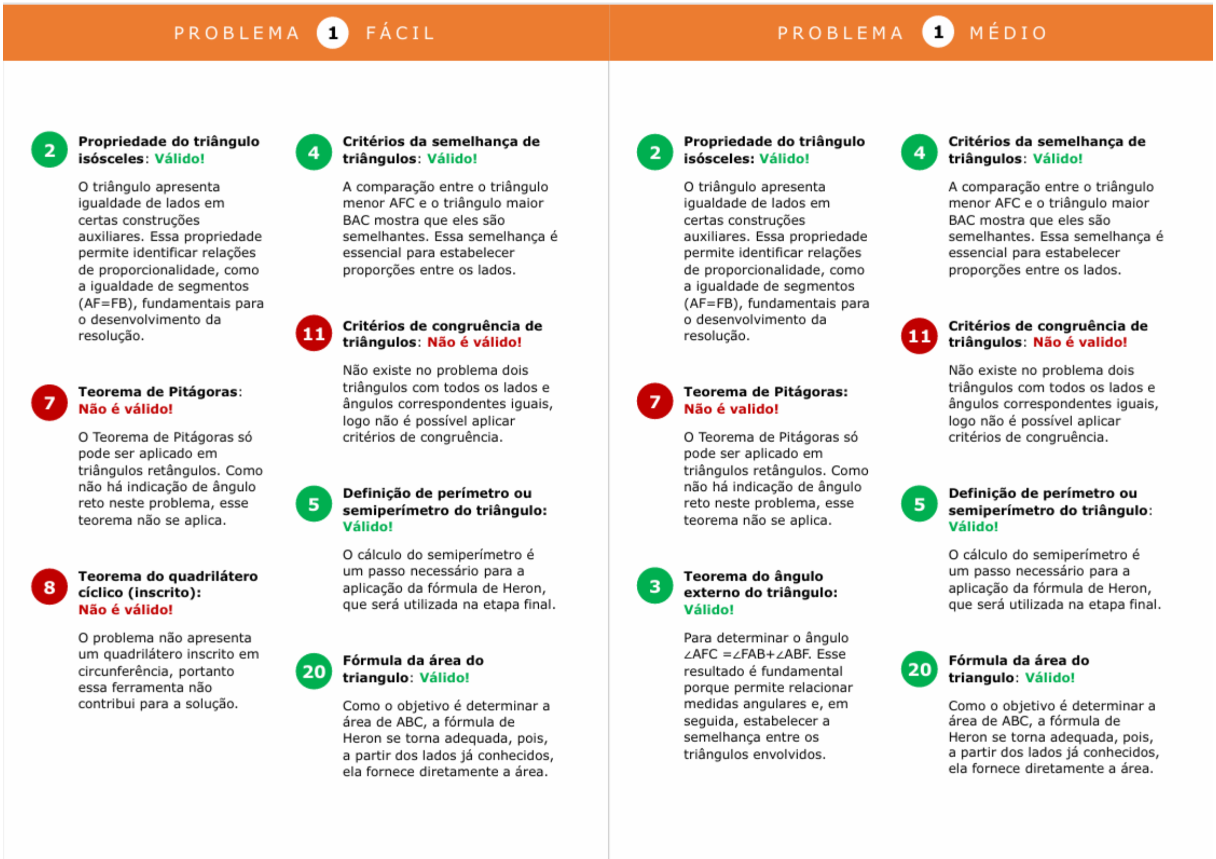
Função do Manual do Juiz

O manual tem o propósito de servir como um guia de orientação para o juiz (avaliador), auxiliando-o na condução das partidas e na mediação das interações entre os jogadores. Ele funciona como uma bússola didática, permitindo que o juiz mantenha a sequência correta das cartas, acompanhe as etapas de resolução dos problemas e assegure que as regras do jogo sejam respeitadas. Além disso, o manual oferece critérios de avaliação e instruções claras, garantindo que o desenvolvimento do jogo ocorra de forma organizada, imparcial e coerente com os objetivos pedagógicos propostos.

Conforme ilustrado no Problema **1 (nível fácil)**, a sequência correta das cartas é:
2 – 7 – 8 – 4 – 11 – 5 – 20,
totalizando sete passos.
Dentre elas, as cartas **Válidas** correspondem aos números **2, 4, 5 e 20**, enquanto as cartas **Não válidas** são **7, 8 e 11.**

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 49 - Manual do Juiz (PROBLEMA 1) – Apêndice D



PROBLEMA 1 FÁCIL

2 **Propriedade do triângulo isósceles**: **Válido!**

O triângulo apresenta igualdade de lados em certas construções auxiliares. Essa propriedade permite identificar relações de proporcionalidade, como a igualdade de segmentos (AF=FB), fundamentais para o desenvolvimento da resolução.

7 **Teorema de Pitágoras**: **Não é válido!**

O Teorema de Pitágoras só pode ser aplicado em triângulos retângulos. Como não há indicação de ângulo reto neste problema, esse teorema não se aplica.

8 **Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!**

O problema não apresenta um quadrilátero inscrito em circunferência, portanto essa ferramenta não contribui para a solução.

4 **Critérios da semelhança de triângulos**: **Válido!**

A comparação entre o triângulo menor AFC e o triângulo maior BAC mostra que eles são semelhantes. Essa semelhança é essencial para estabelecer proporções entre os lados.

11 **Critérios de congruência de triângulos**: **Não é válido!**

Não existe no problema dois triângulos com todos os lados e ângulos correspondentes iguais, logo não é possível aplicar critérios de congruência.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Válido!**

O cálculo do semiperímetro é um passo necessário para a aplicação da fórmula de Heron, que será utilizada na etapa final.

20 **Fórmula da área do triangulo**: **Válido!**

Como o objetivo é determinar a área de ABC, a fórmula de Heron se torna adequada, pois, a partir dos lados já conhecidos, ela fornece diretamente a área.

PROBLEMA 1 MÉDIO

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

O triângulo apresenta igualdade de lados em certas construções auxiliares. Essa propriedade permite identificar relações de proporcionalidade, como a igualdade de segmentos (AF=FB), fundamentais para o desenvolvimento da resolução.

7 **Teorema de Pitágoras: Não é valido!**

O Teorema de Pitágoras só pode ser aplicado em triângulos retângulos. Como não há indicação de ângulo reto neste problema, esse teorema não se aplica.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo: Válido!**

Para determinar o ângulo ∠AFC =∠FAB+∠ABF. Esse resultado é fundamental porque permite relacionar medidas angulares e, em seguida, estabelecer a semelhança entre os triângulos envolvidos.

4 **Critérios da semelhança de triângulos**: **Válido!**

A comparação entre o triângulo menor AFC e o triângulo maior BAC mostra que eles são semelhantes. Essa semelhança é essencial para estabelecer proporções entre os lados.

11 **Critérios de congruência de triângulos**: **Não é valido!**

Não existe no problema dois triângulos com todos os lados e ângulos correspondentes iguais, logo não é possível aplicar critérios de congruência.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo**: **Válido!**

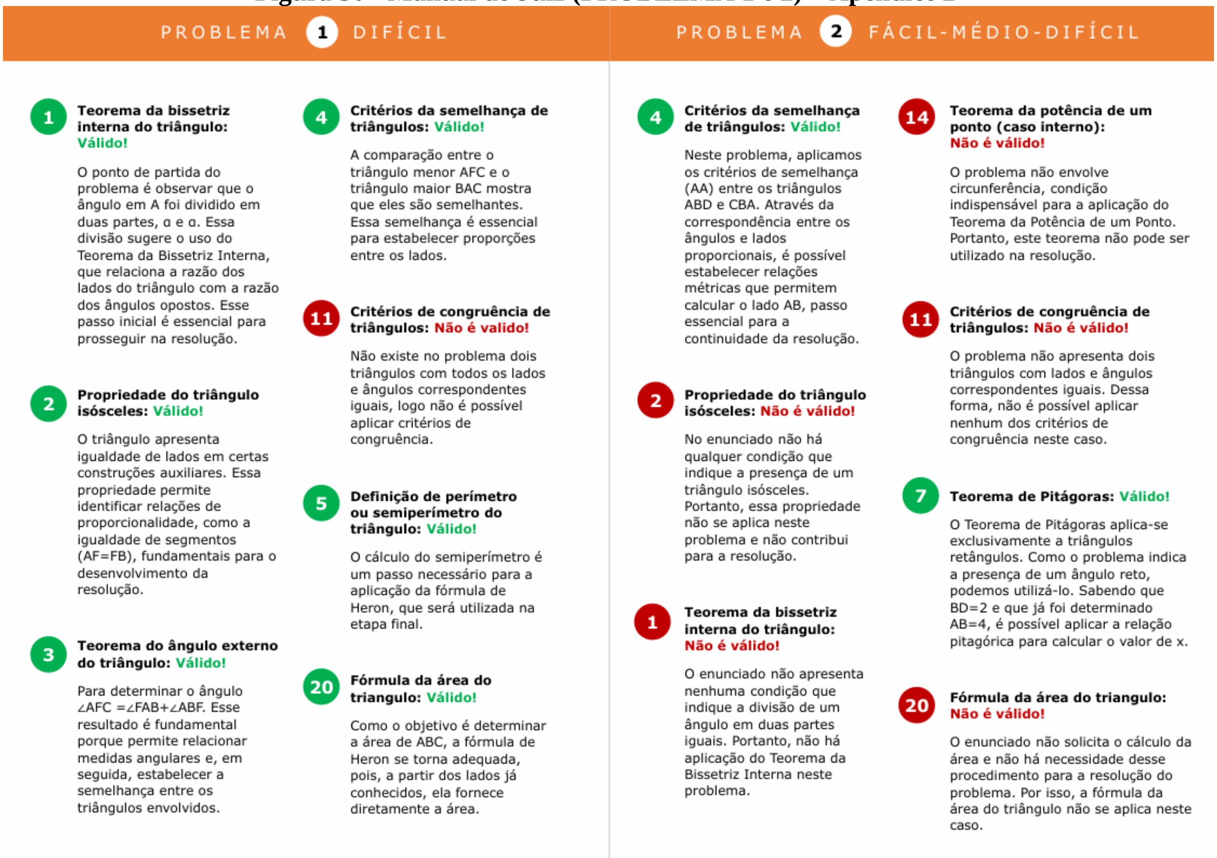
O cálculo do semiperímetro é um passo necessário para a aplicação da fórmula de Heron, que será utilizada na etapa final.

20 **Fórmula da área do triangulo**: **Válido!**

Como o objetivo é determinar a área de ABC, a fórmula de Heron se torna adequada, pois, a partir dos lados já conhecidos, ela fornece diretamente a área.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 50 - Manual do Juiz (PROBLEMA 1 e 2) – Apêndice D



PROBLEMA 1 DIFÍCIL

1 **Teorema da bissetriz interna do triângulo: Válido!**

O ponto de partida do problema é observar que o ângulo em A foi dividido em duas partes, α e α. Essa divisão sugere o uso do Teorema da Bissetriz Interna, que relaciona a razão dos lados do triângulo com a razão dos ângulos opostos. Esse passo inicial é essencial para prosseguir na resolução.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

O triângulo apresenta igualdade de lados em certas construções auxiliares. Essa propriedade permite identificar relações de proporcionalidade, como a igualdade de segmentos (AF=FB), fundamentais para o desenvolvimento da resolução.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo: Válido!**

Para determinar o ângulo ∠AFC =∠FAB+∠ABF. Esse resultado é fundamental porque permite relacionar medidas angulares e, em seguida, estabelecer a semelhança entre os triângulos envolvidos.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Válido!**

A comparação entre o triângulo menor AFC e o triângulo maior BAC mostra que eles são semelhantes. Essa semelhança é essencial para estabelecer proporções entre os lados.

11 **Critérios de congruência de triângulos: Não é valido!**

Não existe no problema dois triângulos com todos os lados e ângulos correspondentes iguais, logo não é possível aplicar critérios de congruência.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Válido!**

O cálculo do semiperímetro é um passo necessário para a aplicação da fórmula de Heron, que será utilizada na etapa final.

20 **Fórmula da área do triangulo: Válido!**

Como o objetivo é determinar a área de ABC, a fórmula de Heron se torna adequada, pois, a partir dos lados já conhecidos, ela fornece diretamente a área.

PROBLEMA 2 FÁCIL-MÉDIO-DIFÍCIL

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Válido!**

Neste problema, aplicamos os critérios de semelhança (AA) entre os triângulos ABD e CBA. Através da correspondência entre os ângulos e lados proporcionais, é possível estabelecer relações métricas que permitem calcular o lado AB, passo essencial para a continuidade da resolução.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Não é válido!**

No enunciado não há qualquer condição que indique a presença de um triângulo isósceles. Portanto, essa propriedade não se aplica neste problema e não contribui para a resolução.

1 **Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!**

O enunciado não apresenta nenhuma condição que indique a divisão de um ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação do Teorema da Bissetriz Interna neste problema.

14 **Teorema da potência de um ponto (caso interno): Não é válido!**

O problema não envolve circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Portanto, este teorema não pode ser utilizado na resolução.

11 **Critérios de congruência de triângulos: Não é válido!**

O problema não apresenta dois triângulos com lados e ângulos correspondentes iguais. Dessa forma, não é possível aplicar nenhum dos critérios de congruência neste caso.

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

O Teorema de Pitágoras aplica-se exclusivamente a triângulos retângulos. Como o problema indica a presença de um ângulo reto, podemos utilizá-lo. Sabendo que BD=2 e que já foi determinado AB=4, é possível aplicar a relação pitagórica para calcular o valor de x.

20 **Fórmula da área do triangulo: Não é válido!**

O enunciado não solicita o cálculo da área e não há necessidade desse procedimento para a resolução do problema. Por isso, a fórmula da área do triângulo não se aplica neste caso.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 51 - Manual do Juiz (PROBLEMA 3) – Apêndice D

PROBLEMA 3 FÁCIL

1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é valido!

O enunciado não apresenta nenhuma condição que indique a divisão de um ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação do Teorema da Bissetriz Interna neste problema.

21 Propriedade de tangência da circunferência: Não é valido!

No enunciado não há qualquer condição que indique a presença de uma tangência. Portanto, essa propriedade não se aplica neste problema e não contribui para a resolução.

15 Propriedades do quadrado: Válido!

Reconhecer que todos os lados do quadrado são iguais é essencial para a resolução. Pelo desenho, temos AM = R√2, o que implica diretamente que AB também mede R√2.

14 Teorema da potência de um ponto (caso interno): Válido!

Neste problema há a presença de uma circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Assim, podemos estabelecer a relação AD·BD=CD·FD Esse resultado é útil para determinar o raio da circunferência, etapa fundamental na resolução.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!

A aplicação da semelhança não é necessária, pois as medidas relevantes já estão explicitamente determinadas no enunciado. Dessa forma, os critérios de semelhança não contribuem para a resolução deste problema.

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!

O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.

6 Definição de ângulos complementares: Não é valido!

Embora seja possível considerar relações de complementaridade entre ângulos, esse conceito não é necessário neste problema, pois o valor do raio já pode ser determinado diretamente pela aplicação do Teorema da Potência de um Ponto (carta 14).

PROBLEMA 3 MÉDIO

7 Teorema de Pitágoras: Válido!

Este é o ponto de partida para calcular o lado AB, já que o triângulo AOB é retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos AB, e a partir desse resultado é possível determinar BD, pela relação BD=AB−4.

15 Propriedades do quadrado: Válido!

Neste passo, já sabemos que AB = R√2. Pela propriedade do quadrado, concluímos que DF também mede R√2.

11 Critérios de congruência de triângulos : Válido!

Para relacionar os segmentos AB e CF, é necessário determinar valores parciais de CF. Como existe uma congruência entre os triângulos CDA e FEM, determinamos que EF=3 e EM=4. Essa correspondência de lados iguais é fundamental para a resolução.

14 Teorema da potência de um ponto (caso interno): Válido!

Neste problema há a presença de uma circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Assim, podemos estabelecer a relação AD·BD=CD·FD Esse resultado é útil para determinar o raio da circunferência, etapa fundamental na resolução.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido!

O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!

O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.

6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!

Embora seja possível considerar relações de complementaridade entre ângulos, esse conceito não é necessário neste problema, pois o valor do raio já pode ser determinado diretamente pela aplicação do Teorema da Potência de um Ponto (carta 14).

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 52 - Manual do Juiz (PROBLEMA 3 e 4) – Apêndice D

PROBLEMA 3 DIFÍCIL

16 **Propriedades da circunferência: Válido!**

Uma abordagem é utilizar propriedades de circunferência (com relações métricas) para reinterpretar o problema, oferecendo uma perspectiva geométrica diferente para a solução.

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

Este é o segundo ponto para calcular o lado AB, já que o triângulo AOB é retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos AB, e a partir desse resultado é possível determinar BD, pela relação BD=AB−4.

11 **Critérios de congruência de triângulos: Válido!**

Para relacionar os segmentos AB e CF, é necessário determinar valores parciais de CF. Como existe uma congruência entre os triângulos CDA e FEM, determinamos que EF=3 e EM=4. Essa correspondência de lados iguais é fundamental para a resolução.

15 **Propriedades do quadrado: Válido!**

Neste passo, já sabemos que AB = $R\sqrt{2}$. Pela propriedade do quadrado, concluímos que DF também mede $R\sqrt{2}$.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!**

A aplicação da semelhança não é necessária, pois as medidas relevantes já estão explicitamente determinadas nos itens anteriores. Dessa forma, os critérios de semelhança não contribuem para a resolução deste problema.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!**

O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.

14 **Teorema da potência de um ponto (caso interno): Válido!**

Neste problema há a presença de uma circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Assim, podemos estabelecer a relação AD·BD=CD·FD Esse resultado é útil para determinar o raio da circunferência, etapa fundamental na resolução.

PROBLEMA 4 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL

15 **Propriedades do quadrado: Válido!**

Utiliza-se que o quadrado possui lados iguais e ângulos retos, o que é fundamental para estabelecer relações geométricas e de semelhança no problema.

8 **Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é valido!**

O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do quadrilátero inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.

11 **Critérios de congruência de triângulos: Válido!**

Observa-se a congruência entre os triângulos BAE e CBF pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto). Assim, concluímos que CF possui a mesma medida de BE, ou seja, 13.

10 **Definição de ângulos suplementares: Válido!**

Por mais que o problema já destaque pontos importantes, como os ângulos, é necessário confirmar o ângulo BGF, que é suplementar ao ângulo EGF. Então temos o ângulo BGF = 90 graus.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Válido!**

Ao estabelecermos uma relação de semelhança (pelo caso AA) entre os triângulos FGB e FBC, descobrimos uma incógnita em função de outra, um passo importante para a próxima etapa.

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, temos: $a^2 + b^2 = 13^2$.E, com a relação $a{\cdot}b=78$, obtida no item anterior, conseguimos determinar os valores de a.

19 **Fórmula da área do quadrado: Válido!**

Neste último passo, basta calcular a área do quadrado utilizando a fórmula $A=a^2$.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 53 - Manual do Juiz (PROBLEMA 5 e 6) – Apêndice D

PROBLEMA 5 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL

18 Teorema do ângulo inscrito: Não é valido!

O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do Ângulo Inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.

8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é valido!

O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do quadrilátero inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.

11 Critérios de congruência de triângulos: Válido!

Observa-se a congruência entre os triângulos BAE e BDE pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto). Assim, concluímos que BD possui a mesma medida de AB, ou seja, 30.

10 Definição de ângulos suplementares: Não é valido!

Não precisa usar esta ideia.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!

Em algum momento, poderíamos utilizar a ideia de semelhança com razão 1 entre os triângulos BAE e BDE, mas isso já foi demonstrado anteriormente, no item 11.

7 Teorema de Pitágoras: Válido!

Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, temos: $BC^2 + 30^2 = 40^2$.E, resultando BC=50, conseguimos determinar o valor de x que é a diferença de BC=50 menos BD=30, sendo x=20.

19 Fórmula da área do quadrado: Não é valido!

Não trabalhamos com quadrado e muito menos com a ideia de área.

PROBLEMA 6 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL

18 Teorema do ângulo inscrito: Não é valido!

O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do Ângulo Inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.

10 Definição de ângulos suplementares: Válido!

Embora o ângulo AEC pareça obviamente reto, sua determinação exige uma relação suplementar. Como ∠AEB=90°, obtemos ∠AEC=180° −∠AEB= 90°, o que corresponde exatamente à definição de ângulos suplementares.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!

Há semelhança entre os triângulos AEC e CED, pelo caso Ângulo-Ângulo (AA). A partir dessa relação, é possível estabelecer uma proporção entre os lados correspondentes e determinar que EC=2.

15 Propriedades do quadrado: Não é valido!

O problema não envolve um quadrado nem exige o uso de suas propriedades. Portanto, este conceito não é necessário para a resolução.

16 Propriedades da circunferência: Não é valido!

O problema não apresenta nenhuma circunferência, condição indispensável para a aplicação dessas propriedades. Assim, elas não se aplicam neste caso.

7 Teorema de Pitágoras: Válido!

Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, temos: $4^2 + (a-2)^2 = a^2$.E, resultando a=5.

20 Fórmula da área do triangulo: Válido!

Ao determinar o valor de *a*, o problema pode ser decomposto em dois triângulos, permitindo calcular a área de cada um separadamente.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 54 - Manual do Juiz (PROBLEMA 7 e 8) – Apêndice D

PROBLEMA 7 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL

18 **Teorema do ângulo inscrito: Válido!**

Como o arco OP mede 40°, pelo Teorema do Ângulo Inscrito concluímos que ∠ OAP =20°.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

Neste problema aparecem diversos triângulos isósceles. Qualquer análise de um deles já justifica a aplicação da propriedade:

Como AP =AO (pelo triangulo AOP), temos ∠APO=∠AOP.

Como AO=CO (pelo triangulo AOC), segue que ∠OAP=∠OCP.

Como OB=OC (pelo triangulo OBC), obtemos ∠OBC=∠OCB.

9 **Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!**

Este teorema pode ser aplicado em conjunto com a propriedade do triângulo isósceles.
Por exemplo: Para o triangulo AOP, se ∠OAP=20° e ∠APO=∠AOP então, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos:
∠OAP+∠APO+∠AOP=180°.
Portanto, ∠APO=∠AOP=80°.

10 **Definição de ângulos suplementares: Válido!**

Para determinar ∠OPC, utilizamos a relação de suplementar. Como ∠APC=180° e ∠APO=80°, segue que: ∠OPC=100°.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo: Válido!**

Para determinar o ∠BOC, usamos a soma de ∠OPC + ∠OCP. Isso resulta em ∠BOC = 120°.
Observação: Neste passo poderia ser substituído por outros passos que resultariam na mesma ideia.

7 **Teorema de Pitágoras: Não é valido!**

Não é possível aplicar o Teorema de Pitágoras neste problema, pois em nenhum momento foi identificado um triângulo retângulo (ângulo de 90°) que permitisse sua utilização.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

Este passo, já utilizado no início do problema, é aqui relembrado para aplicação final, podendo ter sido justificado anteriormente.

PROBLEMA 8 FÁCIL

18 **Teorema do ângulo inscrito: Não é valido!**

Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

Ao analisar o triângulo ABC, observamos que ∠CAB é igual a ∠BCA, indicando que AB = CB = 5.

8 **Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é valido!**

Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.

11 **Critérios de congruência de triângulos: Válido!**

Embora já tenha sido justificado no item 2), este passo pode ser válido aqui para reforçar a ideia de que os triângulos AMB e CMB são congruentes

20 **Fórmula da área do triangulo: Não é valido!**

Em nenhum momento é solicitado calcular a área; embora fosse possível usar algum artifício nesse sentido, a ideia é sempre resolver da maneira mais simples.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Válido!**

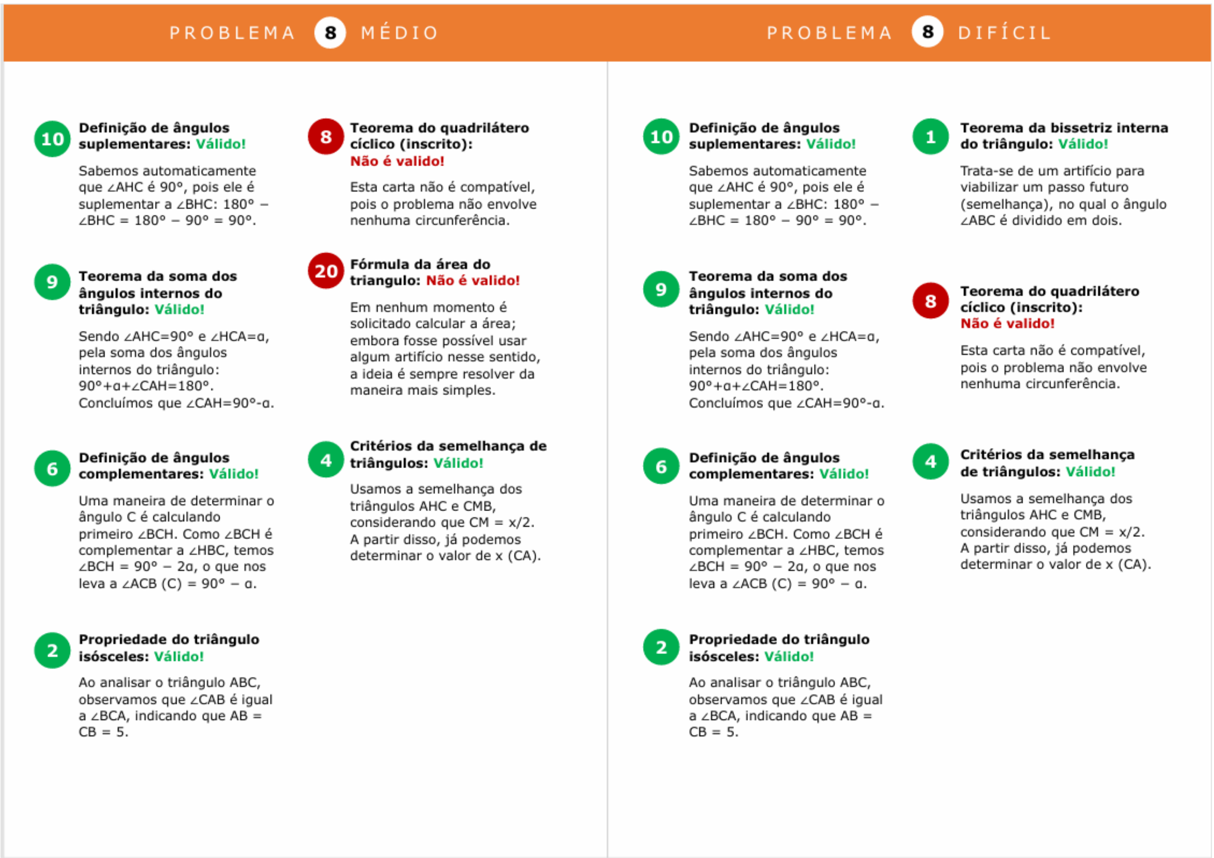
Usamos a semelhança dos triângulos AHC e CMB, considerando que CM = x/2. A partir disso, já podemos determinar o valor de x (CA).

15 **Propriedades do quadrado: Não é valido!**

Não ajuda em nada esta propriedade.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 55 - Manual do Juiz (PROBLEMA 8) – Apêndice D



PROBLEMA 8 MÉDIO

10 **Definição de ângulos suplementares: Válido!**

Sabemos automaticamente que ∠AHC é 90°, pois ele é suplementar a ∠BHC: 180° − ∠BHC = 180° − 90° = 90°.

9 **Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!**

Sendo ∠AHC=90° e ∠HCA=α, pela soma dos ângulos internos do triângulo: 90°+α+∠CAH=180°. Concluímos que ∠CAH=90°-α.

6 **Definição de ângulos complementares: Válido!**

Uma maneira de determinar o ângulo C é calculando primeiro ∠BCH. Como ∠BCH é complementar a ∠HBC, temos ∠BCH = 90° − 2α, o que nos leva a ∠ACB (C) = 90° − α.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

Ao analisar o triângulo ABC, observamos que ∠CAB é igual a ∠BCA, indicando que AB = CB = 5.

8 **Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é valido!**

Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.

20 **Fórmula da área do triangulo: Não é valido!**

Em nenhum momento é solicitado calcular a área; embora fosse possível usar algum artifício nesse sentido, a ideia é sempre resolver da maneira mais simples.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Válido!**

Usamos a semelhança dos triângulos AHC e CMB, considerando que CM = x/2. A partir disso, já podemos determinar o valor de x (CA).

PROBLEMA 8 DIFÍCIL

10 **Definição de ângulos suplementares: Válido!**

Sabemos automaticamente que ∠AHC é 90°, pois ele é suplementar a ∠BHC: 180° − ∠BHC = 180° − 90° = 90°.

9 **Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!**

Sendo ∠AHC=90° e ∠HCA=α, pela soma dos ângulos internos do triângulo: 90°+α+∠CAH=180°. Concluímos que ∠CAH=90°-α.

6 **Definição de ângulos complementares: Válido!**

Uma maneira de determinar o ângulo C é calculando primeiro ∠BCH. Como ∠BCH é complementar a ∠HBC, temos ∠BCH = 90° − 2α, o que nos leva a ∠ACB (C) = 90° − α.

2 **Propriedade do triângulo isósceles: Válido!**

Ao analisar o triângulo ABC, observamos que ∠CAB é igual a ∠BCA, indicando que AB = CB = 5.

1 **Teorema da bissetriz interna do triângulo: Válido!**

Trata-se de um artifício para viabilizar um passo futuro (semelhança), no qual o ângulo ∠ABC é dividido em dois.

8 **Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é valido!**

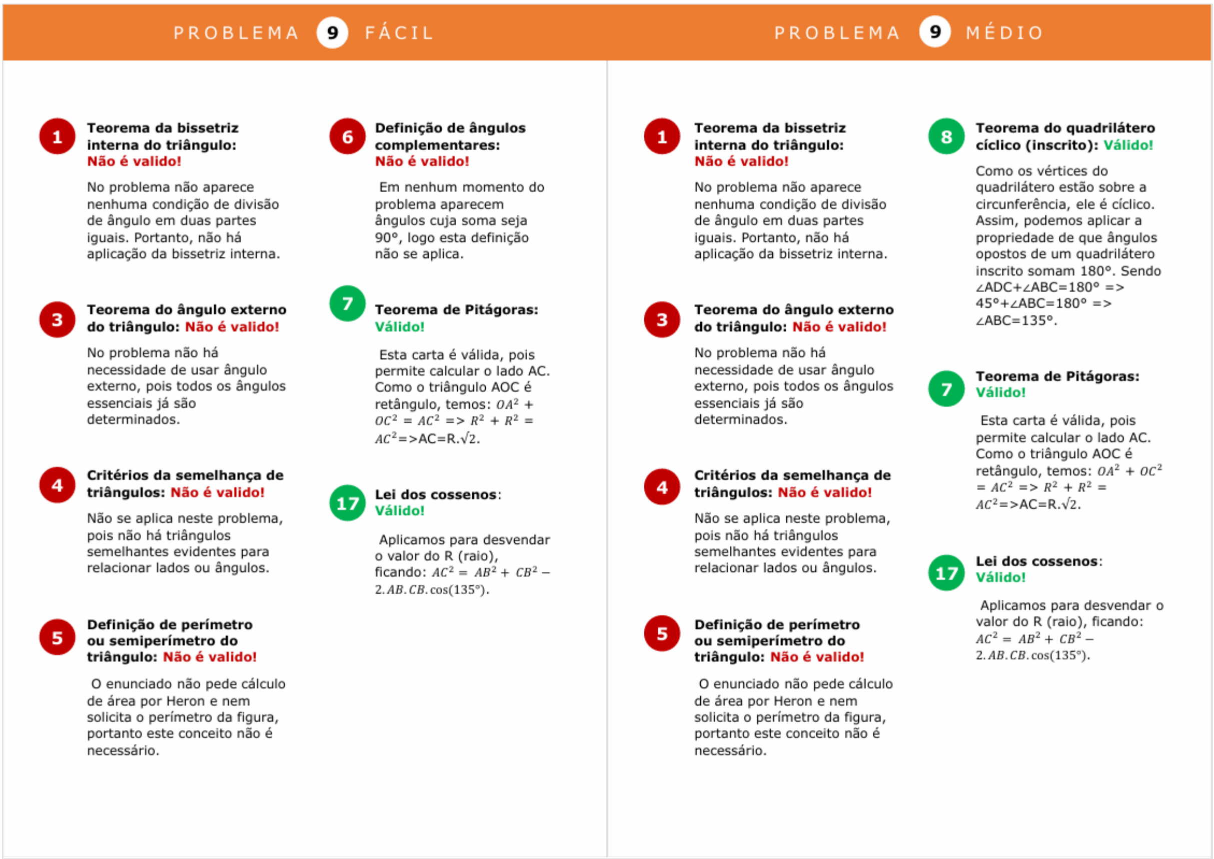
Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Válido!**

Usamos a semelhança dos triângulos AHC e CMB, considerando que CM = x/2. A partir disso, já podemos determinar o valor de x (CA).

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 56 - Manual do Juiz (PROBLEMA 9) – Apêndice D



PROBLEMA 9 FÁCIL

1 **Teorema da bissetriz interna do triângulo:** **Não é valido!**

No problema não aparece nenhuma condição de divisão de ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação da bissetriz interna.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo:** **Não é valido!**

No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.

4 **Critérios da semelhança de triângulos:** **Não é valido!**

Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo:** **Não é valido!**

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

6 **Definição de ângulos complementares:** **Não é valido!**

Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.

7 **Teorema de Pitágoras:** **Válido!**

Esta carta é válida, pois permite calcular o lado AC. Como o triângulo AOC é retângulo, temos: $OA^2 + OC^2 = AC^2$ => $R^2 + R^2 = AC^2$=>AC=R.$\sqrt{2}$.

17 **Lei dos cossenos**: **Válido!**

Aplicamos para desvendar o valor do R (raio), ficando: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2.AB.CB.\cos(135°)$.

PROBLEMA 9 MÉDIO

1 **Teorema da bissetriz interna do triângulo:** **Não é valido!**

No problema não aparece nenhuma condição de divisão de ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação da bissetriz interna.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo:** **Não é valido!**

No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.

4 **Critérios da semelhança de triângulos:** **Não é valido!**

Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo:** **Não é valido!**

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

8 **Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito):** **Válido!**

Como os vértices do quadrilátero estão sobre a circunferência, ele é cíclico. Assim, podemos aplicar a propriedade de que ângulos opostos de um quadrilátero inscrito somam 180°. Sendo ∠ADC+∠ABC=180° => 45°+∠ABC=180° => ∠ABC=135°.

7 **Teorema de Pitágoras:** **Válido!**

Esta carta é válida, pois permite calcular o lado AC. Como o triângulo AOC é retângulo, temos: $OA^2 + OC^2 = AC^2$ => $R^2 + R^2 = AC^2$=>AC=R.$\sqrt{2}$.

17 **Lei dos cossenos**: **Válido!**

Aplicamos para desvendar o valor do R (raio), ficando: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2.AB.CB.\cos(135°)$.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 57 - Manual do Juiz (PROBLEMA 9 e 10) – Apêndice D

PROBLEMA 9 DIFÍCIL

1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é valido!

No problema não aparece nenhuma condição de divisão de ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação da bissetriz interna.

3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é valido!

No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.

16 Propriedades da circunferência: Válido!

Para compreender melhor a resolução, é útil redesenhar a figura completa, destacando a circunferência e considerando suas propriedades fundamentais, como a igualdade dos raios (AO = OC = R).

18 Teorema do ângulo inscrito: Válido!

Esta carta funciona como um "pulo do gato", pois nos direciona para descobrir o ângulo ABC. Para isso, utilizamos o teorema do ângulo inscrito, lembrando que seu ângulo central correspondente é uma perpendicular (90°).

8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Válido!

Como os vértices do quadrilátero estão sobre a circunferência, ele é cíclico. Assim, podemos aplicar a propriedade de que ângulos opostos de um quadrilátero inscrito somam 180°. Sendo ∠ADC+∠ABC=180° => 45°+∠ABC=180° => ∠ABC=135°.

7 Teorema de Pitágoras: Válido!

Esta carta é válida, pois permite calcular o lado AC. Como o triângulo AOC é retângulo, temos: $OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow R^2 + R^2 = AC^2 \Rightarrow AC = R.\sqrt{2}$.

17 Lei dos cossenos: Válido!

Aplicamos para desvendar o valor do R (raio), ficando: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2.AB.CB.\cos(135°)$.

PROBLEMA 10 FÁCIL

17 Lei dos cossenos: Válido!

Inicialmente, consideramos o triângulo OCE: aplicando a lei dos cossenos, temos:

$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2.OC.CE.\cos(60°)$, resultando em

$R^2 = OC^2 + 8^2 - 2.OC.8.\cos(60°)$, a qual chamamos de equação (a).

3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é valido!

No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!

Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

6 Definição de ângulos complementares: Não é valido!

Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.

7 Teorema de Pitágoras: Não é valido!

Em nenhum momento do problema aparece ângulo de 90°, logo não é possível esta definição.

17 Lei dos cossenos: Válido!

Aplicamos novamente a lei dos cossenos, agora considerando o triangulo OCD:

$OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2.OC.CD.\cos(120°)$, o que resulta em

$R^2 = OC^2 + 5^2 - 2.OC.5.\cos(120°)$, a qual chamamos de equação (b).

Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R.

Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 58 - Manual do Juiz (PROBLEMA 10) – Apêndice D

PROBLEMA 10 MÉDIO

10 Definição de ângulos suplementares: Válido!

Para determinar o ângulo DCE, observamos que ele é suplementar à soma 60° + 60° = 120°. Assim, concluímos que ∠DCE = 180° – 120° = 60°.

17 Lei dos cossenos: Válido!

Inicialmente, consideramos o triângulo OCE: aplicando a lei dos cossenos, temos:

$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2.\mathrm{OC}.CE.\cos(60°)$, resultando em

$R^2 = OC^2 + 8^2 - 2.\mathrm{OC}.8.\cos(60°)$, a qual chamamos de equação (a).

4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!

Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

6 Definição de ângulos complementares: Não é valido!

Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.

7 Teorema de Pitágoras: Não é valido!

Em nenhum momento do problema aparece ângulo de 90°, logo não é possível esta definição.

17 Lei dos cossenos: Válido!

Aplicamos novamente a lei dos cossenos, agora considerando o triangulo OCD:

$OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2.\mathrm{OC}.CD.\cos(120°)$, o que resulta em

$R^2 = OC^2 + 5^2 - 2.\mathrm{OC}.5.\cos(120°)$, a qual chamamos de equação (b).

Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R.

Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.

PROBLEMA 10 DIFÍCIL

16 Propriedades da circunferência: Válido!

Uma das propriedades da circunferência é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R).

10 Definição de ângulos suplementares: Válido!

Para determinar o ângulo DCE, observamos que ele é suplementar à soma 60° + 60° = 120°. Assim, concluímos que ∠DCE = 180° – 120° = 60°.

17 Lei dos cossenos: Válido!

Inicialmente, consideramos o triângulo OCE: aplicando a lei dos cossenos, temos:

$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2.\mathrm{OC}.CE.\cos(60°)$, resultando em

$R^2 = OC^2 + 8^2 - 2.\mathrm{OC}.8.\cos(60°)$, a qual chamamos de equação (a).

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

6 Definição de ângulos complementares: Não é valido!

Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.

7 Teorema de Pitágoras: Não é valido!

Em nenhum momento do problema aparece ângulo de 90°, logo não é possível esta definição.

17 Lei dos cossenos: Válido!

Aplicamos novamente a lei dos cossenos, agora considerando o triangulo OCD:

$OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2.\mathrm{OC}.CD.\cos(120°)$, o que resulta em

$R^2 = OC^2 + 5^2 - 2.\mathrm{OC}.5.\cos(120°)$, a qual chamamos de equação (b).

Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R.

Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 59 - Manual do Juiz (PROBLEMA 11) – Apêndice D

PROBLEMA 11 FÁCIL

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

O primeiro passo é calcular o valor de OD aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo correspondente. Assim, obtemos OD = 3.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é valido!**

No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!**

Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!**

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

6 **Definição de ângulos complementares: Não é valido!**

Não se aplica neste problema, pois não há necessidade.

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

Este é o segundo passo da resolução. Sabendo que OD = 3, obtemos CD = 1 e, portanto, OC = 4. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, descobrimos o valor de x pela conhecida tripla pitagórica (3, 4, 5).

Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.

17 **Lei dos cossenos: Não é valido!**

Apesar de a Lei dos Cossenos ser uma generalização do Teorema de Pitágoras (já que para ângulo de 90° temos cos 90° = 0), neste caso não há necessidade de aplicá-la. O problema já foi resolvido no passo anterior com o Teorema de Pitágoras, chegando diretamente ao valor de x.

PROBLEMA 11 MÉDIO/DIFÍCIL

16 **Propriedades da circunferência: Válido!**

Uma das propriedades da circunferência é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R).

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

O primeiro passo é calcular o valor de OD aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo correspondente. Assim, obtemos OD = 3.

4 **Critérios da semelhança de triângulos: Não é valido!**

Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.

5 **Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!**

O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.

6 **Definição de ângulos complementares: Não é valido!**

Não se aplica neste problema, pois não há necessidade.

7 **Teorema de Pitágoras: Válido!**

Este é o segundo passo da resolução. Sabendo que OD = 3, obtemos CD = 1 e, portanto, OC = 4. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, descobrimos o valor de x pela conhecida tripla pitagórica (3, 4, 5).

Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.

3 **Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é valido!**

No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 60 - Manual do Juiz (PROBLEMA 12) – Apêndice D

PROBLEMA 12 FÁCIL

16 Propriedades da circunferência: Não é valido!

A aplicação das propriedades da circunferência não é válida neste caso, pois nenhum ponto do problema foi definido sobre uma circunferência específica.

1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é valido!

Não há segmentos ou ângulos que caracterizem uma bissetriz interna no triângulo, tornando a aplicação desse teorema inválida.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!

Estabelece-se a semelhança entre os triângulos DAO e EDC, permitindo relacionar as incógnitas a e b por meio de proporções.

7 Teorema de Pitágoras: Válido!

Aplica-se o teorema ao triângulo AOD, relacionando seus lados para encontrar os valores de a e b, onde a corresponde ao lado do quadrado.

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!

Não há necessidade de calcular o perímetro ou semiperímetro, pois o foco está na área do quadrado e em medidas específicas, não no contorno total do triângulo.

20 Fórmula da área do triangulo: Não é valido!

Não é necessário calcular a área de qualquer triângulo, pois o objetivo é determinar a área do quadrado com base em relações de semelhança e medidas específicas.

19 Fórmula da área do quadrado: Válido!

A área do quadrado é calculada diretamente como a.a, fechando a solução do problema com base nas relações estabelecidas anteriormente.

PROBLEMA 12 MÉDIO/DIFÍCIL

15 Propriedades do quadrado: Válido!

Utiliza-se que o quadrado possui lados iguais e ângulos retos, o que é fundamental para estabelecer relações geométricas e de semelhança no problema.

9 Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!

Permite concluir que os ângulos agudos nos triângulos retângulos DAO e DEC são complementares, o que é essencial para confirmar a semelhança entre eles e avançar na resolução.

4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!

Estabelece-se a semelhança entre os triângulos DAO e EDC, permitindo relacionar as incógnitas a e b por meio de proporções.

7 Teorema de Pitágoras: Válido!

Aplica-se o teorema ao triângulo AOD, relacionando seus lados para encontrar os valores de a e b, onde a corresponde ao lado do quadrado.

5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é valido!

Não há necessidade de calcular o perímetro ou semiperímetro, pois o foco está na área do quadrado e em medidas específicas, não no contorno total do triângulo.

20 Fórmula da área do triangulo: Não é valido!

Não é necessário calcular a área de qualquer triângulo, pois o objetivo é determinar a área do quadrado com base em relações de semelhança e medidas específicas.

19 Fórmula da área do quadrado: Válido!

A área do quadrado é calculada diretamente como a.a, fechando a solução do problema com base nas relações estabelecidas anteriormente.

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

APÊNDICE E (RESOLUÇÃO LARANJA)

Este apêndice detalha o passo a passo correspondente à resolução original de cada problema atribuído à Carta Laranja, categoria classificada como de alto grau do jogo. A estrutura apresentada serve como referência tanto para o juiz (mediador ou avaliador), que a utilizará como base para aferir as estratégias, além do manual da partida, e o desempenho dos participantes, quanto para os alunos.

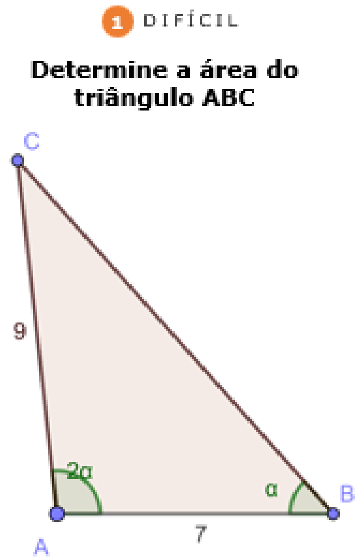
Do ponto de vista educacional, a sistematização dessas resoluções tem como objetivo permitir que os jogadores compreendam a fundamentação lógica e metodológica por trás de cada solução, contribuindo para a assimilação de processos de raciocínio crítico e resolução sistemática de desafios. Dessa forma, busca-se não somente avaliar resultados, mas também incentivar a transposição didática do aprendizado.

A transposição didática, algo que não foi mencionado até então, embora possa parecer repetitivo, atua como um mecanismo pedagógico crucial para a fixação de conteúdo e a consolidação das competências desenvolvidas durante o jogo.

Segue abaixo as resoluções de cada problema laranja original (difícil).

Observação: As passagens destacadas em **negrito** referem-se a etapas provenientes da Carta Branca, conforme a mecânica do jogo. A decisão de detalhar os cálculos neste apêndice, ainda que o foco do jogo seja a estratégia e não a exatidão numérica, visa proporcionar uma documentação completa do processo para estudo e auditoria.

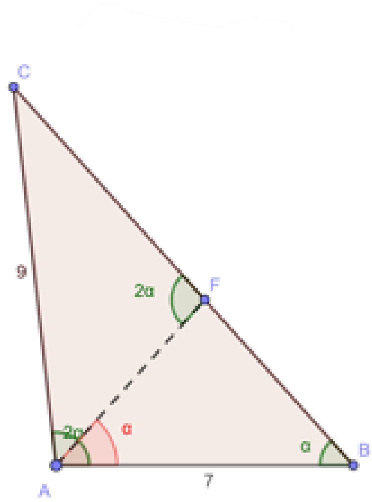
A seguir, apresentam-se a resolução dos problemas laranja, conforme versão entregue aos alunos, segue abaixo:



No problema 1, é solicitado determinar a área do triângulo ABC. A alternativa mais adequada é utilizar a fórmula da área de Heron, mas, para isso, é necessário calcular a medida do lado BC.

Para encontrá-lo, aplicamos o **Teorema da bissetriz interna do triângulo**, que divide o ângulo ∠BAC, que mede 2α, em duas partes iguais. Na adaptação do desenho, aparecem dois ângulos iguais: ∠FAB = α e ∠FBA = α.

Assim, forma-se um triângulo isósceles, ou seja, aplica-se a **Propriedade do triângulo isósceles**. Dessa forma, concluímos que os lados FA e FB são iguais, como pode ser observado na segunda representação.



Para determinar o ângulo ∠AFC, aplicamos o **Teorema do ângulo externo do triângulo**, que afirma que ele é a soma dos ângulos ∠FAB e ∠FBA. Assim, temos: ∠FAB + ∠FBA = α + α = 2α. Pelo desenho 2, conseguimos identificar o que é necessário na figura.

A partir daí, aplicamos os **Critérios da semelhança de triângulos** entre o triângulo BAC e o triângulo AFC.

Como AF é igual a FB, chamamos essa medida de x. Dessa forma, obtemos a seguinte relação: $\frac{9\ \ 9}{y+xy+x} = \frac{xx}{77} = \frac{yy}{99}$, sendo FC=y. Os valores são: x =FB= $\frac{2121}{4\ \ 4}$ e y=FC= $\frac{2727}{4\ \ 4}$.

Vamos somar os lados: FB + FC = x + y = 12, logo BC = 12. Agora temos os três lados do triângulo: AB = 7, AC = 9 e BC = 12.

Antes de aplicar a fórmula de Heron, é preciso calcular o perímetro ou o semi-perímetro.

Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: o perímetro é a soma dos lados, e o semiperímetro é metade dessa soma. Fazendo o cálculo: 2P = 7 + 9 + 12 => 2P = 28 =>P = 14. Observação: P (maiúsculo) representa o semiperímetro, enquanto p (minúsculo) representa o perímetro, isto é, p = 2P.

Aplicando a **Fórmula da área do triângulo** (Heron):

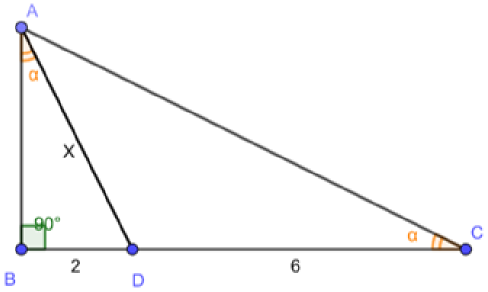
A = $\sqrt{(P)(P-l1)(P-l2)(P-l3)}\sqrt{(P)(P-l1)(P-l2)(P-l3)}$ =>A = $\sqrt{(14)(14-7)(14-9)(14-12)}\sqrt{(14)(14-7)(14-9)(14-12)}$ =

A = 14 $\sqrt{5}\sqrt{5}$ (u.a).

2 DIFÍCIL

Na figura a seguir, considere o triângulo representado. Determine o valor do segmento AD=x.

Observação: todas as informações necessárias para a resolução estão indicadas na própria figura.



No problema 2, a alternativa mais adequada e direta para a resolução é, em um primeiro momento, aplicar os **Critérios da semelhança de triângulos** entre os triângulos ABD e CBA.

Dessa forma, obtemos a seguinte relação: $\frac{2\ 2}{ABAB} = \frac{x}{AC}$ $\frac{x}{AC} = \frac{AB\quad AB}{(2+6)(2+6)}$ => AB^2=2.8=16 => AB=4|AB>0.

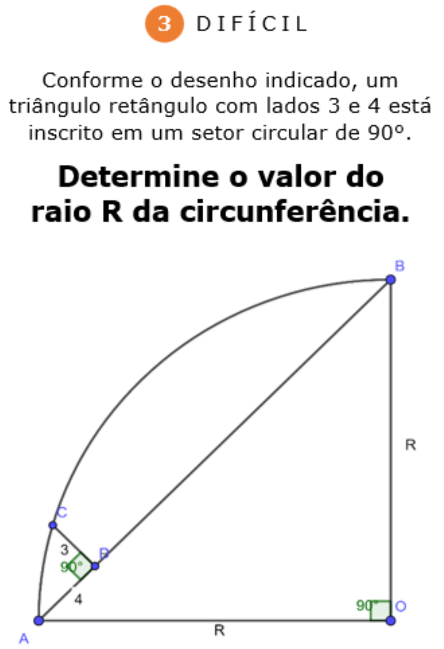
Analisando o triângulo interno ABD, observamos que já conhecemos dois lados e que existe um ângulo de 90 graus. Assim, podemos aplicar o **Teorema de Pitágoras**, obtendo:

$AD^2 = AB^2 + BD^2$ =>

$X^2=4^2+2^2$ =>

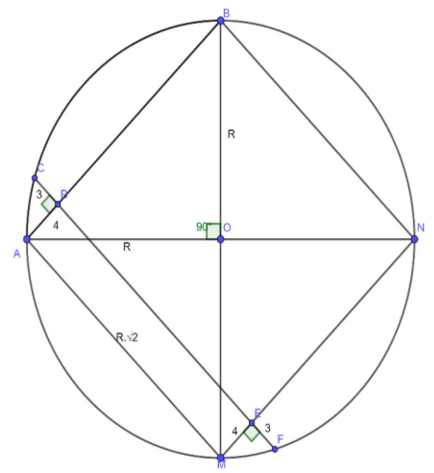
$x^2 =16+4=20$ =>

Então: AD = x = 2 $\sqrt{5}\sqrt{5}$ (u.m).



No problema 3, para compreender e visualizar melhor a questão, é interessante redesenhar a figura. Para isso, é necessário conhecer as **Propriedades da circunferência**.

O desenho está ilustrado abaixo, com todos os seus segmentos prolongados.



Alguns destes próximos passos não precisam seguir uma ordem rígida, podendo ser feitos em paralelo.

Primeiro, vamos determinar o segmento AB. Para isso, aplicamos o **Teorema de Pitágoras**: $AB^2 = AO^2 + BO^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$. Portanto, $AB = R\sqrt{2}$.

É interessante redesenhar o quadrado dentro da circunferência. Embora seja algo intuitivo, é importante lembrar das **Propriedades do quadrado**, ou seja, ele possui os quatro lados iguais, com ângulos retos.

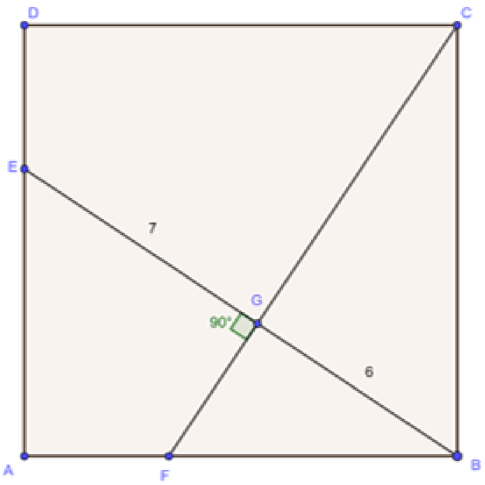
Em seguida, podemos visualizar os **Critérios de congruência de triângulos**, observando que o triângulo ADC é congruente (igual) ao triângulo MEF.
Já sabemos que $AB = R\sqrt{2}$ e que $AD = 4$. Logo: $BD = R\sqrt{2} - 4$.
Sabemos também que $CD = 3$ (dado no enunciado). Além disso, como $AM = DE = \sqrt{2}$, concluímos que: $FD = FE + ED = 3 + R\sqrt{2}$.

Agora, segmentamos as partes para aplicar o **Teorema da potência de um ponto (caso interno)**, que estabelece: $AD \cdot BD = CD \cdot FD$
Substituindo: $4 \cdot (R\sqrt{2} - 4) = 3 \cdot (3 + R\sqrt{2})$

Desenvolvendo pela distributiva e isolando R, obtemos o valor de $R = \frac{25\sqrt{2}\,25\sqrt{2}}{2 \quad 2}$ (u.m).

4 DIFÍCIL

Calcule a área do quadrado ABCD, sabendo que os segmentos EG e GC são perpendiculares entre si, com comprimentos EG=7 e GB=6, conforme a figura.



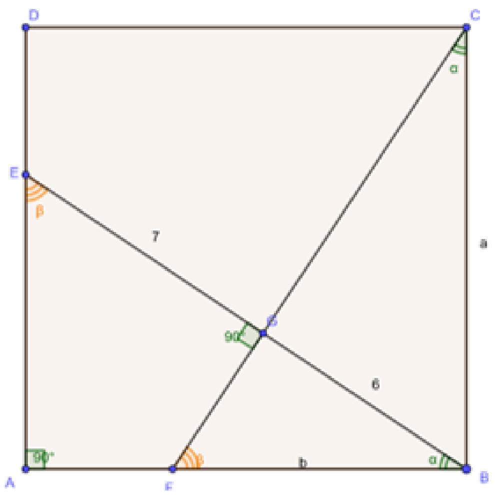
No problema 4, o ponto de partida fundamental é destacar as **Propriedades do quadrado**, lembrando que todos os lados são iguais e que ele é formado por ângulos retos (90°). Assim, temos o ângulo ∠BAE = ∠ABC = 90°.

Vamos analisar o triângulo BAE.
Chamamos o ângulo ∠ABE de α (i).
Sabemos que ∠BAE = 90° e adotamos o ângulo ∠AEB = β, de forma que a soma dos ângulos internos é α + 90° + β.

Observa-se aqui os **Critérios de congruência de triângulos** entre BAE e CBF, pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto), já que AB = BC. Assim, concluímos que CF possui a mesma medida de BE, ou seja, 13.

Em paralelo com essa situação, reforçamos o ângulo reto (90°) em ∠BGF, que se dá pela **Definição de ângulos suplementares**: BGF + EGF = 180°.

Agora, analisando o triângulo BGF: inicialmente (i) temos que ∠ABE = ∠FBG = α, e que ∠BGF = 90°. Logo, concluímos que o ângulo ∠BFG é β (ângulo faltante).
Podemos redesenhar da seguinte forma abaixo:



Analisando o triângulo FBC, temos que o ângulo ∠BFC = β, o ângulo FBC = 90°, e o ângulo que falta é ∠BCF = α.

Podemos aplicar os **Critérios da semelhança de triângulos** entre BGF e BCF. Dessa forma, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{FGFG}{b\ b} = \frac{b\ b}{1313} = \frac{66}{aa}$$

Daí resulta:
$a \cdot b = 6 \cdot 13$
$a \cdot b = 78$ (ii)

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** no triângulo CBF, por existir um ângulo reto, temos:

$a^2 + b^2 = 13^2$
$a^2 + b^2 = 169$ (iii)

Agora, resolvemos o sistema formado pelas equações (ii) e (iii):

(ii) $a \cdot b = 78$
(iii) $a^2 + b^2 = 169$

A solução fornece os valores de a e b.

No caso, encontramos:
$a = 3\sqrt{13}$

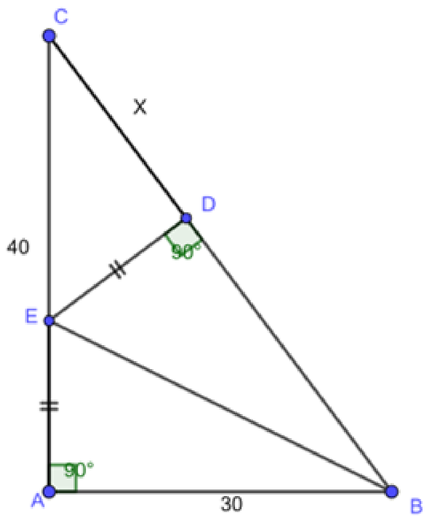
Como o problema pede a área do quadrado, utilizamos a **Fórmula da área do quadrado**:

$A = a^2 = 117$ (u.a)

5 DIFÍCIL

Considere o triângulo ABC, cujas medidas estão representadas na figura.

Calcule o valor do segmento CD, indicado por X.



No problema 5, o enunciado não descreve diretamente, mas pelo desenho fica evidente que os segmentos AE e DE são iguais (AE = DE).

A partir disso, aplicamos os **Critérios de congruência de triângulos** entre os triângulos BAE e BDE, pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto). Assim, concluímos que BD possui a mesma medida de AB, ou seja:
BA = BD = 30.

Aplicando o **Teorema de Pitágoras**, no triangulo ABC por existir um ângulo reto em BAC, temos:

$BC^2 = 30^2 + 40^2$
$BC^2 = 900 + 1600$
$BC^2 = 2500$
$BC = 50$

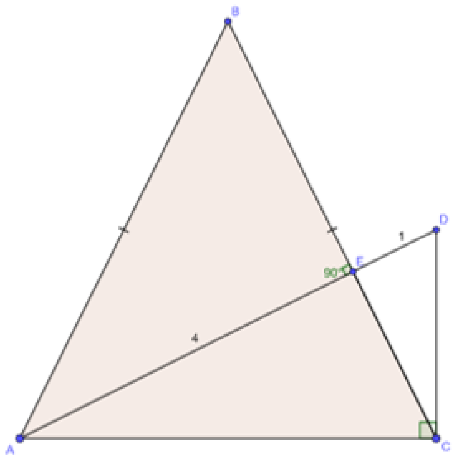
Dessa forma, conseguimos determinar o valor de x, que é a diferença entre BC = 50 e BD = 30:

$x = 20$

6 DIFÍCIL

Calcule a área do triângulo ABC, sendo AB=BC, conforme indicado na figura.

Utilize o triângulo auxiliar ACD para apoiar a resolução, considerando os segmentos AE=4 e ED=1.



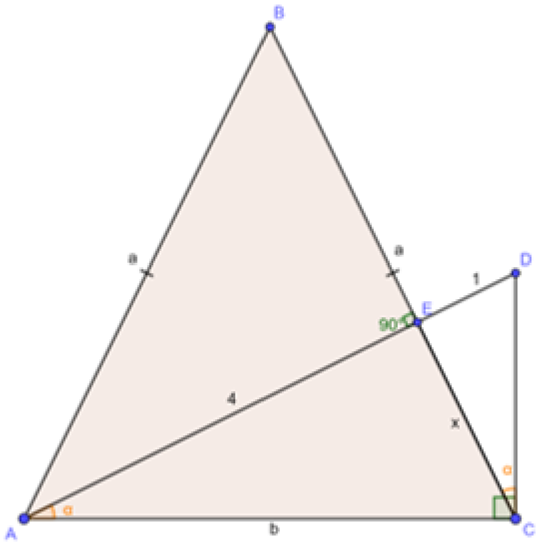
No problema 6, um ponto de partida é que, embora o ângulo AEC pareça obviamente reto, sua determinação exige uma relação suplementar. Como ∠AEB = 90°, obtemos: ∠AEC = 180° − ∠AEB = 90°.

Isso corresponde exatamente à **Definição de ângulos suplementares**.

Outro conceito é considerar o ângulo ∠CAD = α, apenas para deixar evidente.
Agora, vamos analisar os triângulos:

- Triângulo AEC: já sabemos que ∠CAD = α e que ∠AEC = 90°. Logo, o ângulo que sobra é ∠ACE, que adotamos como β.
- Triângulo ACD: sendo ∠CAD = α e, pelo enunciado do desenho, ∠ACD = 90°, concluímos que o ângulo que sobra é ∠ADC = β.
- Triângulo CDE: já sabemos que ∠ADC = ∠EDC = β. Automaticamente, pela primeira ideia, ∠DEC = 90°. Assim, o ângulo que sobra é ∠DCE = α.

Um esboço abaixo para ficar mais claro a ideia:



Agora, aplicamos os **Critérios da semelhança de triângulos** entre AEC e CED. Obtemos a seguinte relação:

$\frac{xx}{11} = \frac{b\ b}{CDCD} = \frac{44}{xx}$, isso resulta em:

$x^2 = 1 \cdot 4 = 4$
Logo, $x = 2$.

Sabemos pelo enunciado que AB = CB, e chamamos essa medida de "a". Assim, BE será a diferença de CE, ficando:
BE = a − 2.

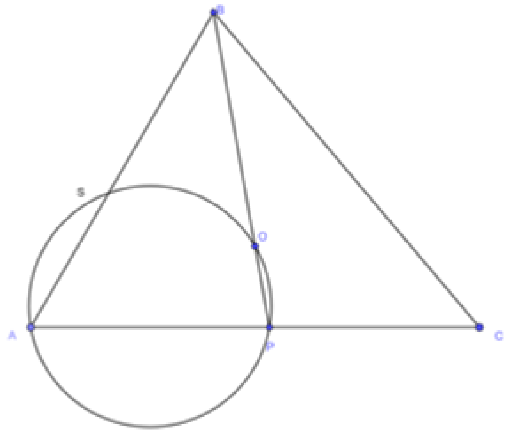
Analisando o triângulo AEB, observamos que existe um ângulo reto (∠AEB = 90°). Dessa forma, aplicamos o **Teorema de Pitágoras**: $4^2 + (a - 2)^2 = a^2$.

Resolvendo, obtemos: a = 5. Como o problema pede para determinar a área, utilizamos a **Fórmula da área do triângulo**, que será: $A = \frac{(4.5)}{2}\frac{(4.5)}{2} = 10$ (u.a)

7 DIFÍCIL

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a interseção das retas BO e AC, e S a circunferência circunscrita ao triângulo AOP. Suponha que BO é igual a AP e que a medida do arco OP em S, que não contém o ponto A, é igual a 40 graus.

Determine a medida do ângulo OBC.



No problema 7, é interessante redesenhar todos os passos ou pontos importantes.

O enunciado fala do circuncentro, então devemos redesenhar um círculo onde os pontos A, B e C estão na circunferência e marcar o raio R. Assim, R = AO = OB = OC. Como o enunciado também diz que BO = AP, temos: AP = OB = R.

O arco OP mede 40°. Pelo **Teorema do Ângulo Inscrito**, concluímos que: ∠OAP = 20°.

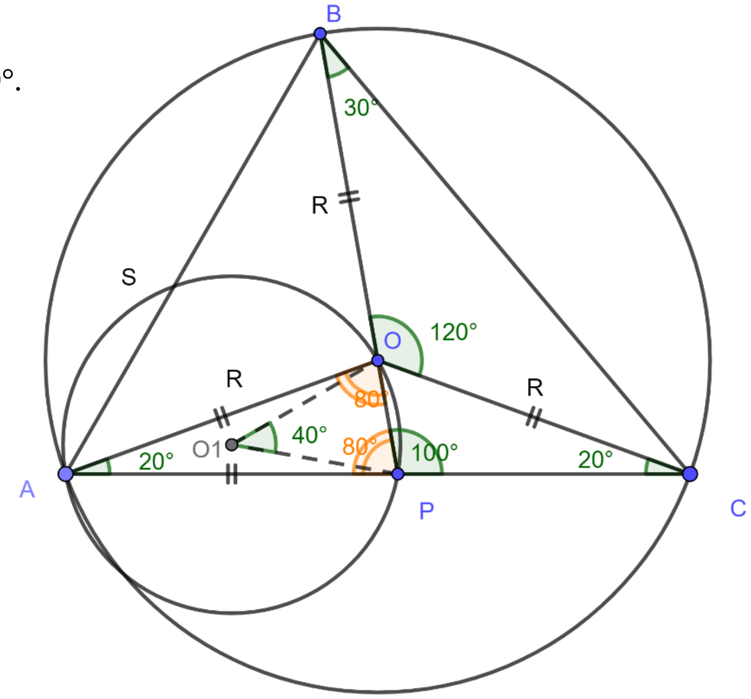
Neste problema aparecem diversos triângulos isósceles **(Propriedade do triângulo isósceles)**.

- No triângulo AOP: como AP = AO, temos ∠APO = ∠AOP. Pela soma dos ângulos internos, se ∠OAP = 20° e ∠APO = ∠AOP, então:
  ∠OAP + ∠APO + ∠AOP = 180°
  Portanto, ∠APO = ∠AOP = 80°.
- No triângulo AOC: como AO = CO, segue que ∠OAP = ∠OCP = 20°.

Para determinar ∠OPC, utilizamos a **Definição de ângulos suplementares**. Como ∠APC = 180° e ∠APO = 80°, segue que: ∠OPC = 100°.

Para determinar ∠BOC, usamos a soma de ∠OPC + ∠OCP, pelo **Teorema do ângulo externo do triângulo**. Assim: ∠BOC = 120°.
(Observação: este passo poderia ser feito de outras formas, mas todas levam à mesma ideia.)
No triângulo OBC: como OB = OC, temos ∠OBC = ∠OCB. Sabendo que ∠BOC = 120°, sobra 60° para os outros dois ângulos. Logo:
∠OBC = ∠OCB = 30°.

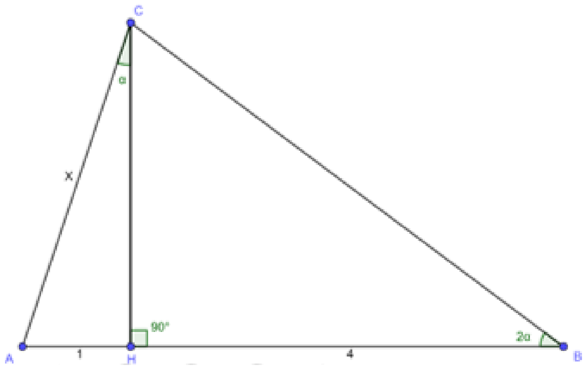
Resposta final: ∠OBC = 30°.



8 DIFÍCIL

No triângulo ABC, queremos descobrir o valor de x, que representa o lado AC. Sabemos que uma altura foi traçada do ponto C até o lado AB, formando um ângulo de 90 graus no ponto H. É dado que AH vale 1 e HB vale 4.

O ângulo no vértice C (ACH) é α e o ângulo no vértice B é 2α.



No problema 8, sabemos inicialmente que o ângulo ∠AHC é de 90°, pois ele é suplementar a ∠BHC. Pela **definição de ângulos suplementares**, temos:

∠AHC = 180° − ∠BHC = 180° − 90° = 90°.

No triângulo AHC, aplicamos o **teorema da soma dos ângulos internos do triângulo**. Sendo ∠AHC = 90° e ∠HCA **=** α, temos:

90° + α + ∠CAH = 180°.
Logo, ∠CAH = 90° − α.

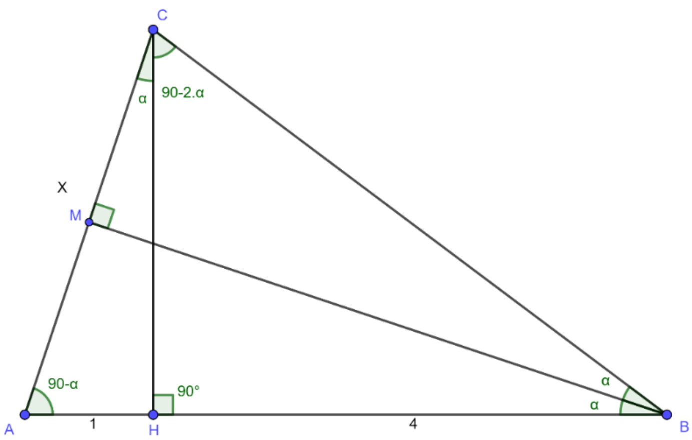
Agora, vamos analisar o triângulo HCB para determinar o ângulo ∠HCB. Pela **definição de ângulos complementares**, como ∠BCH é complementar a ∠HBC, obtemos:

∠BCH = 90° − 2α. Assim, o ângulo ∠ACB (C**)** será: ∠ACB = 90° − α.

No triângulo ABC, observamos que os ângulos ∠CAB e ∠BCA são iguais, o que indica, pela **propriedade do triângulo isósceles**, que AB = CB = 5.

Um detalhe interessante é que, no mesmo triângulo ABC, podemos aplicar o **Teorema da Bissetriz Interna**. Esse recurso divide o ângulo ∠ABC em duas partes iguais, o que será útil em passos futuros envolvendo a semelhança de triângulos.

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar.



Usando o **Critérios da semelhança de triângulos** dos triângulos AHC e CMB, considerando que CM = x/2. A partir disso, já podemos determinar o valor de x (CA).

Ira fica a seguinte relação:

$\frac{1\ \ 1}{x/2x/2} = \frac{xx}{55} = \frac{HC\ HC}{MBMB}$, resultando em

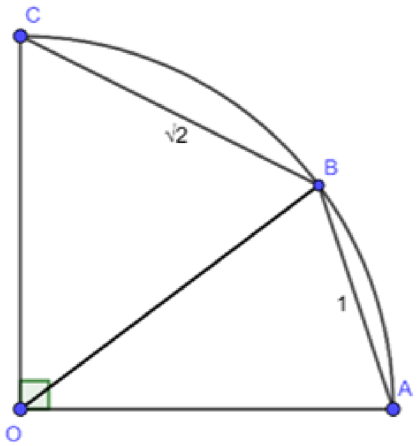
$x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}\sqrt{10}$ (u.m)

Então: AC= $\sqrt{10}\sqrt{10}$ (u.m)

9 DIFÍCIL

No desenho abaixo, temos um quarto de círculo com centro em O. Os pontos A e C estão sobre os eixos e formam ângulos retos com O. O ponto B está sobre o arco do quarto de círculo. Sabemos que AB = 1 e BC = √2.

Qual é o valor do segmento OA?

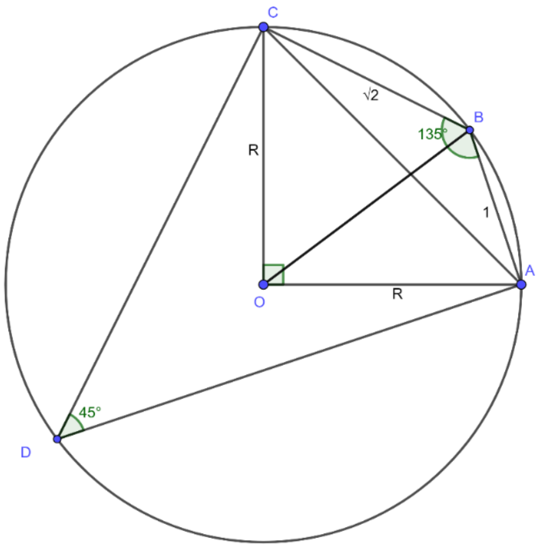


No problema 9, primeiro ponto de partida para compreender melhor a resolução, é útil redesenhar a figura completa, destacando a circunferência e considerando suas propriedades fundamentais, como a igualdade dos raios (AO = OC = R), ou seja, é fundamental saber as **propriedades da circunferência**.

Para descobrir o ângulo ∠ABC, utilizamos o **teorema do ângulo inscrito**, lembrando que seu ângulo central correspondente é uma perpendicular (90°). Refletindo em ∠ADC=45°.

Como os vértices do quadrilátero estão sobre a circunferência, ele é cíclico. Assim, podemos aplicar a propriedade de que ângulos opostos de um quadrilátero inscrito somam 180° (**Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito)**. Sendo ∠ADC+∠ABC=180° => 45°+∠ABC=180° => ∠ABC=135°.

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar.



Como o triângulo AOC é retângulo, pelo **Teorema de Pitágoras** temos: $OA^2OA^2 + OC^2OC^2 = AC^2AC^2$ => $R^2R^2 + R^2R^2 = AC^2AC^2$=>AC=R.$\sqrt{2}\sqrt{2}$.

Aplicando a **Lei dos cossenos**, para desvendar o valor do R (raio), ficando:

$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2.AB.CB.\cos(135^{oo})$

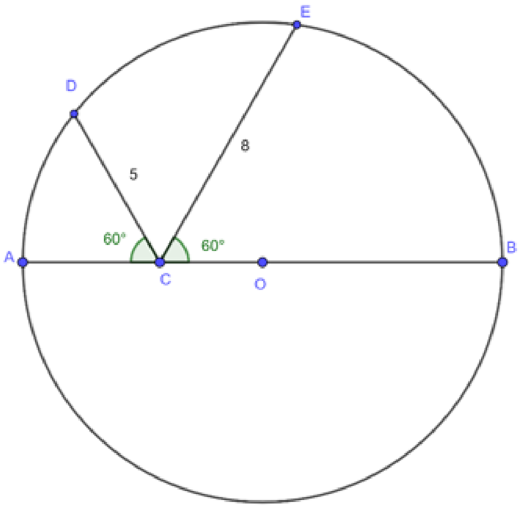
$(R.\sqrt{2})\sqrt{2})^2 = 1^2 + (\sqrt{2}\sqrt{2})^2 - 2.1.\sqrt{2}\sqrt{2}.(-\sqrt{2/2})\sqrt{2/2})$

R=AO= $\frac{\sqrt{10}\sqrt{10}}{2 \quad 2}$ (u.m)

10 DIFÍCIL

Calcule o raio da circunferência (OA = OB).

Os dados estão indicados no desenho.

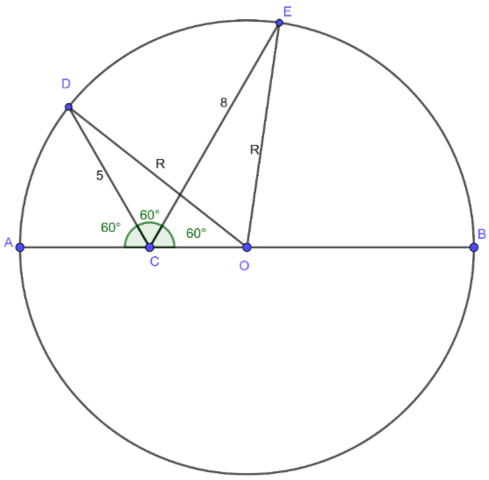


No <u>problema 10</u>, o ponto de partida é perceber que uma das **propriedades da circunferência** é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R).

Outro passo é determinar o ângulo DCE. Observamos que ele é a **definição de ângulos suplementar** da soma 60° + 60° = 120°. Assim, concluímos que ∠DCE = 180° – 120° = 60°.

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar:

Analisamos o triangulo OCE, e aplicamos a **Lei dos cossenos**, tendo:



$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2.OC.CE.\cos(60°)$
$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2.OC.CE.\cos(60°)$, resultando em $R^2 = OC^2 + 8^2 - 2.OC.8.\cos(60°)$ $R^2 = OC^2 + 8^2 - 2.OC.8.\cos(60°)$, a qual chamamos de equação (a).

Analisando o triangulo OCD, reaplicamos a **Lei dos cossenos** novamente, teremos:

$OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2.OC.CD.\cos(120°)OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2.OC.CD.\cos(120°)$, o que resulta em

$R^2 = OC^2 + 5^2 - 2.OC.5.\cos(120°)R^2 = OC^2 + 5^2 - 2.OC.5.\cos(120°)$, a qual chamamos de equação (b).

Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R, que será:

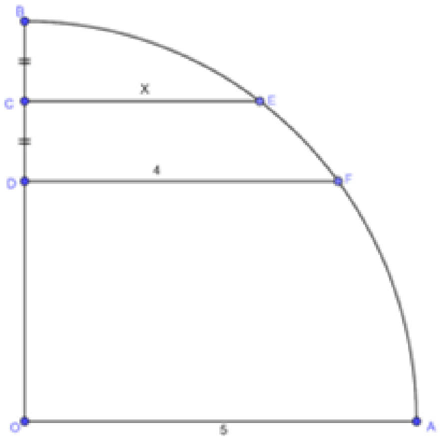
OC=3 (u.m) e o raio: R=7 (u.m)

11 DIFÍCIL

Temos um quarto de circunferência, com raio igual a 5. Sabemos que os segmentos DC e CB são iguais e o segmento DF mede 4.

Calcule o valor de X (segmento CE).

Obs: AO||DF||CE (paralelas entre si).



No problema 11, é perceber as **propriedades da circunferência**, que uma delas é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R), ou seja, R=AO=OB=OE=OF=5.

Analisando o triangulo ODF, aplicamos o **Teorema de Pitágoras**, por ter um ângulo reto em ∠ODF (90°) paralelo, isso é garantido por ser um quarto da circunferência. Logo:

$OF^2 = OD^2 + DF^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + OD^2 \Rightarrow OD=3$.

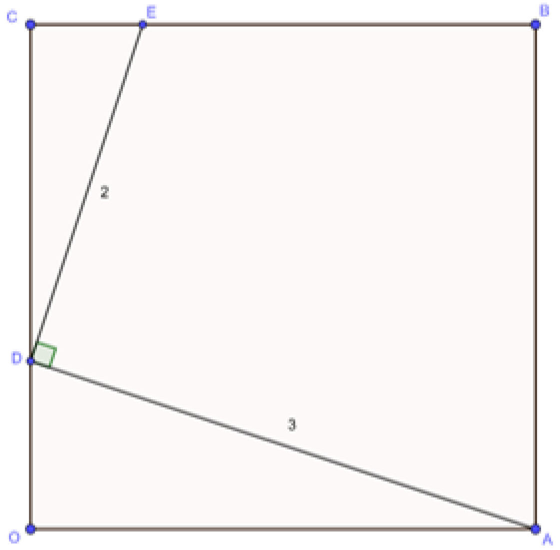
Como sabemos que OB = R=5, e sendo BC=CD. Resulta em CD=5-3=2, que reflete em BC=CD=1.

Analisando o triangulo OCE, temos OC=4, CE=x e OE=5. Aplicamos o **Teorema de Pitágoras** e resultará em $5^2 = 4^2 + x^2$. Então: x = CE = 3 (u.m).

12 DIFÍCIL

No desenho, temos um quadrilátero ABCO. Dentro dele, estão destacados dois triângulos: △DAO e △DEC. Sabemos que DE=2, DA=3 e o ângulo ∠ADE é reto.

Calcule a área do quadrilátero ABCO.



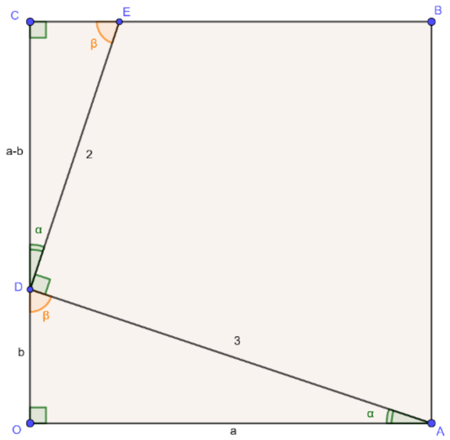
No problema 12, sabe-se que o quadrado possui lados iguais e ângulos retos, o que é fundamental para estabelecer relações geométricas e de semelhança no problema, neste caso usamos as **Propriedades do quadrado**.

Utilizar a ideia do **Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo**, é fundamental. Analisando o triangulo AOD, podemos considerar ∠OAD=α, sendo ∠AOD =90°, e adotando ∠ODA=β, para estabelecer uma ideia, que resulta em β=90-α. Analisando o triangulo DEC, sendo ∠DCE =90° e vamos determinar o ∠CDE do seguinte modo: ∠ODC=∠ODA+∠ADE+∠CDE

180=α +90 +∠CDE, logo:

∠CDE=90-α = β, e como sabemos ∠DCE =90°, ∠DEC=α.

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar.



Estabelece-se o **Critérios da semelhança de triângulos** entre DAO e EDC, permitindo relacionar as incógnitas a e b por meio de proporções.

$\frac{b\ \ b}{CECE} = \frac{33}{22} = \frac{a\ \ \ a}{a-ba-b}$ que resulta em a=3b.

Aplicando agora o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo AOD, relacionamos seus lados para encontrar os valores de *a* e *b*, onde *a* corresponde ao lado do quadrado: $3^2 = a^2 + b^2$.

Resolvendo a equação, obtemos: $a^2 = 81/10$.

Como o problema pede a área do quadrado, aplicamos a **fórmula da área do quadrado**: $A = a \times a = a^2 = 81/10$ (u.a).