INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

Viviane Leal Valentim

ENTRE PALAVRAS E SÍMBOLOS:
Cálculo de valores desconhecidos

São Paulo
2025

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

Viviane Leal Valentim

ENTRE PALAVRAS E SÍMBOLOS:
Cálculo de valores desconhecidos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. LEANDRO ALBINO MOSCA RODRIGUES.

São Paulo
2025

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

v155e Valentim, Viviane Leal
Entre palavras e sÍmbolos: cálculo de valores desconhecidos / Viviane Leal Valentim. São Paulo: [s.n.], 2025.
77 f.

Orientador: Leandro Albino Mosca Rodrigues

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2025.

1. Equações. 2. Incógnita. 3. História da Matemática. 4. Pensamento Algébrico. 5. Valores Desconhecidos. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

“ENTRE PALAVRAS E SÍMBOLOS: CÁLCULO DE VALORES DESCONHECIDOS”

Autora: Viviane Leal Valentim

Orientador: Prof. Dr. Leandro Albino Mosca Rodrigues

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou essa dissertação:

____

Prof. Dr. Leandro Albino Mosca Rodrigues

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP - CBT

____

Profa. Dra. Valeria Ostete Jannis Luchetta

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP - SPO

____

Prof. Dr. Antônio Carlos Brolezzi

Universidade Estatual de São Paulo - IME -USP

____

Prof. Dr. Adilson Longen

Universidade Federal do Paraná - UFPR

São Paulo, 18 de dezembro de 2025.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, familiares, professores e amigos!

RESUMO

Esta dissertação explora alguns episódios históricos considerados relevantes no estudo das equações do primeiro e do segundo grau. São analisados problemas extraídos de registros antigos, acompanhados de interpretações algébricas atuais e, em alguns casos, de representações geométricas, com o objetivo de evidenciar estratégias de resolução de problemas envolvendo valores desconhecidos. As contribuições examinadas incluem: os métodos utilizados por egípcios e babilônios por volta de 2000 a.E.C., registrados no Papiro de Ahmes e em tábuas de argila; a obra *Aritmética*, de Diofanto de Alexandria, por volta de 300 E.C.; trabalhos de matemáticos indianos medievais; e, por fim, o tratado em árabe do matemático persa Al-Khwarizmi, cuja obra originou o termo “álgebra”.

Palavras-chaves: equações; incógnita; História da Matemática; pensamento algébrico; valores desconhecidos.

ABSTRACT

This dissertation explores key historical episodes regarded as significant in the study of first- and second-degree equations. It analyzes problems found in ancient records, accompanied by modern algebraic interpretations and, in adicione cases, geometric representations, aiming to highlight problem-solving strategies involving unknown quantities. The study examines contributions from the Egyptians and Babylonians around 2000 BCE, as recorded in the Ahmes Papyrus and clay tablets; from Diophantus of Alexandria, around 300 CE, through his work *Arithmetica*; from medieval Indian mathematicians; and from the Persian scholar Al-Khwarizmi, whose Arabic treatise gave rise to the term “algebra.”

Keywords: equations; unknowns; History of Mathematics; algebraic thinking; unknown quantities.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Conforme estabelece o Currículo Paulista, um dos compromissos fundamentais do componente curricular de Matemática é a promoção do Letramento Matemático entre os estudantes. Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o letramento matemático é

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (Brasil, 2017, p. 264).

Partindo desse compromisso, esta dissertação tem como objetivo apresentar contribuições consideradas relevantes por diversos pesquisadores para o desenvolvimento do pensamento e da notação algébricos. Pretende-se, assim, fomentar o letramento matemático por meio da exposição de métodos históricos de resolução de problemas envolvendo o cálculo de valores desconhecidos buscando: estabelecer conexões entre essas abordagens e as formas contemporâneas de resolução e ampliar o repertório dos estudantes na resolução de problemas expressos por meio de equações.

Para tanto, adotamos uma abordagem investigativa centrada na análise das estratégias empregadas em problemas extraídos de documentos históricos amplamente estudados por historiadores e historiadoras da matemática. Inicialmente, identificamos marcos históricos considerados relevantes por esses estudiosos e, a partir deles, selecionamos problemas e respectivas estratégias de resolução que possam ser explorados na Educação Básica, considerando especialmente a História da Matemática como um recurso didático.

Dessa forma, esta dissertação inicia-se com um tópico que apresenta alguns referenciais que recomendam a inclusão da História da Matemática como recurso didático no ensino.

No tópico 3, são discutidas as contribuições dos povos egípcios e babilônicos, por meio da análise de problemas extraídos de papiros e tábuas de argila datados de aproximadamente 2000 a. E. C. Destaca-se, nesse contexto, a aplicação da regra da falsa posição na interpretação de problemas que hoje representamos por equações do primeiro grau, presentes nos papiros egípcios, bem como as técnicas babilônicas para a resolução de problemas interpretados como equações quadráticas.

Em seguida, avançamos para a obra *Aritmética* de Diofanto, do século III, que introduziu o uso de abreviações simbólicas e manipulações algébricas envolvendo a noção de igualdade.

Por fim, na Idade Média, são exploradas as contribuições da matemática indiana, como a generalização retórica de enunciados e procedimentos para a resolução de problemas com valores desconhecidos. A dissertação conclui com elementos do *Tratado sobre o cálculo por al-jabr e al-muqabala* de Al-Khwarizmi, que sistematizou esses problemas em seis formas canônicas, acompanhadas de seus respectivos métodos de resolução e uma justificativa geométrica.

Na seção de anexos, são apresentadas propostas de aulas, em formato de slides, contendo estratégias para a resolução de equações que utilizam a História da Matemática como recurso didático, com o objetivo de contribuir com recursos didáticos de professores a fim de contribuir com uma aprendizagem mais significativa.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) afirmam que a inserção da História da Matemática no processo de ensino colabora para revelar essa disciplina como uma construção humana, refletindo as necessidades, interesses e inquietações de diversas culturas ao longo da história. Alinhada a isso, a Base Nacional Curricular Comum – BNCC - (2017) ressalta a relevância de utilizar aspectos históricos da própria Matemática como ferramenta pedagógica para despertar o interesse dos alunos e proporcionar um contexto enriquecedor à aprendizagem.

Para D'Ambrósio (1999), uma das finalidades da História da Matemática é evidenciar que a matemática ensinada nas escolas representa apenas uma entre as diversas formas de conhecimento matemático desenvolvidas ao longo da história da humanidade. Além disso, ele destaca que essa forma específica de matemática tem suas raízes nas culturas da Antiguidade mediterrânea, tendo se desenvolvido durante a Idade Média e se consolidado como um corpo organizado de conhecimentos, com estilo próprio, apenas a partir do século XVII. Para ele,

> [...] as ideias matemáticas comparecem em toda o desenvolvimento da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim [...]. Em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e saber (D'Ambrósio, 1999 - p. 97).

Nessa perspectiva, a inclusão da História da Matemática no ensino parece ser uma estratégia pedagógica fundamental para tornar o aprendizado mais significativo, humano e contextualizado. Ao apresentar a matemática como uma construção histórica, espera-se que os estudantes passem a enxergar esse conhecimento como um processo vivo, criado e aperfeiçoado por pessoas reais ao longo do tempo. Isso humaniza o componente, mostrando que ela foi desenvolvida por diferentes civilizações em distintos momentos históricos. Dessa forma, valoriza-se também a diversidade cultural e combate-se a visão eurocêntrica que muitas vezes domina os currículos escolares.

Gutierre (2003 *apud* Farias, 2016, p. 17) acredita que:

> [...] a História da Matemática deva ter um lugar no ensino da Matemática, pois o professor que lança mão desse recurso pode prestar grande auxílio nas aulas, resgatando, além de aspectos inerentes a algumas demonstrações, o estímulo à imaginação e à criatividade do aluno.

Com relação à linguagem algébrica, sabemos que a representação do raciocínio algébrico em símbolos frequentemente representa desafios na modelagem de problemas. Sobre isso, Brolezzi (1991), afirma que uma utilidade pedagógica da História da Matemática está ligada à forma como a Matemática é expressa por meio de símbolos. A compreensão dessa linguagem simbólica pode influenciar tanto a aprendizagem quanto o interesse dos alunos por ela. Muitas vezes, no entanto, a Matemática é vista com rejeição por estudantes do ensino básico, principalmente devido à dificuldade em entender essa linguagem. Brolezzi também destaca que entender como os símbolos foram construídos ao longo do tempo é essencial para tornar o ensino mais significativo, pois isso possibilita reconstruir esses significados junto com os alunos.

Ainda segundo a BNCC (2017), na etapa do Ensino Médio, espera-se que os estudantes adquiram habilidades voltadas para a investigação, a criação de modelos e a solução de problemas. Além disso, é desejado que desenvolvam competências relacionadas à representação, o que implica o uso de diversos registros de representação, a fim de aplicá-los na modelagem de situações por meio da linguagem matemática específica.

Para Miguel e Miorim (2005, p. 53), a utilização da abordagem histórica dos conteúdos matemáticos constitui um recurso didático que contribui para a concretização de objetivos pedagógicos, permitindo aos alunos perceberem

> [...] a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Portanto, incluir a História da Matemática no ensino não apenas aprofunda a compreensão dos conceitos, mas também promove uma visão mais ampla e crítica da matemática como parte essencial da cultura humana. Além disso, entender como determinados conceitos surgiram e evoluíram pode facilitar a aprendizagem, pois fornece ao estudante uma base conceitual mais sólida. A História da Matemática também favorece o desenvolvimento do pensamento crítico, ao permitir que os alunos analisem as diferentes abordagens que marcaram a trajetória do conhecimento matemático.

2.1. Marcos históricos importantes para o estudo das equações

Almeida (2017) apresenta diferentes perspectivas de pesquisadores sobre a caracterização do pensamento algébrico. Dentre as caracterizações apresentadas por esse autor, adotaremos a perspectiva de Kaput (1999, 2008), segundo a qual o pensamento algébrico consiste em uma atividade própria do ser humano, desenvolvida a partir de generalizações construídas por meio de conjecturas sobre dados e relações matemáticas, utilizando uma linguagem progressivamente mais formal no processo de argumentação. Esse tipo de pensamento pode manifestar-se em diversos contextos matemáticos, como situações aritméticas, geométricas ou de modelagem matemática, configurando-se como uma ampliação do raciocínio que vai além de exemplos ou casos particulares.

Com esse olhar, trataremos o desenvolvimento do pensamento algébrico, tal qual a BNCC (2017) ao enfatizar que o pensamento algébrico não se restringe ao conteúdo tradicional de Álgebra, mas começa a ser desenvolvido, por meio da observação e da descrição de padrões e regularidades, evoluindo gradualmente para a manipulação simbólica e resolução de equações:

> [...] o desenvolvimento do pensamento algébrico está relacionado à capacidade de reconhecer, expressar e generalizar regularidades e padrões presentes em sequências, em propriedades das operações e em relações entre números (Brasil, 2017- p. 267).

Eves (2011) esclarece que a matemática primitiva dependia de aplicações práticas para se desenvolver, o que só foi possível com o surgimento de sociedades mais complexas, especialmente ao longo de grandes rios como o Nilo, Tigre, Eufrates, Indo, Ganges, Hoang Ho e Yangtze. No entanto, é difícil precisar quando ocorreram certas descobertas no Oriente Antigo devido ao isolamento de algumas regiões e à fragilidade dos materiais utilizados para registrar o conhecimento. Enquanto babilônios e egípcios usavam suportes duráveis como argila, pedra e papiro, os chineses e indianos recorriam a materiais perecíveis, como casca de árvore e bambu. Por isso, há mais informações disponíveis sobre a matemática da Babilônia e do Egito do que da China e da Índia no mesmo período. Desse modo, iniciaremos nossa investigação pelos registros matemáticos dos egípcios e babilônios.

Esse historiador reforça ainda que o método de resolução de problemas iniciada com os Egípcios e, mais tarde com os Babilônios, ficou conhecido como álgebra retórica, caracterizada pela resolução de problemas por meio de textos escritos em prosa, sem o uso de símbolos ou abreviações. Em seguida, desenvolveu-se a chamada álgebra sincopada, na qual são introduzidas formas abreviadas para representar operações e quantidades recorrentes, sendo essa última etapa originária na Grécia do século III, com o matemático Diofanto, que se destacou por incorporar abreviações à linguagem matemática. Por fim, surge a álgebra simbólica, marcada pela adoção de um sistema simbólico mais formal iniciado com François Viète no final do século XVI. Ressalta-se que essa classificação não deve ser compreendida como um conjunto de etapas a serem superadas, mas como uma construção histórica, na qual cada fase contribui para o desenvolvimento da álgebra sem invalidar as anteriores.

Assim, a fim de construir um fio condutor, tracemos uma linha do tempo - Figura 1 - destacando elementos que Eves (2011), Roque (2012), bem como outros autores e autoras, consideram fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Destacaremos as contribuições em estratégias de resolução de problemas que atualmente modelamos por equações: dos egípcios e babilônios por volta de 2000 a. E.C[1]., passando pelo Papiro de Ahmes e as tábuas de argila que registram seus cálculos; de Diofanto de Alexandria, por volta de 300 E.C., com sua obra Aritmética; de alguns matemáticos indianos na idade média, além da obra “*Tratado sobre o cálculo por al-jabr e al-muqabala”* escrita em árabe, do persa Al-Khwarizmi, que deu origem ao termo “álgebra”.

---

[1] Era Comum (E.C.) e Antes da Era Comum (a.E.C.) são notações de datação utilizadas predominantemente em produções acadêmicas, que substituem os tradicionais "Anno Domini" (AD) - (“no ano do Senhor”, AD), d.C. (depois de Cristo) - e a.C. (antes de Cristo).

Figura 1: Contribuições para o estudo das equações

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Com essa trajetória, pretendemos dar luz à riqueza e a diversidade de estratégias de resoluções para os problemas de nosso interesse, construídas ao longo de uma rede entrelaçada de tradições históricas, cujas contribuições revelam uma forma de pensar menos abstratas. Esse recurso didático pode ser relevante para auxiliar na superação de barreiras ao desenvolvimento do pensamento algébrico, visto que, conforme pensa Brolezzi (2004), um pensamento algébrico expresso de forma muito simbólico e abstrato, de certa forma deixa à sombra modos concretos, contextuais, artísticos e narrativas de raciocínio, criando obstáculos epistemológicos, por exemplo, na passagem da aritmética para o uso de símbolos, de modo que muito alunos não superam.

3 CÁLCULO DE VALORES DESCONHECIDOS NAS PRIMEIRAS CIVILIZAÇÕES

A abordagem trazida aqui trata-se de uma interpretação de alguns problemas históricos sob a ótica atual, especialmente com a preocupação de trazer repertório para um ensino e aprendizagem que contribua com a apropriação de saberes relacionados ao pensamento algébrico. No entanto, Roque (2012) chama atenção para o fato de que ao analisarmos alguns desses problemas torna-se claro que seria um anacronismo afirmar que egípcios e babilônios realmente conheciam ou resolviam equações da forma como entendemos hoje. Invés disso, o campo da Matemática desses povos, que hoje designamos como algébricos, tinha como característica efetuar procedimentos de cálculo sobre algo que pode ser medido o que definimos como grandezas, sendo o ato de medir o mesmo que comparar.

3.1. No Egito antigo

Com um sistema de numeração decimal não posicional e técnicas aritméticas bem desenvolvidas, a Matemática dos egípcios atendia às demandas sociais da época como na agricultura, comércio e construção.

Diversos documentos estão relacionados ao conhecimento matemático dessa civilização, como os papiros Rollin e Harris. No entanto, para Eves (2011), as principais fontes de informação matemática são os papiros de Moscou (ou Golenischev) e de Ahmes (ou Papiro de Rhinde). Nesses papiros - de Moscou (25 problemas) e de Ahmes (85 problemas) – há registros sobre sistema de numeração, operações aritméticas, relação entre quantidades, problemas que hoje consideramos algébricos e que modelamos como equações e progressões, além de problemas de cunho geométrico com cálculos de áreas e volumes.

Roque (2012, p. 27) afirma que

> [...] Temos notícia da matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, entre eles o de Ahmes, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.C., embora no texto seja dito que seu conteúdo foi copiado de um manuscrito mais antigo ainda. O nome do papiro homenageia o escocês Alexander Henry Ahmes, que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Esse documento também é designado papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no British Museum.

Conforme analisa a autora, o Papiro de Ahmes - Figura 2 - apresenta distintos conjuntos de problemas, cada qual associado a estratégias específicas de resolução. Tal organização sugere a intenção do escriba de estabelecer, por meio de exemplos recorrentes, um procedimento geral com certo grau de sistematização. Entre esses conjuntos, destaca-se o grupo denominado "*aha*"[2], termo empregado pelos escribas para designar um valor desconhecido — a incógnita. No que diz respeito à resolução de alguns desses problemas, muitos historiadores interpretam os procedimentos aplicados pelos escribas como tentativas sucessivas e relações de proporcionalidade — técnicas que, posteriormente, na Europa, foram sistematizadas sob o nome de **"regra da falsa posição"**. Importa ressaltar que nem todos os problemas classificados como *aha* foram resolvidos mediante a essa regra.

Figura 2: Parte do papiro de Ahmes

Fonte: Wikipedia - Domínio público.[3]

---

[2] Grupo de aha é grupo de problemas do Papiro de Ahmes que contém um termo característico em cada um de seus enunciados, expresso por um mesmo símbolo. (Roque, 2012- p. 90).

[3] Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Ahmes#/media/Ficheiro:Ahmes_Mathematical_Papyrus.jpg. Acesso em 16 de out. de 2025.

Veja a seguir o procedimento aplicado pelos egípcios para resolver alguns desses problemas, adaptado em linguagem mais simples:

- ✓ Suponha um valor arbitrário para *aha*;
- ✓ Verifique se esse valor resolve o problema;
- ✓ Caso não seja o valor desejado, divide-se o valor requerido pelo suposto valor encontrado;
- ✓ Por fim, multiplica-se esse novo valor encontrado pelo “falso valor” atribuído ao problema.

Como nosso foco é elucidar a contribuição dessa civilização na resolução de problemas que hoje modelamos por meio de equações, tomemos como referência os problemas 24 e 31 do grupo de *aha* para explorar a técnica da falsa posição (ou falsa suposição) e evidenciar uma interpretação que sugere que os escribas já expressavam um raciocínio algébrico muito próximo do pensamento algébrico atual.

3.1.1. Problema 24 do papiro de Ahmes

“Uma quantidade mais um sétimo dela resulta em 19. Qual é essa quantidade?”

Solução: Aplicando o método supracitado:

- ✓ Supondo *aha* convenientemente igual a 7, para facilitar os cálculos, pois queremos obter um número natural na divisão por sete (um sétimo);
- ✓ Verifiquemos que sete mais um sétimo de sete não resolve, pois $7 + \frac{7}{7} = 8$, e deseja-se obter 19;
- ✓ Divide-se o valor desejado (19) pelo resultado anterior (8), obtendo 19÷8;
- ✓ Multiplica-se o resultado anterior (19 ÷ 8) pelo “falso valor” atribuído inicialmente (7), isto é, (19 ÷ 8) · 7, obtendo como solução $\frac{133}{8}$[4].

[4] Os egípcios trabalhavam com frações unitárias, isso é, frações cujos numeradores são iguais a 1, a menos da fração $\frac{2}{3}$ que frequentemente também eram utilizadas. Assim, a fração $\frac{133}{8}$ era dada por 16 + $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Observe que $\frac{133}{8} = 16{,}625 = 16 + 0{,}500 + 0{,}125 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Podemos mostrar algebricamente que essa regra traz solução única qualquer que seja o valor suposto inicialmente e assim estabelecer uma generalização do discurso argumentativo envolvido nas operações aritméticas envolvidas na resolução.

De fato, hoje podemos representar o problema como $x + \frac{x}{7} = 19$ pela forma geral $x + \frac{x}{n} = b \Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)x = b$. Tomando $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \neq 0$ e b um número real, a equação se reduz à $ax = b$. Em particular, para $n = 7$ e $b = 19$, tem-se $a = 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$, donde $ax = b \Leftrightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19 \cdot 7}{8} = \frac{133}{8}$.

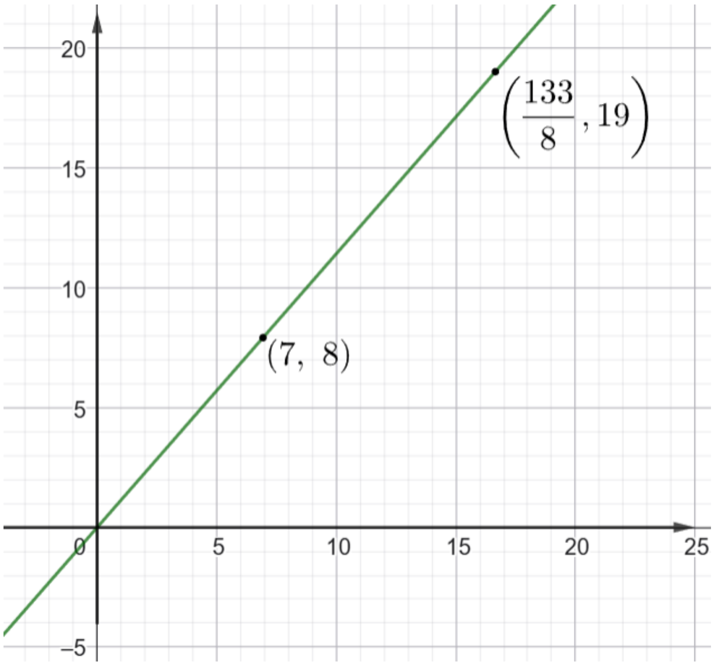
Para o método, uma interpretação simbólica atual seria:

1) Escolhe-se um valor arbitrário $x_0 \neq 0$ para x;
2) Calculamos o valor de ax_0, obtendo um valor b_0;
3) Para ajustar o valor suposto para o valor requerido, recorre-se a uma proporção. Se $ax = b$ e $ax_0 = b_0$, dividindo membro a membro as equações obtemos $\frac{ax}{ax_0} = \frac{b}{b_0}$ e, por proporção, $x = x_0 \cdot \frac{b}{b_0}$.

Portanto, $x = x_0 \cdot \frac{b}{b_0}$ é raiz única da equação, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Observe que para $x_0 = 7$, segue que $b_0 = 8$, logo $x = x_0 \cdot \frac{b}{b_0} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8} \cdot 19 = \frac{133}{8}$.

De outro modo, essa interpretação pode ser vista como uma função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \frac{x}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot x,\ x \in \mathbb{R}$. Em particular, para $n = 7, f(x) = \frac{8}{7}x$, logo $f(x) = 19 \Rightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Rightarrow x = 19 \cdot \frac{7}{8} = \frac{133}{8}$. A representação geométrica pode ser observada na Figura 3.

Figura 3: Representação geométrica de $\boldsymbol{f(x) = \frac{8}{7}x}$



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

3.1.2. Problema 31 do papiro de Ahmes

Tomemos outro problema do papiro.

"Uma quantidade, seus $\frac{2}{3}$, seu $\frac{1}{2}$ e seu $\frac{1}{7}$, adicionados, valem 33. Qual é a quantidade?"

Aplicando a regra da falsa posição, a resolução pode ser dada supondo uma quantidade igual a 42 (menor múltiplo comum entre 3, 2 e 7, já que determinaremos o terço, a metade e o sétimo dessa quantidade). Decorre que $42 + \frac{2}{3} \cdot 42 + \frac{42}{2} + \frac{42}{7} = 97$, que não resolve, logo a solução é $33 \cdot \frac{42}{97} = \frac{1386}{97}$.

A fim de apresentar estratégias diversas para a resolução de problemas que modelamos por equações e, sobretudo, estender as ideias matemáticas aplicadas no exemplo anterior, apresentemos uma resolução, conforme Reis (2018), aplicando o método da falsa posição sucessivas vezes ao problema representado em linguagem atual como:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33.$$

1) Resolve-se as duas primeiras parcelas de modo a obter um problema do tipo $x + \frac{x}{n} = b$, isto é, "uma quantidade e seus $\frac{2}{3}$ resultam em um número que será chamado de y". Em linguagem algébrica: $x + \frac{2}{3}x = y$, cuja solução é dada por:
   - ✓ Suponha x_0 igual a 3, obtendo $3 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 5$;
   - ✓ Divide-se o valor desejado pelo valor obtido resultando em $\frac{y}{5}$;
   - ✓ Multiplica-se esse valor pelo suposto inicialmente, obtendo a solução $x = \frac{3}{5}y$;

2) Agora substituímos as duas primeiras parcelas por y e x por $\frac{3y}{5}$, em $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$ obtendo $y + \frac{1}{2} \cdot \frac{3y}{5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{3y}{5} = 33 \Longrightarrow y + \frac{3}{10}y + \frac{3}{35}y = 33$. Aplica-se o método novamente para a duas primeiras parcelas, isto é, para $y + \frac{3}{10}y = z$:

- ✓ Suponha y_0 igual a 10, logo $10 + \frac{3}{10} \cdot 10 = 13$;
- ✓ Divide-se o valor desejado pelo valor obtido, resultando em $\frac{z}{13}$;
- ✓ Multiplica-se esse valor pelo suposto inicialmente, obtendo a solução $y = \frac{10}{13}z$.

3) Substituindo $y + \frac{3}{10}y = z$ e $y = \frac{10}{13}z$ na equação $y + \frac{3}{10}y + \frac{3}{35}y = 33$, temos $z + \frac{3}{35} \cdot \frac{10}{13}z = 33 \Rightarrow z + \frac{6}{91}z = 33$. Aplicando o método pela terceira vez:
   - ✓ Suponha z_0 igual a 91, logo $91 + \frac{6}{91} \cdot 91 = 97$;
   - ✓ Divide-se o valor desejado (33) pelo valor obtido, resultando em $\frac{33}{97}$;
   - ✓ Multiplica-se esse valor pelo valor suposto inicialmente (91) chegando à solução $z = \frac{33}{97} \cdot 91$.

4) Por fim, segue da primeira aplicação do método que $x = \frac{3}{5}y$ e da segunda, que $y = \frac{10}{13}z$, então $x = \frac{3}{5}y \Rightarrow x = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{13}z$, mas $z = \frac{33}{97} \cdot 91$, logo a quantidade x procurada é dada por:

$$x = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{33 \cdot 91}{97} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 2 \cdot 33 \cdot 7}{97} \Rightarrow x = \frac{1386}{97}.$$

Atualmente, o método da falsa posição aplicado aos problemas pode ser visto como um procedimento que resolve equações de primeiro grau simples na forma geral

$x + \frac{x}{n} = b$, onde $n \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. No entanto, aplicando recursos matemáticos atuais, a resolução da equação $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$ pode ser expressa como:

$$\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)x = 33 \Leftrightarrow \frac{97}{42}x = 33 \Leftrightarrow x = \frac{33 \cdot 42}{97} = \frac{1386}{97}.$$

3.1.3. Problema 35 do papiro de Ahmes

Também são do grupo de *aha*, problemas que parecem ser de orientação prática, que podem ter sido situações do cotidiano, como o exemplo a seguir.

“Encontre a capacidade de uma pá que exige 3 mais $\mathbf{\frac{1}{3}}$ de viagens para encher uma medida *hekat*[5]“.

Embora possa se empregar a resolução retórica, para esse problema, a solução trazida no papiro consta a divisão de 1 por $\left(3 \ + \frac{1}{3}\right)$, obtendo como resultado $\frac{3}{10}$.

A solução proposta sugere uma interpretação para o problema como “qual é o valor que multiplicado por $\left(3 + \frac{1}{3}\right)$ resulta em 1?” o que evidencia a presença do raciocínio algébrico, já que a solução foi obtida pela operação inversa executada pelo escriba, ou seja, uma percepção que é aplicada para cálculos algébricos, vista de forma geral.

3.1.4. Problema de cunho geométrico

Sobre a tratativa de problemas que modelamos como equações de 2º grau, Eves (2011) apresenta um exemplo de natureza geométrica, representado atualmente pela equação $x^2 + y^2 = 100$. Segundo ele, um papiro datado de aproximadamente 1950 a.E.C., encontrado em Kahun, contém o seguinte problema: “Uma dada superfície de

[5] *Hekat:* unidade de volume do Egito Antigo, usada para medir grãos, pão e cerveja. Em unidades atuais equivale a 4,8 litros.

100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1: $\frac{3}{4}$”.

A solução pode ser dada pela regra da falsa posição, supondo querer encontrar as áreas de dois quadrados:

- ✓ Suponha dois quadrados de áreas que atendam à proporção requerida, 3^2 e 4^2 por exemplo. Logo a soma é 25 que não resolve, pois deseja-se obter 100;
- ✓ Divide-se o valor desejado pelo valor obtido, isto é, $\frac{100}{25} = 4 = 2^2$;
- ✓ Multiplica-se o valor obtido, pelos “falsos valores” dados inicialmente:

$$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 \text{ e } 4^2 \cdot 2^2 = (4 \cdot 2)^2 = 8^2.$$

Logo os quadrados possuem áreas 6^2 e 8^2.

3.2. Na Babilônia

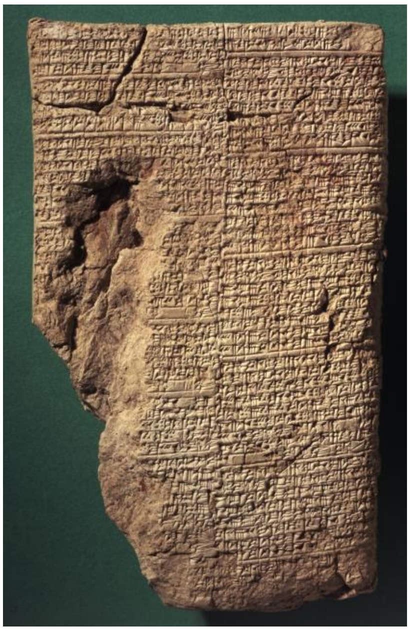
Mesopotâmia refere-se a uma região localizada entre os rios Tigre e Eufrates, marcada por cidades independentes e assentamentos de povos nômades, como os sumérios e os acadianos, vindo posteriormente a ser habitada pelos semitas. Estes criaram o Primeiro Império Babilônico (por volta de 1900 a. E.C), tendo a cidade da Babilônia como centro de seu governo, motivo pelo qual esses povos também são conhecidos como babilônios.

De acordo com Roque (2012), a maioria das tábuas de argila[6] com registros matemáticos - Figura 4 - data desse período (entre 2000 e 1600 a. E.C).

---

[6] As tábuas (ou tabletes) são identificados por seu número de catálogo em uma determinada coleção, por exemplo, o tablete BM 13901 é um que pertence à coleção do British Museum (BM). (Roque, 2012, p. 39).

Figura 4: Tabuleta cuneiforme de argila



Fonte: The Trustees of the British Museum.[7]

Esses documentos preservam uma grande variedade de informações, especialmente cálculos que hoje classificamos como pertencentes à aritmética, à álgebra e à geometria, além de registros de natureza financeira e comercial, como recibos, cobranças de juros, hipotecas e outras operações econômicas.

Sobre essas tábuas, Eves (2011, p. 58 - 60) assegura:

> [...] Das cerca de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas [...] envolvem tábuas de multiplicação, tábuas de inversos multiplicativos, tábuas de quadrados e cubos e mesmo tábuas de exponenciais. Quanto a estas, provavelmente eram usadas, juntamente com a interpolação, em problemas de juros compostos. As tábuas de inversos eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação.

Entre os documentos, interessam-nos especialmente aqueles que trazem procedimentos detalhados de cálculo de valores desconhecidos — registros que se assemelham a exercícios resolvidos — nos quais são descritas soluções para problemas que hoje interpretaríamos como equações. Nosso objetivo é explorar a resolução de alguns desses problemas, estabelecendo conexões entre as estratégias empregadas pelos babilônios e os tratamentos algébrico e geométrico utilizados atualmente, com base na análise de Roque (2012) e outros. Para isso, tomaremos, em particular, alguns problemas que modelamos atualmente por equações de 2º grau.

É importante lembrar que os babilônios expressavam seus métodos de forma retórica, operavam com números racionais estritamente positivos e seu sistema de numeração era sexagesimal. Por isso, para cada exemplo abordado, traremos uma adaptação para o sistema de numeração decimal e proporemos duas interpretações: uma algébrica e outra geométrica. A última inspirada em traduções mais recentes, como as de Jens Høyrup. Este autor, conforme cita Roque (2012), defende que muitas dessas resoluções têm natureza predominantemente geométrica, aproximando-se mais do que hoje conhecemos como o método de completar quadrados do que da simples resolução algébrica de equações. Nesse contexto, pesquisadores descrevem os procedimentos adotados como operações de “cortar e colar” figuras geométricas.

3.2.1. Problema #1 do tablete BM[8] 13901

O problema adaptado para o sistema de numeração decimal, em duas versões de escrita:

(i) Em tradução mais atualizada, “a superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,75” (Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação: o lado da superfície, que é um quadrado.) (Roque, 2012, p. 75).

(ii) “Adicionei a área e um lado de um quadrado e obtive $\frac{3}{4}$ ".

A solução apresentada pelos babilônios traz a seguinte resolução dada de forma retórica, supondo que se deseja determinar a medida do lado:

1) tome 1;

[8] British Museum

2) fracione 1 tomando a metade, isto é, $\frac{1}{2}$;

3) multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$, obtendo $\frac{1}{4}$;

4) adicione $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$, o que resulta em 1;

5) 1 é a raiz quadrada de 1;

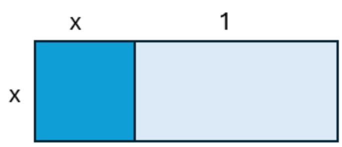
6) subtraia os $\frac{1}{2}$ de 1, obtendo $\frac{1}{2}$;

7) $\frac{1}{2}$ é o lado do quadrado;

Uma interpretação algébrica e, também geométrica, atuais para cada passo pode ser vista no Quadro 1, em que se chega a uma generalização para resolução de equações da forma $ax^2 + bx = c$, quando $a = 1$.

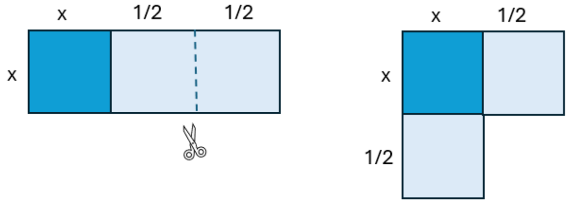
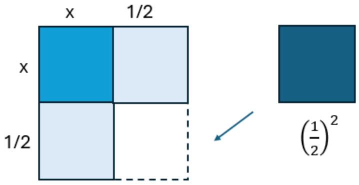
No caso da interpretação geométrica, considera-se primeiramente, que os babilônios transformavam, por meio de uma projeção, o comprimento, x, em um retângulo com dimensões 1 e x, assim o problema pode ser representado geometricamente como o agrupamento de um quadrado e um retângulo: x^2 e $1 \cdot x$ cuja área total mede $\frac{3}{4}$ (Figura 5).

Figura 5: Representação geométrica de $x^2 + 1 \cdot x$



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Quadro 1: Interpretação atual para o Problema #1

Resolução dos Babilônios	**Interpretação algébrica** $\boldsymbol{1x^2 + bx = c}$	**Interpretação geométrica**
tome 1	Coeficiente b	Considere o retângulo $\mathbf{1 \cdot x}$ 
fracione 1 tomando a metade, ou seja, $\frac{1}{2}$.	Tome a metade de b: $\frac{b}{2}$	Corte pela metade o retângulo e agrupe as figuras para obter um quadrado; 
multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$, obtendo $\frac{1}{4}$	Faça $\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}$;	Determina-se o quadrado que completa o quadrado de área $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ isto é, o quadrado de área $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 
adicione ¼ a ¾, obtendo 1.	Adicione o resultado anterior à c, resultando em $\frac{b^2}{2} + c$;	Para manter a equivalência entre as áreas, a área $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ corresponde à área inicial $\frac{3}{4}$ mais a área do quadrado menor, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, portanto, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$
1 é a raiz quadrada de 1	Extraia a raiz do resultado anterior: $\sqrt{\frac{b^2}{2} + c}$	Assim, a medida do lado do quadrado maior, $x + \frac{1}{2}$, corresponde à $\sqrt{1} = 1$
Subtraia $\frac{1}{2}$ de 1;	Subtraia $\frac{b}{2}$ de $\sqrt{\frac{b^2}{2} + c}$: $\sqrt{\frac{b^2}{2} + c} - \frac{b}{2}$	Segue do passo anterior que $x + \frac{1}{2} = 1$, portanto $x = 1 - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ é o lado do quadrado	A medida procurada é $\sqrt{\frac{b^2}{2} + c} - \frac{b}{2}$.	Assim, a medida desejada é $\frac{1}{2}$

Fonte: Adaptado de Roque (2012)

3.2.2. Problema #3 do tablete BM 13901

"Subtraí o terço da área e depois adicionei o terço do lado do quadrado à área restante. Obtive $\frac{1}{3}$".

A solução dada pelos babilônios traz o seguinte procedimento, adaptado para sistema de numeração decimal, supondo que se deseja determinar a medida do lado:

1) tome 1;
2) subtraia o terço de 1, obtendo $\frac{2}{3}$;
3) multiplique $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{3}$ obtendo $\frac{2}{9}$;
4) encontre a metade de $\frac{1}{3}$; isto é, $\frac{1}{6}$;
5) multiplique $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{6}$, obtendo $\frac{1}{36}$;
6) adicione $\frac{1}{36}$ a $\frac{2}{9}$, resultando em $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
7) $\frac{1}{2}$ é a raiz quadrada;
8) subtraia $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{2}$, chegando a $\frac{1}{3}$;
9) tome o inverso[9] de $\frac{2}{3}$, isto é, $\frac{3}{2}$;
10) multiplique $\frac{3}{2}$ por $\frac{1}{3}$ obtendo $\frac{1}{2}$;
11) $\frac{1}{2}$ é o lado do quadrado.

Atualmente, podemos representar esse problema de forma $ax^2 + bx = c$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Note que $x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$ equivale à $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$, assim, o procedimento dado é interpretado em linguagem atual conforme Quadro 2.

[9] Na referência original "inversos" são ditos como "recíprocos", que são números que multiplicados resultam em 1.

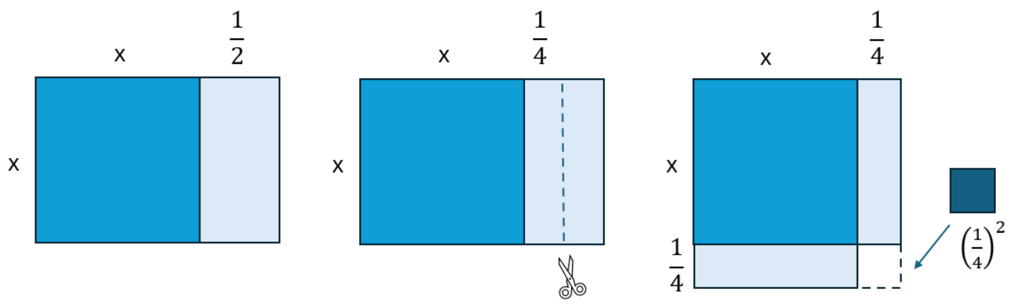
Quadro 2: Interpretação atual para o Problema #3

Resolução retórica dos babilônios	**Interpretação algébrica**
tome 1; subtraia o terço de 1 obtendo $\frac{2}{3}$;	Obtenção do coeficiente a
multiplique $\frac{2}{3}$ por $\frac{2}{3}$, resultando em $\frac{2}{9}$;	Multiplique a por c;
encontre a metade de $\frac{1}{3}$, ou seja, $\frac{1}{6}$;	Faça $\frac{b}{2}$;
multiplique $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{6}$, resultando em $\frac{1}{36}$;	Faça $\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}$;
adicione $\frac{1}{36}$ a $\frac{2}{9}$, obtendo $\frac{1}{4}$;	Adicione o resultado anterior à ac, isto é, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$;
$\frac{1}{2}$ é a raiz quadrada;	Extraia a raiz: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$
subtraia $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{2}$, resultando em $\frac{1}{3}$;	Subtraia $\frac{b}{2}$ de $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$, chegando a $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
tome o inverso de $\frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{3}{2}$;	Como $\frac{2}{3} = a$, seu inverso é $\frac{1}{a}$;
multiplique $\frac{3}{2}$ por $\frac{1}{3}$, resultando em $\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{a} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$ é o lado do quadrado.	$x = \frac{1}{a} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}\right)$

Fonte: Adaptado de Roque (2012).

O problema pode ser representado pela equação $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$ e reduzido à $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$. Assim, a resolução recai ao procedimento do problema anterior, cuja representação geométrica pode ser dada pela Figura 6.

Figura 6: Representação geométrica da resolução de $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Logo se conclui que $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \Rightarrow x + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ao manipularmos algebricamente a generalização proposta chegamos à fórmula resolutiva de equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, para números positivos, utilizada atualmente.

De fato, pois se a medida do lado for representada por x, segue que

$$x = \frac{1}{a} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} \right) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right]} - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

Em que c corresponde à $(-c)$, na fórmula atual, visto que, no caso dessa interpretação, tomamos a forma geral $ax^2 + bx = c$, assim apresentamos uma generalização formal como resultado dos argumentos utilizados na resolução retórica transpostos numa linguagem simbólica e geométrica.

Observe que o procedimento de resolução do Problema #3 consiste em uma adaptação da resolução do Problema #1, já que o coeficiente a é diferente de 1. Assim, pressupõe-se a necessidade de introduzir novos procedimentos — especificamente, os passos 1 e 2 — para viabilizar a solução. Já os passos 5, 6, 7 e 8 reproduzem procedimentos do Problema #1, o que muitos historiadores interpretam como uma interpolação de problemas. Em outras palavras, partia-se de um problema básico para construir variações mais complexas, o que é interpretado com uma intenção de alcançar certa forma de generalidade — ainda que distinta da generalidade simbólica praticada atualmente, o que evidencia as características do pensamento algébrico que pode ser percebido como o prolongamento do raciocínio que vai além dos casos particulares, que pode ser estabelecido, sobretudo, em situações aritméticas e geométricas.

3.2.3. Problema do tablete YBC[10] 6967(adaptado): Problema de *igum* e *igibum*

Igum e *igibum* é de um par de números inversos, ou seja, o produto entre eles corresponde à unidade, que em sistema sexagesimal equivale à 60.

No Problema de *igum* e *igibum* pede-se o valor do *igibum* no caso em que este excede *igum* em 7.

De maneira geral, pode-se tomar dois números cujo produto e soma (ou diferença) são conhecidos. Numa representação algébrica atual seria representar dois valores como x e y; a soma ou diferença como b; e o produto por c.

Assim, tem-se $xy = c$ e $x \pm y = b$. Em outras palavras, $\begin{cases} xy = c \\ x \pm y = b \end{cases}$. Note que:

(i) Se $\begin{cases} xy = c \\ x + y = b \end{cases}$, isolando y em $x + y = b$, temos $y = b - x$. Substituindo y em $xy = c$, tem-se $x(b - x) = c \Longrightarrow -x^2 + bx = c \ \Longrightarrow\ x^2 + c = bx$.

(ii) Analogamente, se $\begin{cases} xy = c \\ x - y = b \end{cases}$, de $x - y = b$ tem-se $y = (x - b)$. Substituindo y em $xy = b$, segue que $x(x - b) = c \Longrightarrow x^2 = bx + c$.

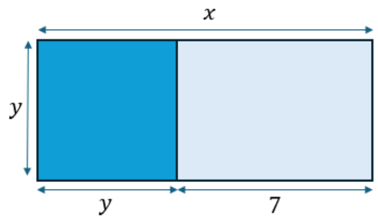
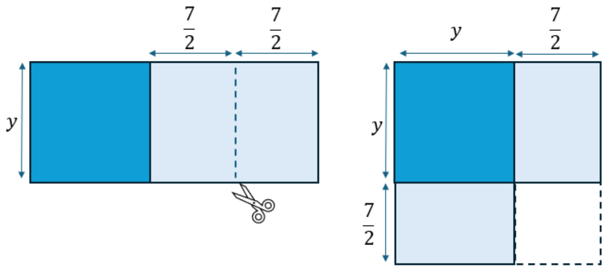
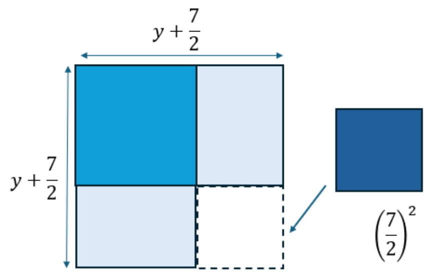
Conclui-se, portanto, que esse problema recai em um problema da forma $x^2 + c = bx$ ou $x^2 = bx + c$.

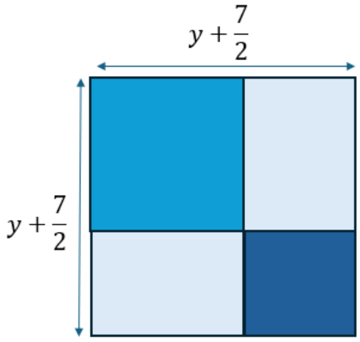
---

[10] Yale Babilonian Collection

A resolução retórica e uma interpretação atual são dadas no Quadro 3. Considerando que o produto de *igum* por *igibum* é 60, pois são inversos, e a diferença entre eles é 7.

Quadro 3: Interpretação atual para o Problema: *igum* e *igibum*

Resolução retórica dos babilônios	**Interpretação algébrica atual** $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = b} \\ \boldsymbol{xy = c} \end{cases}$	**Interpretação geométrica**
Tome a diferença entre eles, que no problema dado vale 7;	b	*Igum* (y)e *igbum* (x) são as dimensões do retângulo e 7, a diferença entre elas. 
Fracione a metade da diferença entre eles, ou seja, $\frac{7}{2}$;	$\frac{b}{2}$	
Eleve ao quadrado obtendo $\frac{49}{4}$;	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$	
Adicione o produto: $\frac{49}{4} + 60 = \frac{289}{4}$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$	Segue que o quadrado de área $\left(y + \frac{7}{2}\right)^2$ corresponde à área inicial, 60, mais o quadrado de área $\frac{49}{4}$.

		 $\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=60+\left(\frac{7}{2}\right)^2$ $\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{289}{4}$
Extraia a raiz quadrada $\left(\frac{17}{2}\right)$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$	Assim, tem-se: $y+\frac{7}{2}=\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{17}{2}$
Escreva a raiz duas vezes: De uma adicione e em outra, subtraia a metade da diferença: $\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=12$ $\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=5$	*Igibum é igual* $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}$ Já $igum$, corresponde à $y=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$	Logo, um dos lados, *igum* (y), mede $y=\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=5.$ Portanto, o outro número, *igibum* (x) é 5 + 7 = 12.

Fonte: Adaptado de Roque (2012).

O problema também pode ser representado pela equação $x^2=7x+60$ que possui uma raiz positiva e uma negativa, $x_1=12$ e $x_2=-5$. Como os babilônios trabalhavam apenas com números positivos, o recurso se tomar dois números diferentes, representados aqui por x e y resolve o problema: o valor de um número é a raiz positiva da equação, x_1, enquanto o outro valor, y, corresponde ao oposto da raiz negativa, $y=-x_2$. Algebricamente:

$$x_2 = -y = -\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

Segue, portanto que a interpretação recai na fórmula $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4c}}{2}$, que é análoga à fórmula resolutiva atual, aplicada a $x^2 = bx + c \Rightarrow x^2 - bx - c = 0$.

Observe, ainda, que a equação $x^2 + c = bx$ possui duas raízes positivas, mas os escribas não consideravam dois valores diferentes para a mesma incógnita. Assim, a resolução anterior se aplica, considerando dois números desconhecidos distintos ou, em termos geométricos, as dimensões de um retângulo, de forma que cada valor obtido fosse associado a uma incógnita diferente. Nesse caso, a resolução pode ser dada pelo Quadro 3, substituindo o passo “Adicione o produto” por “Subtraia o produto”, visto que o coeficiente c passa a compor o primeiro membro da equação – vide exemplo 5, a seguir.

A análise desses procedimentos sugere que os babilônios propunham um método para cada tipo de problema que representamos hoje por $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 + c = bx$. Atualmente, generalizamos todos os problemas desse tipo na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, uma vez que os coeficientes podem assumir valores inclusive negativos.

Passemos a alguns exemplos de resolução de equações, aplicando o método dos babilônios.

Exemplo 1: Resolva a equação $x^2 + 3x = 40$ aplicando o método dos babilônios, para $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Solução: Vamos aplicar o procedimento do Quadro 1, pois $a = 1$.

tome 3	Divida por 2	Eleve ao quadrado	Adicione a 40	Extraia a raiz quadrada	Subtraia $\frac{3}{2}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{10}{2} = 5$

Portanto $x = 5$ é raiz da equação. De fato, pois $5^2 + 3 \cdot 5 = 25 + 15 = 40$.

Exemplo 2: Resolva a equação $2x^2 + 5x = 12$ pelo método babilônio, para $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Solução: Pelo método do Quadro 2, já que $a \neq 1$, a partir do terceiro passo, pois o coeficiente de x^2 já está determinado.

Multiplique 2 por 12	tome a metade de 5	Eleve ao quadrado	Adicione a 24	Extraia a raiz quadrada	Subtraia $\frac{5}{2}$	Multiplique pelo inverso de 2
24	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{25}{4} + 24 = \frac{121}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{2} - \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$	$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Logo, x vale $\frac{3}{2}$. De fato, pois $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} + \frac{15}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

Agora, vejamos alguns exemplos de resolução adaptando os métodos babilônios, para o conjunto dos números reais.

Exemplo 3: Resolva a equação $x^2 = 2x + 15$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Vamos aplicar o procedimento do Quadro 3. As raízes para a equação serão o número obtido da adição e o oposto do número obtido da subtração, no último passo:

tome a diferença	Divida por 2	Eleve ao quadrado	Adicione o produto	Extraia a raiz quadrada	Adicione e subtraia Subtraia 1
2	1	1	16	4	$4 + 1 = 5$ e $4 - 1 = 3$

Logo, $x_1 = 5$ e $x_2 = -3$ (oposto do último valor). De fato, pois $5^2 = 2 \cdot 5 + 15 = 25$ e $(-3)^2 = 2 \cdot (-3) + 15 = 9$.

Exemplo 4: Resolva a equação $3x^2 = 17x + 6$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Será dada pela extensão do pensamento matemático aplicado nas resoluções expressas nos quadros 2 e 3, uma vez que o problema é da forma $ax^2 = bx + c$, com $a \neq 1$. Segue que:

Multiplique 3 por 6 (Passo do Quadro 2, pois $a \neq 1$)	tome a metade de 17	Eleve ao quadrado	Adicione a 18	Extraia a raiz quadrada	Adicione e subtraia $\frac{17}{2}$	Multiplique pelo inverso de 3. (Passo do Quadro 2)
18	$\frac{17}{2}$	$\frac{289}{4}$	$\frac{289}{4} + 18$ $= \frac{361}{4}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{19}{2} + \frac{17}{2} = 18$ $\frac{19}{2} - \frac{17}{2} = 1$	$18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ e $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Logo, as raízes são $x_1 = 6$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$ (oposto do último valor). De fato, já que $3 \cdot 6^2 = 17 \cdot 6 + 6 \Rightarrow 108 = 102 + 6 = 108$ e $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 17 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6 \Rightarrow 1 = -\frac{17}{3} + \frac{18}{3} = 1$.

Exemplo 5: Resolva a equação $x^2 + 14 = 9x$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Vamos aplicar o procedimento do Quadro 3 como soma igual 9 e produto. 14. Nesse caso, substituiremos o passo "Adicione o produto" por "Subtraia o produto", visto que nessa equação o coeficiente c está no primeiro membro.

tome a soma	Divida por 2	Eleve ao quadrado	**Subtraia** o produto	Extraia a raiz quadrada	Adicione e Subtraia a metade da soma
9	$\frac{9}{2}$	$\frac{81}{4}$	$\frac{81}{4} - 14 = \frac{25}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7$ e $\frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2$

Logo, $x_1 = 7$ e $x_2 = -(-2) = 2$ (oposto do último valor). De fato, pois $7^2 + 14 = 9 \cdot 7 = 63$ e $2^2 + 14 = 9 \cdot 2 = 18$.

Devemos ressaltar que os babilônios nos legaram um conjunto rico de práticas matemáticas aplicadas, baseadas na observação, na experimentação e na organização de procedimentos. Sua matemática era prática, empírica e retórica, mas extremamente eficaz. No entanto, nesta investigação, o foco recaiu sobre o aspecto retórico da resolução de problemas envolvendo áreas de figuras retangulares, pois além de serem exemplos acessíveis ao Ensino Básico, esta era uma prática comum entre os babilônios devido às suas aplicações na agricultura, construção, irrigação e medição de terras, conforme afirma Eves (2011).

Outro ponto importante é lembrar que a proposta de trazer uma tradução dessas práticas antigas para a matemática atual por meio da modelagem e até geométrica, apesar de parecer anacrônico, visa estabelecer pontes entre o conhecimento matemático retórico dos babilônios e abordagens contemporâneas. Essa conexão não deve, portanto, sugerir que o uso de equações e simbologia algébrica fosse usado no contexto histórico original. Desejamos explorar as relações matemáticas e os argumentos utilizados nas resoluções retóricas manifestando-os em linguagem simbólica e geométrica como um prolongamento das ideias matemáticas empregadas nos exemplos selecionados. Destacamos ainda que, estas formas de manifestação do raciocínio matemático não substituem a primeira, dada de forma retórica, certos de que, do ponto de vista didático, as estratégias dos povos babilônios podem servir como resoluções alternativas às praticadas no ensino contemporâneo, conforme os exemplos dados acima.

4 DIOFANTO E OS PRIMEIROS SÍMBOLOS ALGÉBRICOS

Embora muitos eventos relevantes tenham ocorrido entre as contribuições dos egípcios e babilônios e os períodos posteriores, avançaremos diretamente para o século III E.C., com destaque para a obra Aritmética, de Diofanto, que é de particular interesse neste contexto.

Para melhor contextualização do leitor, vale lembrar que, entre c. 800 e 336 a. E. C., ocorreram marcos importantes no desenvolvimento da matemática e da filosofia. Eves (2011) e Roque (2012) destacam:

- ✓ A Escola de Mileto (fazendo referência à Tales de Mileto) introduz o uso do raciocínio dedutivo na matemática;
- ✓ A Escola Pitagórica contribui significativamente para ambas as áreas;
- ✓ Pensadores como Sócrates, Platão e Aristóteles (este, discípulo de Platão e tutor de Alexandre, o Grande) também marcam esse período com profundas reflexões filosóficas.
- ✓ Já por volta de 300 a. E. C., Euclides escreve a célebre obra Elementos, e cerca de 287 a. E. C. nasce Arquimedes, matemático e inventor que se destaca como figura pós-euclidiana fundamental.

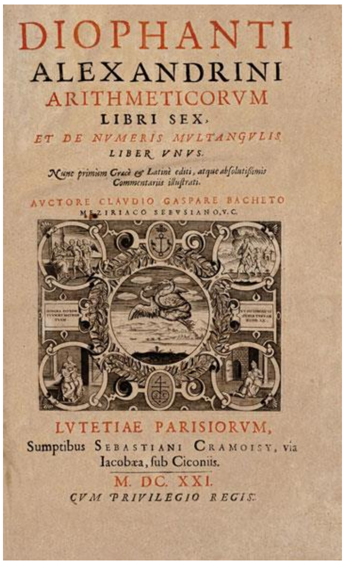
A data exata de atuação de Diofanto é desconhecida. Sabe-se que residiu em Alexandria, teria falecido aos 84 anos e provavelmente escreveu sua obra Aritmética no século III E.C., em grego. Esta obra era composta por treze livros, dos quais apenas seis chegaram até nós em sua forma grega original. Além desses, mais quatro livros foram encontrados recentemente em uma tradução árabe. Como não seguia a linha principal da ciência grega, é possível que a obra de Diofanto tenha sido influenciada por antigas tradições matemáticas dos egípcios e dos babilônios (Estrada et al., 2000, *apud* Pereira, 2017).

De acordo com Roque (2012), essa obra marca um importante ponto de transição entre a matemática retórica — baseada exclusivamente em descrições verbais — e uma forma inicial de álgebra simbólica. Composta por uma coleção de problemas acompanhados de suas soluções, a Aritmética se destaca por introduzir o uso de símbolos:

> [...] ele introduz símbolos, aos quais chama “designações abreviadas”, para representar os diversos tipos de quantidade que aparecem nos problemas. O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego (Roque, 2012, p. 228).

As abreviações utilizadas são: ς (Leia-se “Kisi”, última letra da palavra arithmos, a quantidade desconhecida); Δ^{Y} (primeira letra de dynamis, o quadrado da quantidade desconhecida); K^{Y} (primeira letra de kybos, o cubo); $\Delta^{Y}\Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]; ΔK^{Y} (o quadrado-cubo) [quinta potência]; $K^{Y}K$ (o cubo-cubo) [sexta potência].

Figura 7: Aritmética de Diofanto



Fonte: Domínio público.[11]

Pereira (2017, p. 37) esclarece que

> A Aritmética apresenta uma série de problemas aritméticos, cuja resolução conduz a simples equações do 1º grau; a sistemas determinados de equações lineares a 2, 3, 4 ou 6 incógnitas, a sistemas determinados redutíveis ao 1º e 2º grau e ainda a equações e sistemas indeterminados do 1º grau, do 2º grau, do 3º grau, do 4º grau. Temos ainda problemas de construção de triângulos retângulos em números racionais positivos.

---

[11] Disponível em https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=575665 . Acesso em 15 out. de 2025.

Essa autora ainda afirma que Diofanto aplicava regras de transformação e simplificação já conhecidas para resolver problemas representados hoje como equações simples do primeiro grau, no entanto, a formulação de regras gerais para resolver qualquer equação desse tipo só surgiu com o desenvolvimento da Geometria de Descartes. Foi a partir daí que se consolidou o conceito claro da equação geral do primeiro grau, juntamente com regras de transformação que permitiam lidar livremente, nos cálculos, com números racionais e irracionais, positivos e negativos.

Com relação aos problemas que expressamos por meio de equações de 2º grau, a Aritmética não oferecia uma regra geral para resolver todas as equações, utilizava-se de métodos de substituição ou introdução de incógnitas auxiliares bem escolhidas, para encontrar as soluções numéricas procuradas e, ao final, verificar os resultados obtidos. Muitas vezes, encontrava-se apenas uma solução, mesmo quando ambas as raízes eram positivas. Se as raízes fossem negativas ou irracionais, a equação era considerada impossível e descartada.

A seguir, exploraremos exemplos da forma como Diofanto resolvia problemas envolvendo quantidades desconhecidas, adaptados de Brandemberg e Serrão (2013), Pereira (2017) e Roque (2012). Apresentaremos ainda uma reescrita que combina os símbolos matemáticos atuais com as abreviações utilizadas por Diofanto, além de uma interpretação em linguagem algébrica.

4.1. Problema 1 do livro I

"Dividir um número dado em dois números de diferença dada".

Solução e interpretação conforme Quadro 4:

Quadro 4: Resolução do Problema 1-I de Diofanto

Resolução sincopada de Diofanto, para um número igual 100 e a diferença, 40.	**Reescrita com símbolos atuais e abreviações de Diofanto**
Supondo ς o número menor, o maior será ς mais 40;	Sejam ς o menor número e $ς + 40$, o maior
os dois somados dão dois ς mais 40 que valem 100;	$ς + (ς + 40) = 100$
logo, 2ς valem 60, portanto ς vale 30 e ς mais 40 são 70.	$2ς = 60 \Rightarrow ς = 30$ $ς + 40 = 30 + 40 = 70$

Fonte: Adaptada de Roque (2012).

Observe que, embora o método seja aplicado para números dados, algebricamente podemos mostrar que ele funciona para qualquer par de números racionais positivos, $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, que podemos supor $x < y$ sem perda de generalidade, tais que $\begin{cases} x + y = p \\ y - x = q \end{cases}$, com $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$.

De fato, $\begin{cases} x + y = p \\ y - x = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = p \\ y = x + q \end{cases}$. Substituindo $y = x + q$ em $x + y = p$, os passos de resolução podem ser interpretados como: $x + x + q = p \Rightarrow 2x = p - q \Rightarrow x = \frac{p-q}{2}$. Logo, $y = x + q \Rightarrow y = \frac{p-q}{2} + q = \frac{p+q}{2}$. Assim, os números requeridos são

$x = \frac{p-q}{2}$ e $y = \frac{p+q}{2}$.

Se $p = 100$ e $q = 40$, os números procurados são $x = \frac{100-40}{2} = 30$ e $y = \frac{100+40}{2} = 70$.

4.2. Problema 27 do livro I

"Encontrar dois números com soma e produto dados."

Solução e interpretação, conforme Quadro 5.

Quadro 5: Resolução do Problema 27-I de Diofanto

Resolução sincopada de Diofanto, para a soma igual a 20 e o produto, 96.	**Reescrita com símbolos atuais e abreviações de Diofanto**
Divida a soma pela metade;	Se esses números fossem iguais, cada um deles seria valeria a metade da soma, nesse caso, 10;
Adicione e subtraia um ς de cada uma das metades;	Um número é $(10+\ \varsigma)$ e o outro $(10-\ \varsigma)$;
20 é a soma da metade mais um ς com a metade subtraída de um ς;	$20 = (10+\ \varsigma) + \ (10-\ \varsigma)$;
96 é o produto dessas mesmas quantidades, obtido de 100 subtraído do quadrado do ς (um Δ^Y);	$96 = (10+\ \varsigma)(10-\ \varsigma)$. Multiplicando essas quantidades, obtém-se $96 = 100\ -\ \Delta^Y$;
Chegamos, assim, à conclusão de que Δ^Y deve ser 4, logo, o valor de ς é 2;	Segue que $\Delta^Y\ =\ 4$ e, portanto, $\varsigma\ =\ 2$;
Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 12 e 8.	Os números procurados $10\ -\ \varsigma$ e $10\ +\ \varsigma$ são, respectivamente, $10-\ 2\ = 8$ e $10+\ 2\ =\ 12$.

Fonte: Adaptada de Roque (2012).

Já em linguagem algébrica atual, a resolução pode ser dada de forma genérica como: Sejam x e $y \in \mathbb{Q}_+^*$, tais que $x+y=b$ e $xy=c$. Se os números fossem iguais, então $x=y=\frac{b}{2}$, caso contrário, podemos afirmar que existe $z \in \mathbb{Q}_+^*$, tal que $x=\frac{b}{2}+z$ e $y=\frac{b}{2}-z$. Assim, $\left(\frac{b}{2}+z\right)+\left(\frac{b}{2}-z\right)=b$ e $\left(\frac{b}{2}+z\right)\cdot\left(\frac{b}{2}-z\right)=c$. Realizando a multiplicação, tem-se $\left(\frac{b}{2}\right)^2-z^2=c \Rightarrow z^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c \Rightarrow z=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$.

Portanto os números requeridos $x=\frac{b}{2}+z$ e $y=\frac{b}{2}-z$ são, respectivamente:

$$x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c} \text{ e } y=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}.$$

Neste caso, para soma igual 20 e produto igual 96, isto é, $b = 20$ e $c = 96$, temos:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 96} = 10 + 2 = 12.$$

$$y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{20}{2} - \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 96} = 10 - 2 = 8.$$

4.3. Problema 28 do livro I

"Encontrar dois números cuja soma seja um número igual a 20 e os quadrados somados sejam um número igual a 208."

Diofanto propôs a resolução dada na coluna à esquerda do Quadro 6:

Quadro 6: Resolução do Problema 28-I de Diofanto

Resolução sincopada de Diofanto	Reescrita com símbolos atuais e abreviações de Diofanto
Divida a soma desses números por 2	Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10, já que a soma é 20.
Adicione e subtraia um ς de cada uma das metades	Um número é $(10 + \varsigma)$ e o outro $(10 - \varsigma)$
20 é a soma da metade mais um ς com a metade subtraída de um ς;	$20 = (10 + \varsigma) + (10 - \varsigma)$;
para que a soma dos quadrados seja 208, somamos os quadrados dessas mesmas quantidades; realizando as multiplicações, tem-se que 208 valem 100 mais 2 ς vezes 10 mais um Δ^Y mais 100 menos 2 ς vezes 10 mais um Δ^Y, logo 208 é igual a 200 mais 2Δ^Y.	$208 = (10 + \varsigma)^2 + (10 - \varsigma)^2$. Das multiplicações, obtém-se $208 = 10^2 + 20\varsigma + \Delta^Y + 10^2 - 20\varsigma + \Delta^Y$ Logo, $208 = 200 + 2\Delta^Y$
Então 2Δ^Y são 8 e Δ^Y é 4. Portanto ς é 2	Segue que $2\Delta^Y = 8 \Rightarrow \Delta^Y = 4$ e, portanto, $\varsigma = 2$
Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 12 e 8.	Os números procurados $10 - \varsigma$ e $10 + \varsigma$ são, respectivamente, $10 - 2 = 8$ e $10 + 2 = 12$.

Fonte: Adaptada de Roque (2012).

Algebricamente, para uma soma de dois números racionais positivos igual a b e a soma de seus quadrados igual a c, a retórica de Diofanto pode ser interpretada como:

Sejam x e $y \in \mathbb{Q}_+^*$, tais que $x + y = b$ e $x^2 + y^2 = c$.

Existe $z \in \mathbb{Q}_+^*$, tal que $x = \frac{b}{2} + z$ e $y = \frac{b}{2} - z$. Assim $x^2 + y^2 = c \Rightarrow \left(\frac{b}{2} + z\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - z\right)^2 = c \Rightarrow 2z^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c \Rightarrow z^2 + \frac{b^2}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow z^2 = \frac{c}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{2c-b^2}{4}} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2c-b^2}}{2}$. Segue de $x = \frac{b}{2} + z$ e $y = \frac{b}{2} - z$ que $x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{2c-b^2}}{2}$ e $y = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{2c-b^2}}{2}$.

Tomando $b = 20$ e $c = 208$, tem-se que os números procurados são:

$$x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{2c - b^2}}{2} = \frac{20}{2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 208 - 20^2}}{2} = \frac{20}{2} + \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$y = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{2c - b^2}}{2} = \frac{20}{2} - \frac{\sqrt{2 \cdot 208 - 20^2}}{2} = \frac{20}{2} - \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Curiosamente, muitos problemas listados na Aritmética possuem mesmos resultados, embora os dados e procedimentos sejam diferentes.

Roque (2012), destaca que Diofanto tratava as quantidades desconhecidas da mesma forma que as conhecidas, conferindo-lhes o mesmo status algébrico no processo de resolução de problemas. Essa abordagem evidencia que as operações com incógnitas se baseavam nas propriedades já estabelecidas para os números, o que lhe permitiu integrar o tratamento das grandezas conhecidas e desconhecidas em um mesmo sistema. Por esse motivo, Diofanto introduziu símbolos para representar incógnitas, o que para Almeida (2017, *apud* Kaput, Blanton e Moreno, 2008) corresponde ao cerne do pensamento algébrico, isto é, o uso de uma linguagem simbólica como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio, nesse caso, a compreensão de que os símbolos representam números e que, portanto, obedecem às mesmas propriedades. Isso é considerado como uma antecipação de um conceito fundamental da álgebra atual: a simbolização das variáveis.

Roque (2012) firma ainda, que, alguns outros historiadores entendem que certas regras presentes nas resoluções de Diofanto apontam para uma possível intenção de generalização, antecipando técnicas conhecidas no mundo árabe como *al-jabr* e *al-muqabala*, que veremos no tópico a seguir.

5 ALGUMAS CONTIBUIÇÕES DURANTE A IDADE MÉDIA

5.1. Contribuições de matemáticos indianos

Os primeiros registros matemáticos da Índia estão nos *Sulbasutras*, textos religiosos transmitidos oralmente e escritos provavelmente entre 800 a. E. C. e 500 a. E. C., mas só a partir do século V da nossa era é que matemáticos tais como Aryabhata (c. 476), Brahmagupta (c. 628), Bhaskara I (c. 629) e Bhaskara II (1114-1185) apareceram. Suas obras têm uma relação de continuidade, aprofundamento e debate entre elas, conforme esclarece Roque (2012).

Segundo a autora, Aryabhata destacou-se por escrever a obra *Aryabhatiya* em sânscrito, composta por versos. Trata-se de uma síntese do conhecimento matemático hindu acumulado até então, estruturada em seções dentre as quais se encontra a *Ganita* ("Matemática"), que aborda temas que hoje reconhecemos como Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria plana e esférica. Como a escrita era de difícil compreensão, posteriormente outros matemáticos propuseram obras aperfeiçoando e tecendo comentários explicativos. Os mais antigos desses comentários foram de Bhaskara I e de Brahmagupta.

Com relação ao nosso objeto de estudo, merece destaque Brahmagupta que ganhou notoriedade ao escrever um tratado com 21 capítulos, incluindo comentários mais detalhados que os de Aryabhata sobre métodos de resolução de problemas, dentre outros, além do uso do zero e de números positivos e negativos. Entre as técnicas utilizadas para lidar com grandezas de medidas desconhecidas, destacam-se a eliminação do termo médio e a redução da equação a uma única incógnita.

De acordo com Katz (2010, *apud* Pereira, 2017, p. 61) Brahmagupta apresenta um procedimento de resolução para equações de 2º grau idêntico à fórmula que utilizamos atualmente:

> Tome-se o número absoluto[12] no membro oposto àquele onde o quadrado e a incógnita estão. Ao número absoluto, multiplicado por quatro vezes o [coeficiente do] quadrado, adicionar o quadrado [do coeficiente] da incógnita; a raiz quadrada do mesmo, menos [o coeficiente da] incógnita, sendo dividido por duas vezes o [coeficiente do] quadrado é o [valor da] incógnita.

Vale ressaltar também que esse contexto já apresentava certas notações com abreviações para representar incógnitas, seus quadrados, operações e outros elementos matemáticos. Alguns exemplos podem ser vistos no Quadro 7.

Quadro 7: Algumas abreviações indianas na resolução de problemas

ya (abreviação de $yavattavat$)	Primeira incógnita
v $(varga)$	quadrado
"."	Um ponto sobre o número indica negativo
ru $(rupa)$	Número "puro" ou "comum"
O primeiro membro era escrito em uma linha e o segundo, na linha debaixo. Os coeficientes são indicados depois das incógnitas.	

Fonte: Adaptado de Pedroso (2010).

Vejamos um exemplo:

5.1.1. Problema resolvido por Brahmagupta

Um problema que atualmente representamos como $x^2 - 10x = -9$, era representado por:

$$\boxed{\begin{array}{c} ya\ v\ 1\ ya\ \dot{1}0 \\ ru\ \dot{9} \end{array}}$$

Nesse caso, Brahmagupta propõe a resolução dada na primeira coluna do Quadro 8, juntamente com uma interpretação algébrica atual:

[12] No contexto dos indianos, valor absoluto corresponde ao termo independente (coeficiente c na equação), que também é expresso como número puro ou comum.

Quadro 8: Resolução e interpretação de um problema de Brahmagupta

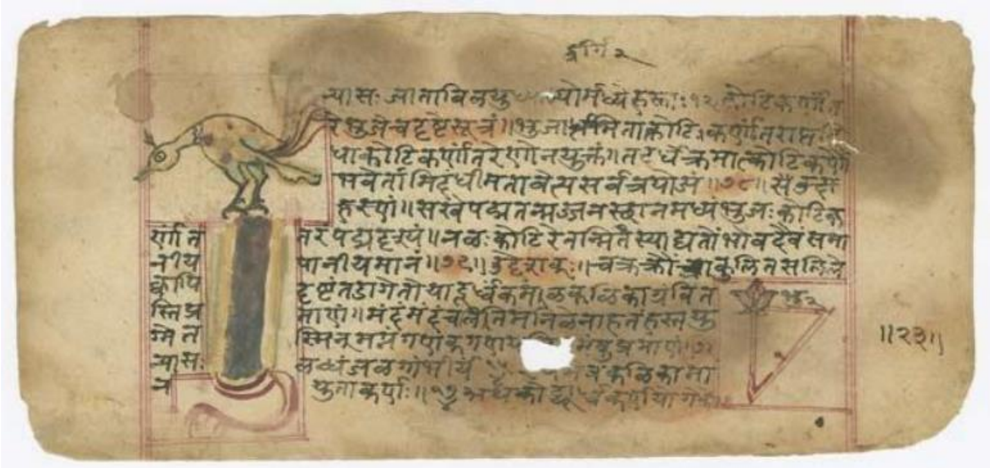
Procedimento de Brahmagupta	**Resolução para** $\boldsymbol{x^2 - 10x = -9}$	**Interpretação algébrica atual para a forma geral** $\boldsymbol{ax^2 + bx = c}$
Tome o número puro no membro oposto àquele onde estão o quadrado e a incógnita.	(-9)	c
Multiplique por quatro vezes o [coeficiente do] quadrado.	$4 \cdot 1 \cdot (-9) = -36$	$4 \cdot a \cdot c$
Adicione o quadrado do [coeficiente da] incógnita.	$(-36) + (-10)^2 = 64$	$4 \cdot a \cdot c + b^2$
Extraia a raiz quadrada,	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{b^2 + 4 \cdot a \cdot c}$
diminuído do [coeficiente] da incógnita, o resto.	$8 - (-10) = 18$	$\sqrt{b^2 + 4 \cdot a \cdot c} - b$
Dividido por duas vezes o [coeficiente do] quadrado, dá o valor da incógnita	$\frac{18}{2 \cdot 1} = 9$	$\frac{\sqrt{b^2 + 4 \cdot a \cdot c} - b}{2 \cdot a} = x$ $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Fonte: Adaptado de Pedroso (2010).

Observe que a expressão $x = \frac{-b+\sqrt{b^2+4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ aplicada à forma $ax^2 + bx = c$ é equivalente à $x = \frac{-b+\sqrt{b^2- 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ aplicada à forma $ax^2 + bx - c = 0$.

De acordo com Roque (2012) e Pedroso (2010), séculos depois, Bhaskara II aprimorou as técnicas de Brahmagupta e de outros matemáticos antecessores o que culminou em suas obras Lilavati e Bija Ganita. Em ambas se propõe algoritmos para resolver problemas envolvendo quantidades desconhecidas. No Bija Ganita, são trazidos enunciados de forma geral e padronizada, porém retórica, com seus algoritmos incluindo explicações do próprio autor e exemplos numéricos. No caso de problemas que hoje modelados como equações lineares, Pereira (2017) afirma que os indianos resolviam muitos deles empregando a regra da falsa posição.

Figura 8: Manuscrito do Lilavati de Bhaskara II (1114-1185)[13]



Fonte: Fernandes (2013).

5.1.2. Um problema da forma ax = b por Bhaskara II

Estrofe 56 do Lilavati: “Durante os jogos amorosos de um casal o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caíram no chão, um quinto foram para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto e o seu amado um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número de pérolas no colar”. (Bhaskaracarya, 2008 *apud* Pereira, 2017, p. 60).

Uma solução pela regra da falsa posição: Suponha que a quantidade de pérolas é 20. O que sobrou no fio, é dado por $20 - \left(\frac{20}{3} + \frac{20}{5} + \frac{20}{6} + \frac{20}{10}\right) = 20 - \frac{480}{30} = 4$ que não resolve, pois sabe-se que sobraram 6, então multiplica-se o valor requerido pelo valor suposto e divide-se pelo resultado anterior, isto é, $\frac{6 \cdot 20}{4} = 30$. Logo, o número de pérolas é 30.

Algebricamente, considerando x o número de pérolas, o problema pode ser representado por:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - \frac{x}{6} - \frac{x}{10} = 6 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 6 \Leftrightarrow x = 30.$$

---

[13] Datação do documento é de 1650, ele pertence a coleção Livros Raros e Manuscritos da Universidade de Columbia (Fernandes, 2013). Disponível em https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1049_242_ID.pdf . Acesso em 26 ago. de 2025.

5.1.3. Resolução geral de problemas da forma $ax^2 \pm bx = c$ por Bhaskara II

Segue uma explanação adaptada de Roque (2012), sobre como Bhaskara II apresenta no Bija Ganita um problema seguido de seu algoritmo de resolução:

i. **Enunciado geral:** "De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um número e a soma ou a diferença é igual a um número dado."

ii. **Algoritmo de resolução de forma retórica com explicações do autor**

O procedimento retórico dado por Bhaskara II e uma interpretação algébrica atual, são dados no Quadro 9.

Considerando que a quantidade citada é a área de um quadrado, x^2, e a raiz desse quadrado, x, a incógnita, o enunciado trata-se de uma equação na forma geral $ax^2 \pm bx = c$. Neste caso com $a = 1$.

Quadro 9: Resolução geral e interpretação de problema conforme Bhaskara II

Resolução retórica de Bhaskara II	Interpretação Atual:
Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado e um número dado.	$ax^2 + bx = c$
Se temos o quadrado da quantidade desconhecida em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente. Explicação do autor: "É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros."	Multiplicamos ambos os lados por $4a$, obtendo $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$.
Adicionamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz. Explicação do autor: "é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar. "	Em seguida, adicionamos b^2 a ambos os lados: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2 \Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$
Igualando, em seguida, essa raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida.	$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2} \Leftrightarrow$ $x = \dfrac{-b + \sqrt{4ac + b^2}}{2a}$

Fonte: Adaptado de Roque (2012).

Atualmente, as explicações oferecidas por Bhaskara são compreendidas como uma forma do "método de completar o quadrado" expresso de maneira retórica. Observe que o método consiste em transformar o problema em uma igualdade sem o termo quadrático, organizando-o de forma que um dos lados reunisse as quantidades desconhecidas e o outro, as conhecidas. A seguir, buscava-se eliminar o termo médio, de modo que um dos membros da equação se tornasse igual à raiz quadrada do outro.

Em todos os exemplos apresentados por Bhaskara II a raiz quadrada é um número racional. Ele aceita apenas a raiz positiva, não apresenta exemplos com duas raízes negativas ou mesmo nenhuma raiz real, nem dá exemplos de equações quadráticas tendo raízes irracionais (Katz, 2010 *apud* Pereira, 2017). Se expandirmos a interpretação algébrica da retórica de Bhaskara II para o conjunto dos números reais aplicada à forma $ax^2 + bx + c = 0$ e admitirmos a raiz negativa, encontramos $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, com $a \neq 0$, que é a forma resolutiva para equações de segundo grau. Essa fórmula, no Brasil, é conhecida por fórmula de Bhaskara, no entanto, essa simbologia só foi concebida na Europa cerca de seis séculos depois.

5.1.3.1. Um problema da forma $ax^2 - bx = c$ por Bhaskara II

"A raiz quadrada da metade do número de abelhas de um enxame voou rumo a um jasmineiro, enquanto $\frac{8}{9}$ do enxame permaneceu atrás; e uma abelha fêmea ficou voando em torno de um macho que se encontrava preso numa flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu doce odor. Diga-me adorável mulher, qual é o número de abelhas." (Pedroso, 2010, p. 7).

A solução trazida por Bhaskara II e uma interpretação algébrica atual são dadas no Quadro 10.

Quadro 10: Resolução e interpretação de um problema dado por Bhaskara II

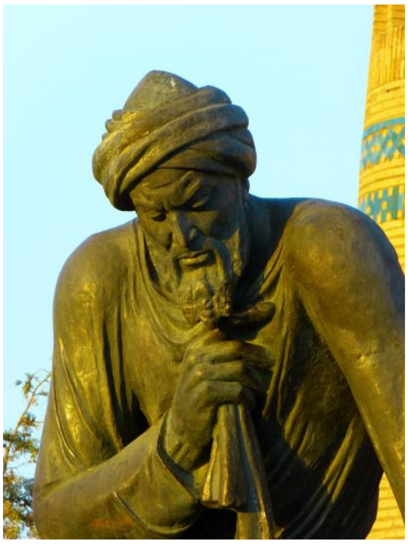
Resolução de Bhaskara II	**Interpretação algébrica atual**
Seja $ya\ v\ 2$ o número de abelhas	Seja $2x^2$ o número de abelhas (pois assim obtém-se um quadrado perfeito no passo seguinte).
A raiz quadrada da metade desse número é $ya\ 1$.	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
Oito nonos de todo o enxame é $ya\ v\ \frac{16}{9}$.	$\frac{8}{9} \cdot 2x^2 = \frac{16}{9}x^2$
A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame. Realizando operações, tem -se $\boxed{\begin{matrix} ya\ v\ 0\ ya\ 0\ ru\ 18 \\ ya\ v\ 2\ ya\ \dot{9}\ ru\ 0 \end{matrix}}$.	$x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2$ $18 = 2x^2 - 9x$
Aplicando o procedimento do Quadro 9: Resolução geral e interpretação de problema conforme Bhaskara II Multiplicar ambos os membros por $4 \cdot 2$ e adicionar 9^2, igualando as raízes conclui-se que ya é 6 e $ya\ v\ 2$ é, portanto, $2 \cdot 6^2 = 72$.	$18 = 2x^2 - 9x$ $144 = 16x^2 - 72x$ $144 + 9^2 = 16x^2 - 72x + 9^2$ $225 = (4x - 9)^2$ $15 = 4x - 9$ $x = 6$

Fonte: Adaptada de Pedroso (2010).

5.2. O *Tratado sobre o cálculo por al-jabr e al-muqabala* de Al-Khwarizmi

Ainda na idade média, especificamente entre os séculos VIII e XII, a região de Bagdá e do atual Irã se consolidou como um dos principais centros científicos do mundo. Os matemáticos ali estabelecidos tinham amplo domínio tanto das tradições gregas quanto orientais, sobretudo dos tratados de Brahmagupta. Dentre eles, destaca-se Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, considerado o mais notável do século IX. “O designativo “Al-Khwarizmi” indica que era natural de Khwaresm, perto do delta do Mar Aral. Trabalhou na “Casa da Sabedoria”[14] em Bagdá entre 813 e 833 e deixou-nos obras em Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e sobre o Calendário.” (Pereira, 2017, p. 68).

Figura 9: Estátua de Al-Khwarizmi em Khiva, no Uzbequistão.



Fonte: Pixabay.[15]

Apesar do contato com obras gregas e indianas, sua contribuição foi além ao escrever sua principal obra “*Tratado sobre o cálculo por al-jabr e al-muqabala”*, da qual deriva o termo “álgebra” - originado da palavra *al-jabr*.

Sobre esse tratado, Pereira (2017, p.68) reforça que

> na primeira parte, Al-Khwarizmi faz uma classificação das equações (lineares e quadráticas) em seis tipos (formas canónicas), indica os algoritmos para as resolver e faz demonstrações desses algoritmos (muitas vezes com o auxílio de propriedades geométricas, lembrando em parte a álgebra geométrica dos gregos) e apresenta regras para multiplicar monômios e binômios e para operar com radicais quadráticos. A segunda parte é dedicada à Geometria prática, especialmente, ao cálculo de áreas e volumes e a terceira parte apresenta vários problemas sobre legados e a sua respetiva resolução. Os problemas de partilha de heranças são frequentemente traduzidos por sistemas de equações indeterminados, pelo que não se atribui a Al-Khwarizmi a descoberta da sua resolução, pois, nesta altura, a Aritmética de Diofanto já teria sido traduzida para árabe (cic).

---

[14] Casa da Sabedoria ou Bait al-hikma: um centro científico similar à Biblioteca de Alexandria, para onde convergiram muitos matemáticos. (Pedroso, 2010).

[15] Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/khiva-al-khwarazmi-erudito-universal-198613/. Acesso em: 15 out. 2025.

Os termos *al-jabr* e *al-muqabala* referem-se a duas etapas fundamentais na resolução de equações: *al-jabr* diz respeito à “restauração”, ou seja, à adição de um termo em ambos os lados da equação para eliminar termos negativos; já *al-muqabala* corresponde ao “balanceamento”, permitindo subtrair termos iguais dos dois membros com o objetivo de simplificar a equação. A partir dessas operações, era possível reduzir diferentes tipos de problemas — que hoje representamos por equações de 1º e de 2º graus — a seis formas canônicas distintas, conforme o Quadro 11.

Todos os algoritmos de resolução consideram casos em que o coeficiente do termo quadrado é igual a 1; quando isso não ocorre, multiplica-se ou divide-se todos os termos por um número apropriado para ajustar a equação.

Quadro 11: Formas canônicas possíveis segundo Al-Khwarizmi

Formas canônicas	**Representação algébrica atual**
Quadrados iguais a raízes	$ax^2 = bx$
Quadrados iguais a números	$ax^2 = c$
Raízes iguais a números	$bx = c$
Quadrados e raízes iguais a números	$ax^2 + bx = c$
Quadrados e números iguais a raízes	$ax^2 + c = bx$
Raízes e números iguais a quadrados	$bx + c = ax^2$

Fonte: Adaptado de Roque (2012).

A solução dos três primeiros casos expressos no quadro, sempre considerando valores estritamente positivos, são obtidas por meio de divisões ou multiplicações ou extração de raiz quadrada:

i) $ax^2 = bx \Rightarrow \frac{ax^2}{ax} = \frac{bx}{ax} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$.

ii) $ax^2 = c \Rightarrow \frac{ax^2}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a}}$.

iii) $bx = c \Rightarrow \frac{bx}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow x = \frac{c}{b}$.

Vimos que já se resolviam de forma retórica e até sincopada, problemas que expressamos na forma $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$ e $ax^2 = bx + c$. Assim, de acordo com Al-Khwarizmi, uma equação do tipo $x^2 - 3x = 4$, por exemplo, deve-se primeiramente aplicar *al-jabr* para chegar a uma das formas canônicas que, algebricamente, tem-se $x^2 - 3x + \mathbf{3x} = 4 + \mathbf{3x} \Rightarrow x^2 = 4 + 3x$. E para uma equação como $5x^2 + 4x = 6 + 3x$, utiliza-se *al-muqabala*, isto é, $5x^2 + 4x - \mathbf{3x} = 6 + 3x - \mathbf{3x}$ $\Rightarrow 5x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$.

Apesar das resoluções de Al-Khwarizmi serem totalmente retóricas, havia um padrão para designar a incógnita ou raiz, o quadrado da raiz e os coeficientes. São eles: Shay (coisa) ou *Jidhr*; *Mal* (tesouro, riqueza); *Adad* (nome da unidade monetária grega dinares), respectivamente. Além das resoluções retóricas, eram também propostas soluções geométricas, uma vez que, naquele período, a resolução por meio da geometria conferia legitimidade aos cálculos realizados. Tais procedimentos correspondem ao que atualmente se conhece como o método de completar quadrados; dessa forma, as equações eram tratadas como homogêneas, isto é, cada termo da equação estava associado a uma interpretação em termos de áreas.

Vejamos alguns exemplos de resolução dada por Al-Khwarizmi, adaptados de Pereira (2017) e Roque (2012).

5.2.1. Problema da forma $ax^2 + bx = c$ por Al- Khwarizmi

“Um *Mal* e dez *Jidhr* igualam 39 dinares” que pode ser interpretado como “Qual deve ser o quadrado que acrescentando dez raízes resultam em uma área igual à 39?”

A resolução retórica remonta à resolução dos babilônios:

- Divide por dois o número de *Jidhr*, que resulta em cinco;

- Multiplica-se por si próprio obtendo 25;

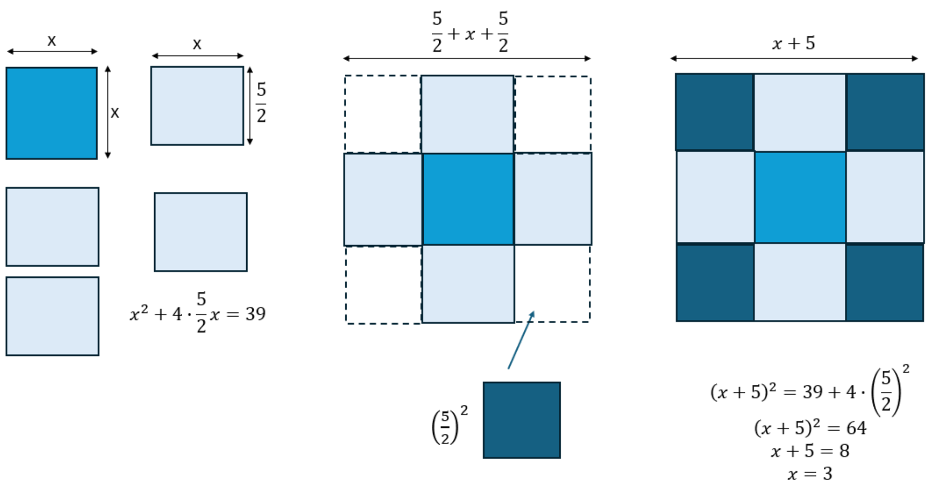
- Adiciona-se os *Adad*, resultando em 64;

- Extraia a raiz quadrada e subtraia a metade dos *Jidhr* obtendo-se $\sqrt{64} - \frac{10}{2} = 3$.

Logo *Jidhr* é 3 e *Mal* é 9."

A justificativa geométrica para o problema, representado algebricamente por $x^2 + 10x = 39$, pode ser interpretada como o rearranjo do termo médio de modo a obter 4 retângulos equivalentes, ou seja, $x^2 + 10x = 39 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x = 39 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot \frac{5}{2}x = 39$, daí completa-se o quadrado de área $(x+5)^2$ com quatro quadrados de área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Geometricamente, tem-se:

Figura 10: Justificativa geométrica de $\boldsymbol{x^2 + 10x = 39}$, por Al-Khwarizmi



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

5.2.2. Problema da forma ax² + c = bx por Al- Khwarizmi

Esse tipo de representação recai em um problema cujas soluções são duas raízes positivas. Diferentemente dos babilônios, Al-Khwarizmi as considera, ao menos numericamente. A resolução retórica é dada com exemplos numéricos, no entanto, de forma geral podemos interpretar como "divide em 2 as *Jidhr* (b); eleve ao quadrado; subtraia os *Adad* (c); extraia a raiz quadrada. Examine o resultado:

(i) Verifique se tem solução usando a adição da metade da quantidade de *Jidhr*; se isso não for possível, certamente conseguirá a solução utilizando a subtração.

(ii) Se, ao dividir as *Jidhr* por 2 e elevar ao quadrado, o resultado for menor que os *Adad* adicionados ao quadrado, então o problema não tem solução. Mas se for igual aos *Adad*, a raiz do quadrado é igual a metade da raiz, sem adicionar ou subtrair nada" (Adaptado de Pereira, 2017).

Algebricamente, a interpretação do método recai em $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$:

De (i), $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ ou $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

De (ii), temos:

- Se $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, não há solução.
- Se $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, então $x = \frac{b}{2}$.

Os passos (i) e (ii) podem ser vistos como o discriminante da equação, $\Delta = b^2 - 4ac$, na fórmula resolutiva usada atualmente, para $a = 1$ e $c > 0$, visto que $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{b^2-4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Donde $\Delta = b^2 - 4c < 0$, a equação não tem raiz real e $\Delta = b^2 - 4c = 0$, a equação tem uma única raiz real.

Exemplo: Resolva a equação $3x^2 + 84 - 30x = 21$, pelo método de Al-Khwarizmi.

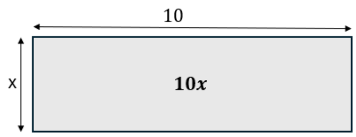
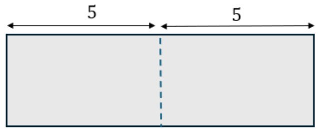
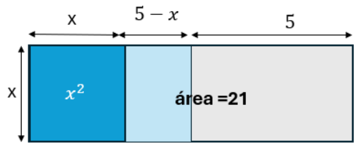
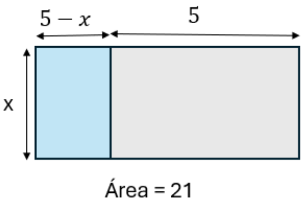
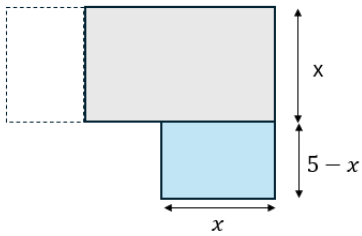
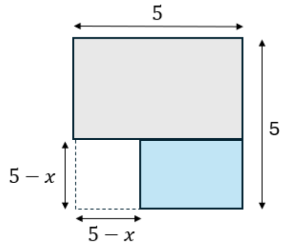
Solução: Primeiro aplicamos o processo de restauração e balanceamento a fim de eliminar o termo negativo e chegar à uma das formas canônicas:

$$3x^2 + 84 - 30x = 21$$
$$3x^2 + 84 - 30x + \mathbf{30x - 21} = 21 + \mathbf{30x - 21}$$
$$3x^2 + 63 = 30x$$
$$x^2 + 21 = 10x$$

(iii) Aqui temos que a quantidade de *Jidhr* é 10 e dos *Adad* é 21. Aplicando o algoritmo supracitado, temos: "Divide em 2 a quantidade de *Jidhr*, que dá 5; eleve ao quadrado, que dá 25 (como 25 é maior que 21, tem-se duas soluções); subtrai-se os *Adad* e sobram 4. Extrai-se a raiz quadrada, que resulta em 2. Adiciona-se e subtrai-se o resultado da metade da quantidade de *Jidhr*, obtendo como soluções $5 + 2 = 7$ e $5 - 2 = 3$.

(iv) Uma representação geometricamente, considerando a raiz que resulta da subtração, e adaptado para um melhor entendimento do leitor é dada no Quadro 12.

Quadro 12: Justificativa geométrica para a equação $x^2 + 21 = 10x$

1. Considere um retângulo de área $10x$	2. Tome o lado de medida 10 pela metade	3. Sabe-se que a área inicial, $10x$, equivale à $x^2 + 21$.
		
4. Note que 21 é equivalente ao agrupamento dos retângulos de áreas $x(5-x)$ e $5x$.	5. Transporte o retângulo de área $x(5-x)$ de modo a obter um gnomon[16]	6. Complete o quadrado de área 5^2 com o quadrado de área $(5-x)^2$. Obtendo $21 + (5-x)^2 = 5^2$ $(5-x)^2 = 4$ $5 - x = 2$ $x = 3$
		

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Pereira (2017) ressalva que embora Al-Khwarizmi tenha notado que uma solução pode ser obtida pela adição da metade das *Jidhr* no último passo da retórica, ele não mostra geometricamente. As resoluções geométricas como forma de justificar e tornar inteligíveis os procedimentos algébricos descritos retoricamente, em um contexto

---

[16] Figura plana formada pela remoção de um paralelogramo de um canto de um paralelogramo maior, o que pode ser entendido como uma figura plana em formato de L.

histórico no qual o simbolismo algébrico ainda não estava consolidado e a geometria constituía o principal modelo de rigor matemático, pode ser visto hoje como uma forma de expressão do pensamento algébrico presente nas estratégias de resolução empregadas por ele.

A historiadora Roque enfatiza que nem indianos nem árabes apresentaram uma representação simbólica geral para problemas envolvendo medidas desconhecidas, tampouco uma fórmula para a resolução desses problemas, apesar de resolverem de forma análoga desde os babilônios. Isto só veio a acontecer no século XVI depois que Francois Viète (1540-1603) propôs instituir simbologia inclusive para os coeficientes.

Sobre a simbologia algébrica proposta, Mol (2013) destaca que, inicialmente, Viète utilizava, em maiúsculas, as vogais A, E, I, O, U para representar as quantidades desconhecidas e as consoantes B, C, D, etc., para as conhecidas, ou seja, os coeficientes. O quadrado da incógnita A era indicado por *A quadratus*, enquanto o cubo era representado por *A cubus*. Posteriormente, no século XVII, Descartes (1596-1650) propôs substituir as vogais utilizadas por Viète para denotar incógnitas pelas últimas letras do alfabeto — como x, y, z e w — reservando as letras iniciais para os coeficientes. Esse momento marca, na história da matemática, o surgimento de uma notação algébrica que o leitor contemporâneo pode reconhecer com facilidade.

A simbologia algébrica introduzida por Descartes pode ser compreendida como arbitrária, na medida em que não estabelece uma relação intuitiva ou necessária entre as letras utilizadas e os objetos matemáticos que representam. Conforme argumenta Brolezzi (2004), os símbolos algébricos não possuem significado em si mesmos, sendo este atribuído a partir de acordos e regras de uso compartilhadas, o que evidencia o caráter convencional — e, portanto, arbitrário — da linguagem algébrica. A opção por empregar as letras finais do alfabeto para indicar as incógnitas e as iniciais para os coeficientes decorre de uma convenção historicamente instituída, e não de uma exigência lógica inerente à matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que o percurso aqui apresentado permita ao leitor reconhecer a Matemática como uma construção essencialmente humana, e que muitas vezes as soluções para problemas não surgem de forma imediata, única ou individual, como é o caso da concepção da álgebra e, em particular, de problemas que atualmente modelamos por meio de equações.

Acreditamos que promover o letramento matemático entre os estudantes constitui um desafio latente para o ensino tendo em vista as avaliações em larga escala. No PISA 2022, por exemplo, o Brasil ocupou a 65ª colocação em matemática entre os 81 países e economias avaliados, e cerca de 73% dos estudantes brasileiros não atingiram o nível mínimo de proficiência (Nível 2). Esse dado indica que uma parcela significativa dos alunos apresenta dificuldades em realizar operações simples ou em interpretar situações básicas que envolvem conceitos matemáticos e algébricos.

Particularmente, para o ensino de conceitos algébricos, acreditamos que a busca por estratégias didáticas que se configurem como alternativas às abordagens tradicionais pode contribuir para o desenvolvimento mais consistente do pensamento algébrico, conforme discutido neste trabalho. Assim, nossa metodologia buscou apresentar uma abordagem que integrasse referenciais e interpretações acessíveis ao ensino básico, especialmente relacionadas ao cálculo de medidas ou valores desconhecidos, tomando como ponto de partida exemplos trazidos em alguns registros históricos contendo algumas manifestações do pensamento algébrico e culminando na ampliação do raciocínio para além dos casos particulares, traduzindo-os numa linguagem formal no processo de argumentação.

Nesse contexto, registros antigos, datados de cerca de 2000 a.E.C. — como os papiros egípcios e as tábuas babilônicas — evidenciam que essas civilizações desenvolviam um pensamento algébrico, sobretudo na resolução de problemas envolvendo valores desconhecidos. Ainda que não haja evidências diretas, é plausível considerar que tais contribuições influenciaram o pensamento matemático de gregos, indianos, árabes e, posteriormente, obras produzidas a partir do século XVI, especialmente no campo da modelagem e dos métodos de resolução de equações. Esses métodos foram disseminados e serviram de base para o aprimoramento tanto das técnicas de resolução quanto da notação algébrica atual. Apesar dos importantes marcos históricos aqui destacados, a sistematização de fórmulas, generalizações e notações utilizadas hoje em equações só foi consolidada a partir do século XVI.

A realização dessa pesquisa evidenciou que muitas das dificuldades enfrentadas por estudantes, atualmente, também estiveram presentes na própria construção do conhecimento matemático. A instituição de números negativos e a formalização de símbolos algébricos, por exemplo, demandaram séculos de elaboração, contando com contribuições de diferentes sociedades em distintos momentos históricos. Paradoxalmente, no ensino seriado contemporâneo, tais conceitos são apresentados em um intervalo de tempo bastante reduzido. O mesmo ocorre em relação à abstração de problemas que envolvem valores desconhecidos.

Ao analisar as resoluções desenvolvidas pelos povos mais antigos e ampliar as ideias empregadas nesses argumentos para outros problemas utilizando símbolos para generalizar o raciocínio aplicado, culminamos na formulação de métodos resolutivos para equações do primeiro e do segundo graus. Esse percurso pode ser aplicado em sala de aula com o objetivo de, a partir de problemas menos abstratos, favorecer a superação dos obstáculos encontrados no ensino da álgebra, área que, com frequência, parece se apresentar de forma muito abstrata para os estudantes.

Cremos, portanto, que os exemplos trazidos nesta dissertação possam ser incorporados ao ensino da Educação Básica, com a expectativa de que os estudantes se identifiquem com os desafios históricos enfrentados na construção do raciocínio e da linguagem algébricos, e percebam que técnicas de resolução de problemas com quantidades desconhecidas podem ser desenvolvidas e aprimoradas ao longo do tempo, partindo de estratégias com menos abstração e estendendo o raciocínio aplicado para problemas mais abstratos. Esperamos que o estudante desenvolva outras estratégias de resolução diferentes das usuais; que aprofunde a compreensão dos conceitos e perceba que a Matemática é parte da cultura humana. Além disso, percebam que a compreensão de como determinados conceitos surgiram e se desenvolveram pode facilitar a aprendizagem, fornecendo uma base conceitual mais sólida, sobretudo que esse rol de estratégias contribua na transposição de eventuais desafios encontrados na representação do pensamento matemático.

Cabe destacar que a seleção realizada contemplou apenas parte dos inúmeros problemas propostos em diferentes períodos e civilizações. Pesquisas futuras poderão, por exemplo, investigar referenciais que contenham as contribuições de outros povos, como os chineses, ou explorar outros contextos históricos. Além disso, reconhecemos que muitos objetos de conhecimento e saberes inerentes da Matemática ainda carecem de referenciais que articulem tópicos da História da Matemática adaptados à educação básica, o que abre possibilidades para novas investigações.

Essa produção mostrou que, embora existam referenciais e recomendações para a inclusão da História da Matemática no ensino — como apresentado no capítulo 1, há dificuldades em encontrar materiais que possam ser efetivamente aplicados na educação básica. Muitas obras disponíveis utilizam uma linguagem excessivamente acadêmica, o que dificulta sua adaptação. Além disso, a ausência de fontes primárias e o número reduzido de obras genuinamente escritas em língua portuguesa representam outro obstáculo, pois a maior parte de referenciais disponíveis constitui-se de traduções de obras estrangeiras o que gerou certa insegurança na transposição dos registros históricos para atividades escolares. Esse processo exige maior dedicação à pesquisa, o que acabou por desestimular a abordagem de alguns elementos.

Por fim, é preciso reconhecer que as soluções elaboradas pelas civilizações anteriores atendiam às necessidades de sua época; contudo, o uso de símbolos para representar ideias gerais do pensamento, permite resolver problemas mais complexos e abstratos em resposta às transformações sociais e às novas demandas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, JADILSON RAMOS DE; SANTOS, MARCELO CÂMARA DOS. **Pensamento algébrico: em busca de uma definição**. *Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)*, Campo Mourão, PR, v. 6, n. 10, p. 34–60, jan./jun. 2017.

BRANDEMBERG, JOÃO CLÁUDIO. SERRÃO, MARCELO MIRANDA. **Utilizando problemas da história antiga da matemática como estratégia para o ensino de equações no 9º ano da escola básica**. X seminário nacional da História da matemática. Campinas-SP. UNICAMP, 2013.

BRASIL. **Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular***. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 22 abr. 2025.

BRASIL. **Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática***. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/mat.pdf. Acesso em: 22 abr. 2025.

BROLEZZI, ANTONIO CARLOS**. A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática.** 1991. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-11122013-094441/ . Acesso em: 7 maio 2025.

BROLEZZI, ANTONIO CARLOS**. O pensamento algébrico e a linguagem simbólica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

D'AMBROSIO, UBIRATAN. **A interface entre história e matemática uma visão histórico-pedagógica**. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 1999; pp. 97-115. Disponível em https://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/historiadamatematica/Ubiratan_dambrosio_doistextos.pdf. Acesso em: 5 jun. 2025.

EVES, HOWARD. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS BRUNO DE SOUZA RIBEIRO. **Métodos utilizados ao longo da história para resolver equações quadráticas: para além da fórmula de Bhaskara**. Rio Tinto: [s.n.], 2016. Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE. Orientadora: Profa. Dra. Graciana Ferreira Dias.

FERNANDES, JUSSARA PEREIRA. **Lilavati do hindu ao português: quase nove séculos**. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. Anais. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 21–24 jul. 2013. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1049_242_ID.pdf. Acesso em: 26 ago. 2025.

FERREIRA, ANDRÉ LUIS ANDREJEW; LOPES, LIDIANE SCHIMITZ. **A história da matemática em sala de aula: um recurso metodológico**. IV jornada nacional de Educação Matemática e XVII jornada regional de Educação Matemática. Minas Gerais-MG. Universidade de Passo fundo, 2012.

MIGUEL, ANTÔNIO; MIORIM, MARIA ÂNGELA. **História da Matemática: propostas e desafios**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOL, ROGÉRIO SANTOS. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte CAED-UFMG, 2013.

RAMOS, FELIPE DOS SANTOS. **Problemas de segundo grau na Babilônia**. Dissertação de mestrado (PROFMAT). Universidade do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Rio de janeiro. 2018. Orientador João Bosco Pitombeira de Carvalho.

REIS, ALEX MARQUES DOS. **A Matemática Egípcia – Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Ahmes**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2018. Orientador: Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho.

ROQUE, TATIANA**. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Z*aha*r, 2012.

SÃO PAULO (Estado). **Secretaria da Educação. Currículo Paulista: Ensino Fundamental e Ensino Médio – componente curricular: Matemática.** São Paulo: SEDUC-SP, 2019. Disponível em: https://curriculopaulista.educacao.sp.gov.br/. Acesso em: 22 abr. 2025.

PEDROSO, HERMES ANTÔNIO. Uma breve história da equação de 2° grau. **Revista eletrônica de matemática.** Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de São José do Rio Preto. 2010. ISSN 2177-5095 nº2 - Disponível em uma-breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf . Acesso em: 03 jul. 2025.

PEREIRA, ARMINDA MANUELA QUEIMADO. **Equações Algébricas: alguns episódios históricos.** Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores. Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências Matemática – Lisboa, 2017. Orientador: Prof. Dr. Jorge Nuno Silva.

APÊNDICE - PRODUTO FINAL

Apresentamos a seguir algumas propostas de aula no formato de apresentação de slides inspirados nos materiais digitais da Secretaria de Educação de Estado de São Paulo – modelo 2025. Cada proposta pode contemplar mais de uma aula e pode ser utilizada separadamente ou em sequência, a depender do interesse docente.

Toda proposta consta de:

1- Uma problematização inicial;

2- Sessões voltadas, preferencialmente, à exposição do docente – “Foco no conteúdo”;

3- Sessões voltadas, preferencialmente, ao estudante – “Atividade”;

4- Uma questão de encerramento;

5- Slide com referências;

6- Slides finais direcionados apenas aos docentes, contendo habilidades da BNCC relacionadas à aula, recomendações/orientações com expectativas de respostas, dinâmica de condução das sessões, além de uma sugestão de avaliação.

Proposta 1

Título da aula	Cálculo de valores desconhecidas no Egito antigo
Etapa de Ensino	1ª Série do Ensino Médio
Componente curricular	Matemática
Objetivos da aula:	• Resolver problemas envolvendo cálculo de valores desconhecidos inspirados nos problemas do Papiro de Ahmes; • Relacionar método de resolução de problemas aplicados pelos egípcios com a simbologia algébrica e método de resolução algébrico atual;
Habilidades da BNCC que estão relacionadas	(EF08MA22) – Resolver e elaborar problemas que envolvam equações do 1º grau, com uma ou duas incógnitas, utilizando diferentes estratégias e representações. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Conteúdos	• Representação e resolução de problemas com grandezas desconhecidas. • Equações.
Recursos	Lousa, giz, computador, projetor de slides (TV) e arquivo com a apresentação disponível no link a seguir. NOTA: PARA MAIOR APROVEITAMENTO DOS RECURSOS DE VÍDEO E ANIMAÇÕES, RECOMENDA-SE BAIXAR E UTILIZAR O ARQUIVO OFF-LINE.
Link de acesso à apresentação	https://docs.google.com/presentation/d/1sZFZulK0ka2hgTmImvbX5d74srfNOqmF/edit?usp=drive_link&ouid=115765855071778390 56&rtpof=true&sd=true
QR-CODE	

Proposta 2

Título da aula	Cálculo de valores desconhecidos na Babilônia
Etapa de Ensino	1ª Série do Ensino Médio
Componente curricular	Matemática
Objetivos da aula:	• Reconhecer a contribuição dos babilônios no desenvolvimento do pensamento algébrico; • Resolver problemas inspirados nas tábuas de argila babilônicas; • Relacionar método de resolução de problemas aplicados pelos babilônios com a simbologia algébrica atual;
Habilidades da BNCC que estão relacionadas	EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º Grau. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Conteúdos	• Representação e resolução de equação polinomial do 2º grau.
Recursos	Lousa, giz, computador, projetor de slides (TV) e arquivo com a apresentação disponível no link a seguir. NOTA: PARA MAIOR APROVEITAMENTO DOS RECURSOS DE VÍDEO E ANIMAÇÕES, RECOMENDA-SE BAIXAR E UTILIZAR O ARQUIVO OFF-LINE.

Link de acesso à apresentação	https://docs.google.com/presentation/d/176_PWK3v6DZVtdEQdojFjgvN-AjYqbGR/edit?usp=drive_link&ouid=115765855507177839056&rtpof=true&sd=true
QR-CODE	

Proposta 3

Título da aula	Diofanto e os primeiros símbolos
Etapa de Ensino	1ª Série do Ensino Médio
Componente curricular	Matemática
Objetivos da aula:	• Reconhecer a contribuição de Diofanto no desenvolvimento do pensamento algébrico; • Resolver problemas inspirados nos que aparecem na obra *Aritmética*, de Diofanto e relacionar seu método de resolução com a simbologia algébrica atual; • Estimular a reflexão sobre o desenvolvimento da linguagem matemática ao longo do tempo.
Habilidades da BNCC que estão relacionadas	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Conteúdos	Equações
Recursos	Lousa, giz, computador, projetor de slides (TV) e arquivo com a apresentação disponível no link a seguir. NOTA: PARA MAIOR APROVEITAMENTO DOS RECURSOS DE VÍDEO E ANIMAÇÕES, RECOMENDA-SE BAIXAR E UTILIZAR O ARQUIVO OFF-LINE.
Link de acesso à apresentação	https://docs.google.com/presentation/d/1RLM0EWmIN8v9g3afd6-XXMo5VBjMyjvX/edit?usp=drive_link&ouid=115765855507177839056&rtpof=true&sd=true
QR-CODE	

Proposta 4

Título da aula	Cálculo de valores desconhecidos na idade média: **Contribuição da Matemática Indiana**
Etapa de Ensino	1ª Série do Ensino Médio
Componente curricular	Matemática
Objetivos da aula:	• Reconhecer a contribuição dos documentos escritos em sânscrito no desenvolvimento do pensamento algébrico; • Resolver problemas inspirados nos métodos de resolução de alguns indianos da idade média e relacionar seus métodos de resolução com a simbologia algébrica atual; • Estimular a reflexão sobre o desenvolvimento da linguagem matemática ao longo do tempo.
Habilidades da BNCC que estão relacionadas	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Conteúdos	• Linguagem algébrica • Equações
Recursos	Lousa, giz, computador, projetor de slides (TV) e arquivo com a apresentação disponível no link a seguir. NOTA: PARA MAIOR APROVEITAMENTO DOS RECURSOS DE VÍDEO E ANIMAÇÕES, RECOMENDA-SE BAIXAR E UTILIZAR O ARQUIVO OFF-LINE.
Link de acesso à apresentação	https://docs.google.com/presentation/d/17e5HHkYmFxtY9zHq6eZSfUVGx8fUe7I1/edit?usp=drive_link&ouid=115765855507177839056&rtpof=true&sd=true
QR-CODE	

Proposta 5

Título da aula	Cálculo de valores desconhecidos na idade média: **Contribuições do persa Al-Khwarizmi**
Etapa de Ensino	1ª Série do Ensino Médio
Componente curricular	Matemática
Objetivos da aula:	• Reconhecer a contribuição do persa Al-Khwarizmi no desenvolvimento do pensamento algébrico; • Resolver problemas inspirados nos métodos de resolução de Al-Khwarizmi e relacionar seu método aos métodos e simbologia algébrica atuais; • Estimular a reflexão sobre o desenvolvimento da linguagem matemática ao longo do tempo.
Habilidades da BNCC que estão relacionadas	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Conteúdos	• Linguagem algébrica • Equações
Recursos	Lousa, giz, computador, projetor de slides (TV) e arquivo com a apresentação disponível no link a seguir. NOTA: PARA MAIOR APROVEITAMENTO DOS RECURSOS DE VÍDEO E ANIMAÇÕES, RECOMENDA-SE BAIXAR E UTILIZAR O ARQUIVO OFF-LINE.
Link de acesso à apresentação	https://docs.google.com/presentation/d/1wfdJIFQXaI8-HiN7NWBS-E4VDf-eH0eK/edit?usp=drive_link&ouid=115765855507177839056&rtpof=true&sd=true
QR - CODE	