



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DHIEGO DA SILVA GROUNDON

Transformações Geométricas no 7º Ano: Fundamentos e Propostas de Atividades.

Boa Vista, RR

2026

DHIEGO DA SILVA GROUNDON

Transformações Geométricas no 7º Ano: Fundamentos e Propostas de Atividades.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino

Coorientador: Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo

Boa Vista, RR

2026

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

G882t Groundon, Dhiego da Silva.

Transformações geométricas no 7º Ano : fundamentos e propostas
de atividades / Dhiego da Silva Groundon. – Boa Vista, 2026.
100 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino.

Coorientadora: Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de
Roraima. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT.

1. Transformações geométricas. 2. Ensino de matemática. 3. BNCC.
4. Caderno de atividades. I. Título. II. Rufino, Elzimar de Oliveira
(orientador). III. Belo, Edileusa do Socorro Valente (coorientadora).

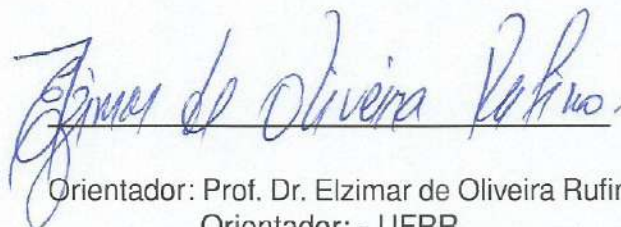
CDU: 514.12

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista (UFRR):
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453-AM

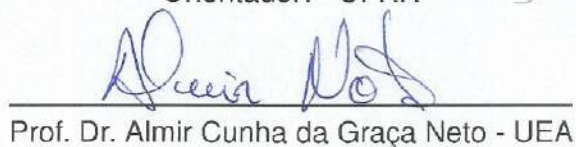
DHIEGO DA SILVA GROUNDON

Transformações Geométricas no 7º Ano: Fundamentos e Propostas de Atividades.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 23 de junho de 2026 e avaliada pela seguinte banca examinadora.



Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino
Orientador: - UFRR



Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto - UEA



Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima -
UFRR

Boa Vista, RR
2026

A Deus, por ser o alicerce de todas as minhas conquistas. À minha esposa, Sarah Raquel Groundon de Oliveira Sanches, pelo encorajamento constante e pela compreensão diante das minhas ausências. Aos meus familiares e amigos, que sempre me incentivaram nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de toda sabedoria e força, por ter iluminado meu caminho e me sustentado em cada desafio desta caminhada acadêmica.

Aos meus pais, por serem meu primeiro exemplo de retidão e esforço. Agradeço por terem plantado em mim os valores que hoje guiam minha vida pessoal e minha trajetória profissional.

À minha esposa, Sarah Raquel Groundon de Oliveira Sanches, pelo companheirismo silencioso e pela paciência generosa. Sua presença foi o equilíbrio necessário nos dias de cansaço, e seu incentivo foi o combustível para que eu não desistisse.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino, pela confiança depositada e pela condução magistral deste estudo. Suas críticas e ensinamentos foram essenciais para o meu amadurecimento intelectual.

À minha coorientadora, Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo, pela acolhida, pelo olhar cuidadoso e pelas valiosas contribuições que enriqueceram significativamente este trabalho.

Aos meus familiares e amigos, que, mesmo de longe ou nos pequenos gestos, ofereceram o apoio e o entusiasmo necessários para que eu concluísse esta etapa.

*"A Geometria é um tipo de conhecimento que parece ser buscado em vista do eterno,
e não de algo que morre ou passa."*

Platão

RESUMO

O ensino da Geometria enfrenta, frequentemente, o desafio de superar abordagens fragmentadas e excessivamente abstratas. Diante desse cenário, torna-se necessário implementar estratégias pedagógicas que superem tais obstáculos. Esta pesquisa investiga as transformações geométricas — reflexão, translação, rotação e homotetia — como elementos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento espacial e da abstração matemática no 7º ano do Ensino Fundamental. O estudo fundamenta-se em uma revisão teórica sobre vetores, plano cartesiano, geometria euclidiana plana, geometria analítica e nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Como produto educacional, elaborou-se um Caderno de Atividades que aborda as transformações geométricas por meio de materiais concretos e softwares de geometria dinâmica (como o GeoGebra). Mais do que um recurso técnico, o produto oferece ao professor um roteiro lúdico e contextualizado, visando transformar o aprendizado em uma experiência dinâmica e significativa. Espera-se que este material contribua para a consolidação de conceitos e para a conexão da matemática com o cotidiano dos alunos, tornando o ensino da Geometria mais acessível.

Palavras-chave: Transformações Geométricas; Ensino de Matemática; BNCC; Caderno de Atividades.

ABSTRACT

The teaching of Geometry often faces the challenge of overcoming fragmented and excessively abstract approaches. Given this scenario, it is necessary to implement pedagogical strategies that overcome such obstacles. This research investigates geometric transformations—reflection, translation, rotation, and homothety—as fundamental elements for the development of spatial thinking and mathematical abstraction in the 7th grade of Middle School. The study is based on a theoretical review of vectors, the Cartesian plane, Euclidean plane geometry, analytical geometry, and the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC). As an educational product, an Activity Booklet was developed, addressing geometric transformations through concrete materials and dynamic geometry software (such as GeoGebra). More than a technical resource, the product offers teachers a playful and contextualized guide, aiming to transform learning into a dynamic and meaningful experience. It is expected that this material will contribute to the consolidation of concepts and the connection of mathematics with students' daily lives, making the teaching of Geometry more accessible.

Key-words: Geometric Transformations. Mathematics Education. Dynamic Geometry. BNCC. Middle School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Móvel em uma sala retangular	25
2	Representação do movimento do móvel.....	26
3	Segmentos Orientado AB e BA	26
4	Segmentos Equipolentes AB e CD	27
5	Representação de uma classe de equipolência.....	28
6	Soma de vetores	29
7	O plano cartesiano	30
8	Um ponto A em destaque no Plano Cartesiano.....	30
9	Ponto A com coordenadas $x = 3$ e $y = 2$	31
10	Distância com segmento horizontal	32
11	Distância com segmento vertical	32
12	Distância com segmento inclinado.....	33
13	Deslocamento horizontal do segmento PQ	34
14	Transformação não isométrica	35
15	Representação geométrica de uma reflexão no plano.....	36
16	A reflexão é uma isometria	36
17	Reflexão: Orientação dos vértices no triângulo	38
18	Polígono A adjacente à reta r	38
19	Polígono simétrico em relação ao eixo r , obtido via reflexão do polígono A	39
20	Simetria no Palácio Senador Hélio Campos em Boa Vista-RR	39
21	Polígono $ABCDEFG$ e reta r	40
22	Polígono $ABCDEFG$ e retas horizontais	41
23	Polígono $ABCDEFG$ e pontos	41
24	Polígonos Simétricos	42
25	Descrição do ponto transladado $A' = T_v(A)$	44
26	Paralelogramo $AA'BC$	44
27	Translação do ponto P através do vetor $v = (3, 2)$	46
28	Obra "Pegasus" de M.C. Escher.....	47
29	Obra "Dois Pássaros" de M.C. Escher.....	47
30	Representação de Translações do Pentágono A (6 unidades à direita e 4 unidades para baixo)	48
31	Polígono $ABCD$	49
32	Polígono $ABCD$ transladado	49
33	Rotação do Ponto B em 55° em relação a origem A no sentido anti-horário	50

34	Rotação horária de 90° do polígono I em torno da origem O.....	51
35	Rotação anti-horária de 180° do polígono I em relação ao centro O. ...	51
36	Rotação horária de 250° do polígono I em relação ao ponto O.	52
37	Pentágono $ABCDE$ e Ponto O como centro de rotação.....	52
38	Rotação de 120° do Pentágono $ABCDE$: Determinação da semirreta de origem O	53
39	Rotação de 120° do Pentágono $ABCDE$: Determinação do Ponto A' .	53
40	Pontos Simétricos aos vértices do Pentágono $ABCDE$ por Rotação de 120° em torno de O	54
41	Rotação do Polígono $ABCDE$ por rotação de 120° em torno de O	54
42	Processos de redução ($k = 0,5$) e ampliação ($k = 2,0$) em malha quadriculada.	57
43	Homotetia de centro O	58
44	Semelhança de triângulos estabelecida por homotetia de centro O	59
45	Homotetia: Retas paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e transversal $\overline{OA'}$	59
46	Homotetia: Alinhamento Entre Centro e Seus Pontos Correspondentes	61
47	Demonstração visual da conservação dos ângulos internos entre polígonos homólogos.....	61
48	Campo de Batalha.....	65
49	Atividade de Simetria: Reflexão no Plano.	67
50	Atividade 3 (a).....	69
51	Atividade 3 (b).....	69
52	Atividade 3 (c).....	70
53	Atividade 3: (d).....	70
54	Reflexão dos pontos A , B e C	72
55	Polígono $ABCEDF$	75
56	Pontos refletidos em relação a reta.....	75
57	Polígono refletido	76
58	Polígono $ABCDEFGF$	77
59	Translação do polígono P	78
60	Quadrilátero $ABCD$ e vetor u	81
61	Campo com Obstáculos	83
62	Campo com Obstáculos: Resolvido	84
63	Dois Pássaros.....	86
64	Logotipo	91
65	Satélite.....	93

LISTA DE QUADROS

1	Competências Gerais da Educação Básica	16
2	BNCC e Currículo	18
3	Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental	20
4	Matemática no 7º ano: Unidade Temática, Objetos de Conhecimento e Habilidades	22

SUMÁRIO

Introdução	13
1 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR	15
1.1 Base Nacional Comum Curricular e currículos	17
1.2 BNCC e a Matemática.....	18
1.3 Unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades da BNCC para o 7º ano do Ensino Fundamental	21
2 REFERENCIAL TEÓRICO	24
2.1 Vetores.....	25
2.2 Soma de Vetores	28
2.3 O Plano Cartesiano	29
2.4 Distância entre dois pontos.....	31
2.5 Transformações geométricas	33
2.5.1 Reflexão	35
2.5.2 Reflexão no plano cartesiano	42
2.5.3 Translação	43
2.5.4 Translação no Plano Cartesiano	46
2.5.5 Rotação	50
2.5.6 Procedimentos para rotacionar uma figura usando compasso.....	52
2.5.7 Relações no plano cartesiano	54
2.5.8 Homotetias: Ampliação ou Redução	56
2.6 Propriedades Preservadas	62
3 ATIVIDADES DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICA PARA O SÉ- TIMO ANO	63
3.1 Atividades relativas à transformação geométrica Reflexão.....	64
3.1.1 Atividade 1 - Batalha Simétrica usando Reflexão	64
3.1.2 Atividade 2 - Reflexão (Desenho Assistido por Malha)	66
3.1.3 Atividade 3 - Reflexão (Construção Manual)	68
3.1.4 Atividade 4 - Reflexão (Exploração com GeoGebra)	71
3.1.5 Atividade 5 - Reflexão (Revezamento no Quadro)	73
3.1.6 Atividade 6 - Reflexão (Fenômenos Cotidianos).....	74
3.2 Atividades relativas à transformação geométrica Translação	76
3.2.1 Atividade 1 - Translação (Construção em Malha)	76
3.2.2 Atividade 2 - Translação (Análise de Movimento)	78
3.2.3 Atividade 3 - Translação (Matemática em Movimento)	79
3.2.4 Atividade 4 - Translação (Investigação GeoGebra)	80
3.2.5 Atividade 5 - Translação (Lógica de Programação)	82

3.2.6	Atividade 6 - Translação (Mosaicos de Escher)	85
3.2.7	Atividade 7 - Translação e Reflexão no Geogebra	87
3.3	Atividades relativas à transformação geométrica Rotação	88
3.3.1	Atividade 1 - Rotação (Vivência Corporal).....	88
3.3.2	Atividade 2 - Rotação (Construção Manual)	89
3.3.3	Atividade 3 - Rotação (Design de Logotipo)	90
3.3.4	Atividade 4 - Rotação (Simulação Orbital).....	92
3.4	Atividades relativas à transformação geométrica Homotetia	94
3.4.1	Atividade 1 - Homotetia (Ampliação e Redução)	94
3.4.2	Atividade 2 - Ampliação de Personagens (Malha Quadriculada)	95
3.4.3	Atividade 3 - Construindo um Projetor de Homotetia	97
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	99
	REFERÊNCIAS	100

INTRODUÇÃO

A geometria é uma das grandes áreas da Matemática, e tem como objetivo o estudo das formas, visualização espacial, transformações, dentre outros. A geometria está presente no nosso cotidiano e pode ser percebida na forma geométrica dos objetos, nas obras arquitetônicas, na natureza, nas tecnologias e mundo digital, no próprio corpo humano e em diversas outras situações. Entretanto, no âmbito da educação básica, deseja-se que o aluno obtenha uma abstração que o permita enxergar para além da matéria física. Essa capacidade de abstrair é o que permite ao estudante compreender que o mundo não é estático, mas sim um conjunto de formas que podem sofrer transformações mantendo (ou não) suas propriedades fundamentais.

Esta pesquisa tem como foco o estudo das Transformações Geométricas (TG), entendidas como funções que associam a cada ponto do plano um único ponto do mesmo plano. Dependendo do tipo de transformação, determinadas propriedades geométricas podem ser preservadas ou alteradas. Entre as principais transformações estão a translação, a rotação, a reflexão, a dilatação e a compressão. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental aborda as transformações geométricas de forma progressiva e contextualizada ao longo do ensino fundamental, principalmente nos anos finais, dentro da unidade temática Geometria. A BNCC reconhece o valor das transformações geométricas não apenas como um conteúdo matemático em si, mas como um meio para desenvolver habilidades cognitivas essenciais e conectar a matemática com diversas outras áreas do conhecimento e do cotidiano dos alunos.

“A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.” (Brasil, 2018, p. 271).

Apesar disso, o ensino de transformações geométricas ainda apresenta desafios para professores e alunos. Muitas vezes, o tema é abordado de forma fragmentada ou excessivamente abstrata, a falta de recursos visuais/dinâmicos, a pouca contextualização e a abordagem meramente algorítmica contribuem para a dificuldade de compreensão e a conexão com aplicações práticas. Diante desse cenário, percebe-se a necessidade de materiais didáticos que auxiliem o professor a explorar o potencial das transformações geométricas de maneira significativa e engajadora, embora existam materiais didáticos sobre o tema, ainda há necessidade de recursos que sejam didático e atualizado com foco no cotidiano dos alunos e nas tecnologias digitais.

Esta dissertação insere-se neste contexto, abordando os conceitos teóricos aprofundados das transformações geométricas e construindo atividades as quais po-

dem possibilitar ao professor abordar de forma lúdica e articuladas ao desenvolvimento da abstração, destacando a importância das TG.

“Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão...” (LORENZATO, 1995, p.3).

A pesquisa tem como objetivo geral: Aprofundar o estudo dos conceitos das transformações geométricas, propondo atividades de ensino para o sétimo ano do Ensino Fundamental II. Como objetivos específicos elencamos:

- Realizar revisão bibliográfica dos conceitos matemáticos envolvidos nas transformações geométricas.
- Articular aspectos teóricos com os conteúdos discriminados na BNCC para o sétimo ano do ensino fundamental II.
- Elaborar atividades de ensino que possam subsidiar as práticas pedagógicas docentes para o sétimo ano do ensino fundamental II

Como produto educacional desenvolvemos um caderno de atividades didáticas voltado especificamente para professores de Matemática, com orientações e objetivos para cada atividade de Transformações Geométricas.

Este material didático foi cuidadosamente elaborado para atender ao 7º ano do ensino fundamental, com o propósito de desenvolver as habilidades e competências em transformações geométricas conforme preconizado pela Base Nacional Comum Curricular.

Ao proporcionar aos professores de Matemática um recurso prático e alinhado às demandas da Base Nacional Comum Curricular, almeja-se não apenas consolidar os conceitos fundamentais, mas também inspirar uma abordagem pedagógica mais dinâmica e significativa, que se conecte com a realidade dos alunos e valorize a beleza e aplicabilidade da geometria no cotidiano. O texto está estruturado da seguinte forma: No capítulo 1, apresenta-se a fundamentação normativa baseada na Base Nacional Comum Curricular, discutindo a relação entre as diretrizes nacionais e o ensino de Matemática, com foco nas habilidades previstas para o 7º ano do Ensino Fundamental. No capítulo 2, estabelece-se o referencial teórico, abordando conceitos de vetores, o plano cartesiano e o detalhamento das transformações geométricas (reflexão, translação, rotação e homotetia). Por fim, o capítulo 3 oferece uma sequência de atividades práticas, integrando o uso de tecnologias como o GeoGebra e dinâmicas lúdicas para a consolidação desses conhecimentos em sala de aula.

1 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Como balizadora da educação no Brasil, a BNCC define as competências e habilidades fundamentais que devem ser asseguradas aos alunos da Educação Básica, independentemente de sua localização geográfica. Instituída conforme as determinações da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9.394/96, seu propósito central é promover o direito à aprendizagem e o desenvolvimento pleno do estudante. Ao focar na educação formal, o documento se alinha a uma visão pedagógica que valoriza a justiça social e a inclusão, consolidando-se como uma ferramenta estratégica para formar cidadãos críticos e preparados para os desafios contemporâneos.

Vale ressaltar que a BNCC não se limita a um conjunto de recomendações pedagógicas, possuindo força normativa que vincula as redes de ensino públicas e privadas. Sua obrigatoriedade assegura que o que nela está prescrito seja efetivamente implementado, transformando diretrizes teóricas em uma regra oficial para a educação brasileira. Assim, o documento atua como o balizador dos direitos essenciais de aprendizagem, assegurando que o padrão de qualidade educativa seja mantido em todas as escolas do país.

Os objetivos da BNCC vão além de apenas dar as mesmas oportunidades de aprendizado e diminuir as diferenças que existem há muito tempo. Ela também serve para definir os conteúdos que não podem faltar em cada fase da Educação Básica, para orientar as escolas (públicas e particulares) a criar seus próprios currículos e para dar base para a elaboração de provas e exames externos.

A implementação da BNCC, iniciada entre 2017 e 2018, foi marcada por debates sobre seus impactos na educação brasileira. Enquanto o documento busca garantir equidade por meio da definição de aprendizagens essenciais, também recebe críticas por priorizar competências e avaliações padronizadas, podendo limitar a autonomia docente. Em Roraima, influenciou a criação do Documento Curricular de Roraima (DCRR), mas o modelo passou por revisões, como a Lei nº 14.945/2024, que ampliou novamente a Formação Geral Básica no Ensino Médio para 2.400 horas. Em 2026, o foco está na integração da BNCC Computação e no desafio de verificar se a padronização reduz desigualdades ou apenas evidencia problemas estruturais das escolas.

A BNCC não determina como o professor deve ensinar e permite a inclusão das características regionais no currículo escolar. Em Roraima, isso ocorre por meio do DCRR, instituído pela Resolução CEE/RR nº 18/2019, que adapta as diretrizes nacionais às particularidades históricas, geográficas e culturais do estado. Dessa forma, a BNCC define conhecimentos essenciais comuns, preservando a diversidade regional e a autonomia docente, com foco no desenvolvimento das dez competências gerais.

De acordo com (Brasil, 2018),

Competência significa usar conhecimentos (ideias e modos de fazer), habilidades (práticas, de pensamento e emocionais), atitudes e valores para resolver problemas do dia a dia, ser um cidadão completo e trabalhar.

Abaixo estão listadas as 10 competências gerais definidas pela BNCC,

Quadro 1 – Competências Gerais da Educação Básica

1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: (Brasil, 2018, p. 9).

A BNCC extrapola a simples organização de conteúdos escolares, constituindo-se como um instrumento estratégico para a promoção da equidade e da justiça social no Brasil. Ao estabelecer competências e habilidades essenciais, o documento busca assegurar um padrão de qualidade educativa que alcance todos os estudantes, independentemente de sua localização geográfica. Dessa forma, a Base propicia o desenvolvimento de capacidades fundamentais para o exercício da cidadania e a futura inserção no mundo do trabalho, preparando o jovem para lidar com os desafios da vida contemporânea. Em última análise, o texto visa fomentar a autonomia intelectual e o pensamento crítico, preparando os estudantes para uma atuação consciente e transformadora na sociedade.

1.1 Base Nacional Comum Curricular e currículos

A BNCC e os currículos escolares compartilham uma base comum de princípios e valores, alinhados com as diretrizes estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). Essa convergência reflete o entendimento de que a educação possui um compromisso fundamental com a formação e o desenvolvimento integral do indivíduo, abrangendo suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica. Ambos os documentos reconhecem a importância de uma abordagem holística para o crescimento humano.

Além disso, a BNCC e os currículos atuam de forma complementar para garantir que as aprendizagens essenciais, definidas para cada etapa da Educação Básica, sejam efetivamente alcançadas. Essas aprendizagens não se concretizam isoladamente, mas sim por meio do conjunto de decisões e práticas que moldam o currículo em ação. Tais decisões são cruciais para adaptar as proposições da BNCC às realidades locais, levando em consideração a autonomia dos sistemas e redes de ensino, das instituições escolares, bem como o contexto específico e as características dos alunos. Essas decisões, que resultam de um processo de envolvimento e participação das famílias e da comunidade, referem-se, entre outras ações, a:

Quadro 2 – BNCC e Currículo

1	Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
2	Decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;
3	Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
4	Conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;
5	Construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos;
6	Selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
7	Criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;
8	Manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino.

Fonte: (Brasil, 2018, p. 16).

As ações descritas no Quadro 2 demonstram que a implementação da BNCC não é um processo estático, mas uma construção que exige adaptação à realidade local e o protagonismo dos educadores. Essa transição do plano normativo para a prática pedagógica torna-se ainda mais evidente em áreas que demandam alta contextualização, como a Matemática, cujas diretrizes buscam integrar o raciocínio lógico às necessidades sociais e cotidianas dos estudantes.

1.2 BNCC e a Matemática

A BNCC destaca que a Matemática é essencial para todos os estudantes do ensino básico. Isso acontece porque a Matemática é muito usada no dia a dia e ajuda a formar cidadãos que pensam por si mesmos e se preocupam com a sociedade. Ou seja, a Matemática não é só uma ferramenta prática, mas também um pilar para o desenvolvimento pessoal e social.

A Matemática vai muito além de apenas contar e medir coisas ou fazer cálculos. Ela também estuda o que é incerto, como em jogos de azar, e cria jeitos de organizar e

entender o espaço, o movimento, as formas e os números, tanto no mundo das ideias quanto no mundo real. Essas formas de pensar a Matemática nos dão ferramentas para entender melhor o que acontece ao nosso redor, criar representações claras e explicar nossas ideias de maneira lógica.

Mesmo que a Matemática seja uma ciência que se baseia muito na lógica e em regras já aceitas, a BNCC mostra que é muito importante também experimentar e descobrir coisas novas para aprender. Isso significa que, além de seguir a lógica, explorar e testar ideias ajuda os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático de um jeito mais ativo e intuitivo antes de aprenderem as regras mais formais.

No Ensino Fundamental, a Matemática, com suas diferentes áreas temáticas como Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, deve garantir que os alunos relacionem o que veem no mundo real com as representações Matemáticas (como tabelas e desenhos). É importante que eles associem essas representações a conceitos e propriedades da Matemática, aprendendo a fazer suposições e a testá-las. Assim, espera-se que eles consigam usar a Matemática para resolver problemas, aplicando o que aprenderam para encontrar soluções e entender o que elas significam em cada situação. Incentivar a descoberta de padrões e a verificação de suposições é algo que pode ser feito, principalmente nos últimos anos do Ensino Fundamental.

O Ensino Fundamental, segundo a BNCC, tem o compromisso de desenvolver o que chamamos de letramento matemático. Isso quer dizer que os alunos devem ser capazes de pensar, representar, comunicar e argumentar usando a Matemática. Isso facilita a criação de ideias e a resolução de problemas em diversas situações, usando conceitos, métodos e ferramentas Matemáticas. O letramento matemático faz com que os alunos percebam como a Matemática é importante para entender e agir no mundo, e também que ela pode ser divertida e estimular a curiosidade e o pensamento crítico. Para isso, a aprendizagem da Matemática deve ser organizada a partir de situações do dia a dia, de outras matérias e da própria matemática, usando a resolução de problemas, a pesquisa, projetos e a modelagem como formas principais de aprender e desenvolver o pensamento computacional.

Considerando esses pressupostos, e em articulação com as competências gerais da Educação Básica, a área de Matemática e, por consequência, o componente curricular de Matemática devem garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas.

Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: (Brasil, 2018, p. 267).

As competências detalhadas no Quadro 3 evidenciam que o ensino da Matemática deve transcender a memorização de fórmulas, focando no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade de intervenção social do aluno. Nesse sentido, o alcance de tais objetivos exige que o planejamento pedagógico conecte as unidades temáticas a situações-problema que estimulem a investigação e a argumentação. Sob essa ótica, a transição para os objetos de conhecimento do 7º ano representa um estágio crucial dessa formação, onde conceitos anteriormente introduzidos ganham maior complexidade e exigem um grau mais elevado de abstração, especialmente no campo da Geometria.

1.3 Unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades da BNCC para o 7º ano do Ensino Fundamental

Para que os alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais desenvolvam bem suas habilidades em Matemática, é fundamental considerar o que eles já sabem e as experiências que tiveram. A BNCC destaca a necessidade de criar situações onde eles possam observar o mundo de forma organizada, ligando o que veem a ideias Matemáticas mais complexas. Isso significa que o aprendizado deve conectar o dia a dia dos alunos com os conceitos matemáticos, mostrando como a Matemática está presente em diferentes áreas e temas, e como ela se relaciona com outras matérias.

Nesse contexto, nossa pesquisa se concentrará na unidade temática de Geometria, explorando suas habilidades e conceitos. Daremos atenção especial às transformações geométricas, que ganham mais destaque no 7º ano do Ensino Fundamental. É importante ressaltar que o estudo dessas transformações no 7º ano não é um ponto de partida isolado, mas sim uma continuação e aprofundamento de conceitos geométricos que foram introduzidos e desenvolvidos nos anos anteriores. A BNCC enfatiza essa progressão, onde as noções Matemáticas são retomadas e ampliadas a cada ano, garantindo um aprendizado contínuo e a construção de um conhecimento mais sólido.

Para que o aprendizado de um conceito ou procedimento matemático seja significativo, a BNCC destaca a necessidade de um contexto relevante para os alunos. Esse contexto pode vir do dia a dia, de outras áreas do conhecimento ou da própria história da Matemática. Contudo, é crucial que os estudantes desenvolvam a capacidade de ir além do contexto inicial, entendendo as relações e os significados para aplicá-los em novas situações. A resolução de problemas, a investigação e a elaboração de novos problemas a partir de situações já resolvidas são estratégias incentivadas para promover essa abstração e o desenvolvimento do raciocínio. Além disso, nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC sugere que os alunos sejam gradualmente introduzidos à compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática, desenvolvendo um senso crítico ao lidar com textos e ideias matemáticas.

A quadro a seguir indica a unidade temática Geometria com seus respectivos objetos de conhecimento e habilidades propostas para o 7º ano de acordo com a BNCC, que serão trabalhados nas atividades propostas neste trabalho.

Quadro 4 – Matemática no 7º ano: Unidade Temática, Objetos de Conhecimento e Habilidades

Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Geometria	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
Geometria	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° . (EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Geometria	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Fonte: Adaptado de (Brasil, 2018, p. 306).

As habilidades e objetos de conhecimento listados no Quadro 4 anterior evidenciam que o ensino da Geometria no 7º ano requer uma transição gradual da observação empírica para a abstração e o rigor geométrico. Para que o docente possa mediar a

construção dessas competências — especialmente no que tange às transformações no plano e às propriedades de simetria —, é indispensável o domínio dos conceitos matemáticos que fundamentam tais práticas. Diante disso, o capítulo a seguir apresenta o referencial teórico desta pesquisa, aprofundando as definições e propriedades das transformações geométricas, bem como as bases do plano cartesiano, que servirão de suporte para o desenvolvimento da proposta pedagógica apresentada neste trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A matemática desempenha um papel crucial na formação dos indivíduos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, fornecendo as bases para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de resolução de problemas e da compreensão do mundo ao redor. Sua importância transcende o ambiente escolar, consolidando-se como uma ferramenta universal indispensável na vida adulta. Seja na gestão financeira pessoal, na interpretação de dados e informações cotidianas, ou na compreensão de avanços tecnológicos e científicos, a proficiência matemática capacita os cidadãos a tomarem decisões informadas e a interagirem de forma mais eficaz com a complexidade do mundo contemporâneo.

No contexto do Ensino Fundamental, a geometria assume particular relevância, especialmente no 7º ano, onde os estudantes são introduzidos a conceitos que aprofundam sua percepção espacial e o pensamento geométrico. Essa etapa é fundamental para a construção de uma compreensão mais elaborada de formas, medidas e transformações, que são a base para estudos mais complexos. O desenvolvimento do pensamento geométrico não se restringe à memorização de fórmulas, mas envolve a capacidade de visualizar, analisar, classificar e argumentar sobre propriedades de figuras, preparando o aluno para desafios matemáticos e para a aplicação desses conhecimentos em diversas situações práticas.

Diante desse panorama, o presente referencial teórico fundamenta-se nas contribuições de Lima (1977), Barbosa (2006), Fernandes (2023), Morgado e Wagner (2010). Suas perspectivas servirão como alicerce para a concepção e o desenvolvimento de atividades didáticas voltadas ao aprimoramento do ensino de Geometria. Essas atividades serão fundamentadas nas abordagens pedagógicas presentes nas coleções didáticas "Matemática e Realidade" Pataro e Balestri (2019) e "Matemática Essencial" Iezzi, Dolce e Machado (2018), reconhecidas por sua relevância no ensino de matemática. Adicionalmente, para enriquecer a experiência de aprendizagem e promover uma construção mais dinâmica e interativa de figuras e conceitos geométricos, será empregado o software GeoGebra, potencializando a exploração das transformações geométricas de maneira visual e prática.

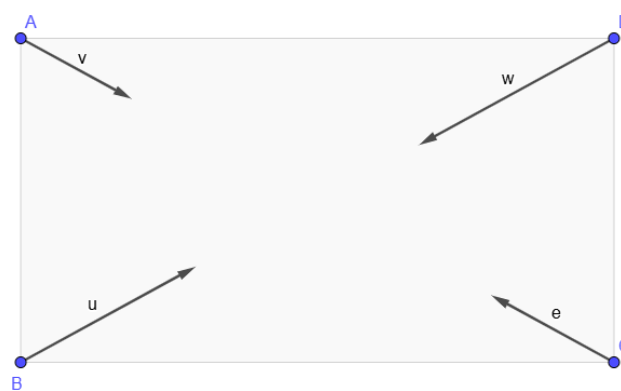
Para que as atividades propostas e o uso do software alcancem o potencial pedagógico desejado, torna-se indispensável formalizar os conceitos matemáticos que sustentam a manipulação das figuras. O entendimento aprofundado das transformações geométricas depende diretamente de estruturas algébricas e geométricas fundamentais, razão pela qual este percurso conceitual inicia-se com o estudo dos vetores.

2.1 Vetores

Nesta seção, exploraremos o conceito de vetor, uma entidade fundamental para a modelagem geométrica tanto na matemática quanto em outras áreas, como a física. Contudo, para uma compreensão rigorosa, faz-se necessário estabelecer, previamente, algumas definições e considerações geométricas que servem de base para a sua construção formal. A partir desses fundamentos, o estudo dos vetores nos permite descrever fenômenos que não podem ser analisados apenas por um valor escalar, como o impacto de uma força ou a trajetória de uma partícula no plano ou no espaço. No exemplo a seguir, podemos visualizar uma situação:

Exemplo 2.1.1. *Suponha que um móvel esteja em uma sala retangular e que este móvel se movimenta em uma das diagonais. Com isso não é possível saber o movimento exato deste móvel. Não sabemos de onde este móvel partiu e onde ele chegou. Se soubermos que ele partiu de um vértice, ainda assim não podemos precisar o seu movimento. Conforme mostra a Figura 1 temos quatro possibilidades de saída e infinitas possibilidades para o ponto de chegada.*

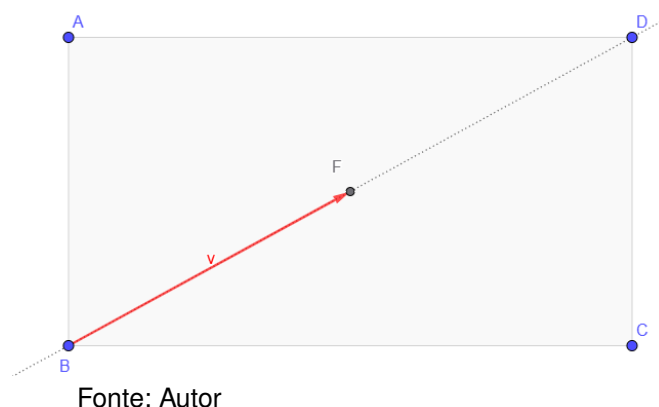
Figura 1 – Móvel em uma sala retangular



Fonte: Autor

Se a saída foi do vértice B acrescentarmos a informação que o móvel foi até o meio da diagonal, teremos o movimento por completo. Neste caso, teremos uma distância (comprimento), uma direção (a direção da diagonal que começa em B e termina em D) e um sentido (de B para D .) Essa é a ideia básica de representar um vetor, indicando uma direção, um sentido e um comprimento ou módulo, conforme mostra a Figura 2

Figura 2 – Representação do movimento do móvel



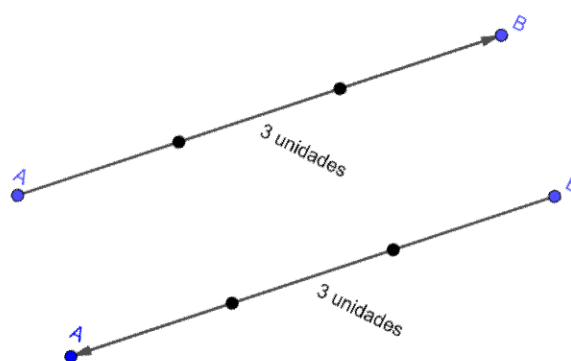
Segundo Fernandes (2023, p.16):

Definição 2.1.1. Um **Segmento Orientado** (A, B) é um par ordenado de pontos no espaço, sendo A a origem e B a extremidade do segmento.

Usaremos a notação AB para um segmento orientado (A, B) . No caso específico em que o ponto de origem e o de extremidade coincidem ($A = B$), o segmento é chamado de segmento nulo.

Ressaltamos que os segmentos orientados AB e BA são distintos porque possuem pontos de origem e extremidades invertidos: no primeiro caso, o percurso inicia em A , enquanto no segundo, inicia em B . Conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.2. A Figura 3 mostra os segmento orientados AB e BA .

Figura 3 – Segmentos Orientado AB e BA 

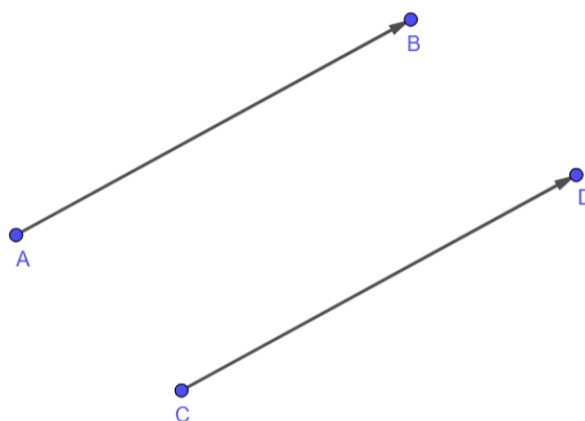
Fonte: Autor

Segmentos orientados podem compartilhar características fundamentais que os tornam funcionalmente idênticos em termos de módulo e orientação. Essa semelhança é formalizada pelo conceito de equipolência, que permite agrupar diferentes segmentos orientados sob uma mesma classe, estabelecendo as bases para a definição matemática de um vetor. Como descreve Fernandes (2023, p.21)

Definição 2.1.2. Dizemos que os segmentos orientados AB e CD são **equipolentes** quando ambos são nulos ou, caso nenhum deles seja nulo, quando têm a mesma direção, comprimento e sentido.

Exemplo 2.1.3. A Figura 4 mostra segmentos equipolentes.

Figura 4 – Segmentos Equipolentes AB e CD



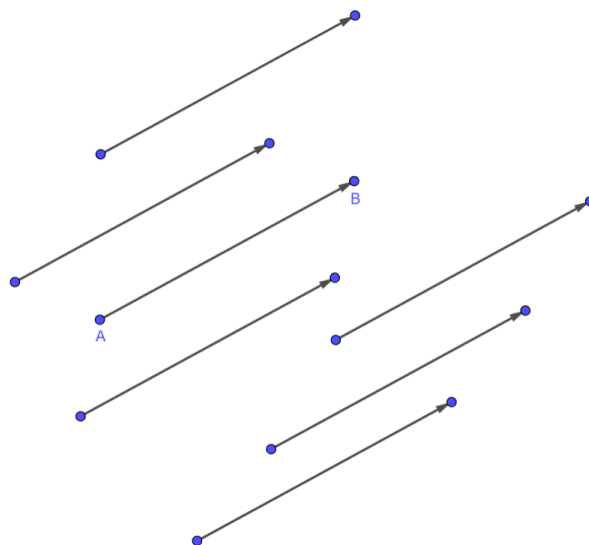
Fonte: Autor

Para introduzir o conceito de vetor no plano, partimos da relação de equipolência. Nesse contexto, o vetor é compreendido como a propriedade comum a todos os segmentos que se equivalem, conforme (FERNANDES, 2023, p. 22):

Definição 2.1.3. Uma **classe de equipolência** de um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB .

Exemplo 2.1.4. A Figura 5 dá uma ideia da classe de segmentos ordenados equipolentes ao segmento AB

Figura 5 – Representação de uma classe de equipolência



Fonte: Autor

Finalmente podemos definir **Vetor**:

Definição 2.1.4. O vetor **vetor** $\overrightarrow{AB}$ é a classe de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB .

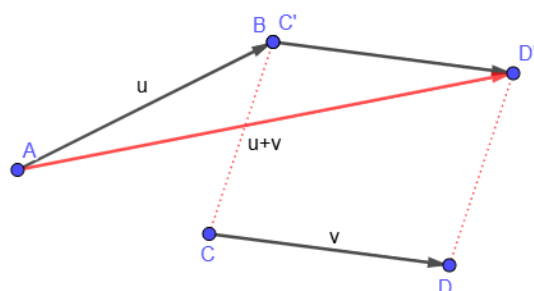
No conjunto dos vetores do plano podemos definir duas operações, uma operação de adição de vetores e outra de multiplicação de vetor por escalar.

2.2 Soma de Vetores

Considere dois vetores quaisquer $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$.

Para realizarmos a soma dos vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ utilizamos o segmento orientado $C'D'$ equipolente ao segmento orientado CD de modo que a origem C' de $C'D'$ esteja na extremidade do segmento orientado AB , ou seja, em B . A soma $u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ é representada pelo segmento orientado AD' , conforme mostra a figura 6.

Figura 6 – Soma de vetores



Fonte: Autor

A seguinte definição está em consonância com Fernandes (2023, p.28).

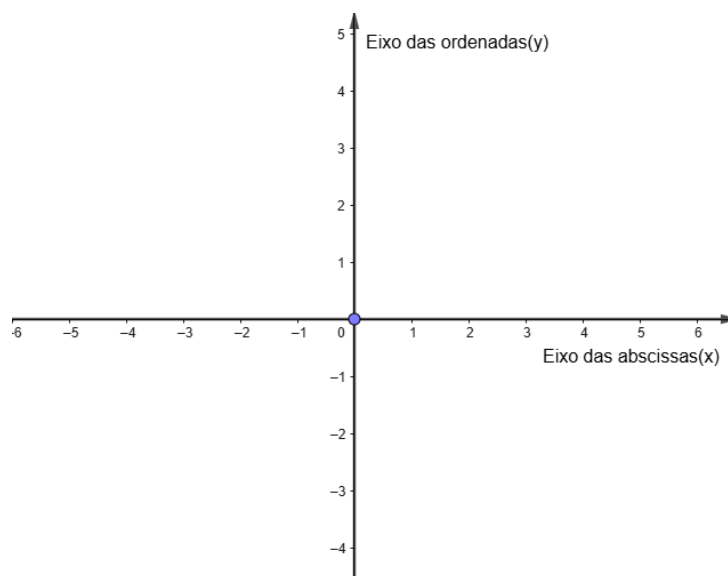
Definição 2.2.1. *Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e seus representantes AB e BC , respectivamente, então podemos escrever $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$. O vetor soma $u + v$ tem como representante o segmento AD' ; assim, escrevemos*

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{AD'}$$

2.3 O Plano Cartesiano

A introdução de um sistema de coordenadas cartesianas permite associar cada ponto do plano a um par ordenado de números reais, viabilizando o tratamento algébrico de propriedades geométricas. O plano cartesiano é formado por duas retas numéricas perpendiculares que se cruzam em um ponto central, conhecido como origem $(0, 0)$. A numeração dessas retas segue a lógica da reta real, onde o eixo horizontal, conhecido como eixo das abscissas ou eixo x , possui valores que crescem positivamente para a direita e decrescem negativamente para a esquerda a partir do zero. De maneira análoga, o eixo vertical, chamado de eixo das ordenadas ou eixo y , apresenta sua numeração positiva para cima e negativa para baixo. A reta horizontal é denominada eixo X (ou eixo das abscissas) e a reta vertical é o eixo Y (ou eixo das ordenadas).

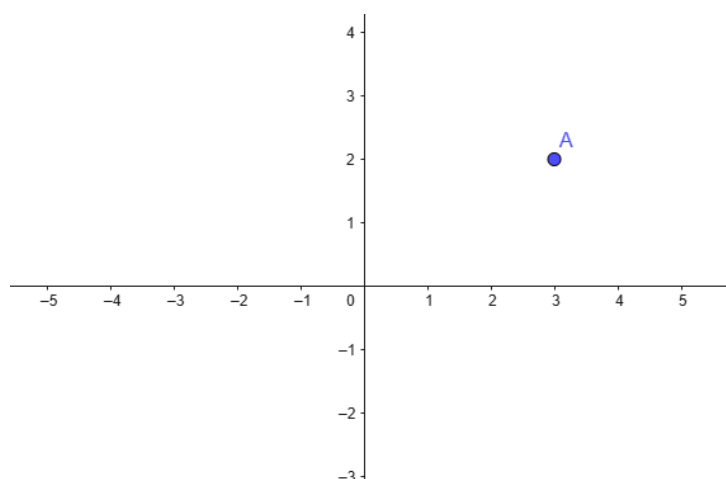
Figura 7 – O plano cartesiano



Fonte: Autor

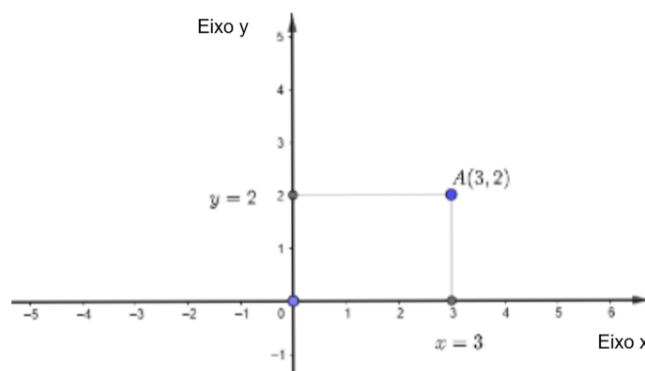
O *Plano Cartesiano* é uma ferramenta fundamental na matemática, especialmente na geometria analítica, pois permite a representação visual e a localização de pontos e figuras.

Observe o ponto *A* no plano cartesiano da Figura 8. Como determinar as coordenadas do ponto *A*?

Figura 8 – Um ponto *A* em destaque no Plano Cartesiano

Fonte: Autor

Para determinar a localização do ponto *A* no plano, utilizamos como referência os dois eixos: obtenha a distância x , do ponto *A* até o eixo vertical (Eixo *Y*). Em seguida obtenha a distância y , do ponto *A* até o eixo horizontal (Eixo *X*). A localização do ponto *A* será representada pelo par ordenado (x, y) . Como um caso particular, considere o ponto *A* da Figura 9.

Figura 9 – Ponto A com coordenadas $x = 3$ e $y = 2$.

Fonte: Autor

A distância do ponto A até o eixo vertical é $x = 3$ e a distância do ponto A até o eixo horizontal é $y = 2$. Logo o ponto A fica determinado pelo par ordenado $(3, 2)$ e escrevemos $A(3, 2)$ e, em alguns casos, $A = (3, 2)$.

Por outro lado, um par ordenado (x, y) pode ser identificado por um ponto no plano. Esse ponto é o ponto tal que a distância do ponto até o eixo vertical é x e a distância do ponto até eixo horizontal é y . Deste modo ficam identificados biunivocamente o conjunto de pares ordenados de números reais e o plano cartesiano. Para fins práticos, os dois são considerados um só. Usamos a notação $\mathbb{R}^2$ para o plano cartesiano. Simbolicamente temos

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

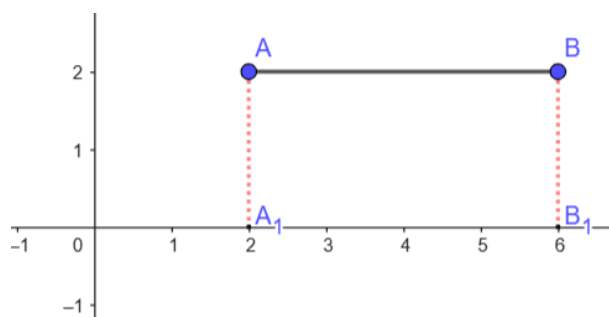
A compreensão do plano cartesiano é indispensável para o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas.

2.4 Distância entre dois pontos

De acordo com lezzi (2013), para compreendermos como se mede a distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ no plano, precisamos observar como o segmento que os une se comporta em relação aos eixos cartesianos. Essa análise não é feita de forma única, ela depende da inclinação do segmento AB , o que nos leva a três situações possíveis, vamos usar a notação $\overline{AB} = d(AB)$. Segue que:

- **Quando o segmento é horizontal:** Se os pontos possuem a mesma altura (ordenada), a distância é simplesmente o "espaço" entre eles no eixo x , obtido pela diferença $d(A, B) = |x_2 - x_1|$.

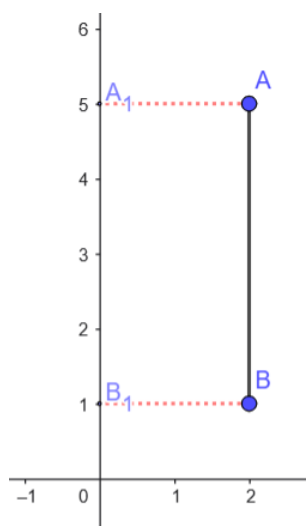
Figura 10 – Distância com segmento horizontal



Fonte: Autor

- **Quando o segmento é vertical:** Se os pontos estão na mesma linha vertical (abscissa), a distância é a diferença entre suas alturas no eixo y , ou seja, $d(A, B) = |y_2 - y_1|$.

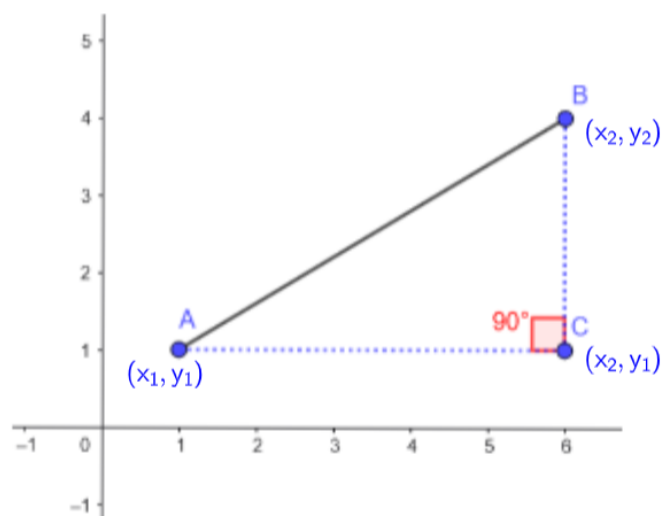
Figura 11 – Distância com segmento vertical



Fonte: Autor

- **Distância com segmento inclinado (Oblíquo):** Aqui, o segmento não segue a direção de nenhum dos eixos. Diante disso, projetamos os pontos e formamos um triângulo retângulo auxiliar.

Figura 12 – Distância com segmento inclinado



Fonte: Autor

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Na figura 11 o triângulo ABC é retângulo em C , pelo teorema de Pitágoras:

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Compreender a métrica que fornece a distância entre dois pontos é fundamental para o estudo das transformações geométricas. Afinal, muitas dessas operações baseiam-se justamente na preservação ou na alteração controlada dessas distâncias para movimentar e deformar figuras no plano.

A seguir, passamos ao estudo das transformações geométricas.

2.5 Transformações geométricas

Em sua essência, uma transformação geométrica plana é uma aplicação que associa pontos de um plano a outros pontos, resultando em uma mudança de posição, orientação ou tamanho da forma original.

As transformações geométricas que iremos estudar são as reflexões, as translações, as rotações, as homotetias e as composições entre elas.

No conjunto das transformações geométricas, as isometrias (reflexão, translação e rotação) assumem um papel fundamental por preservarem as distâncias e os

ângulos. Essas operações asseguram que a forma e o tamanho da figura original permaneçam inalterados, garantindo a congruência entre o objeto e sua imagem.

Definição 2.5.1. *Uma isometria é uma transformação geométrica $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva a distância entre quaisquer dois pontos do plano, isto é, se $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$ então,*

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) \quad (2.2)$$

Exemplo 2.5.1. *Um exemplo simples de isometria é a transformação geométrica T que desloca um ponto (x, y) duas unidades na direção horizontal e no sentido da esquerda para a direita. Isso significa que T acrescenta duas unidades à ordenada x e inaltera a ordenada y , ou seja,*

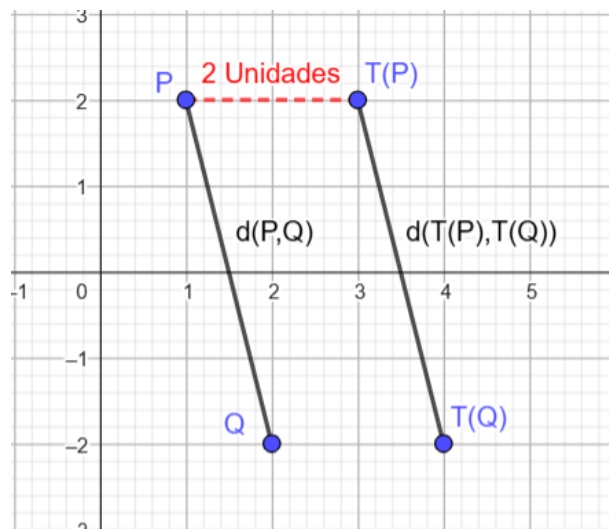
$$T(x, y) = (x + 2, y).$$

Note que, dados $P(x, y)$ e $Q(z, w)$, temos $T(P) = (x + 2, y)$, $T(Q) = (z + 2, w)$. Logo,

$$d(T(P), T(Q)) = \sqrt{[(z + 2) - (x + 2)]^2 + (w - y)^2} = \sqrt{(z - x)^2 + (w - y)^2} = d(P, Q).$$

Portanto, T é uma isometria, como ilustra a figura 13

Figura 13 – Deslocamento horizontal do segmento PQ



Fonte: Autor

Exemplo 2.5.2. *Veremos agora um exemplo de uma transformação que não é uma isometria. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma um ponto (x, y) no ponto $(2x, 2y)$, ou seja, essa transformação dobra os valores das coordenadas de um ponto. Em termos mais precisos $T(x, y) = (2x, 2y)$. Dados os pontos $P(x, y)$ e $Q(z, w)$, temos que*

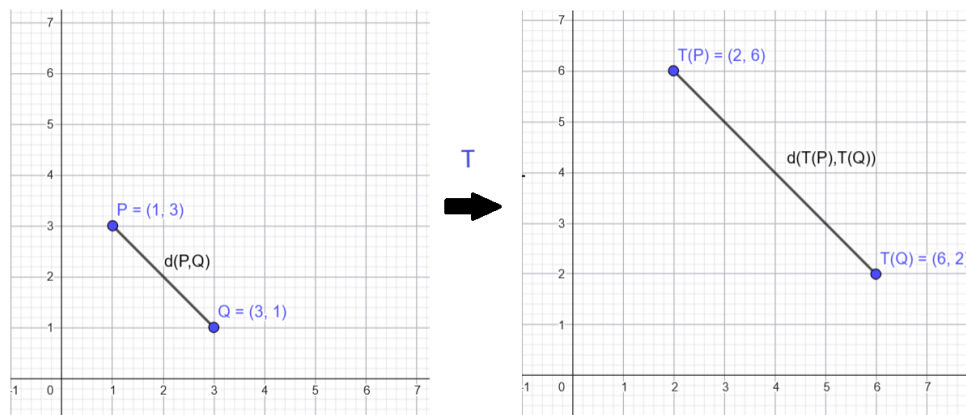
$$d(P, Q) = \sqrt{(z - x)^2 + (w - y)^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(T(P), T(Q)) &= \sqrt{(2z - 2x)^2 + (2w - 2y)^2} \\ &= \sqrt{[2(z - x)]^2 + [2(w - y)]^2} \\ &= 2\sqrt{(z - x)^2 + (w - y)^2} \\ &= 2d(P, Q). \end{aligned}$$

Neste exemplo, fica claro que $d(P, Q) \neq d(T(P), T(Q))$. Logo, T não é uma isometria, como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Transformação não isométrica



Fonte: Autor

Diferentemente das isometrias, as homotetias preservam a forma e os ângulos da figura, mas alteram suas dimensões por meio de um fator de escala. Assim, embora a figura imagem seja semelhante à figura original, suas distâncias são multiplicadas por uma constante, podendo ocorrer ampliação ou redução da figura.

2.5.1 Reflexão

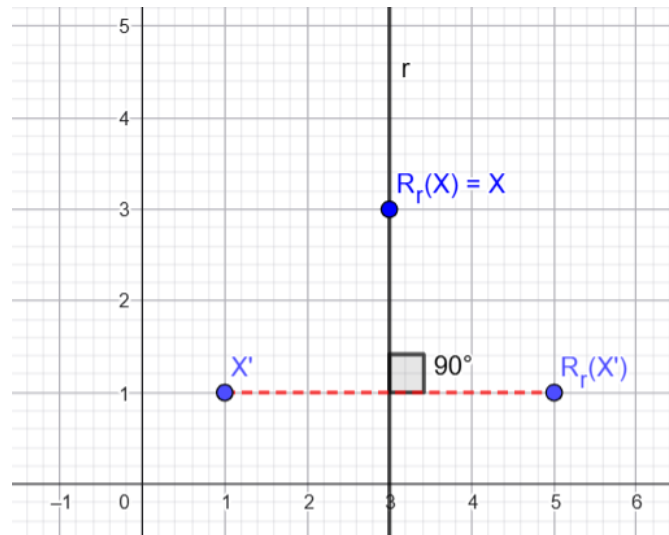
A reflexão é uma transformação geométrica isométrica que associa cada ponto do plano a uma imagem espelhada em relação a uma reta fixa, denominada eixo de reflexão. Por sua natureza isométrica, essa operação preserva as distâncias entre os pontos e as medidas dos ângulos, garantindo que a figura refletida seja congruente à original, embora apresente uma inversão em sua orientação.

Segundo Lima (1977), temos a seguinte definição de reflexão em torno de uma reta:

Definição 2.5.2. *Seja r uma reta no plano. A reflexão em torno da reta r é a aplicação $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r .*

Recordamos que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio. Portanto, a imagem X' é construída de modo que o segmento XX' é perpendicular à reta r , e a distância de X à reta r é igual à distância de X' à reta r .

Figura 15 – Representação geométrica de uma reflexão no plano



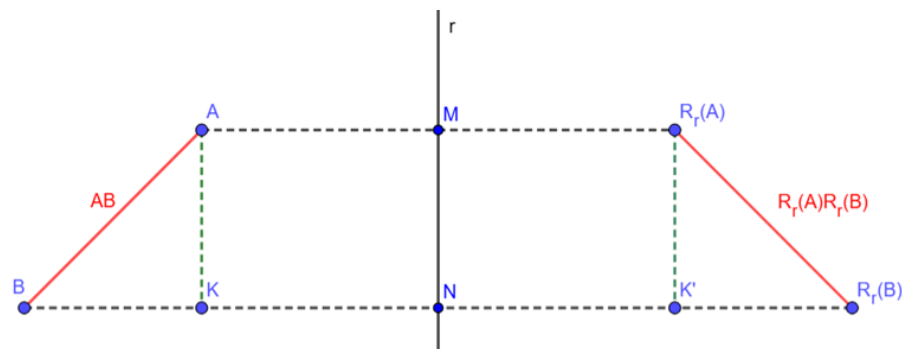
Fonte: Autor

Proposição 2.5.1. *Seja $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$ a reflexão em torno da reta r . Para quaisquer pontos $A, B \in \Pi$, tem-se:*

$$R_r(A)R_r(B) \equiv AB.$$

Demonstração. Considere Figura 16 que ilustra os pontos A e B , suas imagens $R_r(A)$ e $R_r(B)$ após a reflexão sobre o eixo r , e as projeções perpendiculares desses pontos sobre linhas auxiliares. Para a análise, são formados triângulos retângulos cujas hipotenusas são os segmentos AB e $R_r(A)R_r(B)$.

Figura 16 – A reflexão é uma isometria



Fonte: Autor

Primeiramente, pela definição de reflexão, a distância de um ponto ao eixo de reflexão é preservada. Assim, a distância horizontal do ponto A ao eixo r ,

denotada por AM , é igual à distância horizontal de sua imagem $R_r(A)$ ao eixo r , ou seja, $AM = MR_r(A)$. Analogamente, para o ponto B , temos $BN = NR_r(B)$.

Para aplicar o Teorema de Pitágoras, precisamos determinar os comprimentos dos catetos dos triângulos retângulos formados. No triângulo retângulo associado ao segmento original AB , os catetos são AK (vertical) e KB (horizontal). No triângulo retângulo associado ao segmento refletido $R_r(A)R_r(B)$, os catetos são $R_r(A)K'$ (vertical) e $K'R_r(B)$ (horizontal).

O cateto horizontal KB é a diferença absoluta das distâncias horizontais dos pontos A e B ao eixo de reflexão, ou seja, $KB = |BN - AM|$. De forma análoga, o cateto horizontal $K'R_r(B)$ é dado por $K'R_r(B) = |NR_r(B) - MR_r(A)|$. Substituindo as igualdades de preservação de distância ao eixo ($AM = MR_r(A)$ e $BN = NR_r(B)$), obtemos $K'R_r(B) = |BN - AM|$. Consequentemente, $KB = K'R_r(B)$.

Os catetos verticais AK e $R_r(A)K'$ representam a distância vertical entre as projeções dos pontos nas linhas horizontais, que é equivalente ao segmento MN na figura. Portanto, $AK = R_r(A)K' = MN$.

Com os comprimentos dos catetos definidos, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

Para o segmento original AB :

$$AB^2 = AK^2 + KB^2$$

Para o segmento refletido $R_r(A)R_r(B)$:

$$(R_r(A)R_r(B))^2 = (R_r(A)K')^2 + (K'R_r(B))^2$$

Uma vez que os catetos correspondentes são iguais ($AK = R_r(A)K'$ e $KB = K'R_r(B)$), segue-se que as hipotenusas também devem ser iguais. Assim, $AB^2 = (R_r(A)R_r(B))^2$, o que implica

$$AB = R_r(A)R_r(B).$$

□

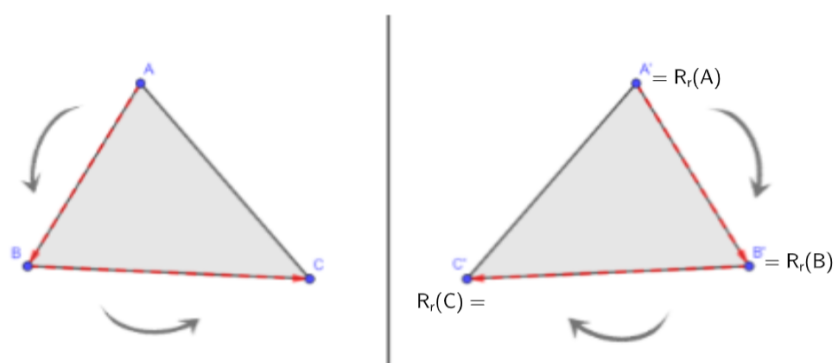
Da Proposição 2.5.1 temos imediatamente os seguinte corolário.

Corolário 2.1. *A reflexão em relação à reta r é uma isometria.*

Um fato geométrico interessante sobre a reflexão R_r é que ela inverte a orientação de um triângulo. Se os vértices A, B e C do triângulo original estão dispostos no sentido horário ($A \rightarrow B \rightarrow C$), seus correspondentes A', B' e C' na figura refletida estarão dispostos no sentido anti-horário ($A' \rightarrow B' \rightarrow C'$).

Exemplo 2.5.3. Considere a figura 17 com três pontos não colineares, A , B e C . Se o trajeto de A para C , passando por B , for percorrido no sentido anti-horário na figura original, esse mesmo trajeto será percorrido no sentido horário na figura refletida sobre uma reta.

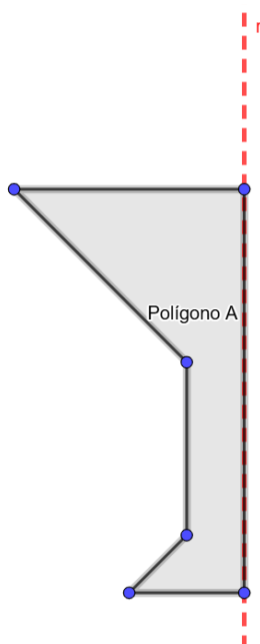
Figura 17 – Reflexão: Orientação dos vértices no triângulo



Fonte: Autor

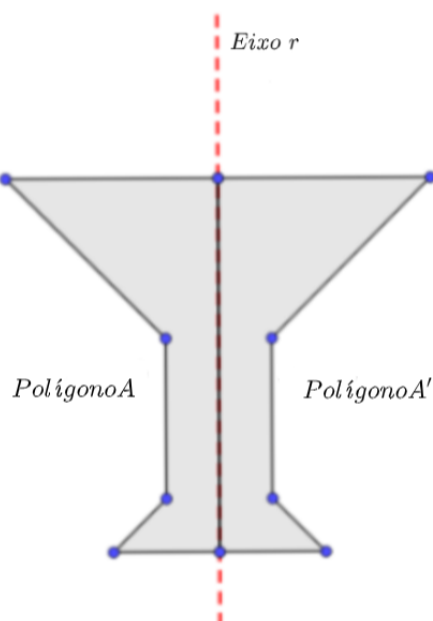
Para entender como a reflexão gera simetria, observe a figura 18, que apresenta um polígono adjacente à reta r .

Figura 18 – Polígono A adjacente à reta r



Fonte: Autor

Ao realizarmos a reflexão do Polígono A em relação ao eixo r , a união da figura original com a sua imagem refletida gera um novo polígono, que é simétrico em relação ao eixo r .

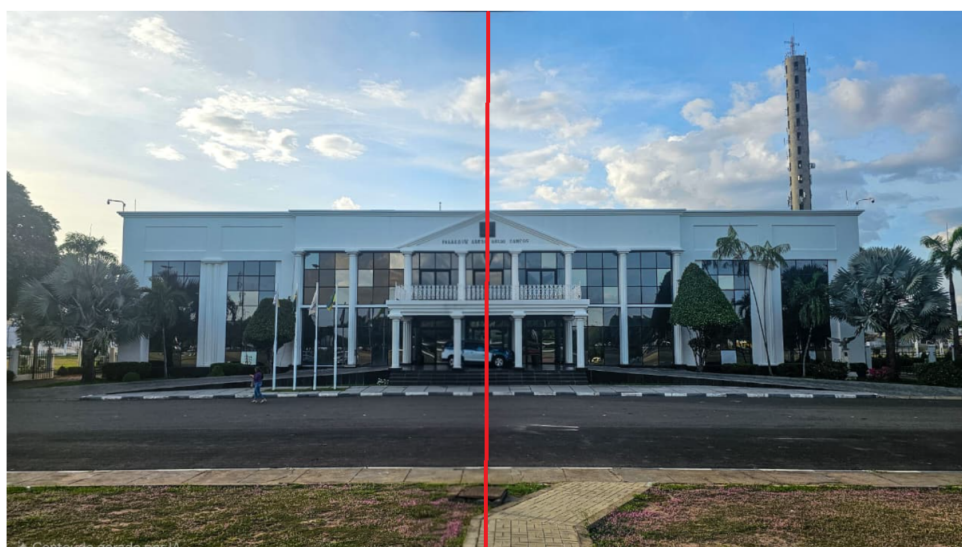
Figura 19 – Polígono simétrico em relação ao eixo r , obtido via reflexão do polígono A 

Fonte: Autor

Neste caso, a reta r passa a ser o eixo de simetria da nova figura composta. Dizemos, então, que a estrutura resultante possui simetria de reflexão, pois uma metade é o reflexo exato da outra.

Esse conceito matemático é amplamente aplicado para criar sensação de equilíbrio e harmonia nas construções. Um exemplo clássico de simetria de reflexão pode ser observado na arquitetura institucional da cidade de Boa Vista, como por exemplo, na fachada do Palácio Senador Hélio Campos.

Figura 20 – Simetria no Palácio Senador Hélio Campos em Boa Vista-RR



Fonte: Adaptado de MATTIONI (2026)

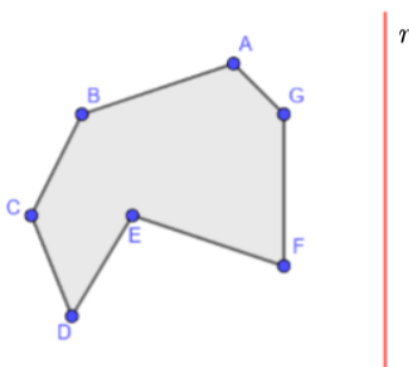
A estrutura principal do edifício exibe uma notável simetria vertical, onde um eixo imaginário que passa pelo centro do pórtico de entrada divide a construção em duas metades que funcionam como imagens espelhadas uma da outra. Essa característica, evidente na disposição das colunas e das superfícies envidraçadas, não apenas confere equilíbrio à edificação, mas também demonstra como a simetria de reflexão é utilizada para criar composições que transmitem estabilidade e harmonia estética. A percepção dessa organização geométrica é imediata, contribuindo significativamente para a sobriedade e o impacto visual do monumento arquitetônico.

Na reflexão em relação a uma reta, cada ponto é transformado em seu simétrico em relação a essa reta. Uma figura geométrica refletida pode ser perfeitamente sobreposta à original tomando-se essa reta como referência. Assim, a forma e o tamanho da figura são mantidos, mas ela aparece "invertida", como em um espelho.

Vamos aplicar esses conceitos na prática. Veja abaixo como construir a imagem refletida de uma figura, mantendo a proporcionalidade e a simetria em relação a uma reta r .

Exemplo 2.5.4. *Seja o polígono $ABCDEFG$ e a reta r .*

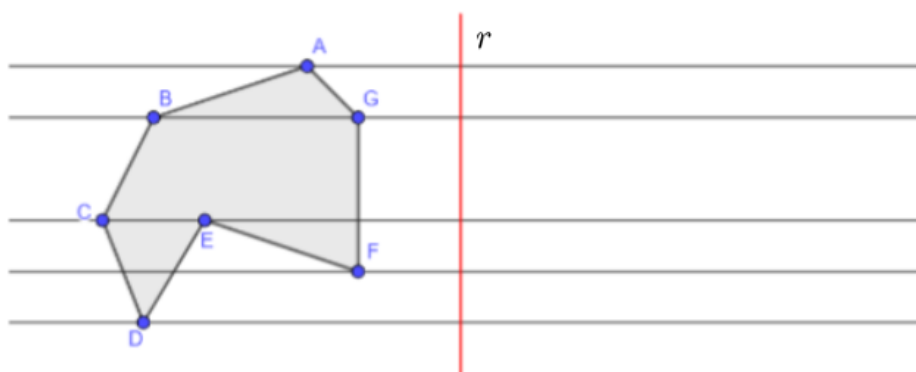
Figura 21 – Polígono $ABCDEFG$ e reta r



Fonte: Autor

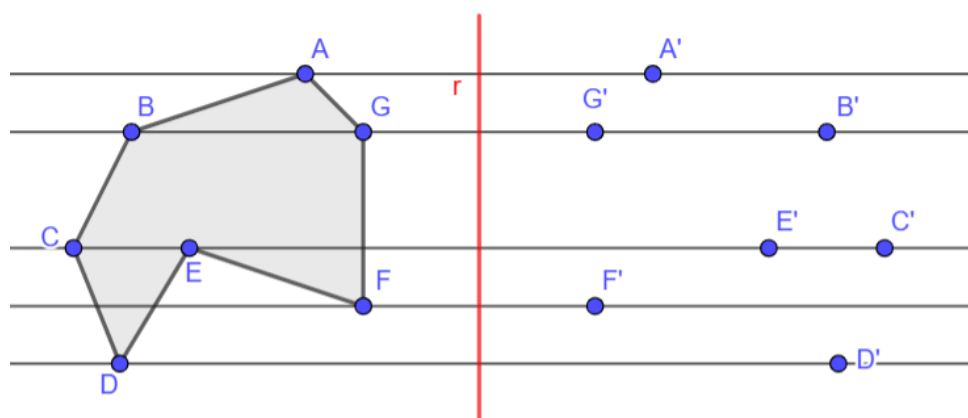
Vamos obter um polígono simétrico ao polígono da figura 21, em relação a reta r indicada. Para isso, podemos utilizar régua e esquadro. Acompanhe a construção:

1º Passo: Com uma régua e esquadro, construímos retas perpendiculares à reta r passando pelos vértices do polígono.

Figura 22 – Polígono $ABCDEFGG$ e retas horizontais

Fonte: Autor

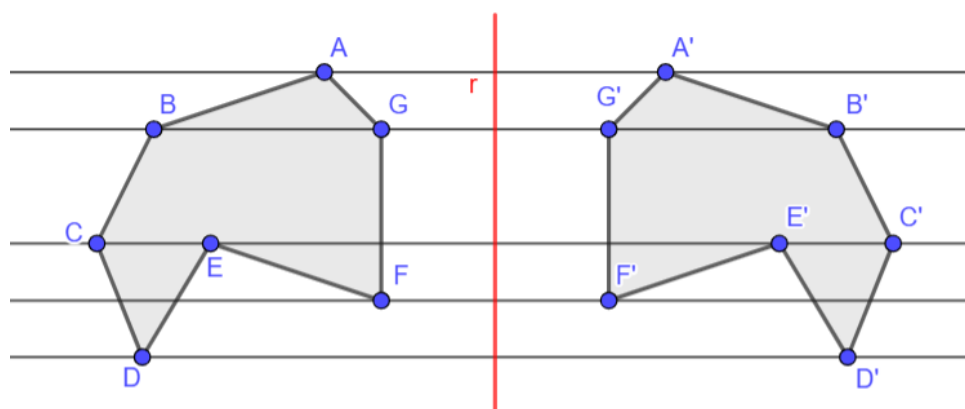
2º Passo: Medimos a distância do ponto A até a reta r e, do lado direito da reta r , marcamos mesma distância na reta perpendicular a r que passa pelo ponto A , obtendo o ponto A' . Repetindo o mesmo procedimento para os pontos B, C, D, E, F e G , obtendo os pontos B', C', D', E', F' e G' , respectivamente.

Figura 23 – Polígono $ABCDEFGG$ e pontos

Fonte: Autor

3º Passo: Ligando os ponto A', B', C', D', E', F' e G' , como mostra a figura 24, obtemos o polígono simétrico a $ABCEDFG$ em relação à reta r .

Figura 24 – Polígonos Simétricos



Fonte: Autor

A construção apresentada mostra que a reflexão não apenas inverte a posição da figura, mas preserva rigorosamente suas propriedades métricas por meio da simetria. Essa correspondência ponto a ponto, mediada pelo eixo r , confirma que a distância e a forma original permanecem intactas, validando a reflexão como uma transformação geométrica isométrica.

2.5.2 Reflexão no plano cartesiano

Podemos estudar as reflexões no plano cartesiano do ponto de vista algébrico. A seguir mostramos alguns casos particulares:

- Reflexão em relação ao eixo x :

$$R(x, y) = (x, -y).$$

Em particular, $R(-2, 3) = (-2, -3)$

Perceba que o ponto não se moveu para os lados, mantendo a sua posição original na horizontal (o valor de x não muda). A única alteração ocorre no sentido vertical, o que faz o sinal de y se inverter.

- Reflexão em relação ao eixo y :

$$R(x, y) = (-x, y).$$

Em particular, $R(-2, 3) = (2, 3)$

No plano cartesiano o ponto mantém rigorosamente a mesma altura (o valor de y fica intacto), enquanto a sua posição horizontal é espelhada para o lado oposto, invertendo o sinal de x .

- Reflexão em relação ao eixo $y = x$:

$$R(x, y) = (y, x)$$

Em particular, $R(-2, 3) = (3, -2)$. A reta $y = x$ funciona como um espelho inclinado na diagonal, cortando o plano perfeitamente ao meio. Esse tipo de espelhamento provoca uma inversão, o que era largura passa a ser altura, e o que era altura passa a ser largura. Por essa razão, não precisamos nos preocupar em alterar sinais matemáticos; a regra consiste apenas em trocar a posição dos números, transformando o valor de x em y e o de y em x .

2.5.3 Translação

A transformação geométrica translação pode ser compreendida como o deslocamento de todos os pontos de uma figura no plano seguindo uma mesma direção, sentido e distância. Nessa transformação, cada ponto P é levado a um novo ponto P' , de modo que o deslocamento sofrido por qualquer ponto da figura seja idêntico.

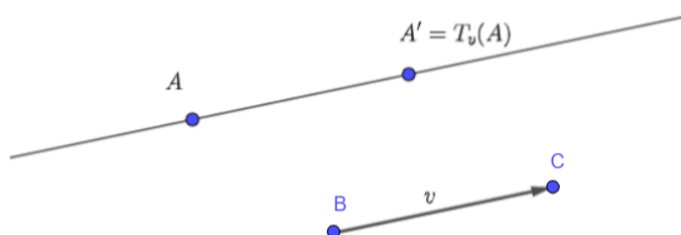
Como resultado, a figura resultante mantém as mesmas características métricas e a mesma orientação da original, apenas em uma nova posição no plano. Essa ideia é formalizada na definição a seguir:

Definição 2.5.3. *A translação pelo vetor v (ou pelo segmento orientado AB) é a transformação geométrica que associa cada ponto X do plano a um ponto imagem X' , de modo que o segmento orientado XX' possua o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\vec{v}$.*

Usaremos a notação T_v para a translação por um vetor v . Assim, a translação $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$ associa um ponto X ao seu transladado $X' = T_v(X)$.

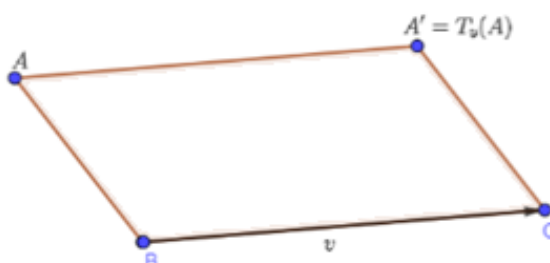
Observe a Figura 25, onde temos um ponto A e um vetor $v = \overrightarrow{BC}$. A Definição 2.5.3 pede que seja considerada a reta que passa pelo ponto A e que tenha mesma direção do vetor v . O vetor v indica uma direção na qual o vetor transladado $T_v(A)$ estará.

O ponto transladado $A' = T_v(A)$ será marcado na reta indicada no mesmo sentido do vetor v de modo que o segmento AA' tenha mesmo comprimento do vetor v .

Figura 25 – Descrição do ponto transladado $A' = T_v(A)$ 

Fonte: Autor

Para uma translação definida pelo vetor $v = \overrightarrow{BC}$, a condição $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ estabelece que os segmentos AA' e BC são paralelos, possuem o mesmo sentido e comprimentos idênticos. Essa equivalência vetorial implica que, desde que o ponto X não pertença à reta que contém o vetor v , o quadrilátero formado pelos vértices desses vetores constitui um **paralelogramo**. Assim, a estrutura do paralelogramo serve como a garantia geométrica de que a translação preserva integralmente o comprimento e a direção do movimento original em qualquer ponto do plano.

Figura 26 – Paralelogramo $AA'BC$ 

Fonte: Autor

A transformação geométrica Translação é uma isometria, como mostramos a seguir:

Proposição 2.5.2. *Sejam X e Y dois pontos quaisquer do plano e sejam X' e Y' suas respectivas imagens por uma translação $T_{\vec{v}}$. Então, os segmentos XY e $X'Y'$ são congruentes, ou seja,*

$$XY \equiv X'Y'$$

Demonstração. Para demonstrar que a translação preserva o comprimento dos segmentos de forma puramente sintética, devemos analisar a disposição geométrica dos pontos em dois casos:

Caso 1: Os pontos X, Y, X' e Y' não são colineares.

Pela definição de translação, os segmentos orientados XX' e YY' possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido (ambos determinados pelo vetor de translação $\vec{v}$). Assim, temos que $XX' \parallel YY'$ e $XX' \equiv YY'$.

Um teorema clássico da geometria plana garante que se um quadrilátero possui um par de lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo. Logo, $XX'Y'Y$ é um paralelogramo. Por propriedade dos paralelogramos, os outros dois lados opostos também devem ser congruentes. Portanto, concluímos que:

$$X'Y' \equiv XY$$

Caso 2: Os pontos X, Y, X' e Y' são colineares.

Se os pontos são colineares, eles pertencem à mesma reta suporte r , que possui a direção do vetor $\vec{v}$. Sem perda de generalidade, suponha que X esteja à esquerda de Y na reta. Sem perda de generalidade, suponha que X esteja à esquerda de Y na reta, escolhida uma orientação.

Como X' e Y' são os deslocamentos de X e Y por uma mesma distância d no mesmo sentido, a medida do segmento total XY' pode ser expressa geometricamente de duas maneiras:

$$XY' = XY + YY'$$

$$XY' = XX' + X'Y'$$

Pela definição da transformação, sabemos que o deslocamento é constante para todos os pontos, logo $XX' = YY' = d$. Igualando as duas expressões, obtemos:

$$XY + d = d + X'Y'$$

Subtraindo a constante d de ambos os lados da equação, resta:

$$XY = X'Y' \implies XY \equiv X'Y'$$

Portanto, em ambos os casos, a translação preserva a medida do segmento entre quaisquer dois pontos. □

Temos imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 2.2. *Toda translação no plano é uma isometria.*

2.5.4 Translação no Plano Cartesiano

Definição 2.5.4. Seja $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ um vetor fixo. A **translação** pelo vetor $\vec{v}$ é a aplicação $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, a cada ponto P , associa o ponto $P + \vec{v}$, isto é,

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}.$$

Na Definição 2.5.4 sejam $P(x, y)$ e $v(a, b)$. Então

$$T_v(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b).$$

Exemplo 2.5.5. Seja o vetor de translação $v = (3, 2)$. A translação de um ponto genérico (x, y) pelo vetor v é dada por:

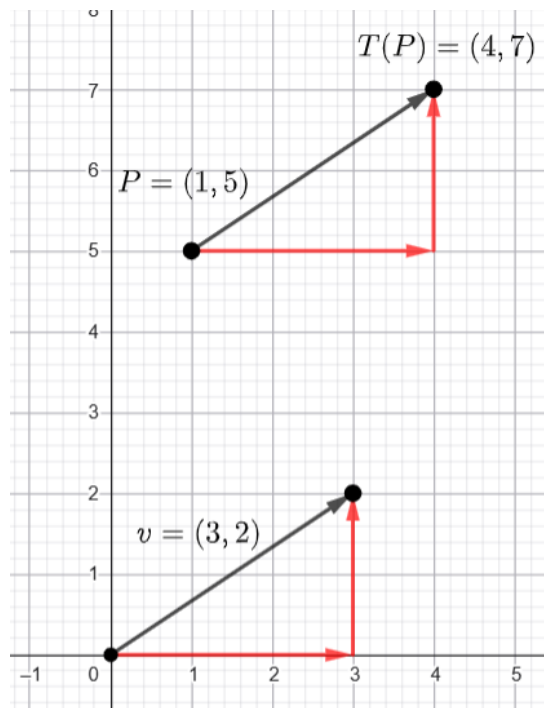
$$T_{\vec{v}}(x, y) = (x, y) + (3, 2) = (x + 3, y + 2).$$

Em particular, se $P(1, 5)$, então,

$$T_{\vec{v}}(1, 5) = (1 + 3, 5 + 2) = (4, 7)$$

Neste caso, todos os pontos do vetor são deslocados 3 unidades na direção do eixo x e 2 unidades na direção do eixo y , conforme mostra a Figura 27.

Figura 27 – Translação do ponto P através do vetor $v = (3, 2)$



Fonte: Autor

As obras do artista gráfico holandês M. C. Escher são exemplos notáveis da aplicação da translação, especialmente em suas tesselações e padrões repetitivos.

Em muitas de suas gravuras, Escher utiliza figuras que se encaixam perfeitamente umas nas outras, preenchendo o plano sem deixar lacunas ou sobreposições.

Figura 28 – Obra "Pegasus" de M.C. Escher



Fonte: Adaptado de Escher (1946)

Essas figuras são frequentemente transladadas em diferentes direções, criando um efeito visual de movimento contínuo e infinito. A habilidade de Escher em manipular a translação para criar composições complexas demonstra o potencial artístico e matemático dessa transformação: a repetição de um ladrilho (ou unidade mínima) preenche o plano sem deixar lacunas, resultando em um padrão geométrico contínuo e infinito.

Figura 29 – Obra "Dois Pássaros" de M.C. Escher



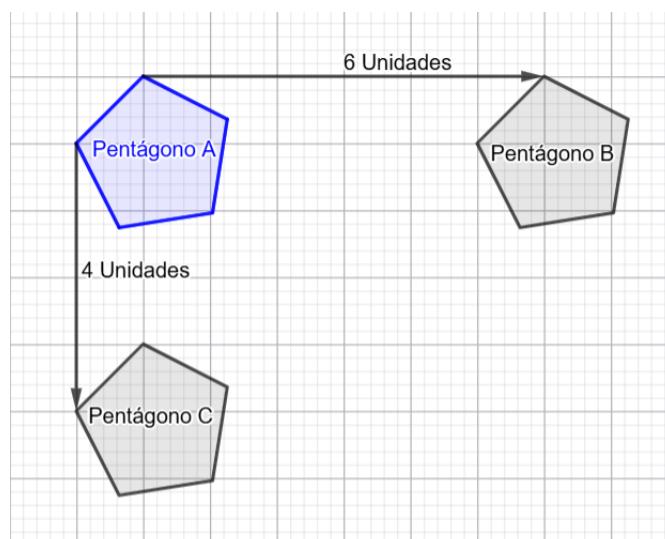
Fonte: Adaptado de Escher (1938)

É importante destacar que a translação é uma isometria, ou seja, uma transformação que preserva as distâncias e os ângulos entre os pontos da figura. Isso significa que a figura transladada é sempre congruente à figura original, mantendo sua forma e tamanho inalterados. A única característica que se modifica é a sua posição relativa no plano. Essa forma de transformação geométrica é amplamente observada em padrões repetitivos, como em frisos, azulejos, tecidos

e até mesmo em sequências de movimentos coreografados, evidenciando sua presença constante tanto em contextos artísticos quanto no cotidiano.

Exemplo 2.5.6. *Na malha quadriculada, temos três figuras com a mesma forma e tamanho.*

Figura 30 – Representação de Translações do Pentágono *A* (6 unidades à direita e 4 unidades para baixo)



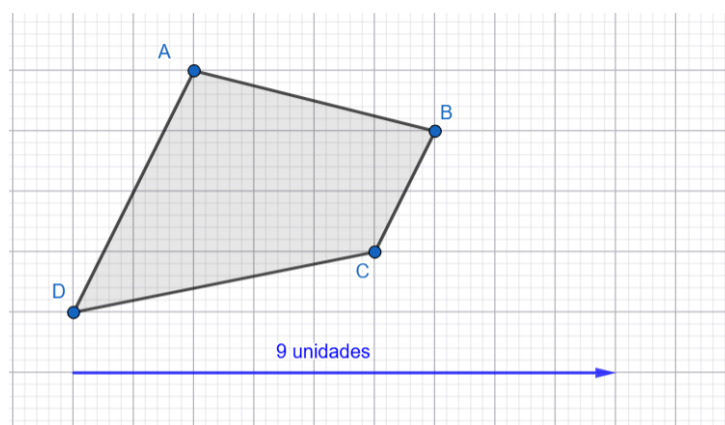
Fonte: Autor

O Pentágono B foi obtida deslocando cada ponto do Pentágono A, na direção horizontal, 6 unidades à direita, conforme o vetor.

Já o Pentágono C foi obtido deslocando cada ponto do Pentágono A, na direção vertical, 4 unidades para baixo, como indica o vetor.

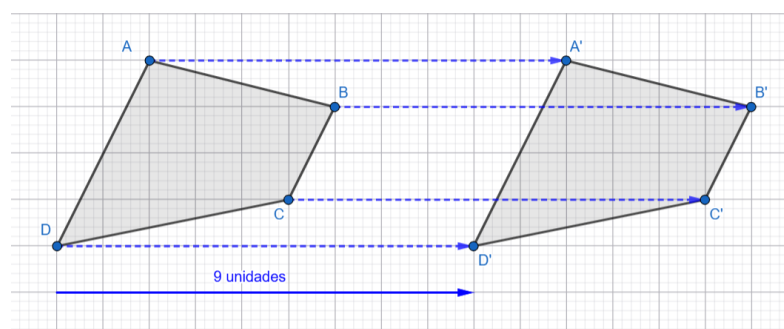
Para fazer uma translação de uma figura por um vetor, identificamos o comprimento(ou módulo), a direção e o sentido desse vetor. Depois, transportamos cada ponto da figura de acordo com essas informações do vetor.

Observe o quadrilátero *ABCD*:

Figura 31 – Polígono $ABCD$ 

Fonte: Autor

O vetor indica que o deslocamento terá uma distância de 9 unidades de quadradinhos de malha, direção horizontal e sentido para a direita.

Figura 32 – Polígono $ABCD$ transladado

Fonte: Autor

Assim, temos que deslocar cada ponto do quadrilátero $ABCD$ de acordo com as informações. Note que cada ponto do quadrilátero $ABCD$ foi deslocado seguindo a mesma distância, a mesma direção e o mesmo sentido do vetor, obtendo os pontos A' , B' , C' e D' . Unindo os pontos A' , B' , C' e D' por segmentos de reta, formamos o quadrilátero $A'B'C'D'$.

A simplicidade conceitual da translação, que se manifesta no mero deslocamento de uma figura, não diminui sua importância. Pelo contrário, essa característica a torna uma das transformações isométricas mais intuitivas e presentes em nosso cotidiano, desde a repetição de elementos em um padrão de papel de parede até o movimento de um veículo em linha reta. A compreensão da translação é, portanto, um passo fundamental para o entendimento de como as figuras se comportam no espaço e como podem ser manipuladas sem perder suas propriedades essenciais.

2.5.5 Rotação

A rotação representa outra forma fundamental de transformação geométrica, caracterizada pelo giro de uma figura em torno de um ponto fixo, conhecido como centro de rotação. Ao examinar as transformações isométricas, Lima (1977, p. 21) define a rotação no plano sob a seguinte perspectiva:

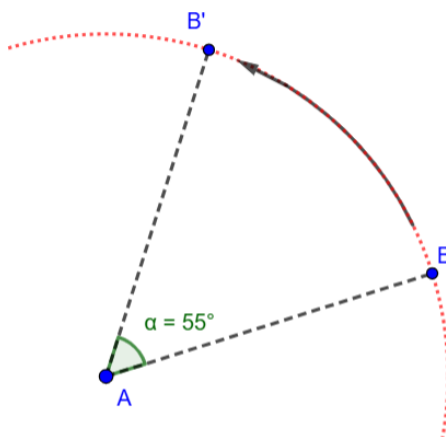
Definição 2.5.5. *Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = \widehat{AOB}$ um ângulo de vértice O . A rotação α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$ assim $\rho_{O,\alpha}(O) \rightarrow O$ e para todo ponto $X \neq O$ em π , $\rho_{O,\alpha}(X) \rightarrow X'$ é o ponto de Π tal que*

$$d(X, O) = d(X', O), \widehat{XOX'} = \alpha. \quad (2.3)$$

e o "sentido da rotação" de A para B é o mesmo de X para X' .

Exemplo 2.5.7. *A figura 33 ilustra uma rotação de um ponto B em torno da origem A .*

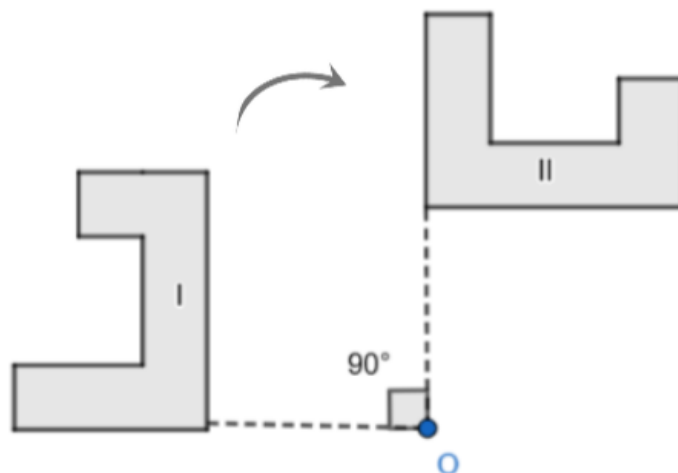
Figura 33 – Rotação do Ponto B em 55° em relação a origem A no sentido anti-horário



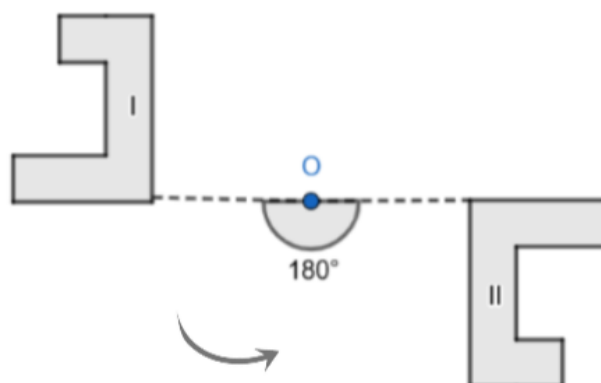
Fonte: Autor

Diferentemente da translação, que move a figura em linha reta, e da reflexão, que a espelha, a rotação altera a orientação da figura no espaço, mantendo, contudo, sua forma e tamanho inalterados.

Em cada imagem a seguir, a figura II foi obtida por uma rotação da figura I em relação ao ponto O, com diferentes arcos e sentidos.

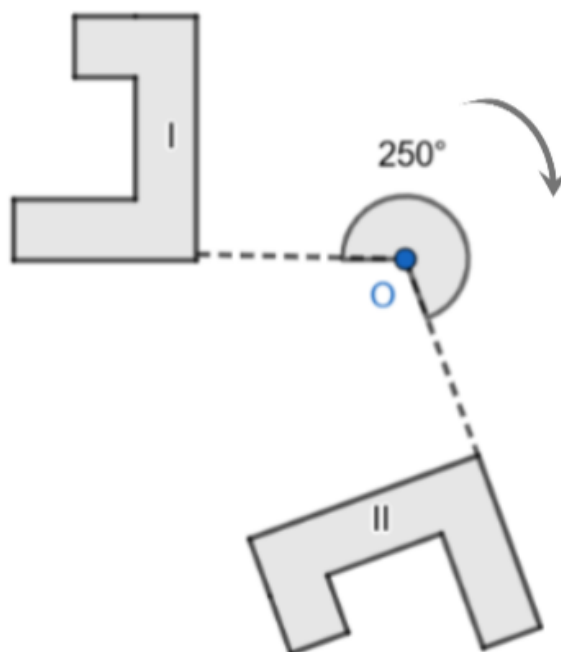
Figura 34 – Rotação horária de 90° do polígono I em torno da origem O.

Fonte: Autor

Figura 35 – Rotação anti-horária de 180° do polígono I em relação ao centro O.

Fonte: Autor

Figura 36 – Rotação horária de 250° do polígono I em relação ao ponto O.



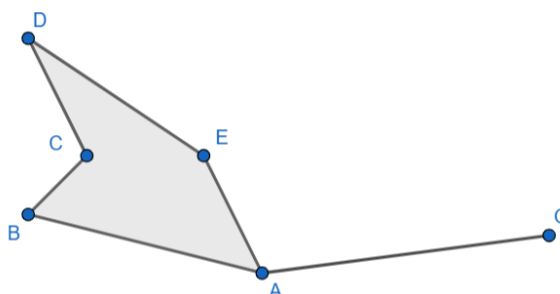
Fonte: Autor

2.5.6 Procedimentos para rotacionar uma figura usando compasso.

Construiremos uma figura simétrica ao pentágono $ABCDE$, por rotação de 120° , em relação ao ponto O, no sentido horário, utilizando régua, compasso e transferidor.

1. Traçamos um segmento de reta ligando o vértice A do pentágono ao ponto O.

Figura 37 – Pentágono $ABCDE$ e Ponto O como centro de rotação

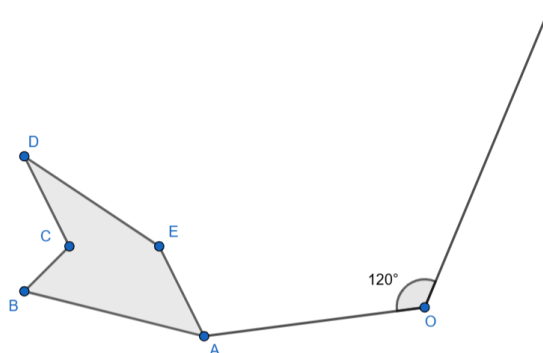


Fonte: Autor

2. Com o centro no transferidor em O, marcamos 120° , no sentido horário, em relação ao $\overline{AO}$.

3. Traçamos uma semirreta a partir de O , de acordo com o ângulo indicado anteriormente.

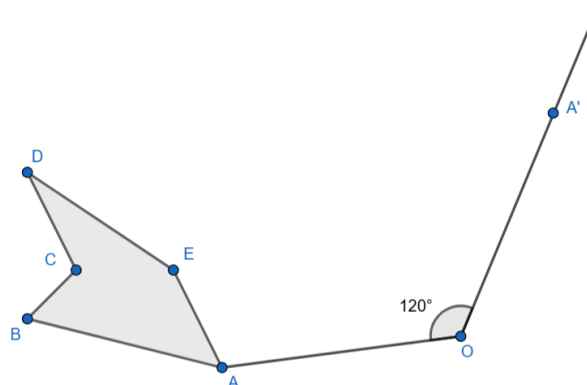
Figura 38 – Rotação de 120° do Pentágono $ABCDE$: Determinação da semirreta de origem O



Fonte: Autor

4. Com a ponta seca do compasso em O e abertura igual $\overline{AO}$, marcamos o ponto A' sobre a semirreta traçada.

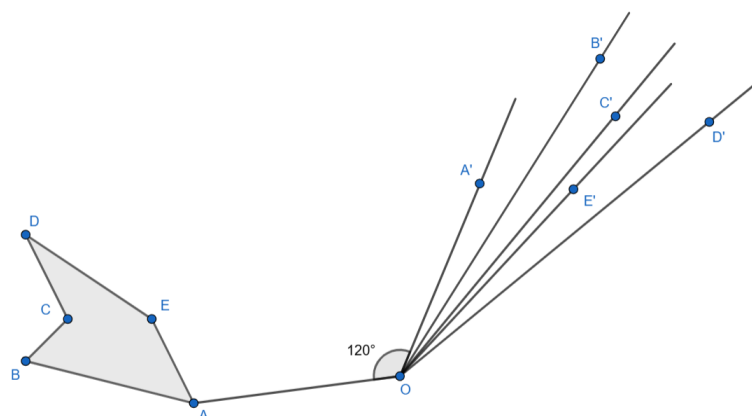
Figura 39 – Rotação de 120° do Pentágono $ABCDE$: Determinação do Ponto A'



Fonte: Autor

5. Traçamos as semirretas $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ e, em seguida marcamos os pontos B' , C' , D' e E' , da maneira análoga apresentadas nas etapas anteriores.

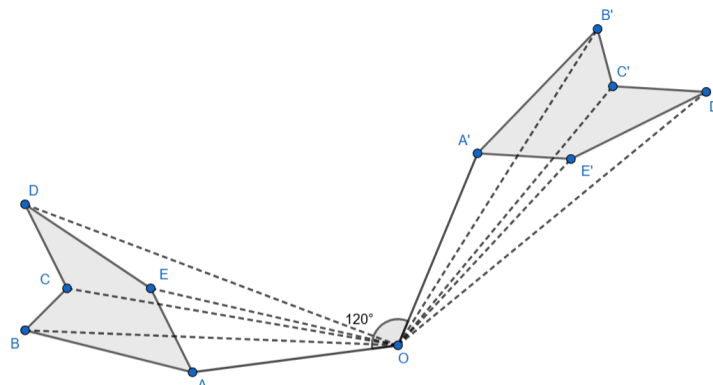
Figura 40 – Pontos Simétricos aos vértices do Pentágono $ABCDE$ por Rotação de 120° em torno de O



Fonte: Autor

6. Traçamos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$ e $\overline{E'A'}$, obtendo, assim, o pentágono simétrico a $ABCDE$ por rotação de 120° em relação ao ponto O no sentido horário.

Figura 41 – Rotação do Polígono $ABCDE$ por rotação de 120° em torno de O



Fonte: Autor

2.5.7 Relações no plano cartesiano

A seguir apresentamos a forma algébrica de algumas rotações no plano cartesiano; considerando o sentido anti-horário.

- Rotação de 90° : $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$
- Rotação de 180° : $R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)$
- Rotação de 270° : $R_{270^\circ}(x, y) = (y, -x)$

A obtenção destas expressões requer um estudo mais detalhado e envolve o uso de trigonometria. Para o leitor interessado, sugerimos a leitura das referências Steinbruch e Winterle (1987) e Boldrini et al. (1980).

Uma propriedade fundamental das transformações isométricas é apresentada na definição a seguir.

Proposição 2.5.3. *Sejam R_θ e R_α duas relações em torno da origem. A composição dessas duas relações é a relação $R_{\theta+\alpha}$, isto é $R_\theta \circ R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$*

Por exemplo, sabemos que

$$R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x) \text{ e } R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)$$

Então:

$$R_{90^\circ}(R_{180^\circ}(x, y)) = R_{90^\circ}(-x, -y) = (-(-y), -x) = (y, -x) = R_{270^\circ} = R_{(90^\circ+180^\circ)}.$$

Como veremos a seguir, a Rotação é uma isometria:

Proposição 2.5.4. *Sejam X e Y dois pontos quaisquer do plano e sejam X' e Y' suas respectivas imagens por uma rotação $\rho_{O,\alpha}$. Então, os segmentos XY e $X'Y'$ são congruentes, ou seja,*

$$XY \equiv X'Y'$$

Demonstração. Se pelo menos um dos pontos coincidir com o centro de rotação O , a propriedade é imediata por definição. Suponhamos, portanto, que $X \neq O$ e $Y \neq O$.

Pela definição da rotação, os segmentos que ligam os pontos e suas imagens ao centro O possuem comprimentos preservados, isto é:

$$OX \equiv OX' \text{ e } OY \equiv OY'$$

Além disso, as amplitudes dos ângulos de rotação para cada ponto individual são idênticas:

$$X\hat{O}X' = Y\hat{O}Y' = \alpha$$

Para comparar os comprimentos dos segmentos XY e $X'Y'$, analisamos as amplitudes dos ângulos $X\hat{O}Y$ e $X'\hat{O}Y'$ formados no centro. Sem perda de generalidade, suponha que a semirreta $\overrightarrow{OY}$ esteja no interior do ângulo $X\hat{O}X'$. A partir da aditividade de ângulos adjacentes, podemos decompor as aberturas angulares das seguintes maneiras:

$$X\hat{O}Y = X\hat{O}X' - Y\hat{O}X' = \alpha - Y\hat{O}X'$$

$$X'\hat{O}Y' = Y\hat{O}Y' - Y\hat{O}X' = \alpha - Y\hat{O}X'$$

Como ambas as expressões resultam no mesmo valor geométrico $\alpha - Y\hat{O}X'$, os ângulos centrais são congruentes:

$$X\hat{O}Y \equiv X'\hat{O}Y'$$

Considere agora os triângulos $\triangle XOY$ e $\triangle X'OY'$. Pelos resultados anteriores, estes triângulos possuem:

1. $OX \equiv OX'$ (Lado)
2. $X\hat{O}Y \equiv X'\hat{O}Y'$ (Ângulo)
3. $OY \equiv OY'$ (Lado)

Pelo caso de congruência Lado-Ângulo-Lado (LAL), conclui-se que os triângulos são congruentes:

$$\triangle XOY \equiv \triangle X'OY'$$

Como consequência direta da congruência dos triângulos, os lados homólogos opostos aos ângulos centrais devem possuir a mesma medida. Portanto:

$$XY \equiv X'Y'$$

□

Segue imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 2.3. *Toda rotação no plano é uma isometria.*

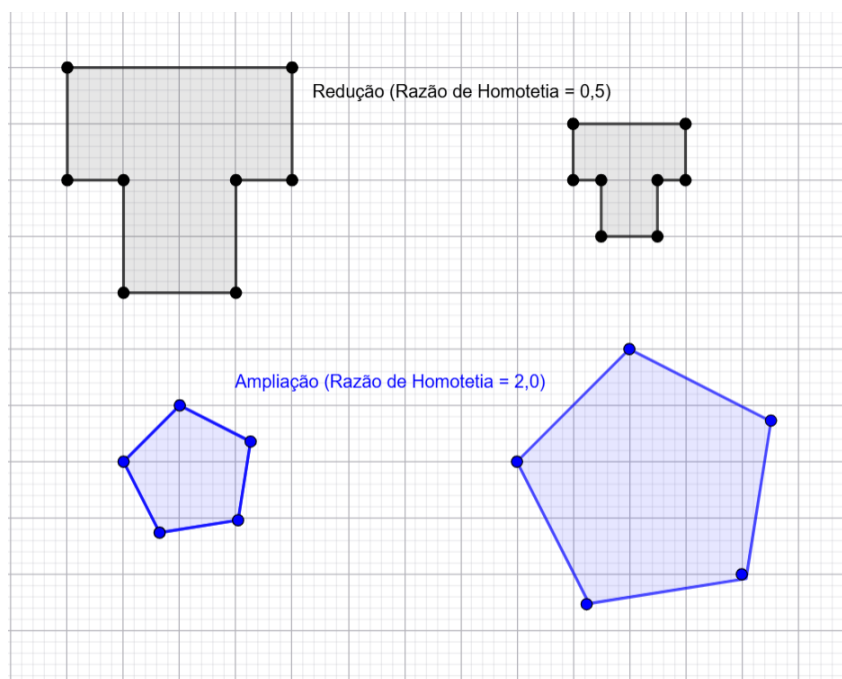
2.5.8 Homotetias: Ampliação ou Redução

No campo das transformações geométricas, a ampliação e a redução são processos conhecidos como homotetia. Essa transformação é definida a partir de um ponto fixo, chamado de centro, e uma razão k (um número real diferente de zero e de 1).

O resultado dessa transformação é uma figura semelhante à original, o que a torna um conceito fundamental para o estudo da semelhança de figuras. Ao expandir o estudo das transformações para além das isometrias, Lima (1977) estabelece que a homotetia pode ser compreendida sob a seguinte definição:

Definição 2.5.6. *Uma homotetia de centro O e razão k é a transformação do plano que a cada ponto P associa o ponto P' que pertence à semirreta OP e satisfaz $OP' = k \times OP$.*

Figura 42 – Processos de redução ($k = 0,5$) e ampliação ($k = 2,0$) em malha quadriculada.



Fonte: Autor

A principal característica da homotetia é a preservação da forma e dos ângulos, o que significa que a figura resultante é sempre semelhante à figura original. A razão de homotetia ou fator de escala, é o que determina se a figura será ampliada (se o valor absoluto da razão for maior que 1) ou reduzida (se o valor absoluto da razão estiver entre 0 e 1).

Como suporte fundamental para as demonstrações subsequentes, é necessário fundamentar as relações de paralelismo no plano à luz da geometria euclidiana clássica. Conforme exposto por Barbosa (2006), a semelhança de triângulos é uma ferramenta poderosa para estabelecer o paralelismo entre segmentos. Especificamente, o autor demonstra que se dois triângulos possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais (critério LAL), então os ângulos correspondentes remanescentes também serão congruentes.

No contexto da homotetia, essa fundamentação teórica é essencial: a igualdade dos ângulos correspondentes, formados por uma transversal que corta dois segmentos, garante que tais segmentos sejam paralelos. Complementando essa visão, Toolsie (1996) destaca como essa proporcionalidade se traduz na escala direta dos comprimentos. Com base nesses conceitos, apresentam-se a seguir as demonstrações formais.

Proposição 2.5.5. *Em uma homotetia, qualquer segmento de reta da figura original é paralelo ao seu segmento correspondente na figura transformada.*

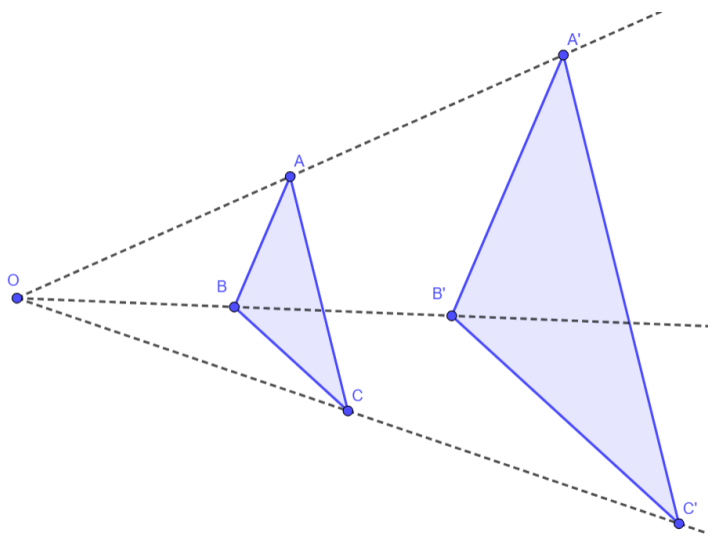
Definição 2.5.7. Sejam $H : \Pi \rightarrow \Pi$ uma homotetia de centro O e F uma figura que contém os segmentos paralelos AB e CD . Vamos mostrar que $H(AB) = A'B'$ é paralelo à $H(CD) = C'D'$.

Teorema 2.5.1. Seja H uma homotetia de centro O e razão k . Se $\overline{A'B'}$ é a imagem de um segmento $\overline{AB}$ por meio de H , então $AB \parallel \overline{A'B'}$ e $A'B' = |k| \cdot \overline{AB}$.

Demonstração do Paralelismo. Para demonstrar que o segmento original e sua imagem são paralelos, analisamos a geometria da transformação a partir do centro O .

Considere o triângulo ABC e sua imagem, o triângulo $A'B'C'$, obtida por meio de uma homotetia de centro O . Pela definição desta transformação, cada vértice da figura original e seu correspondente na figura transformada são colineares com o centro O . Ou seja, os conjuntos de pontos $\{O, A, A'\}$, $\{O, B, B'\}$ e $\{O, C, C'\}$ pertencem, respectivamente, às mesmas retas, como ilustra a Figura 44, como mostra a figura 43:

Figura 43 – Homotetia de centro O



Fonte: Autor

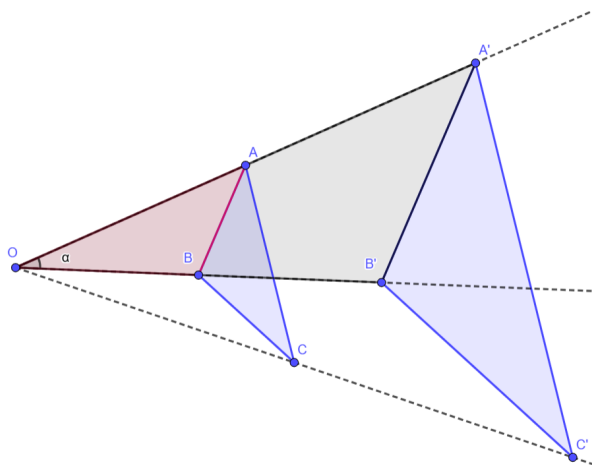
Além disso, a transformação nos garante que a razão entre as distâncias do centro aos pontos é constante, ou seja:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k.$$

Consideremos agora os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OA'B'$. Notamos que ambos compartilham o ângulo comum no vértice O ($\angle AOB$). Como os lados que formam esse ângulo são proporcionais conforme a razão k estabelecida acima, podemos afirmar, pelo critério **Lado-Ângulo-Lado (LAL)**, que os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OA'B'$ são semelhantes.

Exemplo 2.5.8. A figura 44 ilustra os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ pelo caso de semelhança (LAL), já que possuem lados proporcionais (Razão de homotetia) e um ângulo comum (α)

Figura 44 – Semelhança de triângulos estabelecida por homotetia de centro O .

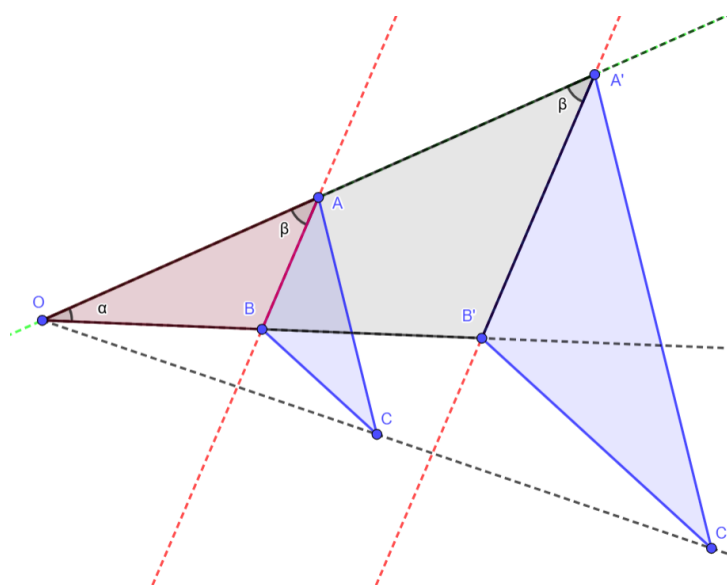


Fonte: Autor

Dessa semelhança, decorre que os ângulos correspondentes devem ser iguais, portanto, $\angle OAB = \angle OA'B'$. Se observarmos esses ângulos como ângulos correspondentes formados pelas retas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ intersectadas pela transversal $\overline{OA'}$, a igualdade entre eles prova que as retas são necessariamente **paralelas**. $\square$

A figura 45 mostra as retas paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ cortadas pela transversal $\overline{OA'}$.

Figura 45 – Homotetia: Retas paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e transversal $\overline{OA'}$



Fonte: Autor

Proposição 2.5.6. *Seja H uma homotetia de razão k . Se o segmento $A'B'$ é a imagem do segmento AB por meio de H , então a razão entre seus comprimentos é igual ao valor absoluto de k .*

Demonstração da Razão dos Comprimentos. Para verificar a relação entre os comprimentos dos segmentos, partimos da semelhança entre os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OA'B'$ já demonstrada.

Sabemos que em triângulos semelhantes a proporção entre os lados correspondentes é mantida. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

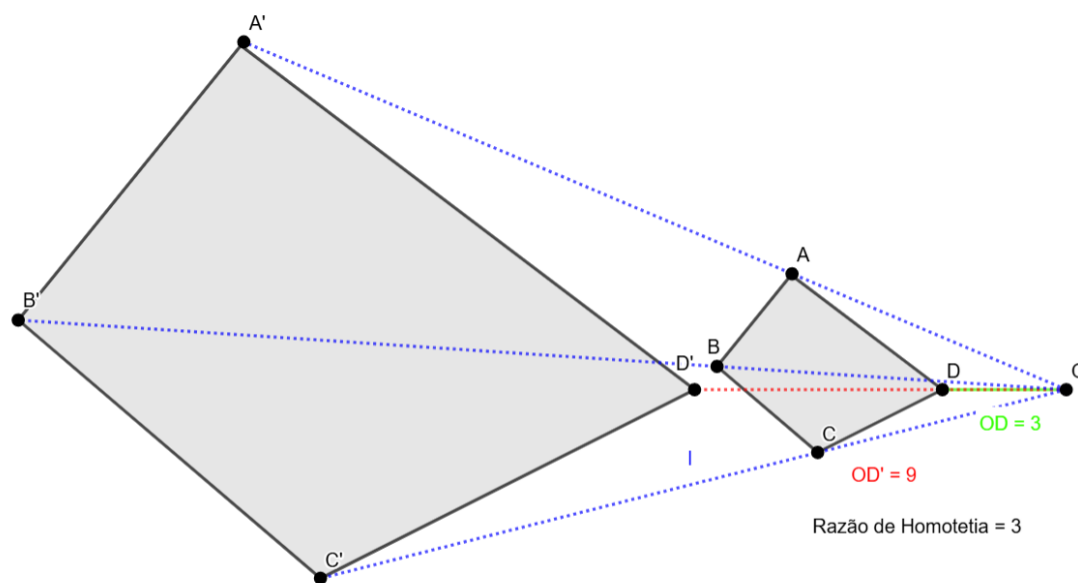
De acordo com a definição de homotetia, a razão $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ é o fator de escala k . Entretanto, como estamos tratando de comprimentos de segmentos — que são medidas geométricas sempre não-negativas — devemos considerar o valor absoluto da razão, $|k|$. Substituindo os termos, obtemos:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k| \implies \overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$$

Isso confirma que o comprimento do novo segmento é o produto do comprimento original pelo módulo do fator de escala. Note que, mesmo que k seja negativo (o que resultaria em uma imagem invertida), a magnitude do segmento $A'B'$ será sempre proporcional a $|k|$. $\square$

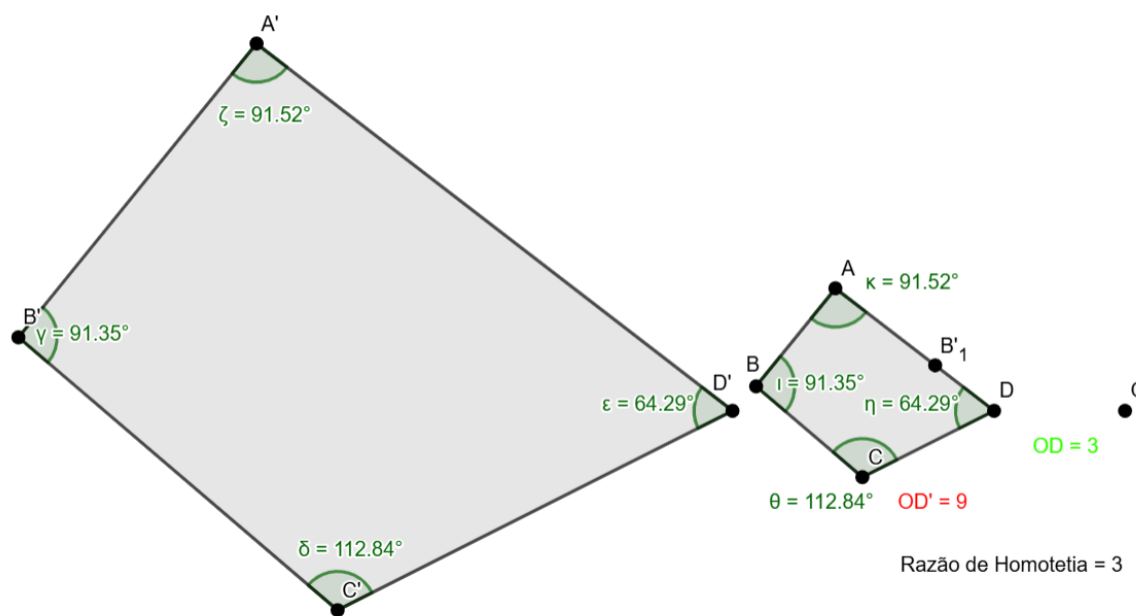
A fim de ilustrar a aplicação da Proposição 2.5.6 e as propriedades decorrentes da homotetia, apresentamos a seguir as Figuras 46 e 47. Nelas, observa-se que, para uma razão de homotetia $k = 3$, as distâncias ao centro e os comprimentos dos lados são triplicados, enquanto a amplitude dos ângulos internos permanece invariável.

Figura 46 – Homotetia: Alinhamento Entre Centro e Seus Pontos Correspondentes



Fonte: Autor

Figura 47 – Demonstração visual da conservação dos ângulos internos entre polígonos homólogos



Fonte: Autor

A transformação homotetia é amplamente utilizada em diversas áreas, como na cartografia, na arquitetura (para a criação de maquetes e plantas) e no design gráfico, onde a necessidade de redimensionar objetos mantendo suas proporções é

constante. O estudo da ampliação e redução é, portanto, essencial para que os alunos compreendam a relação entre escala e proporção.

2.6 Propriedades Preservadas

Para estabelecer uma distinção formal entre as transformações que preservam a forma e o tamanho das figuras, é essencial analisar as propriedades que cada uma mantém ou altera. As isometrias (translação, rotação e reflexão) são definidas pela preservação da distância entre quaisquer dois pontos, caracterizando-se como movimentos rígidos. Em contraste, a homotetia é uma transformação de semelhança que, embora preserve o paralelismo e a medida dos ângulos, altera a distância entre os pontos por um fator constante (k), resultando em ampliação ou redução.

Com o encerramento desta etapa, fica estabelecida a base teórica sobre as transformações geométricas — desde as isometrias (reflexão, translação e rotação) até a homotetia. Enquanto os capítulos anteriores focaram nas definições e no rigor matemático das formas e proporções, agora o objetivo é conectar esses conceitos com a prática em sala de aula.

A próxima seção traz uma proposta de atividade voltada para o 7º ano do Ensino Fundamental, organizada para auxiliar o trabalho do professor. O material funciona como um roteiro prático, utilizando exemplos do dia a dia e padrões visuais para explorar os movimentos no plano. A ideia é oferecer caminhos para que o docente ajude os alunos a identificar e construir simetrias e escalas de forma mais clara e envolvente.

3 ATIVIDADES DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICA PARA O SÉTIMO ANO

Este capítulo se dedicará à apresentação de atividades pedagógicas focadas nas transformações geométricas, especificamente elaboradas para os professores utilizarem com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A escolha dessa etapa escolar não é aleatória, pois representa um período crucial na consolidação de conceitos matemáticos que servirão de base para aprofundamentos futuros. A prática constante e a resolução de exercícios bem estruturados constituem pilares essenciais para a construção de um conhecimento sólido e significativo, que vai além da memorização temporária de fórmulas e definições.

A importância das atividades reside na sua capacidade de transformar a teoria abstrata em um conhecimento concreto e aplicável. Ao engajar-se ativamente na resolução de problemas e na execução de tarefas, o aluno não apenas assimila os conceitos, mas também os internaliza, desenvolvendo a capacidade de raciocinar e de manipular as ideias geométricas. Essa abordagem prática é fundamental para que o aprendizado não seja passageiro, mas sim enraizado na experiência, permitindo que o estudante construa uma compreensão profunda e duradoura das transformações geométricas, em vez de apenas reproduzir informações.

As transformações geométricas, reflexão, translação, rotação e dilatação são mais do que meros tópicos isolados; elas representam fundamentos essenciais para a compreensão de conceitos matemáticos mais avançados. O domínio dessas transformações no 7º ano estabelece uma base sólida para o estudo de funções, geometria analítica, vetores e até mesmo para áreas da física e da engenharia. Portanto, a dedicação aos exercícios propostos neste capítulo visa não apenas ao sucesso imediato, mas à pavimentação de um caminho para o desenvolvimento contínuo das habilidades matemáticas dos alunos, garantindo que cada novo aprendizado se apoie em um alicerce robusto.

Para garantir que as atividades estejam de acordo com o que os alunos já estudam, utilizamos como base a metodologia de livros adotados pelas escolas estaduais de Roraima. Entre as principais referências, destacam-se a obra *Matemática e Realidade* (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2018), além de *Matemática Essencial* (PATARO; BALESTRI, 2019) e *Matemática | Ensino Fundamental | Anos Finais* (OLIVEIRA; FUGITA, 2025). Essa escolha permite que os exercícios aqui propostos sigam o mesmo padrão e linguagem que os professores encontram em seu dia a dia escolar no estado.

Neste sentido, as atividades aqui apresentadas foram elaboradas para estimular a exploração e a experimentação. Através de desafios que envolvem a manipulação de objetos, o uso de ferramentas digitais como o GeoGebra e a representação em papel

quadriculado, busca-se engajar os alunos de forma ativa no processo de construção do conhecimento. Acreditamos que, ao vivenciar e aplicar os conceitos das transformações geométricas em diferentes contextos, os estudantes não apenas consolidarão seu aprendizado, mas também desenvolverão a confiança e a autonomia necessárias para enfrentar novos desafios matemáticos, transformando o conhecimento adquirido em uma ferramenta poderosa para a vida.

As atividades foram organizadas de acordo com cada tipo de transformação geométrica, iniciando-se pela reflexão, seguida pela translação, rotação e, por fim, pela homotetia. Em cada uma dessas transformações, as propostas encontram-se dispostas em grau crescente de dificuldade, permitindo que os alunos avancem progressivamente na compreensão dos conceitos envolvidos. Entre as atividades propostas, encontram-se tarefas que utilizam dobraduras em papel, construções em papel quadriculado, explorações no software GeoGebra, além da construção e manipulação de objetos geométricos, favorecendo diferentes formas de investigação e aprendizagem.

A seguir propomos atividades de transformações geométricas para o 7º ano do Ensino Fundamental.

3.1 Atividades relativas à transformação geométrica Reflexão

3.1.1 Atividade 1 - Batalha Simétrica usando Reflexão

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

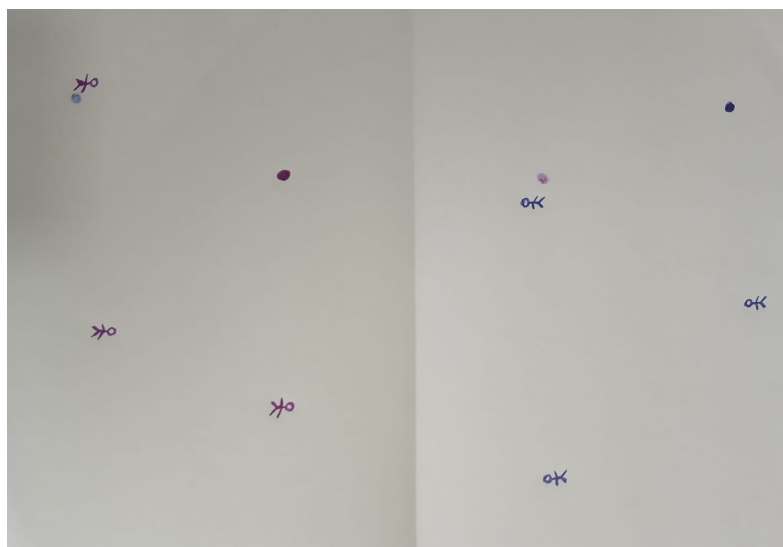
Objetivo: Compreender a simetria de reflexão através de uma atividade prática de decalque, observando que a dobra do papel funciona como o eixo de simetria: cada ponto da imagem original e seu reflexo estão à mesma distância da dobra, posicionados exatamente um em frente ao outro.

Material Utilizado:

- 1 Folha de papel A4 por dupla;
- Canetas hidrográficas (canetinhas) de duas cores diferentes;
- Régua

Regras do Jogo (2 Jogadores):

Figura 48 – Campo de Batalha



Fonte: Autor

1. Dobre uma folha de papel ao meio para marcar o eixo de simetria. Cada jogador deve desenhar 3 pequenos alvos (soldados) em locais estratégicos do seu próprio campo.
2. Em sua vez, o jogador deve fazer um ponto com caneta ou tinta em um local do seu próprio campo. O objetivo é posicionar esse ponto de forma que, ao dobrar a folha, ele coincida com a posição de um alvo do adversário.
3. Com a folha dobrada, pressione o verso da marcação com o fundo da caneta. Isso fará com que a tinta "carimbe" o campo oposto, criando o ponto simétrico.
4. Se o carimbo atingir o alvo do oponente, o ataque foi bem-sucedido e o jogador tem direito a uma nova jogada.
 - Caso o carimbo não atinja nenhum alvo, a vez passa para o adversário.
5. Vence o jogador que conseguir eliminar os 3 alvos do oponente primeiro.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- O aluno deve notar que a posição do ponto marcado deve corresponder à posição do alvo: se o alvo está distante da dobra, o ponto também deve ser marcado à mesma distância no seu campo. A simetria garante que cada ponto e seu reflexo estejam equidistantes (à mesma distância) em relação ao vinco.
- Com mediador, o professor, deve agir logo após as primeiras rodadas do jogo, introduzindo o uso da régua. O foco não é dar respostas prontas, mas sim instigar os alunos a investigarem e medirem o papel para que descubram os conceitos por conta própria.
- Através da investigação, o estudante deve perceber sozinho duas regras fundamentais: a **igualdade de distâncias** (onde a distância do ponto original à dobra é igual à do novo ponto à dobra, ou seja, $d(X, r) = d(X', r)$) e que a dobra funciona como **mediatriz** (cruzando o segmento XX' perpendicularmente em seu ponto médio).

Variação Individual: Pedir para desenharem uma figura completa de um lado e decalcá-la para criar a reflexão da figura (o par simétrico) no outro lado da folha.

3.1.2 Atividade 2 - Reflexão (Desenho Assistido por Malha)

Habilidade BNCC: (EF04MA19)

Objetivo: Introduzir a transformação geométrica de reflexão através do desenho em malha, explorando o movimento de espelhamento em relação a um eixo (reflexão axial).

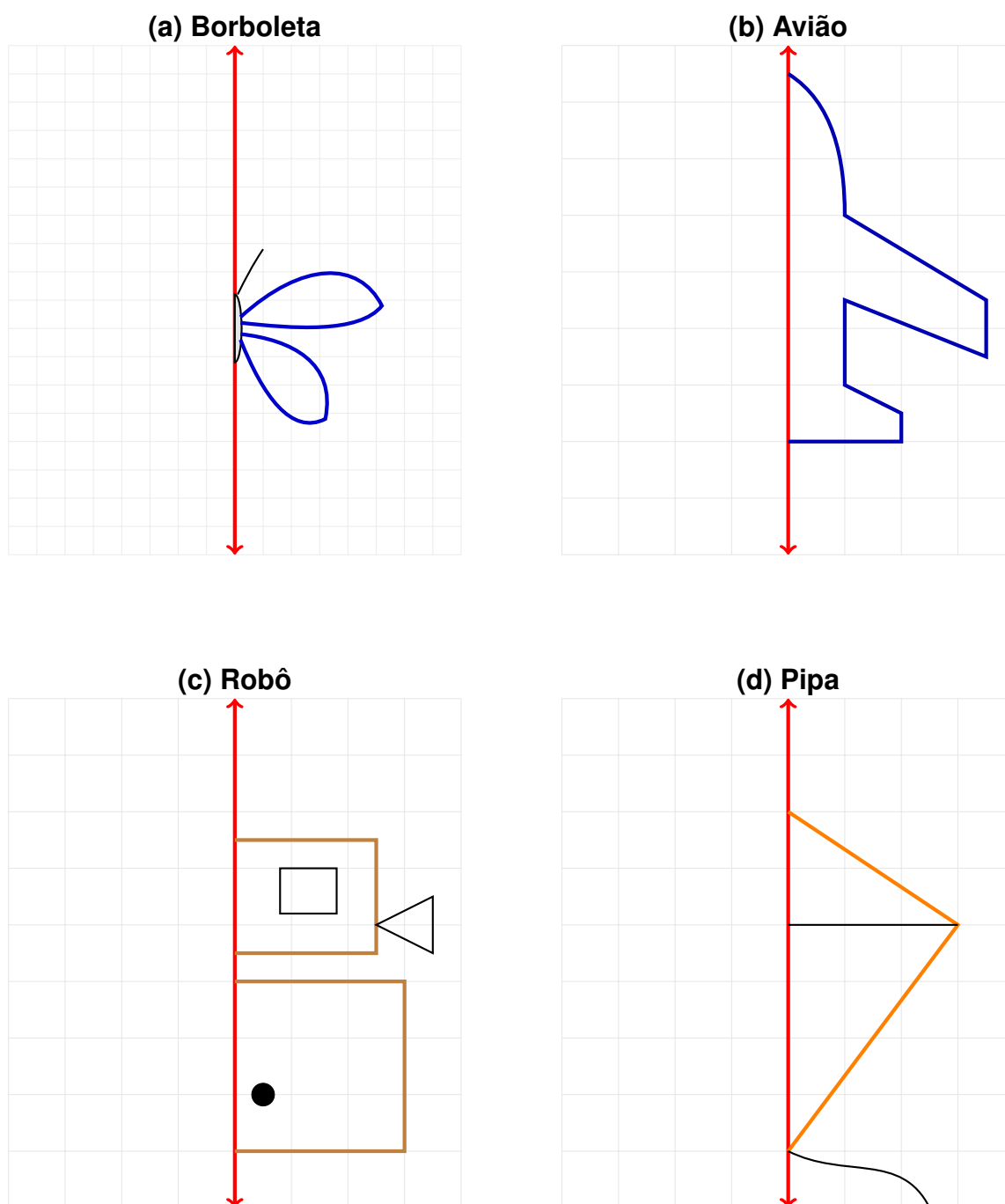
Material Utilizado:

- Malha quadriculada;
- Lápis.

Passos para realização:

1. Observe as imagens. A linha vermelha representa o eixo de simetria.
2. Desenhe a metade que falta no lado oposto, mantendo a mesma distância de cada ponto em relação ao eixo central.

Figura 49 – Atividade de Simetria: Reflexão no Plano.



Fonte: Autor

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Esta atividade é ideal para iniciar o conceito da transformação geométrica (reflexão). O uso da malha quadriculada serve como suporte visual para que os alunos compreendam a relação de distância entre os pontos e o eixo.
- Durante a execução, observe como o estudante lida com as curvas da borboleta em comparação às retas do robô. Ao final, peça que descrevam o que obtiveram em cada uma das figuras após realizar o espelhamento. Esse momento de síntese ajuda a fixar que a harmonia visual da imagem final é fruto de um rigor matemático de posicionamento de pontos em relação ao eixo central.

3.1.3 Atividade 3 - Reflexão (Construção Manual)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Realizar a construção manual de uma reflexão, determinando a imagem de cada vértice da figura original no lado oposto do eixo.

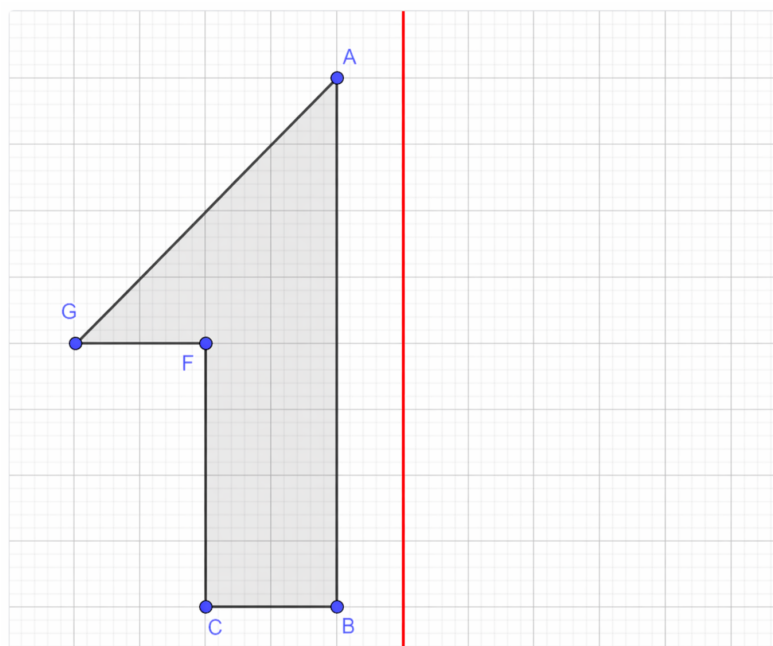
Material Utilizado:

- Malha quadriculada;
- Lápis;
- Régua.

Passos para realização:

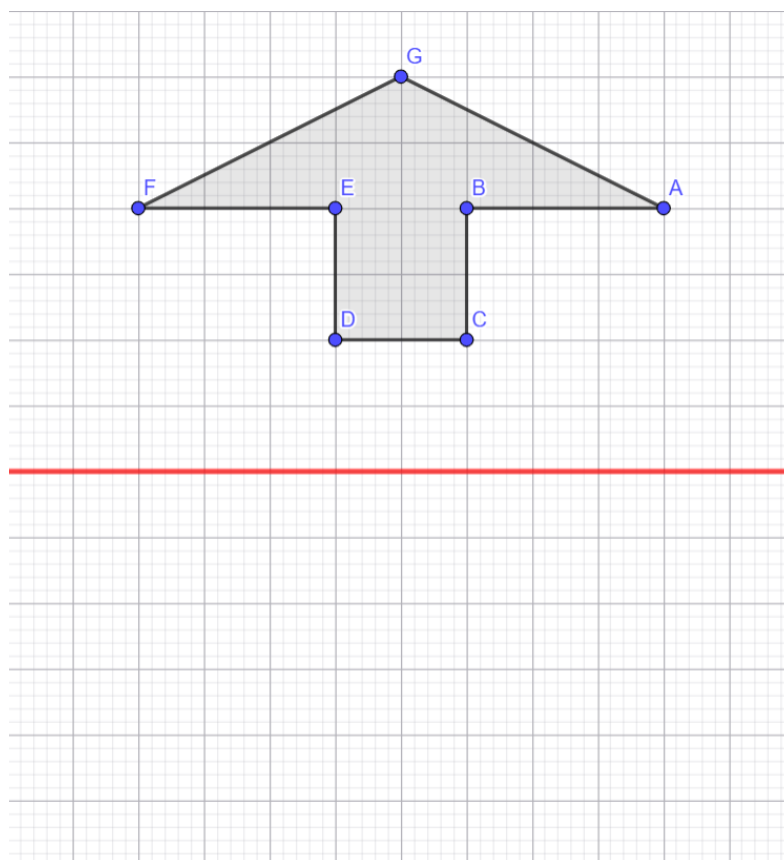
1. Identifique o eixo de reflexão nas figuras 50, ??, ?? e ??.
2. Determine a reflexão de cada vértice individualmente, mantendo a mesma distância horizontal e altura.
3. Conecte os novos pontos com uma régua para completar o polígono refletido.

Figura 50 – Atividade 3 (a)



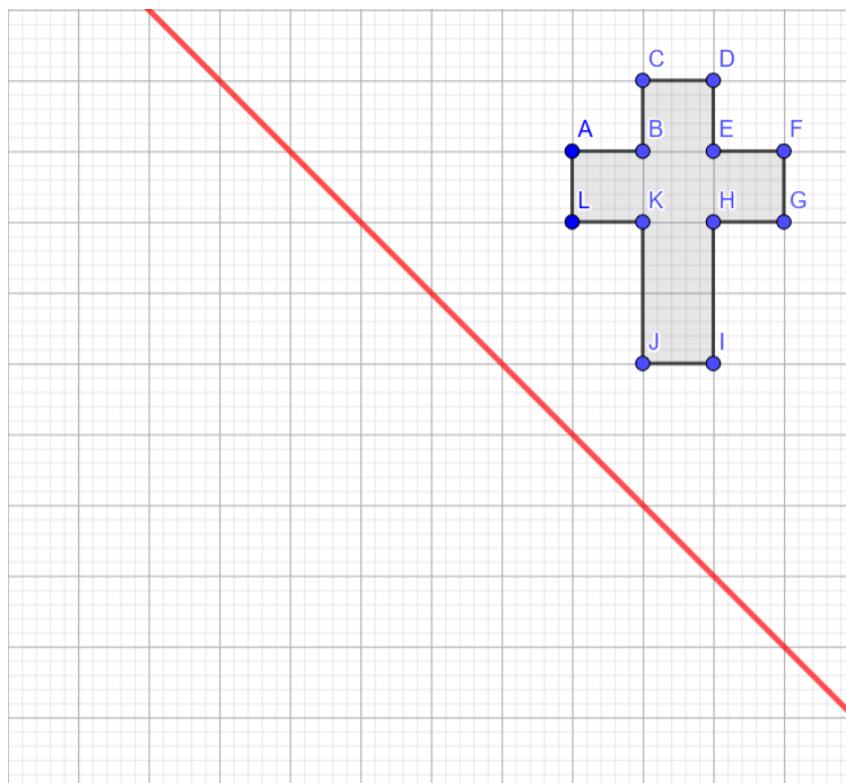
Fonte: Autor

Figura 51 – Atividade 3 (b)



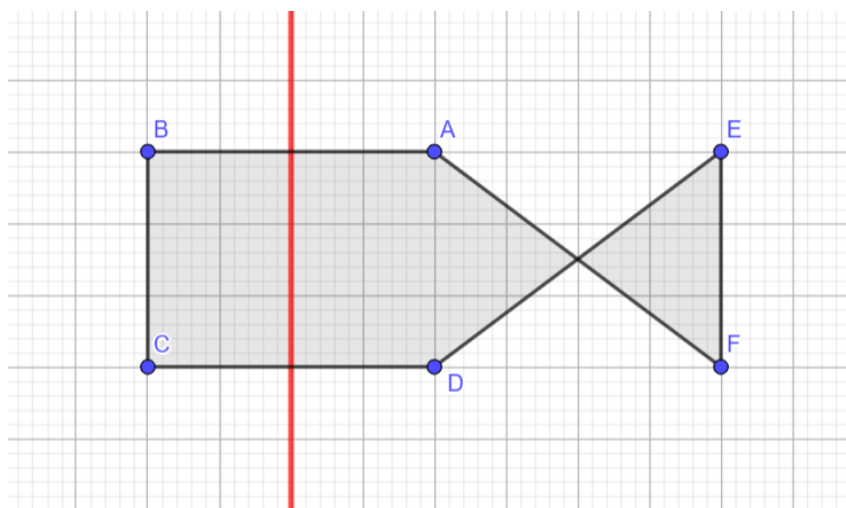
Fonte: Autor

Figura 52 – Atividade 3 (c)



Fonte: Autor

Figura 53 – Atividade 3: (d)



Fonte: Autor

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Reforce que a maneira mais precisa de refletir um polígono é transladar cada vértice individualmente, não a “forma” de uma vez. Depois disso, usar uma régua.
- Como se trata de um polígono, a precisão no traçado dos segmentos de reta é fundamental para a visualização correta da simetria.

3.1.4 Atividade 4 - Reflexão (Exploração com GeoGebra)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

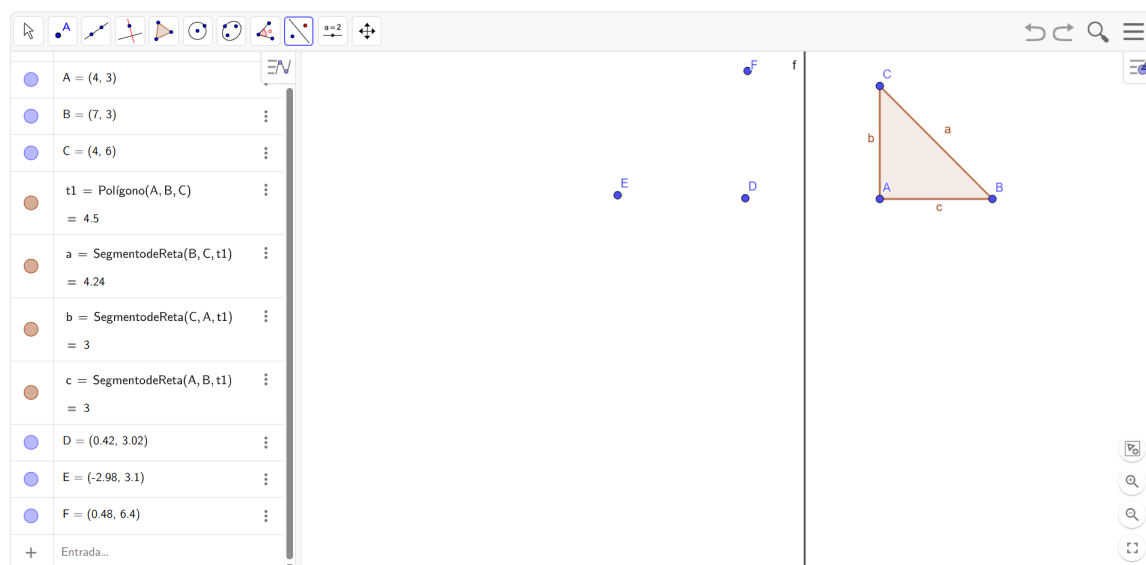
Objetivo: Transição do desenho estático para a investigação tecnológica, observando como as figuras se comportam no ambiente digital, especialmente a manutenção das propriedades geométricas durante o movimento (arrastre) e a dependência direta entre a figura original e sua imagem refletida.

Material Utilizado:

- Computador com GeoGebra.

Passos para realização:

1. No GeoGebra, clique com o botão direito na Janela de Visualização e desative as opções **Mostrar Eixos** e **Mostra Gelha**. O objetivo é trabalhar em uma tela inteiramente branca.
2. No campo de **Entrada** (Álgebra), digite a equação da reta que servirá de espelho:
 $f : x = 2$
3. Ainda no campo de **Entrada**, digite os pontos para formar o triângulo inicial: $A = (4, 3)$, $B = (7, 3)$ e $C = (4, 6)$. Use a ferramenta **Polígono** para unir os pontos A , B e C .
4. Selecione a ferramenta **Novo Ponto** e, apenas “no olho”, tente marcar onde você acredita que estariam os simétricos de cada vértice em relação à reta f .

Figura 54 – Reflexão dos pontos A , B e C 

Fonte: Autor

5. Agora, utilize a ferramenta **Reflexão em Relação a um Eixo**. Clique no triângulo original e, em seguida, na reta f .
6. Observe a distância entre os pontos que você marcou manualmente e os pontos gerados automaticamente pelo software. As posições coincidiram? O que você percebeu sobre a distância dos pontos originais e dos refletidos em relação à reta vertical?
7. Agora escolham uma figura. Pode ser um quadrilátero, um polígono irregular ou até a inicial do nome de vocês usando segmentos de reta. Um aluno desenha a figura original e o eixo (pode ser o eixo X , Y ou uma reta inclinada). O outro colega deve tentar marcar os pontos simétricos (A' , B' , C' ...) usando apenas a lógica, sem usar a ferramenta de reflexão. Depois que o colega marcar os pontos, usem a ferramenta **Reflexão com relação a um Eixo** para conferir. Se os pontos não coincidirem, discutam o porquê: foi a distância que ficou errada? O ângulo? Ou o sinal da coordenada? Invertam as funções, quem desenhava agora estima, e quem estimava agora desenha.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Verifique se os alunos já conhecem o Geogebra e suas ferramentas básicas. Nessa atividade será necessário o conhecimento prévio de algumas ferramentas como: Novo Ponto, Segmento de Reta, Reta, Polígono e Reflexão com relação ao Eixo.).
- Promova uma discussão sobre o que acontece com o sinal da coordenada X quando refletimos em relação ao eixo Y .
- Proponha o desafio de construir o reflexo de um polígono (ou ponto) em relação à reta bissetriz ($y = x$) e incentive a investigação sobre a inversão das coordenadas $(x, y) \rightarrow (y, x)$.

3.1.5 Atividade 5 - Reflexão (Revezamento no Quadro)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Aplicar a reflexão de forma colaborativa e lúdica, estimulando a percepção de proporções e distâncias.

Material Utilizado:

- Quadro branco;
- Marcadores.

Passos para realização:

1. Divida o quadro branco em duas colunas iguais. Em cada coluna, trace uma linha vertical que servirá como eixo de simetria para as atividades.
2. Divida a turma em duas equipes. Cada equipe se posiciona de um lado do quadro.
3. O professor desenha metade de uma figura complexa em um dos lados do eixo, figuras formadas exclusivamente por segmentos de retas.
4. Ao comando do professor, um membro de cada equipe corre para o quadro e desenha uma pequena parte da metade simétrica da figura, **cada aluno só pode desenhar um segmento de reta**. Em seguida, ele volta e passa a caneta para o próximo colega, em um formato de revezamento.
5. Vence a equipe que apresentar o desenho com maior precisão. Em caso de empate na qualidade geométrica, o critério de desempate será o menor tempo de finalização.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Escolha figuras que sejam formadas exclusivamente por segmentos de reta para facilitar a divisão das tarefas entre os alunos.
- O foco não é apenas a velocidade, mas a precisão. Se um aluno errar a distância, o próximo deve tentar corrigir.
- Ao final, analise com a turma qual equipe conseguiu manter as mesmas distâncias em relação ao eixo e por que isso é fundamental para garantir a reflexão.

3.1.6 Atividade 6 - Reflexão (Fenômenos Cotidianos)

Habilidade BNCC:(EF07MA21)

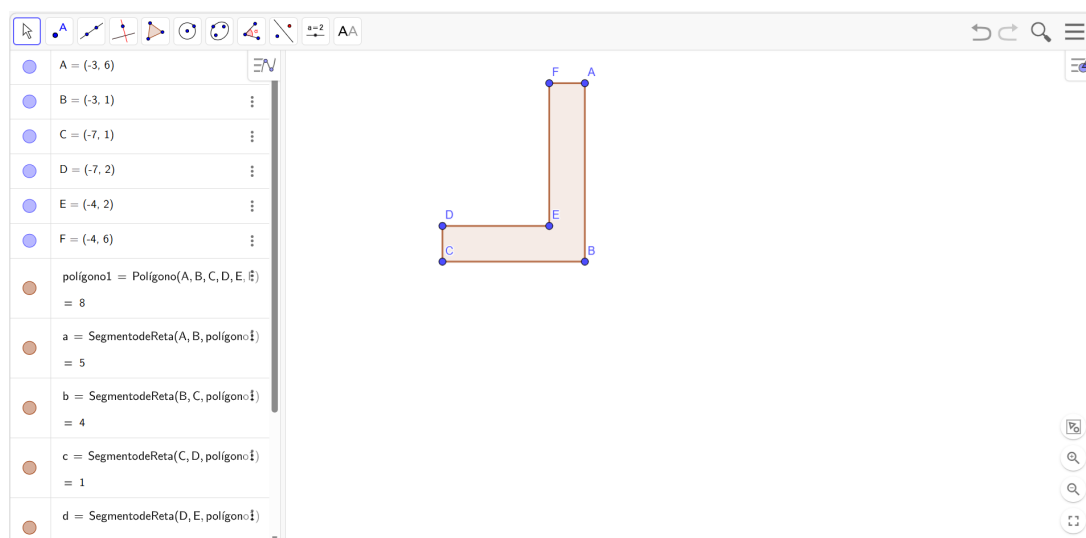
Objetivo: Levar o aluno a compreender a simetria de reflexão por meio da manipulação prática no GeoGebra, conectando conceitos geométricos a fenômenos cotidianos como o espelhamento.

Material Utilizado:

- Computador com Geogebra

Passos para realização:

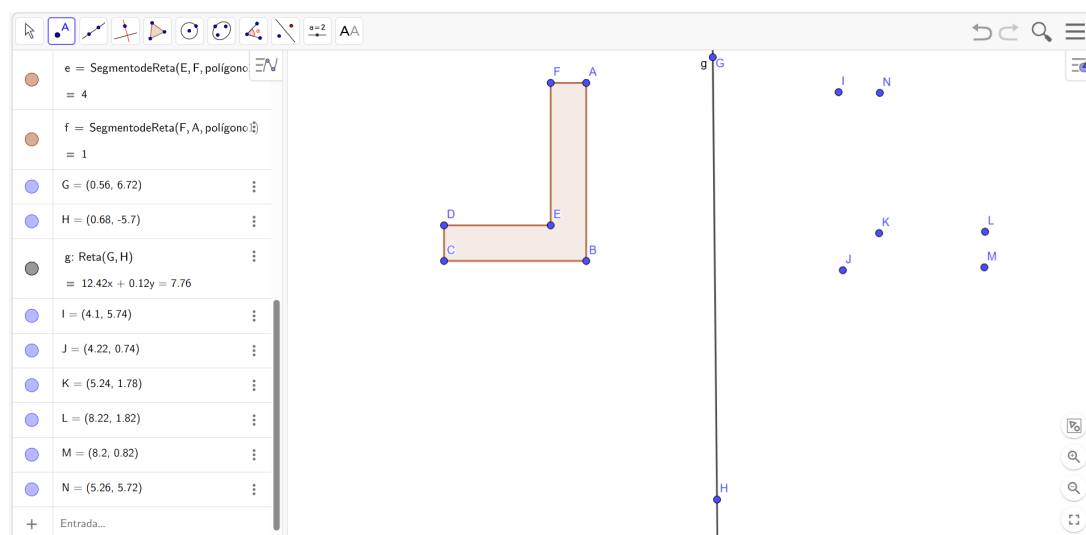
1. No GeoGebra, Utilize a ferramenta **Novo Ponto** para marcar as seguintes coordenadas: $A(-3, 6)$, $B(-3, 1)$, $C(-7, 1)$, $D(-7, 2)$, $E(-4, 2)$ e $F(-4, 6)$, retire os **Eixos** e a **Grelha** e com a ferramenta **Polígono**, construa o polígono $ABCDEF$.

Figura 55 – Polígono $ABCEDF$ 

Fonte: Autor

2. Utilize a ferramenta **Reta (Dois Pontos)** para traçar uma reta vertical paralela ao lado AB ; ela será o nosso eixo de reflexão.
3. Com a ferramenta **Novo Ponto**, tente posicionar os novos vértices da letra do lado oposto da reta, mantendo a mesma distância e alinhamento do original.

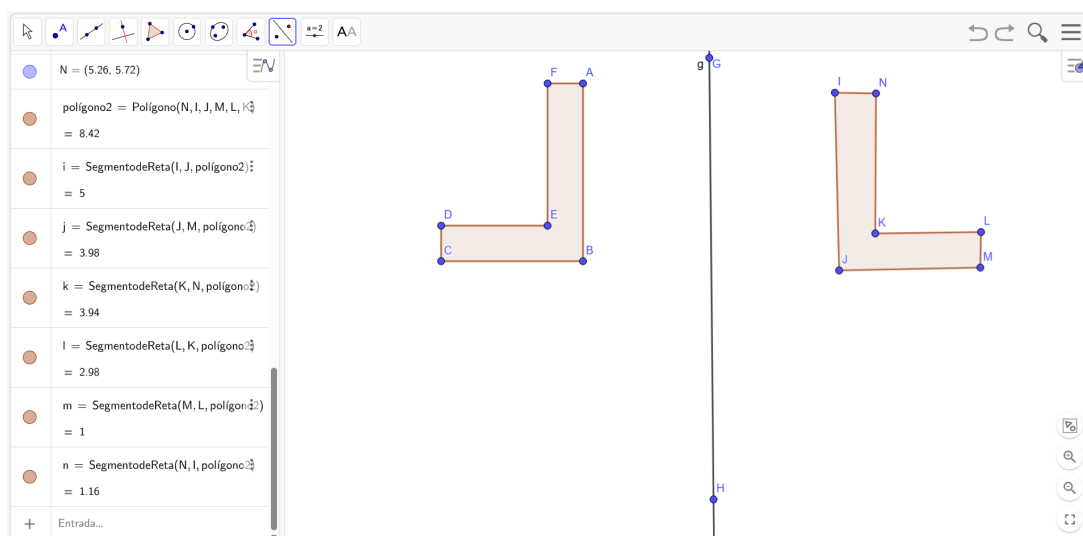
Figura 56 – Pontos refletidos em relação a reta



Fonte: Autor

4. Agora, usem a ferramenta **Segmento de Reta (Dois Pontos)** para ligar esses pontos e formar a letra refletida.

Figura 57 – Polígono refletido



Fonte: Autor

5. Agora, usem a ferramenta **Reflexão com relação a um Eixo**. Cliquem na letra original e depois na reta vertical.
 - Se a letra criada pelo GeoGebra coincidiu perfeitamente com a que vocês desenharam, parabéns! Vocês compreenderam como a reflexão posiciona os pontos no lado oposto.
6. Utilizem a ferramenta **Mover** para arrastar a letra original. O que acontece com a imagem refletida? Ela acompanha o movimento na mesma direção ou se desloca em sentido oposto em relação ao eixo?

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Inicie a aula mostrando uma foto de uma ambulância e pergunte por que a escrita é invertida.
- Explique que o espelho retrovisor inverte a imagem novamente, permitindo a leitura correta.
- Reforce que a reflexão inverte a orientação (direita/esquerda), mas preserva a distância do objeto ao eixo de reflexão.

3.2 Atividades relativas à transformação geométrica Translação

3.2.1 Atividade 1 - Translação (Construção em Malha)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

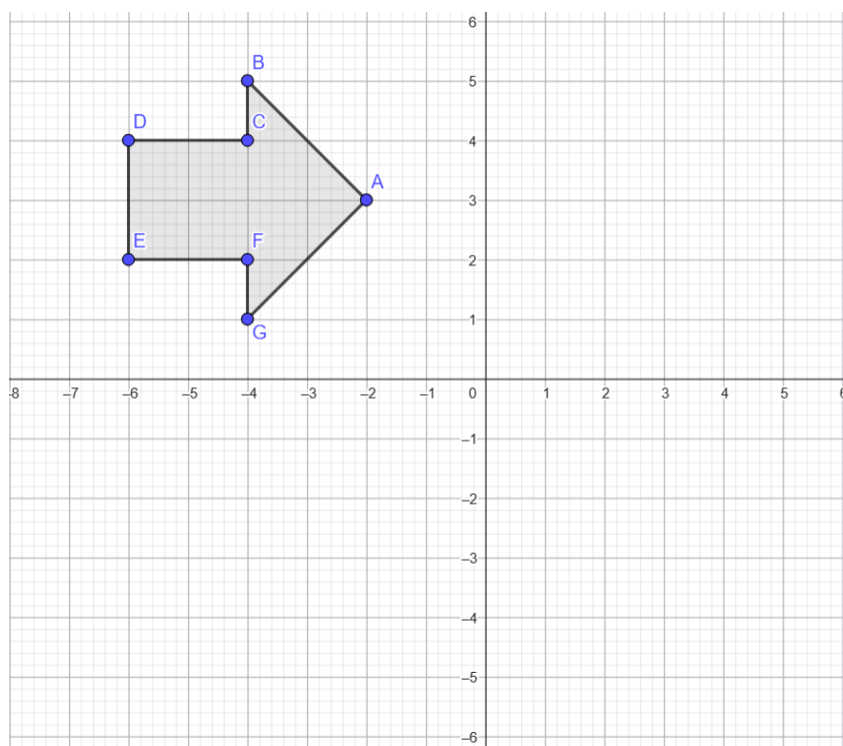
Objetivo: Compreender a translação como um deslocamento que preserva a forma e a orientação da figura original.

Materiais Utilizados:

- Folha quadriculada;
- Lápis
- Régua

Passos para realização:

Figura 58 – Polígono $ABCDEFG$



Fonte: Autor

1. Translade o polígono $ABCDEFG$, 5 unidades para baixo.
2. Translade o polígono $ABCGEFG$, 7 unidades para a direita.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Explique que a figura "desliza" sobre o plano, sem girar e sem mudar de tamanho.
- Oriente os alunos a não tentarem mover a "figura inteira" de uma vez. O segredo é transladar cada vértice individualmente e, depois, ligá-los. Isso evita erros de proporção.
- Reforce que a malha quadriculada serve como um sistema de coordenadas simplificado. Deslocar um ponto 7 unidades para a direita equivale a somar 7 à sua coordenada x .

3.2.2 Atividade 2 - Translação (Análise de Movimento)

Habilidade BNCC: (EF07MA21).

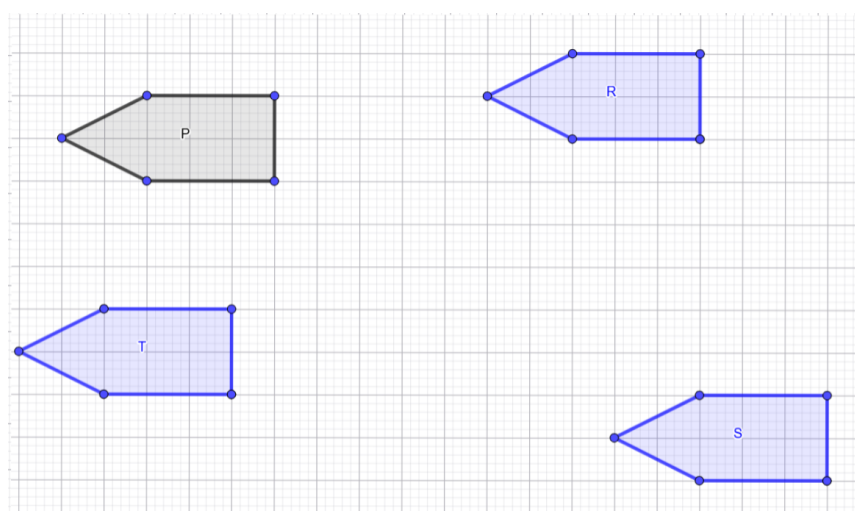
Objetivo: Identificar e descrever vetores de deslocamento horizontal e vertical em figuras já transladas.

Materiais Utilizados:

- Papel quadriculado;
- Lápis
- Régua

Passos para realização:

Figura 59 – Translação do polígono P



Fonte: Autor

Observe o plano cartesiano e descreva o deslocamento (quantas unidades para a direita/esquerda e para cima/baixo) realizado para levar o:

1. Polígono P para o polígono R ;
2. Polígono P para o polígono T ;
3. Polígono P para o polígono S ;

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Mostre que a translação pode ser descrita como um par de números (x, y) , onde x é o movimento horizontal e y o vertical.
- Verifique se os alunos estão contando as unidades a partir de vértices correspondentes (ex: o topo de R para o topo de P)
- Reforce que a orientação da figura nunca muda na translação.
- Resposta:
 1. Polígono P para o polígono R : $(10, 1)$
 2. Polígono P para o polígono T : $(-1, 5)$
 3. Polígono P para o polígono S : $(13, -7)$
- Explicar que estes pares ordenados podem ser considerados como vetores geométricos, considerando como origem do vetor o ponto $(0, 0)$.

3.2.3 Atividade 3 - Translação (Matemática em Movimento)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Esta atividade busca levar o aluno a internalizar o conceito de translação através da movimentação corporal, convertendo pares ordenados em movimentos físicos orientados.

Material Utilizado:

- Sala de aula.

Passos para realização:

1. A sala deve ser organizada em colunas e linhas retas, onde cada cadeira representa um par ordenado (x, y) .

2. Defina o ponto de origem $(0, 0)$ (ex: a cadeira mais próxima à porta, a cadeira central na sala ou à mesa do professor);
3. Estabeleça os eixos: Colunas (direita/esquerda) são o eixo x ; Linhas (frente/trás) são o eixo y .
4. Todos os alunos começam sentados.
5. O professor escolhe um aluno inicial (ex: quem está na posição $(1, 1)$) e ele fica de pé.
6. O professor dita o vetor: "Vetor de translação: $(3, -2)$ ".
7. O aluno deve calcular mentalmente: "Três colunas para a direita, duas filas para trás".
8. O aluno caminha até a cadeira de destino.
9. O aluno que estava sentado na cadeira de destino é o próximo a jogar.
10. Ele se levanta, o aluno que chegou senta-se no lugar dele, e o professor dita um novo vetor para esse novo aluno.
11. O Desafio: Ninguém sabe quem será o próximo. Se o professor ditar um vetor que leve a uma "cadeira vazia" ou fora dos limites da sala, o aluno deve acusar o erro ("Vetor inválido!").

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Para a aula fluir sem interrupções, tenha em mãos uma lista de vetores que "caibam" na sua sala. Por exemplo, se sua sala tem 6 colunas e 6 filas:
 - Se o aluno está na ponta direita, não dê um vetor com x positivo. Isso força os alunos a prestarem atenção nos limites do plano.

3.2.4 Atividade 4 - Translação (Investigação GeoGebra)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Compreender o vetor como a instrução matemática que define a direção, sentido e magnitude da translação.

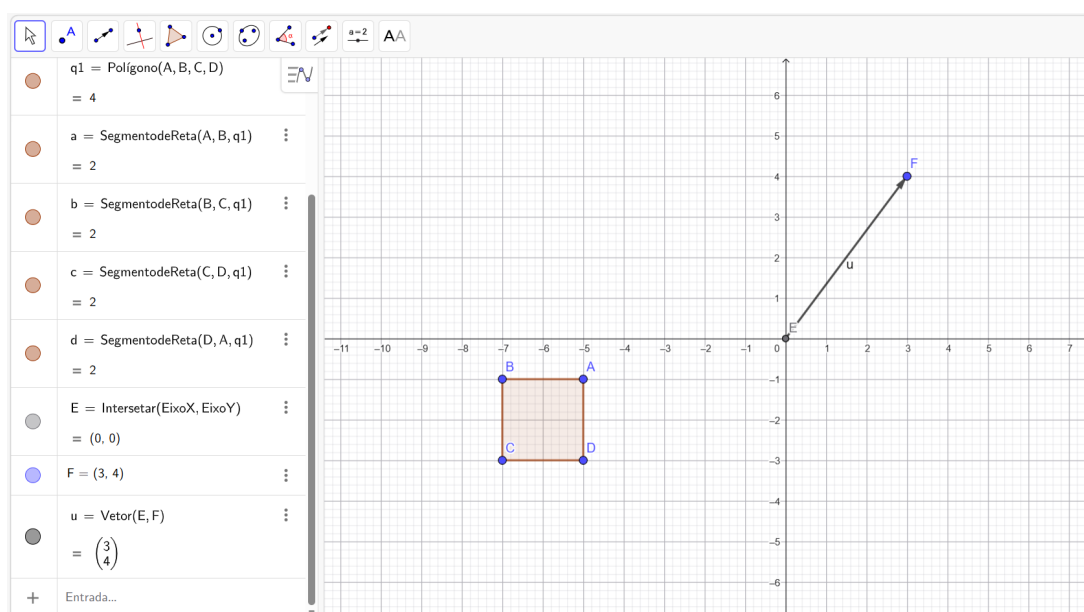
Materiais Utilizados:

- Computador com Geogebra

Passos para realização:

1. Abram o GeoGebra com a Malha e os Eixos. Usem a ferramenta Polígono e desenhem um quadrilátero qualquer no 3º quadrante (onde x e y são negativos).
2. Vamos criar o nosso 'comando de movimento'. Seleccionem a ferramenta **Vetor** (fica no mesmo menu da Reta). Cliquem na origem $(0, 0)$ e depois no ponto $(3, 4)$. Vocês acabaram de criar um vetor que diz: 'ande 3 para a direita e 4 para cima'.

Figura 60 – Quadrilátero $ABCD$ e vetor u



Fonte: Autor

3. Usem a ferramenta **Ponto** e marquem onde vocês acham que o vértice A da figura de vocês vai parar se ele seguir exatamente esse caminho (3 para a direita, 4 para cima). Nomeie o novo ponto como A' .
4. Agora seleccionem a ferramenta **Translação por um Vetor**. Cliquem primeiro no centro do seu polígono e depois na seta do vetor que vocês criaram.
 - Pergunta: A figura deslocou exatamente para onde vocês previram?
5. Crie um Controle Deslizante (ferramenta **Seletor**): configure o nome como k , com intervalo de 0 a 1.
 - Configurando a Animação: Na barra de entrada, digite: $\text{VetorAnimado} = e * u$ (considere que ' u ' é o nome do vetor criado no passo 2). Em seguida, use a ferramenta **Translação por um Vetor**, clique no polígono original, no Ponto VetorAnimado e depois no ponto F .
6. Agora que vocês aprenderam o processo, repitam o desafio três vezes:

- Mudem a figura original de lugar ou criem outras figuras.
- Criem novos vetores (um apontando para baixo, outro para a esquerda).
- Observem como a figura sempre 'segue' a direção e o tamanho do vetor, mantendo-se idêntica à original. Para visualizar esse movimento de forma dinâmica, para melhor visualização acesse o link:[<<https://www.geogebra.org/classic/wgf9ajtm>>].

3.2.5 Atividade 5 - Translação (Lógica de Programação)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Aplicar a translação de forma estratégica para resolver problemas espaciais com obstáculos.

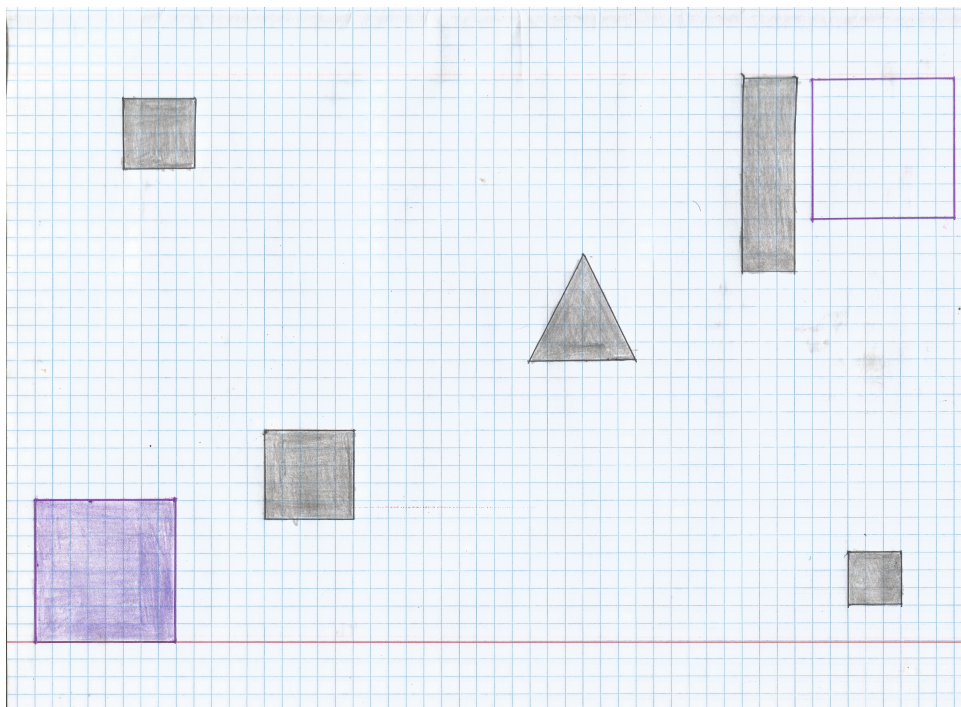
Material Utilizado:

- Papel quadriculado;
- Lápis;
- Figura Geométrica recortada.

Passos para realização:

1. Distribua para cada grupo (3 ou 4 alunos) uma folha de papel quadriculado (ou malha A3). O professor deve pré-marcar o objeto na posição inicial (**Quadrado Roxo**), alguns obstáculos (**Polígonos Pretos**) onde o objeto não pode parar e a **Chegada**, conforme a figura 61:

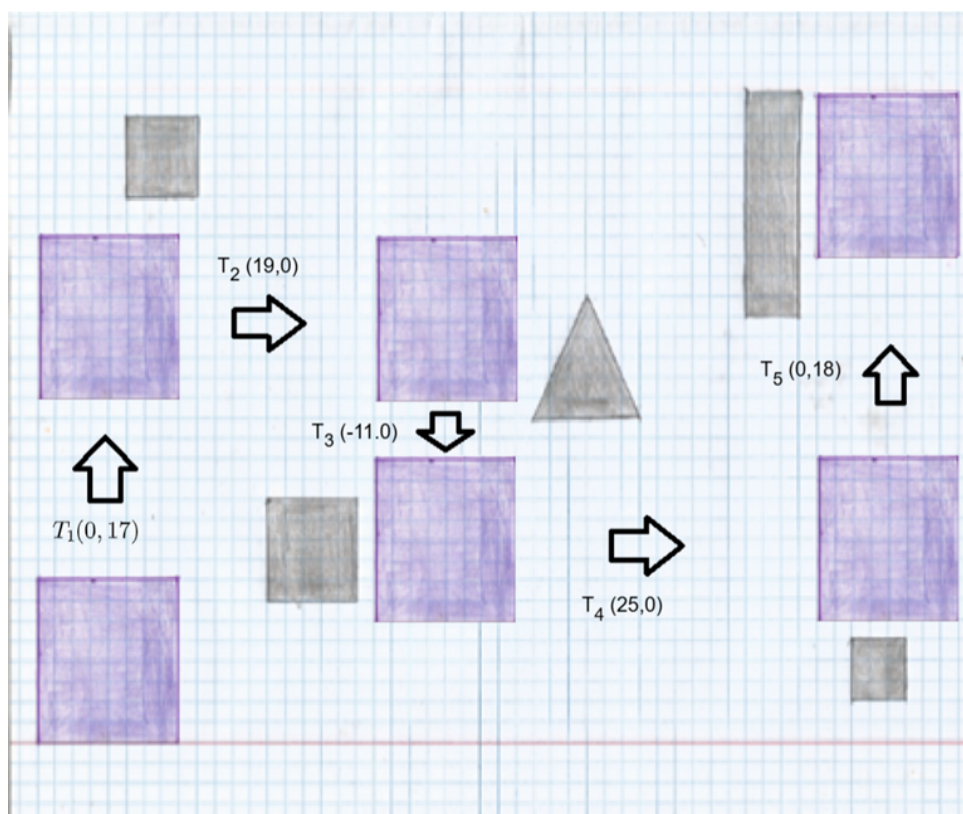
Figura 61 – Campo com Obstáculos



Fonte: Autor

2. O grupo deve planejar uma sequência de movimentos para desviar dos obstáculos. Cada movimento deve ser obrigatoriamente representado por um vetor de translação, como $\vec{v} = (x, y)$. Eles precisam garantir que, ao aplicar o deslocamento, nenhum dos vértices ou as arestas do **Objeto** fiquem sobrepostos aos **Obstáculos**.
3. À medida que definem os vetores, os alunos devem desenhar a nova posição da figura na malha. Esse processo é feito passo a passo: ao aplicar um vetor, desenha-se a figura resultante e anota-se o vetor utilizado ao lado do desenho. Caso percebam que a nova posição colidiu com um obstáculo, o grupo deve apagar o desenho e recalculer o vetor de translação.

Figura 62 – Campo com Obstáculos: Resolvido



Fonte: Autor

- O desafio é finalizado quando os alunos aplicam o vetor final que posiciona a figura exatamente sobre o Ponto de Chegada. Para concluir a atividade, o grupo deve apresentar o relatório de todos os vetores usados que confirmam o sucesso da missão sem colisões.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Reforce que o vetor $\vec{v} = (a, b)$ não é um ponto, mas um comando de movimento. O valor a desloca a figura horizontalmente e b verticalmente.
- Para tornar esse conceito mais acessível, apresente o vetor como uma instrução de deslocamento. Destaque que a componente horizontal a determina o movimento para a direita ($a > 0$) ou para a esquerda ($a < 0$), enquanto a componente vertical b indica o deslocamento para cima ($b > 0$) ou para baixo ($b < 0$), permitindo que os alunos relacionem cada componente a uma ação específica de translação.
- Ao pré-marcar os obstáculos, certifique-se de que existe pelo menos um caminho possível, mas evite caminhos óbvios. O desafio deve exigir que os alunos combinem pelo menos duas ou três translações (ex: uma para desviar e outra para avançar).
- Espera-se que o aluno entenda que transladar uma figura é somar os mesmos valores às coordenadas de todos os seus pontos. Além de praticar o plano cartesiano, a atividade desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de planejar caminhos, antecipando problemas e corrigindo falhas de percurso.

3.2.6 Atividade 6 - Translação (Mosaicos de Escher)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Criar padrões estéticos repetitivos utilizando apenas o movimento de translação. inspirados no artista M.C. Escher. O desafio é criar um mosaico perfeito usando apenas a Translação. Lembrem-se: a figura deve 'deslizar' pelo papel sem girar e sem mudar de tamanho, encaixando-se repetidamente como azulejos.

Exemplo 3.2.1. *A figura 63 exemplifica a translação ao repetir um polígono por todo o plano sem deixar vãos.*

Figura 63 – Dois Pássaros



Fonte: Adaptado de (ESCHER, 1938)

Materiais Utilizados:

- Cartolina ou Papel cartão;
- Tesoura;
- Lápis de cor.

Passos para realização:

1. No papel rígido, desenhe e recorte um polígono ou figura simples que permita o encaixe (sugestão: um quadrado, retângulo ou um hexágono de aproximadamente 4cm a 5 cm). Este será o seu molde original.
2. Coloque o molde no canto superior esquerdo da folha A4. Com o lápis, contorne o polígono com precisão. Este é o seu ponto (x, y) inicial.
3. Deslize o molde para a direita, garantindo que o lado esquerdo do molde encoste exatamente no lado direito do desenho anterior (mantendo a mesma altura). Contere novamente. Repita esse processo até completar a primeira linha horizontal da folha.
4. Retorne ao início da folha. Deslize o molde para baixo, encostando o topo do molde na base da figura desenhada acima. Repita o processo de contorno para preencher as colunas até que toda a folha A4 esteja coberta pelo padrão.
5. Para destacar o efeito de mosaico, escolha apenas duas cores. Pinte as figuras de forma alternada (como um tabuleiro de xadrez): uma cor para a figura "principal" e

outra cor para o "fundo"(as figuras adjacentes). O resultado final deve ser um plano totalmente preenchido, sem espaços em branco.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Apresente obras de M.C. Escher para inspirar os alunos.
- O molde deve ser preciso para que o encaixe funcione perfeitamente.
- Mostre que a translação permite preencher, em teoria, o plano infinitamente sem sobreposições.
- Parabeniza os alunos pelo trabalho, tente conseguir brindes aos que concluírem o trabalho.

3.2.7 Atividade 7 - Translação e Reflexão no Geogebra

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Construir e animar uma figura composta (avião) no ambiente de geometria dinâmica, aplicando sucessivas translações e reflexão para criar a percepção de movimento contínuo.

Materiais Utilizados:

- Computador com Geogebra

Passo para realização:

1. Selecione a ferramenta **Seletor** e crie um parâmetro chamado n . Defina o intervalo de -20 a 20 com incremento de 0.1 para que o movimento seja fluido.
2. Na barra de entrada, digite os pontos da metade superior do avião utilizando números inteiros somados ao parâmetro n para permitir o deslocamento horizontal.

- $A = (-8 + n, 0)$

- $B = (-7 + n, 1)$

- $C = (-6 + n, 1)$

- $D = (-5 + n, 3)$

- $E = (-4 + n, 1)$

- $F = (-2 + n, 1)$

- $G = (-1 + n, 2)$

- $H = (-1 + n, 0)$
3. Utilize a ferramenta Polígono para conectar os pontos na sequência e fechar a figura, criando a metade superior do avião.
 4. Selecione a ferramenta **Reflexão em relação a uma Eixo**. Clique no polígono criado e, em seguida, no Eixo X . Isso construirá a metade inferior do avião instantaneamente.
 5. Clique com o botão direito no ponto da asa e selecione **Exibir Rastro**. O rastro terá a mesma cor que você definiu para o ponto.
 6. Para configurar o movimento final: Clique com o botão direito no **Controle Deslizante** n e vá em Configurações/Propriedades. Na aba **Seletor**, altere a opção **Repetir** para **Decrescente**. Feche as configurações, clique com o botão direito no seletor e ative a **Animação**. O avião fará o percurso de volta, da direita para a esquerda.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Explique que a percepção de movimento contínuo é gerada por pequenos incrementos sucessivos (translações) que enganam a visão humana.
- Destaque o uso da reflexão como ferramenta de precisão para garantir que as duas metades do objeto se desloquem em perfeita sincronia.
- Incentive os alunos a alterarem a cor do rastro para simular diferentes efeitos visuais de fumaça ou velocidade.

3.3 Atividades relativas à transformação geométrica Rotação

3.3.1 Atividade 1 - Rotação (Vivência Corporal)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Introduzir o conceito de rotação e a medida de ângulos por meio da experiência prática.

Passos para realização:

1. Olhem para a parede da frente. Esta é a nossa posição 0° .
2. Girem 90° no sentido anti-horário (para a esquerda). Para qual parede vocês estão olhando agora?

3. Voltem à posição 0° . Agora, girem 180 graus no sentido horário.
4. Girem 90° anti-horário. Depois, girem mais 90° anti-horário. Qual foi a rotação total?

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- O professor deve iniciar a prática utilizando os ângulos notáveis (90° , 180° , 270° e 360°), que são facilmente visualizados através das paredes da sala de aula (frente, lados e trás). À medida que a turma demonstrar segurança e bom desempenho, o grau de dificuldade pode ser elevado com comandos mais complexos, como:
 - Ângulos intermediários: 45° (diagonal) ou 135° .
 - Soma de movimentos: "Girem 45° e depois mais 180° ".
 - Desafios de sentido: Alternar rapidamente entre comandos horários e anti-horários para fixar a percepção de orientação.
- Ao associar comandos de graus e sentidos a movimentos físicos, o estudante compreende a função do centro de rotação e a relação entre giros parciais e a volta completa.

3.3.2 Atividade 2 - Rotação (Construção Manual)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Aplicar os conceitos de raio e amplitude angular usando compasso e transferidor, desenvolver habilidades motoras com instrumentos geométricos e compreender que a rotação preserva a distância de cada ponto da figura em relação ao centro fixo.

Materiais Utilizados:

- Papel quadriculado;
- Régua;
- Compasso;
- Transferidor;
- Lápis

Passo para realização:

1. No papel quadriculado, desenhem um triângulo ABC . Escolham um ponto fora dele e chamem de O (nosso centro de rotação).
2. Usem a régua para traçar uma linha pontilhada bem leve do ponto O até o vértice A . Agora, coloquem a ponta seca do compasso em O , a ponta de grafite em A e desenhem um arco de círculo no sentido anti-horário.
3. Vamos fazer uma rotação de 90° . Posicionem o transferidor no ponto O , alinhem o zero com a linha OA e marquem o ponto onde indica 90° . Tracem uma nova linha de O até essa marca.
4. Onde o arco de círculo que vocês desenharam cruzar com essa nova linha de 90° , ali está o ponto A' . Repitam o mesmo processo para os pontos B e C .
5. Unam os pontos A' , B' e C' . Vocês agora têm o triângulo rotacionado perfeitamente!

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Reforce que a rotação é uma isometria. Mostre aos alunos que, embora a posição do triângulo mude, as medidas dos lados e dos ângulos internos permanecem idênticas às do original.
- Explique que o compasso é utilizado nesta atividade para garantir que a distância entre o centro O e o ponto A seja a mesma que entre O e A' .
- Oriente os alunos a conferirem se o triângulo final não sofreu deformações. Se os pontos não se encaixarem perfeitamente, peça que revisem o alinhamento do transferidor no ponto central O .
- **Desafio Extra:** Para alunos que terminarem rápido, sugira a rotação de uma figura mais complexa ou o uso de um centro de rotação O localizado em um dos vértices do próprio triângulo.

3.3.3 Atividade 3 - Rotação (Design de Logotipo)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: O objetivo é aplicar a rotação para criar figuras com simetria radial, compreendendo a relação entre o ângulo de giro e a divisão da circunferência.

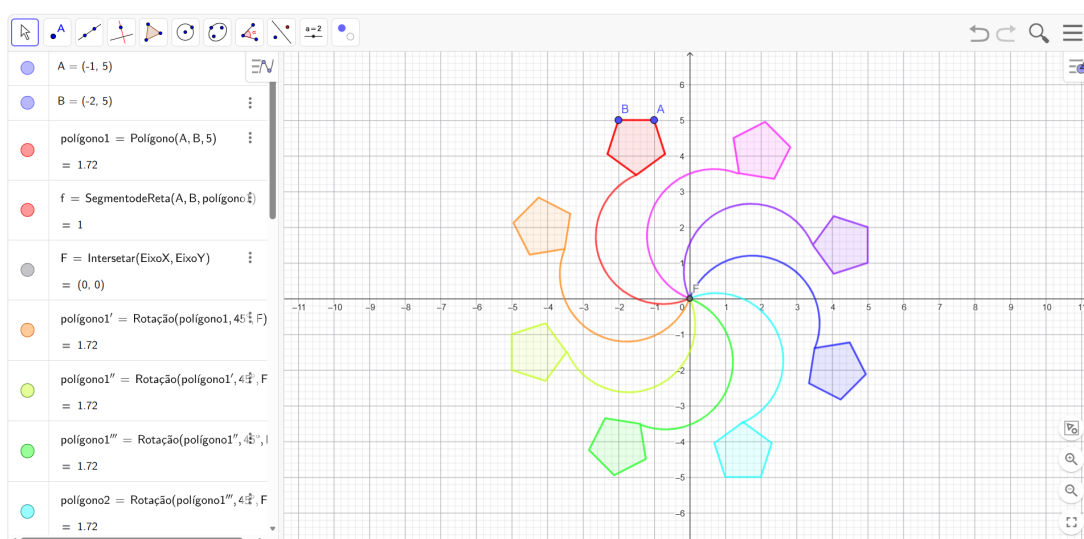
Materiais Utilizados:

- Computador com Geobegra.

Passo para realização:

1. Usem a ferramenta **Polígono Regular** para criar um pentágono com os vértices iniciais em $A(-1, 5)$ e $B(-2, 5)$.
2. Com a ferramenta **Novo Ponto** marque o centro do plano cartesiano. Este será o centro da nossa marca.
3. Queremos criar um logotipo com 8 pétalas iguais ao redor do centro. Se uma volta completa tem 360° , qual deve ser o ângulo de giro? (Resposta: $360/8 = 45^\circ$).
4. Usem a ferramenta **Rotação (Centro, Objeto, Amplitude)**. Cliquem no pentágono, depois no centro e digitem 45° .
5. Agora, cliquem no novo polígono e girem mais 45° em relação ao centro. Repitam isso até completar a volta!
6. Usem a ferramenta **Mover** e arrastem um ponto da figura original. O que acontece com o logotipo inteiro?
7. **Finalização Criativa:** Com a estrutura pronta, use sua criatividade para alterar cores, espessuras de linha ou adicionar novos detalhes, transformando a construção geométrica em um logotipo completa. Como por exemplo na imagem 64:

Figura 64 – Logotipo



Fonte: Autor

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Explique o cálculo matemático: 360° dividido pelo número de cópias.
- Mostre como a simetria radial é comum em logotipos de marcas famosas e na natureza (flores).
- Peça que usem cores diferentes para criar efeitos visuais interessantes.

3.3.4 Atividade 4 - Rotação (Simulação Orbital)

Habilidade BNCC: (EF07MA21)

Objetivo: Compreender a rotação como um movimento que preserva a distância entre a figura e o centro (raio), utilizando a animação para visualizar trajetórias circulares.

Materiais Utilizados:

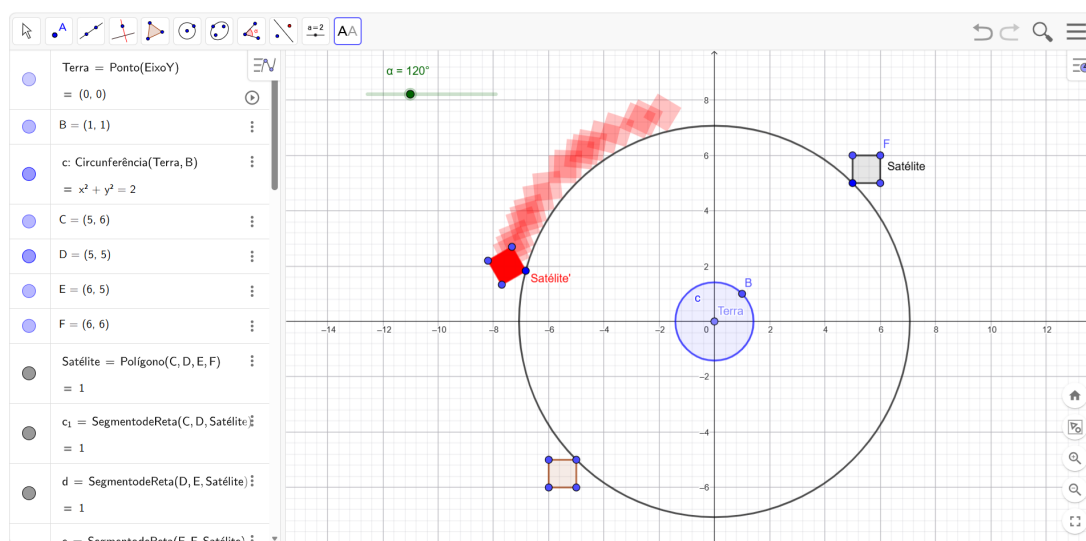
- Computador com Geogebra.

Passos para realização:

1. Use a ferramenta **Circunferência (Centro, Raio)** para construir a terra na origem do plano cartesiano $(0, 0)$.
2. Agora, no 1º quadrante, desenhem um polígono pequeno que pareça um Satélite (pode ser um retângulo).
3. O satélite precisa orbitar a Terra. Seleccionem a ferramenta **Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)**. Cliquem no satélite, depois no centro da Terra $(0, 0)$ e digitem **180°** .
 - Essa manobra permite ao aluno visualizar o impacto da rotação de meia volta. Ele percebe que o satélite é projetado para a posição oposta à original, mantendo exatamente a mesma distância em relação ao centro da Terra, o que garante a precisão da órbita no simulador.
4. Para provar que ele está em órbita, usem a ferramenta **Circunferência (Centro, Ponto)**. Cliquem no centro da Terra e depois no vértice do seu satélite original.
 - Pergunta: O satélite refletido está posicionado sobre a linha desse círculo?
5. Etapa Final: Animando a Órbita do Satélite

- Use a ferramenta **Seletor**.
- Cliquem em qualquer lugar vazio da tela. Na janela que abrir, selecionem a opção **Ângulo**.
- Agora, selecionem a ferramenta **Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)**.
- Cliquem no seu Satélite original e, em seguida, cliquem no ponto central (a Terra).
- Na caixa do ângulo, apaguem os **45°** e escrevam o nome do seu controle deslizante (α).
- Agora, usem a ferramenta **Mover**, arrastem a bolinha do controle deslizante da esquerda para a direita. O que está acontecendo com o satélite?
- Cliquem com o botão direito no satélite que está se movendo e ativem a opção **Mostrar Rastro**.
- Agora, cliquem com o botão direito no controle deslizante e habilitem a opção **Animação**, como mostra a figura.

Figura 65 – Satélite



fonte: Autor

- Vejam o satélite desenhando o caminho da sua órbita circular perfeita!

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- Esta atividade é fundamental para consolidar a ideia de que a rotação mantém a distância invariável entre um ponto e o centro de giro. O uso da circunferência como "prova" visual ajuda o aluno a entender o conceito.
- O recurso **Habilitar Rastro** é uma ferramenta poderosa para visualizar a trajetória. Se o rastro não desenhar um círculo perfeito, peça ao aluno para verificar se o ponto de rotação selecionado foi exatamente a origem (0, 0).
- Um erro comum é o aluno digitar o valor fixo (ex: 45°) em vez do nome do seletor (α). Reforce que, para haver movimento, o ângulo de rotação deve ser uma **variável** dependente do controle deslizante.
- Na atividade de rotação, procure questionar os alunos sobre possíveis mudanças nos objetos durante o movimento, como tamanho ou ângulos. A intenção é levá-los a perceber que nada se altera, evidenciando que a rotação é uma transformação isométrica.

3.4 Atividades relativas à transformação geométrica Homotetia**3.4.1 Atividade 1 - Homotetia (Ampliação e Redução)**

Habilidade BNCC: EF07MA21 e EF07MA29

Objetivo: Compreender como figuras geométricas podem ser ampliadas ou reduzidas mantendo sua forma original, explorando a ideia de proporcionalidade entre as medidas.

Material Utilizado:

- 1 folha de papel quadriculado por dupla;
- Lápis e borracha;
- Régua;
- Lápis de cor ou canetinhas de duas cores diferentes.

Passo para realização:

1. Desenhe um retângulo de 4×2 no papel.

2. Escolha um ponto (Fora do retângulo) no papel que será chamado de **Centro de Homotetia (Ponto O)**.
3. Utilizando a régua, trace linhas que partem do ponto O e passem por cada vértice do retângulo.
4. **Ampliação:** Marque novos pontos nas mesmas linhas, a uma distância que seja o dobro da distância original entre o ponto O e cada vértice. Ligue os novos pontos utilizando uma cor diferente.
5. **Redução:** marque novos pontos nas mesmas linhas, agora na metade da distância entre o ponto O e os vértices do retângulo original. Ligue esses pontos com outra cor.
6. Compare as três figuras obtidas: a original, a ampliada e a reduzida.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

O aluno deve perceber que as figuras ampliadas e reduzidas mantêm o mesmo formato da figura original. Os ângulos permanecem iguais e os lados aumentam ou diminuem proporcionalmente.

Algumas dicas:

- Incentive os alunos a utilizarem a régua para garantir que as linhas partam exatamente do centro de homotetia.
- Peça que comparem os tamanhos dos lados das figuras.
- Destaque que a forma da figura não muda, apenas seu tamanho.

Variação Individual: Pedir que os alunos criem outra figura geométrica (triângulo ou pentágono) e realizem novamente a ampliação e a redução utilizando o mesmo ponto O .

3.4.2 Atividade 2 - Ampliação de Personagens (Malha Quadriculada)

Habilidade BNCC: (EF07MA29)

Objetivo: Compreender o conceito de semelhança de figuras planas através da ampliação em malha quadriculada, identificando que as medidas dos lados aumentam proporcionalmente enquanto os ângulos internos permanecem inalterados.

Materiais Necessários:

- Folha com o desenho original (personagem) em malha quadriculada de 0,5 cm ou 1 cm;
- Folha de papel quadriculado em branco para a ampliação (ou malha maior);
- Régua;
- Lápis e lápis de cor.

Passos para realização:

1. **Análise do Original:** O aluno deve observar o desenho do personagem e identificar as coordenadas de pontos-chave (vértices ou curvas) na malha original.
2. **Escolha da Escala:** Definir com o professor se a ampliação será de razão $k = 2$ (dobro) ou $k = 3$ (triplo).
3. **Mapeamento de Pontos:** Para cada quadrado ocupado no desenho original, o aluno deverá ocupar 2×2 (ou 3×3) quadrados na nova folha.
4. **Traçado e Contorno:** Utilizar a régua para conectar os pontos principais, garantindo que as proporções do personagem sejam mantidas.
5. **Finalização:** Colorir o desenho respeitando a paleta de cores original para reforçar a ideia de semelhança.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

- **Foco Pedagógico:** O objetivo central não é apenas o desenho artístico, mas a percepção de que, ao dobrar o lado de cada quadradinho, a área total da figura não apenas dobra, mas quadruplica (k^2).
- **Sugestões de Mediação:**
 - Se o personagem parecer "esticado" ou "achatado", incentive o aluno a contar novamente os quadradinhos de uma base ou altura específica.
 - Para alunos que terminarem rapidamente, proponha o processo inverso (redução), partindo de uma imagem grande para uma malha menor.
 - Você pode nomear as linhas (A, B, C...) e colunas (1, 2, 3...) da malha para facilitar a localização dos pontos pelos alunos.

3.4.3 Atividade 3 - Construindo um Projetor de Homotetia

Habilidade BNCC: EF07MA21 e EF07MA29

Objetivo: Compreender como ocorre a ampliação de figuras através do conceito de homotetia.

Material Utilizado:

- Caixa de papelão pequena;
- Lanterna ou luz de celular;
- Papel vegetal ou transparência;
- Lápis ou caneta;
- Papel quadriculado colado na parede.

Passos para a realização:

1. Use fita adesiva para selar a caixa de papelão. O segredo aqui é não deixar entrar nenhum feixe de luz por frestas indesejadas.
2. Em uma das frentes, recorte um quadrado de $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$. É por aqui que a imagem será projetada.
3. No lado oposto da caixa, faça um furo pequeno e bem centralizado (cerca de 1 cm de diâmetro). Esse furinho será o nosso Centro de Homotetia (O).
4. Preparação da imagem: Posicione o papel acetato transparente por cima da figura impressa no papel branco. Usando o marcador permanente preto, cubra as linhas da figura (dica: faça traços bem grossos ou preencha o interior da figura para obter uma sombra mais nítida).
5. Recorte o pedaço do acetato que contém o desenho (deixando uma margem de segurança) e cole-o com fita adesiva cobrindo totalmente a abertura quadrada de $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ da caixa.
6. Posicione a lanterna bem próxima ao furo pequeno (atrás da caixa) e aponte o conjunto para a parede.
7. A luz passará pelo furo, atravessará a caixa em linha reta, passará pela imagem no acetato e projetará a sombra ampliada da figura no papel quadriculado.

COMENTÁRIOS AO PROFESSOR

Colegas, como esta é uma atividade para os alunos realizarem em casa, o nosso papel principal será orientá-los na preparação e, depois, mediar os resultados que eles trouxerem para a sala de aula. Vejam as orientações para direcionar o trabalho:

- Oriente os alunos a realizarem o experimento em casa mudando a distância do aparelho: eles devem afastar ou aproximar a caixa da parede para observar que, quanto mais longe, maior fica a projeção. Peça para que eles anotem o que acontece com o tamanho do triângulo nesse movimento. Na aula seguinte, quando eles trouxerem esses registros, você usará essas diferentes distâncias para introduzir e calcular a razão de semelhança com a turma.
- Aproveite os dados medidos em casa para explicar formalmente a razão de homotetia (k). Mostre aos alunos que essa razão é a constante que dita quantas vezes a imagem aumentou em relação ao desenho original,
- Oriente os alunos a calcularem a razão de semelhança (k), que dita quantas vezes a imagem aumentou em relação ao desenho original, realizando a razão:

$$k = \frac{\text{Lado Projetado}}{\text{Lado Original}}$$

ou então a razão entre as distâncias tridimensionais do experimento:

$$k = \frac{\text{Distância do Furo até a Parede}}{\text{Distância do Furo até o Acetato}}$$

- Explique que, como a projeção é uma ampliação direta e os raios de luz saem em linha reta a partir do furo, a razão entre as distâncias (da parede ao furo e do acetato ao furo) será exatamente igual à razão k entre os lados das figuras.
- Solicitar aos alunos a produção de um vídeo digital da montagem do projeto. Essa atividade contribui para aumentar o interesse dos estudantes e, posteriormente, o vídeo pode ser utilizado para apresentação em sala de aula. É uma excelente ferramenta para você avaliar o engajamento e o processo de construção deles em casa, além de servir como um ótimo gatilho para o debate no início da aula.
- Recomende que os alunos façam um traço bem grosso com o marcador preto ou que pintem o interior da figura na hora de passar o desenho para o acetato. Quanto mais opaco for o traço, mais visível será a sombra projetada, facilitando a coleta das medidas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação buscou investigar o ensino das Transformações Geométricas no 7º ano, com o propósito de oferecer ferramentas que realmente ajudem no dia a dia da sala de aula. A análise da literatura e a conexão com a BNCC confirmaram que, para superar as dificuldades de aprendizagem, precisamos de abordagens mais dinâmicas, que evitem apresentar a Geometria como uma teoria distante da prática e da realidade dos alunos.

O ponto central deste trabalho é o caderno de atividades didáticas, desenvolvido para ser um suporte prático ao professor de matemática. Longe de ser apenas uma lista de exercícios, o material propõe uma sequência que explora a reflexão, translação, rotação e homotetia de forma interessante e participativa. Cada atividade foi pensada com objetivos claros e orientações pedagógicas para facilitar a aplicação dos conceitos e garantir que o conteúdo faça sentido para o estudante.

Entende-se que este material é um recurso valioso, pois permite que as habilidades previstas na BNCC sejam trabalhadas de maneira mais envolvente. Ao adotar essa proposta, espera-se que o professor consiga mostrar a utilidade da geometria no cotidiano, estimulando o raciocínio e a criatividade dos alunos. Por fim, este estudo abre caminho para que futuras pesquisas avaliem como essas atividades funcionam em diferentes escolas, mantendo sempre o foco em melhorar o ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 8585818026.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980. ISBN 9788529402024.
- Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<https://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 2026-01-15.
- ESCHER, M. C. *Birds*. 1938. Tesselação de aves. Disponível em: <<<https://waltermattos.com/desvendando-a-tecnica-de-escher>>>.
- ESCHER, M. C. *Pegasus*. 1946. Tesselação (divisão regular do plano). Disponível em: <<<https://waltermattos.com/desvendando-a-tecnica-de-escher>>>.
- FERNANDES, L. F. D. *Geometria Analítica*. Curitiba: Editora InterSaberes, 2023. (Série Dialógica).
- IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica*. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 7. ISBN 9788535717549.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade: 7º ano: Ensino fundamental - anos finais*. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2018. Manual Digital-Interativo do Professor.
- LIMA, E. L. *Isometrias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, SBEM, São Paulo, n. 4, p. 3–13, 1995.
- MATTIONI, M. D. *Fachada do Palácio Senador Hélio Campos, Boa Vista*. 2026.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Geometria II*. Rio de Janeiro: Editora IMPA, 2010.
- OLIVEIRA, C. N. C.; FUGITA, F. *Matemática: Ensino Fundamental – Anos Finais / 7º ano*. Brazil: SM Educação, 2025. Manual do Professor, Geração Alpha, editora responsável: Andrezza Guarsoni Rocha.
- PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial: 7º ano: Ensino fundamental – anos finais*. São Paulo: Editora Scipione, 2019. Manual do Professor.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Pearson / McGraw-Hill do Brasil, 1987. ISBN 9780074504123.
- TOOLSIE, R. *Mathematics: A Complete Course with CXC Questions*. Revised edition. Trinidad and Tobago: Caribbean Educational Publishers, 1996. v. 1. BSc, MACP. ISBN 9789766481322.