UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GUILHERME CARDOSO DALTRO

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: RECOMPONDO AS FRAÇÕES E MOBILIZANDO OS LOGARITMOS

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA

DEZEMBRO DE 2025

GUILHERME CARDOSO DALTRO

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: RECOMPONDO AS FRAÇÕES E MOBILIZANDO OS LOGARITMOS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, pela Universidade estadual do Sudoeste da Bahia – UESB/Vitória da Conquista.

Orientador: Dr. Genilson Soares de Santana.

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA

DEZEMBRO DE 2025

FICHA CATALOGRÁFICA

D158u

Daltro, Guilherme Cardoso.

A utilização de materiais concretos nas aulas de matemática do ensino médio: recompondo as frações e mobilizando os logaritmos / Guilherme Cardoso Daltro, 2025.

130f. ; il.

Orientador (a): Dr. Genilson Soares de Santana.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2025.

Inclui referências F. 119 – 123

1. Material concreto - Matemática. 2. Frações. 3. Logaritmos. 4. Ensino médio. I. Santana, Genilson Soares de. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA. III. T.

CDD: 372.7

Catalogação na fonte: Karolyne Alcântara Profeta - CRB 5/2134
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Guilherme Cardoso Daltro

A utilização de materiais concretos nas aulas de matemática do Ensino Médio: recompondo frações e mobilizando logaritmos

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Pedro Quintino da Silva Neto - UNIMONTES

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana - UESB

Prof.ª Dr.ª Cleusiane Vieira Silva - UESB

Prof. Dr. Daniel de Jesus Silva - UNEB

Vitória da Conquista - Ba

Aprovada em 18 de dezembro de 2025

Documento assinado digitalmente
gov.br PEDRO QUINTINO DA SILVA NETO
Data: 19/12/2025 10:17:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Pedro Quintino da Silva Neto - UNIMONTES

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Cleusiane Vieira Silva**, **Professor Titular**, em 18/12/2025, às 20:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Genilson Soares de Santana**, **Professor Assistente**, em 18/12/2025, às 21:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Daniel De Jesus Silva**, **Professor**, em 18/12/2025, às 22:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://seibahia.ba.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **00130191465** e o código CRC **E0211CDA**.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma investigação a respeito das contribuições do uso de materiais concretos manipuláveis nas aulas de matemática desenvolvidas com estudantes de 1º e 2º anos do Ensino Médio ao mobilizar tópicos relacionados aos conteúdos de frações e logaritmos. Mais precisamente, analisamos como o uso do material concreto manipulável contribuiu para o processo de aprendizagem dos referidos tópicos. Para tal, foi realizada uma pesquisa qualitativa e os dados analisados foram coletados a partir de atividades e observações desenvolvidas com estudantes de 1º e 2º anos do Ensino Médio do Instituto Federal Baiano (IFbaiano), Campus Santa Inês, no interior da Bahia. As atividades propostas continham questões sobre frações e logaritmo que deveriam ser respondidas utilizando os materiais manipuláveis como a Calculadora de Frações e a Régua de Cálculo Logarítmica. Da elaboração e aplicação de uma sequência didática, foi possível alcançar todos os objetivos propostos: discutir aspectos didáticos do uso de materiais manipuláveis, desenvolver e adaptar recursos concretos específicos, aplicar a sequência aos estudantes e identificar contribuições efetivas para a compreensão dos conteúdos. O estudo confirmou a relevância do uso de materiais concretos como recurso pedagógico para favorecer a aprendizagem.

Palavras-chave: Material concreto; Frações; Logaritmos; Ensino Médio

ABSTRACT

This study investigates the contributions of using concrete manipulable materials in mathematics classes with first- and second-year high school students, focusing on topics related to fractions and logarithms. Specifically, it analyzes how the use of such materials supported the learning process of these contents. A qualitative research approach was adopted, with data collected through activities and classroom observations conducted with students from the Instituto Federal Baiano (IF Baiano), Santa Inês Campus, located in the interior of Bahia, Brazil. The proposed activities included questions on fractions and logarithms that were solved using manipulable materials, such as the Fraction Calculator and the Logarithmic Slide Rule. Through the design and implementation of a didactic sequence, all proposed objectives were achieved: discussing didactic aspects of the use of manipulable materials, developing and adapting specific concrete resources, applying the sequence with students, and identifying effective contributions to content understanding. The results confirm the relevance of concrete manipulable materials as pedagogical resources to enhance learning in mathematics.

Keywords: Concrete materials; Fractions; Logarithms; High school education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Calculadora de Frações 38
Figura 2 - Malha quadriculada da Calculadora de Frações 38
Figura 3 - Frações equivalentes à fração 3/6 39
Figura 4 - Comparação das frações 1/2 e 1/3 40
Figura 5 - Comparação das frações 3/4 e 5/6 40
Figura 6 - Soma da fração 1/2 + 1/3 40
Figura 7 - Soma 1/2 + 3/4 41
Figura 8 - Cálculo de 3/4 – 1/3 42
Figura 9 - Divisão de 2/3 por 1/6 42
Figura 10 - Produto 1/3 x 3/4 43
Figura 11 - Resposta da dupla A1 à questão 01 54
Figura 12 - Resposta da dupla B1 à questão 01 54
Figura 13 - Resposta da dupla C1 à questão 02 55
Figura 14 - Resposta da dupla D1 à questão 02 55
Figura 15 - Resposta da dupla D1 à questão 03 56
Figura 16 - Resposta da dupla E1 à questão 03 56
Figura 17 - Resposta da dupla F1 à questão 03 56
Figura 18 - Resposta da dupla B1 à questão 04 57
Figura 19 - Resposta da dupla C1 à questão 04 57
Figura 20 - Resposta da dupla G1 à questão 04 58
Figura 21 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 05. 59
Figura 22 - Respostas da dupla B1 às questões 06 e 07. 59
Figura 23 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 07. 60
Figura 24 - Resposta da dupla B1 à questão 08 61
Figura 25 - Resposta da dupla H1 à questão 09. 62
Figura 26 - Resposta da dupla I1 à questão 10 62
Figura 27 - Resposta da dupla J1 à questão 11 62
Figura 28 - Resposta da dupla K1 à questão 11. 63
Figura 29 - Resposta da dupla H1 à questão 11. 63

Figura 30 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 10. 65
Figura 31 - Resposta da dupla L1 à questão 12. 65
Figura 32 - Resposta da dupla L1 à questão 12. 66
Figura 33 - Resposta da dupla B1 à questão 14. 66
Figura 34 - Resposta da dupla M1 à questão 14. 67
Figura 35 - Resposta da dupla L1 à questão 14. 67
Figura 36 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 14. 67
Figura 37 - Respostas da dupla L1 às questões 15 e 16. 68
Figura 38 - Resposta do aluno N1 à questão 17. 69
Figura 39 - Respostas do aluno O1 às questões 17 e 18. 69
Figura 40 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 18. 70
Figura 41 - Resposta do aluno P1 à questão 19. 71
Figura 42 - Régua de Cálculo Circular, datada entre 1660 -1680. 78
Figura 43 - Exemplo de uma Régua de Cálculo Linear datada de 1840. 78
Figura 44 - Jhon Napier 79
Figura 45 - Capa do Mirifici Logarithmorum 80
Figura 46 - Henry Briggs 84
Figura 47 - Barras de Napier 85
Figura 48 - Multiplicação de 1952 por 4 utilizando as barras de Napier 86
Figura 49 - Escala de Günter. 87
Figura 50 - Uma Régua de Cálculo moderna 88
Figura 51 - Régua de Cálculo Logarítmica utilizada 88
Figura 52 - Aproximação para o log 2 na Régua de Cálculo Logarítmica 89
Figura 53 - log 4,5 na Régua de Cálculo Logarítmica 89
Figura 54 - Aproximação para $100{,}2$ na Régua de Cálculo Logarítmica 90
Figura 55 - Aproximação para $100{,}5$ na Régua de Cálculo Logarítmica 90
Figura 56 - Produto 2x3 na Régua de Cálculo Logarítmica 91
Figura 57 - Produto 5 x 7 na Régua de Cálculo Logarítmica 92
Figura 58 - Divisão de 4,5 por 9 na Régua de Cálculo Logarítmica 92

Figura 59 - Log 2 e log 8 na Régua de Cálculo Logarítmica 93
Figura 60 - Cálculo de 0,9 ÷ 0,3 na Régua de Cálculo Logarítmica 93
Figura 61 - 100,9 na Régua de Cálculo Logarítmica 93
Figura 62- 100,3 na Régua de Cálculo Logarítmica 94
Figura 63 - Resposta da dupla A2 à questão 01. 98
Figura 64 - Resposta da dupla B2 à questão 01. 98
Figura 65 - Resposta da dupla C2 à questão 02. 99
Figura 66 - Resposta da dupla D2 à questão 02. 99
Figura 67 - Resposta da dupla E2 à questão 03. 99
Figura 68 - Resposta da dupla F2 à questão 03. 100
Figura 69 - Resposta da dupla G2 à questão 04. 100
Figura 70 - Resposta da dupla H2 à questão 04. 100
Figura 71 - Respostas da dupla H2 às questões 05, 06 e 07......................... 101
Figura 72 - Respostas da dupla E2 às questões 05, 06 e 07. 101
Figura 73 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Régua de Cálculo Logarítmica para responder à questão 05... 102
Figura 74 - Resposta da dupla I2 à questão 08. 103
Figura 75 - Respostas da dupla J2 às questões 09, 10 e 11 103
Figura 76 - Respostas da dupla K2 às questões 09, 10 e 11......................... 103
Figura 77 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Régua de Cálculo Logarítmica para responder à questão 11... 104
Figura 78 - Respostas da dupla K2 às questões 12, 13 e 14. 105
Figura 79 - Respostas da dupla L2 às questões 12, 13 e 14 105
Figura 80 - Respostas da dupla M2 às questões 15, 16 e 17. 107
Figura 81 - Respostas da dupla L2 às questões 15, 16 e 17. 107
Figura 82 - Respostas da dupla L2 às questões 19, 20 e 21 108
Figura 83 - Respostas da dupla N2 às questões 19, 20 e 21......................... 108
Figura 84 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Régua de Cálculo Logarítmica para responder à questão 19... 108
Figura 85 - Respostas da dupla N2 às questões 23, 24 e 25......................... 111
Figura 86 - Respostas da dupla O2 às questões 23, 24 e 25. 111
Figura 87-- Respostas da dupla K2 às questões 26, 27 e 28......................... 112

Figura 88 - Respostas da dupla N2 às questões 26, 27 e 28......................... 113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Objetivo Geral e Objetivos Específicos 20
Tabela 2 - Cinco significados de fração 24
Tabela 3 - Habilidades da BNCC para o ensino de frações no 6º ano 32
Tabela 4 - Habilidades da BNCC para o ensino de frações no 7º ano 33
Tabela 5 - Dissertações ou teses relacionadas ao ensino de frações por meio do uso do material concreto 44
Tabela 6 - Habilidades da BNCC para o ensino de logaritmos no Ensino Médio 76
Tabela 7 - Progressões aritmética e geométrica 82
Tabela 8 - Dissertações ou teses que discutem o uso de material concreto no ensino de Logaritmos 94

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 14
2. FRAÇÕES: O QUE SABEMOS? 22
2.1 O Ensino De Frações 22
2.2 Frações na BNCC 32
2.3 A Calculadora de Frações 36
2.4. Revisão de Literatura 44
2.5 Recursos Metodológicos 51
2.6 Análise dos dados 53
Análise da Questão 01 53
Análise da Questão 02 55
Análise da Questão 03 56
Análise da Questão 04 57
Análise da Questão 05 58
Análise da Questão 06 e 07 59
Análise da Questão 08, 09, 10 e 11 61
Análise da Questão 12 e 13 65
Análise da Questão 14 66
Análise da Questão 15 e 16. 68
Análise das Questões 17 e 18. 69
Análise das Questão 19. 71
3. OS MATERIAIS CONCRETOS MANIPULÁVEIS E O ENSINO DE LOGARITMOS 73
3.1 O Ensino de Logaritmo e a BNCC 73
3.2 História e evolução dos Logaritmos 77
3.2.1 John Napier e suas motivações 79
3.2.2 Michael Stifel 82
3.2.3 A Contribuição de Briggs e a evolução para os Logaritmos Decimais 84
3.2.4 A Régua de Cálculo Logarítmica 85
3.3 Revisão de Literatura 94
3.4 Metodologia 97

3.5 Análise dos Dados 98
Terceiro Momento: O Uso da Régua de Cálculo. 101
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS 116
REFERÊNCIAS 119
APÊNDICES 124
APÊNDICE A – LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE FRAÇÕES 125
APÊNDICE B – LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE LOGARITMO 129

1. INTRODUÇÃO

A ideia de investigar os materiais concretos e suas contribuições no processo de aprendizagem da matemática, enquanto objeto de pesquisa, surge a partir de experiências exitosas que eu[1], enquanto professor de matemática, tive a oportunidade de realizar. Neste trabalho, entendemos materiais concretos (ou materiais concretos manipuláveis) como todos os objetos concretos, isto é, objetos que podem ser tocados e manipulados, criados e desenvolvidos para contribuir e auxiliar no ensino e na aprendizagem de conceitos e/ou objetos matemáticos.

Vou citar três destas experiências com situações que ilustram o motivo da escolha de investigação do presente tema de pesquisa.

A primeira é um relato de uma situação realizada com estudantes de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental Anos Finais de uma escola do interior da Bahia. Os estudantes estavam construindo conhecimentos sobre frações, neste processo percebi algumas dificuldades, por exemplo, a compreensão a respeito dos significados das frações: Número racional, Parte-todo, Medida, Operador Multiplicativo, Quociente (veja a Tabela 2), comparação entre frações, frações equivalentes e os algoritmos das operações de adição e subtração de frações. Havia um sentimento de que a forma de ensino tradicional com a qual estava acostumado desenvolver o conteúdo parecia mais com um ritual, ensinava o processo operacional, cheio de regras e macetes, até chegar ao resultado esperado. Os estudantes apenas decoravam o que deveria ser realizado em cada etapa, por muitas vezes conseguiam chegar ao resultado esperado, no entanto, sem significado algum para eles. Eles estavam apenas memorizando os processos para executá-los durante as atividades e obter boas notas nas avaliações.

Pensando em realizar uma atividade em que os alunos pudessem participar de forma ativa, desenvolvi com eles uma versão própria da tábua de

---

[1] Por se tratar de um relato, faremos o uso da primeiro pessoal do singular.

frações, aqui chamada de *Calculadora de Frações*, um conhecido material concreto usado no ensino das frações.

A segunda experiência com o uso do material concreto manipulável em sala de aula foi em 2024, enquanto lecionava aulas de Contabilidade em um Centro de Ensino profissionalizante, no interior da Bahia. Na ocasião, ministrei uma oficina sobre calculadoras, na qual realizávamos operações matemáticas com o ábaco, com a *calculadora de frações* e com a *régua de cálculo logarítmica* (ou conforme mencionada neste trabalho, *Régua de Cálculo*). Os alunos eram de turmas diversas de 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio. Considero a aplicação da oficina exitosa, pois os alunos, que nunca haviam tido contato com um ábaco, ficaram impressionados com as potencialidades do artefato, por exemplo, a realização de cálculos com números grandes de forma prática. Também mobilizaram os conceitos de logaritmos a partir da Régua de Cálculo (mais detalhes sobre este material estão na Subseção 3.2.4).

Oportunizar aos estudantes o contato com materiais manipuláveis, por exemplo, a Régua de Cálculo, fornecem momentos para que compreendam o processo histórico com que um conceito matemático é construído. Neste caso, recorri à História da Matemática como ferramenta metodológica que pudesse mobilizar os conceitos dos logaritmos a partir das invenções de John Napier (1550-1617), que criou os logaritmos como ferramenta para facilitar, por exemplo, a multiplicação de números a partir de uma transformação em adições

> Segundo o grau de dificuldade, as operações aritméticas podem ser classificadas em três grupos: adição e subtração formam as operações de primeira espécie, multiplicação e divisão são de segunda espécie, enquanto potenciação e radiciação constituem as operações de terceira espécie. Procurava-se então um processo que permitisse reduzir cada operação de segunda ou terceira espécie a uma de espécie inferior e, portanto, mais simples. (Lima, 2010, p.1).

Por exemplo, para multiplicarmos 2 x 3 com a Régua de Cálculo bastava realizarmos uma adição entre log 2 e log 3. Os alunos acharam interessante, pois nunca haviam tido contato com esta operação de forma concreta e perceberam a aplicação de uma ideia que eles consideram difícil: logaritmo. Após esta discussão tomaram a iniciativa de realizar outros cálculos, desta forma explorando a curiosidade com a Régua de Cálculo. Operaram com potência, por exemplo, 5^3, eles multiplicaram 5 x 5 na Régua de Cálculo e o resultado multiplicaram novamente por 5.

Considerando as experiências exitosas com o uso de material concreto em sala de aula, apresentei o relato de experiência intitulado *Calculadora de frações: relatos sobre o uso de material concreto nas aulas de Matemática* (Daltro, 2025) no Encontro Baiano de Educação Matemática (EBEM) no ano de 2025. Apresentei as experiências já citadas anteriormente com o uso da Calculadora de Frações nos processos de ensino e de aprendizagem. Os participantes ouvintes do evento (em sua maioria professores de matemática ou professores de matemática em formação) demonstraram interesse em utilizar a Calculadora de Frações em suas aulas e, uma das ouvintes mencionou já conhecer a tábua de frações (veja a Seção 2.3) e já usou em suas aulas.

A terceira experiência de divulgação destes materiais, foi uma oficina realizada na 7ª Semana de Matemática da UESB - VII SEMAT- com os dois materiais: a Calculadora de Frações e a Régua de Cálculo Logarítmica. A oficina contou com a participação de estudantes de licenciatura em matemática e professores de matemática atuantes em redes municipais, estaduais, federais e privadas. O foco desta atividade foi discutir as potencialidades do uso desses materiais nas aulas de matemática. Os participantes demonstraram interesse pelo material e sua utilização em sala de aula, pois perceberam possíveis potencialidades na mobilização de conceitos matemáticos a partir da experiência concreta.

A partir da minha experiência docente, da discussão com outros profissionais em eventos e do desenvolvimento de oficinas observei que é preciso voltarmos a atenção para a busca de materiais e métodos de ensino que possam contribuir no processo de aprendizagem da matemática. O objetivo é de que a sala de aula seja um espaço de construção e fortalecimento do conhecimento matemático e não apenas um ambiente para memorização de métodos e técnicas de resolução de uma dada operação.

O uso do material manipulativo pode ser uma maneira de proporcionar aos estudantes aulas participativas e além disso, um apelo concreto de objetos matemáticos abstratos. “Neste contexto, podemos nos questionar como os alunos irão entender o conceito (por exemplo) de fração se eles nunca tiverem relação com algo concreto relacionado às frações?” (Daltro, 2025, p.2).

Em consonância a isto, Lorenzato esclarece uma importante relação entre a compreensão (sobre) um objeto e a sua materialidade (concreta):

> É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, flui em suas mentes a ideia correspondente ao objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação mental das propriedades inerentes a objetos. (Lorenzato, 2006, p.22. apud Daltro, 2025, p.2).

Além disso, é importante oportunizar “[...] momentos em que os alunos discutem e mobilizem conhecimentos matemáticos a partir de experiências com objetos manipuláveis podem fortalecer e consolidar os conhecimentos já estabelecidos” (Daltro, 2025, p.2). Neste sentido, Kamii (1990) esclarece

> Dizer que a criança deve construir seu próprio conhecimento não implica que o professor fique sentado, omita-se e deixe a criança inteiramente só. Isso significa que ele deve ser o mediador, o incentivador, o organizador do processo de aprendizagem do aluno. O professor não pode “caminhar” à frente de seus alunos, indicando caminhos e resultados prontos, mas deve oferecer às crianças, atividades interessantes, partindo do real e de preferência do manipulável e dos conhecimentos que elas já dominam, facilitando a descoberta, favorecendo a própria construção do saber (Kamii, 1990, p.48 apud Daltro, 2025, p.2)

Outra justificativa para o uso de materiais concretos manipulativos no ensino de frações e de logaritmos com estudantes do Ensino Médio está relacionada com as consequências da pandemia da Covid-19 para a Educação. Os estudantes que hoje estão cursando o Ensino Médio são aqueles que durante a pandemia estavam se apropriando dos primeiros contatos com o conjunto dos números racionais (operações com frações e propriedades deste conjunto) e com as propriedades de potenciação para números inteiros e racionais, que são fundamentais para a compreensão do conceito e das propriedades de logaritmo (veja a Seção 3.1).

No que se refere ao contexto da pandemia da Covid-19, Barros e Vieira (2021) discutem os desafios enfrentados pela Educação no Brasil durante esse período. Por exemplo, professores desatualizados em relação às tecnologias digitais, ausência de infraestrutura física das escolas, isto é,

> Na maior parte das escolas quase não havia laboratório de informática nestas instituições e as que tinham este espaço, funcionavam de forma precária, com insuficiência de computadores para todos os estudantes e limitação do acesso à Internet aos docentes. Isto também reflete na oferta do ensino remoto, uma vez que considerando uma melhor estrutura, as escolas privadas têm condições de apresentar aos estudantes aulas com recursos mais diversificados, como aulas ao vivo e metodologias ativas digitais. (Barros; Vieira, 2021, p. 10)

As autoras também discutem as dificuldades dos próprios estudantes, com problemas relacionados ao acesso às tecnologias digitais de informações e dificuldades na utilização dos equipamentos e das plataformas de aulas. Citando uma pesquisa do IBGE, as autoras relatam que

> Na pesquisa realizada em 2018 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) sobre Amostra de Domicílios Contínua, 1 em cada 4 brasileiros não possuem acesso a rede mundial de computadores. [...] A utilização de tecnologias digitais na área educacional ainda não é uma realidade na maior parte do Brasil, principalmente nas regiões menos desenvolvidas. Dentro dessa realidade, é comum estudantes dividindo celulares com seus familiares. (Barros; Vieira, 2021, p. 11)

As autoras ainda relataram outros problemas que envolviam os professores no contexto da pandemia: administrar as suas próprias questões emocionais e as dos alunos, ademais de aprender a conciliar trabalho e família em um mesmo ambiente (Barros; Vieira, 2021). Além disso, os professores foram obrigados a se adequar ao ensino remoto, fazendo com que eles tivessem que buscar novas metodologias além daquelas que estavam acostumados, pois agora já não tinham mais quadro, giz, pincel, restando apenas os materiais tecnológicos. Conforme salientam Barros e Vieira

> Os docentes foram obrigados a transformar de forma abrupta suas estratégias de ensino e não tiveram apoio dos governos para qualificá-los. Dessa forma, de um momento para outro, os professores tiveram que abandonar suas práticas tradicionais habituais de ministrar aulas, como o quadro de giz ou pincel ou o projetor de slides e passaram a se preocupar em preparar aulas, utilizando outros recursos, linguagens e em menor tempo, gravar aulas, instruir famílias e interagir virtualmente com os discentes, sendo que nem eles próprios tinham domínios dos drives online e plataformas virtuais (Barros; Vieira, 2021, p. 14)

Além de todas as dificuldades já elencadas, neste contexto, há as questões relacionadas aos pais dos estudantes. Barros e Vieira chamam a atenção sobre as dificuldades dos pais quanto ao acesso à internet, à falta de capacitação para utilizar as ferramentas tecnológicas, as questões financeiras e alteração na rotina de casa.

> Quanto à capacidade dos pais de auxiliarem seus filhos nas tarefas escolares, a maior parte dos pais reclama de não estar apto a desenvolver estas atividades, pois muito não tem formação para isso. [...] Os pais podem não ter condições financeiras para manter mais de um filho em aulas online simultaneamente, consequentemente as famílias com melhores condições econômicas garantem aos seus filhos o acesso às plataformas digitais, sendo que as famílias com maior vulnerabilidade não conseguem fazê-lo, comprometendo a vida escolar dos discentes durante e após a pandemia. (Barros; Vieira, 2021, p. 14)

Diante dessas dificuldades elencadas acima (e outras que não foram mencionadas aqui), é válido reconhecer que este cenário intensificou as defasagens de conteúdos. Neste contexto, políticas nacionais de recomposição da aprendizagem foram construídas (veja Brasil, 2025), é importante que estas propostas possam recompor conteúdos não consolidados que servem de pré-requisitos para novos conhecimentos.

Neste sentido, a experiência da Calculadora de Frações e da Régua de Cálculo apresenta-se como motivação não só para mobilizar conteúdos específicos de fração e logaritmo, mas também possibilitar que os estudantes desenvolvam o raciocínio lógico e outras habilidades motoras e sociais, tornando a Matemática prazerosa e significativa

> As dificuldades relacionadas a aprendizagem em matemática são realidades que se apresentam no cenário da Educação Básica no Brasil. Por vezes, tais dificuldades são influenciadas pela forma como a matemática é desenvolvida em sala de aula, que muitas das vezes induz aos estudantes insegurança e temor [...]. A fim de proporcionar um ambiente de aprendizado em que os estudantes se sintam participantes deste processo, surge o questionamento: *Como trazer uma abordagem diferente da tradicional para as aulas de matemática? Como proporcionar nas aulas de matemática ambientes em que os alunos participem ativamente do processo de ensino e aprendizagem?* (Daltro, 2025, p.1).

Tendo estas perguntas como propósito norteador, propõe-se como objetivo geral e objetivos específicos:

Tabela 1: Objetivo Geral e Objetivos Específicos

Objetivo geral			
Resgatar o conhecimento acerca das Réguas de Cálculo e utilizar em sala uma adaptação deste material, bem como a Calculadora de Frações, a fim de mobilizar conhecimentos sobre frações e logaritmos.			
Objetivos específicos			
1. Discutir aspectos didáticos referentes ao ensino de Frações e Logaritmos utilizando materiais concretos;	2. Desenvolver materiais concretos adaptados para o ensino de Frações e Logaritmos;	3. elaborar uma sequência de atividades abordando Frações e Logaritmos com o uso de material concreto e aplicar aos estudantes pesquisados;	4. verificar as contribuições dessa sequência para a aprendizagem de Frações e Logaritmo pelos estudantes.

Fonte: Elaboração do autor

A definição desses objetivos contribuiu para a organizar a estrutura desta dissertação em 3 capítulos. O capítulo 1 foi a apresentação da introdução, na qual foram relatadas a motivação e a justificativa para a realização da pesquisa.

O capítulo 2, intitulado *Frações: o que sabemos,* está dividido em 6 seções, onde a primeira e a segunda abordam as dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem das frações e as orientações da BNCC respectivamente e, na terceira, fazemos uma discussão sobre a *Calculadora de Frações.* Nas Seções 2.4, 2.5 e 2.6 fazemos, respectivamente, uma revisão sistemática de literatura, um apanhado metodológico que norteou a pesquisa e a análise dos dados coletados pela pesquisa.

O capítulo 3, intitulado Materiais manipuláveis e o ensino de logaritmos, abordamos a *Régua de Cálculo,* está dividido em 6 seções, sendo a primeira dedicada ao ensino de logaritmos e o que a BNCC indica. Na Seção 3.2 foi realizado um levantamento histórico das ideias que desencadearam na invenção dos logaritmos. Na Seção 3.2.4 foi discutida a *Régua de Cálculo.* Assim como no Capítulo 2 separamos três Seções para a revisão de literatura, aspectos metodológicos e análise dos dados, a saber, 3.3, 3.4 e 3.5. Por fim, as Considerações a respeito desta pesquisa, suas contribuições para a comunidade acadêmica e ideias para trabalhos futuros.

2. FRAÇÕES: O QUE SABEMOS?

Neste capítulo fazemos uma breve discussão a respeito do ensino de frações, possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes durante o processo formativo, métodos utilizados por professores, o impacto que a pandemia da Covid-19 causou no processo de aprendizagem e o que a BNCC propõe acerca do tópico de frações.

2.1 O Ensino De Frações

O conteúdo de frações desenvolvido em turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental Anos Finais (vale ressaltar que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os estudantes têm contato com frações, no entanto, não partiremos deste ponto em nossa discussão) é um dos tópicos de matemática em que os estudantes tendem a apresentar dificuldades, que para muitos pesquisadores estão relacionadas "(...) à complexidade e às múltiplas facetas do número racional" (Bertoni, 2008, p. 221). Mas além disso, ainda há as dificuldades relacionadas ao ensino:

> (...) as frações estão entre os principais (conteúdos do Ensino Fundamental Anos Finais) e um dos mais difíceis de serem trabalhados com os alunos, pois se trata de um processo complexo e as dificuldades de compreensão podem estar associadas às dificuldades do professor em ministrar tal conteúdo, por isso, faz uso de recurso metodológico pouco apropriado para o desenvolvimento desse conteúdo e, consequentemente, para a aprendizagem dos alunos utilizando métodos ultrapassados que acabam tornando o ensino e a aprendizagem de forma mecânica e desinteressante para os estudantes. (Ferreira; Costa, 2022, p.151)

Cavalieri (2005) destaca que o pouco uso das frações no cotidiano é uma das razões pelas quais as crianças sentem dificuldades com o tema, diariamente não são oferecidas oportunidades para que elas se familiarizem com esta ideia. Assim, a falta de apelo manipulativo ou até mesmo de aplicações em seu contexto social, faz com que o estudante não se interesse pelo tema. Assim, é importante que o professor em sala de aula, promova uma discussão que possibilite ao estudante mobilizar os conceitos e significados das frações a partir de experiências concretas e proponha atividades que exemplifiquem significados e estejam presentes em situações cotidianas.

Neste sentido, Oliveira (2022) destaca que muitos livros didáticos trazem sugestões para a utilização de exemplos concretos em sala de aula, além disso, sua experiência pessoal, revela, por exemplo, a presença de uma questão em um livro didático que solicitava ao estudante a representação da fração 2/3. Neste material havia a sugestão para que o professor recortasse uma folha em três pedaços de mesmas dimensões e que mostrasse dois desses pedaços aos alunos, sendo esta, por exemplo, uma forma de usar representações concretas no contexto da sala de aula.

Oliveira (2022) também destaca que o fator “tempo de qualidade”, isto é, o tempo de sala de aula dedicado ao tema, é crucial para uma boa aprendizagem do conteúdo de frações, mas, na prática, os professores não conseguem desenvolver este tópico de maneira profunda e acabam optando por não explorar alguns pontos importantes (como a exploração de materiais manipulativos) para cumprir o cronograma. Desta forma, a falta de utilização de estratégias com material manipulativo pode acarretar no prejuízo do processo de aprendizagem dos alunos, que muitas vezes apenas decoram o que o professor apresenta para reproduzir em avaliações.

Para Etcheverria *et al*. (2019) aponta que os alunos sentem dificuldades com as frações pois “a representação decimal é percebida no cotidiano com mais frequência do que a forma fracionária [...] devido ao advento das calculadoras decimais” (p.73). Neste contexto, Bertoni (2008) chama atenção para a importância da representação dos números racionais na forma fracionária:

> Consideramos que, a despeito do uso social e generalizado da representação decimal para o número racional, tais conceitos (fração e número fracionários) são mais adequados a certas situações de quantificação e comparação do que a representação decimal. Por exemplo, ao compararmos um terço e um quarto, a representação em decimais seria pouco significativa e desnecessária. A representação fracionária pode ainda constituir-se em apoio para a introdução da representação decimal. Além disso, consideramos a representação

> fracionária relevante na compreensão mais ampla de números racionais, de proporções, frações algébricas, probabilidade. (p.211).

Assim, quando o professor não oportuniza possíveis situações cotidianas vivenciadas pelos alunos, as quais há o uso direto ou indireto das frações, o aprendizado ocorre de forma isolada, limitando-se apenas na memorização de regras e algoritmos para reprodução em atividades e avaliações. Cabe ao professor evitar que este conteúdo seja reduzido apenas à memorização de regras e aplicação direta de técnicas (Silva; Perovano, 2012).

Etcheverria *et al*. (2019) defende que o pouco ou nenhum uso de materiais manipuláveis no ensino das operações com números racionais na forma fracionária cria uma lacuna conceitual no entendimento do aluno. O estudante passa a aprender efetuando ações com símbolos que muitas vezes não têm significado conceitual para ele, o que resulta apenas na memorização de um processo de regras.

Neste contexto, Hänsch, Figueiredo e Kieckhoefel (2023), destacam que as dificuldades apresentadas pelos alunos podem ter origem na compreensão e identificação das diferentes formas de representação e significados que as frações podem assumir.

Tabela 2 - Cinco significados de fração

Significado	Descrição
Número	Nesse significado, as frações não precisam estar inseridas dentro de um contexto ou situação específica. A fração deve ser entendida como um número que possui um valor e pode ser representado como forma ordinária ou decimal.
Parte-todo	Aqui as frações representam a parte de algo. O denominador representa a quantidade de partes em que o todo foi dividido e o numerador a quantidade de partes que foram tomadas.
Medida	A medida pode ser dividida em situações de quantidades intensivas ou extensivas. As quantidades intensivas correspondem a uma relação entre a medida de dois objetos e as quantidades extensivas uma das partes é utilizada como parâmetro para medir as outras.

Operador Multiplicativo	A fração é utilizada como multiplicador de uma determinada quantia, ou seja, ela é um escalar aplicado em uma quantidade indicada.
Quociente	Neste caso, a fração representa uma divisão de uma quantidade em um determinado número de partes.

Fonte: Hänsch, Figueiredo e Kieckhoefel (2023).

Neste sentido, Etcheverria *et al*. (2019) observa que a diversidade de significados para as frações se torna uma dificuldade para os alunos que, muitas vezes, não sabem identificar corretamente qual dos significados da fração está presente em uma determinada situação proposta pelo professor. O aluno pode representar a fração em forma de desenhos (Parte-todo), mas não consegue transferir esse conhecimento para situações que envolvem outros significados.

Outras dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas ao fato de que alguns deles compreenderem os números racionais como números naturais, e a fração como apenas uma interação entre dois números naturais separados por um traço e, por consequência, realizam as operações como se fossem as operações com números naturais que têm costume. Neste sentido,

> [...] os alunos assimilam conceitos de números inteiros para a compreensão de frações, o que subsequentemente leva a concepções errôneas sobre frações devido às diferenças inerentes entre números inteiros e frações. Por exemplo, os números inteiros são representados por um numeral, enquanto as frações são representadas por dois numerais e uma barra de fração. Uma concepção errônea comum que surge do viés de números inteiros é que os alunos frequentemente enxergam numeradores e denominadores como números inteiros independentes, em vez de interpretar uma fração como um único número. Isso frequentemente resulta em erros comuns, como somar numeradores e denominadores de duas frações (por exemplo, 2/3 + 4/6 = 6/9). (Namkung; Fuchs, 2019, p.37, tradução nossa).

Buscando compreender as possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes, especialmente nas operações com números fracionários, Etcheverria *et al.* (2019), traz uma investigação desenvolvida com estudantes do 7º e 9º anos do Ensino Fundamental e 1º e 3º anos do Ensino Médio. Como parte da pesquisa, havia o desenvolvimento de uma atividade na qual o estudante era estimulado a executar operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações. Os resultados mostraram, segundo Etcheverria *et al*. (2019), que "o índice de desempenho dos estudantes em cada uma das operações foi insatisfatório" (p. 71). A análise dos erros cometidos pelos estudantes "sinaliza uma deficiência nos processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo" (p 71). As autoras ainda reforçam que "o ensino das operações com números racionais deve ser repensado, pois não está oportunizando a compreensão das regras operatórias com significado" (p. 87). A pesquisa sugere a realização de uma proposta de formação continuada com professores do Ensino Fundamental para que a discussão desses resultados possibilite reflexões sobre as práticas pedagógicas voltadas ao ensino e aprendizagem das frações e, possam propor atividades que oportunizem aos estudantes a construção de conhecimentos iniciais consolidados.

Baseando-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval, Hänsch, Figueiredo e Kieckhoefel (2023) sugerem que a principal dificuldade das aprendizagens em Matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico[2].

Os sistemas semióticos específicos da Matemática recebem, por Duval (2009), o termo registro.

> Para ele, um registro de representação é um sistema semiótico que cumpre, além da função de comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento. Partindo desta ideia, o autor faz referência a quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas. (Denardi, 2017, p.5)

---

[2] Conforme explica Duval (2009), um sistema semiótico pode ser entendido como um conjunto de signos, cada um formado a partir de regras próprias e convenções que determinam sua estrutura e seu uso. Esses signos se relacionam entre si de maneira interna e coerente, o que torna possível identificar e compreender os objetos, ideias ou conceitos que eles procuram representar. Em outras palavras, um sistema semiótico funciona como um meio de comunicação, pois tem a capacidade de produzir significados, transmitir informações e permitir que esses conteúdos sejam compartilhados e interpretados pelos indivíduos que o utilizam.

Assim, para o contexto de frações, uma mesma fração pode ter várias formas de ser representada, ou seja, diferentes registros, como a forma fracionária, a pictórica, a decimal, a percentual e a concreta (com material manipulativo). Citando Duval (2009), Denardi acrescenta que

> nenhum registro, ou representação, é completa em relação ao objeto que representa, ou seja, cada representação revela um determinado conceito, uma determinada propriedade, uma característica diferente. Assim a mobilização e coordenação de vários registros de representação tornam-se importantes para que os objetos matemáticos não venham a ser confundidos com suas representações e para que possam ser reconhecidos em cada uma delas. (Denardi, 2017, p.6)

Assim sendo, apresentar materiais concretos manipulativos para os alunos é uma forma de apresentar um registro semiótico diferente, o que poderá contribuir para que o aluno caminhe entre os diferentes registros e tenha melhor compreensão do conteúdo. E para que ocorra a compreensão dos diferentes tipos de registro é necessário, segundo Duval (2009), primeiramente entender para que eles servem e como eles funcionam. Desta forma, na Matemática, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos.

Neste sentido, Hänsch, Figueiredo e Kieckhoefel (2023) trazem o foco para o uso de materiais concretos e de uma metodologia que incentive o aluno a desbravar o conteúdo de forma ativa, e que isso pode facilitar a compreensão dos significados de frações (veja a Tabela 2) e suas representações. Nesta pesquisa, as autoras investigaram as contribuições da utilização da *barra de frações,* uma barra construída de material MDF cortada à laser que representava o inteiro e frações de 1/2, 1/7, 1/12 e 1/20 cortadas proporcionalmente ao inteiro. A pesquisa mostra que “as barras de frações se mostraram um material versátil, com potencial de auxiliar o ensino dos cinco significados de fração e permitindo ao aluno transitar entre diferentes registros de representação, partindo do concreto para o abstrato.” (Hänsch; Figueiredo; Kieckhoefel, 2023, p.11).

Castejon (2017) ressalta que os objetos manipuláveis podem ser produzidos pelo educando e seu professor, num processo colaborativo e mediado, sendo que sua eficácia dependerá do planejamento e objetivos para os quais são utilizados. Nesse aspecto, o material concreto manipulável mostra-se um importante meio para construção de conceitos a respeito dos números fracionários, promovendo, consequentemente, uma aprendizagem de forma criativa, reflexiva e participativa.

Apesar da discussão sobre frações ganhar maior destaque na literatura com pesquisas relacionadas ao ensino/aprendizagem de frações no Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Finais), vale destacar a importância da discussão desta temática no Ensino Médio. Os estudantes desta etapa mobilizam os conceitos e propriedades de frações para a compreensão de tópicos como, por exemplo, funções racionais, equações fracionárias, porcentagens, juros, razões trigonométricas, análise de gráficos e muitos outros. Desta forma, "(...) mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos" (Campos; Rodrigues, 2007, p.70).

Neste sentido, Bertoni (2008) traz um relato de Baldino, que nos leva a uma reflexão a respeito das dificuldades sobre frações, que os estudantes levam consigo durante seu percurso escolar, até mesmo no Ensino Superior.

> tenho um aluno que está fazendo cálculo I pela terceira vez; já aprendeu razoavelmente as regras de derivação. Para ele, um terço menos um nono dá um sexto. Quando os colegas se espantaram, ele corrigiu para menos um sexto. (Baldino, Bertoni, 2008, p. 221)

Rodrigues, Silva e Dantas (2017, p.3), destacam que "fração é um conteúdo que muitos estudantes sentem dificuldades em compreender e a maioria dos professores sente dificuldades para ensinar". As autoras trazem uma discussão sobre o uso de materiais concretos manipuláveis em uma turma do 1º ano do Ensino Médio "com o objetivo de proporcionar aos alunos a oportunidade de compreender frações […] tornando o processo de ensino aprendizagem mais dinâmico e significativo" (p.3). Neste sentido, é importante que o professor oportunize momentos de aprendizagem que vão além da execução mecânica de regras. Sendo assim, os autores, citando Gômez–Grannel, destacam que

> O maior erro na aprendizagem de frações está no fato do ensino ser baseado mais na aplicação de regras do que na compreensão do significado. Os alunos são capazes de repassar as regras dadas, de fazer aplicações das mesmas em atividades, mas não conseguem relacioná-las com seu cotidiano, pois o assunto não gerou uma compreensão real. (Rodrigues, Silva, Dantas, 2017, p. 3)

Além disso, também é importante o uso de metodologias diferentes, para dinamizar os processos de ensino e de aprendizagem de fração, fazendo com que o aluno desperte o gosto e a curiosidade de aprender. Neste sentido, Rodrigues, Silva, Dantas (2017) investigam a utilização de um material no formato circular, formato de "pizza", feitas em cartolina, combinado a uma atividade com perguntas que mobilizava os diversos conceitos envolvendo frações

> A utilização do material concreto possibilitou uma aprendizagem aos educandos, fazendo-os compreenderem o significado das frações, classificando-as em maior, menor ou igual, levando-os a compreenderem que os diferentes tipos de frações podem formar frações maiores que a unidade, realizando operações, não utilizando apenas regras, mas, sim, construindo seu próprio conhecimento, sendo agente de sua aprendizagem, levando-os ao desenvolvimento do raciocínio e do pensamento crítico, fazendo a ligação entre teoria e prática. (Rodrigues; Silva; Dantas, 2017, p. 9)

É interessante que o professor possibilite aulas dinâmicas e participativas e o uso do material concreto tem a possibilidade de ser uma metodologia estimulante que alcança tal objetivo e leva ao desenvolvimento do raciocínio do aluno. Em consonância a esse papel do professor, Piaget defende que

> o educador continua indispensável, a título de animador, para criar as situações e armar os dispositivos iniciais capazes de suscitar problemas úteis à criança, e para organizar, em seguida, contra exemplos que levem à reflexão e obriguem ao controle das situações demasiado apressadas: o que se deseja é que o professor deixe de ser um conferencista e que estimule a pesquisa e o esforço, ao invés de se contentar com a transmissão de soluções já prontas. (Piaget, 1970, p. 18).

Piaget (1970) ainda destaca a importância de os indivíduos vivenciarem situações problemas, na interação com objetos de aprendizagem, no ambiente social real. Assim, a utilização de material concreto manipulável significa estimular a aprendizagem dos alunos e auxiliar na apresentação e concretização de suas ideias, fazendo da sala de aula um ambiente educativo na formação de cidadãos autônomos, críticos e criativos.

Assim, De Oliveira *et al*. (2019, p.1) destaca que o aluno aprende de uma forma mais significativa quando ele é o construtor do conhecimento, ou seja, a manipulação do material pode fazer com que o aluno formule conjecturas e, por consequência, o entendimento, por permitir visualizar aquilo que lhe é apresentado nas teorias. Os autores defendem que os materiais concretos possibilitam a oportunidade de os alunos aprenderem com a interação com o meio, com o material e com os colegas

> Os jogos lúdicos permitem uma situação educativa cooperativa e interacional, ou seja, quando alguém está jogando está executando regras do jogo e ao mesmo tempo, desenvolvendo ações de cooperação e interação que estimulam a convivência em grupo. (De Oliveira *et al*., 2019, p.2, apud Friedman, 1996, p. 41)

De Oliveira *et. al* (2019) em sua investigação utilizaram o disco de frações para o desenvolvimento de uma atividade que envolvia questionamentos verbais à turma sobre operações com números fracionários e um tempo para respostas a estas perguntas. Os autores relataram que alguns estudantes conseguiram solucionar às perguntas com o uso do material, mas não sabiam solucionar as mesmas questões a partir dos métodos tradicionais, ou seja, adicionar números fracionários a partir do cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc). Neste contexto, pesquisadores perceberam uma oportunidade para introduzir na discussão a equivalência entre frações a partir do material concreto. A pesquisa revelou a oportunidade de tornar a aula mais interativa, os alunos demonstraram motivação e interesse na busca do conhecimento, fazendo com que os resultados fossem “extremamente satisfatórios.” (De Oliveira *et. al*, 2019, p. 3).

A construção de material manipulável pode também oportunizar momentos de discussão de problemáticas sociais, por exemplo, sobre a reciclagem de materiais e o fortalecimento de uma consciência ambiental

> Na busca por alternativas didáticas e sustentáveis, o desenvolvimento de atividades lúdicas no processo de ensino aprendizagem de matemática utilizando materiais recicláveis tem sido instrumento didático utilizado nos últimos anos. Essas atividades promovem a compreensão da utilidade do que se está aprendendo e que é também fundamental. O meio ambiente se adequa a uma forma de conscientizar os alunos do quanto podemos reutilizar materiais que muitos consideram sem valor. Além disso, a atividade lúdica, de forma descontraída, realiza o trabalho de internalização de novos hábitos nos alunos, promovendo a sensibilidade para as questões ambientais (Macedo *et.al*, 2019, p. 7)

A pauta da reciclagem no processo educacional pode ser uma fonte de motivação e envolvimento para os alunos, visto que "a compreensão dos conteúdos se dá mais por aspectos concretos do que pelos aspectos abstratos." (Macedo *et al*. 2019, p. 6). O uso dos materiais concretos reciclados é uma importante possibilidade, pois os alunos podem trazer de casa materiais recicláveis que seriam descartados, mas que poderão ser usados na aula.

A discussão apresentada ao longo deste capítulo evidencia que o ensino e a aprendizagem de frações, tanto no Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Finais) quanto no Ensino Médio, ainda enfrentam desafios significativos que vão desde a compreensão conceitual das frações até as consequências da falta de um conhecimento sólido construído a partir desta compreensão. As dificuldades que muitos estudantes apresentam, podem ser consequência de práticas pedagógicas que priorizam a aplicação mecânica de regras em detrimento da construção de significados resultando em um aprendizado fragmentado e descontextualizado.

A literatura destaca que a superação dessas dificuldades exige uma mudança de perspectiva nos processos de ensino e de aprendizagem, em que o professor assuma um papel de mediador e promotor de experiências significativas. O uso de materiais concretos e de metodologias ativas mostram-se essenciais para aproximar os conceitos abstratos da realidade dos alunos, tornando o conhecimento acessível e significativo.

Portanto, o ensino de frações deve ser repensado à luz de uma abordagem integradora, reflexiva e contextualizada. Cabe ao professor criar um ambiente de aprendizagem que estimule a curiosidade, a autonomia e o pensamento crítico dos estudantes, promovendo uma Matemática viva, significativa e conectada ao cotidiano. Somente assim será possível romper com o ensino tradicional baseado apenas na aplicação de técnicas e algoritmos e, formando sujeitos capazes de compreender e aplicar os conceitos matemáticos de forma consciente e funcional em diferentes contextos da vida.

2.2 **Frações na BNCC**

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define as competências e habilidades que todos os estudantes da Educação Básica (desde a Educação Infantil ao Ensino Médio) em todo território nacional.

Quanto ao conteúdo de frações, os objetos de conhecimentos que devem ser mobilizados no Ensino Fundamental (desde os Anos Iniciais), em específico, durante o percurso do 6º ano, são:

> "significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais." (Brasil, 2018, p. 300)

E desenvolver as habilidades apresentadas a seguir:

Tabela 3 - Habilidades da BNCC para o ensino de frações no 6º ano

Código da habilidade	Habilidade
EF06MA07	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes

	de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
EF06MA08	Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
EF06MA09	Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
EF06MA10	Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018)

Para os estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimento como

> Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. (Brasil, 2018, p306)

Com as seguintes habilidades:

Tabela 4 - Habilidades da BNCC para o ensino de frações no 7º ano

Código da habilidade	Habilidade

EF07MA08	Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
EF07MA09	Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
EF07MA10	Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
EF07MA11	Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
EF07MA12	Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018)

Conforme as informações compiladas nas Tabelas 3 e 4, espera-se que os estudantes, ao concluírem o Ensino Fundamental, tenham mobilizado e consolidado os diversos significados (veja a Tabela 2) de frações, percebam a fração como medida, número (a partir da relação de ordem e posicionamento na reta real), razão e operador, além disso, realizem de maneira satisfatória as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), potenciação, comparação, ordenação e definição na reta numérica. Tais conhecimentos são importantes para os conteúdos que serão desenvolvidos no percurso do Ensino

Médio, por exemplo, resolução de equações, cujos coeficientes são números racionais, encontrar pontos no plano cartesiano com coordenadas fracionárias, na discussão de funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas, entre outros. No que se refere os números racionais no Ensino Médio a BNCC propõe

> A consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (Brasil, 2018, p. 527)

O Ensino Médio enfrenta o problema de consolidar os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental, visto que esses conhecimentos não foram totalmente construídos pelos alunos. Neste sentido, é importante que o professor, ao perceber as dificuldades (sobre frações) apresentadas pelos estudantes, busquem meios para superá-las, uma vez que

> [...] os professores, geralmente, reconhecem as dificuldades dos alunos acerca desse conteúdo, mas que, muitas vezes, imputam tais dificuldades à falta de preparo anterior daqueles alunos. (Silva; Perovano, 2012, p.5, apud Moreira. Ferreira, 2008)

Conforme discutido anteriormente, a pandemia ocorreu, e as escolas não pararam completamente. Ocorreram aulas remotas que possibilitaram que muitos alunos continuassem a acompanhar as aulas. Optamos por utilizar o verbo *acompanhar* e do adverbio *muito,* pois, compreendemos que este foi um momento duro para a Educação brasileira e nem todos os estudantes conseguiram acompanhar as atividades remotas (pelos mais diversos fatores) e, dada a situação nunca antes vivenciadas pela Escola, muitos estudantes apenas estavam como espectadores diante das atividades. Desta forma, produzindo reflexos no aprendizado de matemática até os dias atuais.

Os “alunos da pandemia”, é um termo muitas vezes usado de forma pejorativa, para se referir aos estudantes que apresentam dificuldades e fazem parte dessa geração de alunos que carregam consigo o impacto da pandemia. Seja no Ensino Médio ou no Ensino Superior, tais alunos demonstram defasagem na aprendizagem de conteúdos básicos, não só em matemática, mas também em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, dificuldade de interpretação de textos.

O foco do nosso estudo são os alunos do Ensino Médio que passaram pela pandemia quando estavam no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental, e que, neste sentido, conjecturamos (não fizemos pesquisas prévias) o não aprofundamento no desenvolvimento do conteúdo de frações. Dessa forma, buscamos investigar com mais profundidade como materiais concretos podem contribuir para os alunos do Ensino Médio que por algum motivo (aqui citamos a pandemia), não conseguiram consolidar os conhecimentos esperados sobre frações.

2.3 A Calculadora de Frações

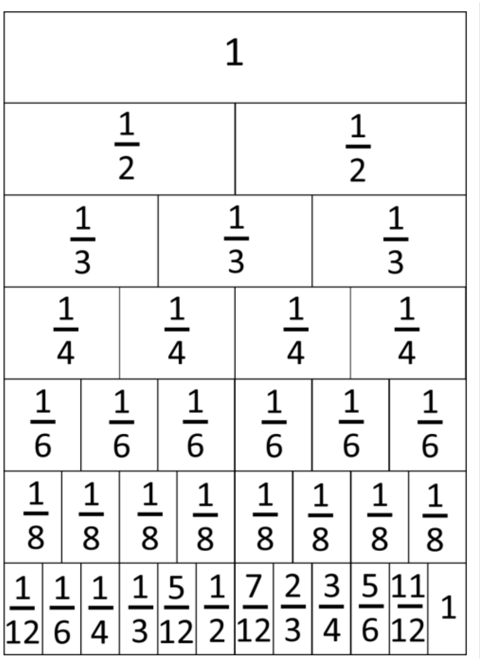
A *Calculadora de Frações* utilizada neste trabalho é uma adaptação da tábua de frações (veja Hänsch; Figueiredo; Kieckhoefel, 2023). A tábua de frações, como já comentamos na Seção 2.1, consiste em tiras proporcionalmente divididas, representando frações como o inteiro, 1/2, 1/7, 1/12 e 1/20. Essas tiras podem ser construídas de material MDF cortadas à laser, de papel, emborrachado, e outros materiais. A tábua pode ser usada para desenvolver tópicos de equivalência de frações, por exemplo, ao buscar duas tiras que corresponde à fração 1/2 é possível visualizar que isso equivale a uma (única) tira de mesmo comprimento da tira que corresponde ao inteiro, sendo assim a fração $2/2$ é equivalente a 1. Além disso, pode-se comparar duas frações utilizando esse material, por exemplo, ao comparar as partes do inteiro que representam as frações 1/2 e 1/7 é possível observar visualmente que a parte que corresponde ao número 1/2 é maior que a que corresponde a 1/7 e, por consequência, o número 1/2 é maior do que o número 1/7.

Quanto às operações com números fracionários a tábua de frações se limita a comparar o resultado com outras frações equivalentes, não apresentando um resultado simplificado, ou seja, uma fração irredutível. Pensando nisso, surge a Calculadora de Frações e agora pode-se realizar as 4 operações de forma prática[3] e o resultado é apresentado em uma tira extra chamada de “*visor*”.

A Calculadora de Frações se limita às frações 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/8 e 1/12, visto que a divisão entre estes números, com exceção do 1/8, por 1/12 resulta em um número inteiro. Isso significa que é possível fazer com que os pedacinhos[4] de 1/12 caibam inteiramente dentro dos pedacinhos correspondentes às frações que representam os outros denominadores, exceto o 1/8, que não usaremos na operação de adição de frações. Com esses pedacinhos é possível comparar alguns números na forma fracionária e buscar por frações equivalentes. Acrescentando o visor da Calculadora de Frações é possível obter o resultado para qualquer adição ou subtração envolvendo as frações 1, 1/2, 1/3, 1/4 e 1/6, até mesmo resultados maiores que 1 inteiro. Além disso, é possível realizar operações de divisão e multiplicação, sendo que para a multiplicação adicionamos uma malha quadriculada junto à Calculadora de Frações com 144 quadradinhos com comprimento do lado igual ao comprimento do pedacinho correspondente à fração 1/12 da Calculadora de Frações.

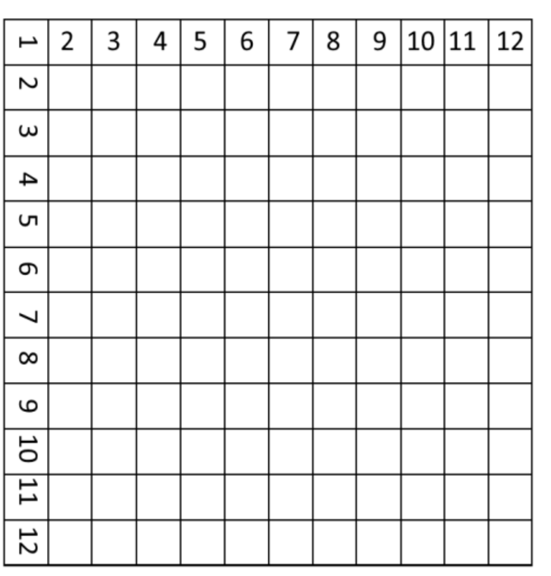
[3] Prática no sentido de praticidade
[4] Ao utilizarmos a expressão “pedacinho” ou “pedaço” estamos nos referindo às partes do inteiro da Calculadora de Frações que representam as frações.

Figura 1 - Calculadora de Frações



Fonte: Elaboração do autor

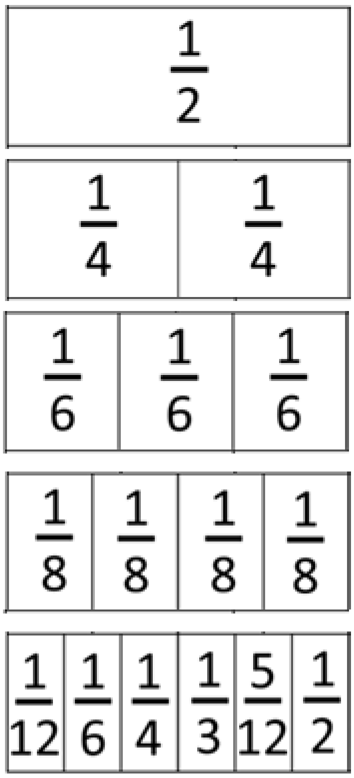
Figura 2 - Malha quadriculada da Calculadora de Frações



Fonte: Elaboração do autor

Para utilizar a Calculadora de Frações deve-se recortar os pedaços correspondendo às frações conforme apresentado na Figura 1, exceto o visor que se encontra na última faixa da Calculadora de Frações. Mesmo antes do recorte é possível encontrar frações equivalentes. Por exemplo, para encontrar quais frações são equivalentes à fração 3/6, posicione 3 pedacinhos correspondentes a 1/6 lado a lado, em seguida busque por outros pedacinhos que possuem as mesmas dimensões que os três pedacinhos de 1/6, encontramos assim a fração 1/2. Outra forma de encontrar frações equivalentes a 1/2 é, por exemplo, posicionar 2 pedaços correspondentes a 1/4 ou 4 pedaços de 1/8 ou ainda, seis pedacinhos de 1/12 no visor da Calculadora de Frações (Ver figura 3).

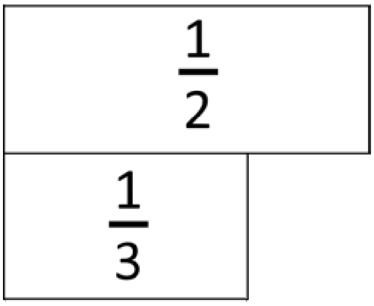
Figura 3 - Frações equivalentes à fração 3/6



Fonte: Elaboração do autor

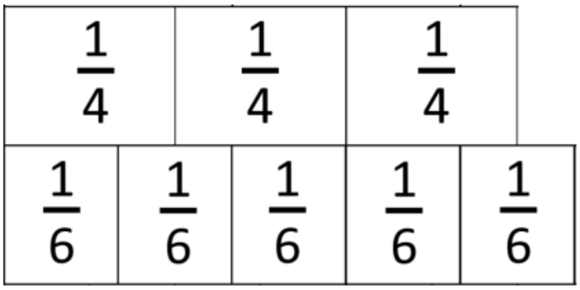
Para comparar números na forma fracionária com o auxílio da Calculadora de Frações, bastar posicionar as duas frações construídas a partir dos pedacinhos correspondendo a cada um dos números, uma acima da outra, o pedaço que apresentar maior comprimento, corresponde a maior fração. Nas figuras 4 e 5 podemos ver o processo da comparação de 1/2 com 1/3 e 3/4 com 5/6.

Figura 4 - Comparação das frações 1/2 e 1/3



Fonte: Elaboração do autor

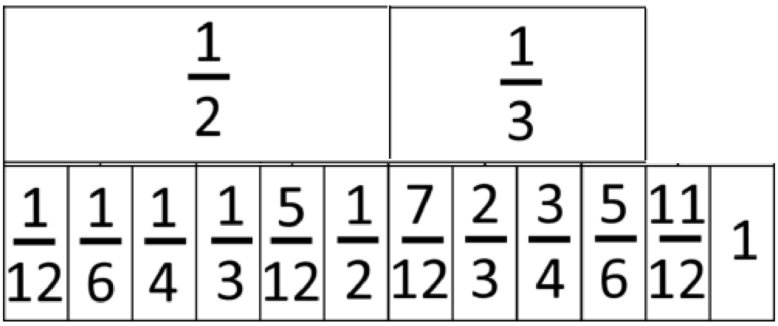
Figura 5 - Comparação das frações 3/4 e 5/6



Fonte: Elaboração do autor

Para realizar cálculos de adição, por exemplo, 1/2 + 1/3, colocamos ambos os pedacinhos lado a lado formando um único retângulo e encostamos o visor da Calculadora de Frações com o início (1/12) alinhado com a primeira fração, conforme a Figura 6. O último pedacinho com o qual o pedaço correspondendo a 1/3 se alinhou no visor foi 5/6, portanto, o resultado é 5/6.

Figura 6 - Soma da fração 1/2 + 1/3

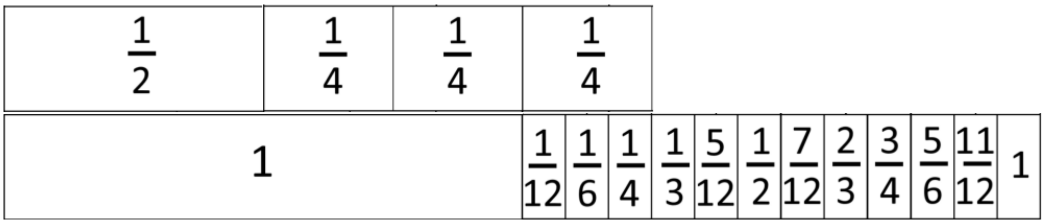


Fonte: Elaboração do autor

Note que o visor, apesar de estar dividido em frações de 1/12, já apresenta a fração em cada célula de forma simplificada, bem semelhante ao que calculadoras eletrônicas, como as de smartphones, já fazem ao realizar uma operação com frações. Nessas calculadoras o resultado já sai simplificado.

Quando o resultado é superior a 1 (ou seja, ultrapassando a faixa correspondente ao inteiro) colocamos o pedacinho 1 inteiro da Calculadora de Frações antes do visor e teremos a fração mista como resultado

Figura 7 - Soma 1/2 + 3/4

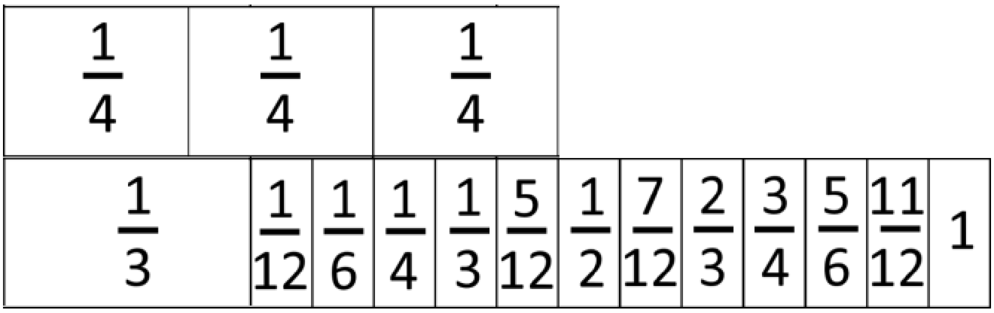


Fonte: Elaboração do autor

Na operação 1/2 + 3/4 obtemos a fração mista $1\frac{1}{4}$, que pode ser desenvolvida à fração imprópria 5/4.

A subtração na Calculadora de Frações pode ser realizada da seguinte maneira: por exemplo, 3/4 – 1/3, posicionamos as faixas correspondendo às frações uma embaixo da outra. Observe que entre a faixa que corresponde a fração menor e a maior há uma lacuna, esse espaço é corresponde ao resultado da operação, ou seja, a subtração corresponde a quanto deve-se completar à fração menor (o que falta) para obter a maior. Colocando o visor da Calculadora de Frações nessa lacuna obtemos o resultado 5/12 (veja a Figura 8).

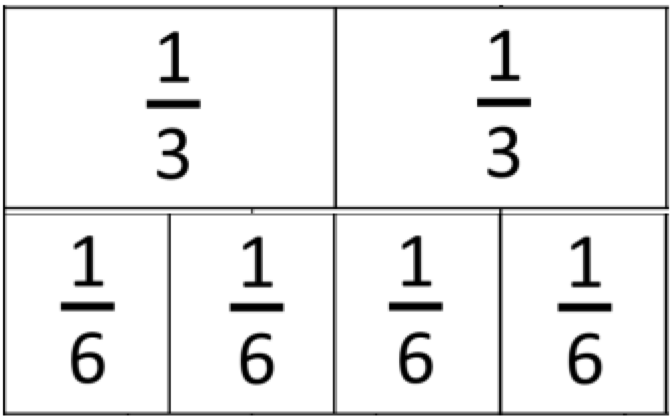
Figura 8 - Cálculo de 3/4 – 1/3



Fonte: Elaboração do autor

Para realizar divisões a Calculadora de Frações apresenta uma limitação. Por exemplo, ao realizar a divisão de 2/3 por 1/6 utilizaremos a seguinte estratégia: descobre-se a quantidade de pedacinhos correspondendo à 1/6 que podem ser colocados no pedaço correspondendo a 2/3, ou seja, 4. A limitação dar-se-á ao fato de que, pela estratégia apresentada, o resultado deve ser um número natural, visto que a quantidade de pedacinhos é um número natural.

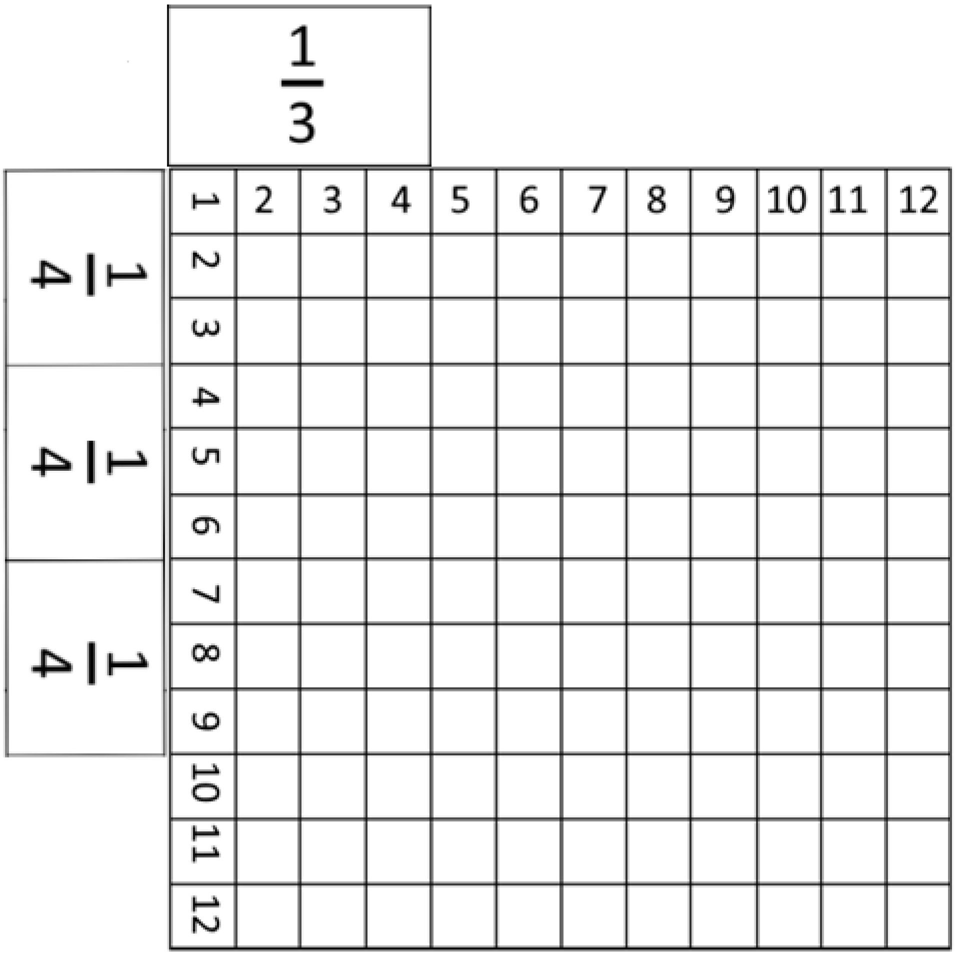
Figura 9 - Divisão de 2/3 por 1/6



Fonte: Elaboração do autor

Para a multiplicação utilizaremos a área de um quadrado de lado 1. Os fatores da multiplicação serão representados como as frações que representam uma parte do lado do quadrado, e o produto corresponde a área do retângulo cujos lados correspondem a essas frações. Como as frações que compõem a Calculadora de Frações, exceto o 1/8, ao serem divididas por 1/12 tem por quociente um número inteiro, dividimos o lado do quadrado em 12 partes, assim sua área será dividida em 144 quadradinhos unitários, que servirá como denominador padrão das respostas. O numerador é encontrado multiplicando os lados destes quadradinhos. Por exemplo, na multiplicação de 1/3 por 3/4, colocamos a fração 1/3 na horizontal da malha quadriculada conforme a Figura 10, ocupando 4 quadradinhos, e a fração 3/4 na vertical, ocupando 9 quadradinhos, a área resultante, isto é, 4x9 = 36 (basta contarmos os quadradinhos), corresponde ao numerador da fração e o denominador é 144, a fração 36/144 equivalente a 1/4 é produto 1/3 x 3/4.

Figura 10 - Produto 1/3 x 3/4



Fonte: Elaboração do autor

A multiplicação utilizando a Calculadora de Frações torna-se menos prática que as outras operações, porém pode ser utilizada para dar significado ao produto. Note que este processo se assemelha ao produto de números naturais.

2.4. Revisão de Literatura

Inicialmente foi realizada uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertação (BDTD) e no Banco de Dissertações do PROFMAT, a fim de mapear pesquisas que investiguem as contribuições do uso de materiais manipuláveis concretos nos processos de ensino e de aprendizagem das frações.

No BDTD usando as palavras-chave "*Material Concreto*", "*Matemática*" e "*Frações*" com um recorte temporal: 2018 a 2025, obtivemos 14 resultados, destes, apenas 4 dialogavam com o objetivo de nossa pesquisa. Destes resultados pertinentes, um estava presente no Banco de dissertações do PROFMAT.

No Banco de dissertações do PROFMAT foram realizadas buscas com a palavra-chave "*Frações",* obtivemos 112 resultados relacionados, porém destes, apenas 6 discutiam o uso do material concreto e estava em acordo com o recorte temporal escolhido.

Os dados foram consolidados na Tabela 5, a seguir.

Tabela 5 - Dissertações ou teses relacionadas ao ensino de frações por meio do uso do material concreto

Ano	Título	Autores	Programa
2019	O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações	Solange Ferreira dos Santos	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em

			Rede Nacional - PROFMAT
2019	A Elaboração E Construção De Material Pedagógico Como Metodologia Do Processo Ensino Aprendizagem De Frações E Produtos Notáveis	Glauce Ribeiro De Souza Mendonça	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
2019	Uma Proposta Didática Com A Utilização De Jogos, Materiais Manipulativos E Contextualização Visando O Ensino-Aprendizagem De Frações	Isabela Estephaneli Corty Ribeiro	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
2019	Conversões Entre Representações De Números Racionais: Limites E Possibilidades No Uso De Material Manipulável	Wellington José De Arruda Melo	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco

2023	Construção Do Conceito De Fração: Olhares Através Da Dobradura	Cristina Mayumi Hamada	Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal Rural Do Rio De Janeiro
2024	Ensino De Frações Através De Materiais Manipuláveis	Washington Raimundo Da Silva	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
2024	Uma Abordagem Para O Ensino De Frações Utilizando Material Manipulativo Baseada Nos Princípios Da Engenharia Didática	Camila Gasparin Magnaguagno	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
2024	O Corpo Dos Números Racionais E O Uso Do Círculo De Frações No Processo De	Débora Lucena de Carvalho Righi Moura	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

	Ensino E Aprendizagem		

Fonte: Elaboração do autor

Santos (2019) desenvolveu uma proposta de ensino que utiliza o Tangram como recurso manipulável para mobilizar o conceito de frações. A sequência didática criada pela autora buscou relacionar as peças do quebra-cabeça a ideias fundamentais, como equivalência, comparação e operações com números fracionários. A dissertação apresenta um estudo teórico sobre os números racionais em duas abordagens — geométrica e algébrica — com a intenção de oferecer ao professor subsídios conceituais para aprofundar a compreensão das frações e de suas operações. Outro ponto central do estudo é a defesa do uso de materiais concretos como estratégia para promover aprendizagens significativas. O Tangram, nesse contexto, contribuiu para tornar as aulas mais envolventes e para aproximar os alunos das situações matemáticas, já que permitia manipular e visualizar ideias abstratas. A sequência didática propõe atividades investigativas, nas quais os estudantes utilizam as peças do Tangram para responder questões e explorar propriedades das frações. A articulação entre esse material e os conteúdos de frações mostrou-se uma possibilidade pedagógica promissora, capaz de apoiar o trabalho docente e estimular maior interesse dos alunos nas operações fracionárias.

Mendonça (2019) investigou o ensino de frações e de produtos notáveis a partir da confecção e utilização de materiais concretos, como discos fracionários, réguas e quadrados de diferentes dimensões. A autora organizou oficinas e aplicou questionários, integrando estes materiais às atividades para possibilitar a visualização de conceitos e apoiar a compreensão das definições e regras envolvidas. A pesquisa, de caráter qualitativo, indicou resultados positivos: os estudantes participantes demonstraram avanços significativos em seu desempenho. O estudo foi conduzido com estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior de Goiás, selecionados por meio de um questionário inicial. As respostas dos participantes mostraram aumento expressivo no número de acertos relacionados aos conteúdos de frações, evidenciando evolução entre o início e o fim da investigação. Segundo a autora, além da melhora no desempenho, os alunos mostraram maior interesse e envolvimento nas atividades, demonstrando curiosidade e satisfação ao resolver os exercícios propostos, o que reforça a efetividade dos materiais concretos como apoio ao processo de aprendizagem.

Ribeiro (2019) desenvolveu uma proposta de ensino de frações baseada no uso de situações contextualizadas através de jogos educativos e materiais manipuláveis. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, buscando compreender como esses recursos influenciaram a aprendizagem dos estudantes. Entre as atividades utilizadas, estavam tarefas relacionadas ao cotidiano, como receitas culinárias, além de jogos e materiais concretos que apoiavam a visualização de ideias matemáticas envolvidas. Para reunir evidências sobre o processo de aprendizagem, foram aplicados questionários, um pré-teste, uma sequência didática estruturada e um pós-teste, complementados pela observação direta da participação dos alunos. O trabalho foi realizado estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental da rede pública de São José de Ubá – RJ. Os resultados mostraram que a utilização desses recursos motivou os discentes, proporcionando aulas mais atrativas e dinâmicas.

Melo (2019) investigou em que medida o uso de materiais manipuláveis pode favorecer ou limitar a conversão entre diferentes representações dos números racionais, trabalhando com estudantes do 8º e 9º ano de escolas públicas do Recife. O estudo também discutiu por que esse conteúdo costuma ser complexo para professores e alunos, destacando o papel que recursos concretos podem desempenhar para tornar esse processo mais acessível. A pesquisa foi desenvolvida a partir de um jogo educativo que envolvia tarefas de transformação entre representações dos racionais. Para isso, foram utilizados materiais concretos, como o material dourado adaptado, discos de frações, régua numérica e pastilhas plásticas, que serviram de apoio nas atividades propostas. Além das tarefas com uso dos manipuláveis, os estudantes também realizaram avaliações coletivas sem esses recursos e, posteriormente, atividades individuais com o apoio dos materiais concretos. Os resultados mostraram que o desempenho dos alunos foi superior quando puderam manipular os materiais, sugerindo que a visualização e o contato direto com representações concretas favorecem a compreensão das conversões entre registros semióticos. O estudo conclui que os materiais manipuláveis constituem um recurso didático significativo, sobretudo na etapa inicial do ensino dos números racionais, por estimularem o desenvolvimento da capacidade de abstração.

Hamada (2023) desenvolveu uma proposta pedagógica voltada à construção do conceito de fração a partir da criação de dois *kits* de materiais manipuláveis. Um deles foi elaborado com recortes de um quadrado, e o outro, com recortes de um círculo, ambos divididos em partes específicas — como metades e frações do tipo 1/3, 1/5, 1/6, 1/7, 1/9 e 1/10. Esses *kits* foram pensados para favorecer a investigação visual e tátil das frações, permitindo que os participantes observassem, comparassem e ordenassem diferentes representações fracionárias. A pesquisa combinou revisão bibliográfica com a construção e aplicação de atividades exploratórias organizadas em uma sequência didática. Essa sequência guiou os estudantes na produção dos *kits* e na análise das relações entre parte e todo, utilizando as figuras do quadrado e do círculo como base. As propostas foram implementadas com licenciandos em Matemática de uma universidade pública do Rio de Janeiro. Para registrar o desenvolvimento das atividades, foram utilizados diversos instrumentos, como diário de campo, gravações em áudio, fotografias e as fichas preenchidas pelos participantes ao resolverem atividades envolvendo o uso dos *kits*. A partir desses materiais, buscou-se compreender como os futuros professores justificavam suas escolhas e estratégias ao lidar com problemas relacionados ao conceito de fração. Como produto educacional, a autora produziu uma série de videoaulas disponíveis em um canal no *YouTube (link:@UniversodasIdeias-cm6js)*, incluindo nos vídeos um roteiro escrito com atividades que podem auxiliar professores e demais profissionais da educação. Segundo a autora, o conjunto de materiais possibilitou explorar, de forma significativa, tanto a construção da ideia de fração quanto a comparação entre diferentes formas de representá-la.

Silva (2024) analisou como o ensino de frações é conduzido na sala de aula, dedicando atenção especial à forma como esse conteúdo aparece nos livros didáticos e às dificuldades frequentemente enfrentadas tanto por professores quanto por estudantes. Para contextualizar o tema, o autor retomou aspectos históricos relacionados ao surgimento e ao uso das frações. No âmbito do produto educacional, o estudo resultou na criação de três oficinas voltadas ao ensino de frações, elaboradas para oferecer suporte aos docentes e estimular o uso de materiais manipuláveis — com destaque para o Tangram — como apoio didático. Observando que muitos alunos demonstram dificuldades em realizar operações como a adição de frações, o autor propôs atividades que articulam a parte aritmética com representações visuais, favorecendo a compreensão dos procedimentos. As oficinas foram aplicadas em escolas municipais de Ensino Fundamental localizadas em Belo Horizonte, Contagem e Betim. Os resultados indicaram que essas propostas contribuíram para a participação dos professores e ajudaram no desenvolvimento de abordagens mais eficazes para trabalhar o conteúdo de frações.

Magnaguagno (2024) investigou uma proposta de trabalho com materiais manipuláveis como alternativa para superar as dificuldades que muitos estudantes apresentam ao resolver problemas envolvendo frações. A intenção do estudo foi explorar as operações com números fracionários de modo que os alunos pudessem compreender seus significados, evitando a dependência da memorização de regras e procedimentos que, muitas vezes, lhes parecem confusos. A autora estruturou a investigação com base nas quatro etapas da engenharia didática e elaborou uma sequência composta por oito atividades utilizando frações circulares e réguas fracionárias. Esta proposta foi aplicada a uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, organizada de modo que as atividades fossem trabalhadas a partir do conceito de equivalência de frações. Durante a aplicação das atividades, observou-se uma evolução no entendimento dos estudantes sobre o tema e também um aumento em sua segurança ao lidar com as situações apresentadas. Apesar de uma resistência inicial, consequência do protagonismo exigido dos alunos, eles foram desenvolvendo maior autonomia ao longo do processo, explorando o material concreto e construindo conclusões próprias. Os resultados reforçam ainda o papel essencial da mediação docente, tanto para apoiar as aprendizagens quanto para orientar os estudantes diante de equívocos conceituais. De forma geral, o uso dos materiais concretos mostrou-se significativo para a resolução das tarefas propostas, contribuindo para a consolidação da autonomia e para uma compreensão mais clara das operações com frações a partir de relações de equivalência.

Moura (2024) buscou investigar as contribuições do uso de materiais concretos no contexto de uma turma de 6º ano Ensino Fundamental, com a presença de estudantes com necessidades específicas como TEA (Transtorno do Espectro Autista que envolve déficits em interações sociais e comunicação, além de padrões de comportamento restritos e repetitivos) e TDAH (Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade, caracterizado principalmente por desatenção, hiperatividade e impulsividade). A pesquisa propõe a utilização do círculo de frações montessoriano[5], um material didático concreto que permite que as crianças aprendam sobre frações manipulando peças de círculos divididas em partes iguais. Ele ajuda a entender conceitos como parte e todo, frações equivalentes, comparação e operações aritméticas com frações. Combinado a esse material, a pesquisa se deu através de uma sequência de atividades. A pesquisa demonstra uma evolução significativa do rendimento dos participantes. Como resultados “foi perceptível a evolução e o rendimento dos alunos diante do uso do material concreto escolhido. Sua eficácia esteve presente. quando aplicado a alunos com necessidades específicas" (Moura, 2024, p. 51).

2.5 Recursos Metodológicos

A pesquisa foi realizada com alunos do 1º ano de Ensino Médio do Instituto Federal Baiano (IF Baiano), campus Santa Inês, Bahia. Participaram da atividade 32 estudantes organizados em 16 duplas. A análise busca compreender as

[5] Os materiais montessorianos são materiais concretos manipuláveis criados dentro do Sistema Montessoriano, que é um sistema de ensino voltado para as necessidades e desenvolvimento da criança, criado por Maria Montessori (1870- 1952). Para mais informações veja https://vilamontessori.com.br/o-que-sao-materiais-montessori/

contribuições do uso de material concreto ao revisitar os conceitos de frações e as operações com números fracionários.

A produção dos dados se baseou na resolução de uma atividade (veja o Apêndice A), além da observação direta das reações dos alunos por parte do pesquisador. A atividade foi elaborada com o intuito de investigar a contribuição do material manipulável na mobilização de conhecimentos sobre frações pelos estudantes participantes, a possibilidade de tornar a aula mais participativa e auxiliar o professor no ensino dos conteúdos de frações equivalentes, comparação entre frações e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações.

Esta pesquisa classifica-se como qualitativa, uma que a nossa preocupação "não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc." (Goldenberg, 2004, p.14). Os dados aqui produzidos não relacionado à representatividade numérica nas respostas apresentadas pelos estudantes nas situações que envolviam os conceitos e operações com frações com o uso da Calculadora de Frações.

Os dados a serem analisados são constituído a partir das respostas dadas pelos estudantes às questões propostas, bem como a observação de sua participação e comentários durante a atividade. A ideia foi investigar a contribuição do material concreto manipulável no processo de aprendizgem de frações e logaritmos no Ensino Médio, compreendendo como os estudantes utilizaram o material na mobilização dos conteúdos e validação de suas respostas aos questionamentos propostos.

Para a análise dos dados consiste em uma tarefa de "trabalhar" com o material obtido na pesquisa. Deve-se organizar o material, dividindo-o em partes, relacionando as partes buscando por tendências e padrões relevantes. (Lüdke; André, 2013).

Analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa [...]. A tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências

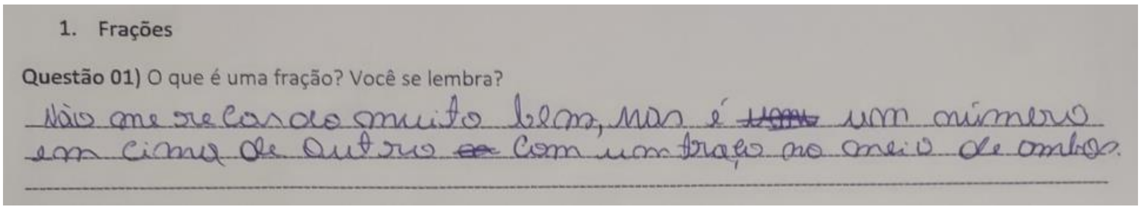
2.6 Análise dos dados

Esta subseção apresenta a análise e discussão dos dados obtidos a partir da aplicação da sequência de atividades desenvolvida com o uso da Calculadora de Frações, tendo como foco a compreensão dos conceitos relacionados às frações por estudantes do Ensino Médio. As análises são organizadas a partir das respostas dos participantes às questões propostas, bem como das observações realizadas durante as atividades, buscando identificar se houve compreensão, quais dificuldades conceituais e operatórias os alunos tiveram, além das contribuições do material concreto manipulável para a mobilização de significados matemáticos. À luz das habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), discutimos como os estudantes compreendem ideias fundamentais como parte-todo, quociente, equivalência, comparação e operações com frações, evidenciando o potencial pedagógico do uso de materiais concretos manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Análise da Questão 01

As duplas de participantes serão identificadas por A1, B1, ..., P1. Nas Figuras 11 e 12 apresentamos as respostas de duas duplas à questão 01, cujo o intuito era saber qual a concepção dos estudantes sobre fração.

Figura 11 - Resposta da dupla A1 à questão 01



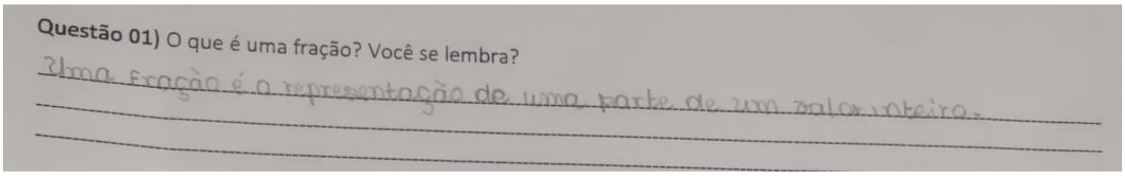
1. Frações

Questão 01) O que é uma fração? Você se lembra?

Não me recordo muito bem, mas é um número em cima de outro com um traço no meio de ambos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 12 - Resposta da dupla B1 à questão 01



Questão 01) O que é uma fração? Você se lembra?

Uma fração é a representação de uma parte de um valor inteiro.

Fonte: Dados da pesquisa.

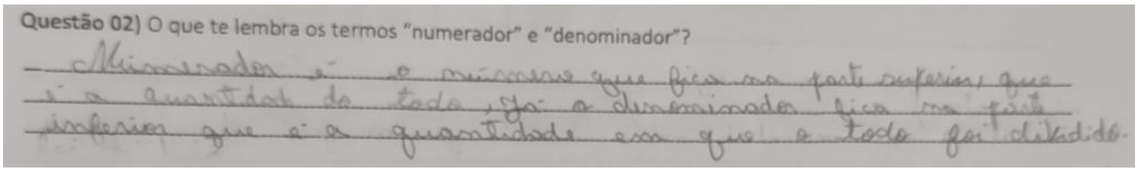
Outras respostas de diferentes duplas à questão 01 foram “a divisão de dois números”, “divisão”, “forma de representar parte de um todo”, “razão de números inteiros”, “parte de um número”, “divisão entre numerador e denominador”, “é quando dividimos algo em partes iguais”, “é a menor parte de um número” e “um número em cima de outro”. Com essas respostas percebe-se que os estudantes demonstram compreender o significado das frações, como o significado Parte-todo e Quociente (Ver Tabela 2). Notamos que nenhuma resposta faz associação da fração com um número (um dos significados apresentados na Tabela 2), o que demonstra dificuldades ainda neste sentido, como chama atenção Bertoni (2008):

> interrogando-se sobre o que é fração, são comuns respostas do tipo é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras. Já a pergunta fração é número? gera muitas dúvidas, mas, com certa frequência, aparece a resposta são dois números. (p.211)

As respostas apresentadas pelos estudantes demonstram uma mobilização da habilidade EF06MA07 (ver Tabela 3).

Análise da Questão 02

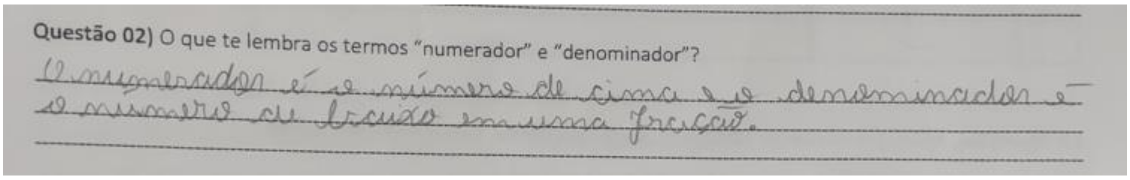
Figura 13 - Resposta da dupla C1 à questão 02


Questão 02) O que te lembra os termos "numerador" e "denominador"?

Numerador é o número que fica na parte superior, que é a quantidade do todo, Já o denominador fica na parte inferior que é a quantidade em que o todo foi dividido.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 14 - Resposta da dupla D1 à questão 02


Questão 02) O que te lembra os termos "numerador" e "denominador"?

O numerador é o número de cima e o denominador é o número de baixo em uma fração.

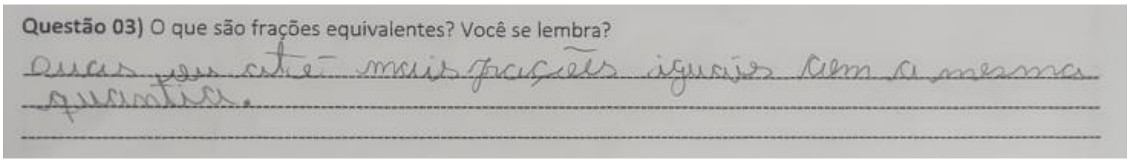
Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 02 queríamos compreender o que os discentes entendiam pelos termos numerador e denominador. Foram registradas as respostas "numerador é o número de cima, denominador é o número de baixo", "numerador representa a quantidade de partes que o numerador foi dividido", "numerador mostra quantas partes está considerando e o denominador em quantas partes iguais", "numerador é o número que será dividido pelo denominador" "numerador é o número de partes que estamos dividindo uma fração, e denominador quantas partes iguais em que o todo foi dividido", "divisor e dividendo". Com essas respostas os alunos demonstraram se lembrar dos elementos que compõem a fração, *numerador* e *denominador*.

Notamos algumas demonstrações de compreensão do significado dado por cada dupla. Sendo "o denominador, ou seja, o termo que denomina (o que dá o nome), se refere à unidade porque a constrói, a recupera" (Gimenez; Bairral, 2025, p.20) e o numerador indica a quantidade de partes que está sendo considerada. Nas respostas "divisor e dividendo" e "numerador é o número que será dividido pelo denominador" os alunos demonstram que compreender o significado quociente, que as frações podem representar uma divisão entre dois números inteiros com denominador diferente de zero. Os estudantes mobilizaram as habilidades EF06MA07 e EF07MA08 (ver a Tabela 2)

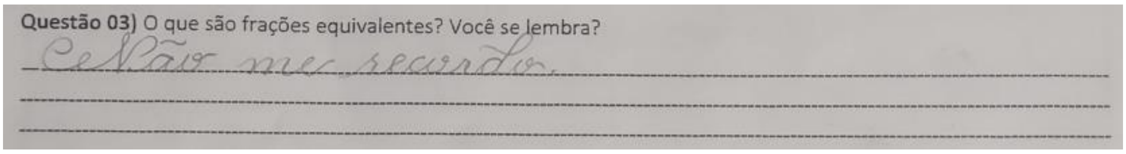
Análise da Questão 03

Figura 15 - Resposta da dupla D1 à questão 03



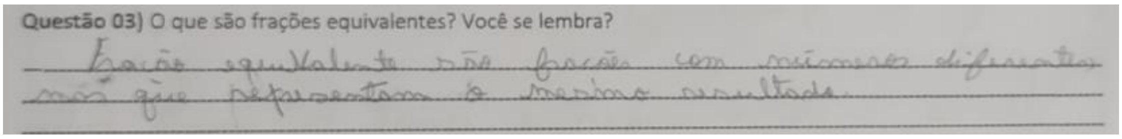
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 16 - Resposta da dupla E1 à questão 03



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 17 - Resposta da dupla F1 à questão 03

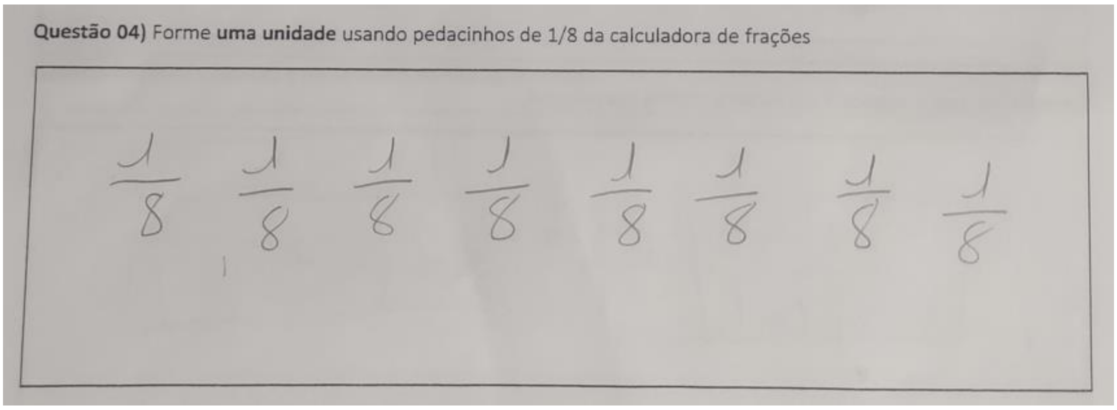


Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 03 os estudantes foram questionados se se lembravam do que são frações equivalentes, as respostas foram: “representam uma proporção entre frações” (neste caso percebemos uma associação das frações com as razões, habilidade EF07MA08) , “são diferentes na escrita mas representam a mesma quantidade”, “frações escritas com valores diferentes, mas representam a mesma parte de um todo”, “são frações diferentes na sua representação numérica” ,“é como se fosse um jeito diferente de falar o mesmo número” (apesar de não associar a fração a um número, após estimulados, algumas duplas fizeram esta associação, no entanto, de maneira bastante rasa), “não lembro” “frações que tem o mesmo valor decimal, ex 1/2 e 2/4 = 0,5”, “é quando as duas razões são iguais”, “são frações diferentes que dão o mesmo resultado”, “frações equivalentes são 2/4 e 3/6” , “sempre se igualam quando são simplificadas”. Com as respostas nota-se que os alunos se lembram das frações equivalentes.

Análise da Questão 04

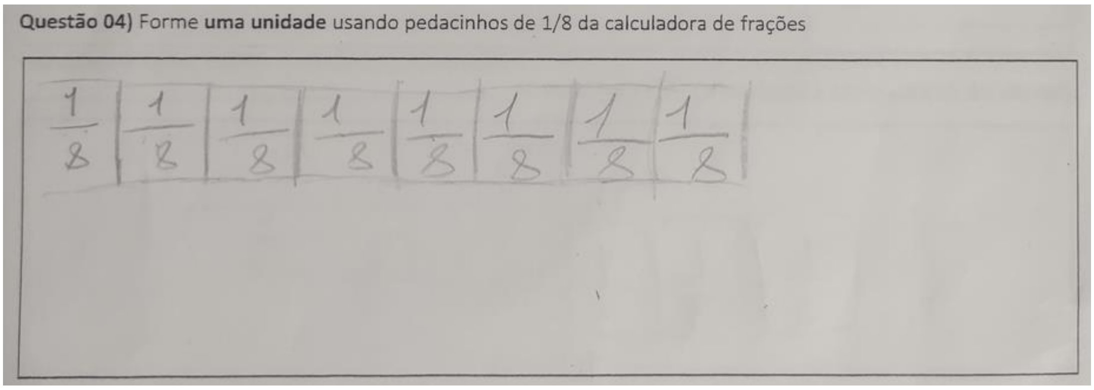
Figura 18 - Resposta da dupla B1 à questão 04


Questão 04) Forme **uma unidade** usando pedacinhos de 1/8 da calculadora de frações

$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$

Fonte: Dados da pesquisa.

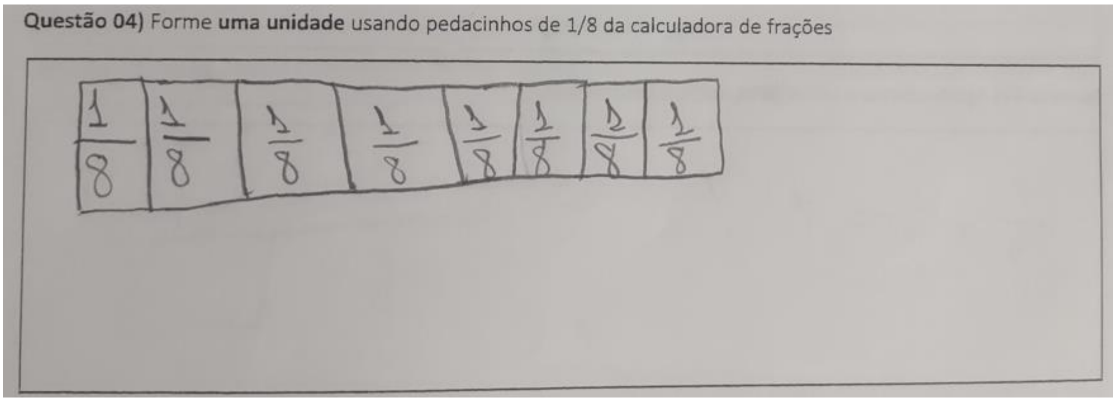
Figura 19 - Resposta da dupla C1 à questão 04


Questão 04) Forme **uma unidade** usando pedacinhos de 1/8 da calculadora de frações

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 20 - Resposta da dupla G1 à questão 04



Fonte: Dados da pesquisa.

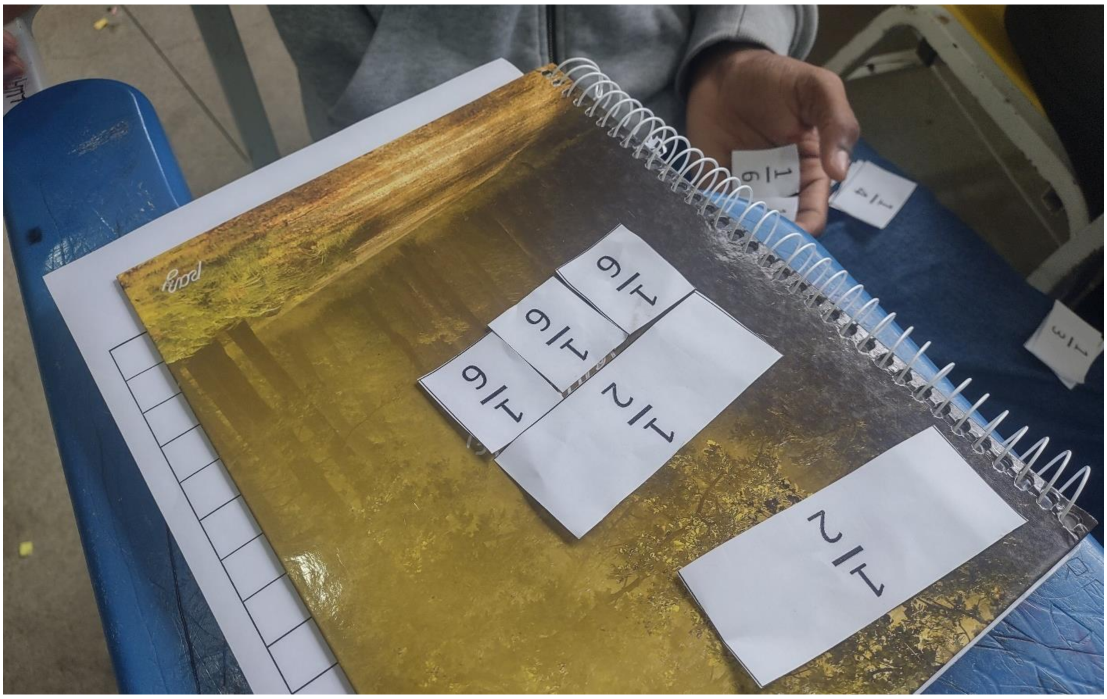
Na questão 04, os alunos deveriam formar um inteiro utilizando pedacinhos de 1/8 da Calculadora de Frações. Após uma breve discussão a respeito de numerador e denominador e frações equivalentes, conseguiram perceber que para voltar para o inteiro precisariam de 8 pedacinhos de 1/8 Alguns registraram a repetição da fração 1/8 (veja a Figura 18), outros desenharam 8 retângulos representando os pedacinhos da Calculadora de Frações (Figuras 19 e 20), mas nenhum dos participantes desenhou os 8 pedacinhos lado a lado com a fração 1 inteiro da Calculadora de Frações.

Análise da Questão 05

Na questão 05, os alunos deveriam encontrar frações equivalentes a 3/6 utilizando peças da Calculadora de Frações. Os participantes apresentaram dificuldade em como construir a fração 3/6 utilizando os pedacinhos. Muitos se confundiram, acharam que o numerador 3 se referia à fração 1/3, e estavam procurando 6 pedacinhos da fração correspondente a 1/3.

Após intervenção do pesquisador construíram a fração 3/6 com 3 pedacinhos da fração correspondente de 1/6 e, a partir daí, demonstraram facilidade ao obter a 1/2 como sendo equivalente a 3/6, mas após mais buscas conseguiram relacionar a 2/4, 4/8 e apenas uma dupla encontrou a resposta igual a 6/12.

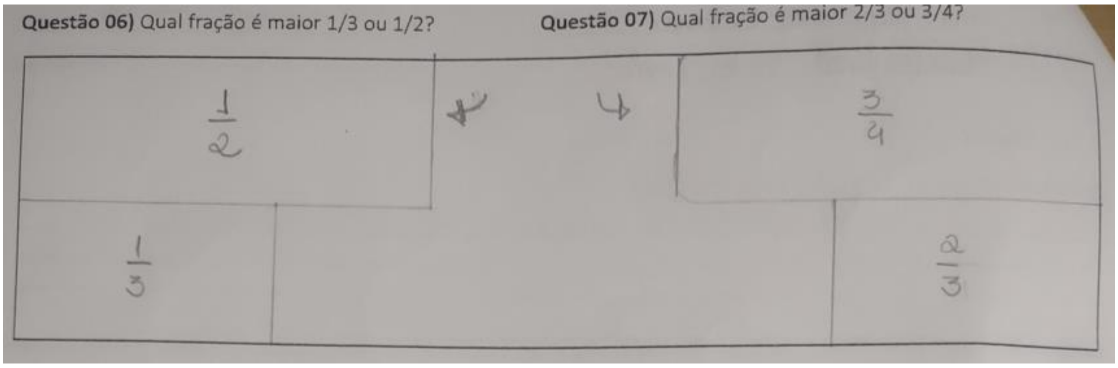
Figura 21 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 05.



Fonte: Dados da pesquisa.

Análise da Questão 06 e 07

Figura 22 - Respostas da dupla B1 às questões 06 e 07.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 23 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 07.

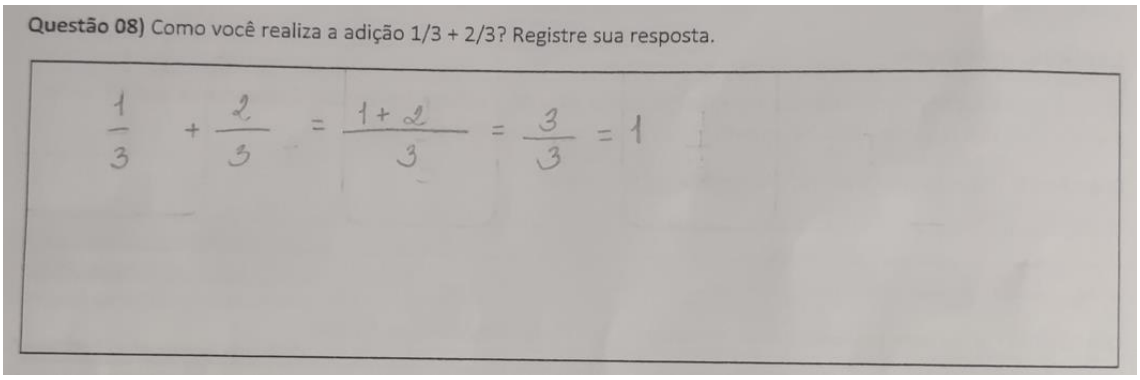
Fonte: Dados da pesquisa.

O exercício solicitava a comparação entre números fracionários (habilidades EF06MA07 e EF07MA08). A questão 06 solicitava determinar qual número era o maior, se 1/2 ou 1/3, e a questão 07 solicitava determinar qual número era o maior, se 2/3 ou 3/4. De início foram questionados, antes do uso da Calculadora de Frações, qual número era o maior, 1/2 ou 1/3. Alguns responderam a 1/3 provavelmente associando que o número natural 3 é maior do que o número natural 2. Então, com o Calculadora de Frações, foram solicitados que procurassem os pedacinhos correspondentes às frações em questão e colocassem lado a lado. Para os que responderam corretamente foram questionados "porque que o 1/2 é maior? não deveria ser 1/3, já que o 3 é maior que o 2?" (o questionamento foi feito a fim de que rompessem com a conjectura levantada anteriormente). As respostas indicavam que o inteiro ser divido em apenas 2 partes, cada parte será maior que as partes correspondentes da divisão do inteiro em 3. Isso mostra que eles compreendem o significado do denominador na fração, e que quanto maior for o denominador, em mais partes estará dividido o todo, logo, cada parte será menor.

Antes de irem para a Calculadora de Frações foram questionados novamente qual era o maior, 2/3 ou 3/4. A resposta ainda não foi unanime. Ao comparar na Calculadora de Frações 2/3 e 3/4 alguns não conseguiram construir a fração 2/3 (demonstrando ainda pequenas dificuldades nos conceitos de frações equivalentes), após uma pequena intervenção perceberam que 2/3 era a junção de dois pedacinhos correspodendo a 1/3, por fim conseguiram comprovar a resposta pela Calculadora de Frações, que o número 3/4 é o maior (veja a Figura 22). Nesse momento foram questionados em como resolver aos exercícios sem o apoio da Calculadora de Frações. Alguns não souberam responder. Um aluno lembrou que tinha que tirar o mmc, encontramos as frações 8/12 equivalente a 2/3 e 9/12 equivalente a 3/4 e a partir daí perceberam que 3/4 era maior. Nessa parte da atividade foi possível perceber a dificuldade de alguns alunos em perceber que o numerador indica quantos pedacinhos da Calculadora de Frações estão sendo considerados. Também foi perceptível o quanto o material manipulável foi importante na mobilização destes tópicos até aqui apresentado, pois muitos disseram não se lembrar dos algoritmos ou nunca aprenderam.

Análise da Questão 08, 09, 10 e 11

Figura 24 - Resposta da dupla B1 à questão 08

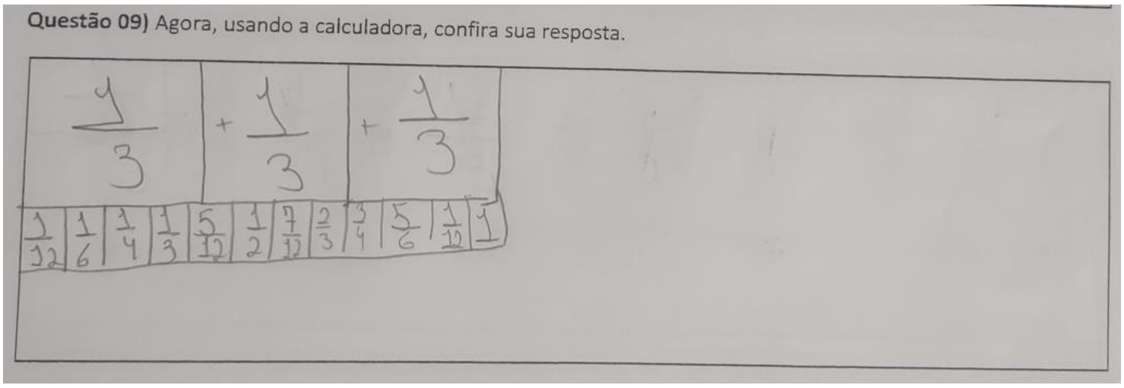


Questão 08) Como você realiza a adição 1/3 + 2/3? Registre sua resposta.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

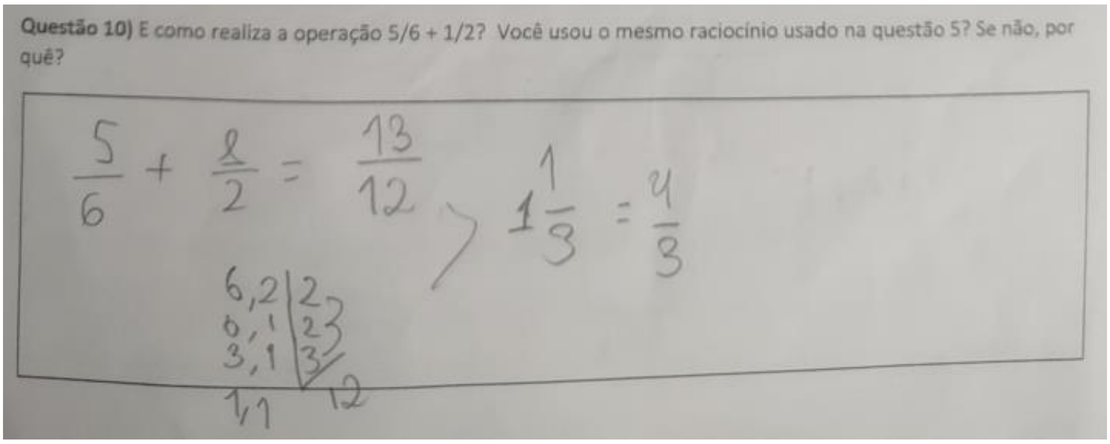
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 25 - Resposta da dupla H1 à questão 09.



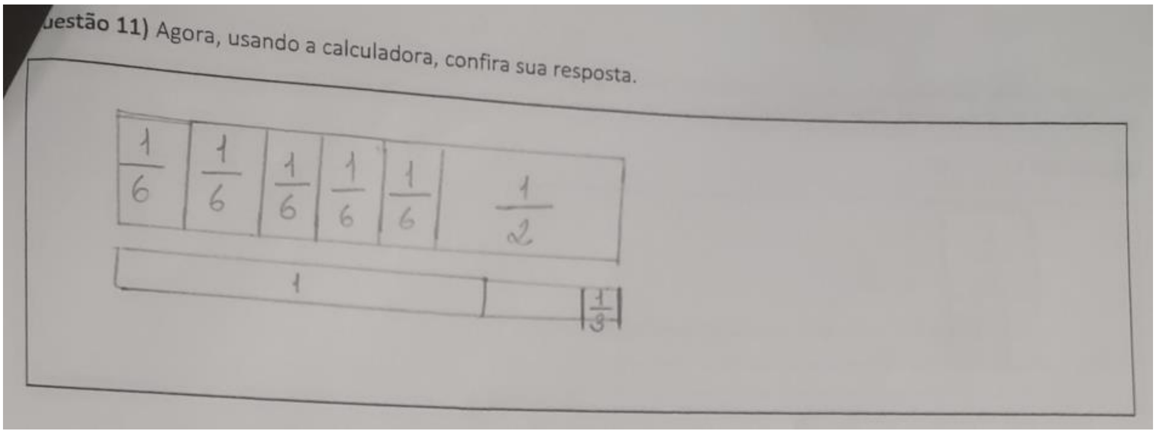
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 26 - Resposta da dupla I1 à questão 10



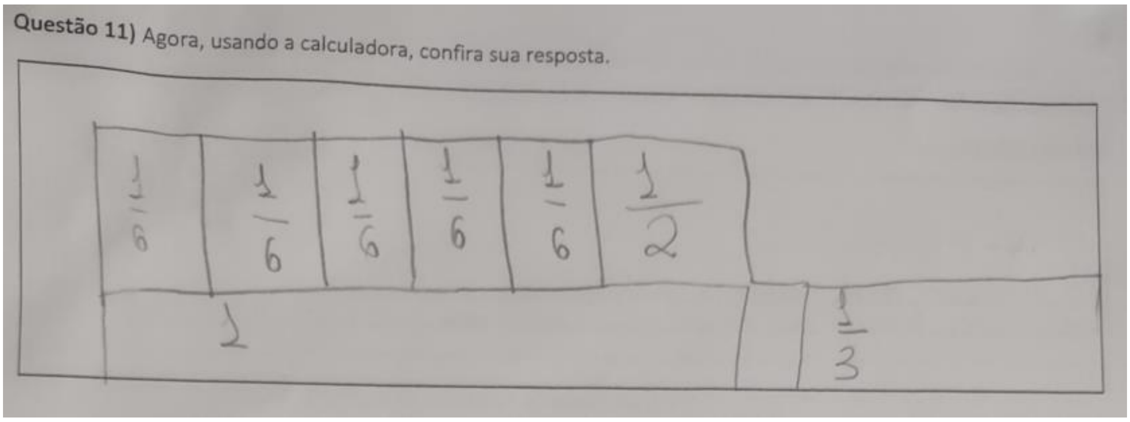
Fonte: dados da pesquisa

Figura 27 - Resposta da dupla J1 à questão 11



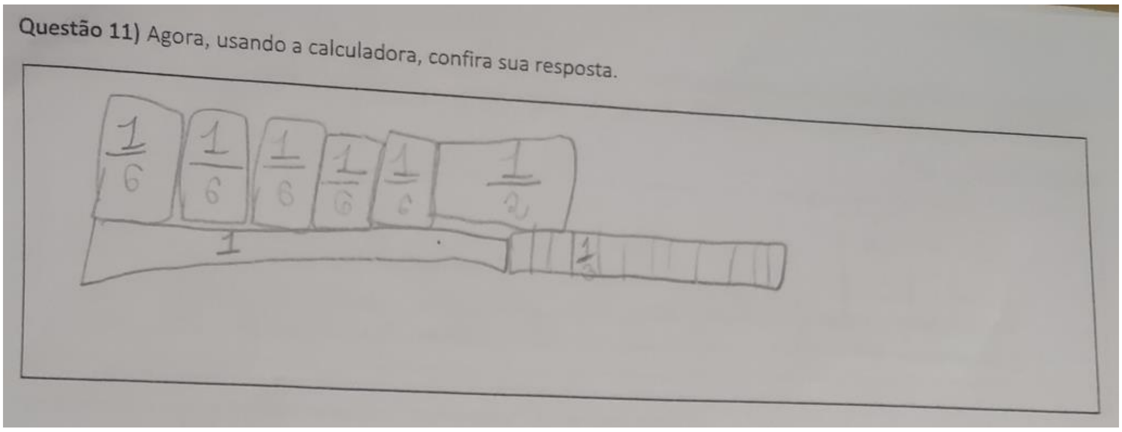
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 28 - Resposta da dupla K1 à questão 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 29 - Resposta da dupla H1 à questão 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

Inicialmente para incentivar a discussão, foi proposta aos estudantes que realizassem a operação 2/3 +1/4 sem o uso da Calculadora de Frações. Foram questionados a respeito da resolução, alguns mencionaram a utilização do mmc para obter as frações equivalentes, 8/12 e 3/12, alguns propuseram 11/24 como resposta e outros 11/12. A resposta 11/24 reforça uma incompreensão do algoritmo da adição de fração e, desta forma, recorrendo ao uso do algoritmo para número inteiros, conforme destacamos na Seção 2.1.

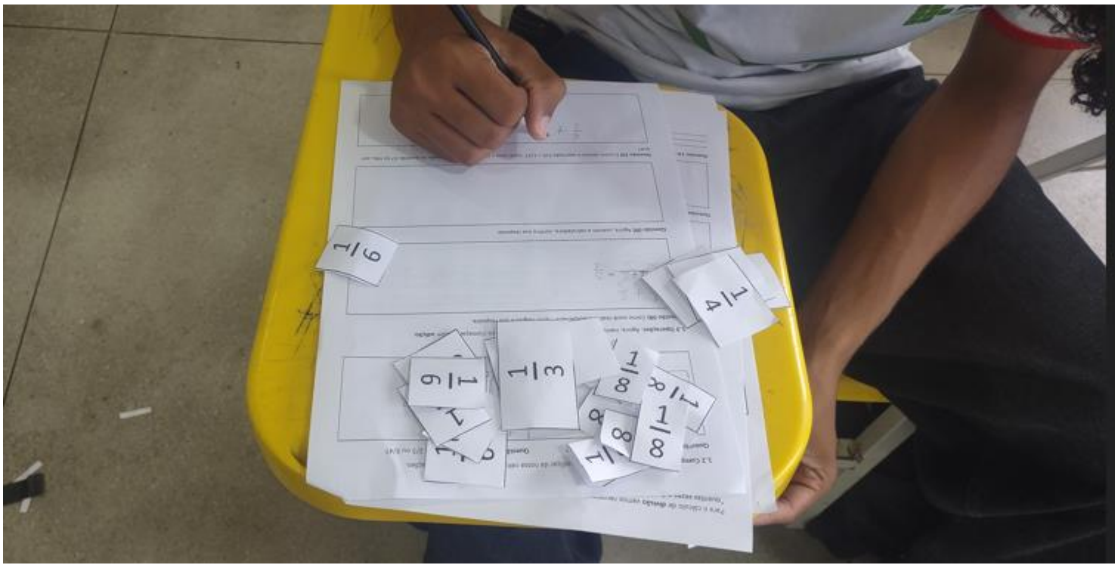
Após apresentação das possíveis respostas foram solicitados que utilizassem a Calculadora de Frações, obtendo 11/12 no visor. Quanto ao que foi solicitado no questionário, não apresentaram dificuldade em obter a solução.

Reforçamos que a utilização do material foi fundamental que pudessem compreenderem o porquê de 8/12 + 3/12 resultar em 11/12.

Ao responderem à questão 08, conseguiram obter o resultado da adição de 1/3 + 2/3, lembrando de manter o denominador 3. E na questão 09, ao conferirem na Calculadora de Frações a adição de 1/3 + 2/3 viram que juntando os pedacinhos das frações resultava no mesmo tamanho do pedacinho de 1 inteiro.

Na questão 10, solicitava a realização da adição 5/6+ 1/2, os alunos fizeram os cálculos como da forma anterior, tirando o mmc e encontrando 5/6 + 3/6 como frações equivalentes e 8/6 como resultado, e não todos, mas alguns, simplificaram para 4/3. Outros escreveram "não sei" na resposta pois não tinham entendido. Outro aluno respondeu que seria 6/8, ou seja, somou os numeradores e os denominadores separadamente, apesar de ser uma questão semelhante às anteriores ele não aplicou o algoritmo, talvez por ainda não ter compreendido, ou por falta de atenção. Outro aluno respondeu "não me recordo, pois, as bases diferem entre si" Outra dupla colocou o denominador 12 como comum às frações e os numeradores equivalentes 10 + 6 encontrando 16/12 e simplificando por 4 para obter 4/3. Alguns, ao tentarem resolver a questão 11, procuraram como fariam, visto que a resposta deu maior que 1, ou seja, maior que o próprio visor, então expliquei que deveríamos colocar o 1 inteiro antes do visor e depois teríamos a fração mista com parte inteira 1. Assim ao fazer isso encontraram a resposta 1 inteiro e 1/3 e perguntei como passar da fração mista para a imprópria, ou seja, só com um numerador e um denominador, sem parte inteira. Ninguém soube dizer como era, um aluno tentou até arriscar dividindo o debaixo e multiplicando o de cima, apenas consertei dizendo que era para somar com o de cima. Assim chegaram na resposta 4/3. Essa questão explorou nos alunos a habilidade de transformarem frações mistas em impróprias, além das habilidades anteriores de cálculo de mmc e adição de frações, e nenhum aluno se lembrou de como realizar a conversão da fração mista para imprópria.

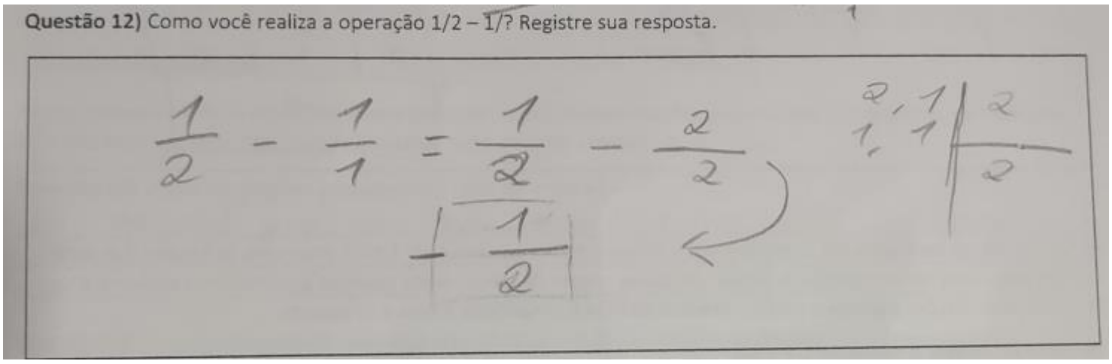
Figura 30 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 10.



Fonte: Dados da pesquisa.

Análise da Questão 12 e 13

Figura 31 - Resposta da dupla L1 à questão 12.



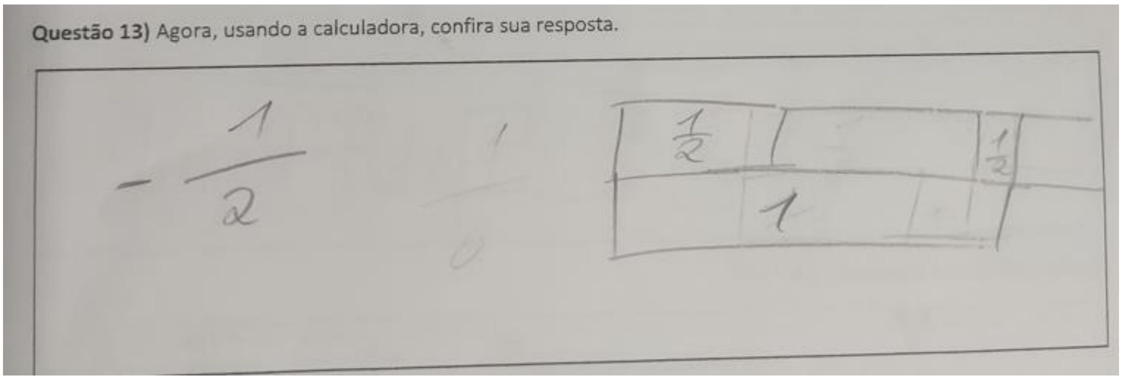
Questão 12) Como você realiza a operação 1/2 – 1/? Registre sua resposta.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2}$$

$$-\frac{1}{2}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 32 - Resposta da dupla L1 à questão 12.

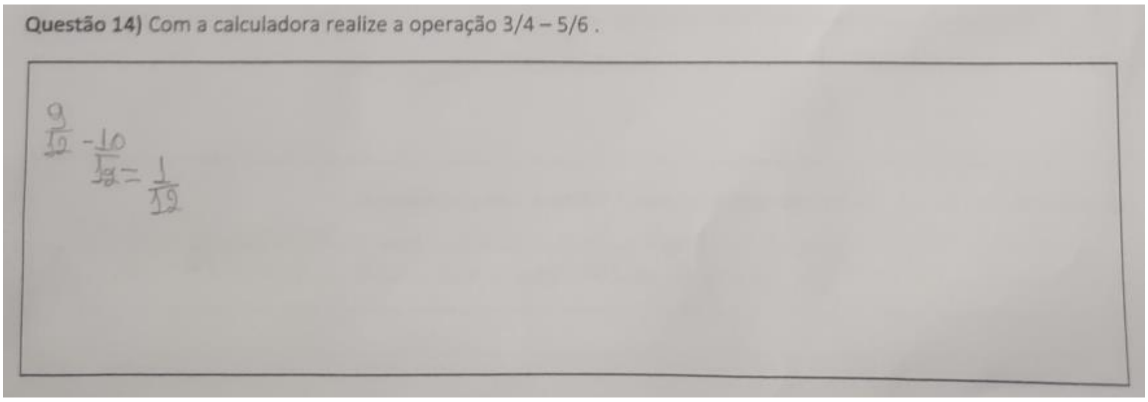


Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 12 solicitava aos alunos o cálculo de 1/2 – 1. Muitos obtiveram como resposta 1/2, o que possibilita inferir dificuldades operatórias entre números inteiros. Na questão 13, para que fosse realizada a operação 1/2 - 1 na Calculadora de Frações foram instruídos a posicionar os pedaços correspondentes um acima do outro e encaixar o visor no espaço vazio, perceberam que o pedaço correspondente era 1/2. Nota-se que a Calculadora de Frações apresenta apenas resultados positivos, neste caso era esperado que percebessem que 1 é maior do que 1/2. Muitas respostas registradas foram 1/2, positivo e não negativo, evidenciando uma dificuldade operatória com números inteiros.

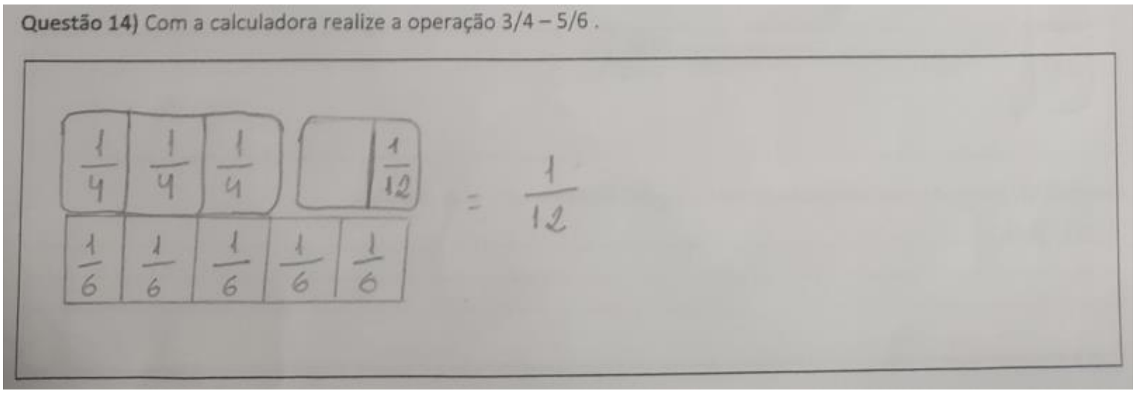
Análise da Questão 14

Figura 33 - Resposta da dupla B1 à questão 14.



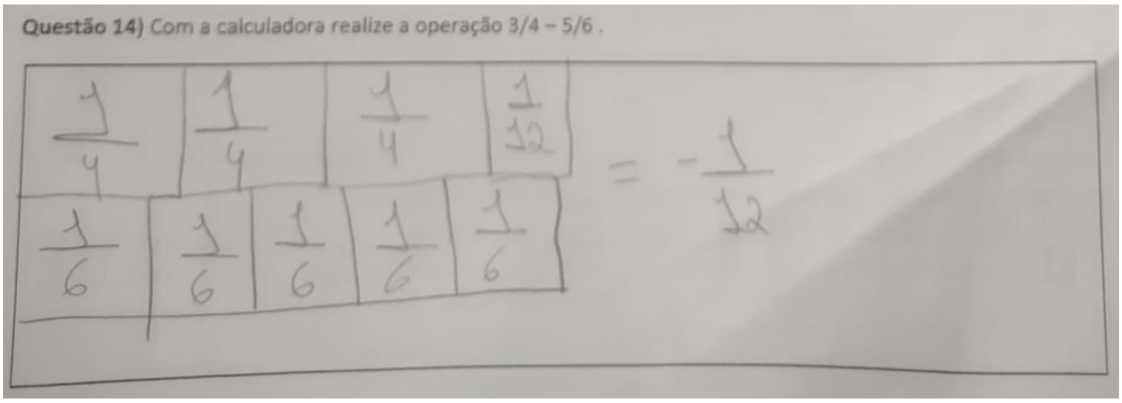
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 34 - Resposta da dupla M1 à questão 14.



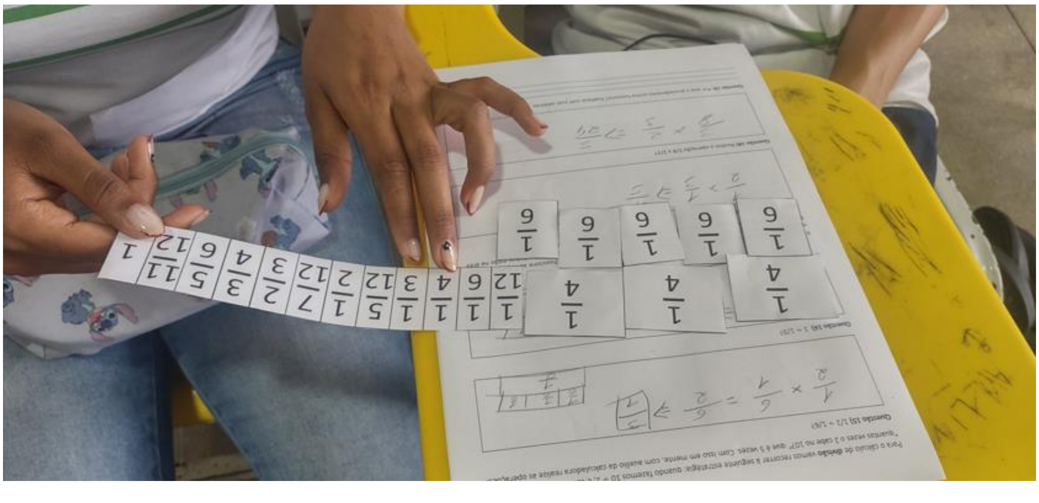
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 35 - Resposta da dupla L1 à questão 14.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 36 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 14.

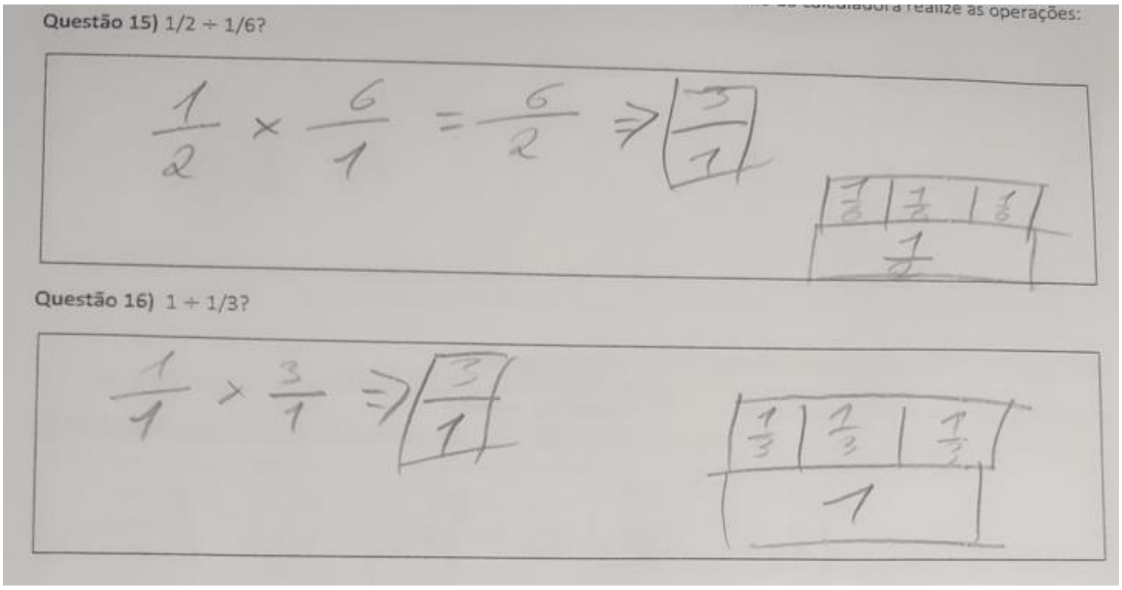


Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 14 solicitava o cálculo de 3/4 – 5/6 na Calculadora de Frações. Muitos realizaram o cálculo com o material obtendo a o resultado incorreto, 1/12 (veja as Figuras 34 e 35), evidenciando, novamente, dificuldade com sinais. A dupla B1 recorrendo às frações equivalentes realizaram o cálculo incorretamente (evidenciando a dificuldade com operações com números inteiros), enquanto que a dupla M1 utilizou a Calculadora de Frações apresentando a mesma resposta, demonstrando a mesma dificuldade com sinais.

Análise da Questão 15 e 16.

Figura 37 - Respostas da dupla L1 às questões 15 e 16.

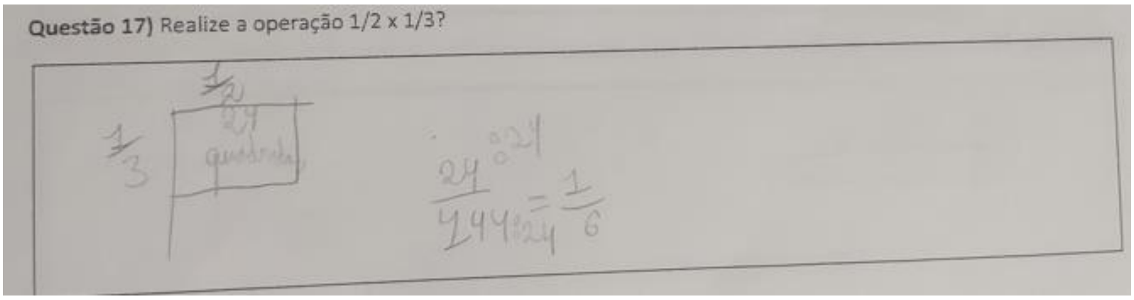


Fonte: Dados da pesquisa.

A questão 15 solicitava o cálculo de 1/2 ÷ 1/6, para isso os participantes deveriam identificar quantos pedacinhos correspondentes à 1/6 podem ser colocados em 1/2. Como já haviam realizado a comparação de 3/6 com 1/2, sinalizaram 3/6 como resposta. No entanto, após uma breve discussão perceberam que aquela resposta correspondia a uma fração equivalente e não ao questionamento relativo à divisão. Quanto à questão 16, conseguiram concluir com facilidade o resultado 3. Foram questionados como poderiam realizar a operação sem o uso da Calculadora de Frações, apenas um aluno demonstrou lembrar-se do algoritmo da divisão entre números fracionários. Com este exercício percebemos os participantes apresentam dificuldades em divisão de números fracionários, não demonstraram lembrar-se dos algoritmos da divisão, o que reforça a ideia de aprendizado pautado na memorização e por consequência, com a falta de exercícios recorrentes, o esquecimento. No entanto, a utilização do material manipulável proporcionou uma discussão que pudesse ser mobilizado uma das ideias da divisão: procurar quantos pedacinhos menores cabem no pedacinho maior, não apresentando dificuldades nesse sentido.

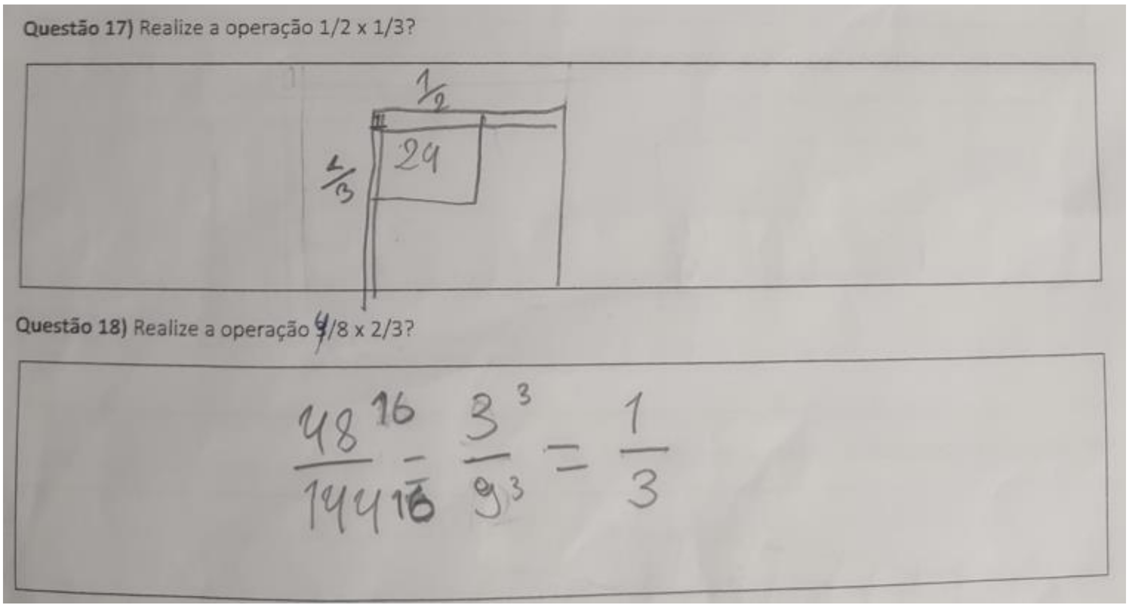
Análise das Questões 17 e 18.

Figura 38 - Resposta do aluno N1 à questão 17.



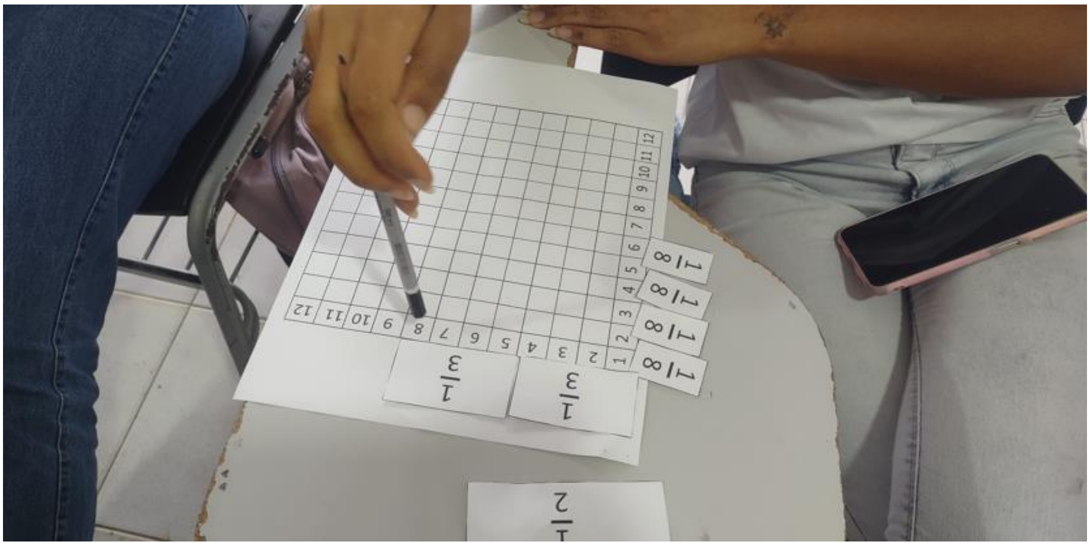
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 39 - Respostas do aluno O1 às questões 17 e 18.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 40 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Calculadora de Frações para responder à questão 18.



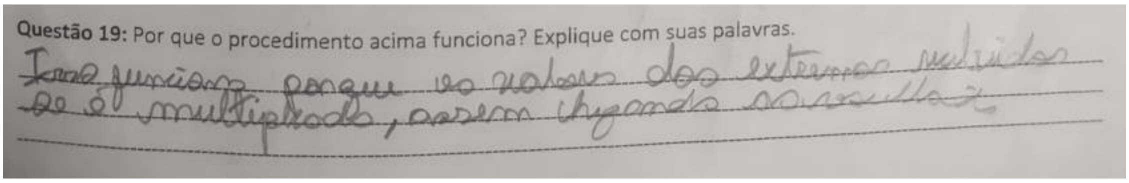
Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 17 solicitava-se a operação 1/2 x 1/3, foi apresentado como realizar a multiplicação de frações na Calculadora de Frações com a malha quadriculada. Após a discussão, demonstraram dificuldades em realizar este procedimento, acreditam que o procedimento direto é mais simples, o que reforça a tese da associação da operação com números fracionários com a operação entre número inteiros, uma vez que no algoritmo da multiplicação faz-se a multiplicação direta entre os números que compõem as frações.

Na questão 18 solicitava-se a operação 3/8 x 2/3, porém como 3/8 não é um múltiplo inteiro de 1/12 foi solicitado que corrigissem a fração 3/8 para 4/8. Algumas duplas logo usaram o pedacinho 1/2 da Calculadora de Frações em substituição à montagem dos 4 pedacinhos de 1/8 e obtiveram na malha quadriculada 6 x 8 = 48 quadradinhos no numerador e 144 no denominador, obtendo a fração 48/144 como resultado simplificando para 1/3. Algumas duplas ainda demonstraram dificuldades em realizar este procedimento e fizeram pelo procedimento direto. O algoritmo da malha quadriculada buscou explorar a associação entre o produto de números (reais) positivos com o cálculo de área, multiplicação da base pela altura, e a atividade revelou que muitos alunos têm dificuldades nesse sentido.

Análise das Questão 19.

Figura 41 - Resposta do aluno P1 à questão 19.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 19 os alunos foram indagados a explicar o porquê do funcionamento do uso da malha quadriculada para realizar a multiplicação de frações, responderam: “Porque o uso da tabela ajuda a contar os quadrados”, “A quantidade de quadradinhos é correspondente ao valor fracionário, logo quando multiplicamos obtemos o valor correto”, “Dividir frações é multiplicar pelo inverso”, “não sei”, “A tabela funciona com o 12 como denominador sendo cada coluna completa igual a 1/12. Ao selecionarmos determinada linha contamos as colunas que também foram selecionadas, logo tiramos a fração da fração no quadriculado 12x12”, “pois o número de quadradinhos é equivalente ao número de vezes que ele foi dividido”. As respostas mostram que os alunos não compreenderam a ideia da multiplicação a partir da utilização do material, cada fração representa uma fração do lado da malha quadriculada, e a multiplicação das frações corresponde à área do quadrado, visto que área é produto da medida de um lado pela medida do outro lado. Assim o resultado da multiplicação das frações é a fração da área resultante pela área original do quadrado 1x1, mas nenhum aluno conseguiu compreender esse conceito.

A atividade realizada em dupla proporcionou oportunidades de debates e proposições de conjecturas. Na atividade, apenas três duplas conseguiram realizar os cálculos sem o apoio da Calculadora de Frações, o que revela um alto índice de participantes que apresentam dificuldades em conceitos importantes para compreensão das frações, por exemplo, frações equivalentes e dificuldades envolvendo operações elnvolvendo números fracionários.

A atividade realizada com a Calculadora de Frações se mostrou um importante espaço para mobilizar com os conceitos das frações a partir de manipulações materiais. Diferentemente da calculadora digital, presente nos smartphones, que exibe o resultado no visor, esta Calculadora de Frações auxiliou os participantes na validação de suas respostas, dando significado a cada execução realizada. Promovendo desta forma um aprendizado pautado nos significados e distante dos processos que envolve apenas memorizações e aplicações de técnicas.

3. OS MATERIAIS CONCRETOS MANIPULÁVEIS E O ENSINO DE LOGARITMOS

Neste capítulo, fazemos uma breve discussão sobre logaritmos a partir de uma perspectiva histórica e das competências propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Discutimos as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no ensino tradicional de logaritmos, muitas vezes marcado apenas pela memorização de fórmulas e propriedades, o que leva à falta de compreensão conceitual e ao desinteresse dos estudantes (Cordeiro, 2021; Ferreira, 2022). Em seguida, analisamos estratégias de ensino que buscam superar estes obstáculos, como uso da *Régua de Cálculo*, artefato, criado no século XVII e baseado nas propriedades dos logaritmos.

Por fim, neste capítulo apresentaremos o funcionamento e as possibilidades didáticas da Régua de Cálculo, demonstrando, por meio de exemplos, como este instrumento pode ser utilizado em sala de aula para explorar conceitos de multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e cálculo de logaritmos. Com isso, pretende-se evidenciar como o uso deste recurso pode tornar o ensino de logaritmos mais dinâmico, visual e conectado ao desenvolvimento histórico da Matemática, em consonância com as diretrizes da BNCC.

3.1 O Ensino de Logaritmo e a BNCC

O ensino de logaritmos, muitas vezes, baseia-se em longas exposições que se restringem à apresentação de definições e propriedades. Devido ao alto nível de abstração, os alunos acabam apenas decorando estes conteúdos para utilizá-los quando solicitados, sem compreendê-los plenamente. Desta forma, temos um processo frustrante tanto para os estudantes quanto para os professores (Cordeiro, 2021). Para Ferreira (2022), o conceito de logaritmo é considerado um dos mais difíceis de se ensinar e de se aprender no Ensino Médio. No que se refere as dificuldades apresentadas pelos estudantes, “grande parte [...] decorre de uma defasagem no conceito de potenciação e da pouca habilidade algébrica no manuseio de equações exponenciais" (Cordeiro, 2021, p.18, apud Vidigal, 2014, p.96).

Neste sentido, no primeiro contato com os logaritmos, os estudantes muitas vezes "acabam enfrentando um campo de conteúdos complexos e fórmulas um pouco extensas, ocasionando assim que o aluno não crie nenhum interesse pela matéria" (Silva, 2019, p. 105).

Além disso, é importante observar que

> Conceitos da matemática são conteúdos abstratos, mas podem ser representadas por meios de ilustrações, representações, entre outros. Sendo assim, materiais didáticos facilitam a construção e a apresentação de conceitos para os alunos, permitindo que eles possam ter uma melhor observação e interpretação dos conteúdos (Silva, 2019, p.105).

Em consonância a isso, Pereira (2015) menciona

> a construção, a utilização e a realização de atividades com recursos didáticos, permitem ao aluno visualizar as relações entre conceitos da Matemática e outras ciências, possibilitando assim, a aprendizagem dos conteúdos ensinados (Pág. 14).

Utilizar materiais concretos inspirados em instrumentos históricos de cálculo é uma oportunidade para que o aluno tenha contato com conceitos complexos e abstratos de modo visual, e compreenda o processo histórico de construção destes conceitos.

No decorrer da História da humanidade, encontramos a presença de diversos instrumentos de cálculo, os quais foram evoluindo para que cálculos cada vez mais complexos pudessem ser realizados. Como exemplo destes instrumentos, temos a *Régua de Cálculo*, criada por William Oughtred (1574-1660), inspirado nas escalas logarítmicas propostas por John Napier.

Utilizar a Régua de Cálculo em sala de aula é uma oportunidade para mobilizar uma abordagem histórica sobre os processos de construção destes saberes, uma vez que permite ao aluno contato com o contexto histórico no qual aquele conhecimento foi desenvolvido. Além disso, pode-se promover um ambiente de discussão para os estudantes perceberem que muitos problemas e conceitos da Matemática surgem a partir de situações concretas.

Para Pereira (2015) a utilização de instrumentos que foram importantes no decorrer da História das Ciências é uma ponte para relacionar a História da Matemática e o ensino.

A utilização de artefos históricos[6] em sala de aula em sala de aula pode ser um recurso na introdução e consolidação de diversos conhecimentos matemáticos. Neste sentido, "[...] precisamos apresentar aos alunos os contextos em que foram produzidos e, estudar o processo da construção do conhecimento a partir do seu significado real, uma vez que a sua construção e utilização apontam para aspectos importantes do fazer matemático da época." (Pereira, 2015, p.13).

Pereira (2015) ainda reforça que

> A utilização de materiais concretos é influenciada por vários fatores que vão desde a didática, a prática e à metodologia. O envolvimento dos alunos e do professor na construção desse recurso poderá ocasionar uma construção de conceitos matemáticos que serão adquiridos no decorrer do seu desenvolvimento, nesse caso o professor tem um papel importante de mediador (Pereira, 2015, p. 13).

A utilização destes objetos em sala de aula em conexão com a História da Matemática possibilita a construção de conhecimentos não apenas matemáticos, mas também sociais, políticos e econômicos da época (Pereira, 2015).

A Régua de Cálculo faz uso das propriedades logarítmicas e permite a realização de cálculos de forma prática e rápida em relação aos cálculos realizados à mão. Utilizá-la nas aulas de matemática pode ser elemento mediador do ensino e na aprendizagem da matemática, possibilitando sua aplicação em conteúdos que envolvam a aritmética e o estudo dos logaritmos (Pereira, 2015).

---

[6] "Os artefatos são objetos que foram produzidos em um determinado tempo e que retratam o contexto cultural e social da época." (Pereira, 2015, p.13).

Nas propostas da BNCC para o tópico de logaritmo há uma centralidade nas funções logarítmicas e suas aplicações. Quanto ao ensino de logaritmos a BNCC propõe as seguintes habilidades conforme a tabela 6 apresentada a seguir.

Tabela 6 - Habilidades da BNCC para o ensino de logaritmos no Ensino Médio

Código da habilidade	Habilidade
EM13MAT305	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros
EM13MAT403	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Fonte: BNCC (2018)

Por meio destas habilidades é proposto pela BNCC que o aluno seja estimulado a relacionar o conteúdo de logaritmos com situações reais em diferentes contextos, como o comportamento de crescimento de algumas grandezas.

Para compreender tais conceitos, antes devemos oportunizar ao aluno momento para a construção do conceito de logaritmos e suas propriedades. Neste sentido, a Régua de Cálculo é uma importante ferramenta

> O estudo dos logaritmos através de um elemento mediador como a Régua de Cálculo (circular), torna o processo de aprendizagem do conteúdo mais fácil e prazeroso, devido a manipulação do instrumento. [...] Com a escolha de manipular a régua de cálculo o professor proporciona aos alunos aplicar as propriedades de logaritmos e exprimir o desenvolvimento histórico dos logaritmos, o contexto cultural e socioeconômico a qual os logaritmos foram criados, respondendo os porquês tão frequentes na sala de aula. Por muitas vezes a matemática pode ser abstrata e complexa, desse modo, quando é possível atrelar o ensino do conteúdo a uma aplicação prática, o professor estará auxiliando seus alunos no entendimento do assunto. (Alves; Silva; Martins, 2016, p.7)

Além disso, o uso desse material concreto manipulável construido a partir do instrumento histórico possibilita ao aluno visualização da escala logarítmica presente na régua e, a partir daí, compreender o crescimento logarítmico. Na função logarítmica, a taxa de variação é maior para valores menores do que 1 e, para valores maiores que 1 esta variação diminui à medida que a distância a 1 aumenta. Na Régua de Cálculo o aluno pode perceber que a distância do 1 para o 2 é maior que a distância do 2 para o 3, visto que a distância do log 1 para o log 2 é log 2 – log 1, que é o mesmo que log $(\frac{2}{1})$ = log 2, e a distância do log 2 para o log 3 é log 3 – log 2 = log $(\frac{3}{2})$. Sendo assim log 2 é maior que log $(\frac{3}{2})$.

3.2 História e evolução dos Logaritmos

Os logaritmos surgiram no século XVII como uma ferramenta destinada a facilitar cálculos matemáticos, por exemplo, permitindo que operações de multiplicação e divisão fossem transformadas em operações de adição e subtração. Esse avanço coincidiu com um período de intensas mudanças sociais, políticas e econômicas vivenciadas especialmente na Europa, além do florescimento de diversas áreas conhecimento.

> Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem

> cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. (Eves, 2011, p.341).

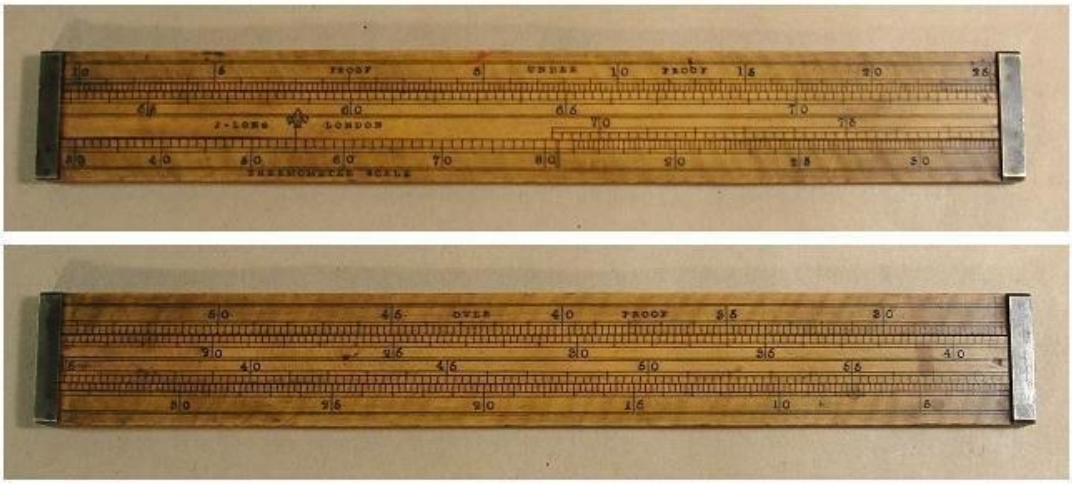
A rápida disseminação dos logaritmos na comunidade científica se deu relacionada à sua eficácia na simplificação de cálculos aritméticos e logo se espalhou por toda a Europa chegando à China. Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo alemão renomado da época, foi um dos primeiros a aplicar os logaritmos em seus cálculos astronômicos, especialmente no estudo das órbitas planetárias.

Com o tempo, percebeu-se que dispositivos mecânicos poderiam ser construídos para realizar cálculos com base nas propriedades dos logaritmos. O matemático inglês William Oughtred (1574-1660) foi responsável por idealizar o uso de duas escalas logarítmicas móveis, o que deu origem à chamada *Régua de Cálculo*. Foram desenvolvidas duas versões desse instrumento: uma linear, com escalas deslizantes, e outra circular, com discos giratórios. Veja as Figuras 42 e 43.

Figura 42 - Régua de Cálculo Circular, datada entre 1660 -1680.

Fonte: http://www.sciencemuseum.org.uk/images/I067/10328277

Figura 43 - Exemplo de uma Régua de Cálculo Linear datada de 1840.



Fonte: http://collectingme.com/computing/Two_Sides_One_Slide_Alcohol_Slide_Rule

3.2.1 John Napier e suas motivações

John Napier nasceu por volta de 1550 em Edimburgo na Escócia. Estudou religião brevemente na Universidade de St. Andrews, no condado de Fife na Escócia. Apesar de sua trajetória inicial não indicar interesse pela Matemática, mais tarde trouxe importantes contribuições à esta ciência.

Figura 44 - Jhon Napier

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e3/John_Napier.jpg/640px-John_Napier.jpg

Com a crescente complexidade dos cálculos que eram frequentemente usados na astronomia e na navegação no final do século XVI, Napier se motivou a buscar por um método que simplificasse algumas operações, por exemplo, multiplicações, divisões, potenciações e a radiciação. Em sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa tabela de logaritmos), ele demonstra esta preocupação:

> Dado que nada (caros amadores apaixonados pela Matemática) é tão desagradável à prática Matemática (freando e retardando os especialistas no cálculo) quanto as multiplicações e as divisões e as extrações de raízes quadradas ou cúbicas de números grandes que, além do incômodo ao seu tamanho, induzem a diversos erros perigosos; como consequência, eu me dediquei a procurar por que meios seguros e cômodos poderia me livrar destas dificuldades (Roque; Carvalho, 2012, p.181-182)

Figura 45 - Capa do Mirifici Logarithmorum

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/80/Mirifici_Logarithmorum_canonis_Descriptio.jpg/800px-Mirifici_Logarithmorum_canonis_Descriptio.jpg

Na época de Napier já era conhecido expressões que convertia produtos em somas, por exemplo, $2\cos(A)\cos(B) = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, sendo uma ideia predecessora à ideia de Napier (Eves, 2011). Outras expressões, também já conhecidas na época, também cumprem a função de reduzir multiplicações às operações mais simples (Eves, 2011):

I. $2sen(A)\cos(B) = sen(A+B) + sen(A-B)$

II. $2\cos(A)\,sen(B) = sen(A+B) - sen(A-B)$

III. $2sen(A)sen(B) = \cos(A-B) - \cos\,(A+B)$

Por exemplo, deseja-se obter *435,64x25,327* via este método. Assim, deve-se obter os ângulos A e B, tais que

$\cos(A) = \frac{0{,}43564}{2} = 0{,}21782$ e $\cos(B) = 0{,}25327$.

Consultando uma tabela trigonométrica, executando as operações A+B e $\mathrm{A} - \mathrm{B}$:

$\mathrm{A}\ =\ 77{,}418976703°,\ \ \mathrm{B}\ =\ 75{,}328901322°.$

$\mathrm{A} + \mathrm{B}\ = 152{,}747878025°, \mathrm{A} - \mathrm{B}\ = 2{,}090075381°.$

Novamente, consultando uma tabela trigonométrica

$\cos(A+B) = -0{,}8890001833,\ \cos(A-B) = 0{,}9993347261.$

Executando a adição do cosseno da soma e da diferença dos ângulos A e B, obtemos:

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 0{,}1103345428$

Por fim, obtemos: $2\cos(A)\cos(B) = \cos(A+B) + \cos(\mathrm{A} - \mathrm{B}) =$ $(0{,}43564)\ \mathrm{x}(\ 0{,}25327) = 0{,}1103345428$. Para obter o produto procurado basta ajustar as casas decimais. Portanto, (*435,64)x(25,327) = 11033,45428* .

Sabe-se que Napier conhecia tais expressões, e, é possível que tenha sido influenciado por elas, “pois de outra forma seria difícil explicar por que (Napier) restringiu seus logaritmos inicialmente aos senos de ângulos” (Eves, 2011, p.343).

3.2.2 Michael Stifel

O matemático alemão Michael Stifel, (1487-1567), havia observado uma relação entre progressões aritméticas e geométricas: o produto de dois elementos de uma mesma progressão geométrica corresponde ao termo desta P.G cujo índice é soma de seus respectivos índices (que formam uma progressão aritmética de razão 1). “Essa relação é conhecida como relação de Stifel” (Cordeiro, 2021, p.22, apud. Maor, 2008, p.18). Para ilustrar o pensamento de Stifel considere a Tabela 7:

Tabela 7 - Progressões aritmética e geométrica

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Fonte: Adaptado de Cordeiro (2021).

Note que, na primeira linha da Tabela 7 tem-se uma progressão aritmética (P.A) de razão 1 e cujo primeiro termo é 0. Já na segunda linha tem-se uma progressão geométrica (P.G) cuja razão é 2 e o primeiro termo 1. Por exemplo, vamos multiplicar 8, equivalentemente 2^3 por 32, equivalentemente 2^5. A relação de Stifel estabelece que este produto é o 8º termo da P.G, neste caso, 256, que é o mesmo que 2^8, ou seja, se considerarmos apenas os expoentes das potências da base 2, temos que 3 + 5 = 8. Análogo para as divisões, por exemplo, ao dividir 256 por 8, observe que 256 = 2^8 (expoente 8) e 8 = 2^3 (expoente 3), subtraindo os expoentes, tem-se 8 – 3 = 5, ou seja, o resultado é 2^5 = 32. Para calcular potenciações, peguemos como exemplo o cálculo de 8^2, temos que $2^3 = 8$, portanto $8^2 = (2^3)^2$. Obtendo o produto 3 × 2 = 6 e a potência 2^6 = 64, chegamos ao resultado de 8^2 = 64.

Para exemplificar o cálculo de radiciações, vamos calcular $\sqrt[3]{512}$, buscamos o número que está na primeira linha da Tabela 7, correspondendo a 512, isto é 9, e dividindo-se por 3 ($\sqrt[3]{512}$ = $512^{\frac{1}{3}}$) o resultado será, portanto, 3.

Assim, o número que está abaixo do 3 na tabela será o resultado de $\sqrt[3]{512}$, ou seja, 2^3 = 8.

Napier queria ampliar essa ideia a todos os números racionais, inclusive os fracionários. Para isso, decidiu usar uma base muito próxima a 1, “para manter os termos da P.G suficientemente próximos de maneira que possa usar uma interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente” (Eves, 2011, p. 344). Essa escolha permitia a criação de uma tabela mais detalhada, preenchendo os "espaços" entre os números inteiros. Napier decidiu-se por $1-10^{-7}$. Note que, sendo L um número inteiro não negativo, pelo desenvolvimento do binômio de Newton, observe

$$10^7(1-10^{-7})^L = 10^7\sum_{i=0}^{L}\binom{L}{i}(-10)^{-7i} = 10^7 - L + \binom{L}{2}10^{-7} + \ldots + 10^{-7L+1},$$

multiplica-se por 10^7 para eliminar os números decimais. Como os termos, a partir do terceiro termo do desenvolvimento anterior, são muito pequenos, a expressão se aproxima de $10^7 - L$.

Napier definiu o logaritmo de um número N seria o expoente L tal que (Eves, 2011)

$$N = 10^7(1-10^{-7})^L$$

“É possível observar que essa notação difere da atual, que foi introduzida por Leonardo Euller em 1728” (Maor, 2008, p.22). Vale destacar que, os valores de alguns logaritmos são diferentes dos logaritmos atuais (Cordeiro, 2021). Por exemplo, o logaritmo de 10^7 pela notação de Napier é 0, pois

$$10^7 = 10^7(1-10^{-7})^0$$

e o logaritmo de $10^7(1-10^{-7})$ é 1, pois

$$10^7(1-10^{-7}) = 10^7(1-10^{-7})^1$$

Além disso, é importante destacar que

> as regras básicas das operações com logaritmos (a exemplo, log($A.B$) = log A + log B) não é válida para a definição de Napier. Perceba que se N_1 = 10^7 e N_2 = $10^7(1 - 10^{-7})$ tem-se $N_1 \times N_2$ = $[10^7] \times [10^7(1 - 10^{-7})]$ = $10^{14}(1 - 10^{-7})$, onde, na relação determinada por Napier tem-se $10^{14}(1 - 10^{-7})$ = $10^7(1 - 10^{-7})^L$, ou seja, $L \neq 1$, (o valor aproximado é L = -161.180.947,450535238). Porém, pela notação atual, log $N_1 N_2$ = log N_1 + log N_2 = log 10^7+ log $10^7(1 - 10^{-7})$, que, pela definição de Napier, obtém-se = 0 + 1 = 1, o que implica que L = 1. (Cordeiro, 2021, p. 24)

3.2.3 A Contribuição de Briggs e a evolução para os Logaritmos Decimais

O trabalho de Napier chamou atenção imediata. Em 1615, o matemático Henry Briggs (1561-1631) viajou para conhecer Napier, propondo que os logaritmos seriam mais úteis se o logaritmo de 1 fosse 0 e que o de 10 fosse uma potência de 10 conveniente. Dessa proposta surgiram os logaritmos decimais, ou logaritmos briggsianos, os logaritmos de base 10 que conhecemos hoje (Eves, 2011).

Figura 46 - Henry Briggs

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/04/Henry-Briggs.jpg/640px-Henry-Briggs.jpg

Briggs trabalhou na construção de tabelas com até 14 casas decimais de precisão, publicando a primeira em 1617 e uma versão expandida em 1624, após sete anos de cálculos (Ávila, 1994).

Segundo (Lima, 2010, p.8) “os livros tradacionais definem o logaritmo do seguinte modo: dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a tal que $a^y = x$. Escreve-se $\log_a x = y$.”

Lima (2010) destaque que os logaritmos foram criados antes mesmo de se ter uma representação formal para potências com expoentes fracionários ou irracionais.

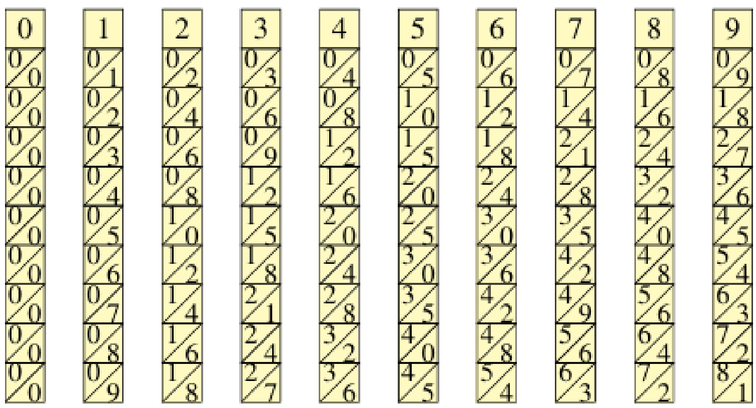
Pedrosa (2018) destaca que, tomando a equação $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$ e

> Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, pois $(1 - 10^{-7})^{10^7}$ fica próximo de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Deve-se lembrar, no entanto, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa (Pedrosa 2018, p. 13, apud Boyer; Merzbach, 2012).

3.2.4 A Régua de Cálculo Logarítmica

Após a criação dos logaritmos, foram construídos objetos que, usando as propriedades dos logaritmos, agilizavam os cálculos aritméticos. Um destes objetos é hoje conhecido por *As Barras de Napier*, criados por Napier para auxiliar nos cálculos aritméticos. (Alves; Pereira, 2018).

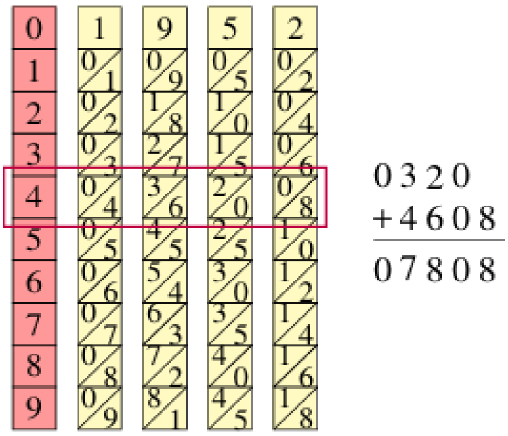
Figura 47 - Barras de Napier



Fonte: Pedrosa (2018)

Em sua obra *Rabdologia* (publicada em 1617), Napier explicava como funcionavam as barras. Por exemplo ao considerar o número 1952; selecionam-se as barras com os números 1, 9, 5 e 2 e as coloca em ordem. As barras mostram, na primeira linha, o número 1952. Na segunda linha está o produto deste número por 2, na terceira, está o produto por 3 e assim por diante. O resultado de 1952 × 4 será o número formado pelos algarismos 3 + 4, 2 + 6, 0 e 8, ou seja, 7808 (Pedrosa, 2018).

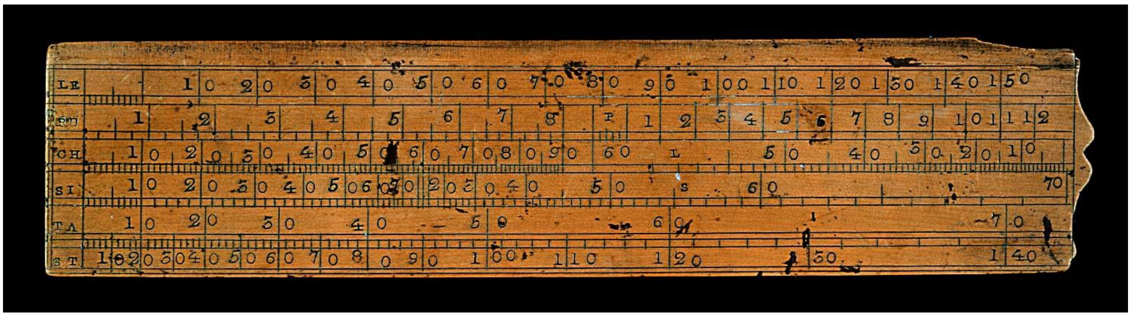
Figura 48 - Multiplicação de 1952 por 4 utilizando as barras de Napier



Fonte: Pedrosa (2018)

As Barras de Napier representaram um grande avanço, porém não poderiam ser usadas em operações que envolvessem números fracionários, uma vez que estas não operavam com esse tipo de número. Edumund Günter (1581-1626), professor de astronomia da faculdade de Gresham, com base nas escalas logarítmicas de Briggs, criou um instrumento que também facilitava cálculos aritméticos e, ficou conhecido como *Escala de Günter* (Pereira, 2015).

Figura 49 - Escala de Günter.



Fonte: https://photocalcul.com/Calcul/Regles/Autres/Gunter_ter/gunter6inch_R.jpg

A Escala de Gunter era formada por uma única escala logarítmica ao longo de um pedaço de madeira:

> [...] com os números dispostos de 1 a 10 de uma extremidade à outra, de tal forma que a distância ao longo da linha não são proporcionais aos números nele, mas sim os logaritmos dos referidos números [...] Sua utilização ainda agregava um par de compassos que marcavam adição e subtração das distâncias na escala de acordo com as propriedades dos logaritmos, ou seja, o produto e o quociente dos números (Pereira, 2015, p.41).

Cujo objetivo

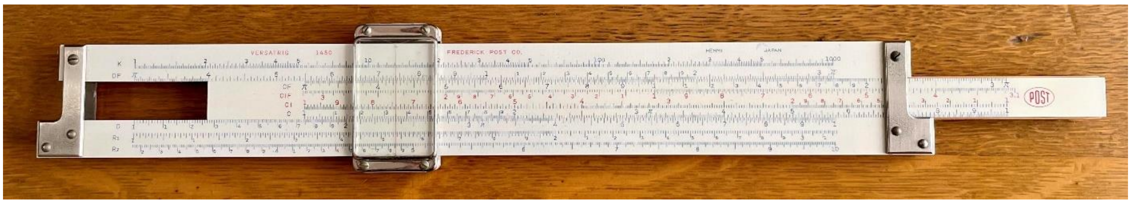
> [...] era a realização de operações com números não inteiros e baseava-se na soma de segmentos. Com o compasso era feita a medida da distância entre os números na reta e assim, a soma dessa distância possibilitava realizar as operações de multiplicação destes números, utilizando-se propriedades logarítmicas (Cordeiro, 2021, p. 29, apud Martins, Pereira e Fonseca, 2016).

As Réguas de Cálculo logarítmica, em suas muitas versões, foram companheiras dos estudantes durante quase quatro séculos. Eram usadas para os cálculos de logaritmos desde o segundo grau (atual Ensino Médio no Brasil) aos cursos de ensino superior. Por muitos anos a Régua de Cálculo logarítmica era um símbolo do estudante de engenharia. Nos campi universitários era comum estarem pendurada no cinto ou em um bonito estojo de couro. (Eves, 2011, p.347).

A forma atual da Régua de Cálculo foi projetada, em 1850, por Amedee Mannheim (1831 – 1906), oficial da artilharia francesa e professor de Geometria

Descritiva na École Polytechinque (Escola Politécnica), na França, que padronizou a versão “moderna” da régua. Com o advento das calculadoras eletrônicas na década de 1970, em pouco tempo a Régua de Cálculo apenas tornou-se um objeto de museu (Pereira, 2015).

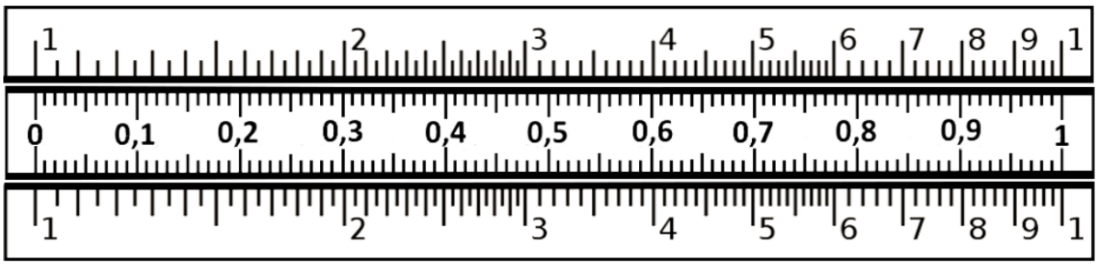
Figura 50 - Uma Régua de Cálculo moderna



Fonte: https://i.redd.it/o7sy16zpi4b81.jpg

A Régua de Cálculo utilizada neste trabalho consiste em duas réguas graduadas em escala logarítmica de 1 a 10 e, uma régua graduada em escala linear de 0 a 1, de modo que o comprimento da régua linear de 0 a 1 corresponda ao comprimento das réguas logarítmicas de 1 a 10. Essa régua é uma adaptação didática das réguas de cálculo logarítmico mais complexas, com mais escalas, que eram usadas para cálculos mais precisos.

Figura 51 - Régua de Cálculo Logarítmica utilizada

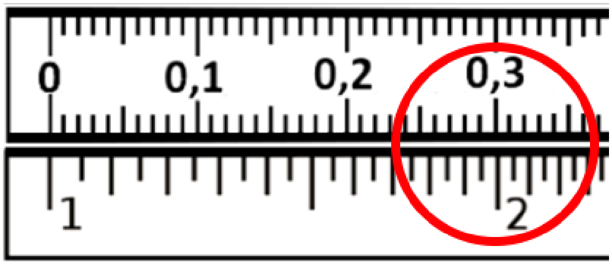


Fonte: elaboração do autor

Assim como as clássicas réguas de cálculos, esse dispositivo, a partir de propriedades de potenciação e logaritmos, permite realizar operações de multiplicações, divisões, potenciações, radiciações, além de calcular aproximações de logaritmos com base 10 e de bases diferentes de 10.

Para obter uma aproximação para os logaritmos na base 10, basta deslizar a régua em escala logarítmica sobre a régua em escala linear. Por exemplo, para calcular o log 2 alinhamos o 1 da régua logarítmica com o 0 da régua linear, buscamos o 2 na régua logarítmica e observamos o número na régua linear ao qual está alinhado, neste caso, é 0,3. Assim, este número corresponde a uma aproximação para log 2. Observe que, com estas réguas obtemos aproximações para os logaritmos na base 10, no entanto, esta limitação não inviabiliza a utilização deste dispositivo em sala de aula, uma vez que o uso permite a mobilização e fortalece os conhecimentos envolvendo logaritmos.

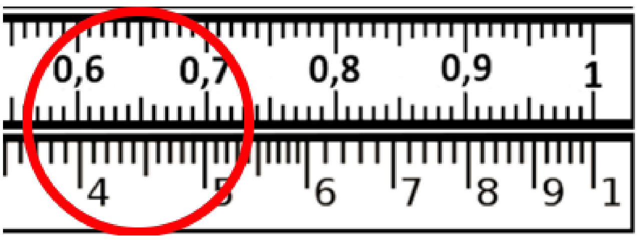
Figura 52 - Aproximação para o log 2 na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Como a escala da régua logarítmica em questão está limitada a 10, precisamos de algumas propriedades para o cálculo de logaritmos de números maiores do que 10. Por exemplo, para o cálculo de log 45, pode-se realizar os seguintes procedimentos: escreva 45 = 4,5 x 10, assim o log(4,5 x 10) = log 4,5 + log 10. Na Régua de Cálculo o log 4,5 corresponde a um número entre 0,65 e 0,66, pode-se tomar 0,655 por aproximação. Assim log 45 = 0,655 + 1 = 1,655 (já que log 10 =1). Note que valor obtido é próximo a 1,65321... que é uma aproximação ainda mais precisa para log 4,5.

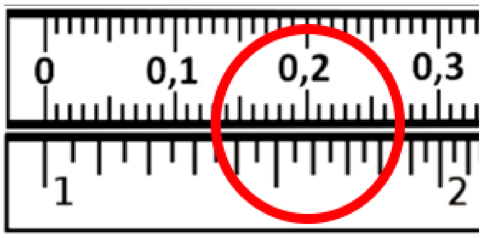
Figura 53 - log 4,5 na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Ao marcarmos, por exemplo, 4,5 na régua logarítmica, o valor correspondente na régua linear é uma aproximação para o log 4,5. Porém, se marcarmos um valor na régua linear o valor que correspondente na régua logarítmica é uma aproximação para uma potência cuja base é 10 e o expoente é o valor correspondente ao número marcado na escala linear. Por exemplo, para calcular uma aproximação de $10^{0,2}$, buscamos na régua logarítmica o número que está alinhado com o 0,2 na escala linear, neste caso, o número está entre o 1,55 e o 1,6, próximo a 1,6; assim, podemos tomar 1,58 para esta aproximação.

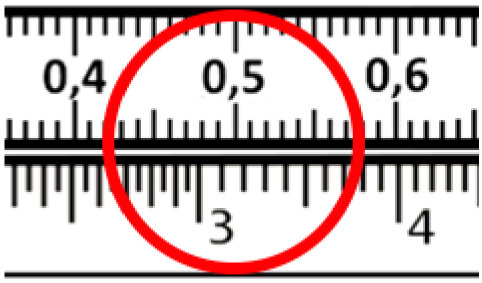
Figura 54 - Aproximação para $10^{0,2}$ na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Para o cálculo de potenciações cujos expoentes são números maiores do que 1, pode-se usar as propriedades de potenciação. Por exemplo, $10^{3,5}$ = $10^{3} x\ 10^{0,5}$. Assim, com a Régua de Cálculo, obtemos 3,15 como uma aproximação para $10^{0,5}$. Então, $10^{3,5} = 1000\ x\ 3{,}15 = 3150$. Percebe que este número está próximo ao 3162,27766... que corresponde a $10^{3,5}$.

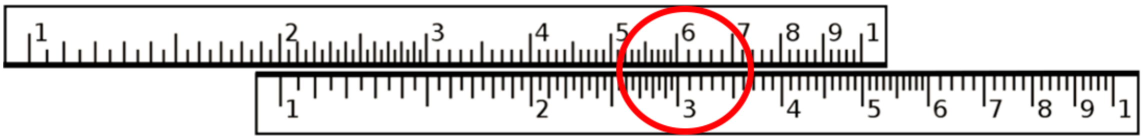
Figura 55 - Aproximação para $10^{0,5}$ na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Como apresentada, as réguas de cálculo logarítmicas surgem para a simplificação de cálculo. No caso do dispositivo apresentado nesta pesquisa, precisamos utilizar duas réguas em escalas logarítmicas. Por exemplo, para obter o produto de 2 x 3, alinhamos o 1 da régua de baixo com o 2 da régua de cima e olhamos com que número o 3 da régua de baixo se alinha com o da régua de cima, que é o 6.

Figura 56 - Produto 2x3 na Régua de Cálculo Logarítmica

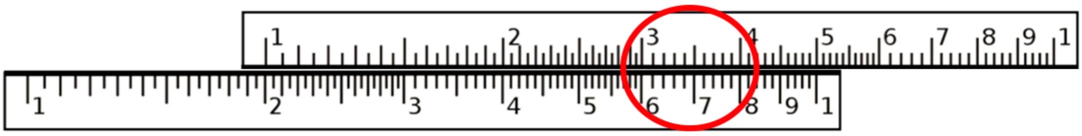


Fonte: Elaboração do autor

Observe na Figura 56, que todos os valores da régua de cima correspondem aos resultados da multiplicação de 2 pelos números que estão, a estes, alinhados na régua de baixo. O número 4 em cima está alinhado ao 2, o 8 está em cima do 4 e este padrão se mantém. A propriedade que permite a realização dessas multiplicações é a mesma já usada anteriormente, o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos dos fatores, estamos somando o log 2 na régua de cima com o log 3 na régua de baixo, obtendo assim o log(2x3) na régua de cima, que é log 6.

Para resultados maiores do que 10, utilizamos o 1 da direita. Por exemplo, para obter o produto 5 x 7. Alinhamos o 1 da direita da régua de baixo com o 5 da régua de cima e buscamos pelo número com o qual o número 7 da régua de baixo se alinha na de cima, neste caso, é o 3,5. Porém sempre que utilizarmos o 1 da direita o resultado é na verdade um décimo do valor real, precisamos multiplicar por 10 para obter a resposta correta, que é 35.

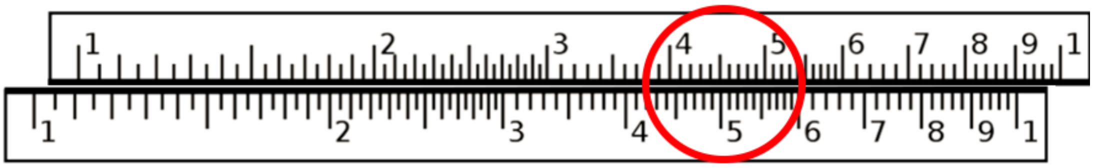
Figura 57 - Produto 5 x 7 na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Como a operação de divisão com números reais é a operação inversa da multiplicação, o resultado da divisão aparece na régua de baixo, e não na de cima. Por exemplo, ao dividir 45 por 9, primeiro vamos dividir 4,5 por 9. Alinhamos o 1 da régua de baixo com o 9 da régua de cima, porém agora iremos procurar o 4,5 na régua de cima, que está alinhado com o 5 da régua de baixo, mas como é o 1 da direita, e estamos fazendo divisões, então o resultado deve ser dividido por 10, logo a resposta é 0,5. Como o cálculo original era 45 ÷ 9, dividimos o 45 por 10 para caber na Régua de Cálculo, então agora multiplicamos novamente o resultado por 10, 0,5 x 10 = 5. Assim, 45 dividido por 9 é igual a 5.

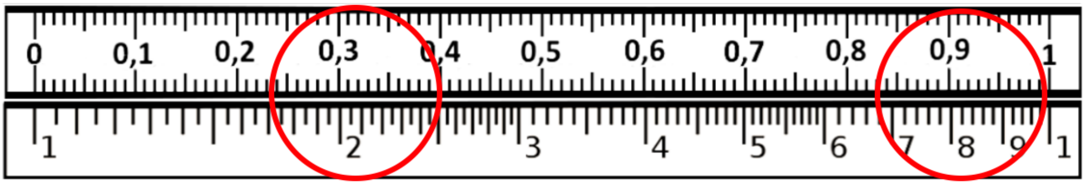
Figura 58 - Divisão de 4,5 por 9 na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

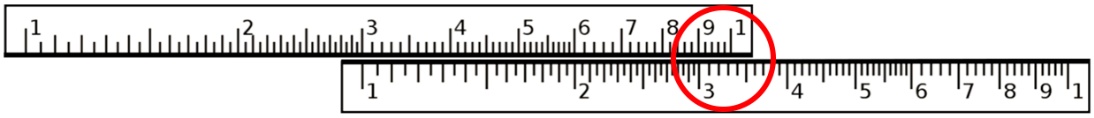
Para realizar o cálculo de logaritmos de bases diferentes de 10 utilizaremos a propriedade da mudança de base, $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (Lima, 2010). Sendo c = 10 para que possamos utilizar nossa Régua de Cálculo. Assim o cálculo do $log_2 8 = \frac{log_{10} 8}{log_{10} 2}$. Com o uso da Régua de Cálculo, obtemos log 8 ≈ 0,9 e log 2 ≈ 0,3, assim $log_2 8 == \frac{0,9}{0,3}$, que também pode ser obtido com o uso das duas réguas de escalas logarítmicas, fazendo $\frac{9}{3}$, obtemos o resultado 3.

Figura 59 - Log 2 e log 8 na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

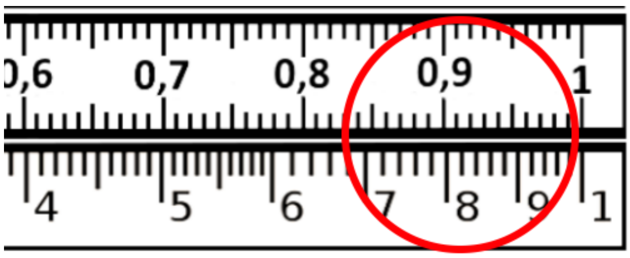
Figura 60 - Cálculo de 0,9 ÷ 0,3 na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Além disso, pode-se realizar cálculos de potenciação cujas bases são diferentes de 10, utilizamos a propriedade $10^{log\ a} = a$. Assim, 2^3 por exemplo seria $10^{log\ 2^3}$ = $10^{3log\ 2}$, já sabemos que log 2 é aproximadamente 0,3, assim $10^{3x0,3} = 10^{0,9}$ e, para calcular $10^{0,9}$ utilizamos a Régua de Cálculo e o resultado aproximado é 8 (veja a Figura 61).

Figura 61 - $10^{0,9}$ na Régua de Cálculo Logarítmica



Fonte: Elaboração do autor

Por fim, para realizar radiciações, utilizaremos a propriedade $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$. Por exemplo, $\sqrt[3]{8}$ = $8^{\frac{1}{3}}$ = $10^{log\left(8^{\frac{1}{3}}\right)}$ = $10^{\frac{1}{3}\log 8}$, na Régua de Cálculo, log 8 = 0.9, então $10^{\frac{1}{3}x\ 0,9} = 10^{0,3}$, que olhando na Régua de Cálculo achamos $10^{0,3} = 2$

Figura 62- $10^{0,3}$ na Régua de Cálculo Logarítmica

Fonte: Elaboração do autor

3.3 Revisão de Literatura

Inicialmente foi realizada uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertação (BDTD) e no Banco de Dissertações do PROFMAT, a fim de mapear pesquisas que investigaram as contribuições do uso de materiais manipuláveis concretos nos processos de ensino e de aprendizagem de Logaritmos.

No BDTD usando as palavras-chave “*Material Concreto*”, “*Matemática*” e “*Logaritmos*” com um recorte temporal: 2018 a 2025, obtivemos 2 resultados, destes, apenas 1 dialogava com o objetivo de nossa pesquisa sendo este, disponível no Banco de dissertações do PROFMAT.

No Banco de dissertações do PROFMAT foram realizadas busca com a palavra-chave “*Logaritmo”,* obtivemos 24 resultados relacionados, porém destes, apenas 3 discutiam o uso do material concreto e estava em acordo com o recorte temporal escolhido. Dentre eles, um já selecionado na busca mencionada no parágrafo anterior. Os dados foram consolidados na Tabela 8, a seguir.

Tabela 8 - Dissertações ou teses que discutem o uso de material concreto no ensino de Logaritmos

Ano	Título	Autores	Programa
2018	Uma estratégia didática para o ensino de funções	Cássia Gonçalves D’Avila	Programa de Mestrado Profissional em

	exponenciais e logarítmicas		Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
2018	Logaritmo E A Régua De Cálculo: Uma Proposta De Ensino	Rose Elizangela Martins Pedrosa	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
2021	Réguas De Cálculo E Seu Potencial Para O Ensino Das Propriedades Logarítmicas	Joao Jameson Lopes Cordeiro	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Fonte: Elaboração do autor

D'Avila (2018) analisou como professores percebem o uso de quatro abordagens metodológicas — Resolução de Problemas, Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), História da Matemática e Materiais Concretos — no ensino de funções exponenciais e logarítmicas. Segundo a autora, esses recursos têm o potencial de tornar as aulas mais envolventes e estimular a participação ativa dos estudantes. Na pesquisa, a Régua de Cálculo foi utilizada como material concreto, por ser um instrumento clássico que permite determinar logaritmos na base 10. "A Régua de Cálculo, confeccionada pela pesquisadora, foi escolhida, pois ela é uma das primeiras tecnologias desenvolvidas para auxiliar na resolução de problemas que envolviam logaritmos". (D'Avila, 2018, p. 38-39). A autora ressalta que, ao manipular a régua, os alunos são incentivados a levantar hipóteses, questionar procedimentos e construir seus próprios entendimentos sobre os conceitos estudados. Os resultados mostraram que o uso desse material trouxe maior dinamismo às aulas, despertou curiosidade e favoreceu a aproximação dos estudantes com as ideias matemáticas trabalhadas. A atenção demonstrada pelos participantes, o uso adequado da régua e o empenho em chegar a conclusões próprias evidenciaram um ambiente de aprendizagem mais ativo e produtivo.

Pedrosa (2018) investigou o estudo dos logaritmos a partir de uma abordagem histórica, apresentando inicialmente um panorama sobre sua origem e destacando as contribuições de John Napier, responsável pelas primeiras formulações, e de Henry Briggs, que aprimorou o sistema posteriormente. Além desse levantamento histórico, a autora analisou como o tema é tratado em sete livros didáticos utilizados na Educação Básica e propôs uma sequência didática para o ensino do conteúdo. A proposta didática elaborada faz uso da régua de cálculo logarítmica e de tabelas logarítmicas, com a intenção de mostrar aos estudantes como essas ferramentas desempenharam um papel fundamental na realização de cálculos antes da popularização das calculadoras, influenciando o avanço de diversas áreas científicas. A sequência foi desenvolvida com base nas orientações do livreto “Logaritmos e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino” (Adames; Pedrosa, 2018), que reúne dezesseis atividades contextualizadas, algumas delas utilizando a régua de cálculo que acompanha o material. Os resultados sugerem que a articulação entre o uso da régua e as atividades propostas favorece a compreensão dos logaritmos, permitindo aos alunos explorar o conteúdo por meio de uma perspectiva histórica e relacioná-lo a situações-problema do cotidiano.

Cordeiro (2021) buscou resgatar o uso das réguas de cálculo, elaborando um material didático voltado a apoiar professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem, além de estimular reflexões sobre o papel dos materiais manipuláveis na construção do conhecimento matemático. O estudo apresenta um panorama histórico que aborda tanto a origem dos logaritmos quanto o desenvolvimento de instrumentos de cálculo baseados nesses conceitos, como é o caso da régua de cálculo. A investigação foi conduzida por meio de uma pesquisa de campo realizada com duas turmas do 3º ano do Ensino Médio em uma escola do município de Cabrobó – PE. O trabalho também promove uma análise comparativa entre o uso da régua de cálculo, aplicada em uma sequência didática com parte dos estudantes, e o método tradicional trabalhado com outro grupo. A abordagem adotada foi qualitativa, fundamentada em observações, análise dos resultados e aplicação de questionários. Os dados indicaram maior participação e envolvimento na turma que utilizou as réguas de cálculo. Tanto o planejamento quanto a execução da sequência didática contribuíram para uma melhor compreensão do conteúdo, permitindo concluir que esse recurso didático apresenta potencial significativo para o ensino das propriedades dos logaritmos.

3.4 Metodologia

A pesquisa foi realizada com alunos do 2º ano de Ensino Médio do Instituto Federal Baiano (IF Baiano), campus Santa Inês, Bahia. Participaram da atividade 30 estudantes organizados em 15 duplas. Na análise buscamos compreender as contribuições do uso de material concreto ao revisitar os conceitos de logaritmos. A produção dos dados se baseou na resolução da atividade e no registro dos alunos no espaço reservado na atividade, além da observação direta das reações dos alunos, se estavam conseguindo realizar a atividade, se possuíam dúvidas e eventuais comentários sobre o material. A atividade foi elaborada com o intuito de investigar se a contribuição do material manipulável em agregou conhecimentos ao aluno, auxiliou o professor no ensino dos conteúdos e tornou a aula mais participativa.

Esta segunda investigação seguiu aspectos semelhantes à primeira (sobre Frações, veja a Seção 2.5). A coleta dos dados se baseou na resolução de uma atividade (veja o Apêndice B), além da observação direta das reações dos alunos por parte do pesquisador. A atividade foi elaborada com o intuito de investigar a contribuição do material manipulável na mobilização dos conhecimentos sobre logaritmos pelos estudantes participantes.

Entre os quadros teórico-metodológicos disponíveis, a pesquisa realizada classifica-se como qualitativa uma vez que o enfoque dado não esteve relacionado à representatividade numérica nas respostas apresentadas pelos estudantes nas situações que envolviam os conceitos e propriedades de logaritmos, com o uso da Régua de Cálculo Logarítmica.

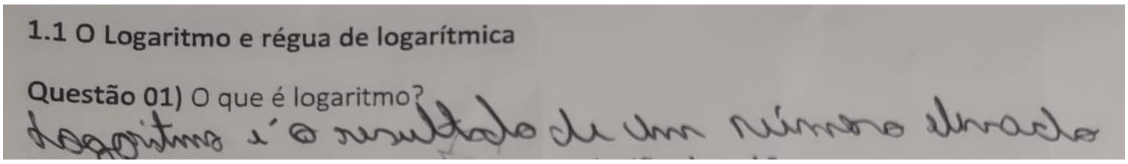
A pesquisa teve como dados as atividades respondidas pelos alunos bem como a observação de sua participação e comentários durante a atividade.

3.5 Análise dos Dados

Primeiro Momento: Relembrando Conceitos.

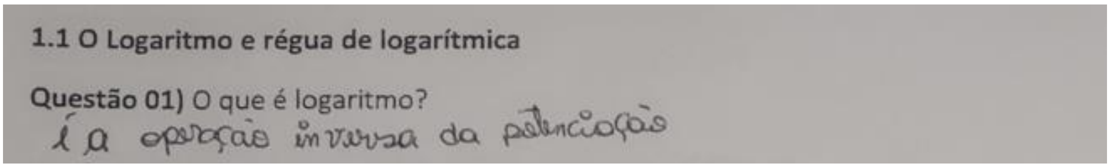
Neste momento os estudantes foram questionados sobre conhecimentos que já poderiam ter sido construídos.

Figura 63 - Resposta da dupla A2 à questão 01.



Fonte: Dados da pesquisa

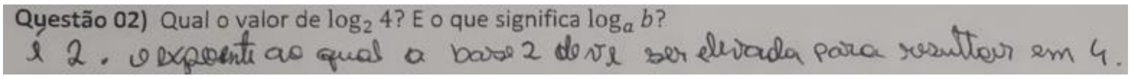
Figura 64 - Resposta da dupla B2 à questão 01.



Fonte: Dados da pesquisa

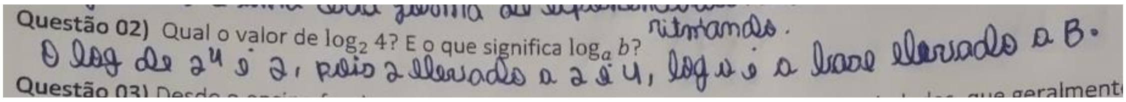
A questão 01 questionava “O que é logaritmo?” Foram registradas as seguintes respostas “Logaritmo é o resultado de um número elevado”; “Não lembro o que é, mas sei que é $a^x = b$”, “Não lembro a definição”, “é uma fórmula para descobrir o valor da base que foi elevada”, “a operação inversa da potenciação”, “logaritmo é uma certa forma de exponenciação, onde a base é 10, onde tem o logaritmando”, “logaritmo é uma forma matemática que usa potenciação”, “é o inverso do exponencial”. Tais respostas revelam que os estudantes apresentam dificuldades no que tangem ao aspecto conceitual do logaritmo. Apesar de fazer referências a termos: base, expoente, logaritmando, nenhuma conexão entre eles é estabelecida.

Figura 65 - Resposta da dupla C2 à questão 02.


Questão 02) Qual o valor de $\log_2 4$? E o que significa $\log_a b$?
é 2. o expoente ao qual a base 2 deve ser elevada para resultar em 4.

Fonte: Dados da pesquisa

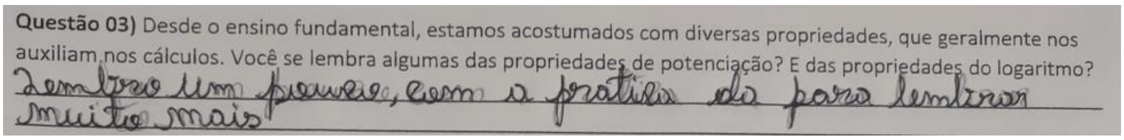
Figura 66 - Resposta da dupla D2 à questão 02.


Questão 02) Qual o valor de $\log_2 4$? E o que significa $\log_a b$?
O log de 2^4 é 2, pois 2 elevado a 2 é 4, log a b é a base elevado a B.

Fonte: Dados da pesquisa

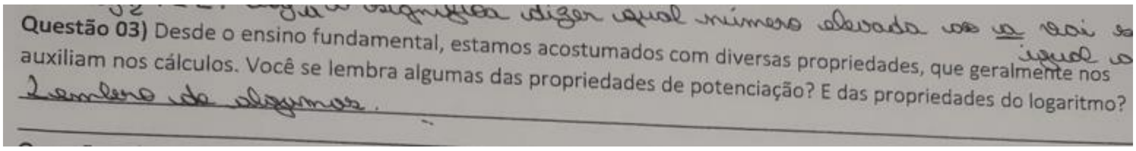
A questão 02 “Qual o valor de $\log_2 4$? E o que significa $\log_a b$?", as respostas foram: “2, porque 2 elevado a 2 é 4.”, “Significa que o a é elevado a um número que seja igual a b”, “$4 = 2$. Significa dizer qual número elevado ao a vai ser igual ao b”, “O valor é 2, b é a base, a é o valor que é elevado”, “É 2, o expoente ao qual a base 2 deve ser elevada para resultar em 4.”, “Não lembro” “$4 = 2^2 = 22 = 2.1 = 2$”, “O valor é 2, significa que b é o valor de a elevado a algum número”, “O valor é 2, significa que a vezes o resultado de logx é igual a b”, “2. Log de b na base a”. As respostas apresentadas a este questionamento revelam que os estudantes demonstram compreender os aspectos operatórios do logaritmo, por exemplo, realizam de maneira exitosa o cálculo de $\log_2 4$, registrando o raciocínio correto (veja as Figuras 65 e 66, as respostas das duplas C2 e D2). Além disso, discorreram corretamente a respeito do significado de $\log_a b$. No entanto, levando em consideração a falta de conexão comentada anteriormente, tais respostas revelam um aspecto importante levantado no decorrer deste texto, a operacionalização sem significados (apenas a realização mecânica de algum comando).

Figura 67 - Resposta da dupla E2 à questão 03.


Questão 03) Desde o ensino fundamental, estamos acostumados com diversas propriedades, que geralmente nos auxiliam nos cálculos. Você se lembra algumas das propriedades de potenciação? E das propriedades do logaritmo?
Lembro um pouco, com a prática dá para lembrar muito mais

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 68 - Resposta da dupla F2 à questão 03.



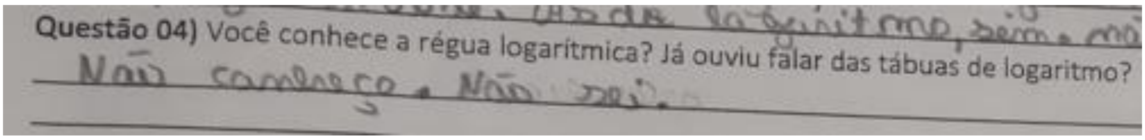
Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 3 ao questionarmos: "Desde o ensino fundamental, estamos acostumados com diversas propriedades, que geralmente nos auxiliam nos cálculos. Você se lembra algumas das propriedades de potenciação? E das propriedades do logaritmo?" apenas 3 duplas responderam positivamente ao questionamento, 4 não se lembravam e demais registraram alguma propriedade que eles se lembraram, ou respondendo que se lembram de algumas. Apesar da questão não solicitar explicitamente uma conexão entre operações de potenciação e cálculo envolvendo logaritmo, a baixa em respostas positivas revela a falta interpretação do logaritmo como um expoente, fortalecendo ainda mais a tese de uma operacionalização mecânica dos logaritmos.

Segundo Momento: Apresentação da Régua de Cálculo Logarítmica.

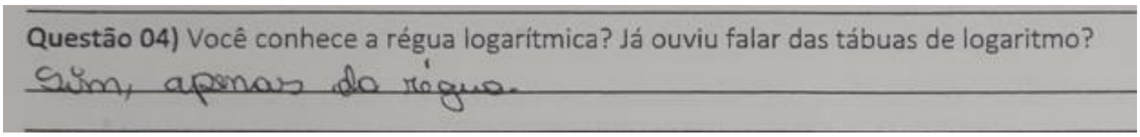
Neste momento, os estudantes foram questionados sobre a Régua de Cálculo. Em seguida foi apresentada a eles esta ferramenta.

Figura 69 - Resposta da dupla G2 à questão 04.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 70 - Resposta da dupla H2 à questão 04.



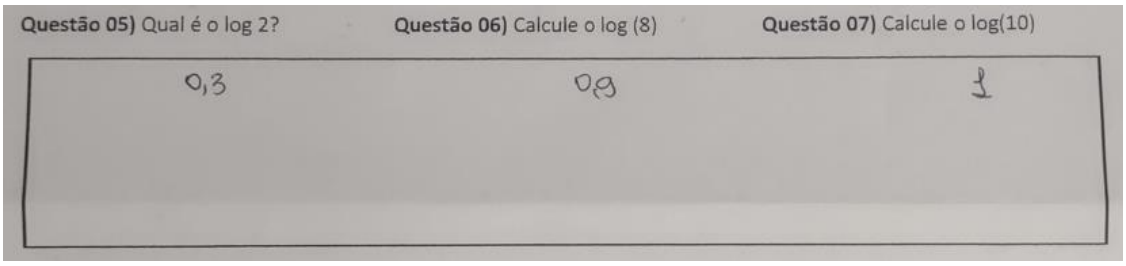
Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 04, questionava o conhecimento a respeito da Régua de Cálculo Logarítmica e as tábuas logarítmicas, apenas 3 duplas responderam que já ouviram falar e as outras 12 não conheciam. Isso evidencia o pouco contato dos estudantes com este material concreto.

Terceiro Momento: O Uso da Régua de Cálculo.

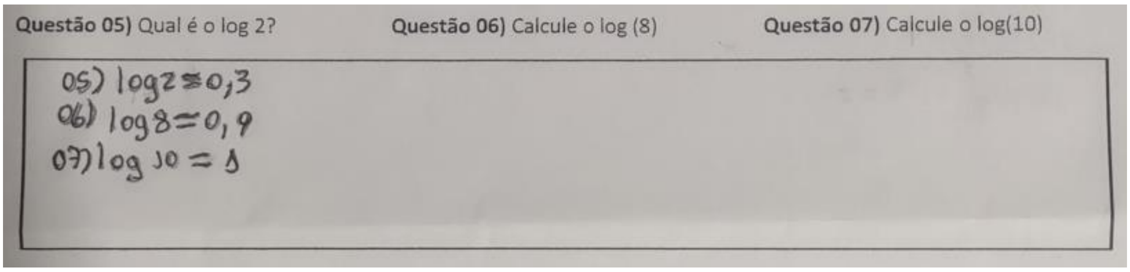
Estação 1: Cálculo de Logaritmo de Números Inteiros Menores 10.

Figura 71 - Respostas da dupla H2 às questões 05, 06 e 07.



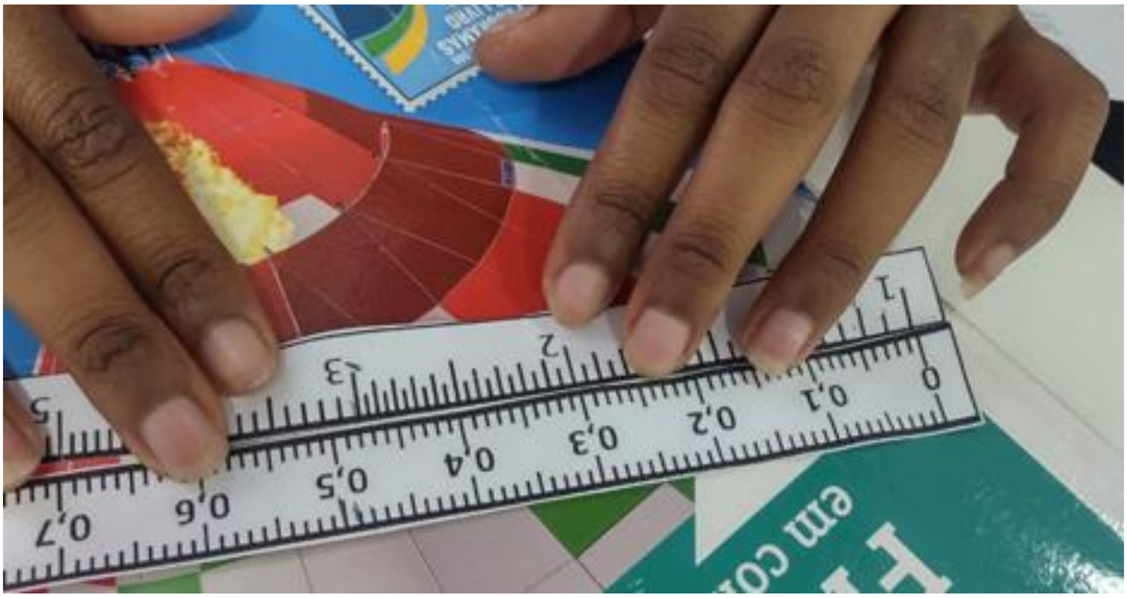
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 72 - Respostas da dupla E2 às questões 05, 06 e 07.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 73 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Régua de Cálculo Logarítmica para responder à questão 05.



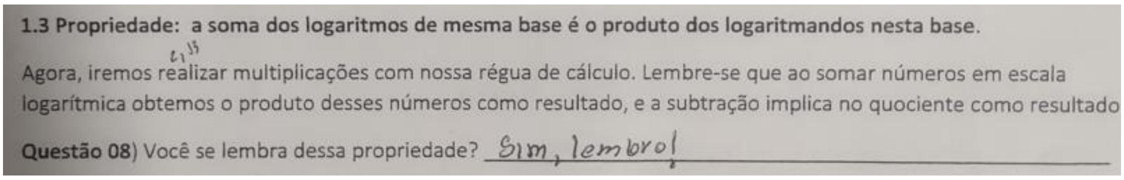
Fonte: Dados da pesquisa

Nas questões 05, 06 e 07 (Figuras 71 e 72), propusemos aos alunos utilizassem a Régua de Cálculo para o cálculo de logaritmos, veja a Figura 73. Os alunos obtiveram os valores corretos, além disso, demonstraram interesse em compreender o funcionamento da Régua de Cálculo, percebendo relações entre a escalar linear e a logarítmica.

Observamos que a reação dos participantes, de interesse ao perceber que a aproximação fornecida pela Régua de Cálculo (com poucos algarismos) é similar a apresentada na calculadora digital, mostra que o uso da Régua de Cálculo permitiu que mobilizassem conceitos abstratos a partir da experiência concreta. Isso pode contribuir para a ampliação da compreensão conceitual, promovendo a articulação teoria e prática e a consolidação da aprendizagem dos conteúdos.

Estação 2: O Logaritmo Como Ferramenta Para Simplificação dos Cálculos.

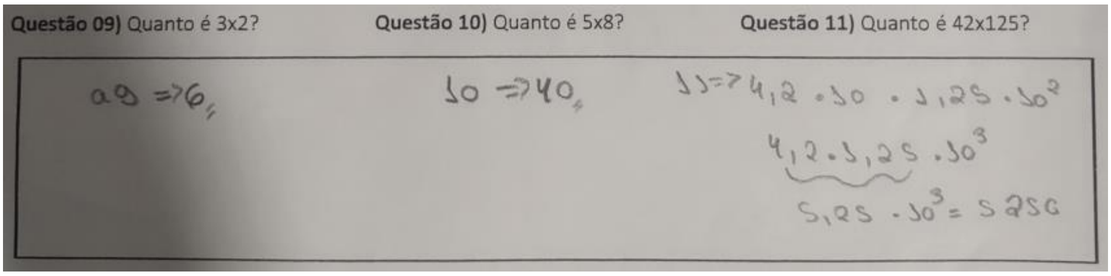
Figura 74 - Resposta da dupla I2 à questão 08.



Fonte: Dados da pesquisa

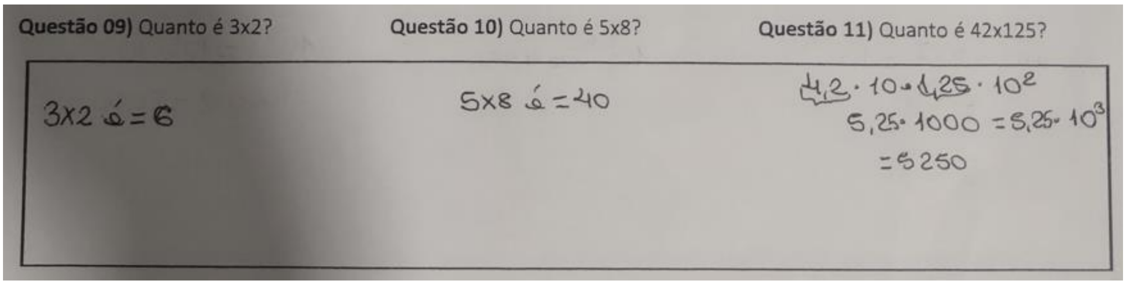
Na questão 8, os alunos foram questionados se recordavam das propriedades: $\log a + \log b = \log a.b$ e $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ (Lima, 2010). Nas respostas apresentadas, alguns participantes disseram que se lembravam da propriedade. As respostas negativas reforçam a tese de que o conceito de logaritmos ainda não está claro para o grupo, uma vez que não foi feita nenhuma relação entre as propriedades de potências e as propriedades logarítmicas (apesar do exercício não fazer nenhuma solicitação neste sentido).

Figura 75 - Respostas da dupla J2 às questões 09, 10 e 11



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 76 - Respostas da dupla K2 às questões 09, 10 e 11



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 77 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Régua de Cálculo Logarítmica para responder à questão 11.

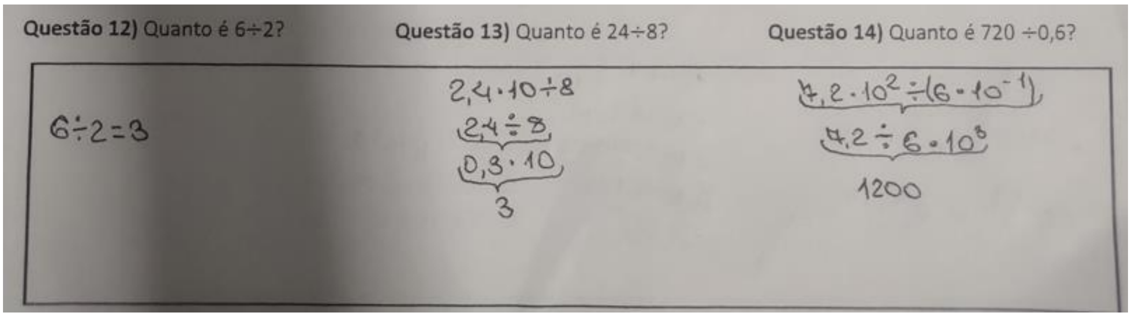
Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 09, era necessária a utilização da propriedade mencionada anteriormente para realizar o produto de 3 x 2. Todos os estudantes realizaram de maneira satisfatória os cálculos na Régua de Cálculo. Ao serem questionados *o porquê* é possível calcular multiplicações a partir do instrumento, não souberam responder, o que pode fortalecer a tese de uma operacionalização sem significado. Após discussão sobre escalas logarítmicas demonstraram compreender a dinâmica da Régua de Cálculo.

Na questão 10, que solicitava o cálculo de 5 x 8, realizaram a operação de maneira semelhante à questão 09, porém se depararam uma dificuldade, utilizando o 1 da esquerda da régua de baixo não encontrariam resultado na régua de cima, após orientação do uso do 1 da direita, que corresponde ao 10, todos os estudantes realizaram de maneira satisfatória os cálculos, encontrando o resultado 40 na régua de cima.

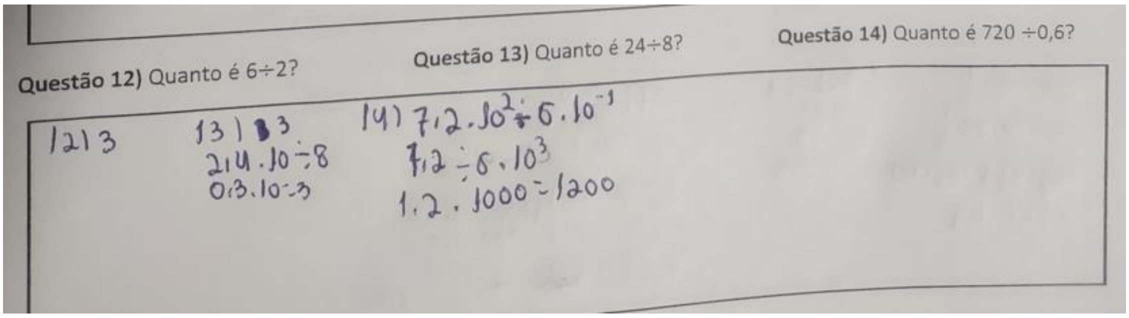
Na questão 11 os alunos teriam que calcular 42 x 125 utilizando a Régua de Cálculo. Foram questionados em como colocar o número 42 e o número 125 uma vez que o objeto só apresenta uma escala definida entre 1 e 10. Neste momento um aluno observou que "1 a 10 parece notação científica", demonstrando compreender a escala presente na Régua de Cálculo. Os estudantes foram estimulados a usar a escrita $42 = 4{,}2x10$; $125 = 1{,}25x10^2$. As respostas dos alunos ficaram entre 5,2 e 5,3, e uma aluna marcou 5,25. Foi observado que a Régua de Cálculo, para alguns valores, fornece apenas uma aproximação.

Figura 78 - Respostas da dupla K2 às questões 12, 13 e 14.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 79 - Respostas da dupla L2 às questões 12, 13 e 14



Fonte: Dados da pesquisa

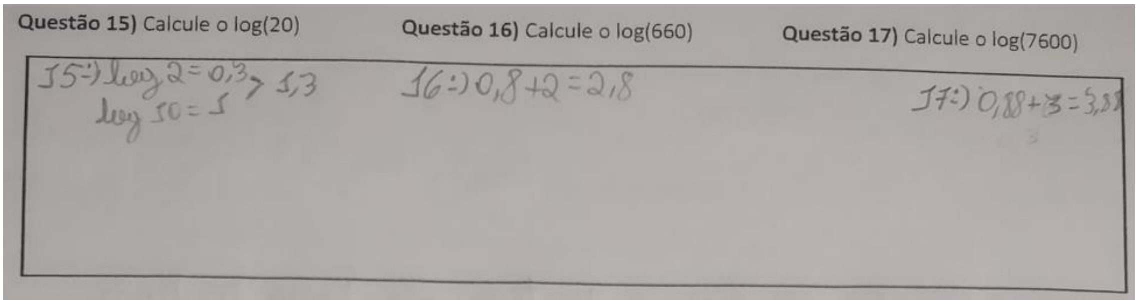
Nas questões 12, 13 e 14, que envolviam o cálculo de divisões, os alunos não apresentaram dificuldades, pois demonstraram compreender a multiplicação a partir da Régua de Cálculo. Neste caso, observando que na multiplicação era marcado com a régua de baixo e o resultado era observado na régua de cima, na divisão marcaríamos com a régua de cima e olharíamos o resultado na régua de baixo. Na divisão do 24 por 8, da questão 13, já sabiam que tinham que converter o 24 para notação científica, 2,4 x 10 e dividir o 2,4 por 8. Um aluno disse: "vai ter que colocar o 10 da direita não é professor?" visto que ao colocar o 1 da esquerda, o 2,4 não teve régua embaixo. Alguns alunos responderam que o 2,4 ÷ 8 = 0,3, mas expliquei que como estavam com o 10 da direita alinhado na régua logarítmica de baixo, o número 2,4, na régua logarítmica de cima deveria ser multiplicado por 10, se tornando igual a 24. A resposta, portanto, é igual a 3. Os questionamentos e iterações registadas evidenciam a compreensão e a possível apropriação da propriedade envolvendo divisão.

Estação 3: Uso da Régua de Cálculo Para o Cálculo de Logaritmos de Números Inteiros Maiores que 10 e de Números Decimais.

Na questão 14 (veja Figura 79), os discentes realizaram corretamente a conversão 720 em 7,2 x 10^2 e 0,6 em 6 x 10^{-1}. A maior dificuldade em apresentar o expoente correto da potência de 10 correspondente, alguns registraram a resposta 1,2 x 10 = 12. Neste ponto podemos conjecturam duas possibilidades a partir da resposta registrada, os estudantes fizeram confusão com as proprieades de potência (realizando 2+(-1)=2-1=1) ou aprensetaram erro na operação entre números inteiros.

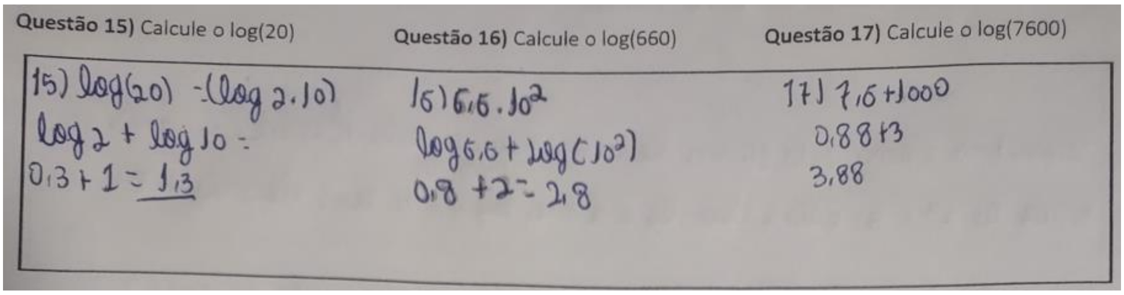
A participação dos alunos em resolver as questões da seção 1.3 do questionário mostra que a Régua de Cálculo consegue engajar os alunos, aumentando a curiosidade e participação deles em resolver as questões. Os alunos conseguiram realizar os cálculos com a Régua de Cálculo e obter as respostas corretas, mobilizando conhecimentos de notação científica, operações com números inteiros além das propriedades de logaritmo.

Figura 80 - Respostas da dupla M2 às questões 15, 16 e 17.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 81 - Respostas da dupla L2 às questões 15, 16 e 17.

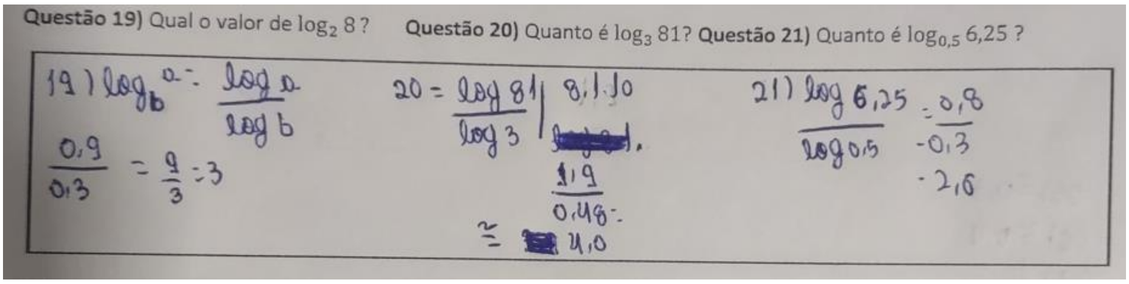


Fonte: Dados da pesquisa

Ao serem questionados para calcularem log 20, na questão 15, observaram que poderiam realizar a conversão de 20 para notação científica, ou seja, log (2.10), “e depois, faríamos como?” fizeram menção à propriedade envolvendo multiplicação log 2 + log 10, log 2 na Régua de Cálculo é aproximadamente 0,3 e log de 10 é 1. No entanto, alguns alunos obtiveram a resposta 30, multiplicando o 0,3 pelo 10, ou seja, não perceber a propriedade corretamente. Evidenciando que ainda há disculdades na mobilização das propriedades logaritmos. Nas questões 16 e 17 utilizaram a mesma estratégia da questão 15 e realizar corretamente sem dificuldades os cálculos.

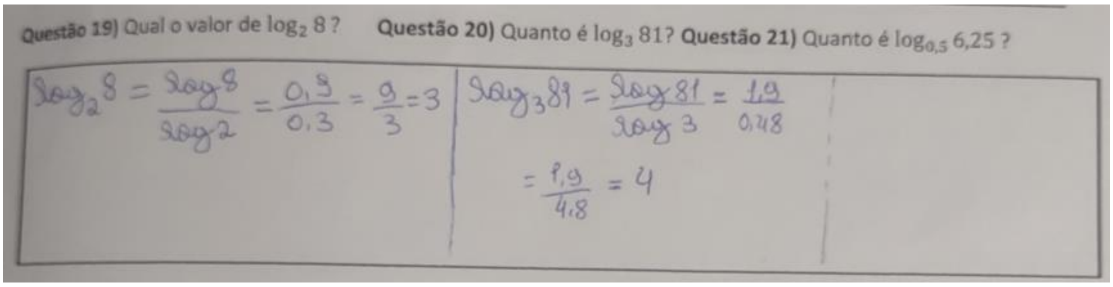
Estação 4: Cálculo de Logaritmo com Base Distinta de 10.

Figura 82 - Respostas da dupla L2 às questões 19, 20 e 21



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 83 - Respostas da dupla N2 às questões 19, 20 e 21.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 84 - Registro fotográfico dos alunos utilizando a Régua de Cálculo Logarítmica para responder à questão 19.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta estação, os estudantes deveriam utilizar a propriedade de mudança de base: $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ (Lima, 2010).

A questão 18 questionavam se eles se lembravam dessa propriedade, 11 duplas responderam positivamente à pergunta e 4 disseram não se lembrar. Foram chamados atenção para fato de a Régua de Cálculo possuir escala logarítmicas na base 10, então precisaríamos usar a propriedade solicitada para obter logaritmos em bases diferentes de 10.

Na questão 19 (Figura 82), deveriam calcular $\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$. Todas as duplas obtiveram os resultados corretos para log 8 e log 2 com o uso da Régua de Cálculo, o que demonstra a compreensão do funcionamento da ferramenta. Em seguida, foi solicitado que os estudantes realizassem a divisão de 0,9 por 0,3, no entanto, alguns deles ainda apresentaram dificuldades. Demonstrando dificuldades na realização de cálculos sofisticados na Régua de Cálculo.

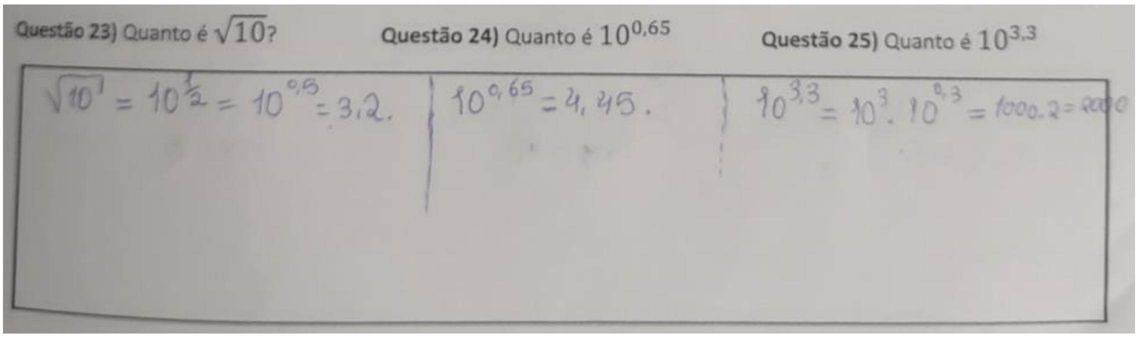
Na questão 20 (Figura 82), deveriam calcular $\log_3 81$, os alunos usaram a propriedade da mudança de base, observando a reescrita do 81 para 8,1 x 10 e usaram a propriedade do produto para encontrar o log 81 e o log 3. Para obter o resultado eles deveriam dividir 1,9 por 0,48, porém como foram auxiliados a obter a notação científica do 0,48, pois apresentaram dificuldades (esta dificuldade reforça a discussão realizada no Capítulo 2 relacionadas às operações com frações). Com o auxílio de duas réguas logarítmicas dividiram o 1,9 por 4,8. Alguns lembraram-se de multiplicar o valor obtido pela divisão por 10 e acharam que o resultado seria 40. Após uma discussão, perceberam que o resultado seria 0,4, o que revela uma falta de compreensão de propriedades dos números reais do tipo: se $0<x<y$, então o quociente x/y é menor do que 1. Porém, para obter o resultado solicitado, o 10^{-1} da notação científica deveria ser “corrigido”, logo 0,4 $\div 10^{-1}$ = 4. Alguns alunos não compreenderam essa ideia do 10 da direita e da divisão por 10^{-1}.

A questão 21, que solicitava o cálculo de $\log_{0,5} 6{,}25$, os alunos fizeram sem auxílio, ao analisar as respostas registradas, alguns estudantes obtiveram -2,6, talvez recorrendo à calculadora digital, outros tentaram realizar a divisão de 1,65 (considerando como log 6,25) por 0,25 (considerando como o log 0,5), mas de maneira incorreta. Outros obtiveram log 6,25 = 0,79 e 0,18 =log 0,5, achando 4,38 por resposta, também incorreto e outra dupla 0,8/0,3 = 2,6 na resposta. Nenhuma das duplas obtiveram a resposta correta, o que mostra que ao lidar com comandos mais simples (contas mais simples), com poucos passos, como na questão 19, os alunos têm mais facilidade para resolução, enquanto que, para processos com muitos passos, como na questão 20 e 21 eles não se organizam para realizar os procedimentos, se perdendo em alguma etapa e não conseguindo resolver o exercício. Demonstrando, desta forma, que quando o procedimento requer combinação de ideias e organização de processos apresentam dificuldade. O que fortalece a tese de um aprendizado operacional reduzido apenas a realização de comandos específicos.

Na seção 1.6 do questionário, os alunos iriam utilizar outras propriedades dos logaritmos, como as propriedades: $i)\ b^{\log_{\mathrm{b}} a} = a,\ \ ii) \log_{\mathrm{b}} a^c = c.\log_b a$ e $iii)\ \sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$ (Lima, 2010).

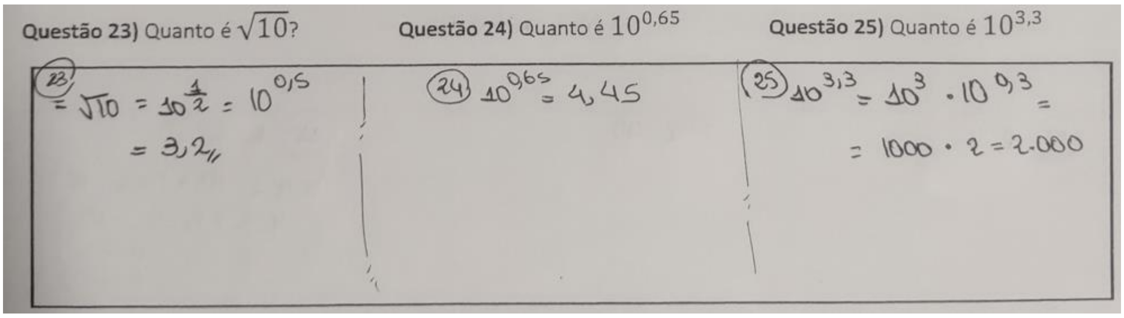
A questão 22 questionou se os estudantes se lembravam dessas propriedades, 6 duplas responderam que não se lembravam das propriedades. Algumas que responderam sim, destacando apenas as propriedades ii) ou iii), mas nenhum resgistrou lembra-se da propriedade i), o que evidencia que o conceito de logaritmo ainda não foi mobilizado por eles. A percepção do logaritmo como um expoente não foi consolidada, reforçando a tese um conhecimento apenas operacional.

Figura 85 - Respostas da dupla N2 às questões 23, 24 e 25.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 86 - Respostas da dupla O2 às questões 23, 24 e 25.



Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 23, os alunos deveriam realizar a operação $\sqrt{10}$. Para tanto, poderiam utilizar a propriedade que converte uma radiciação em uma potência de expoente fracionário. Foram questionados sobre qual seria o expoente resultante, alguns responderam 1 e outros $\frac{1}{2}$ ou 0.5. A resposta 1 reforça a tese de que os conhecimentos de potenciação podem ter sido afetados no percurso do Ensino Fundamental.

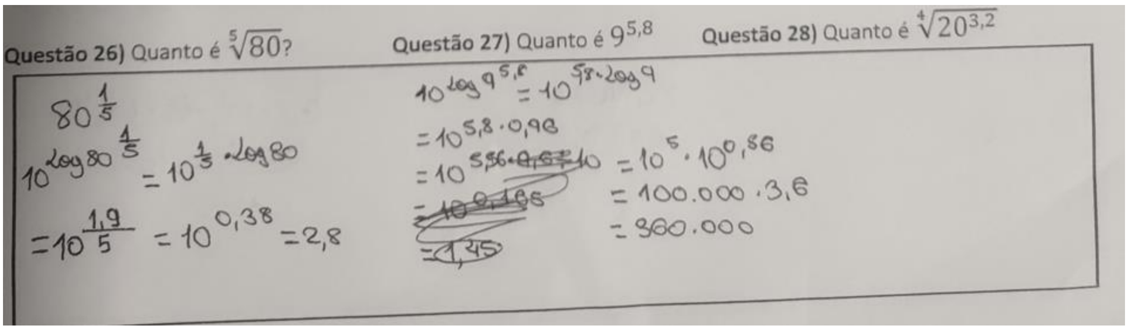
Então foram estimulados a utilizar a Régua de Cálculo, já que o expoente é um número entre 0 e 1 (para detalhes sobre o procedimento para o uso da Régua de Cálculo veja a Seção 3.2.4). Obtiveram 3,2 como resposta para $\sqrt{10}$, encontraram uma boa aproximação visto que, ao conferirem na calculadora digital, o valor exato é próximo a 3,16.

Na questão 24 os alunos calcularam o resultado de $10^{0,65}$ obtiveram 4,4 ou ainda 4,45 com o auxílio da Régua de Cálculo Logarítmica.

Na questão 25, deveriam calcular $10^{3,3}$, foram questionados sobre qual procedimento realizar já que expoente é maior do que 1, acreditaram que deveriam recorrer à notação científica como nas outras questões, nenhum aluno conseguiu organizar uma estratégia correta, então foram estimulados a relembrar a propriedade do produto de potências de mesma base, então concluíram que poderiam escrever 3,3 = 3 + 0,3 e teríamos $10^3 x\ 10^{0,3}$. Na Régua de Cálculo, encontraram 2 como aproximação para $10^{0,3}$, e 10^3 todos souberam dizer que é 1000. Portanto, a resposta ao exercício é 1000 x 2 = 2000. Conferiram na calculadora digital a resposta, 1995,26..., ficaram impressionados de quão boa é a aproximação fornecida pela Régua de Cálculo.

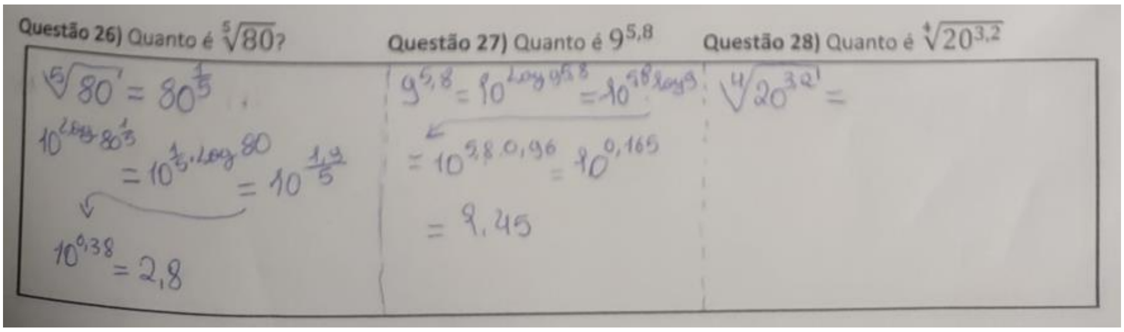
A discussão e as respostas registradas pelos alunos às questões 23, 24 e 25 mostram que apresentam dificuldades em organizar um argumento de forma autônoma, apesar de conhecer algumas propriedades não sabem como e quando utilizá-las. Neste sentido, a Régua de Cálculo, atrelada ao contexto histórico dos logaritmos, desempenhou um importante papel, uma vez que deixaram claro o papel das propriedades e do conceito do logaritmo como expoente.

Figura 87-- Respostas da dupla K2 às questões 26, 27 e 28.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 88 - Respostas da dupla N2 às questões 26, 27 e 28.



Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 26, solicitava o cálculo de $\sqrt[5]{80}$, foram questionados como poderíamos realizar o cálculo de potências de base diferente de 10, não souberam responder.

Então foram estimulados a utilizarem a propriedade $10^{\log a} = a$, que muda uma potência de base diferente de 10 para a base 10 e, em seguida, as demais propriedades como $\log_{\mathrm{b}} a^c = c.\log_b a \ e \ \sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$. Após a execução, obtiveram, com auxílio da Régua de Cálculo o resultado 2,4. Ao conferir o resultado na calculadora digital ficaram impressionados com o valor bem próximo do encontrado, que é 2,402...

Nas questões 27 e 28, que solicitavam o cálculo de $9^{5,8}$ e $\sqrt[4]{20^{3,2}}$, respectivamente, os alunos inicialmente tiveram dificuldades em iniciar as resoluções, justamente por não estarem acostumados com a notação $10^{\log a} = a$, e também pela utilização de diferentes propriedades na resolução. Foram auxiliados nos processos, similar à questão anterior, e obtiveram 320.000 como resultado da questão 27. Ao conferir na calculadora digital, o valor exato é 342.457, assim o valor que encontramos não foi uma aproximação tão boa, mas ainda assim acharam interessante como é possível, utilizando a Régua de Cálculo, obter um valor próximo do correto. Sobre a questão 28, apenas uma dupla tentou responder, mas colocou $20^{\frac{4}{3,2}}$, errando na propriedade de transformar a raiz em expoente.

As respostas dos alunos às últimas 3 questões revelam uma dificuldade em resolver questões que envolvam mais de uma propriedade, não conseguiram identificar qual propriedade usar em determinado momento do cálculo, nas questões 26 e 27 foi necessário que auxiliássemos, principalmente nas propriedades e no início de cada raciocínio. Isto revela o papel fundamental do professor em mediar o processo de construção do conhecimento e também a necessidade de estimular a autonomia do estudante neste processo.

À luz das respostas e desempenhos analisados ao longo das diferentes etapas da atividade, observa-se que a aprendizagem dos logaritmos, quando mediada apenas por procedimentos formais e exercícios algébricos tradicionais, tende a produzir compreensões fragmentadas, baseadas principalmente na memorização de regras operatórias fazendo com que os estudantes conheçam propriedades, sabendo enunciá-las quando solicitados, porém, não compreendem o seu objetivo enquanto ferramenta.

Os dados mostraram que muitos estudantes não mobilizaram as definições fundamentais — como a relação entre base, expoente e logaritmando — e apresentam dificuldades em conectar as propriedades essenciais dos logaritmos às situações que exigem múltiplos passos ou integração de conceitos. Por outro lado, o uso da Régua de Cálculo Logarítmica demonstrou potencial significativo para promover a articulação entre teoria e prática, favorecendo a visualização dos conceitos e aprofundando as relações estruturais presentes nas operações logarítmicas e exponenciais.

As atividades desenvolvidas evidenciaram que, diante de tarefas mais simples ou de menor complexidade, os alunos conseguem mobilizar propriedades e aplicar procedimentos com relativa segurança. Entretanto, quando a demanda envolve a coordenação de várias propriedades, a conversão entre diferentes representações (como notação científica, escalas lineares e logarítmicas) e a compreensão conceitual da estrutura dos cálculos, emergem dificuldades quanto à autonomia, à organização das etapas e à seleção adequada de estratégias. Tais resultados reforçam a necessidade de intervenções didáticas que ultrapassem a mera aplicação mecânica de regras, favorecendo processos de pensamento mais analíticos, articulados e significativos.

Além disso, ficou evidente que muitos estudantes têm pouco contato com materiais concretos ou instrumentos históricos de cálculo, como a Régua de Cálculo Logarítmica, o que indica uma lacuna no ensino de matemática que poderia ser suprida com abordagens didáticas que valorizem recursos manipuláveis e experimentação. As reações positivas dos alunos — expressas em surpresa, interesse e curiosidade — mostram que materiais simples, quando bem integrados às discussões teóricas, podem ampliar a compreensão conceitual, estimular o engajamento e consolidar conteúdos que antes eram percebidos apenas como abstrações distantes.

Dessa forma, os resultados obtidos ao longo das seções analisadas sugerem que a inclusão de instrumentos concretos e de estratégias que promovam a visualização, a interpretação e o raciocínio conceitual podem qualificar de maneira significativa o ensino de logaritmos. A prática pedagógica que articula propriedades formais, representações diversas e materiais manipuláveis contribui não apenas para a aprendizagem imediata, mas também para o desenvolvimento de competências matemáticas mais amplas, como a autonomia intelectual, a capacidade de generalização e o pensamento lógico-estrutural. Nesse sentido, o trabalho desenvolvido aponta para caminhos promissores na construção de práticas didático-metodológicas mais eficazes, significativas e alinhadas às necessidades reais dos estudantes.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho foi desenvolvido com o foco no uso do material concreto, nos quais foram utilizados a Calculadora de Frações e a Régua de Cálculo Logarítmica como objetos de pesquisa. Os participantes de pesquisa foram estudantes do 1º ano e do 2º ano do Ensino Médio, do Instituto Federal Baiano, campus Santa Inês, Bahia. A escolha desses objetos de estudo e dos participantes de pesquisa se justifica pela necessidade de uma recomposição de aprendizagem inerente ao período de aulas remotas síncronas e assíncronas durante o período pandêmico ocorrido pela variante do vírus da Covid-19.

A escolha dos temas a serem aplicados por meio do material concreto, Frações e Logaritmo, se deu pela dificuldade que muitos alunos têm nesses conteúdos, dificuldade percebida pela experiência pessoal do pesquisador e fortalecida pelas discussões realizadas nas seções iniciais desta pesquisa. A escolha dos materiais se deu após uma revisão de literatura a respeito do que a comunidade científica abordava sobre o tema, com foco nos materiais manipuláveis que já foram utilizados para o ensino desses conteúdos e quais habilidades da BNCC abordavam.

A partir disso foi desenvolvido um questionário para ser aplicado como pesquisa e coleta de dados. Desse modo, levantamos as seguintes perguntas norteadoras: como trazer uma abordagem diferente da tradicional para as aulas de matemática? Como proporcionar nas aulas de matemática ambientes em que os alunos participem ativamente do processo de ensino e aprendizagem? Para responder a essas perguntas, elencamos como objetivo geral resgatar o conhecimento acerca das Réguas de Cálculo e utilizar em sala uma adaptação deste material, bem como a Calculadora de Frações, a fim de mobilizar conhecimentos sobre frações e logaritmos. Podemos dizer que esse objetivo geral foi alcançado à medida que foram indicadas as coerências entre os objetivos específicos e a condução dessa investigação.

O primeiro objetivo específico dessa pesquisa — discutir aspectos didáticos referentes ao ensino de Frações e Logaritmos utilizando materiais concretos —

foi alcançado quando se realizou um levantamento bibliográfico de trabalhos relacionados ao objeto desta pesquisa e, assim, foi possível perceber a relevância do uso do material concreto como recurso didático no processo de ensino dos estudantes. No entanto, dentre os trabalhos filtrados analisados, nenhum deles trouxe uma abordagem de recomposição de conteúdos devido ao período pandêmico, mas permitiu concluir que esse recurso possibilita novos olhares para outros objetos de estudos diferentes.

O segundo objetivo específico — desenvolver materiais concretos adaptados para o ensino de Frações e Logaritmos — foi alcançado quando construímos a Calculadora de Frações, um aperfeiçoamento das conhecidas Tábuas de Frações, e a Régua de Cálculo Logarítmica com duas escalas logarítmicas de 1 a 10 e uma linear de 0 a 1, uma adaptação das réguas mais completas com mais escalas.

O terceiro objetivo específico — elaborar uma sequência de atividades abordando Frações e Logaritmos com o uso de material concreto e aplicar aos estudantes pesquisados — também foi alcançado quando foi elaborada uma sequência didática e aplicada aos estudantes dentro do espaço da instituição de ensino, com a utilização da versão impressa dos materiais concretos, tesoura para recortá-los e o questionário. A aplicação nos conduziu a alcançar o quarto e último objetivo específico — verificar as contribuições dessa sequência para a aprendizagem de Frações e Logaritmo pelos estudantes — uma vez que, a partir dessas aplicações, permitiram analisar como o uso dessa sequência didática atrelada ao uso dos materiais concretos, possibilitou a validação dos conceitos de Frações e Logaritmos entre os participantes da pesquisa.

Dito isso, recomendamos para a continuidade deste trabalho em futuras investigações. A primeira recomendação se baseia na possibilidade de trabalhar outros conceitos envolvendo os Logaritmos, como as potências com expoente negativo, e o inverso dos números, possível de se desenvolver com a Régua de Cálculo Logarítmica, mas que não foram abordados nesta pesquisa. Também, a Calculadora de Frações pode ser refeita pensando em abordar um leque maior de frações, não se limitando apenas às que fizemos nesse trabalho. É interessante também incluir nas sequências de exercícios aplicações diretas de conceitos e significados das frações no contexto de vida dos estudantes. Uma outra sugestão é criar outros materiais concretos que potencializem o ensino dos mais diversos conteúdos matemáticos, utilizando da criatividade e da preocupação por fortalecer cada vez mais o processo de ensino e aprendizagem da matemática, partindo do que esta pesquisa mostrou sobre a importância do uso desses materiais.

O produto resultante desta pesquisa é constituído de uma coleção de vídeos na plataforma *YouTube (link: www.youtube.com/@MatematicaConcreta1),* com o objetivo de oferecer a professores, professores em formação e estudantes o processo de construção dos materiais manipuláveis utilizados nessa pesquisa e sua utilização no contexto da sala de aula. A estratégia de produzir vídeos oferece a oportunidade de trabalhar cada um dos materiais separadamente, detalhando desde a etapa da construção em *softwares* (indicação) até a etapa de execução, de forma que o professor possa utilizar tais materiais em diferentes momentos, permitindo-o criar o seu próprio para suas aulas e, também permitindo que o aluno possa assistir a esses vídeos quantas vezes se fizer necessário para realizar as atividades solicitadas. Esperamos que esta pesquisa e o produto educacional resultante sejam de grande valia para os professores de matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A matemática por trás da construção física e graduação da régua de cálculo circular**. Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online, v.8, n.2, 2018. ISSN 2358-4750.

ALVES, Verusca Batista; SILVA, Hosana de Fátima Melo; MARTINS, Eugeniano Brito. **A Régua de Cálculo Circular como Instrumento Mediador no Ensino de Logaritmos: Descrição e Construção**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. Anais [...] São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. ISSN: 2178-034X.

BARROS, Fernanda Costa; DE PAULA VIEIRA, Darlene Ana. **Os desafios da educação no período de pandemia**. Brazilian Journal of Development, v. 7, n. 1, p. 826-849, 2021.

BERTONI, N. E. **A construção do conhecimento sobre fracionário**. Bolema, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Contexto do Pacto Nacional pela Recomposição das Aprendizagens**. Brasília, DF: MEC, 2024.

CASTEJON, M. **Olhares sobre o ensino da matemática**: educação Básica. – Uberaba – MG: IFTM, 2017.

CAVALIERI, L. **O Ensino das Frações.** (Monografia da especialização em Ensino de Matemática). Umuarama – PR, Universidade Paranaense, 2005.

CORDEIRO, João Jameson Lopes. **Réguas de cálculo e seu potencial para o ensino das propriedades logarítmicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2021.

DALTRO, Guilherme Cardoso. **Calculadora de frações: relatos sobre o uso de material concreto nas aulas de Matemática**. Encontro Baiano de Educação Matemática, *[S. l.]*, v. 21, n. 1, p. 1–8, 2025. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/ebem/article/view/852

D'ÁVILA, Cássia Gonçalves. **Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, 2018.

DENARDI, Vânia Bolzan. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática**. XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pelotas, 2017.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

ETCHEVERRIA, T. C., AQUINO, V. D. J. L., DOS SANTOS OLIVEIRA, J., & DE CARVALHO LISBOA, C. (2019). **Reflexões acerca do desempenho e das dificuldades de estudantes da educação básica e superior nas operações com frações**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, *4*(2), 71-88.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011. 844 p.

FERREIRA, João Otávio Silva; DOS SANTOS COSTA, Manoel. **A BNCC e a Resolução de Problemas: habilidades a serem desenvolvidas no ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental.** Conjecturas, v. 22, n. 15, p. 149-162, 2022.

FERREIRA, Nilton Cezar; MARTINS, Egídio Rodrigues; PEREIRA, Júlio Cesar Santos. **Os desafios de se ensinar Logaritmo através da Resolução de Problemas.** Revista Com a Palavra o Professor, Vitória da Conquista (BA), v.7, n.18, maio-agosto/ 2022

GIMENEZ, J.; BAIRRAL, M. **Frações no currículo do ensino fundamental**. [s.l.] Pimenta Cultural, 2025.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

HAMADA, Cristina Mayumi. **Construção Do Conceito De Fração: Olhares Através Da Dobradura**. 2023. Dissertação (Mestre em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2023.

HÄNSCH, Juliana Elisa; KIECKHOEFEL, Débora Eloísa Nass; DE FIGUEIREDO, Elisandra Bar. **Estudando frações: do concreto ao abstrato**. Anais IX CONEDU. Campina Grande: Realize Editora, 2023.

KAMII, Constance. **A criança e o número:** Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 e 6. Tradução A. de Assis. 11ª ed. Campinas: Papirus, 1990.

LIMA, Elon Larges. **Logaritmos**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 118 p.

LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LÜDKE, Menga. ANDRE, Marli E.D.A.A Pesquisa em educação: abordagens quali-tativas. 2 ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MARTINS, Eugênio Brito; PEREIRA, Ana Carolina Costa; FONSECA, Paulo Henrique Souza. **Descobrindo o Conceito de Logaritmo por meio da Construção da Régua de Cálculo Linear**. Revista Eletrônica Debates em Educação Cientifica e Tecnológica. V.6, N.3, p 47-65, setembro, 2016.

MACEDO, S. da S., Correa, S. F., Rocha, M. M. O., Miranda, R. S., & Pires, V. B. (2019). **Uso de material reciclado para a construção de material didático no ensino da matemática**. Reseach, Society and Development, 8(3), 1–12. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.33448/ rsd-v8i3.756.

MAGNAGUAGNO, Camila Gasparin. **Uma Abordagem Para O Ensino De Frações Utilizando Material Manipulativo Baseada Nos Princípios Da Engenharia Didática**. 2024. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2024

MAOR, Eli. e: **A história de um número**. Tradução: Jorge Calife. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. 291 p.

MARTINS, Eugênio Brito; PEREIRA, Ana Carolina Costa; FONSECA, Paulo Henrique Souza. **Descobrindo o conceito de logaritmo por meio da construção da régua de cálculo linear**. Revista Debates em Educação Científica e Tecnológica, v. 6, n. 3, p. 47-65, 2016.

MELO, William José de Arruda. **Conversões entre representações de números racionais: limites e possibilidades no uso de material manipulável**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2019.

MENDONCA, Glauce Ribeiro de Souza. **A Elaboração e Construção de Material Pedagógico como Metodologia do Processo Ensino Aprendizagem de Frações e Produtos Notáveis.** 2019. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Goiás.

MOURA, Débora Lucena de Carvalho Righi. **O corpo dos números racionais e o uso do círculo de frações no processo de ensino e aprendizagem**. 2024.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

NAMKUNG, J.; FUCHS, L. Remediating difficulty with fractions for students with mathematics learning difficulties. **Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal**, 24(2), 36–48, 2019.

OLIVEIRA, B. F.; NUNES, I.L.L; BEZERRA, I.C.P; OLIVEIRA, P.H.A; MEDEIROS, K.M. **Resolução de problemas aliado ao material concreto no ensino e aprendizagem de frações**. Anais VII ENID & V ENFOPROF / UEPB. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/64705>. Acesso em: 21/12/2025 11:12

OLIVEIRA, Emillyn Natália de. **O Aprendizado De Frações Por Meio De Materiais Concretos:** Uma Tentativa De Superar Dificuldades Elementares. Universidade Do Estado De Santa Catarina – Udesc Centro De Ciências Tecnológicas – Cct Curso de Graduação – Licenciatura Em Matemática, Joinville, 2022.

PEDROSA, Rose Elizangela Martins. **Logaritmos e a régua de cálculo**: uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Aspectos históricos da Régua de Cálculo para construção de conceitos matemáticos**. Vol. 1. São Paulo: Livraria da Física, 2015

PIAGET, J. **A Construção do Real na Criança**. Trad. Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

RIBEIRO, Isabela Estephaneli Corty. **Uma proposta didática com a utilização de jogos, materiais manipulativos e contextualização visando o ensino-aprendizagem de frações**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes.

RODRIGUES, Marta Rejane Reis; DE ANDRADE SILVA, Ana Lúcia Gonçalves; DANTAS, Lucília Batista. **O Uso De Material Concreto Para Estimular A Aprendizagem Do Conteúdo De Frações Numa Turma Da Primeira Série Do Ensino Médio**. CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – CONEDU, 4, 2017, João Pessoa. Realize Editora, 2017.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 1ª edição. Coleção PROFMAT

SANTOS, Solange Ferreira dos. **O uso do Tangram como proposta no ensino de frações**. 2019. 134 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019.

SILVA, C. V.; PEROVANO, A. P. **Obstáculos na compreensão de frações por alunos da Educação Básica**, 2012. **In**: Anais do V SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, p. 1-21.

SILVA, Lucimar Lima. **Logaritmos: Uma abordagem didática**. In: Seminário Sul – Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática (SESEMAT), 13., 2019, Campo Grande – MS. Anais [...] Campo Grande: UFMS, 2019, p.102 – 111. e-ISSN: 2448-2943.

SILVA, Washington Raimundo da. **Ensino de frações através de materiais manipuláveis**. 2024. 79 f. Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

TANONAKA, Elisa Missae. **Régua de Cálculo: Uma contribuição de Willian Oughtred para a Matemática**. 2008. 103f. Dissertação (Mestrado História da Ciência) – Pontifícia Universidade de São Paulo (PUC), São Paulo – SP, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A – LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE FRAÇÕES

Discente:	**Turma:** 1º ano **Data:** ___/ ___/ 2025
Discente:	

1. **Frações**

Questão 01) O que é uma fração? Você se lembra?

—---

Questão 02) O que te lembra os termos “numerador” e “denominador”?

—---

1.1 Frações equivalentes.

Nesta primeira parte da atividade vamos trabalhar com a ideia de frações equivalentes. É importante que em cada questão você utilize as tiras para representar cada situação envolvendo as frações.

Questão 03) O que são frações equivalentes? Você se lembra?

—---

Questão 04) Forme **uma unidade** usando pedacinhos de 1/8 da calculadora de frações

Questão 05) Encontre uma fração equivalente à 3/6 usando outros pedacinhos da calculadora.

1.2 Comparação de frações. Agora, iremos utilizar da nossa calculadora para comparar frações.

Questão 06) Qual fração é maior 1/3 ou 1/2?

Questão 07) Qual fração é maior 2/3 ou 3/4?

1.3 Operações. Agora, iremos realizar cálculos na nossa calculadora. Começando com **adição.**

Questão 08) Como você realiza a adição 1/3 + 2/3? Registre sua resposta.

Questão 09) Agora, usando a calculadora, confira sua resposta.

Questão 10) E como realiza a operação 5/6 + 1/2? Você usou o mesmo raciocínio usado na questão 5? Se não, por quê?

Questão 11) Agora, usando a calculadora, confira sua resposta.

Nossa calculadora também realiza **subtrações**. Vamos calcular algumas

Questão 12) Como você realiza a operação 1/2 – 1/? Registre sua resposta.

Questão 13) Agora, usando a calculadora, confira sua resposta.

Questão 14) Com a calculadora realize a operação 3/4 – 5/6 .

Para o cálculo de **divisão** vamos recorrer à seguinte estratégia: quando fazemos 10 ÷ 2, é como se perguntássemos "quantas vezes o 2 cabe no 10?" que é 5 vezes. Com isso em mente, com auxílio da calculadora realize as operações:

Questão 15) 1/2 ÷ 1/6?

Questão 16) 1 ÷ 1/3?

Para o cálculo de **multiplicação** de frações utilizaremos a malha quadriculada 12x12. Posicione as frações que serão multiplicadas uma na horizontal e outra na vertical na origem da tábua, conte quantos quadradinhos estão na área formada pelas frações e coloque sobre o denominador 144, simplifique e essa é a resposta.

Questão 17) Realize a operação 1/2 x 1/3?

Questão 18) Realize a operação 3/8 x 2/3?

Questão 19: Por que o procedimento acima funciona? Explique com suas palavras.

APÊNDICE B – LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE LOGARITMO

Discente:	**Data:** ___/ ___/ 2025

1.1 O Logaritmo e régua de logarítmica

Questão 01) O que é logaritmo?

Questão 02) Qual o valor de $\log_2 4$? E o que significa $\log_a b$?

Questão 03) Desde o ensino fundamental, estamos acostumados com diversas propriedades, que geralmente nos auxiliam nos cálculos. Você se lembra algumas das propriedades de potenciação? E das propriedades do logaritmo?

____

____

Questão 04) Você conhece a régua logarítmica? Já ouviu falar das tábuas de logaritmo?

____

____

1.2 Cálculo do logaritmo dos números

Nesta segunda parte da atividade iremos aprender a utilizar a régua logarítmica para calcular o logaritmo de números entre 1 e 10

Questão 05) Qual é o log 2?

Questão 06) Calcule o log (8)

Questão 07) Calcule o log(10)

1.3 Propriedade: a soma dos logaritmos de mesma base é o produto dos logaritmandos nesta base.

Agora, iremos realizar multiplicações com nossa régua de cálculo. Lembre-se que ao somar números em escala logarítmica obtemos o produto desses números como resultado, e a subtração implica no quociente como resultado.

Questão 08) Você se lembra dessa propriedade? ____

Questão 09) Quanto é 3x2?

Questão 10) Quanto é 5x8?

Questão 11) Quanto é 42x125?

Questão 12) Quanto é 6÷2?

Questão 13) Quanto é 24÷8?

Questão 14) Quanto é 720 ÷0,6?

1.4 Utilização da propriedade anterior para calcular o logaritmo de números maiores que 10.

Questão 15) Calcule o log(20) **Questão 16)** Calcule o log(660) **Questão 17)** Calcule o log(7600)

1.5 Utilização da propriedade de mudança de base.

A nossa régua de cálculo é estabelecida com logaritmos na base 10, mas para calcular logaritmos de base diferente de 10 podemos utilizar a propriedade de mudança de base.

Questão 18) Você se lembra desta propriedade? ____

Questão 19) Qual o valor de $\log_2 8$? **Questão 20)** Quanto é $\log_3 81$? **Questão 21)** Quanto é $\log_{0,5} 6{,}25$?

1.6 Cálculo de potências e raízes.

Para calcular potências usamos a propriedade $10^{\log a} = a$ e a propriedade $\log a^b = b.\log a$. Já para calcular raízes, usamos a propriedade $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ e seguir exatamente da mesma forma que calculamos as potências.

Questão 22) Você se lembra dessas propriedades? ____

Questão 23) Quanto é $\sqrt{10}$? **Questão 24)** Quanto é $10^{0,65}$ **Questão 25)** Quanto é $10^{3,3}$

Questão 26) Quanto é $\sqrt[5]{80}$? **Questão 27)** Quanto é $9^{5,8}$ **Questão 28)** Quanto é $\sqrt[4]{20^{3,2}}$