Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Provas Sem Palavras e Outras Estratégias para o Ensino de Somas de Potências Numéricas

Gabriel Lapa Lobo Nogueira

Brasília

10 de Abril de 2026

Gabriel Lapa Lobo Nogueira

Provas Sem Palavras e Outras Estratégias para o Ensino de Somas de Potências Numéricas

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, no âmbito do Programa PROFMAT.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. André von Borries Lopes

Brasília

10 de Abril de 2026

Posição vertical

Gabriel Lapa Lobo Nogueira
Provas Sem Palavras e Outras Estratégias para o Ensino de Somas de Potências Numéricas/ Gabriel Lapa Lobo Nogueira. – Brasília, 10 de Abril de 2026-
85 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André von Borries Lopes

Prévia de Trabalho (adaptado para o modelo PROFMAT) – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 10 de Abril de 2026.

1. Provas Sem Palavras. 2. Somas de Potências. I. Prof. Dr. André von Borries Lopes. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Provas Sem Palavras e Outras Estratégias para o Ensino de Somas de Potências Numéricas

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Provas Sem Palavras e Outras Estratégias para o Ensino de Somas de Potências Numéricas

por

Gabriel Lapa Lobo Nogueira *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 10 de abril de 2026

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. André von Borries Lopes - ENM/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FCTE/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli - FGA/UnB (Membro Suplente)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu a saúde que me permitiu levar uma vida com muita energia para trabalho, estudos e lazer.

À minha família, agradeço por se dedicar durante toda a minha vida a me dar as melhores oportunidades dentro de nossas possibilidades para que eu tivesse uma excelente educação, especialmente meus pais Alexandre e Patrícia. Obrigado pelo esforço dia a dia para garantir a disciplina que me trouxe até aqui.

À minha companheira de vida, Isabella, agradeço pela constante parceria, por me incentivar nos momentos difíceis, me inspirar com o seu esforço e me fazer acreditar num mundo melhor com o seu propósito de vida.

À instituição Pódion, agradeço pelos aprendizados e experiências que tive desde a época em que fui aluno à época em que sou professor. Aos grandes mestres com quem tive a oportunidade de ter aula e, em outro momento, dividir a sala dos professores, em especial Túlio, Frederico e George, deixo meu agradecimento. Essas oportunidades me moldaram ao docente que hoje sou.

Por fim, agradeço a todos os demais mestres que tive a honra de conhecer como meus professores, que me inspiraram a buscar essa carreira e me fizeram ver na educação uma ferramenta de mudança. Faço menção especial ao professor André, orientador deste trabalho, pelas brilhantes ideias, pelas sábias palavras e pela constante parceria que tanto contribuíram com o desenvolvimento desta dissertação.

Como disse Isaac Newton, “se vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”.

Resumo

Esta dissertação investiga o potencial das chamadas Provas Sem Palavras (PSPs) como ferramenta didática para o ensino de somas de inteiros e de potências numéricas. Partindo da tradição pitagórica dos números figurados e passando pelas contribuições de matemáticos como Arquimedes, Aryabhata, Al-Karaji, Faulhaber e Bernoulli, o trabalho analisa a evolução histórica das demonstrações das somas de números naturais, ímpares, quadrados perfeitos e cubos perfeitos, articulando deduções algébricas formais e representações geométricas bidimensionais e tridimensionais. São apresentadas demonstrações visuais para cada uma dessas identidades, destacando sua capacidade de promover intuição matemática, reconhecimento de padrões e conexões entre aritmética e geometria. A pesquisa também discute os alcances e as limitações das PSPs, especialmente quando se trata da generalização para potências de ordem superior, culminando na análise da Fórmula de Faulhaber e do papel dos números de Bernoulli na sistematização das somas de potências. Inserida no contexto do PROFMAT, a dissertação busca contribuir para a prática pedagógica de professores da educação básica, defendendo a integração entre rigor formal e visualização como estratégia para uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

Palavras-chaves: Provas Sem Palavras. Somas de Potências. Números Figurados. Visualização Matemática. Fórmula de Faulhaber. Ensino de Matemática. História da Matemática.

Abstract

This dissertation investigates the potential of so-called Proofs Without Words (PWWs) as a didactic tool for teaching sums of integers and numerical powers. Beginning with the Pythagorean tradition of figurate numbers and progressing through the contributions of mathematicians such as Archimedes, Aryabhata, Al-Karaji, Faulhaber, and Bernoulli, the study analyzes the historical development of demonstrations for the sums of natural numbers, odd numbers, perfect squares, and perfect cubes, articulating formal algebraic deductions with two- and three-dimensional geometric representations. Visual demonstrations are presented for each of these identities, emphasizing their ability to promote mathematical intuition, pattern recognition, and connections between arithmetic and geometry. The research also discusses the scope and limitations of PWWs, particularly regarding generalizations to higher-order powers, culminating in the analysis of Faulhaber's Formula and the role of Bernoulli numbers in the systematization of power sums. Conducted within the context of PROFMAT (Professional Master's Program in Mathematics), this dissertation seeks to contribute to the pedagogical practice of basic education teachers, advocating the integration of formal rigor and visualization as a strategy for more meaningful and lasting learning.

Key-words: Proofs Without Words. Power Sums. Figurate Numbers. Mathematical Visualization. Faulhaber's Formula. Mathematics Education. History of Mathematics.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Esta dissertação busca responder às seguintes perguntas: como facilitar a obtenção de padrões e regras gerais que representem as somas de potências numéricas? Há formas de representar visualmente as demonstrações das somas de potências, buscando facilitar o processo de ensino deste tema? Essas representações visuais englobam somas de potências numéricas de qualquer grau?

Ademais, este trabalho busca também servir como um material de apoio para professores no desenvolvimento de sua prática didática diária, apresentando uma coleção de demonstrações visuais e não-visuais para a soma de potências, que poderão ser oportunamente apresentadas aos alunos durante o desenvolvimento dos conteúdos relacionados aos temas aqui apresentados.

Nesse sentido, buscamos apresentar a evolução das demonstrações das somas de potências e de séries numéricas ao longo da história, com enfoque especial em demonstrações visuais, sempre que possível, com vistas à identificação por parte do leitor de ferramentas didáticas para apresentação dos padrões relacionados às somas e à extrapolação para quaisquer limites inteiros.

Com esse enfoque, esta dissertação investiga o potencial das chamadas "Provas Sem Palavras" (PSPs) como ferramenta didática para o ensino de somas de inteiros e de potências, articulando história da matemática, demonstrações algébricas formais e construções visuais bidimensionais e tridimensionais. Partindo da tradição pitagórica dos números figurados e chegando às sistematizações modernas difundidas por Roger B. Nelsen, o trabalho examina, sob perspectiva histórica e pedagógica, como representações geométricas podem tornar intuitivas identidades clássicas como a soma dos números naturais, dos números ímpares, dos quadrados perfeitos e dos cubos perfeitos. Inserida no contexto do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), a pesquisa busca compreender os alcances e limites das PSPs enquanto metodologia de ensino, analisando sua capacidade de promover pensamento visual, reconhecimento de padrões, conexões entre aritmética e geometria e aprofundamento conceitual na formação de professores de Matemática.

No contexto da educação matemática brasileira contemporânea, torna-se pertinente situar a presente investigação em diálogo com as diretrizes estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que orienta o desenvolvimento de competências e habilidades ao longo da educação básica (BRASIL, 2018). Nesse sentido, observa-se que a proposta desta dissertação — centrada na utilização de Provas Sem Palavras como estratégia para o ensino de somas de potências numéricas — encontra respaldo em diversas habilidades previstas tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, especialmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, da percepção de padrões e da articulação entre diferentes formas de representação matemática.

No âmbito do Ensino Fundamental, destacam-se inicialmente as habilidades EF08MA01 e EF08MA02. A primeira propõe que o estudante seja capaz de efetuar cálculos com potências de números inteiros e compreender suas propriedades, reconhecendo regularidades e padrões associados a esse tipo de operação. Já a segunda enfatiza a compreensão da relação inversa entre potenciação e radiciação, permitindo ao aluno transitar entre diferentes representações de um mesmo conceito numérico. Ambas as habilidades fornecem uma base conceitual essencial para o estudo das somas de potências, na medida em que possibilitam não apenas o domínio operacional, mas também a identificação de estruturas e regularidades que são posteriormente generalizadas.

Ainda nesse nível de ensino, a habilidade EF08MA03, que envolve a resolução e a elaboração de problemas de contagem por meio de diferentes estratégias, contribui significativamente para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e da organização de padrões numéricos. Tal habilidade se articula de forma direta com as abordagens adotadas neste trabalho, uma vez que muitas das provas sem palavras exploradas se fundamentam na organização de elementos em arranjos geométricos, cuja interpretação exige a identificação de padrões e a compreensão de relações quantitativas implícitas nas representações visuais.

Ao avançar para o Ensino Médio, observa-se um aprofundamento dessas ideias, agora com maior ênfase na generalização, na modelagem e na argumentação matemática. A habilidade EM13MAT301 propõe que o estudante seja capaz de resolver e elaborar problemas, mobilizando diferentes estratégias e registros de representação, incluindo abordagens algébricas, geométricas e gráficas. Nesse contexto, as provas sem palavras se inserem como uma estratégia didática particularmente relevante, na medida em que articulam representações visuais e raciocínio matemático, contribuindo para a construção de significados e para a validação de resultados.

De maneira complementar, a habilidade EM13MAT302 enfatiza a construção e a análise de modelos matemáticos para a interpretação de situações diversas, com destaque para a identificação de padrões e a formulação de generalizações. Tal perspectiva está intimamente relacionada ao estudo das somas de potências, uma vez que a obtenção de fórmulas gerais a partir de casos particulares constitui um dos eixos centrais desta dissertação. As representações visuais utilizadas nas provas sem palavras favorecem precisamente esse movimento de generalização, ao tornar perceptíveis estruturas que, em uma abordagem exclusivamente algébrica, poderiam permanecer ocultas.

Por fim, as habilidades EM13MAT507 e EM13MAT508 reforçam a importância da comunicação e da argumentação matemática por meio de diferentes registros de representação. A primeira está relacionada à capacidade de interpretar, analisar e comunicar ideias matemáticas utilizando linguagens diversas, enquanto a segunda enfatiza a construção e a validação de argumentos, com base em justificativas consistentes e na articulação entre diferentes formas de representação. Nesse sentido, as provas sem palavras configuram-se como um recurso privilegiado, pois permitem que uma proposição matemática seja compreendida e justificada por meio de construções visuais que evidenciam, de forma direta e intuitiva, a veracidade das relações envolvidas.

Dessa forma, ao integrar representações geométricas, raciocínio algébrico e construção de argumentos, a abordagem desenvolvida nesta dissertação alinha-se de maneira consistente às orientações da BNCC, contribuindo para a promoção de uma aprendizagem matemática que valoriza não apenas o domínio técnico, mas também a compreensão conceitual, a percepção de padrões e a articulação entre diferentes formas de pensar e representar a matemática (BRASIL, 2018).

O Capítulo 1, Provas Sem Palavras, apresenta o conceito de PSP, contextualizando historicamente sua origem e consolidação, com destaque para o trabalho de Roger B. Nelsen. Discute-se a natureza dessas demonstrações visuais, sua diferença em relação às provas formais tradicionais e seu potencial pedagógico no desenvolvimento da intuição matemática, da visualização espacial e do pensamento crítico. O capítulo também introduz o problema central da dissertação: investigar até que ponto é possível construir provas sem palavras para diferentes somas de inteiros e potências, bem como compreender suas eventuais limitações.

Já no Capítulo 2, Números Figurados, estabelece-se o fundamento histórico e conceitual que sustenta grande parte das PSPs exploradas no trabalho. São apresentados os números triangulares, quadrados e pentagonais, bem como sua generalização para números poligonais, destacando sua origem pitagórica e suas conexões com a teoria dos números. O capítulo evidencia como a representação geométrica de sequências numéricas constitui uma ponte natural entre aritmética e geometria, preparando o terreno para as demonstrações visuais das somas estudadas nos capítulos seguintes.

Dando sequência, no Capítulo 3, Soma dos Primeiros Números Naturais, aborda-se a clássica identidade $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, articulando sua construção histórica — incluindo a célebre anedota de Gauss — com demonstrações algébricas e provas sem palavras baseadas em arranjos triangulares e retangulares. O capítulo evidencia como a duplicação e reorganização geométrica de conjuntos de pontos tornam visualmente evidente a fórmula, reforçando a ideia de que padrões aritméticos podem emergir de construções espaciais simples e intuitivas.

No Capítulo 4, Soma dos Primeiros Números Ímpares, investiga-se a identidade

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, destacando seu forte apelo visual por meio da construção sucessiva de quadrados perfeitos a partir de gnômons. Após apresentar a dedução algébrica via progressão aritmética, o capítulo enfatiza a potência didática da demonstração geométrica, que permite "ver" o crescimento quadrático como resultado da adição de camadas ímpares, fortalecendo a compreensão da relação entre sequências e áreas.

Já no Capítulo 5, Soma dos Primeiros Números Quadrados Perfeitos, amplia-se a complexidade das somas estudadas, apresentando a identidade $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Inicialmente, desenvolve-se a dedução algébrica por meio de soma telescópica associada a diferenças cúbicas, contextualizando historicamente contribuições de Arquimedes, Aryabhata e al-Karaji. Em seguida, o capítulo explora provas sem palavras que utilizam pirâmides de blocos e rearranjos tridimensionais, evidenciando como uma identidade algébrica relativamente longa pode ser condensada em uma construção espacial visualmente impactante.

No Capítulo 6, Soma dos Primeiros Números Cubos Perfeitos, apresenta-se a notável identidade $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, que revela a profunda conexão entre cubos e números triangulares. Após dedução algébrica por meio de identidades telescópicas envolvendo números triangulares, o capítulo explora PSPs que constroem um quadrado de lado triangular a partir de blocos cúbicos, evidenciando uma surpreendente harmonia estrutural entre diferentes níveis de potência e consolidando a interconexão entre aritmética, geometria plana e espacial.

No entanto, começa-se a notar limitações na utilização das PSPs. Por isso, o Capítulo 7 aprofunda a reflexão sobre a abrangência das provas sem palavras, discutindo seus alcances, generalizações possíveis e limitações quando aplicadas a somas mais complexas ou a séries de potências de ordem superior. Nesse momento, a investigação assume caráter mais analítico, problematizando até que ponto toda identidade algébrica admite uma representação visual convincente e quais critérios tornam uma PSP pedagogicamente eficaz. O capítulo reforça o papel das provas sem palavras como ferramenta metodológica potente para o ensino de Matemática, ao mesmo tempo em que reconhece seus limites estruturais e a necessidade de articulação entre rigor formal e intuição visual no processo de aprendizagem.

Por fim, o Capítulo 8 apresenta a genialidade da generalização apresentada pela Fórmula de Faulhaber para a soma de potências. Essa fórmula utiliza o conceito dos Números de Bernoulli, que são explorados neste capítulo, para desenhar uma fórmula que pode ser utilizada para a soma das potências de qualquer grau, sistematizando os principais resultados obtidos, retomando a questão norteadora da pesquisa e discutindo as implicações para a formação docente no contexto do PROFMAT.

1 Provas Sem Palavras

As “Provas Sem Palavras”[1] (PSPs) representam uma categoria singular e impactante de demonstrações matemáticas. Elas consistem em representações visuais que comunicam uma verdade matemática fundamental de forma intuitiva e direta, muitas vezes sem a necessidade de uma elaborada argumentação textual. Um diagrama, uma sequência de imagens ou um arranjo geométrico habilidoso são capazes de convencer o observador da validade de uma proposição, permitindo que a compreensão surja de uma forma quase imediata e “perceptiva” (NELSEN, 1993b).

Embora a ideia de demonstrações visuais remonte à antiguidade – com exemplos notáveis na geometria grega, como as provas de Arquimedes ou de Nicômaco, que serão apresentadas adiante, – o termo “Prova Sem Palavras” foi popularizado mais recentemente pelo matemático e educador Roger B. Nelsen (Figura 1). Desde a década de 1990, Nelsen compilou e publicou uma vasta coleção dessas provas em seus livros *“Proofs Without Words”, “Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking”* e *“Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking”* (NELSEN, 1993c; NELSEN, 2000; NELSEN, 2015), bem como em periódicos como *Mathematics Magazine* e *The College Mathematics Journal* (NELSEN, 1993b; NELSEN, 1994), tornando-se a principal referência no campo.

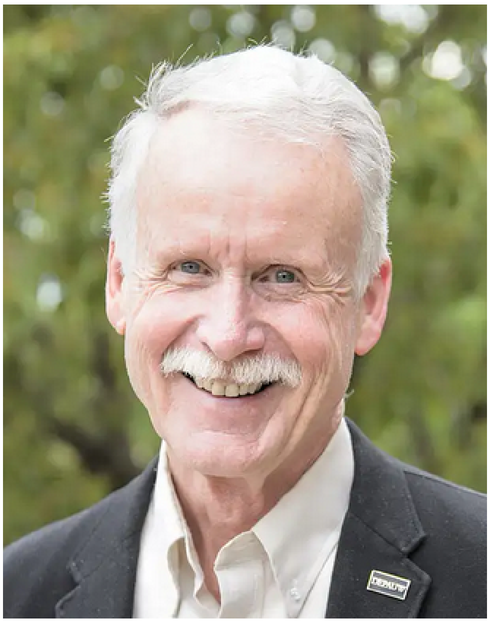


Figura 1 – Roger B. Nelsen - Acervo de Lewis and Clark College

As obras de Nelsen são coleções valiosas de demonstrações matemáticas que uti-

[1] do inglês, *Proofs Without Words*

lizam diagramas e arranjos visuais para ilustrar identidades algébricas e geométricas de forma elegante e intuitiva, promovendo o pensamento visual na matemática. Essas obras serão utilizadas como espinha dorsal deste presente trabalho.

A essência de uma PSP reside em sua capacidade de evocar uma "epifania matemática", em que a estrutura da prova é intrínseca à sua representação visual. Ao invés de seguir uma cadeia lógica de proposições e inferências verbais, o estudante ou professor, ou ainda leitor leigo, é convidado a "ver" a verdade matemática, muitas vezes reorganizando mentalmente elementos do diagrama para chegar à conclusão. Este método contrasta com as provas formais tradicionais, que priorizam a linguagem simbólica e a sequência dedutiva e, por isso, comumente facilita a compreensão por parte do interlocutor.

Para o contexto educacional, especialmente nos ensinos médio e superior, as PSPs oferecem um potencial pedagógico imenso. Professores podem encontrar, nessa ferramenta, um recurso muito valioso. Destaca-se, em primeiro lugar, o potencial de desenvolvimento da intuição matemática: as PSPs ajudam os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos, ao invés de apenas memorizar fórmulas ou procedimentos.

Além disso, elas estimulam o pensamento crítico e a visualização ao desafiar os alunos a interpretar os diagramas e a inferir a lógica por trás de suas construções, as PSPs promovem habilidades de raciocínio crítico e visualização espacial, competências essenciais em diversas áreas da matemática e ciência.

Uma terceira vantagem dessa ferramenta é a de facilitar a aprendizagem de conceitos abstratos. Muitas ideias matemáticas que parecem abstratas na forma simbólica tornam-se concretas e palpáveis através de uma representação visual bem elaborada.

Ainda no contexto educacional, pode-se destacar uma quarta vantagem na utilização das PSPs ao diversificar as estratégias de ensino. Essa ferramenta oferece uma alternativa envolvente às abordagens tradicionais, podendo capturar o interesse de alunos com diferentes estilos de aprendizagem.

Pode-se, ainda, destacar a conexão da Aritmética à Geometria, como será apresentado nas demonstrações de números figurados, por exemplo. As PSPs ilustram de forma eficaz a interconexão entre diferentes ramos da Matemática.

Por fim, destaca-se a promoção da "descoberta matemática" pela natureza intrínseca das PSPs, que convidam o aluno a descobrir a prova por si mesmo, gerando um senso de satisfação e autoconfiança. Com isso, mostra-se inegável o potencial de utilização por parte de professores das ferramentas de provas sem palavras.

Um exemplo clássico do poder das PSPs é a soma dos primeiros números ímpares: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. Esta relação, que será melhor trabalhada adiante, pode ser demonstrada visualmente pela construção de quadrados crescentes, onde cada "camada" adicionada corresponde ao próximo número ímpar, preenchendo o quadrado seguinte. A imagem de um quadrado sendo preenchido por formas em L que representam os números ímpares é autoexplicativa, como pode ser observado na Figura 2. Essas demonstrações podem ser encontradas também em NELSEN (1993a) e NELSEN (1994).

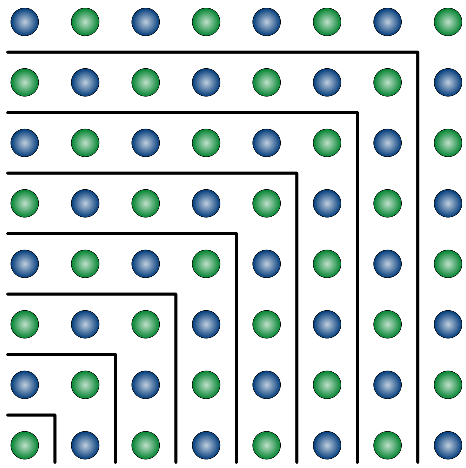


Figura 2 – Original de Nicômaco - Imagem de autoria própria

Da mesma forma, a soma dos primeiros números naturais, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, pode ser visualizada combinando dois triângulos de pontos idênticos para formar um retângulo de $n(n + 1)$ pontos, como apresentado na Figura 3.

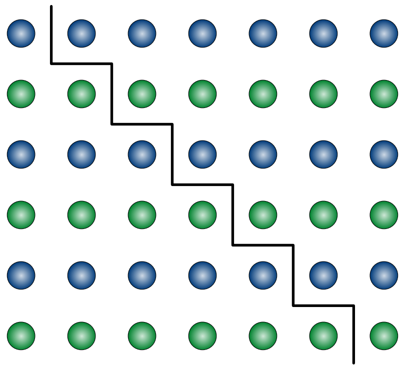


Figura 3 – Autoria própria

No contexto do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), programa cujo objetivo é aprimorar a prática pedagógica de professores de matemática, essa abordagem se torna valiosa e há trabalhos relacionados ao tema. ORTEGA (2018) desenvolveu material com PSPs relacionadas a Geometria, Trigonometria, Produtos Notáveis e Sequências, com foco na utilização por professores de Ensino Fundamental e de Ensino Médio. Já NUNES (2020) abordou a demonstração de teoremas clássicos estudados no ensino básico relacionados à Geometria, à Trigonometria, a Identidades e a Desigualdades utilizando PSPs.

No entanto, embora as PSPs representem uma metodologia pedagógica robusta que vai além de serem meros artifícios visuais, traz-se à tona o seguinte questionamento: será que é possível encontrar PSPs que sejam capazes de demonstrar qualquer soma de inteiros? Ou ainda, existem PSPs para qualquer soma de potências? Vamos investigar o processo histórico de obtenção de PSPs, suas abrangências e as eventuais limitações que elas carregam.

2 Números Figurados

A matemática, em sua essência, busca desvendar padrões e relações no universo que nos cerca, e uma das manifestações mais antigas e visualmente intuitivas dessa busca reside nos chamados Números Figurados. Estes são números que podem ser representados por arranjos geométricos de pontos em formas regulares, como triângulos, quadrados, pentágonos e outras figuras poligonais, ou mesmo sólidos tridimensionais. Mais do que meras curiosidades numéricas, os números figurados oferecem uma ponte fundamental entre a aritmética e a geometria, revelando identidades algébricas por meio de configurações espaciais e enriquecendo a compreensão de conceitos de somatório.

A origem do estudo dos números figurados remonta à antiguidade grega, mais especificamente à escola pitagórica, por volta do século VI a.C. Os pitagóricos viam o universo como uma entidade ordenada e numérica, acreditando que os números eram a chave para a compreensão de todas as coisas. Para eles, os números não eram apenas símbolos abstratos, mas entidades com qualidades intrínsecas, e a representação geométrica era uma forma natural de explorar suas propriedades. Eles se dedicavam a organizar pontos em padrões, e foi a partir dessa prática que emergiram os conceitos de números triangulares, quadrados e pentagonais, entre outros (KATZ, 1993). A visualização da soma dos primeiros números naturais como um triângulo de pontos, por exemplo, ou a soma dos primeiros números ímpares formando um quadrado, não era apenas uma técnica didática, mas uma forma de "ver" a verdade matemática.

Os números triangulares, talvez os mais simples e conhecidos dos números figurados, são obtidos pela soma sucessiva dos números naturais: 1; $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 3 = 6$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, e assim por diante. Cada termo (T_n) pode ser visualizado como uma formação triangular de pontos, como na Figura 4, e sua fórmula geral é $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

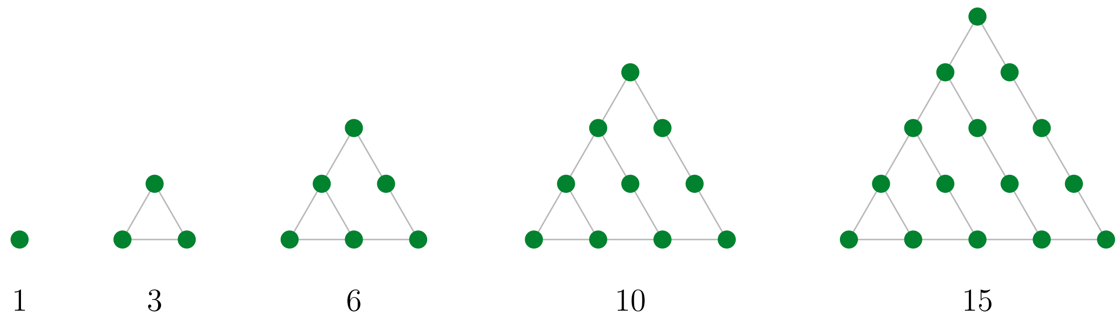


Figura 4 – Os primeiros números triangulares - Autoria própria

De maneira análoga, os números quadrados perfeitos $(1, 4, 9, 16, \dots)$ são formados pela soma de números ímpares sucessivos, e sua representação geométrica é um quadrado de lado n, cuja fórmula é $Q_n = n^2$.

Já os números pentagonais $(1, 5, 12, 22, \dots)$ e outras sequências poligonais seguem padrões de crescimento mais complexos, mais igualmente visualizáveis, culminando na fórmula geral para o n-ésimo número k-gonal: $P_k(n) = \dfrac{n[(k-2)n-(k-4)]}{2}$ (BEILER, 1964; FINE, 1988). Nesse contexto, os números pentagonais teriam forma geral $P_5(n) = \dfrac{n\,[(5-2)n-(5-4)]}{2} = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Essa capacidade de converter uma soma ou uma identidade numérica em uma imagem geométrica é o que confere aos números figurados seu caráter singular e sua força pedagógica.

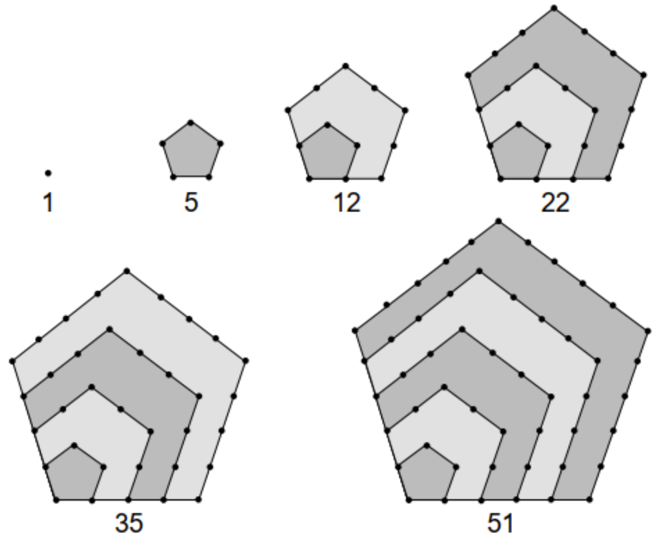
A importância dos números figurados transcende a mera organização visual. Eles foram objetos de estudo para matemáticos ao longo da história, como Fermat e Euler, que aprofundaram suas propriedades e conexões com outras áreas da teoria dos números, como partições e equações diofantinas (EULER, 1750; DICKSON, 1919). A relação entre diferentes tipos de números figurados, como a identidade que o n-ésimo número quadrado é a soma do n-ésimo e do $(n-1)$-ésimo número triangular (uma vez que $Q_n = T_n + T_{n-1}$), demonstra a riqueza dos padrões que podem ser extraídos dessas representações geométricas. Além disso, a generalização para números poligonais e, posteriormente, para números piramidais e outros números figurados tridimensionais, abre caminho para a compreensão de somas de potências superiores, como a soma dos primeiros quadrados ou cubos, que culmina em fórmulas complexas como a de Faulhaber.

No contexto educacional contemporâneo, e em particular para o ensino médio e a preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), os números figurados oferecem uma ferramenta poderosa. Eles permitem que os alunos desenvolvam o pensamento visual e a capacidade de reconhecer padrões, habilidades cruciais para a resolução de problemas em diversas áreas da matemática e das ciências. A Figura 5 apresenta uma questão do Enem 2023, cujo foco eram os números pentagonais, o que reforça a importância desse tema a nível de Ensino Médio.

Ao transformar conceitos abstratos de sequências e somatórios em imagens concretas, os números figurados facilitam a compreensão intuitiva e a memorização de fórmulas (PINTER, 1987). Essa abordagem é particularmente valiosa para o PROFMAT, que busca justamente aprimorar a prática pedagógica de professores de matemática.

Nesse contexto do PROFMAT, alguns trabalhos abordaram números figurados. IBRAHIM (2022) abordou propriedades curiosas e bem conectadas entre números triangulares e sequências, recorrências, números binomiais, triângulo de Pascal e triangulares de Mersenne. Já VASCON (2025) investigou os números de Narayana, definidos a partir dos números triangulares, e explorou propriedades algébricas e combinatórias desses números, destacando sua expressão por meio dos coeficientes binomiais, além de discutir a

Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.



O oitavo número pentagonal é

A 59.
B 83.
C 86.
D 89.
E 92.

Figura 5 – Retirada do Exame Nacional do Ensino Médio de 2023

importância desses conceitos na formação do pensamento combinatório. CHICONELLO (2013), por sua vez, propôs uma atividade prática de sala de aula com alunos de Ensino Médio utilizando números triangulares e números quadrados para investigar a compreensão do conceito de recursividade, o reconhecimento de padrões e a obtenção de fórmulas, produzindo assim um material de ensino valioso para professores que desejam desenvolver o tema proposto em sala.

A seguir serão apresentadas algumas demonstrações visuais que utilizam números figurados. Primeiramente, são apresentadas demonstrações para os primeiros números triangulares. Em formato bidimensional, a Figura 6, sem autoria definida, apresenta uma construção com encaixes triangulares, como a Figura 7, de autoria de RBN e a Figura 8, sem autoria definida. Já a Figura 9, também bidimensional e sem autoria definida, apresenta uma construção com pontos formando polígonos. Por fim, a Figura 10, também bidimensional e sem autoria definida, apresenta uma construção que utiliza congruências em uma estrutura triangular e puntiforme.

Em formato tridimensional, há três demonstrações. A Figura 11, sem autoria definida, apresenta uma formação de paralelpípedo. Já a Figura 12, de autoria de Deanna B. Haunsperger e Stephen F. Kennedy, é uma construção de contagem de “bolas de canhão”. Por fim, a Figura 13, de autoria de RBN, apresenta uma construção piramidal.

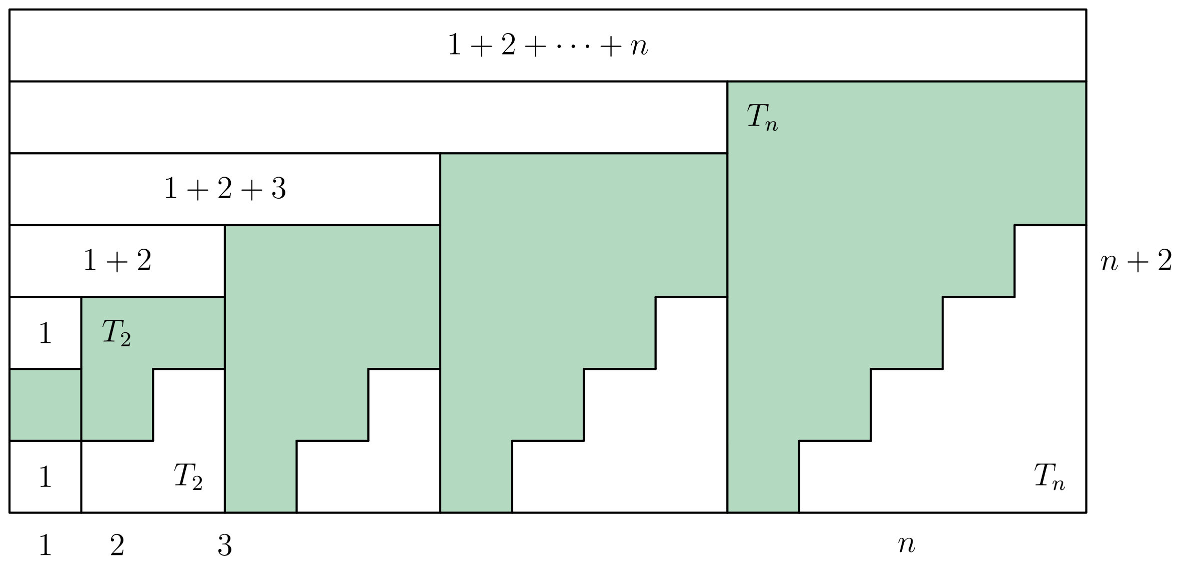
Em seguida, são apresentadas demonstrações para os primeiros números pentagonais, sendo uma em formato tridimensional e uma em formato bidimensional. A primeira, a Figura 14, é de autoria de William A. Miller, e apresenta uma construção com pequenos cubos, formando um prisma maior. A segunda, a Figura 15, sem autoria definida, apresenta uma construção com pontos que ganham formato de triângulos, tomando como caminho de demonstração a utilização dos números triangulares.

Essas demonstrações podem ser encontradas também em NELSEN (1993b), NELSEN (2000), NELSEN (1993c) e NELSEN (2015).

Números Triangulares

1. Caso 1

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n \Rightarrow T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$$



$$3\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = (n+2)\,T_n$$

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{(n+2)}{3} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$$

Figura 6 – Autoria própria

2. Caso 2

$$T_k = 1 + 2 + \cdots + k \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} T_k = n^2$$

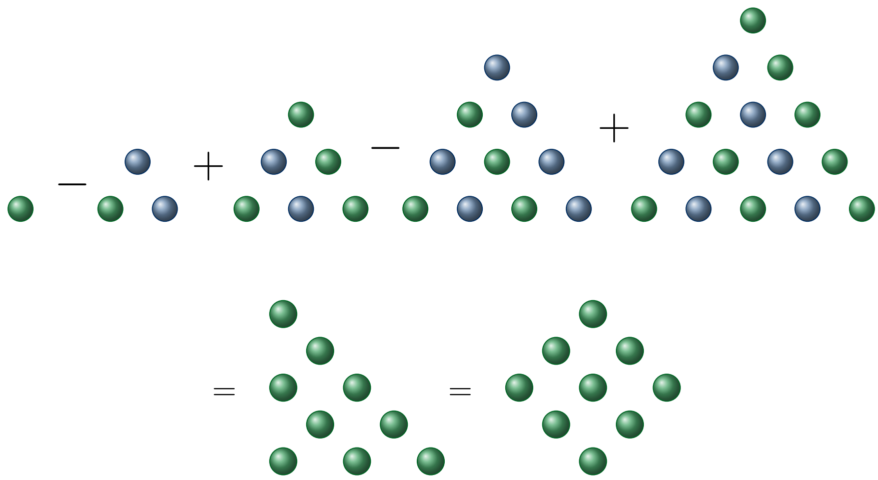


Figura 7 – Autoria própria

3. Caso 3

$$T_k = 1 + 2 + \cdots + k, \qquad T_n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 2 & & & \\
1 & 2 & 3 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 2 & \cdots & n-1 & \\
1 & 2 & \cdots & n-1 & n
\end{array}
+
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
2 & 1 & & & \\
3 & 2 & 1 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n-1 & n-2 & \cdots & 1 & \\
n & n-1 & \cdots & 2 & 1
\end{array}
+
\begin{array}{lllll}
n & & & & \\
n-1 & n-1 & & & \\
n-2 & n-2 & n-2 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & 2 & \cdots & 2 & \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{array}$$

$$=
\begin{array}{lllll}
n+2 & & & & \\
n+2 & n+2 & & & \\
n+2 & n+2 & n+2 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n+2 & n+2 & \cdots & n+2 & \\
n+2 & n+2 & \cdots & n+2 & n+2
\end{array}$$

$$3\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = T_n\,(n+2)$$

Figura 8 – Autoria própria

4. Caso 4

$$1+2+\cdots+k=T_k \Rightarrow (2n+1)^2 = T_{3n+1} - T_n$$

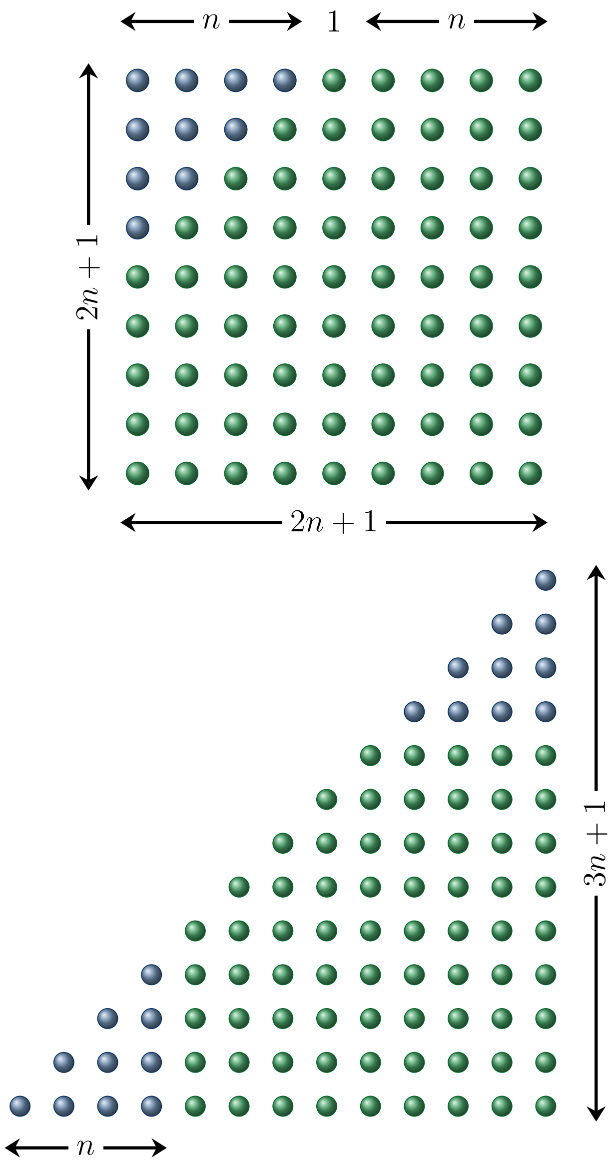
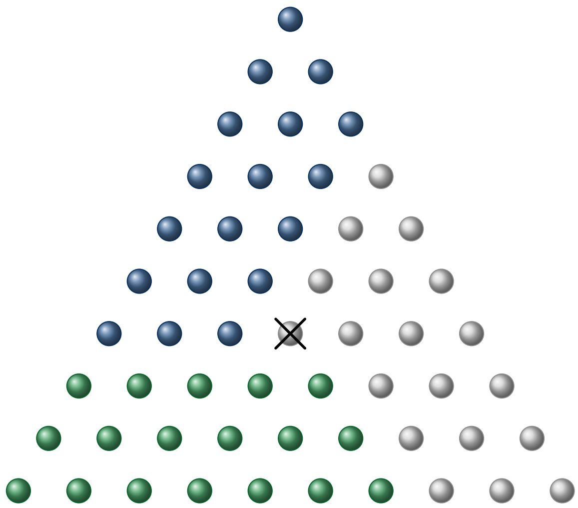


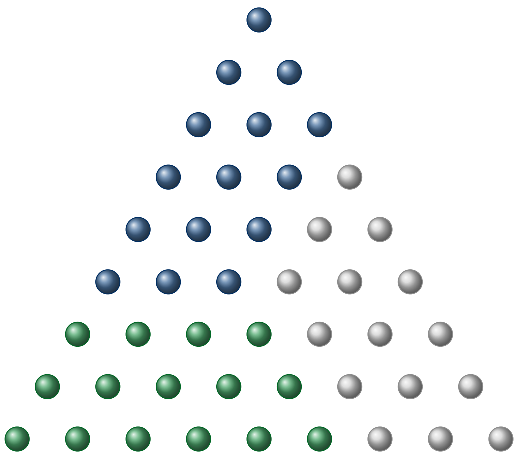
Figura 9 – Autoria própria

5. Caso 5

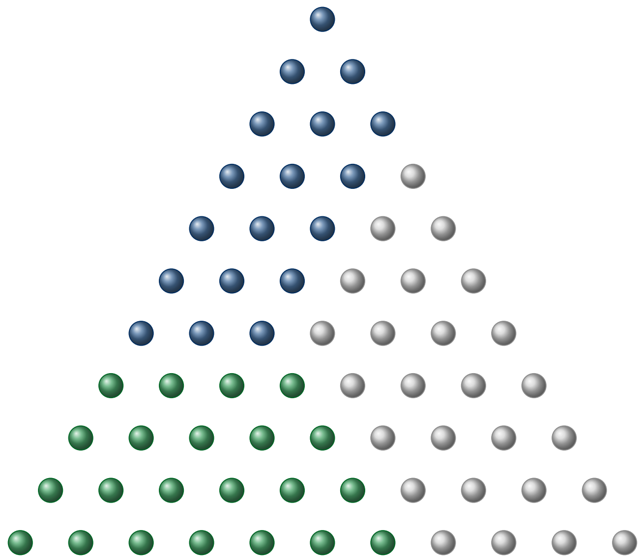
$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n \Rightarrow \begin{cases} t_n \equiv 1 \bmod 3, & n \equiv 1 \bmod 3, \\ t_n \equiv 0 \bmod 3, & n \not\equiv 1 \bmod 3. \end{cases}$$



$$t_{3k+1} = 1 + 3\,(t_{2k+1} - t_{k+1})$$



$$t_{3k} = 3\,(t_{2k} - t_k)$$



$$t_{3k+2} = 3\,(t_{2k+1} - t_k)$$

Figura 10 – Autoria própria

6. Caso 6

$$T_k = 1 + 2 + \cdots + k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{1}{6} n \left(n+1\right)\left(n+2\right)$$

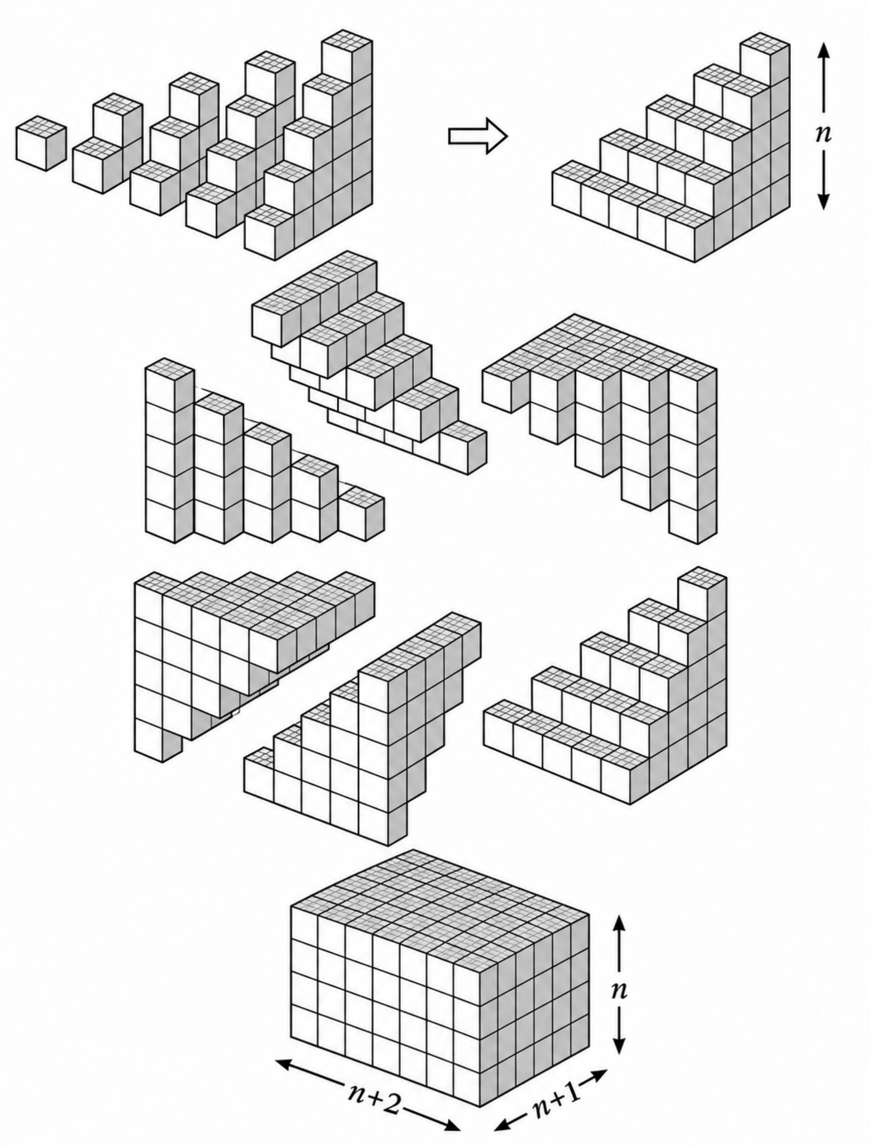


Figura 11 – Autoria própria

7. Caso 7

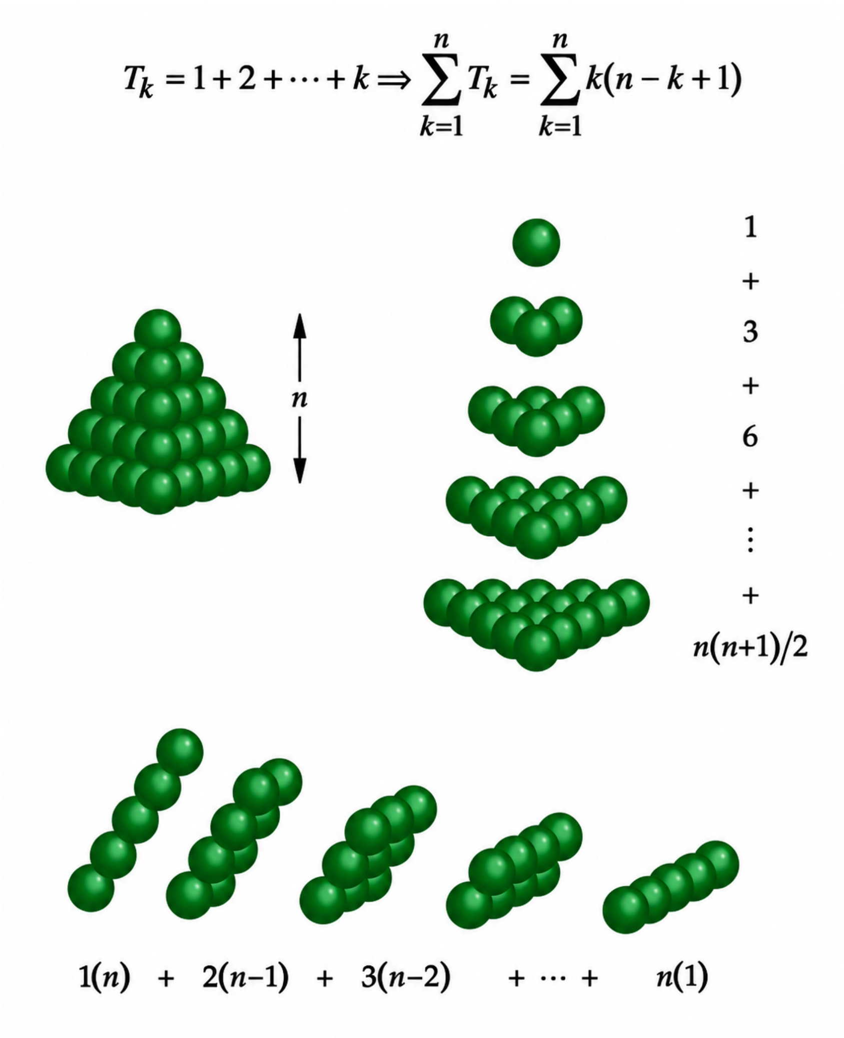
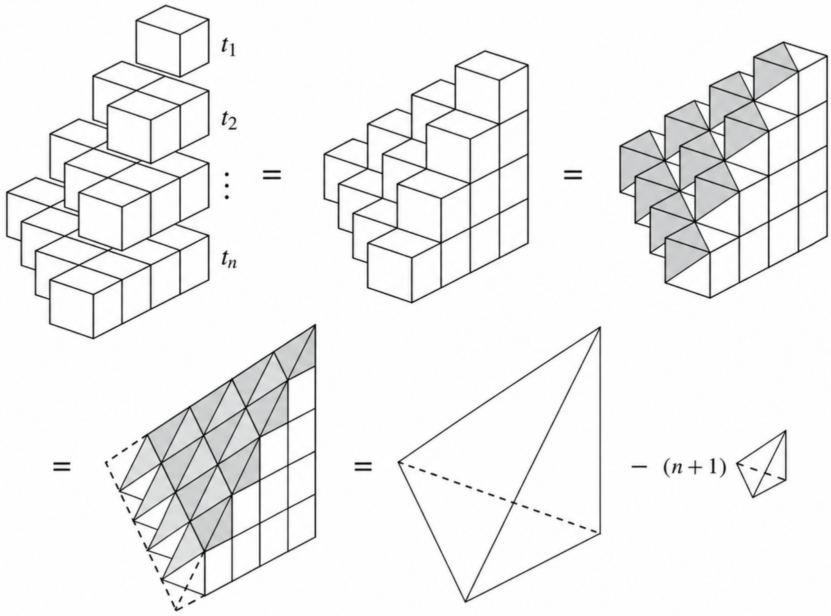


Figura 12 – Autoria própria

8. Caso 8

$$t_k = 1 + 2 + \cdots + k \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{1}{6}(n+1)^3 - (n+1)\cdot\frac{1}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Figura 13 – Autoria própria

Números Pentagonais

1. Caso 1

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 5}{2}+\frac{3\cdot 8}{2}+\cdots+\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

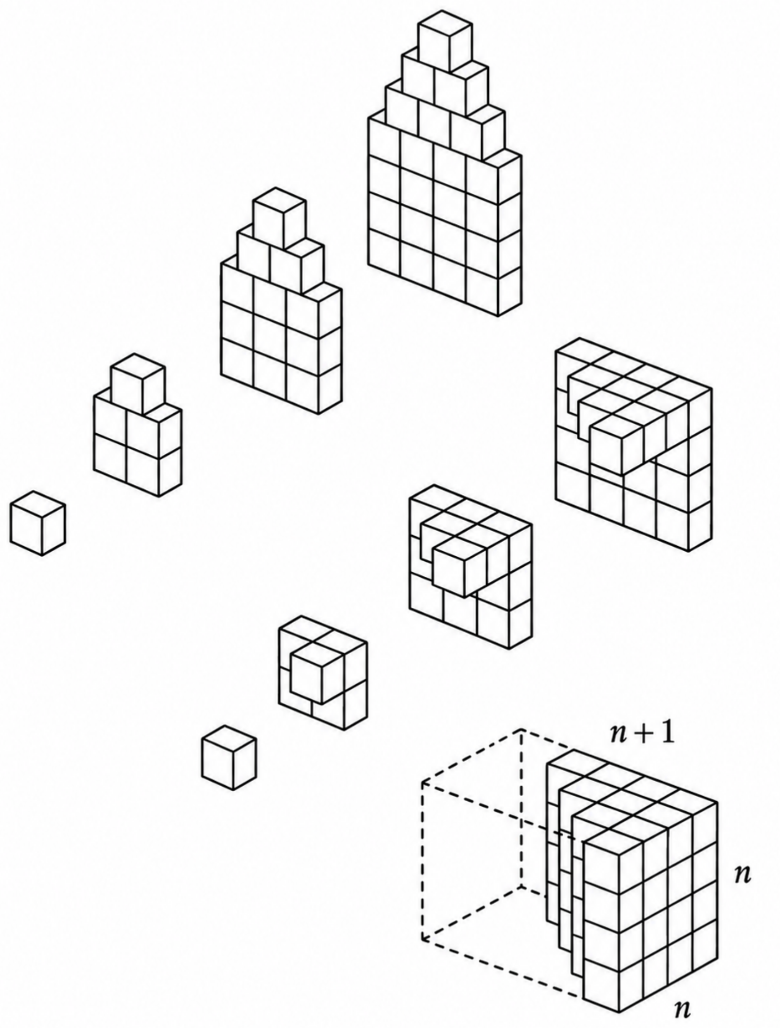


Figura 14 – Autoria própria

2. Caso 2

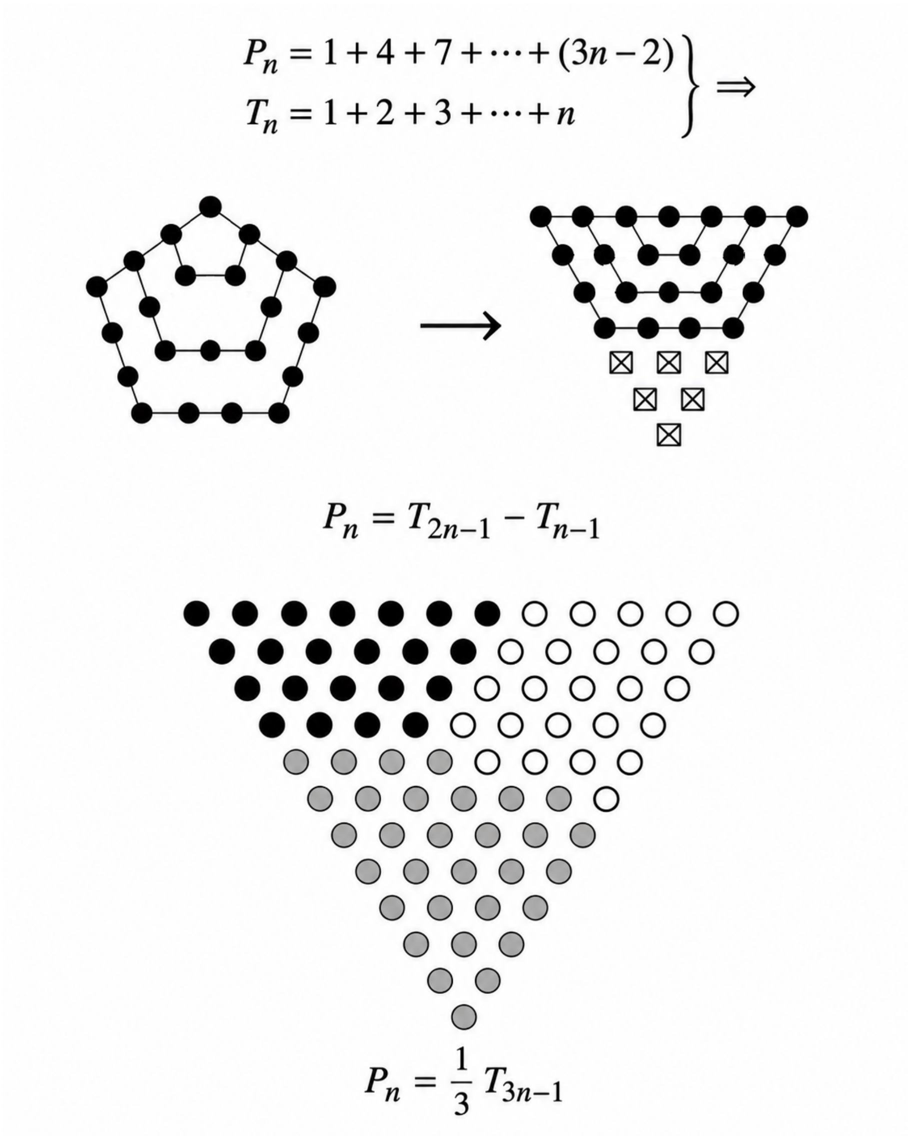


Figura 15 – Autoria própria

3 Soma dos Primeiros Números Naturais

A soma dos primeiros números naturais, expressa por $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, é um dos conceitos mais elementares e, ao mesmo tempo, mais ricos da matemática. Sua simplicidade aparente esconde uma profundidade que fascina matemáticos e educadores há séculos, servindo como um ponto de partida para a compreensão de sequências, progressões e o desenvolvimento do raciocínio algébrico e visual. A fórmula para esta soma, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, é um pilar fundamental da aritmética e da combinatória, revelando a beleza da generalização de padrões numéricos.

As raízes desse conceito podem ser rastreadas até a antiguidade, particularmente com a escola pitagórica na Grécia (século VI a.C.). Os pitagóricos, notórios por sua paixão pela relação entre números e formas geométricas, foram os primeiros a explorar os chamados "números figurados", como apresentado no Capítulo 2 deste trabalho. Eles representavam números com arranjos de pontos ou seixos, e ao fazer isso, naturalmente descobriram os números triangulares: $1, 3, 6, 10, 15$, e assim por diante. Cada um desses números é a soma dos primeiros números naturais até um certo ponto, e sua representação visual como um triângulo de pontos fornecia uma compreensão intuitiva de sua formação. A intuição de que a soma dos números naturais resulta em um padrão geométrico (o triângulo) foi uma forma primária de "demonstração" para eles, embora não formalizada em termos algébricos modernos (Katz, 1993).

No Oriente, em civilizações como a indiana, matemáticos também investigavam somas de séries. Aryabhata (c. 476–550 d.C.), em seu trabalho *Aryabhatiya*, apresentou regras para calcular somas de progressões aritméticas, que implicitamente incluíam a fórmula para a soma dos primeiros números naturais. Da mesma forma, no mundo islâmico medieval, matemáticos como Al-Khwarizmi (c. 780–850 d.C.) e Al-Karaji (c. 953–1029 d.C.) trabalharam com séries aritméticas, contribuindo para o desenvolvimento de métodos algorítmicos para seu cálculo (BOYER, 1991; BEERY, 2010).

A anedota mais célebre associada a essa soma envolve o jovem Carl Friedrich Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Conta-se que, ainda criança, na escola primária em Brunswick, seu professor, J.G. Büttner, buscando manter seus alunos ocupados, pediu-lhes para somar todos os números de 1 a 100. Para espanto do professor, Gauss, com apenas sete ou oito anos, apresentou a resposta correta em questão de minutos, sem realizar as somas sucessivas. Seu brilhante *insight* consistiu em perceber que, ao somar os números em pares – o primeiro com o último ($1 + 100 = 101$), o segundo com o penúltimo ($2 + 99 = 101$), e assim por diante –, ele obteria 50 pares, cada um totalizando 101. Multiplicando 50 por 101, chegou a 5050 (DUNHAM, 1990; KATZ, 1993).

Esta história não apenas ilustra o gênio precoce de Gauss, mas também serve como um paradigma da elegância na resolução de problemas matemáticos, transformando uma tarefa tediosa em um exercício de percepção de padrões. É um método chamado de Emparelhamento (a abordagem dada por Gauss). Seja S_n a soma dos primeiros n naturais, temos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

Agora escrevemos a mesma soma, só que com os termos na ordem inversa

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Somando-se as duas equações termo a termo, segue que

$$2S_n = (1+n) + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \cdots + [(n-2)+3] + [(n-1)+2) + (n+1]$$

Observemos que cada par de termos somados resulta em $(n+1)$ e, como temos n termos na sequência original, teremos n desses pares, cada um somando $(n+1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2S_n &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ termos}} \\ &= (n+1)n \end{aligned}$$

ou seja,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A generalização dessa ideia leva diretamente à fórmula $\dfrac{n(n+1)}{2}$, onde n é o número de termos a serem somados, e $\dfrac{n}{2}$ é o número de pares, cada um com a soma $(n+1)$.

Para além da anedota de Gauss, a soma dos primeiros números naturais, que também define os números triangulares, possui uma rica história de demonstrações visuais, muitas das quais se enquadram no conceito de "Provas Sem Palavras". Essas demonstrações utilizam arranjos geométricos de pontos ou blocos para tornar a identidade matemática imediatamente aparente, sem a necessidade de um texto formal.

Um exemplo clássico de PSP para a soma dos primeiros n números naturais, que será apresentado a seguir, é o que envolve a duplicação de um triângulo de pontos. Se um conjunto de pontos é arranjado na forma de um triângulo, representando a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, e um segundo triângulo idêntico é invertido e encaixado sobre o primeiro, o resultado é um retângulo (ou um paralelogramo) de n linhas por $(n+1)$ colunas. O número total de pontos nesse retângulo é $n(n+1)$. Como este retângulo é composto por dois triângulos idênticos, a soma de um único triângulo é, portanto, metade do total, ou seja, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (NELSEN, 1994). Esta visualização, apresentada na Figura 16, não é apenas elegante, mas extremamente eficaz para comunicar a lógica por trás da fórmula de maneira intuitiva e memorável.

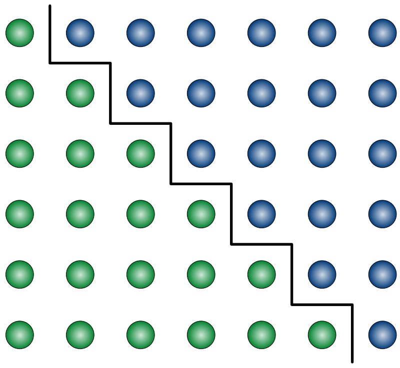
A prática de usar arranjos de pontos para demonstrar propriedades numéricas remonta, como visto, aos pitagóricos, que já reconheciam os números triangulares e suas relações geométricas. Eles construíam figuras com seixos para explorar propriedades de números, o que pode ser considerado uma forma primitiva de PSPs. Essa abordagem intuitiva e visual permaneceu relevante ao longo da história da matemática e tem ganhado renovada atenção na didática moderna. O poder das PSPs reside em sua capacidade de transformar uma abstração numérica em uma experiência concreta e visual, facilitando a compreensão para diversos perfis de aprendizes (NELSEN, 1993a).

Nesse sentido, a soma dos primeiros números naturais é mais do que uma simples identidade; é um ponto de interseção entre a aritmética, a geometria e a história da matemática. A anedota de Gauss e as diversas provas sem palavras que ilustram essa soma são ferramentas poderosas para desmistificar a matemática, tornando-a acessível, intuitiva e fascinante. Para a formação de professores, integrar essas narrativas e visualizações é crucial para promover uma compreensão profunda e duradoura, cultivando não apenas a habilidade de resolver problemas, mas também o prazer da descoberta matemática.

A seguir são apresentadas demonstrações usando PSPs para a soma dos primeiros números naturais. A Figura 16, de autoria de gregos antigos, como citado por Martin Gardner, apresenta uma construção com pontos em formato triangular, como a Figura 17, de autoria de S. J. Farlow. Já a Figura 18, de autoria de Ian Richards, apresenta a soma utilizando quadrados e triângulos.

Essas demonstrações podem ser encontradas também em NELSEN (1993c) e NELSEN (2000).

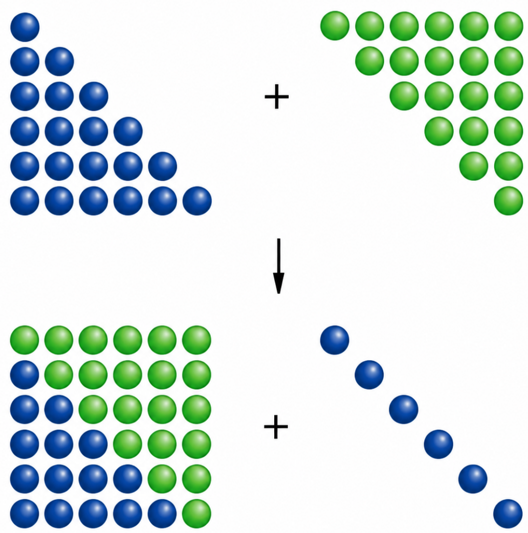
1. Caso 1



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n\,(n + 1)$$

Figura 16 – Autoria própria

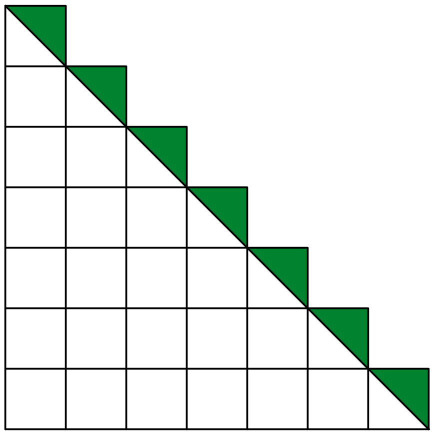
2. Caso 2



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right)$$

Figura 17 – Autoria própria

3. Caso 3



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Figura 18 – Autoria própria

4 Soma dos Primeiros Números Ímpares

A soma dos primeiros números ímpares é um dos resultados mais elegantemente simples e visualmente impactantes da matemática, revelando uma profunda conexão entre a aritmética e a geometria. A identidade de que a soma dos primeiros n números ímpares é igual a n^2 – expressa como $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ – é um conceito fundamental que tem sido objeto de estudo e admiração desde a antiguidade, servindo como um ponto de partida para a compreensão de sequências numéricas e padrões de crescimento.

A descoberta e a representação dessa soma remontam, assim como a dos números naturais, aos pitagóricos, no século VI a.C (HEATH, 1921; BOYER, 1991). Estes matemáticos e filósofos gregos, que enxergavam os números como a essência do cosmos, utilizavam arranjos de seixos ou pontos para investigar as propriedades dos números. No Oriente, a compreensão da soma dos números ímpares também se manifestou. Matemáticos indianos, como Aryabhata (século V–VI d.C.) e Brahmagupta (século VII d.C.), que se aprofundaram no estudo das progressões aritméticas, estavam cientes dessas relações, embora suas abordagens fossem mais focadas em regras e algoritmos para o cálculo de séries do que em representações geométricas explícitas para esta identidade específica.

Uma das formas de se fazer a dedução algébrica da soma dos n primeiros números ímpares é utilizando a Soma de uma Progressão Aritmética (PA), já que a sequência dos números ímpares, dada por $1, 3, 5, \ldots, (2n - 1)$, é uma progressão aritmética de n termos, cujo termo inicial $a_1 = 1$, cuja razão $r = 2$, e cujo n-ésimo termo é dado por $a_n = 2n - 1$.

Nesse sentido, utilizaremos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA, dada por $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Substituímos os valores específicos da sequência dos números ímpares: $a_1 = 1$ e $a_n = 2n - 1$.

Assim,

$$S_n = \frac{n\,[1 + (2n - 1)]}{2} = \frac{n\,(2n)}{2} = n^2$$

Esta dedução, no entanto, não é visual e não oferece facilidade de compreensão para alunos do ensino básico – fundamental e médio –, o que representa um entrave ao ensino. Nesse sentido, apesar de a demonstração oferecer um rigor algébrico formal e demonstrar como a identidade da soma dos ímpares se encaixa na estrutura mais ampla das progressões aritméticas, ela deve ser apresentada em adição a uma demonstração visual, uma "prova sem palavra".

Foi por meio dessa exploração geométrica dos pitagóricos, em cerca de VI a. C., que eles reconheceram que a adição sucessiva de números ímpares resultava invariavelmente em um número que é quadrado perfeito. O método pitagórico de formar quadrados utilizando gnômons (formas em “L”) ilustra perfeitamente essa relação, como apresentado na Figura 19. Começando com um ponto (que representa 1), adiciona-se um gnômon de três pontos (o próximo ímpar) para formar um quadrado de 2×2 (4 pontos). Adiciona-se então um gnômon de cinco pontos para formar um quadrado de 3×3 (9 pontos), e assim por diante. Cada gnômon adicionado é o próximo número ímpar na sequência, e a figura resultante é sempre um quadrado perfeito (HEATH, 1921; BOYER, 1991).

Essa abordagem visual, anterior à formalização algébrica, é um exemplo primordial do que Roger B. Nelsen popularizou na era moderna, por meio de seus livros e artigos, como as PSPs (NELSEN, 1993b; NELSEN, 2000; NELSEN, 2015).

A soma dos primeiros n números ímpares, resultando em n^2, é uma das PSPs mais clássicas e didaticamente eficazes. O diagrama que mostra um quadrado sendo construído por camadas sucessivas de números ímpares é autoexplicativo, permitindo que o observador “veja” a validade da proposição sem a necessidade de extensas explicações textuais (NELSEN, 1993c; NELSEN, 2000). Esta imagem não apenas prova a fórmula, mas também incute uma compreensão mais profunda da relação simétrica entre números ímpares e quadrados e pode ser usada como ferramenta didática poderosa.

A relevância pedagógica da soma dos primeiros números ímpares e suas PSPs é imensa. No ensino de Matemática, especialmente nos níveis fundamental e médio, essa demonstração serve como um forte instrumento para desenvolver o pensamento visual, a capacidade de reconhecimento de padrões e a compreensão da íntima conexão entre geometria e álgebra. Ao invés de simplesmente memorizar a fórmula, os estudantes são capazes de reconstruir a prova visualmente, o que promove uma aprendizagem mais significativa e duradoura. Além disso, a beleza e a simplicidade dessa prova podem servir como um motivador para despertar o interesse pela matemática, mostrando que conceitos abstratos podem ter representações concretas e elegantemente intuitivas. Lockwood (1995) e Nelsen (1993b) demonstraram o impacto positivo de tais provas visuais na compreensão dos alunos.

No cenário da educação matemática brasileira, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem sido um catalisador para a exploração de metodologias de ensino inovadoras e eficazes. A abordagem da soma dos primeiros números ímpares, com seu reconhecido apelo visual, encontra ressonância nesse contexto.

Para educadores e no desenvolvimento de materiais didáticos para a educação básica, explorar a identidade da soma dos ímpares, $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, através de sua representação geométrica sem palavras não apenas simplifica a compreensão, mas também inspira uma apreciação mais profunda pela simetria, lógica e criatividade inerentes à disciplina.

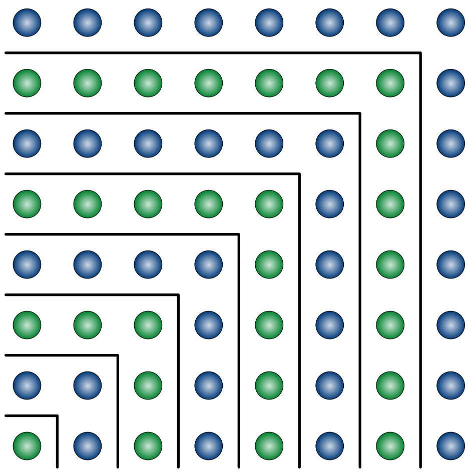
A seguir serão apresentados exemplos de aplicação das provas sem palavras para a soma dos primeiros naturais ímpares. Todas as figuras apresentam construções com pontos, ou pequenos círculos.

A Figura 19, de autoria de Nicômaco de Gerasa, é amplamente conhecida e utilizada em livros didáticos. Ela apresenta uma espécie de ondas com quantidades sucessivamente maiores de pontos.

A Figura 20, sem autoria definida, apresenta encaixes de pontos em formatos próximos de triangulares, como as Figuras 21 e 22, também sem autorias definidas.

Essas demonstrações podem se rencontradas também em NELSEN (1993c) e NELSEN (2015).

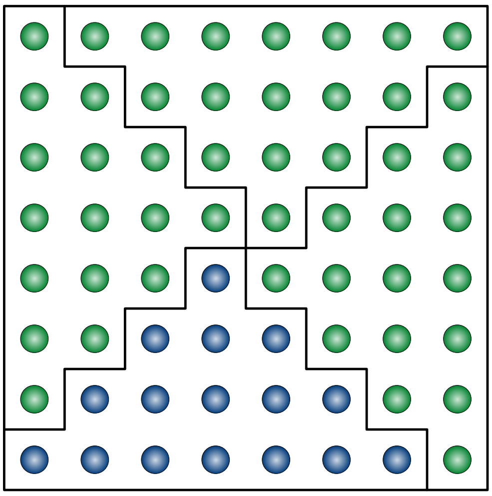
1. Caso 1



$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Figura 19 – Original de Nicômaco - Imagem de autoria própria

2. Caso 2



$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

Figura 20 – Autoria própria

3. Caso 3

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

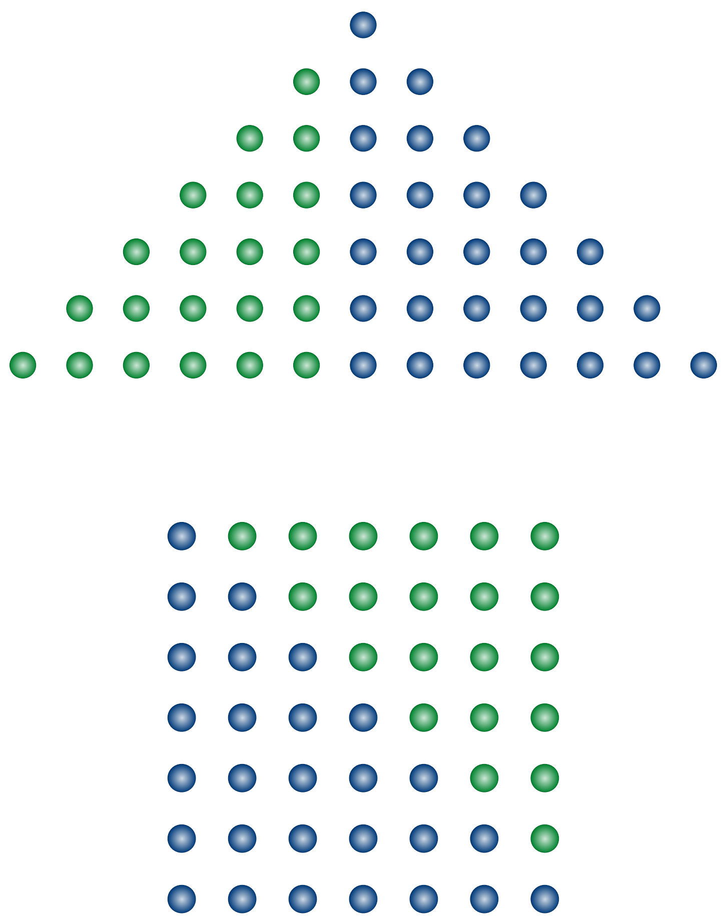
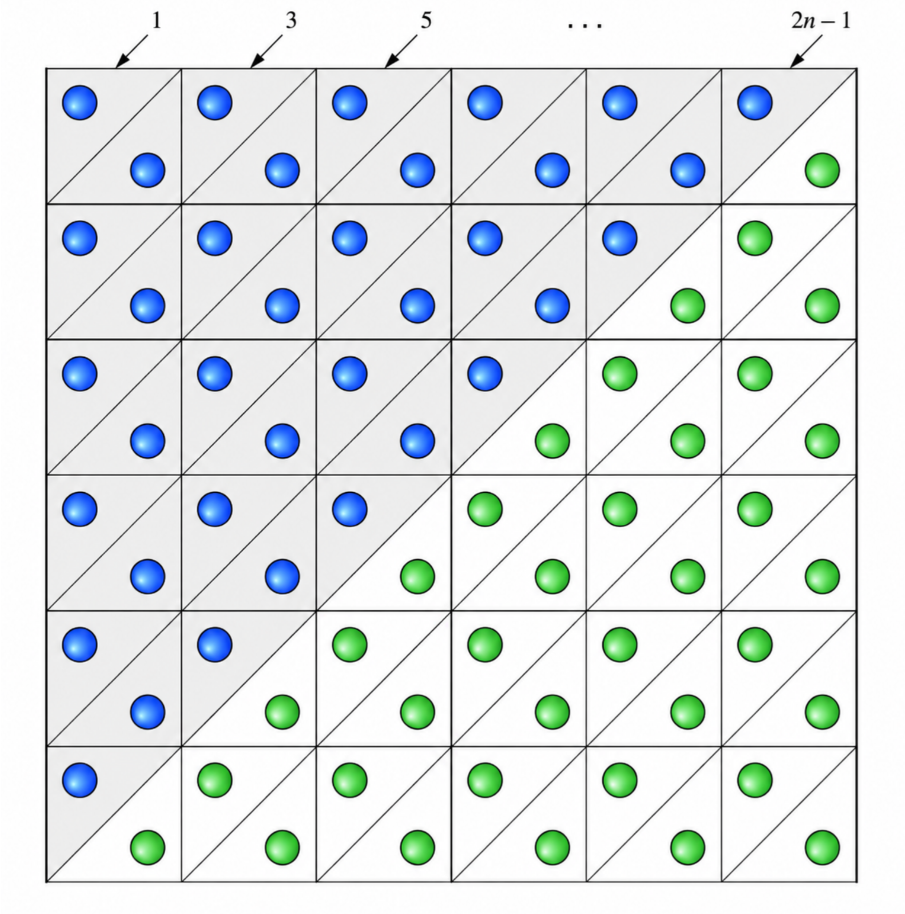


Figura 21 – Autoria própria

4. Caso 4

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$



$$2\,[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] = 2n^2$$

Figura 22 – Autoria própria

5 Soma dos Primeiros Números Quadrados Perfeitos

A soma dos primeiros números quadrados perfeitos, expressa como $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ representa um desafio matemático de maior complexidade e, por consequência, uma beleza singular quando comparada às somas dos números naturais ou ímpares. A fórmula para esta soma, $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, é um resultado elegante que encapsula o crescimento quadrático e revela padrões intrínsecos à estrutura numérica. Sua descoberta e demonstração perpassam séculos de investigação matemática, refletindo o desenvolvimento de métodos que conectam o raciocínio geométrico ao formalismo algébrico.

A história da soma dos quadrados remonta à antiguidade, com contribuições notáveis de um dos maiores matemáticos e engenheiros da história: Arquimedes de Siracusa (c. 287–212 a.C.). Embora não tenha formulado a expressão exata na notação moderna, Arquimedes, em sua obra "Sobre Espirais" e "A Quadratura da Parábola", desenvolveu métodos para somar sequências de quadrados e outras potências (ARQUIMEDES, 1897a; ARQUIMEDES, 1897b). Ele utilizava o que hoje chamaríamos de método da exaustão, aproximando áreas curvas por somas de áreas retangulares ou triangulares, o que é conceitualmente análogo à soma de potências discretas. Heath (ARQUIMEDES, 1897a), em sua tradução e análise das obras de Arquimedes, demonstra como o gênio grego abordou somas de quadrados, notadamente em seu esforço para encontrar a área de um segmento de parábola, que envolvia a soma de uma série geométrica, mas com técnicas que revelavam *insights* sobre a somatória de quadrados. A demonstração de Arquimedes, embora não sendo uma "prova sem palavras" no sentido pictórico de Nelsen, era profundamente geométrica e visual para sua época, baseada na manipulação de figuras tridimensionais ou na comparação de áreas.

No Oriente, a fórmula para a soma dos quadrados foi conhecida muito antes de sua formalização na Europa. O matemático indiano Aryabhata (século V–VI d.C.), em seu tratado *Aryabhatiya*, apresentou regras para a soma de séries, incluindo a dos quadrados, já no século V ou VI. Posteriormente, no mundo islâmico, Abu Bakr al-Karaji (c. 953–1029 d.C.), e mais tarde Al-Samaw'al (século XII d.C.), que se baseou no trabalho de Al-Karaji, desenvolveram métodos para somar potências inteiras, utilizando uma forma primitiva de indução matemática e manipulando identidades algébricas que levariam a essas fórmulas. Al-Karaji, por exemplo, provou a fórmula da soma dos primeiros quadrados através de uma generalização da identidade

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

somando-a de $x = 1$ até $x = n$, o que é uma das deduções algébricas mais comuns hoje (Katz, 1993).

Esse método das diferenças cúbicas para encontrar a soma dos primeiros quadrados de números naturais, que chamaremos de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

é um método de soma telescópica amplamente utilizado para deduzir fórmulas de somas de potências. Ele baseia-se em uma identidade de diferenças. Considere a identidade algébrica a seguir

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Agora, somamos ambos os lados dessa identidade para valores de k de 1 a n

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$$

O lado esquerdo da equação é uma soma telescópica

$$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + \left[(n+1)^3 - n^3\right]$$

Todos os termos intermediários se cancelam, restando apenas

$$(n+1)^3 - 1$$

O lado direito pode ser dividido nas somas individuais

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

A partir deste ponto, chamaremos

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = S_n$$

que é o que estamos buscando na dedução. Além disso,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

como visto anteriormente neste trabalho.

Assim, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) = 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Agora, igualando-se os dois lados, temos

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

Expande-se o termo $(n+1)^3$ para sua forma n^3+3n^2+3n+1

$$n^3+3n^2+3n+1-1=3S_n+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

ou seja,

$$n^3+3n^2+3n=3S_n+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

Isolando $3S_n$:

$$\begin{aligned}3S_n &= n^3+3n^2+3n-\frac{3n(n+1)}{2}-n\\ &= n^3+3n^2+2n-\frac{3n(n+1)}{2}\\ &= \frac{2(n^3+3n^2+2n)-3n(n+1)}{2}\\ &= \frac{2n^3+6n^2+4n-3n^2-3n}{2}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{2}\end{aligned}$$

Colocando n em evidência e simplificando

$$3S_n=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}$$

Fatorando o trinômio do segundo grau

$$2n^2+3n+1=(2n+1)(n+1)$$

obtém-se

$$3S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Por fim, dividindo-se o resultado por 3:

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

À parte do processo apresentado, a formulação explícita da soma dos quadrados, no entanto, progrediu significativamente com matemáticos posteriores. No século XVI, o jesuíta e matemático italiano Francesco Maurolico (1494–1575) demonstrou a fórmula para a soma dos primeiros n quadrados, utilizando um método de indução matemática que se tornaria mais formalizado nos séculos seguintes. O processo de demonstração continuou a evoluir, culminando na generalização para somas de potências arbitrárias por autores como Johann Faulhaber, que investigou o que hoje conhecemos como os Polinômios de Bernoulli e a Fórmula de Faulhaber para somas de k-ésimas potências (KNUTH, 1993).

Esta dedução, novamente, tem múltiplas etapas, não é visual e nem facilmente compreensível para alunos do ensino básico, o que representa um entrave do processo didático. Apesar da complexidade inerente à soma dos quadrados, também existem PSPs que buscam elucidar visualmente esta identidade. Uma das mais famosas PSPs para a soma dos primeiros n quadrados envolve a construção de pirâmides de blocos (ou cubos unitários). Imagine três pirâmides idênticas, cada uma representando a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Ao arranjar essas três pirâmides de uma maneira específica, como veremos na Figura 27 a seguir, pode-se formar um paralelepípedo (ou um bloco retangular) com dimensões n, $(n + 1)$ e $(2n + 1)$. Como esse paralelepípedo é composto por três das nossas pirâmides, a soma de uma única pirâmide (nossa S_n) é, portanto, um terço do volume total do paralelepípedo, o que nos leva à fórmula $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Essa PSP, embora mais abstrata que as para números naturais ou ímpares, transforma um problema algébrico em uma manipulação espacial, tornando a verdade matemática intuitivamente visível (NELSEN, 1993b; NELSEN, 2000). A beleza dessa demonstração visual reside em sua capacidade de condensar uma prova relativamente longa por indução em uma imagem tridimensional impactante e de simples análise.

Do ponto de vista pedagógico, a exploração da soma dos primeiros números quadrados perfeitos é crucial. Ela serve como uma ponte entre o raciocínio aritmético básico e conceitos mais avançados de cálculo, como as somas de Riemann - que levam à integração por meio da soma da área de retângulos menores. Ao introduzir os estudantes a essa soma por meio de sua história e, especialmente, por PSPs, pode-se desenvolver sua capacidade de abstração espacial e a compreensão de como o cálculo de volumes e áreas pode ser conectado a somas discretas. Isso é particularmente relevante para o desenvolvimento de um pensamento crítico e analítico em estudantes do ensino médio e superior.

A seguir são apresentadas seis demonstrações usando PSPs para a soma dos primeiros números quadrados perfeitos. A Figura 23 apresenta uma demonstração bidimensional de Katherine Kanim, enquanto a Figura 24 apresenta uma outra demonstração bidimensional, sem autor identificado.

Já as demais figuras apresentam demonstrações tridimensionais. A Figura 25 é de autoria de Man-Keung Siu e usa estruturas cúbicas, enquanto a Figura 26 é de autoria de I. A. Sakmar e usa estruturas piramidais. A Figura 27 apresenta uma demonstração de Nanny Wermuth e Hans-Jürgen Schuh que utiliza estrutura em forma de paralelepípedo, como a demonstração de Sasho Kalajdzievski, da Figura 28.

Essas demonstrações podem se rencontradas também em NELSEN (1993c), NELSEN (2000) e NELSEN (2015).

1. Caso 1

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)\,n^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

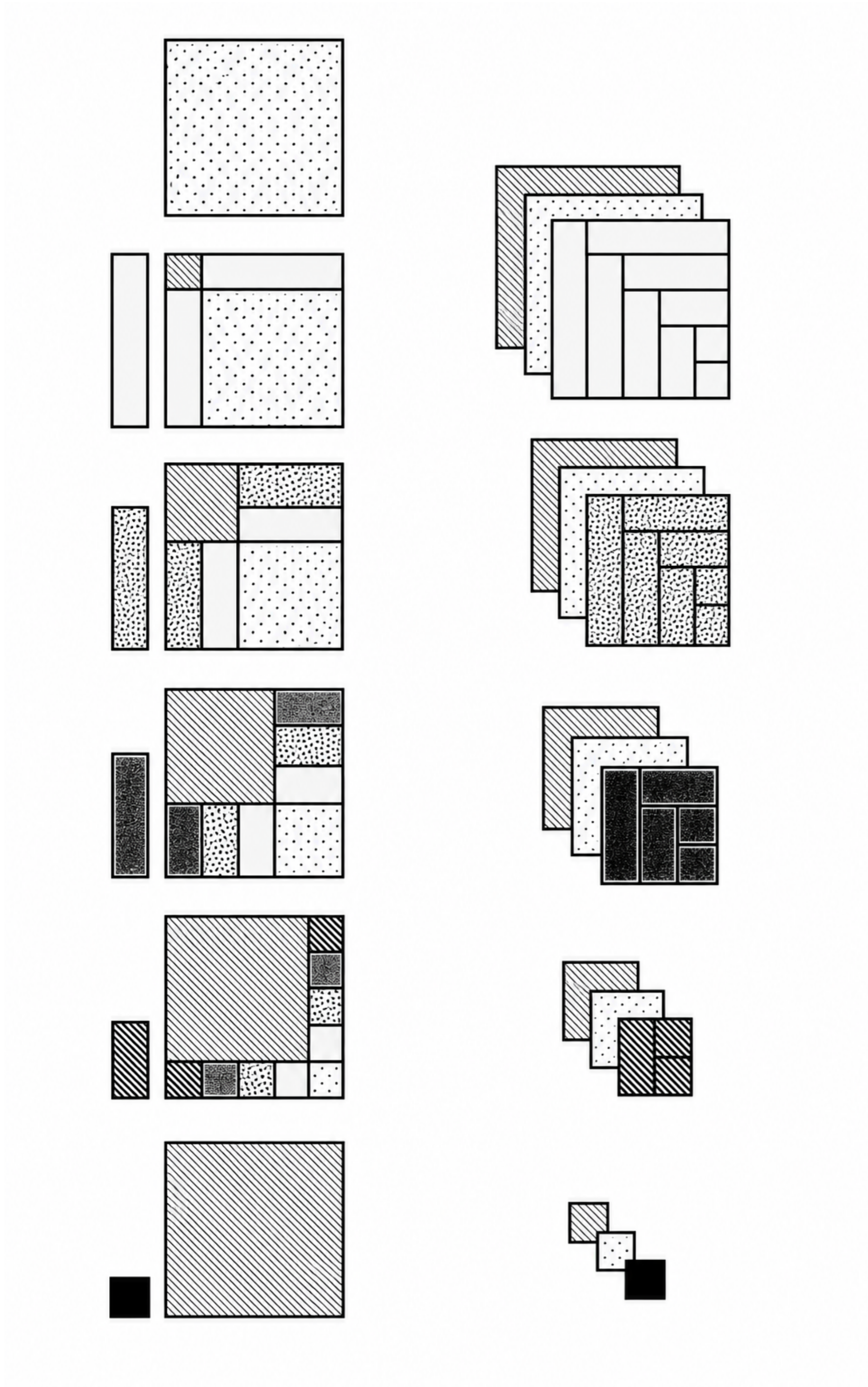
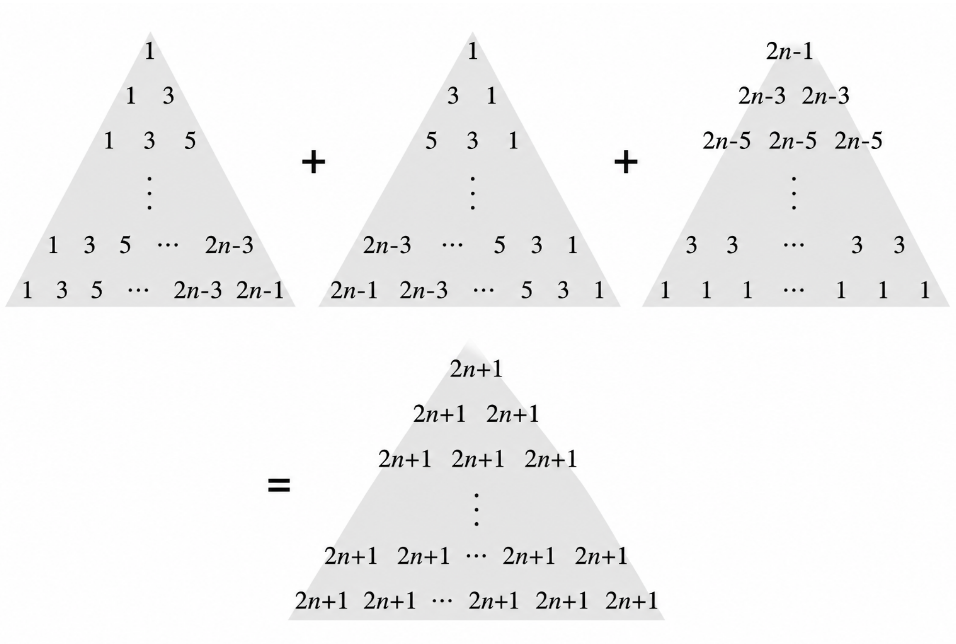


Figura 23 – Autoria própria

2. Caso 2

$$k^2 = 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$



$$3\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = (2n+1)\,(1 + 2 + \cdots + n)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Figura 24 – Autoria própria

3. Caso 3

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n\,(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

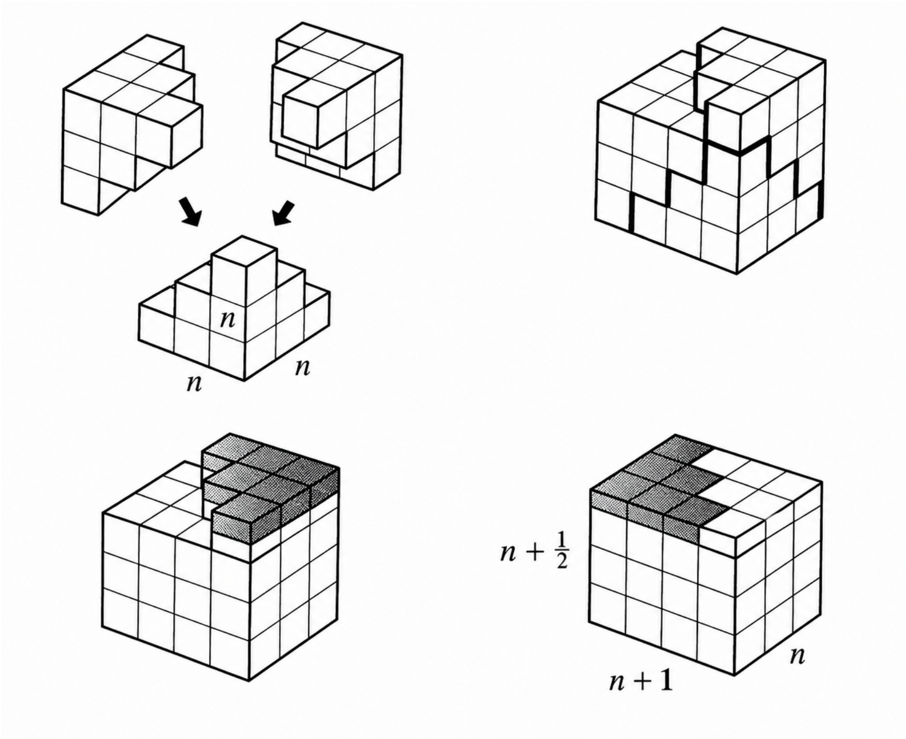
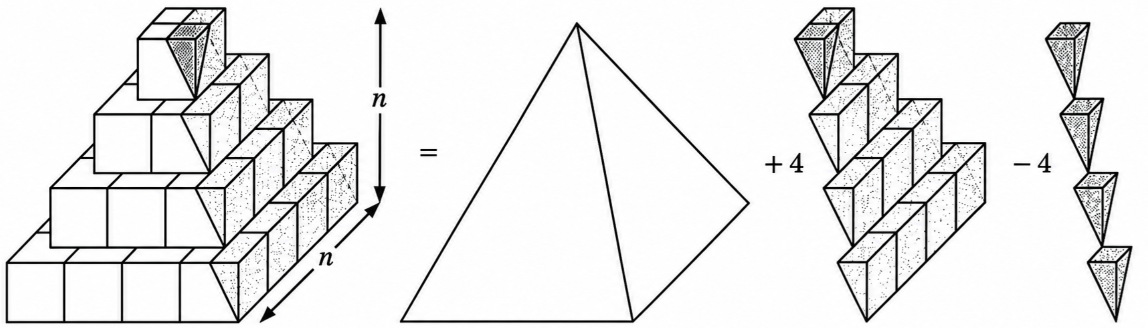


Figura 25 – Autoria própria

4. Caso 4



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^2 \cdot n + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Figura 26 – Autoria própria

5. Caso 5

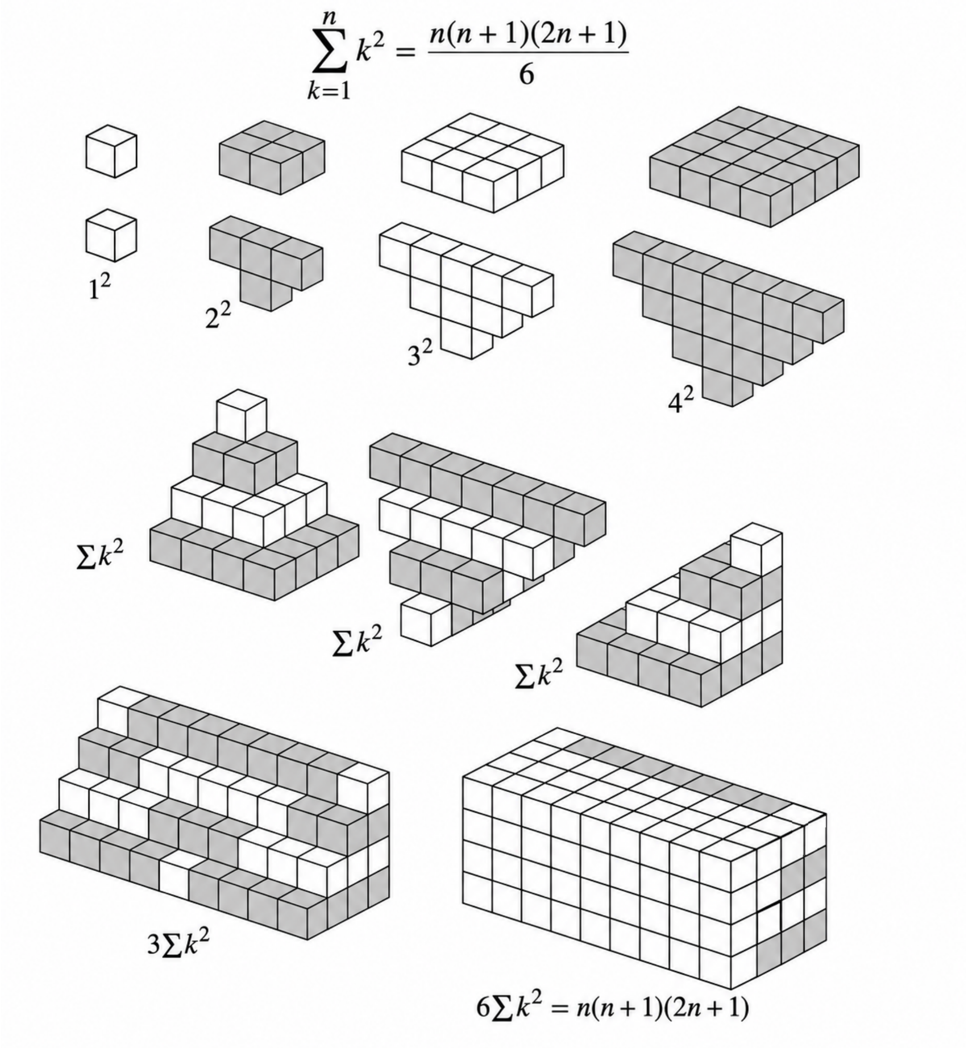


Figura 27 – Autoria própria

6. Caso 6

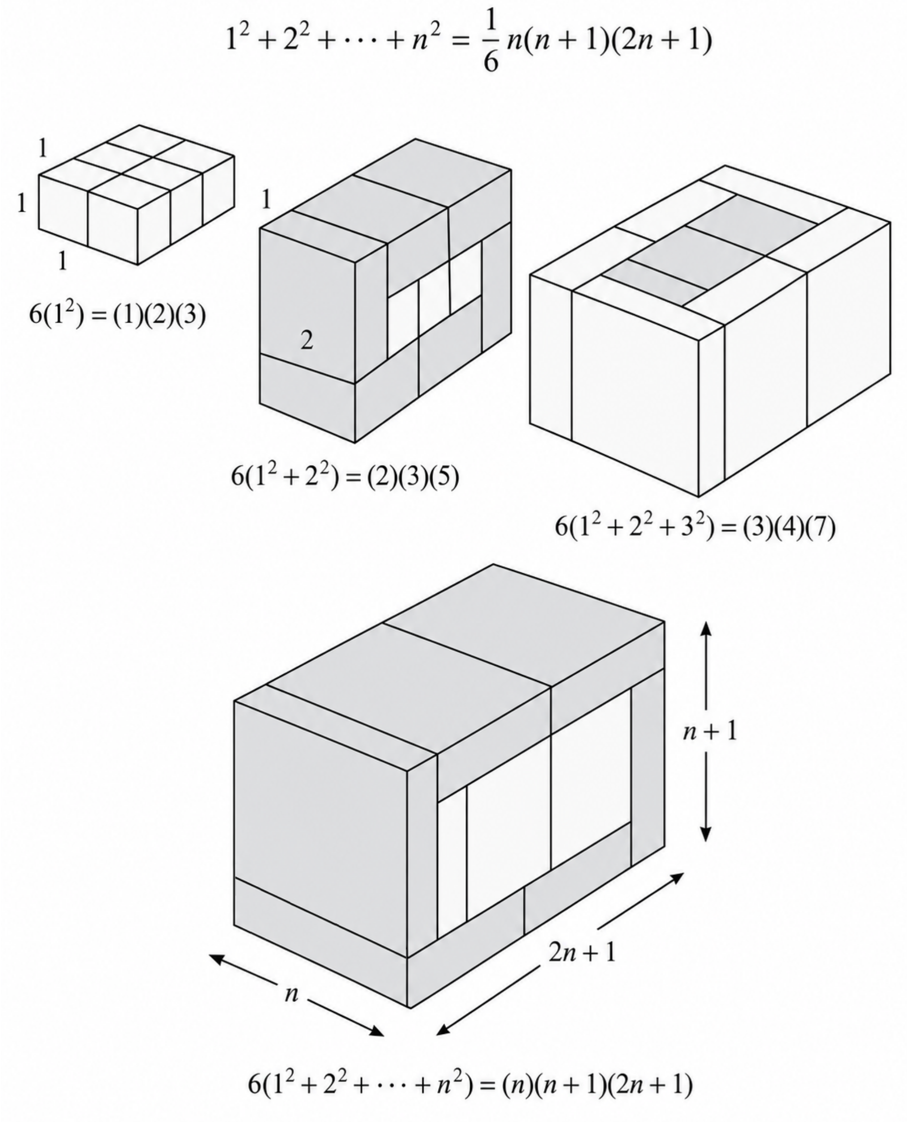


Figura 28 – Autoria própria

6 Soma dos Primeiros Números Cubos Perfeitos

A exploração das somas de potências, que se inicia com a singeleza dos números naturais (n) e dos quadrados perfeitos (n^2), atinge uma notável complexidade e elegância quando se eleva ao cubo (n^3). A soma dos primeiros números cubos perfeitos, $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$, culmina em uma das identidades mais surpreendentes e visualmente cativantes da matemática: $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Este resultado revela que a soma dos primeiros n cubos é igual ao quadrado da soma dos primeiros n números naturais, ou, de forma ainda mais concisa, ao quadrado do n-ésimo número triangular (T_n). Esta conexão profunda entre diferentes somas numéricas é um testemunho da interconexão e da harmonia inerentes à estrutura matemática.

A busca por métodos para somar potências superiores tem raízes profundas na história da matemática. Embora a formulação explícita da soma dos cubos na forma que conhecemos hoje seja um desenvolvimento posterior, matemáticos de diversas civilizações já investigavam problemas que envolviam somas de séries. Na Índia antiga, Aryabhata (século V–VI d.C.) já apresentava regras para a soma de séries aritméticas e potências, indicando uma compreensão intuitiva de padrões somatórios. Mais tarde, no mundo islâmico medieval, matemáticos como Abu Bakr al-Karaji (século X–XI d.C.) e seu sucessor Al-Samaw'al (século XII d.C.) desenvolveram técnicas para somar potências inteiras, utilizando um processo que se assemelha à indução matemática moderna. Suas contribuições foram cruciais para a sistematização do cálculo de somas de potências, incluindo os cubos (KATZ, 1993).

Na Europa, a curiosidade sobre as somas de potências floresceu durante o Renascimento e nos séculos seguintes. Leonardo Fibonacci (século XIII), em sua obra *Liber Abaci*, apresentou alguns exemplos de somas de potências. Contudo, foi Johann Faulhaber (século XVII) quem realizou um trabalho extenso na tabulação e na descoberta de fórmulas para somas de potências até a décima primeira potência, utilizando o que mais tarde seria reconhecido como Polinômios de Bernoulli (KNUTH, 1993). Seu trabalho foi um precursor importante para a formalização geral da soma de potências, que viria com Jacob Bernoulli.

Em *Ars Conjectandi* (1713), Jacob Bernoulli não apenas derivou a fórmula para a soma dos primeiros n cubos, mas também apresentou um método geral envolvendo os números de Bernoulli para calcular a soma de k-ésimas potências, consolidando o resultado $1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2$ como um caso particular de sua teoria (BERNOULLI, 1713;

KNUTH, 1993).

Novamente, como apresentado nos tópicos anteriores deste trabalho, será apresentada a dedução algébrica da fórmula da soma dos primeiros cubos perfeitos, para então ser possível compará-la às provas sem palavras. Utilizaremos, aqui, a Identidade de Diferença de Quadrados de Números Triangulares. Esta dedução é elegante por sua simplicidade e por conectar diretamente a soma dos cubos com a soma dos números naturais (que é, nada mais que um número triangular).

Considere, então, a identidade $k^3 = T_k^2 - T_{k-1}^2$, em que $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ é o k-ésimo número triangular, e definimos $T_0 = 0$. Além disso, considere que a soma dos primeiros cubos perfeitos, dada por $\sum_{k=1}^{n} k^3$, é chamada de S_n.

Vamos verificar essa identidade Note que

$$\begin{aligned} T_k^2 - T_{k-1}^2 &= (T_k - T_{k-1}) \cdot (T_k + T_{k-1}) \\ &= (k) \cdot \left[\frac{k \cdot (k+1)}{2} + \frac{(k-1) \cdot k}{2}\right] \\ &= k \cdot \frac{k}{2} \cdot (k+1+k-1) \\ &= \frac{k \cdot k \cdot 2k}{2} \\ &= k^3 \end{aligned}$$

A identidade $k^3 = T_k^2 - T_{k-1}^2$ é, portanto, verdadeira.

Agora, somamos esta identidade para k de 1 a n. Assim,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (T_k^2 - T_{k-1}^2)$$

Esta é, também, uma soma telescópica:

$$(T_1^2 - T_0^2) + (T_2^2 - T_1^2) + (T_3^2 - T_2^2) + \cdots + (T_n^2 - T_{n-1}^2)$$

Todos os termos intermediários se cancelam, restando apenas o último termo positivo e o primeiro termo negativo:

$$(T_1^2 - T_0^2) + (T_2^2 - T_1^2) + (T_3^2 - T_2^2) + \cdots + (T_n^2 - T_{n-1}^2) = -T_0^2 + T_n^2 = T_n^2 - T_0^2$$

Como $T_0 = 0$, temos então $S_n = T_n^2 = (T_n)^2$.

Substituindo $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

como queríamos demonstrar.

A verdadeira beleza da soma dos cubos se revela plenamente através das PSPs, que oferecem uma compreensão intuitiva e visual da relação $S_n = (T_n)^2$. Uma das PSP mais impactantes para essa identidade envolve a construção de um grande quadrado a partir de gnômons de blocos cúbicos, como será apresentado adiante na Figura 31. Imagine os números triangulares T_n como os lados de um quadrado. A PSP consiste em arranjar as somas dos cubos 1^3, 2^3,..., n^3, desmontando-os e remontando-os, de tal forma que elas formem um quadrado perfeito cujo lado é a soma dos primeiros n números naturais. Por exemplo, 1^3 é um cubo de lado 1. Em seguida, 2^3 pode ser arranjado ao redor de 1^3 de uma maneira que, junto com 1^3, forme um quadrado de $T_2 = (1 + 2) = 3$ unidades de lado. Continuando esse processo, cada k^3 é adicionado como uma camada em forma de "L" (um gnômon tridimensional) ao redor do arranjo dos cubos anteriores, resultando sempre em um quadrado cujo lado é o próximo número triangular. O resultado final é um grande quadrado (plano) de área $(1 + 2 + \cdots + n)^2$, construído a partir dos volumes dos cubos (NELSEN, 1993b; NELSEN, 2000). Esta visualização é notavelmente complexa simplesmente por meio de palavras, mas, uma vez apresentada a prova sem palavras e, uma vez compreendida a demonstração, é uma via que oferece uma clareza inigualável da validade da fórmula.

Do ponto de vista pedagógico, a soma dos primeiros cubos e suas demonstrações visuais são ferramentas valiosas para o ensino da matemática em níveis mais avançados do ensino médio e superior. Elas desafiam os estudantes a expandir seu raciocínio espacial para três dimensões e a conectar conceitos de volume com áreas e somas discretas. A complexidade dessa PSP estimula o pensamento crítico e a capacidade de abstração, habilidades essenciais para a compreensão de cálculo e outras áreas da matemática. Ao apresentar essa soma, não apenas como uma fórmula, mas como um resultado com uma história rica e uma prova visual elegante, os educadores podem fomentar um apreço mais profundo pela matemática.

No contexto do aprimoramento da prática docente, a exploração da soma dos cubos e suas PSPs pode enriquecer significativamente o repertório metodológico de um professor. Ao demonstrar a soma dos cubos de maneira visual, o professor pode guiar os alunos por uma jornada de descoberta que une a geometria euclidiana, a teoria dos números e a combinatória, mostrando que a matemática é uma disciplina viva, repleta de conexões surpreendentes e acessíveis através da intuição e da visualização. O resultado é um aprendizado mais robusto e uma maior capacidade de transferir o conhecimento para a resolução de problemas complexos. Para educadores e no desenvolvimento de materiais didáticos, a inclusão dessa soma oferece uma oportunidade única de desafiar os alunos, desenvolver seu raciocínio espacial e algébrico, e instigar uma apreciação pela beleza e profundidade da matemática.

A seguir são apresentadas PSPs para a soma dos primeiros números cubos perfeitos. A Figura 29 apresenta a demonstração de Solomon W. Golomb, a Figura 30, a demonstração de J. Barry Love, ambas de forma bidimensional, enquanto a Figura 31 apresenta uma demonstração tridimensional de Alan L. Fry para a soma. Essas demonstrações podem ser encontradas também em NELSEN (1993c).

1. Caso 1

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

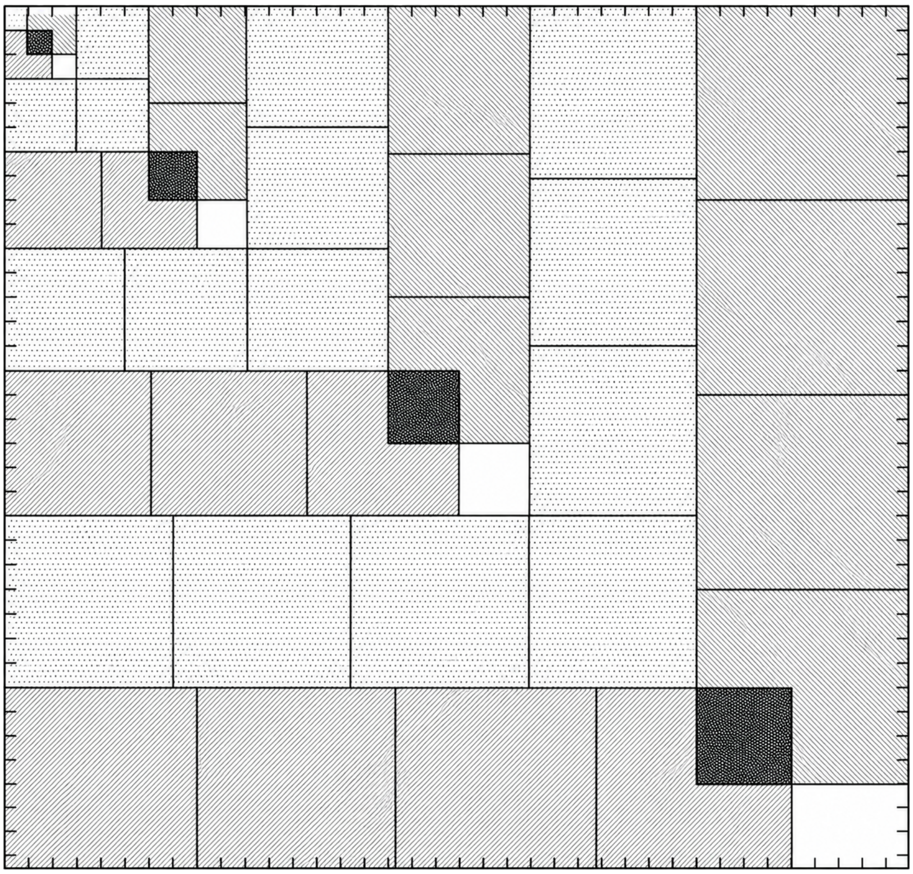


Figura 29 – Autoria própria

2. Caso 2

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

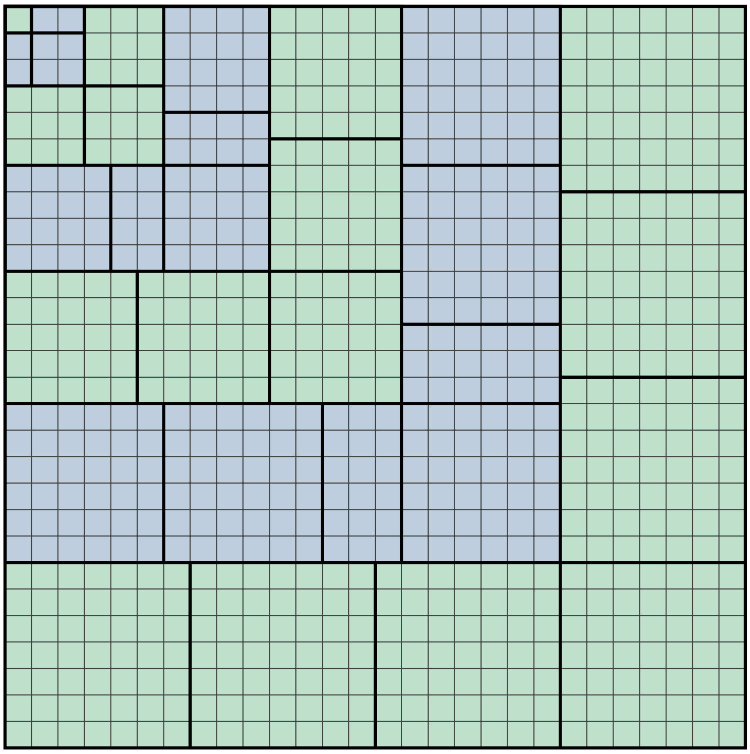


Figura 30 – Autoria própria

3. Caso 3

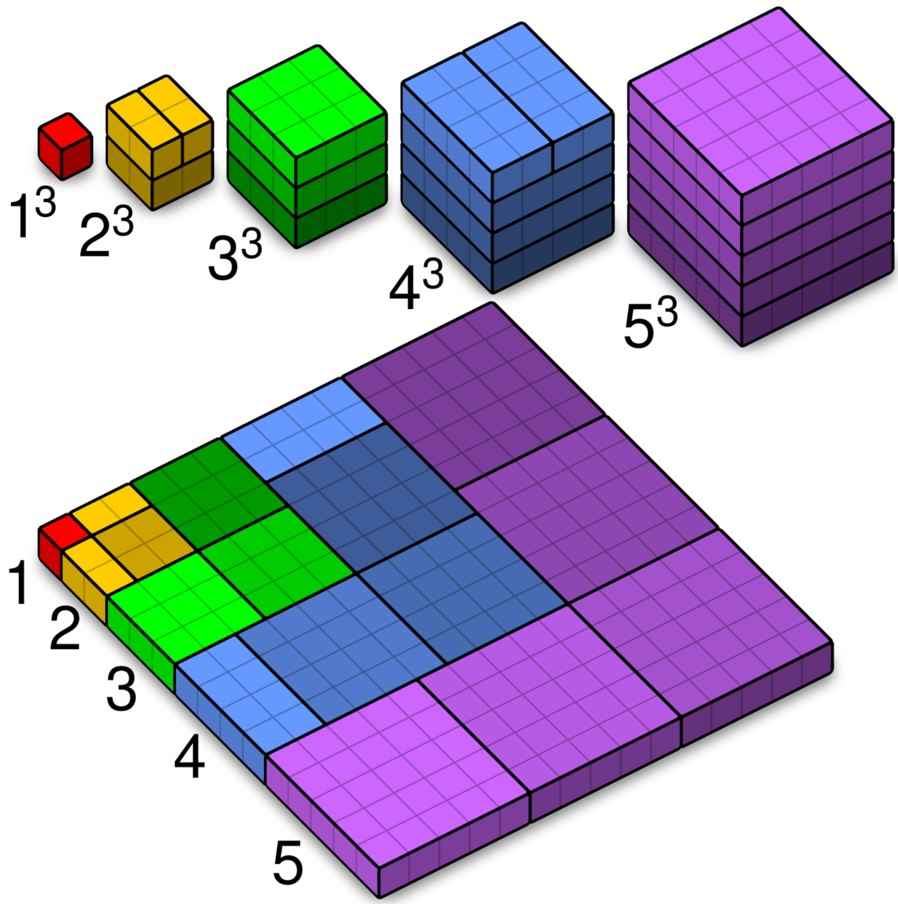


Figura 31 – Retirada de GULLEY (2010)

7 Outras Ferramentas de Demonstração de Somas

Até o presente momento, vimos a grandiosa função das PSPs na demonstração de padrões, sejam em números figurados, sejam em somas de potências.

Além disso, pôde-se perceber alguns padrões nas somas apresentadas, entre os quais se destacam:

1. A soma dos primeiros números números ímpares – grau 1 – resultou em um polinômio de grau 2, n^2.
2. A soma dos primeiros números naturais – grau 1 – resultou em um polinômio de grau 2, $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. Já a soma dos primeiros números quadrados perfeitos – grau 2 – resultou em um polinômio de grau 3, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Por fim, a soma dos primeiros números cubos perfeitos – grau 3 – resultou em um polinômio de grau 4, $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Seria viável assumir que somas de números com grau p gerem um o polinômio de grau $p+1$?

Ora, vamos investigar esse comportamento por indução, partindo do pressuposto que $S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$ é um polinômio de grau $p+1$.

O teorema já foi provado anteriormente para $p = 1$, na soma dos primeiros números naturais.

Suponhamos nesse momento que $S_p(n)$ seja um polinômio de grau $p+1$ em n, para todo $p \in \{1, 2, ..., s\}$.

Mostraremos que isso é verdadeiro para $p = s+1$, ou seja, mostraremos que $S_{s+1}(n)$ é um polinômio de grau $s+2$ em n. Observe que

$$(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + q_s(k),$$

em que $q_s(k)$ forma um polinômio de grau s em k. Temos, então,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + \sum_{k=1}^{n} q_s(k)$$

em que a soma restante $\sum_{k=1}^{n} q_s(k)$ é representada pelo polinômio $\binom{s+2}{2} \cdot k^s + \binom{s+2}{3} \cdot k^{s-1} + \cdots + \binom{s+2}{s+1} \cdot k + 1$, de grau s em n, pela hipótese da indução.

Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, que são telescópicos, obteremos

$$(n+1)^{s+1} = 1 + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + q_s(k)$$

Dessa conclusão intermediária, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - q_s(k)}{s+2}$$

que é um polinômio de grau $s+2$ em n. Portanto, conclui-se que sim, $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p+1$ em n.

Morgado (1991) aplicou essa conclusão em exemplos que utilizam o Triângulo de Pascal para encontrar os coeficientes desse polinômio.

O Triângulo de Pascal, como ferramenta, é um triângulo aritmético formado por números que têm muitas relações entre si. Algumas dessas relações foram descobertas por Pascal. O arranjo de números binomiais mostra cada número sendo a soma dos dois números diretamente acima dele.

Nesse contexto, C_n^k - também apresentado como $\binom{n}{k}$ - representa combinação de n tomados k a k, sendo n o número da linha e k o número da coluna do triângulo. As Figuras 32 e 33 a seguir representam o triângulo de Pascal, sendo uma com os valores numéricos e a outra com os valores binomiais correspondentes.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & \cdots & & &
\end{array}$$

Figura 32 – Valores do Triângulo - Retirada de MORGADO (1991)

Dentre as muitas propriedades que emergem dessa construção, três relações se destacam por sua importância: a Relação de Stifel, o Teorema das Linhas e o Teorema das Colunas. Essas três relações são pilares para a compreensão da estrutura interna do Triângulo de Pascal e servem como ferramentas indispensáveis em combinatória e em muitos outros ramos da matemática.

$$
\begin{array}{ccccccc}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\
C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6 \\
 & & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Figura 33 – Valores Binomiais do Triângulo - Retirada de MORGADO (1991)

Uma das mais fundamentais entre elas é a Relação de Stifel, também conhecida como a identidade de recorrência do Triângulo de Pascal, atribuída a Michael Stifel em sua obra *Arithmetica Integra* (1544), embora sua compreensão remonte a matemáticos indianos e chineses. Essa propriedade afirma que qualquer entrada no Triângulo de Pascal é a soma das duas entradas imediatamente acima dela. Algebricamente, ela é expressa como $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Esta identidade não é apenas a regra de construção do triângulo, mas também possui uma elegante prova combinatória. Se desejamos escolher k elementos de um conjunto de n elementos, podemos considerar um elemento específico, digamos X. As escolhas podem ser divididas em dois casos disjuntos: ou escolhemos X (e, portanto, precisamos escolher $k-1$ elementos dos $n-1$ restantes), ou não escolhemos X (e, portanto, precisamos escolher k elementos dos $n-1$ restantes). A soma das possibilidades nesses dois casos totaliza $\binom{n}{k}$, evidenciando a verdade da Relação de Stifel e sua importância na recursividade dos coeficientes binomiais.

Em seguida, temos o que pode ser referido como o Teorema das Linhas, que aborda a soma dos elementos em cada linha do Triângulo de Pascal. Esta propriedade notável estabelece que a soma de todas as entradas na n-ésima linha (começando a contagem das linhas a partir de $n = 0$) é igual a 2^n. Matematicamente, isso é expresso como $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Combinatoriamente, esta identidade representa o fato de que um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos no total, pois cada elemento pode ser escolhido ou não escolhido (duas opções para cada um dos elementos), e a soma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ representa a soma dos subconjuntos de tamanho 0, de tamanho 1, e assim por diante, até o subconjunto de tamanho n.

Por fim, o Teorema das Colunas descreve a soma dos elementos ao longo de uma coluna. Esta identidade afirma que essa soma, começando de um termo $\binom{k}{k}$ até $\binom{n}{k}$, é igual ao coeficiente binomial $\binom{n+1}{k+1}$. Algebricamente, podemos escrever $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Com base nessas relações, Morgado (1991) apresentou dois exemplos interessantes para elucidar a construção de somas de sequências numéricas.

Num primeiro exemplo (Morgado (1991), p. 92, exemplo 4.2), apresenta-se uma solução para encontrar o valor da soma $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + 50\cdot 51\cdot 52$ usando as relações apresentadas.

Primeiramente, transforma-se a sequência em $S = \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2)$. Em seguida, iguala-se $S = \sum_{k=1}^{50} 3!C_{k+2}^{3} = 6\left(C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{52}^3\right) = 6C_{53}^4 = 1.756.950$.

Num segundo exemplo (Morgado (1991), p. 93, exemplo 4.3), apresenta-se uma solução alternativa para encontrar o valor da soma dos primeiros números quadrados perfeitos, isto é, $S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Primeiramente, transforma-se a sequência em $\sum_{k=1}^{n} k^2$. O exemplo anterior mostrou como se poderia calcular uma soma na qual cada parcela fosse um produto de três inteiros consecutivos. Assim, caso seja possível transformar k^2 em um polinômio da mesma natureza, teremos um polinômio do segundo grau no qual apareçam produtos de dois inteiros consecutivos, permitindo-se que use a mesma ferramenta. Ou seja, a ideia é tentar obter uma identidade do tipo $k^2 \equiv Ak(k+1) + Bk + C$.

Assim, tem-se $k^2 \equiv Ak^2 + (A+B)k + c$, em que $A = 1$, $A + B = 0$ e $C = 0$. Resolvendo-se o sistema, encontram-se $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$, ou seja, o polinômio pode ser escrito como $k^2 \equiv k(k+1) - k$.

Então,

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} [k(k+1) - k] = 2\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} - \sum_{k=1}^{n} C_k^1 = 2C_{n+2}^{3} - C_{n+1}^{2}$$

$$= 2\frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{(n+1)n}{2} = n(n+1)\left[\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mostra-se, de uma outra maneira e mais uma vez, que a soma dos n primeiros números quadrados perfeitos (grau 2) resulta em um polinômio de grau 3. Esse polinômio pode ser escrito, também, como $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}$, com os coeficientes dos termos de grau 3, 2 e 1, respectivamente, iguais a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$.

No entanto, levanta-se o seguinte questionamento: será que existe alguma maneira de se encontrar os coeficientes do polinômio $S_p(n)$, de grau $p+1$, que represente a soma dos n primeiros números de grau p? O próximo capítulo mostra o que Bernoulli e Faulhaber descobriram.

8 Fórmula de Faulhaber: a Generalização Elegante para a Soma das Potências

A jornada através das somas de números naturais, ímpares, quadrados e cubos revela uma progressão notável na complexidade e na beleza das identidades matemáticas, especialmente no contexto das provas sem palavras. Contudo, a curiosidade humana não se contenta com casos específicos, e a busca por uma fórmula geral que permitisse somar os primeiros n números elevados a qualquer potência inteira p era um imperativo para os matemáticos.

Embora as PSPs sejam poderosas para visualizar somas de potências baixas (como quadradas e cúbicas), sua eficácia diminui significativamente para potências superiores, e não foi possível desenvolver maneiras de se representar somas em mais que três dimensões utilizando as PSPs, encontrando-se uma limitação para a demonstração visual dessas somas. A natureza abstrata e combinatória dessas somas complexas e os coeficientes envolvidos superam a capacidade de uma representação geométrica simples, demandando métodos algébricos rigorosos.

A busca por encontrar a fórmula geral culminou na célebre Fórmula de Faulhaber, um resultado que não apenas unifica as somas anteriores, mas abre as portas para uma compreensão mais profunda da combinatória e da teoria dos números.

A Fórmula de Faulhaber refere-se a um conjunto de identidades que expressam a soma dos primeiros n números inteiros positivos elevados a uma potência inteira p, ou seja, $S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$, como um polinômio em n. A particularidade dessas fórmulas é que, para cada p, a soma $S_p(n)$ pode ser escrita como um polinômio de grau $p+1$ na variável n. Por exemplo, já vimos que $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (um polinômio de grau 2) representa a soma dos primeiros naturais (grau 1), $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (um polinômio de grau 3) representa a soma dos primeiros quadrados perfeitos (grau 2), e $S_3(n) = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ (um polinômio de grau 4) representa a soma dos primeiros cubos perfeitos (grau 3). A Fórmula de Faulhaber generaliza esses resultados para qualquer grau p.

O nome da fórmula homenageia Johann Faulhaber (1580–1635), um matemático alemão conhecido por suas contribuições para a aritmética e a combinatória, e apresentado na Figura 34 a seguir. Faulhaber, trabalhando no início do século XVII, de forma notável e sem o auxílio das ferramentas analíticas que surgiriam mais tarde (como o cálculo diferencial e integral), conseguiu derivar e tabelar as fórmulas para as somas das potências até $p = 17$. Seu método era empírico e engenhoso, baseando-se em padrões observados e manipulações algébricas astutas.

Faulhaber não apresentou uma única fórmula geral no sentido moderno, mas sim uma coleção de polinômios para cada potência p específica, descobrindo propriedades recorrentes e simetrias nesses polinômios. Ele percebeu, por exemplo, que para p ímpar, o polinômio resultante é divisível por $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, e para p par, ele é divisível por $n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$, ou $n(n+1)(2n+1)$ (KNUTH, 1993). Sua genialidade residiu na capacidade de extrair essas relações complexas a partir de uma observação cuidadosa e um cálculo meticuloso.

A demonstração rigorosa dessas fórmulas e a hipótese de Faulhaber de que tais fórmulas existiriam para todas as potências ímpares só foram obtidas por Carl Jacobi (1834), dois séculos depois. Jacobi se beneficiou do progresso da análise matemática, utilizando o desenvolvimento em séries infinitas de uma função exponencial que gera números de Bernoulli, sobre os quais trataremos mais adiante neste capítulo.

Figura 34 – Johann Faulhaber - Acervo de National Gallery of Art

O princípio central dessa dedução reside na identidade do Binômio de Newton. Consideremos a expansão de $(k+1)^{p+1}$

$$(k+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j$$

Podemos reescrever a diferença $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ usando esta expansão. Note que o termo para $j = p+1$ na soma é $\binom{p+1}{p+1} k^{p+1} = k^{p+1}$. Então,

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \left(\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \right) - k^{p+1}$$

$$= \binom{p+1}{p+1}k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^{p} + \cdots + \binom{p+1}{0}k^{0} - k^{p+1}$$

Os termos k^{p+1} se cancelam e obtém-se

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \binom{p+1}{p}k^{p} + \binom{p+1}{p-1}k^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}$$

Agora, somamos ambos os lados desta identidade para k de 1 a n:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}] = \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{p+1}{p}k^{p} + \binom{p+1}{p-1}k^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}\right]$$

1. Lado Esquerdo (Soma Telescópica)

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}] = [2^{p+1} - 1^{p+1}] + [3^{p+1} - 2^{p+1}] + \cdots + [(n+1)^{p+1} - n^{p+1}]$$
$$= (n+1)^{p+1} - 1^{p+1} = (n+1)^{p+1} - 1$$

2. Lado Direito (Soma das Potências)

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{p+1}{p}k^{p} + \binom{p+1}{p-1}k^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}\right]$$
$$= \binom{p+1}{p}\sum_{k=1}^{n}k^{p} + \binom{p+1}{p-1}\sum_{k=1}^{n}k^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1}\sum_{k=1}^{n}k^{1} + \binom{p+1}{0}\sum_{k=1}^{n}k^{0}$$
$$= \binom{p+1}{p}S_p(n) + \binom{p+1}{p-1}S_{p-1}(n) + \cdots + \binom{p+1}{1}S_1(n) + \binom{p+1}{0}S_0(n)$$

Lembre-se que $\binom{p+1}{p} = p+1$ e $S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

3. Daí, segue que

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)S_p(n) + \binom{p+1}{p-1}S_{p-1}(n) + \cdots + \binom{p+1}{1}S_1(n) + \binom{p+1}{0}S_0(n)$$

Agora, podemos isolar $S_p(n)$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)\right]$$

Esta é a fórmula de recorrência fundamental para as somas de potências, nomeada de Fórmula de Faulhaber, mas com uma configuração complexa. Ela nos permite calcular $S_p(n)$ se conhecermos as somas de potências menores ($S_0(n)$, $S_1(n)$, ..., $S_{p-1}(n)$).

O verdadeiro salto conceitual, que unificou e provou a generalidade do trabalho de Faulhaber, veio com Jacob Bernoulli (1654–1705) no final do século XVII. Em sua obra póstuma *Ars Conjectandi* (1713), Bernoulli não apenas confirmou os resultados de Faulhaber, mas desenvolveu um método sistemático para derivar a fórmula de Faulhaber para qualquer potência p. Ele introduziu os famosos "Números de Bernoulli" (B_j) como ferramenta para expressar a soma $S_p(n)$ de forma recursiva e explícita. A versão moderna da Fórmula de Faulhaber, creditada a Bernoulli e apontada por KNUTH (1993) na página 11 do seu artigo sobre a fórmula, é geralmente apresentada como

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j},$$

em que $\binom{p+1}{j}$ são os coeficientes binomiais e B_j são os números de Bernoulli (BERNOULLI, 1713; KNUTH, 1993). Esta formulação elegante demonstra que todas as somas de potências podem ser expressas em termos de um conjunto finito de constantes universais (os números de Bernoulli) e potências de n.

Explorando um pouco mais profundamente os números de Bernoulli, denotados por B_j, temos uma sequência de números racionais descobertos por Jacob Bernoulli no final do século XVII, a partir da página 86 de seu trabalho *Ars Conjectandi* sobre a soma das potências inteiras (BERNOULLI, 1713). Eles fornecem uma maneira sistemática de expressar as somas $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$ como polinômios em n. A forma mais comum de defini-los é por meio da função geradora exponencial:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{x^j}{j!}$$

A partir dessa definição, podemos derivar uma fórmula de recorrência para calculá-los. Essa fórmula para os números B_k é obtida da expansão em série de potências da função geradora. Ao manipulá-la, chegamos à seguinte relação:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j = k+1 \quad , \text{ para } k \geq 0.$$

Essa fórmula nos permite calcular B_k de forma sequencial, desde que B_0 seja conhecido. O primeiro termo (B_0) é determinado pela condição de que $\frac{x}{e^x-1} \to 1$ quando $x \to 0$, o que implica $B_0 = 1$.

Com $B_0 = 1$, podemos rearranjar a fórmula de recorrência para isolar B_k

$$(k+1)B_k = (k+1) - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j.$$

Por conseguinte,

$$B_k = 1 - \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j \quad \text{para } k \geq 1$$

ou, mais comumente apresentado para $k \geq 1$

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j \quad \text{para } k \geq 1$$

Esta última forma é mais comum em textos e computações, pois facilita a visualização da recursividade.

Usando essa ideia, podemos deduzir os primeiros números de Bernoulli, que são $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, em seguida tendo valores nulos para os índices ímpares e valores não-nulos para os índices pares.

A Figura 35 a seguir é um retrato de Jacob Bernoulli, um dos três irmãos cientistas responsáveis por diversas publicações de enorme relevância.

Figura 35 – Jacob Bernoulli - Clubes de Matemática da OBMEP

A Figura 36 a seguir apresenta a dedução, retirada do livro de Bernoulli, para as potências de graus 1 a 10, bem como o polinômio com os coeficientes correspondentes. É interessante apontar, inclusive, que há um equívoco no último termo da fórmula deduzida por Bernoulli para $\sum_{k=1}^{n} k^9$, que deveria ser $-\frac{3}{20}n^2$ em vez de $-\frac{1}{12}n^2$.

No que tange às provas sem palavras (PSPs) nesse contexto, é fundamental fazer uma distinção. Enquanto as PSPs são incrivelmente eficazes para visualizar e intuir a validade das somas de potências baixas – como a dos números naturais (formando um retângulo), dos ímpares (formando um quadrado) e até mesmo dos cubos (formando um quadrado a partir de gnômons tridimensionais) –, elas são pouco eficazes para potências de graus superiores, em que há mais de três dimensões. Nesse contexto, a generalidade da Fórmula de Faulhaber em si não se presta a uma única PSP global. As PSPs são ferramentas que se destacam pela sua concretude e representação geométrica direta, funcionando melhor para identidades que podem ser "vistas" em arranjos de pontos ou blocos. A Fórmula de Faulhaber, no entanto, é uma expressão altamente algébrica e combinatória, envolvendo coeficientes binomiais e os abstratos Números de Bernoulli.

A "prova" dessa fórmula geral, diferentemente do que ocorre com as provas sem palavras, é feita por indução matemática, cálculo diferencial e integral, ou por métodos de funções geradoras – abordagens que, embora poderosas, não possuem a mesma natureza pictórica de uma PSP.

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$

$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$

$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$

$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$

$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$

$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$

$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$

$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \ldots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Figura 36 – Retirada de BERNOULLI (1713)

Isso não diminui o valor das PSPs, mas sim demarca o limite de sua aplicabilidade direta na derivação de uma fórmula tão abrangente. Contudo, as PSPs continuam a ser ferramentas pedagógicas vitais para ilustrar os resultados que a Fórmula de Faulhaber generaliza. Ao mostrar visualmente que $S_1(n) = T_n$, $S_2(n)$ se aproxima do formato de pirâmide e $S_3(n)$ é o quadrado de T_n, os educadores podem construir a intuição necessária para que os alunos apreciem a elegância da generalização Faulhaber-Bernoulli, mesmo que a prova da fórmula geral requeira um raciocínio mais abstrato.

Do ponto de vista pedagógico, a Fórmula de Faulhaber é um tópico avançado que pode ser introduzido para estudantes talentosos no ensino médio ou em cursos universitários iniciais, como uma culminação natural da exploração de somas de sequências. Ela demonstra a beleza da matemática em unificar padrões diversos sob uma única teoria e seus estudos fornecem o pano de fundo para conectar os resultados particulares (as somas de quadrados e cubos, por exemplo) à teoria geral, mostrando como o evoluímos na ciência desde observações empíricas (Faulhaber) para generalizações teóricas poderosas (Bernoulli). A exploração dessas fórmulas não só solidifica a compreensão de sequências e séries, mas também introduz os alunos ao pensamento combinatório e à história de como as grandes ideias matemáticas se desenvolveram.

Nesse sentido, a Fórmula de Faulhaber ilustra a progressão do conhecimento matemático, e surge para coroar a jornada da soma das potências. A trajetória de sua descoberta, desde as observações perspicazes de Faulhaber até a formalização por Bernoulli, ilustra essa progressão. Embora as PSPs tenham seu lugar de destaque na visualização de somas de potências baixas, a fórmula geral exige uma compreensão mais abstrata. A combinação de PSPs, para casos específicos, com a introdução da Fórmula de Faulhaber, como a generalização que unifica esses casos, oferece um caminho rico e multifacetado para o ensino da matemática, inspirando um apreço pela sua estrutura lógica e beleza intrínseca.

Considerações Finais

Ao longo desta dissertação, investigou-se a possibilidade de representar visualmente as somas de potências numéricas por meio das chamadas Provas Sem Palavras (PSPs), bem como os limites dessa abordagem. A análise histórica evidenciou que a visualização sempre esteve presente no desenvolvimento da matemática, desde os pitagóricos e seus números figurados até as construções geométricas de Arquimedes. As representações visuais não são meros recursos ilustrativos, mas constituem, em muitos casos, formas autênticas de demonstração.

Nos casos das somas dos números naturais e dos números ímpares, observou-se que as PSPs oferecem demonstrações particularmente elegantes e didaticamente poderosas. A construção de triângulos de pontos e de quadrados por meio de gnômons permite que o estudante "veja" a validade das identidades $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, promovendo compreensão conceitual mais profunda do que a simples aplicação de fórmulas.

No caso da soma dos quadrados e da soma dos cubos, a complexidade aumenta, mas ainda é possível encontrar construções tridimensionais que traduzem identidades algébricas relativamente extensas em arranjos espaciais significativos. As pirâmides de blocos e os rearranjos em paralelepípedos evidenciam que a visualização pode condensar argumentos algébricos longos em estruturas geométricas intuitivas. Particularmente notável é a identidade da soma dos cubos, cuja relação com o quadrado do número triangular revela uma harmonia estrutural entre diferentes níveis de potência.

Entretanto, à medida que se avança para potências superiores, começam a emergir limitações na construção de provas puramente visuais. A generalização sistematizada pela Fórmula de Faulhaber, fundamentada nos números de Bernoulli, evidencia que nem toda soma de potências admite uma representação geométrica simples ou pedagogicamente acessível. Essa constatação não diminui o valor das PSPs, mas delimita seu campo de aplicabilidade.

No contexto do PROFMAT e da formação de professores da educação básica, os resultados deste trabalho reforçam a importância da integração entre história da matemática, rigor algébrico e visualização. As Provas Sem Palavras mostram-se ferramentas eficazes para o desenvolvimento do pensamento visual, da percepção de padrões e da articulação entre diferentes ramos da matemática. Ao mesmo tempo, a análise de suas limitações contribui para uma compreensão mais madura e equilibrada de seu papel no ensino.

Norteando o trabalho a partir das perguntas apresentadas na Introdução desta dissertação, é possível afirmar que as questões levantadas foram respondidas. Foi possível navegar pelas diferentes demonstrações relacionadas à soma de potências numéricas, identificando as limitações relacionadas às demonstrações visuais, e como as ferramentas algébricas desenvolvidas por grandes cientistas supriram essa necessidade, às suas outras maneiras.

Conclui-se, portanto, que as PSPs constituem um recurso didático valioso e potente, especialmente no ensino de somas clássicas de inteiros e de potências até o terceiro grau. Sua utilização, aliada ao formalismo algébrico e à contextualização histórica, pode favorecer uma aprendizagem mais significativa, crítica e esteticamente apreciativa da matemática, contribuindo para a formação de professores capazes de articular intuição, rigor e criatividade em sua prática pedagógica.

Em se tratando de trabalhos futuros, à luz das discussões desenvolvidas ao longo desta dissertação, bem como das reflexões acerca dos alcances e limitações das Provas Sem Palavras (PSPs) no ensino de somas de potências numéricas, delineiam-se algumas possibilidades de aprofundamento que podem orientar investigações futuras no âmbito do PROFMAT.

Em primeiro lugar, destaca-se a relevância de estudos empíricos que investiguem o impacto da utilização de PSPs em contextos reais de sala de aula. Embora o presente trabalho tenha enfatizado o potencial didático dessas representações, pesquisas que envolvam a aplicação de sequências didáticas estruturadas, seguidas de análise qualitativa e quantitativa comparativas da aprendizagem dos estudantes, podem contribuir de forma significativa para a validação dessa abordagem. Nesse sentido, torna-se pertinente avaliar aspectos como a compreensão conceitual, a retenção de conhecimentos a longo prazo e a capacidade de generalização por parte dos alunos.

Adicionalmente, apresenta-se como promissora a investigação dos processos cognitivos envolvidos na interpretação das PSPs, especialmente no que diz respeito à relação entre visualização e formalização matemática. Tal linha de pesquisa pode buscar compreender em que medida a apreensão intuitiva proporcionada pelas representações visuais se converte em entendimento rigoroso, bem como identificar possíveis obstáculos cognitivos associados à transição entre o registro geométrico e o algébrico.

Outra perspectiva relevante consiste na ampliação do escopo de aplicação das PSPs para outros conteúdos da Matemática escolar. Tendo em vista o potencial dessa abordagem para evidenciar padrões e relações, sugere-se sua exploração em temas como produtos notáveis, progressões aritméticas e geométricas, análise combinatória e tópicos de geometria plana e espacial. Essa ampliação pode contribuir para a consolidação das PSPs como ferramenta metodológica transversal no ensino de Matemática.

Ademais, o uso de tecnologias digitais constitui um campo fértil para o desenvolvimento de novas abordagens baseadas em PSPs. A utilização de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, pode permitir a construção de representações interativas e dinâmicas, potencializando a compreensão dos estudantes e ampliando as possibilidades de exploração didática dos conceitos abordados.

Por fim, ressalta-se a importância de investigações voltadas à formação de professores, especialmente no que tange à incorporação de estratégias baseadas em visualização matemática em sua prática pedagógica. Nesse contexto, o desenvolvimento de materiais didáticos estruturados, sequências de ensino e propostas de formação continuada pode contribuir de maneira significativa para a disseminação e efetiva utilização das PSPs no ensino básico.

Dessa forma, as possibilidades aqui apresentadas evidenciam que o tema das Provas Sem Palavras, longe de se esgotar, abre caminho para um amplo campo de investigações que articulam conteúdo matemático, prática docente e processos de aprendizagem, em consonância com os objetivos do PROFMAT.

Referências

ARQUIMEDES. A quadratura da parábola. In: HEATH, T. L. (Ed.). *The Works of Archimedes*. Cambridge (EUA): Cambridge University Press, 1897. (Ed. & Trans.). Citado na página 49.

ARQUIMEDES. Sobre espirais. In: HEATH, T. L. (Ed.). *The Works of Archimedes*. Cambridge (EUA): Cambridge University Press, 1897. (Ed. & Trans.). Citado na página 49.

BEERY, J. Sums of powers of positive integers - introduction. *Convergence*, 2010. Disponível em: <https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers-introduction>. Acesso em: 18 fev. 2026. Citado na página 37.

BEILER, A. H. *Recreations in the Theory of Numbers*. New York (EUA): Dover Publications, Inc., 1964. Citado na página 24.

BERNOULLI, J. *Ars Conjectandi*. Basileia (Suíça): Impensis Thurnisiorum, 1713. Citado 6 vezes nas páginas 11, 59, 60, 73, 74 e 76.

BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. 2. ed. New York (EUA): John Wiley & Sons, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 37, 43 e 44.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação., 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 10 abr. 2026. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

CHICONELLO, L. A. *Números Figurados e as Sequências Recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados*. 85 f. p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal de São Carlos, São CCarlos, 2013. Citado na página 25.

DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers, Vol. 2: Diophantine Analysis*. Washington: Carnegie Institute of Washington, 1919. Citado na página 24.

DUNHAM, W. *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

EULER, L. Observationes circa divisionem numerorum. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, São Petersburgo, v. 3, p. 125–133, 1750. Citado na página 24.

FINE, N. J. *Basic Hypergeometric Series and Applications*. Providence: American Mathematical Society, 1988. Citado na página 24.

GULLEY, N. Nicomachus's theorem. *Loren on the Art of MATLAB, Matlab Central*, 2010. Disponível em: <http://blogs.mathworks.com/loren/2010/03/04/nichomachuss-theorem/>. Acesso em: 10 abr. 2026. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 64.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

IBRAHIM, S. *Interpretações algébricas e combinatória dos números triangulares*. 53 f. p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2022. Citado na página 24.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. New York (EUA): HarperCollins College Publishers, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 23, 37, 38 e 59.

KNUTH, D. E. Johann faulhaber and the sums of powers. *Mathematics of Computation*, Providence (EUA), v. 61, n. 203, p. 277–294, jul. 1993. Citado 5 vezes nas páginas 51, 59, 60, 72 e 74.

LOCKWOOD, J. The sum of the first n odd numbers. *The College Mathematics Journal*, Washington (EUA), v. 26, n. 3, p. 232–233, mai. 1995. Citado na página 44.

MORGADO, A. C. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 11, 66, 67 e 68.

NELSEN, R. B. Proof without words: The sum of the first n odd integers. *Mathematics Magazine*, Washington (EUA), v. 66, n. 1, p. 54, fev. 1993. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 39.

NELSEN, R. B. Proofs without words. *Mathematics Magazine*, Washington (EUA), v. 66, n. 5, p. 323–324, dez. 1993. Citado 5 vezes nas páginas 19, 26, 44, 52 e 61.

NELSEN, R. B. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington (EUA): The Mathematical Association of America, 1993. Citado 7 vezes nas páginas 19, 26, 39, 44, 45, 52 e 62.

NELSEN, R. B. Proof without words: The sum of the first n integers. *The College Mathematics Journal*, Washington (EUA), v. 25, n. 4, p. 282, set. 1994. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 39.

NELSEN, R. B. *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. Washington (EUA): Mathematical Association of America, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 19, 26, 39, 44, 52 e 61.

NELSEN, R. B. *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Washington (EUA): The Mathematical Association of America, Inc., 2015. Citado 5 vezes nas páginas 19, 26, 44, 45 e 52.

NUNES, I. B. D. *Demonstrações visuais: provas com e sem palavras*. 144 f. p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020. Citado na página 21.

ORTEGA, R. C. d. S. *Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática*. 122 p. p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Citado na página 21.

PINTER, R. Figurate numbers. *The College Mathematics Journal*, Washington (EUA), v. 18, n. 3, p. 241–242, mai. 1987. Citado na página 24.

STIFEL, M. *Arithmetica Integra*. Norimbergae (Nuremberg): Johan Petreius, 1544. Citado na página 67.

VASCON, G. M. *Os Números de Narayana via Números Triangulares*. 61 f. p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2025. Citado na página 24.