Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

MISSÃO(X,Y): UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO POR MEIO DO ESTUDO DO PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO NO PLANO CARTESIANO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Geovanne Almeida dos Santos

Brasília
2026

Geovanne Almeida dos Santos

MISSÃO(X,Y): UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO POR MEIO DO ESTUDO DO PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO NO PLANO CARTESIANO NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Universidade de Brasília – UNB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Prof º. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília
2026

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SS237m

SANTOS, Geovanne Almeida dos
MISSÃO(X,Y): UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO POR MEIO DO ESTUDO DO PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO NO PLANO CARTESIANO NA EDUCAÇÃO BÁSICA. / Geovanne Almeida dos SANTOS; orientador Rogério César dos SANTOS. Brasília, 2026.
123 p.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) Universidade de Brasília, 2026.

1. Educação Matemática. 2. Estratégias Lúdicas. 3. Análise Combinatória. 4. Probabilidade. 5. Ponto mais Visitado. I. SANTOS, Rogério César dos, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

MISSÃO(X,Y): UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO POR MEIO DO ESTUDO DO PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO NO PLANO CARTESIANO NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

por

GEOVANNE ALMEIDA DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção de grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 10 de Junho de 2026

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rogério César dos Santos – FUP/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza – FUB/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Carlos Derli Almeida Cornelio – UEG (Membro Externo)

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo – FUB/UnB (Membro Suplente)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa, Daniela, pois, sem o seu apoio, sua insistência, paciência e amor, não tenho dúvida de que não teria sido possível chegar até aqui.

Dedico este trabalho aos meus filhos, Felipe, Nicolas e Isabelly, para que encontrem neste singelo exemplo do pai a certeza de que estudar é importante, transforma vidas e nunca é tarde para buscar conhecimento e realizar sonhos.

Dedico também este trabalho aos meus pais, Adalice (in memoriam) e Reinaldo. À minha mãe, Adalice, cuja memória permanece viva em meu coração, minha eterna gratidão por tudo que representou em minha vida. Ao meu pai, Reinaldo, meu reconhecimento pelo amor, pelos ensinamentos, pela presença em minha caminhada e pelo exemplo de homem e de pai que ele é para a minha vida.

A eles, dedico esta conquista.

AGRADECIMENTOS

A **JESUS**, meu Deus vivo, que até aqui não se esqueceu de mim, sustentando-me com graça, força e misericórdia em cada etapa desta caminhada.

À minha família, de forma muito especial à minha esposa, **Daniela**, pelo amor, pela compreensão, pela paciência e pelo apoio incondicional durante todo este percurso.

Ao meu orientador, **Prof. Dr. Rogério César dos Santos**, pela orientação, dedicação, paciência, sugestões e ensinamentos ao longo da realização deste trabalho. Sua contribuição foi fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa. Meu sincero agradecimento.

Aos professores que atuam no PROFMAT da Universidade de Brasília, pela dedicação, pelo compromisso e pelas valiosas contribuições ao aprimoramento da minha formação acadêmica e profissional.

À coordenação do PROFMAT, pelo compromisso, dedicação e esforço em conduzir este programa com seriedade e excelência.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, **CAPES**, ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada, **IMPA**, à Sociedade Brasileira de Matemática, **SBM**, e ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, **PROFMAT**, por fomentarem e acreditarem na formação continuada de professores de Matemática no Brasil.

A cada um deles, expresso minha mais sincera gratidão.

“Tudo o que o homem semear, isso também ceifará.”

Gálatas 6:7

RESUMO

Esta dissertação discute o uso da estratégia lúdica MISSÃO(X,Y), fundamentada no problema do ponto mais visitado em trajetórias construídas em malhas retangulares, como recurso didático lúdico para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio. O estudo parte da compreensão de que a Matemática pode tornar-se mais significativa quando articulada a situações lúdicas, investigativas e visualmente acessíveis. Inicialmente, aborda-se a relação entre ludicidade, cultura e educação matemática, destacando o potencial formativo das práticas lúdicas no processo de aprendizagem. Em seguida, apresentam-se os fundamentos teóricos da Análise Combinatória e da Probabilidade, com ênfase em princípios de contagem, espaço amostral, eventos e probabilidade clássica. Posteriormente, analisa-se o papel das atividades lúdico-investigativas na aprendizagem matemática e formaliza-se o problema do ponto mais visitado a partir da estratégia MISSÃO(X,Y). Por fim, são propostas sequências didáticas voltadas ao ensino desses conteúdos, com o objetivo de articular experimentação, modelagem, sistematização e reflexão sobre a aprendizagem. Conclui-se que a estratégia lúdica MISSÃO(X,Y) constitui um recurso didático promissor, por favorecer a compreensão de conceitos matemáticos e estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a autonomia intelectual.

Palavras-chave: Educação Matemática; Estratégias Lúdicas; Análise Combinatória; Probabilidade; Ponto mais Visitado.

ABSTRACT

This dissertation discusses the use of the playful strategy MISSION(X,Y), grounded in the problem of the most visited point in paths constructed on rectangular grids, as a playful didactic resource for teaching Combinatorics and Probability in High School. The study is based on the understanding that Mathematics can become more meaningful when connected to playful, investigative, and visually accessible situations. Initially, it addresses the relationship between playfulness, culture, and mathematics education, highlighting the formative potential of playful practices in the learning process. Next, it presents the theoretical foundations of Combinatorics and Probability, with emphasis on counting principles, sample space, events, and classical probability. Subsequently, it analyzes the role of playful-investigative activities in mathematical learning and formalizes the problem of the most visited point through the strategy MISSION(X,Y). Finally, didactic sequences aimed at teaching these contents are proposed, with the purpose of articulating experimentation, modeling, systematization, and reflection on learning. It is concluded that the playful strategy MISSION(X,Y) constitutes a promising didactic resource, as it favors the understanding of mathematical concepts and stimulates logical reasoning, argumentation, and intellectual autonomy.

Keywords: Mathematics Education; Playful Strategies; Combinatorics; Probability; Most Visited Point.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática desempenha papel relevante na formação dos estudantes, uma vez que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação, da capacidade de abstração e da resolução de problemas. Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular destaca que “a resolução de problemas, a investigação, os projetos e a modelagem constituem formas privilegiadas da atividade matemática, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio e da argumentação dos estudantes” (BRASIL, 2018). No contexto escolar, seu ensino pode ser potencializado por propostas didáticas que favoreçam a participação ativa dos alunos e a construção de significados. Nesse cenário, diferentes estratégias pedagógicas podem ampliar as possibilidades de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, especialmente quando colocam o estudante em posição investigativa diante do conhecimento.

Entre as possibilidades de ressignificação do ensino, os jogos se destacam como recursos pedagógicos capazes de articular ludicidade, desafio cognitivo e construção do conhecimento. Para além do entretenimento, o jogo pode assumir, no espaço escolar, uma função formativa, ao estimular observação, levantamento de hipóteses, argumentação, tomada de decisão e resolução de problemas. Nesse sentido, Grando (2004) ressalta que “o jogo, quando utilizado de forma planejada e mediada pelo professor, pode favorecer a reflexão, a formulação de estratégias, a análise de possibilidades e a construção de conceitos matemáticos” (GRANDO, 2004, p. 30). No campo da Educação Matemática, seu uso adquire relevância especial, pois permite transformar conteúdos muitas vezes apresentados de forma mecânica em objetos de investigação concreta, visual e significativa. A relação entre jogos, cultura e educação evidencia que brincar, experimentar e interagir são dimensões historicamente associadas à formação humana e, quando integradas ao ensino, podem ampliar as possibilidades de aprendizagem.

É nesse horizonte que se insere o presente trabalho, cujo foco recai sobre o jogo *MISSÃO(X,Y)* como recurso pedagógico para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade. Estruturado em uma malha cartesiana, o jogo está centrado em trajetórias formadas por movimentos para a direita e para cima, o que permite explorar, de maneira articulada, noções de contagem de caminhos, permutação com repetição, coeficientes binomiais, espaço amostral, eventos e cálculo de probabilidades.

A proposta mostra-se particularmente fecunda porque parte de uma situação lúdica e concreta para conduzir o estudante à formalização matemática, favorecendo a passagem do intuitivo ao sistematizado. Nesse contexto, é importante esclarecer que, neste trabalho, o termo jogo é compreendido em seu sentido pedagógico e formativo, associado à ludicidade, à investigação matemática e à construção de significados em sala de aula. Assim, a estratégia *MISSÃO(X,Y)* não se vincula a jogos de azar, apostas ou práticas competitivas de caráter meramente recreativo, mas a uma proposta didática intencional, mediada pelo professor, cujo objetivo é favorecer a compreensão de conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade.

Nessa perspectiva, a dimensão lúdica é utilizada como meio para estimular a participação, a formulação de hipóteses, a argumentação e a sistematização do conhecimento matemático. Nesse sentido, o jogo não é tomado apenas como elemento motivador, mas como eixo estruturante de uma proposta de ensino que integra experimentação, modelagem, sistematização e reflexão. O presente trabalho apresenta o recurso pedagógico e como se pode ensinar combinatória e probabilidade por meio dele, e apresenta duas propostas de sequências didáticas para sua aplicação, dado que essa pesquisa focou na proposição de uma sugestão de atividade em sala de aula envolvendo o jogo como meio lúdico eficiente de ensino de matemática.

Diante disso, este trabalho tem como objetivo discutir o potencial pedagógico do jogo *MISSÃO(X,Y)* no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, evidenciando de que maneira uma situação lúdica pode favorecer a compreensão de conceitos matemáticos e subsidiar a elaboração de propostas didáticas para o Ensino Médio. Para tanto, o estudo parte da compreensão de que contar caminhos em malhas e analisar a probabilidade de passagem por determinados pontos constitui uma situação rica do ponto de vista matemático, pois permite articular raciocínio combinatório, modelagem probabilística, visualização geométrica e argumentação. Além disso, procura-se mostrar que as aprendizagens desses conteúdos podem ser fortalecidas quando o estudante deixa de ocupar uma posição passiva e assume papel ativo na investigação, no registro e na justificativa de resultados.

A relevância deste estudo também se justifica pelo fato de que Análise Combinatória e Probabilidade são conteúdos que, embora centrais na formação matemática, frequentemente apresentam alto grau de abstração para os estudantes. A contagem de possibilidades, a distinção entre arranjos e combinações, a compreensão do espaço amostral e a interpretação de probabilidades nem sempre são facilmente assimiladas quando trabalhadas apenas por meio de abordagens algébricas ou de fórmulas isoladas. Nesse sentido, Lopes e Rezende (2010) evidenciam que “o uso de jogos associado à resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e para a compreensão de conceitos probabilísticos.” (LOPES at al., 2010). Ao situar esses conteúdos em um problema concreto, lúdico e passível de ser trabalhado com jogos, o presente trabalho busca contribuir para práticas de ensino que valorizem o sentido matemático das operações e conceitos, em vez de sua mera aplicação mecânica.

Quanto à organização do trabalho, o Capítulo 1, intitulado *Ludicidade, cultura e Matemática: um encontro que transforma a educação*, discute a relação entre jogos, práticas culturais e ensino da Matemática, destacando o valor pedagógico do lúdico na construção do conhecimento. O Capítulo 2, dedicado à Análise Combinatória, apresenta os conceitos fundamentais desse campo, com ênfase em princípios de contagem, permutações, arranjos e combinações, elementos indispensáveis para a compreensão matemática do jogo proposto. O Capítulo 3 aborda a Probabilidade, recuperando seus fundamentos históricos e conceituais, bem como conceitos como espaço amostral, eventos, probabilidade clássica, probabilidade condicional e independência entre eventos. O Capítulo 4, por sua vez, discute a aprendizagem matemática por meio de jogos e introduz formalmente o problema do ponto mais visitado no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)*, incluindo a análise combinatória dos caminhos e a demonstração do ponto de maior visitação em retângulos. Por fim, o Capítulo 5 apresenta propostas de sequências didáticas para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade a partir do jogo, organizadas de modo a articular vivência, modelagem, sistematizar e aplicar pedagogicamente.

Assim, este trabalho busca contribuir para a reflexão sobre metodologias de ensino que tornem a Matemática mais acessível, significativa e intelectualmente mobilizadora. Ao tomar o jogo *MISSÃO(X,Y)* como objeto de análise e como recurso de ensino, pretende-se mostrar que a ludicidade, quando pedagogicamente orientada, pode favorecer não apenas o interesse dos estudantes, mas também a compreensão rigorosa de conceitos matemáticos relevantes. Em última instância, a proposta defendida é a de que ensinar Matemática também significa criar condições para que o estudante observe, investigue, formule, compare, justifique e compreenda, construindo relações mais consistentes entre conhecimento escolar, raciocínio lógico e experiência vivida.

O problema aqui é tratado em retângulos M por N, com $M > N$. Um estudo semelhante, envolvendo o problema do ponto mais visitado em quadrados, foi desenvolvido por Santos e Castilho (2013), o qual guarda relação com esta pesquisa, embora apresente diferenças em relação ao contexto e à abordagem didática aqui proposta. Além disso, a formulação matemática considerada neste trabalho dialoga com os estudos de Melo e Santos (2024), que apresentam uma solução para o problema do ponto mais visitado no plano e no espaço.

1. LUDICIDADE, CULTURA E MATEMÁTICA: UM ENCONTRO QUE TRANSFORMA A EDUCAÇÃO

A exploração da ludicidade, por meio de atividades matemáticas planejadas, constitui um dos caminhos relevantes a serem considerados pelo professor de Matemática em sua prática pedagógica, pois pode atuar como importante fator de motivação para o desenvolvimento de conceitos matemáticos e para a ampliação da compreensão acerca de sua evolução ao longo do tempo. Nesse sentido, torna-se igualmente importante compreender a trajetória histórica dos jogos e das brincadeiras, uma vez que essas práticas desempenharam papel fundamental no desenvolvimento de habilidades sociais e na aprendizagem de diferentes tarefas ao longo da história. Assim, as diversas formas de brincar sempre funcionaram como uma porta de entrada do indivíduo para a cultura.

Na atualidade, a sociedade reconhece o brincar como parte constitutiva da infância, estabelecendo distinções entre brincadeiras e jogos destinados a crianças e adultos. Entretanto, essa separação nem sempre existiu. Segundo Ariès (1981), "no início do século XVII, as mesmas brincadeiras eram praticadas por adultos e crianças, sem a separação que hoje existe". As brincadeiras destinadas exclusivamente às crianças restringiam-se à primeira infância, até aproximadamente os três ou quatro anos de idade. Após esse período, elas passavam a participar dos mesmos jogos praticados pelos adultos. Desse modo, a história da infância evidencia que jogos e brincadeiras existem desde épocas remotas.

Como parte da cultura popular, o jogo tradicional preserva a produção cultural de um povo em determinado período histórico. Essa cultura não oficial, desenvolvida sobretudo pela oralidade, não permanece cristalizada, mas se transforma continuamente, incorporando criações anônimas das gerações que se sucedem. Por esse motivo, o jogo tradicional assume características como anonimato, tradicionalidade, transmissão oral, conservação, mudança e universalidade. Conforme destaca Kishimoto:

> Não se conhece a origem desses jogos [...] a tradicionalidade e universalidade dos jogos assenta-se no fato de que povos distintos e antigos como os da Grécia e Oriente brincaram de amarelinha, de empinar papagaios, jogar pedrinhas, e até hoje as crianças o fazem quase da mesma forma. (KISHIMOTO, 1993, pag. 15)

Os jogos e as brincadeiras tradicionais brasileiros evidenciam forte miscigenação cultural, resultante da interação entre influências portuguesas, indígenas, africanas e asiáticas. Segundo Kishimoto (1993), "os portugueses foram os principais influenciadores de nossas práticas lúdicas, trazendo também costumes herdados dos povos asiáticos, como o uso da pipa, que, embora trazida pelos portugueses, teve origem em terras asiáticas". Muitos dos jogos tradicionais brasileiros, como a amarelinha, o jogo de botão, o pião e a bolinha de gude, chegaram ao Brasil por intermédio dos primeiros colonizadores portugueses.

Além da influência portuguesa, também se observa a presença de elementos indígenas nas brincadeiras ao ar livre e no uso de recursos naturais, como bodoques, alçapões para pegar passarinhos, a peteca e o arco. Os negros africanos, trazidos para substituir o trabalho indígena, difundiram brincadeiras de faz de conta nos engenhos de açúcar e nos canaviais, como cavalos de montaria e carros de boi. Freyre e Veríssimo (apud KISHIMOTO, 1993) relatam que "nas brincadeiras, as crianças brancas frequentemente faziam das crianças negras seus 'escravos' ou 'animais' de carga", evidenciando marcas da realidade histórica da época. Dessa forma, os jogos e as brincadeiras conhecidos atualmente no Brasil resultam de um amplo contexto histórico de influências culturais diversas.

No contexto escolar, a Matemática pode ser desenvolvida por meio de propostas que valorizem os conhecimentos prévios dos estudantes e favoreçam a construção de significados, de modo que a aprendizagem se torne mais reflexiva e participativa. Diante desse cenário, cabe ao professor criar situações que estimulem a criatividade do aluno, desafiando-o a solucionar problemas a partir da curiosidade. Para que a aprendizagem matemática ocorra de modo mais efetivo, o estudante deve ser colocado como protagonista do processo educacional, enquanto o professor assume a função de mediador e facilitador. Segundo D’Ambrósio (1989, p. 17), é necessário "reconhecer que os alunos chegam à escola com conhecimentos prévios de ideias matemáticas e que o ensino precisa se basear nessas construções já existentes".

Ao valorizar a construção dos conceitos desenvolvidos pelos próprios alunos, favorece-se uma postura mais ativa diante da aprendizagem, contribuindo para que eles compreendam que aprender Matemática não se resume a uma transmissão passiva de informações. Nessa perspectiva, a atividade matemática deve ser pensada de maneira prática e significativa, conectando teoria e realidade por meio de jogos, brincadeiras e experiências desafiadoras. Como aponta Le Bon (apud NAME, 2007, p. 18), "o ensino latino tradicionalmente começa pelo abstrato, sem passar pelo concreto", o que torna o ensino da Matemática mais difícil.

Aprender Matemática de forma significativa implica vivenciar experiências práticas e relacionar os conhecimentos teóricos com situações do cotidiano. A construção do conhecimento ocorre na interação com o ambiente e possibilita novas descobertas. Segundo Kamii (2005, p. 33), "a educação deve ter como finalidade o desenvolvimento da autonomia da criança, abrangendo os aspectos social, moral e intelectual". Nesse processo, é fundamental que o professor permita ao aluno expor suas ideias, formular argumentos e participar ativamente da construção do saber, sem impor seus próprios pensamentos como verdades absolutas.

Grando (apud RIBEIRO, 2008, p. 23) afirma que "os jogos matemáticos promovem o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas; tornam o aluno um ser ativo, incentivam a criatividade, a participação, a observação, a competição saudável e o senso crítico; além de resgatar o prazer em aprender". Sob essa perspectiva, tanto a escola quanto a família desempenham papéis fundamentais na construção do conhecimento lógico-matemático, sendo necessário criar condições para que a criança realize suas próprias descobertas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1999), "a matemática deve ser acessível a todos, e a escola é a principal ferramenta para sua democratização". Diversas pesquisas apontam que muitos alunos apresentam dificuldades em Matemática, frequentemente relacionadas à formação inadequada de professores, ao uso de livros didáticos de baixa qualidade e a práticas pedagógicas pouco eficazes. Além disso, é importante lembrar que a Matemática surgiu de necessidades práticas do cotidiano e está presente em diferentes áreas do conhecimento, como culinária, comércio, esportes, artes, computação, astronomia e agronomia.

Nesse sentido, o professor precisa conhecer a história de vida dos alunos, seus saberes e suas culturas, utilizando essas informações para aproximar o conhecimento matemático da realidade vivida pelos estudantes. Estimular a cooperação e a integração entre alunos e professores também é fundamental para a construção de um ambiente que favoreça a produção ativa do conhecimento, no qual o estudante ocupa o centro do processo e o professor exerce o papel de mediador.

O papel do professor, portanto, consiste em organizar, orientar e incentivar o aluno, sem assumir para si o protagonismo da aprendizagem. O objetivo é encorajar os estudantes a pensar de forma ativa e autônoma, resolvendo problemas e construindo seu próprio saber. Segundo os PCN's (1999), "a aprendizagem deve ser voltada para a resolução de problemas relacionados ao cotidiano e às diversas disciplinas", com ênfase na participação ativa do aluno.

No campo da Educação Matemática, o lúdico desempenha papel essencial. Segundo Almeida (1995), "a palavra 'lúdico', originada do latim *ludus* (jogo), evoluiu e passou a ser entendida como uma característica essencial do comportamento humano". Nessa perspectiva, o lúdico promove uma aprendizagem mais espontânea e natural, estimulando a criatividade e a socialização.

Marcelino (1996, p. 38) destaca que "é fundamental que se assegure às crianças tempo e espaço para vivenciarem o lazer de forma intensa, formando uma base sólida para a criatividade e o prazer de viver". Segundo Oliveira (1998), "o lúdico é uma das atividades mais significativas para o desenvolvimento, tanto pelo seu conteúdo pedagógico quanto pelo aspecto social".

O brincar possibilita o desenvolvimento de capacidades importantes, como atenção, memória, imaginação e socialização, além de permitir à criança experimentar diferentes papéis sociais. Lopes (2006, p. 110) afirma que "o ato de brincar contribui para o desenvolvimento da identidade e da autonomia". Gerardi (1993) ressalta que "a expressão corporal é essencial para o desenvolvimento da identidade cultural", enquanto Negrine (1995) aponta que "o brincar impulsiona processos de aprendizagem e desenvolvimento interpessoal". Alicia (2006) enfatiza que "o prazer estimula o ser humano a aprender e a se desenvolver".

O jogo favorece experiências prazerosas e permite a crianças, jovens e adultos explorar emoções, interagir socialmente e desenvolver processos afetivos e cognitivos importantes. Segundo D'Ambrósio (1989), "os jogos resgatam o pensamento lógico-matemático e espacial, muitas vezes ignorado no ensino tradicional". Quando bem planejados, jogos, brincadeiras e desafios tornam-se instrumentos pedagógicos valiosos para a construção do conhecimento matemático, além de fortalecerem a relação entre professor e aluno.

A prática de jogos estratégicos desenvolve a capacidade de estimativa, o cálculo mental e o levantamento de hipóteses, habilidades fundamentais para o pensamento científico e matemático. Macedo et al. (1997, p. 151) afirmam que "o jogo de regras contribui para o desenvolvimento de uma relação de respeito e admiração entre professor e aluno, além de ensinar a lidar com vitórias e derrotas como parte do processo de aprendizagem".

Diante disso, o uso de jogos no ensino da Matemática representa um caminho eficaz para tornar a aprendizagem mais prazerosa, significativa e conectada à realidade dos alunos, promovendo a construção ativa e autônoma do conhecimento.

2. ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que estuda as diferentes maneiras de contar, organizar e agrupar elementos de um conjunto, sem a necessidade de listar todas as possibilidades. Seu principal objetivo é determinar o número total de resultados possíveis em situações que envolvem escolhas, arranjos ou combinações, obedecendo a determinadas condições.

Neste capítulo, serão abordados os conceitos fundamentais que sustentam a contagem, iniciando com o Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo e Aditivo), que servem como base para o desenvolvimento de outras ideias. Em seguida, exploraremos os Fatoriais, os Arranjos, as Permutações e as Combinações, apresentando definições, propriedades, demonstrações matemáticas e exemplos práticos.

O estudo da Análise Combinatória não apenas auxilia na resolução de problemas matemáticos, mas também desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de tomada de decisão diante de situações que envolvem incerteza e planejamento.

2.1 O Princípio Multiplicativo

Considere a seguinte situação: um estudante que se prepara para o ENEM decide participar de uma imersão de estudos. Ao chegar à secretaria do cursinho, ele precisa montar uma única grade de participação. Para isso, deve escolher, inicialmente, um período entre três disponíveis; em seguida, selecionar uma matéria entre quatro opções; por fim, definir com qual professor cursará a disciplina escolhida, sabendo que cada matéria é oferecida por dois docentes diferentes. A questão consiste em determinar de quantas maneiras distintas essa grade pode ser montada.

Esse problema constitui um caso típico de aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

O princípio multiplicativo afirma que, quando um processo pode ser dividido em etapas sucessivas, e cada etapa possui um número determinado de possibilidades, o número total de maneiras de realizar o processo é obtido pelo produto das possibilidades de cada etapa. Assim, se a primeira etapa pode ocorrer de m_1 maneiras, a segunda de m_2 maneiras, a terceira de m_3 maneiras, e assim sucessivamente até a $k-$ésima etapa, então o total de possibilidades é dado por:

$$m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_k.$$

Do ponto de vista operacional, esse princípio permite contar sequências de escolhas ou decisões sem a necessidade de listar todos os casos possíveis, desde que as etapas envolvidas sejam independentes. Trata-se, portanto, de um instrumento essencial para a resolução de problemas de contagem em que cada escolha depende apenas do conjunto de opções disponíveis naquele momento, sem interferir nas demais.

Retomando o exemplo apresentado, observa-se que há 3 escolhas possíveis para o período, 4 para a matéria e 2 para o professor. Logo, o número total de maneiras de organizar a imersão é:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Assim, esse estudante pode montar sua grade de participação de 24 maneiras distintas.

2.2 Princípio Multiplicativo: Uma Base Essencial Para a Análise Combinatória

Considere-se agora o caso de uma senha numérica de cinco dígitos utilizada para acessar um aplicativo. Em cada posição da senha, pode-se usar qualquer algarismo de 0 a 9, com duas restrições: o primeiro dígito não pode ser 0 e o último deve ser par. O problema consiste em determinar quantas senhas diferentes podem ser formadas nessas condições.

O Princípio Multiplicativo constitui uma ferramenta elementar e, ao mesmo tempo, decisiva no estudo da Análise Combinatória, pois fornece uma base lógica para a resolução de uma ampla variedade de problemas. Sua relevância decorre do fato de permitir a compreensão estrutural de tópicos posteriores, como arranjos, combinações e permutações. Ao ser introduzido de maneira adequada, esse princípio contribui para que o estudante compreenda a origem dos procedimentos de contagem, em vez de limitar-se à memorização de fórmulas.

Sob perspectiva metodológica, algumas estratégias favorecem a análise de problemas combinatórios:

- a identificação do contexto do problema;
- a decomposição da situação em etapas sucessivas;
- a observação das restrições mais significativas.

No exemplo da senha, a análise pode ser organizada da seguinte forma.

Em primeiro lugar, observa-se que a senha possui cinco posições. Em segundo lugar, as restrições incidem sobre o primeiro e o último dígitos: o primeiro não pode ser zero e o último deve pertencer ao conjunto dos algarismos pares. Já as posições intermediárias podem ser preenchidas livremente com qualquer dígito de 0 a 9. Além disso, o enunciado não proíbe a repetição de algarismos, de modo que tal possibilidade deve ser admitida.

Assim, a contagem das possibilidades em cada etapa é dada por:

- 9 possibilidades para o primeiro dígito;
- 10 possibilidades para cada uma das três posições intermediárias;
- 5 possibilidades para o último dígito.

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, obtém-se:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45.000.$$

Portanto, existem 45.000 senhas possíveis de cinco dígitos que não se iniciam em zero e terminam com algarismo par, admitindo repetição de dígitos.

2.3 O Princípio Aditivo

Considere-se a seguinte situação: uma pessoa deseja realizar apenas um programa em um domingo e pode escolher entre três possibilidades exclusivas — ir ao cinema, visitar uma exposição de arte ou assistir a uma peça de teatro. Suponha-se que haja 4 filmes em cartaz, 3 exposições disponíveis e 2 peças teatrais em exibição. Como apenas uma dessas opções será escolhida, trata-se de um caso típico de aplicação do Princípio Aditivo.

O Princípio Aditivo da Contagem afirma que, quando uma escolha pode ser realizada por diferentes alternativas mutuamente exclusivas, isto é, quando a realização de uma impede a realização das demais, o número total de maneiras de efetuar a escolha é dado pela soma das possibilidades de cada alternativa. Assim, se há m_1 maneiras de realizar uma ação, m_2 maneiras de realizar outra, e assim sucessivamente até a k-ésima, então o total é dado por:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k.$$

Esse princípio é usado sempre que se trata de uma escolha entre eventos mutuamente exclusivos, ou seja, a realização de um impede a realização dos outros no mesmo momento.

No exemplo apresentado, como as possibilidades são excludentes, o total de escolhas é:

$$4 + 3 + 2 = 9$$

Logo, existem 9 maneiras distintas de escolher um único programa.
A seguir, apresentam-se exemplos adicionais.

Exemplo 1. Em uma padaria, há 6 sabores de donuts e 4 tipos de cafés especiais. Uma pessoa deseja consumir apenas um dos dois. De quantas formas ela pode fazer seu pedido?

Solução
Aplicando o Princípio Aditivo:

$$6 + 4 = 10$$

Existem 10 maneiras diferentes de fazer o pedido.

Exemplo 2. Lucas tem acesso a uma plataforma de cursos online que oferece:

- 6 cursos de tecnologia,
- 8 cursos de marketing,
- 5 cursos de finanças.

Ele deseja escolher 2 cursos, com a condição de que sejam de áreas diferentes. De quantas maneiras Lucas pode fazer essa escolha?

Solução
Aplicando o princípio multiplicativo para cada par de áreas diferentes:

- (a) tecnologia e marketing: $6 \times 8 = 48$ maneiras
- (b) tecnologia e finanças: $6 \times 5 = 30$ maneiras;
- (c) marketing e finanças: $8 \times 5 = 40$ maneiras.

Agora, como Lucas deve escolher entre uma das combinações (a), (b) ou (c), aplicamos o princípio aditivo:

$$48 + 30 + 40 = 118$$

Lucas pode escolher seus dois cursos de 118 maneiras diferentes.

2.4 Fatorial

Seja *n* um número natural (ou inteiro não negativo). O **fatorial de n**, indicado por $n!$, é o produto de todos os números naturais consecutivos de 1 até n. Isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Define-se também, por convenção: $0! = 1$. Essa definição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ (com $n \geq 0$).

Exemplo 3.

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

As operações envolvendo fatoriais são bem definidas, mas não obedecem a propriedades lineares em relação ao símbolo fatorial. Portanto, em geral, não se pode substituir $a! + b!$ por $(a+b)!$, nem $a! - b!$ por $(a-b)!$, nem $a! \cdot b!$ por $(ab)!$, sendo necessário desenvolver o fatorial do número para depois realizar a operação, visto que a operação fatorial possui prioridade em relação às operações básicas. Por exemplo:

Exemplo 4. Adição: $3! + 4! = (3 \cdot 2 \cdot 1) + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 6 + 24 = 30$.
Observe que $3! + 4! \neq 7!$, pois como a operação fatorial possui prioridade nos cálculos, primeiramente é necessário calcular o fatorial do número para depois realizar a adição.

Exemplo 5. Subtração: $5! - 4! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) - (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 - 24 = 96$.
Novamente, observe que $5! - 4! \neq 1!$.

Exemplo 6. Multiplicação: $3! \cdot 2! = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) = 6 \cdot 2 = 12$.
Note que $3! \cdot 2! \neq 6!$.

Exemplo 7. Divisão: $4! \div 2! = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \div (2 \cdot 1) = 24 \div 2 = 12$.
Assim, observa-se que $\frac{4!}{2!} \neq 2!$.

2.5 Propriedade Importante do Fatorial - Definição Recursiva

O fatorial também pode ser definido de forma **recursiva**, ou seja, relacionando o fatorial de um número com o fatorial do anterior:

$$n! = n \cdot (n-1)!\text{ , com } 0! = 1.$$

Exemplo 8. Determine o valor de 6!.

Solução

$6! = 6 \cdot 5!$ e como no Exemplo 10, $5! = 120$, então $6! = 6 \cdot 120 = 720$.

Essa propriedade é muito usada em simplificações algébricas, como:

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42.$$

2.6 Permutação Simples

Considere-se a situação em que uma professora deseja organizar os 12 alunos de sua turma em 12 lugares distintos. Como cada assento é identificado e todos os estudantes são diferentes entre si, a questão consiste em determinar de quantas maneiras essa disposição pode ser feita.

A cada escolha de um aluno para determinado assento, reduz-se em uma unidade o número de alunos disponíveis para os lugares restantes. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número total de disposições possíveis é:

$$12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 2 \times 1 = 12!.$$

Esse tipo de situação caracteriza uma permutação simples, pois se trata da ordenação completa de elementos distintos.

Uma permutação simples de n elementos é qualquer sequência ou agrupamento ordenado desses elementos, todos distintos dois a dois. Nesse contexto, a ordem importa: sequências formadas pelos mesmos elementos em ordens diferentes são consideradas distintas. O número total de permutações simples de n elementos é dado por:

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Além disso, define-se:

$$P_0 = 0! = 1.$$

Cada anagrama formado a partir de letras distintas, ou qualquer reorganização completa de elementos diferentes, constitui exemplo típico de permutação simples.

Exemplo 9. Em um evento, 6 patinetes elétricos de cores diferentes precisam ser estacionados em 6 vagas numeradas. De quantas maneiras diferentes eles podem ser organizados?

Solução

Como os patinetes são de cores diferentes e as vagas são numeradas, cada organização representa uma disposição distinta. Logo, a quantidade é $6! = 720$.

Existem 720 maneiras diferentes de estacionar os patinetes.

Exemplo 10. Em um reality show, 12 participantes do time A e 12 participantes do time B precisam ser agrupados em duplas, sempre formando uma dupla com um de cada time. De quantas maneiras podem ser formadas essas duplas?

Solução

A primeira pessoa do time A tem 12 escolhas no time B, a segunda tem 11, e assim sucessivamente. Logo:

$$12 \times 11 \times \ldots \times 2 \times 1 = 12! \text{ maneiras.}$$

Existem 12! maneiras de formar as duplas.

Exemplo 11. Cinco amigos vão viajar, mas apenas um deles é motorista autorizado a dirigir o carro alugado. De quantas maneiras eles podem se organizar nos assentos do carro (5 lugares)?

Solução

- O motorista é fixo.
- As outras 4 pessoas podem se arranjar nos 4 lugares restantes:
-

$$4! = 24.$$

Existem 24 maneiras de organizar os amigos nos assentos.

Exemplo 12. A mentora Daniela deseja organizar em uma prateleira 5 livros sobre desenvolvimento pessoal, 3 livros sobre finanças e 2 livros sobre marketing, agrupando os livros de mesma área juntos. De quantos modos ela pode organizar esses livros?

Solução

Há 3! Maneiras de ordenar os três grupos temáticos. Dentro de cada grupo são 5! maneiras para desenvolvimento pessoal, 3! maneiras para finanças e 2! maneiras para marketing. Logo:

$$3! \times 5! \times 3! \times 2! = 8.640.$$

Existem 8.640 maneiras de organizar os livros.

Exemplo 13. Em um casamento, 5 padrinhos e 5 madrinhas devem formar uma fila para a foto oficial, alternando obrigatoriamente homem e mulher. De quantas maneiras essa fila pode ser organizada?

Solução

Há 2 maneiras de escolher se começa com padrinho ou madrinha. Além disso, os padrinhos podem ser permutados de 5! modos, assim como as madrinhas. Logo:

$$2 \times 5! \times 5! = 28.800.$$

Existem 28.800 maneiras de organizar a fila para a foto.

2.7 Permutação com Elementos Repetidos

Uma permutação com elementos repetidos ocorre quando, em um conjunto de n elementos, existem elementos iguais entre si, ou seja, que se repetem. Nesses casos, a troca de posição entre elementos iguais não gera uma nova sequência distinta. O número total de permutações é dado considerando o agrupamento desses elementos iguais.

Se um conjunto possui:

- n_1 elementos de um mesmo tipo,
- n_2 elementos de outro tipo,
- n_3 elementos de outro tipo,

e assim por diante até n_k tipos diferentes, então o número total de permutações possíveis é calculado por:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots \times n_k!}$$

onde:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Essa fórmula ajusta o valor de $n!$ (o total de permutações simples) dividindo pelas permutações internas dos elementos repetidos, para evitar a contagem duplicada de sequências idênticas.

2.7.1 Demonstração da Fórmula da Permutação com Elementos Repetidos

Considere um conjunto formado por n elementos, dos quais há n_1 elementos iguais de um primeiro tipo, n_2 elementos iguais de um segundo tipo, n_3 elementos iguais de um terceiro tipo, e assim sucessivamente, até n_k elementos iguais de um $k - ésimo$ tipo. Assim,

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$$

Deseja-se determinar de quantas maneiras distintas esses n elementos podem ser organizados em sequência. Se todos os n elementos fossem distintos, o número total de permutações seria

$$n!.$$

No entanto, como existem elementos repetidos, algumas dessas permutações são indistinguíveis. De fato, a troca de posição entre os n_1 elementos iguais do primeiro tipo não gera uma nova sequência; essas trocas internas podem ocorrer de $n_1!$ maneiras. Do mesmo modo, os n_2 elementos iguais do segundo tipo podem ser permutados entre si de $n_2!$ maneiras, sem produzir uma nova sequência distinta. O mesmo ocorre com os demais grupos de elementos repetidos.

Portanto, ao contar inicialmente $n!$ permutações, cada sequência distinta foi contada repetidamente,

$$n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!$$

vezes. Para corrigir essa contagem excessiva, divide-se o total $n!$ pelo produto dos fatoriais das quantidades de elementos repetidos. Assim, o número de permutações distintas é dado por

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots \times n_k!}$$

Logo, a fórmula da permutação com elementos repetidos é

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots \times n_k!}$$

em que n representa o número total de elementos e $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ representam as quantidades de elementos iguais em cada grupo.

2.7.2 Anagramas

Um exemplo recorrente no estudo de permutação é o de anagramas. Entende-se por anagrama qualquer sequência obtida pela reordenação das letras de uma palavra dada, sem inserções ou supressões de caracteres. Importa observar que a nova sequência não precisa constituir um vocábulo dicionarizado para ser considerada um anagrama: basta que resulte de uma permutação das letras originais.

Nesta seção, passaremos a considerar também palavras que apresentam letras repetidas, pois este será o foco principal do nosso estudo. Quando todas as letras são distintas, o número de anagramas corresponde a uma permutação simples do conjunto de letras, isto é:

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

No entanto, na presença de repetições, a contagem correta exige a aplicação de permutação com repetições, isto é,

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots \times n_k!}$$

onde n é o total de letras e n_i são as multiplicidades de cada letra repetida.

Exemplo 14. Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIDA?

Solução

A palavra VIDA possui quatro letras diferentes, portando é só aplicar permutação simples. Portanto:

$$P_4 = 4! = 24.$$

Existem 24 anagramas possíveis para a palavra VIDA.

Exemplo 15. Quantos anagramas podem ser formados com a palavra CEREJA?

Solução

Na palavra CEREJA, a letra E aparece duas vezes. Portanto:

$$P_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{720}{2} = 360.$$

Existem 360 anagramas possíveis para a palavra CEREJA.

2.8 Arranjo Simples

Considere-se uma prova final de atletismo com 6 corredores, ao final da qual serão atribuídas três medalhas: ouro, prata e bronze. O problema consiste em determinar quantos pódios distintos podem ser formados.

Nesse caso, importa não apenas quais atletas ocuparão as três primeiras posições, mas também a ordem em que elas serão preenchidas. Isso significa que a situação envolve escolha e ordenação simultâneas, caracterizando um arranjo simples.

O arranjo simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, é definido como qualquer agrupamento ordenado de p elementos distintos escolhidos entre os n disponíveis. Seu número é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Se $p > n$, define-se:

$$A_{n,p} = 0$$

pois, nos arranjos simples, não é possível selecionar e ordenar mais elementos distintos do que a quantidade disponível.

No caso do pódio:

- há 6 possibilidades para o ouro;
- restam 5 para a prata;
- restam 4 para o bronze.

Logo,

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Pela fórmula geral,

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

2.8.1 Demonstração Matemática da Fórmula do Arranjo Simples

Queremos calcular o número de formas de escolher e ordenar p elementos distintos entre n disponíveis.

- Para o primeiro lugar (L_1), temos n opções.
- Depois de escolhido o primeiro, para o segundo lugar (L_2), restam $n-1$ opções.
- Para o terceiro lugar (L_3), restam $n-2$ opções.

- E assim sucessivamente...

Quando chegamos ao $p - ésimo$ lugar (L_p), ainda restam $n - p + 1$ opções.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número total de maneiras de preencher os p lugares é:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1).$$

Agora observe: essa expressão pode ser vista como parte do fatorial $n!$, que é:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Ou seja, para obter apenas o produto até $(n - p + 1)$, basta dividir $n!$ pelo fatorial do que sobra, que é $(n-p)!$. Assim, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

■

2.9 Combinação Simples

Considere-se agora a situação em que, entre 10 projetos finalistas de uma Mostra Acadêmica, devem ser escolhidos apenas 4 para exposição em uma vitrine. Nesse caso, a ordem dos trabalhos selecionados não produz qualquer alteração no resultado da escolha; importa apenas quais projetos foram escolhidos. Trata-se, portanto, de uma combinação simples.

Em Análise Combinatória, uma combinação simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, é qualquer agrupamento não ordenado de p elementos distintos escolhidos entre os n disponíveis. Ao contrário do arranjo, a ordem não interfere na contagem.

O número de combinações simples é dado por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

Essa fórmula decorre do fato de que, ao contar todos os agrupamentos ordenados, cada subconjunto de p elementos é contado $p!$ vezes, uma para cada ordenação possível dos elementos escolhidos. Assim, para obter a contagem correta dos subconjuntos, divide-se o número de arranjos por $p!$.

Se $p > n$, define-se:

$$C_{n,p} = 0.$$

pois não é possível escolher mais elementos do que os disponíveis.
No problema da vitrine, tem-se:

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

Portanto, existem 210 seleções distintas de 4 projetos para a vitrine.

2.9.1 Demonstração da Fórmula da Combinação Simples

Deseja-se determinar quantos grupos de p elementos distintos podemos formar a partir de um total de n elementos, sem importar a ordem.

Sabe-se que número de arranjos simples de n elementos tomados p a p (isto é, considerando a ordem) é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Entretanto, no caso da combinação simples, a ordem dos elementos escolhidos não importa. Ou seja, cada grupo de p elementos podem ser permutado de $p!$ maneiras diferentes, mas continua representando o mesmo subconjunto.

Assim, para obter o número de combinações simples, devemos dividir o número de arranjos pelo número de maneiras de ordenar os p elementos escolhidos: $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$. Substituindo $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ pela sua fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!}.$$

Portanto, o número de combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

■

Vamos conferir mais alguns exemplos.

Exemplo 16. Uma sorveteria oferece 12 sabores diferentes de sorvete. Quantas taças contendo exatamente 3 sabores diferentes podem ser montados?

Solução

Nota-se que a ordem dos sabores escolhidos não importa (um sorvete de morango, chocolate e baunilha é o mesmo que baunilha, morango e chocolate). Logo, trata-se de uma combinação simples:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220.$$

Existem 220 formas de montar a taça com 3 sabores diferentes.

Exemplo 17. Em um concurso de robótica, 15 equipes participaram. Quantas maneiras diferentes existem de escolher 5 equipes para serem premiadas, sem se importar com a ordem?

Solução

Nota-se que não importa a ordem de premiação, apenas quem será escolhido. Logo, usamos a combinação simples:

$$C_{15,5} = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{15,5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360360}{120} = 3003.$$

Existem 3.003 maneiras diferentes de escolher as 5 equipes premiadas.

Exemplo 18. Em uma sala de cinema com 8 poltronas numeradas de 1 a 8, uma família deseja escolher 3 lugares para se sentar. De quantas maneiras eles podem escolher os lugares?

Solução

Como a ordem dos lugares escolhidos não importa (sentar nas poltronas 1, 2 e 5 é o mesmo que 5, 2 e 1), trata-se de uma combinação simples:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56.$$

Existem 56 maneiras diferentes de escolher as 3 poltronas.

Exemplo 19. Em um concurso, há uma prova com 20 questões, das quais o candidato deve escolher 12 para responder. De quantas formas diferentes ele pode fazer essa escolha?

Solução

Como a ordem de escolha não importa, é uma combinação simples:

$$C_{20,12} = \frac{20!}{(20-12)! \cdot 12!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{8! \cdot 12!}$$

$$C_{20,12} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5.079.110.400}{40320} = 125.970.$$

Existem 125.970 formas diferentes de escolher as 12 questões.

Exemplo 20. No jogo da Mega-Sena, sorteiam-se 6 números do conjunto de 60 números naturais de 1 a 60, desprezando-se a ordem do sorteio. Quantos são os resultados possíveis no sorteio da Mega-Sena?

Solução

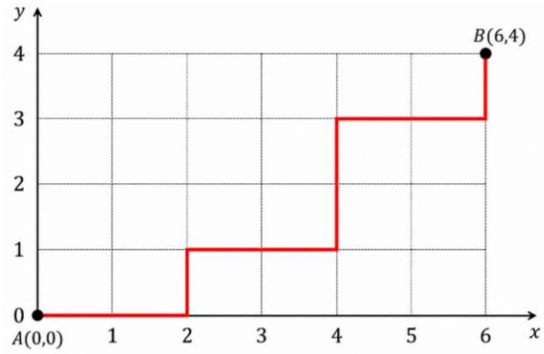
Nota-se que a ordem do sorteio dos seis números não importa. Cada sorteio de 6 números corresponde a uma combinação de 60 elementos, tomados 6 a 6. Logo, tem-se que:

$$C_{60,6} = \frac{60!}{(60-6)! \cdot 6!} = 50.063.860.$$

Assim, o número de resultados possíveis é igual a 50.063.860.

Exemplo 21. Considere uma malha cartesiana de dimensões 6×4, com ponto inicial $A = (0,0)$ e ponto final $B = (6,4)$. Sabendo que os deslocamentos permitidos são apenas para a direita e para cima, quantos caminhos distintos existem de **A** até **B**? Observe na figura abaixo, um caminho representado na malha cartesiana de dimensões 6×4.

Figura 1 - Caminho representando na malha cartesiana de dimensões 6×4.



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Solução

Para sair de $A = (0,0)$ e chegar a $B = (6,4)$, são necessários 6 deslocamentos para a direita e 4 deslocamentos para cima, totalizando 10 deslocamentos.

Representando os deslocamentos para a direita pela letra (D) e os deslocamentos para cima pela letra (C), cada caminho pode ser interpretado como uma sequência formada por 10 símbolos, sendo 6 símbolos (D) e 4 símbolos (C), um exemplo seria o da figura D, D, C, D, D, C, C, D, D, C. Assim, o problema consiste em contar as permutações de 10 elementos com repetição, pois há 6 movimentos iguais do tipo (D) e 4 movimentos iguais do tipo (C). Logo,

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Portanto, há 210 caminhos distintos partindo de A até B.

3. PROBABILIDADE

3.1 História e Conceito de Probabilidade

A Probabilidade constitui um dos campos mais relevantes da Matemática para a análise de fenômenos aleatórios e para a tomada de decisões em contextos de incerteza. Seu estudo permite modelar situações em que não se pode prever, com absoluta certeza, o resultado de um experimento, mas em que é possível quantificar racionalmente as chances de ocorrência de determinados eventos.

Conforme Lopes (2018), o termo probabilidade tem origem na palavra latina "*probare*", que significa testar ou comprovar. No cotidiano, o adjetivo "*provável*" é utilizado para indicar situações incertas, podendo ser substituído, dependendo do contexto, por expressões como *sorte*, *risco*, *azar*, *chance* ou *incerteza*.

Segundo Ross (2010), a teoria da probabilidade é, em essência, a formalização matemática de percepções intuitivas. Por meio de cálculos, ela quantifica de forma objetiva aquilo que muitas vezes captamos instintivamente, mas sem nos darmos conta.

O desenvolvimento da probabilidade como teoria matemática remonta aos séculos XVI e XVII. De acordo com Iezzi et al. (2016), um dos primeiros registros sobre o tema encontra-se na obra de Girolamo Cardano (1501–1576), que estudou problemas relacionados a jogos de azar. Aproximadamente um século depois, Blaise Pascal (1623–1662) e Pierre de Fermat (1601–1665) impulsionaram os estudos por meio de correspondências em que discutiam questões de apostas. Na obra de Pascal sobre o triângulo aritmético (1654), também constam tópicos relacionados à probabilidade.

Posteriormente, conforme Rocco (2020), outros matemáticos se interessaram pelo tema. Destacam-se Christiaan Huygens (1629–1695), autor de *De Ratiotiniis in Ludo Aleae* (*O raciocínio no jogo de azar*), Pierre-Simon Laplace (1749–1827), que publicou *Théorie Analytique des Probabilités* (*Teoria Analítica da Probabilidade*), e Carl Friedrich Gauss (1777–1855), conhecido pelo desenvolvimento do método de distribuição de probabilidades.

Laplace desempenhou papel central na consolidação do que hoje chamamos de Teoria Clássica da Probabilidade. De acordo com Rotunno (2007), suas obras *Teoria Analítica de Probabilidade* (1812) e *Ensaio Filosófico sobre Probabilidade* (1825) formalizaram conceitos básicos em dez princípios fundamentais, estabelecendo definitivamente a probabilidade no campo matemático.

No século XX, um marco importante foi a contribuição de Andrei Kolmogorov (1903–1987). Conforme Paulo (2013), Kolmogorov organizou e sistematizou todo o conhecimento desenvolvido até então, proporcionando maior clareza e consistência à teoria. Segundo Rotunno (2007), sua formulação axiomática, apresentada em 1933, é considerada a base da probabilidade moderna o que não será abordada neste trabalho.

De forma sintética, Morgado et al. (2016) definem a probabilidade como "o ramo da Matemática que constrói e estuda modelos aplicados à análise de experimentos ou fenômenos aleatórios".

3.2 Diferença Entre a Teoria Clássica e a Axiomática

No desenvolvimento histórico da Probabilidade, duas abordagens merecem destaque: a teoria clássica e a teoria axiomática.

A Teoria Clássica, associada a Laplace, baseia-se na contagem e na relação entre casos favoráveis e casos possíveis. Essa abordagem funciona adequadamente em espaços amostrais finitos e equiprováveis, como nos lançamentos de dados, moedas, cartas e sorteios. Sua principal limitação consiste em não se aplicar diretamente a eventos contínuos ou a situações em que os resultados não possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

A Teoria Axiomática, por sua vez, associada a Kolmogorov, fundamenta-se na teoria dos conjuntos e na teoria da medida. Sua abrangência é mais ampla, pois permite tratar espaços amostrais finitos, infinitos, discretos ou contínuos. Trata-se do modelo moderno da probabilidade, amplamente utilizado em estatística, ciência de dados, finanças, engenharia e física.

A linha do tempo apresentada na tabela abaixo, sintetiza esse percurso histórico ao relacionar matemáticos, datas e contribuições fundamentais para a consolidação da Probabilidade como campo matemático autônomo.

TABELA 01 - Linha do Tempo da Probabilidade

Ano	Matemático	Contribuição
1501–1576	Girolamo Cardano	Primeiros registros formais sobre probabilidade em jogos de azar.
1601–1665	Pierre de Fermat	Correspondência com Pascal discutindo problemas de jogos.
1623–1662	Blaise Pascal	Desenvolveu métodos e ideias que fortaleceram a base da probabilidade; obra sobre o triângulo aritmético.

Ano	Matemático	Contribuição
1629–1695	Christiaan Huygens	Publicou *De Ratiotiniis in Ludo Aleae* (*O raciocínio no jogo de azar*), primeiro livro dedicado à probabilidade.
1749–1827	Pierre-Simon Laplace	Sistematizou a Teoria Clássica da Probabilidade; obras *Teoria Analítica de Probabilidade* (1812) e *Ensaio Filosófico sobre Probabilidade* (1825).
1777–1855	Carl Friedrich Gauss	Desenvolveu a distribuição normal (ou curva de Gauss), amplamente utilizada em estatística e probabilidade.
1903–1987	Andrei Kolmogorov	Formalizou a teoria com a formulação axiomática (1933), base da probabilidade moderna.

Fonte: Elaborada pelo autor

Com base nesse panorama histórico e conceitual, passam a ser apresentados, a seguir, os conceitos fundamentais e as propriedades essenciais que sustentam os tópicos subsequentes.

3.3 Conceitos Básicos

O estudo da Probabilidade exige, inicialmente, a compreensão da natureza dos experimentos analisados. De modo geral, esses experimentos podem ser classificados em duas categorias principais: **experimentos aleatórios** e **experimentos determinísticos**.

Experimentos aleatórios são aqueles cuja repetição, mesmo sob condições semelhantes, não garante previsibilidade absoluta dos resultados. Conforme afirmam Farias e Laurencel (2007), trata-se de experimentos que, ainda quando repetidos inúmeras vezes, continuam produzindo resultados incertos e variáveis. Exemplos desse tipo de experimento incluem o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado não viciado e a retirada de uma carta de um baralho completo. Em todos esses casos, não é possível determinar com certeza, antes da realização do experimento, qual resultado será obtido.

Em contraste, os experimentos determinísticos são aqueles cuja repetição, sob as mesmas condições, conduz sempre ao mesmo resultado. Como destacam Morgado et al. (2016), esses experimentos são previsíveis por natureza. Entre os exemplos mais comuns estão a ebulição da água a 100 °C ao nível do mar, quando as condições são mantidas, e a queda de um corpo em determinada situação física, cuja velocidade pode ser descrita pelas leis da mecânica.

Neste trabalho, o foco recai exclusivamente sobre os experimentos aleatórios, uma vez que são eles que fundamentam o estudo da Probabilidade.

Um dos conceitos centrais nesse campo é o de **espaço amostral**. De acordo com Farias e Laurencel (2007), o espaço amostral representa o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Ele costuma ser indicado por símbolos como S, U ou, mais frequentemente, pela letra grega ômega maiúscula Ω. No lançamento de uma moeda, por exemplo, tem-se $\Omega = \{cara, coroa\}$; no lançamento de um dado, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Outro conceito fundamental é o de **evento**. Segundo Ross (2010), qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento. Em termos práticos, os eventos representam situações específicas que podem ou não ocorrer dentro do conjunto de possibilidades de um experimento.

Exemplo 22: Suponha que uma urna contenha 20 bolas numeradas de 1 a 20. O espaçamento amostral é:

$$\Omega = \{1,2,3,\dots,20\}.$$

Agora, considere alguns eventos definidos a partir desse conjunto:

Evento A: O número sorteado é primo. $A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$;
Evento B: O número sorteado é múltiplo de 3. $B = \{3,6,9,12,15,18\}$;
Evento C: O número sorteado é múltiplo de 5. $C = \{5,10,15,20\}$.

Um conceito importante associado aos eventos é o de eventos mutuamente exclusivos, ou seja, dois eventos que não podem ocorrer simultaneamente. Domingues (2023) afirma que, “se a ocorrência de um evento impede a ocorrência do outro, então eles são mutuamente exclusivos.”

Exemplo 23: No lançamento de um dado, considere os eventos:

Evento D: "Número par" → $D = \{2,4,6\}$
Evento E: "Número ímpar" → $E = \{1,3,5\}$

Observa-se que os conjuntos D e E não possuem elementos em comum, ou seja, $D \cap E = \emptyset$. Portanto, os eventos D e E são mutuamente exclusivos, pois a ocorrência de um deles impede a ocorrência do outro no mesmo lançamento.

3.4 A Definição Clássica de Probabilidade

Neste trabalho, adota-se inicialmente a probabilidade clássica como abordagem para introduzir o conceito de probabilidade, uma vez que ela permite calcular a chance de ocorrência de um evento a partir da razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, desde que os resultados do espaço amostral sejam equiprováveis. Nesse modelo, a probabilidade de um evento (E) ocorrer é dada por:

$$P(E) = \frac{números\ de\ casos\ favoráveis\ a\ E}{números\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

onde $n(\mathrm{E})$ é a quantidade de elementos do conjunto E e $n(\Omega)$ é a quantidade de elementos do conjunto de um espaço amostral.

Exemplo 24: Em uma urna com 5 bolas azuis e 3 bolas vermelhas, qual a probabilidade de se retirar uma bola vermelha?

Solução

O espaço amostral $|\Omega|$ é o composto por todas as possíveis bolas totalizando $n(\Omega) = 8$. O evento de interesse E é a retirada de uma bola vermelha, de modo que $n(E) = 3$. Assim,
A probabilidade é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

Portanto, a probabilidade de retirar uma bola vermelha é $\frac{3}{8}$, equivalente a 37,5%.

Exemplo 25: Ao lançar um dado de seis faces, qual a probabilidade de sair um número par?

Solução

O espaço amostral $|\Omega|$ é dado por todos os possíveis resultados obtidos no lançamento:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, assim, o número total de elementos do espaço amostral é $n(\Omega) = 6$.

Seja E o evento “o número obtido é par”. Os números pares presentes no espaço amostral são 2, 4 e 6, logo E $= \{2,4,6\}$, assim o número de casos favoráveis é $n(E) = 3$.
Assim, a probabilidade do evento é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a probabilidade de sair um número par no lançamento é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

3.5 Natureza do Valor da Probabilidade

No contexto da probabilidade clássica considerada neste trabalho, em que se analisam espaços amostrais finitos e equiprováveis, o valor de qualquer probabilidade pertence ao intervalo de 0 a 1, ou, de forma equivalente, de 0% a 100%. Nesse caso, podem-se destacar três situações fundamentais:

- probabilidade nula, $P(E) = 0$, quando o evento não possui casos favoráveis no espaço amostral considerado;
- probabilidade igual a 1, $P(E) = 1$, quando o evento coincide com todo o espaço amostral;
- probabilidades estritamente entre 0 e 1, isto é, $0 < P(E) < 1$, quando o evento possui alguns casos favoráveis, mas não todos os casos possíveis.

Exemplo 26. Considere uma malha cartesiana de dimensões 6×4, com ponto inicial $A(0,0)$ e ponto final $B(6,4)$. Suponha que os deslocamentos permitidos sejam apenas para a direita e para cima. Escolhe-se aleatoriamente um dos caminhos possíveis de A até B. Qual é a probabilidade de que esse caminho passe pelo ponto $P(3,2)$?

Solução

Espaço amostral

O espaço amostral é constituído por todos os caminhos possíveis de $A(0,0)$ até $B(6,4)$, considerando apenas deslocamentos para a direita e para cima. Conforme calculado no **Exemplo 21**, cada caminho corresponde a uma permutação com repetição de uma sequência formada por 10 movimentos, sendo 6 deslocamentos horizontais e 4 deslocamentos verticais. Assim, o espaço amostral possui 210 caminhos distintos de A até B.

Evento

Considera-se o evento E definido por: E = caminhos de A = (0,0) até B = (6,4) que passam pelo ponto P = (3,2).

Para determinar o número de elementos desse evento, isto é, a quantidade de caminhos que passam por P = (3,2), divide-se o percurso em duas etapas: a primeira de A = (0,0) até P = (3,2), e a segunda de P = (3,2) até B = (6,4).

Na primeira etapa, de A = (0,0) até P = (3,2), são necessários 3 deslocamentos para a direita e 2 deslocamentos para cima, totalizando 5 movimentos. Assim, o número de caminhos possíveis nessa etapa é dado por uma permutação com repetição:

$$n(A\ até\ P) = \frac{5!}{(3! \cdot 2!)} = 10.$$

Na segunda etapa, de P = (3,2) até B = (6,4), também são necessários 3 deslocamentos para a direita e 2 deslocamentos para cima, totalizando novamente 5 movimentos. Portanto, o número de caminhos possíveis nessa etapa é:

$$n(P\ até\ B) = \frac{5!}{(3! \cdot 2!)} = 10.$$

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade total de caminhos de A = (0,0) até B = (6,4) que passam pelo ponto P = (3,2) é:

$$n(E) = 10 \cdot 10 = 100.$$

Como o espaço amostral possui $n(\Omega) = 210$ caminhos distintos, a probabilidade de um caminho escolhido aleatoriamente passar pelo ponto P = (3,2) é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{100}{210} = \frac{10}{21}.$$

Portanto, a probabilidade de que um caminho escolhido aleatoriamente entre todos os caminhos possíveis de A = (0,0) até B = (6,4) passe pelo ponto P = (3,2) é igual a 10/21.

3.6 Operações Com Probabilidade

3.6.1 Probabilidade Condicional

Na prática, muitas situações exigem que se determine a probabilidade de um evento ocorrer levando em consideração que outro evento já tenha acontecido. Esse tipo de análise é fundamental em diversas áreas – como medicina, finanças e engenharia – e é formalizado pelo conceito de probabilidade condicional.

De acordo com Soares (2024), sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω, tal que $P(B) > 0$. A probabilidade de ocorrência do evento A, dado que o evento B já ocorreu, é representada por $P(A \mid B)$ e é definida pela relação:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Essa abordagem permite restringir o espaço amostral apenas aos casos compatíveis com o evento conhecido, refinando o cálculo probabilístico e proporcionando maior precisão nas conclusões.

Intuitivamente, pode-se pensar que a probabilidade condicional "filtra" o universo de possibilidades, considerando apenas aquelas que atendem a determinada condição prévia. Observa-se que ainda que se A e B forem eventos mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$, o que implica $P(A \cap B) = 0$. Nesse caso, a probabilidade condicional $P(A \mid B)$ será igual a zero.

Exemplo 27: Uma universidade divulgou, com base nas respostas do formulário de inscrição para seu vestibular, as seguintes quantidades de inscritos, considerando área de carreira e tipo de inscrição (treineiro × candidato a vaga), veja tabela abaixo.

Tabela 2 – Distribuição dos inscritos por área de carreira e tipo de inscrição

Área de Carreira	Treineiros	Candidatos à vaga	Total
Ciências Exatas	80	220	300
Ciências Humanas	50	150	200
Ciências Biológicas	70	130	200
Total	**200**	**500**	**700**

Fonte: Elaborada pelo autor no Microsoft Excel.

Deseja-se calcular a probabilidade de um inscrito ser candidato a uma vaga, dado que escolheu a área de Ciências Exatas.

Solução

O problema consiste em determinar a probabilidade de que um inscrito seja candidato à vaga, sabendo-se que ele pertence à área de Ciências Exatas. Denotando por A o evento "o inscrito é candidato a vaga" e por B o evento "o inscrito escolheu Ciências Exatas", temos que $n(\Omega) = 700$ representa o total de inscritos; $n(B) = 300$ representa o total de inscritos em Ciências Exatas; e $n(A \cap B) = 220$ representa o número de candidatos à vaga dentro de Ciências Exatas.

De acordo com a definição de probabilidade condicional, como $P(B) > 0$, tem-se:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Como o espaço amostral é equiprovável, cada probabilidade é dada pela razão entre o número de elementos do evento e o total de elementos do espaço amostral.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{300}{700} \qquad \text{e} \qquad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{220}{700}$$

Substituindo esses valores na fórmula da probabilidade condicional, obtém-se:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{220}{700}}{\frac{300}{700}} = \frac{220}{300} = \frac{11}{15}.$$

Portanto, a probabilidade de que um inscrito seja candidato à vaga, dado que ele pertence à área de Ciências Exatas, é de $\frac{11}{15}$.

3.6.2 A Probabilidade da Intersecção de Eventos Dependentes

A probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos A e B – representada pela interseção $A \cap B$ – não pode, em todos os casos, ser obtida simplesmente multiplicando $P(A)$

por $P(B)$. Essa multiplicação direta só é válida quando os eventos são independentes e isso veremos mais à frente.

Para situações gerais, utilizamos o conceito de **probabilidade condicional** para calcular $P(A \cap B)$. Pela definição:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) > 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $P(B)$, obtemos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Como $A \cap B = B \cap A$, também podemos escrever:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Portanto, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente os eventos A e B é dada pelo produto da probabilidade de ocorrência de um deles pela probabilidade de ocorrência do outro, condicionada ao primeiro.
Em termos práticos:

- Se conhecemos $P(B)$ e $P(A \mid B)$, usamos $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$.

- Se conhecemos $P(A)$ e $P(B \mid A)$, usamos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

Essa formulação é essencial para trabalhar com eventos dependentes, pois incorpora a influência que a ocorrência de um evento exerce sobre o outro.

Exemplo 28: Suponha que uma urna contenha apenas 6 fichas vermelhas e 4 fichas verdes. Sorteando, ao acaso, duas fichas dessa urna, uma após a outra e sem reposição, qual é a probabilidade de que a primeira ficha sorteada seja vermelha e a segunda, verde?

Solução

O espaço amostral $|\Omega|$ é o conjunto de todos os pares possíveis de fichas retiradas, levando em conta a ordem do sorteio (pois a sequência "primeira vermelha e segunda verde" é diferente de "primeira verde e segunda vermelha"). A quantidade total de fichas na urna é $6 + 4 = 10$. Como o sorteio é sem reposição, o número total de pares possíveis é: $n(\Omega) = 10 \times 9 = 90$, isso significa que existem 90 resultados possíveis para o par de fichas retiradas.

Sendo o evento A, a "1ª ficha vermelha", então $P(1ª\ Vermelha) = \frac{6}{10}$.

Calculando $P(B|A)$ que é "Probabilidade de a segunda ficha ser verde, dado que a primeira foi vermelha". Se a primeira ficha foi vermelha, restam: 5 fichas vermelhas, 4 fichas verdes num total de 9 fichas, logo: $P(2ª\ verde|1ª\ vermelha) = \frac{4}{9}$, agora aplicamos a regra da multiplicação para eventos dependentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$, ou seja,

$$P(1ª\ vermelha\ e\ 2ª\ verde) = P(1ª\ vermelha) \times P(2ª\ verde|1ª\ vermelha) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$$

Simplificando a fração:

$$P(A) = \frac{4}{15} \cong 0{,}266.$$

Isso significa que, em média, cerca de 26,6% dos sorteios resultarão na sequência primeira ficha vermelha e segunda verde.

3.6.3 Probabilidade de Eventos Independentes

Ainda segundo Soares (2024), dois eventos de um mesmo espaço amostral Ω são considerados independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade do outro. Formalmente, essa independência é expressa pela relação:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Partindo da definição de probabilidade condicional em um espaço amostral equiprovável e finito, com $P(B) > 0$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $P(B)$, obtemos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B). \tag{I}$$

Por outro lado, dois eventos A e B são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro. Formalmente, essa independência é expressa por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{II}$$

Comparando as duas expressões (I) e (II) para $P(A \cap B)$, tem-se:

$$P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B)$$

Como $P(B) > 0$, pode-se dividir ambos os lados por $P(B)$, obtendo:

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Assim, quando A e B são eventos independentes, a ocorrência de B não modifica a probabilidade de ocorrência de A.

A seguir, apresentam-se exemplos de aplicação da probabilidade de eventos independentes, em situações nas quais a ocorrência de um evento não altera a probabilidade de ocorrência do outro

Exemplo 29: Considere o experimento composto pelo lançamento simultâneo de uma moeda e de um dado não viciado. Deseja-se determinar a probabilidade de ocorrer, ao mesmo tempo, o evento A: “a moeda cair em cara” e o evento B: “o dado apresentar número par”.

Solução

No lançamento da moeda, a probabilidade de sair cara é:$P(A) = \frac{1}{2}$

No lançamento do dado, os números pares possíveis são 2, 4 e 6 de modo que:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Como o resultado da moeda não interfere no resultado do dado, os eventos A e B são independentes. Assim, pela definição de independência, tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Logo,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de a moeda cair em cara e o dado apresentar número par é igual a $\frac{1}{4}$, ou 25%.

4. O PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO

O Problema do ponto mais visitado será chamado daqui por diante de *MISSÃO (X,Y)*. O recurso *MISSÃO (X,Y)* é uma proposta lúdica e pedagógica desenvolvida para auxiliar no ensino e na compreensão de conceitos de análise combinatória e probabilidade. Por meio de uma dinâmica interativa, o jogo possibilita que os participantes explorem a relação entre movimentos em malhas quadriculadas e a contagem de possibilidades para alcançar determinados pontos, estimulando o raciocínio lógico, a intuição probabilística e a visualização espacial.

A atividade foi elaborada para ser aplicada em ambiente escolar, podendo ser adaptada para diferentes níveis de ensino. Ela favorece a aprendizagem significativa ao integrar teoria e prática, promovendo a construção do conhecimento de forma ativa, colaborativa e motivadora.

4.1 Regras da Atividade *MISSÃO(X,Y)*

A estratégia lúdica, *MISSÃO(X,Y),* é realizado em um plano cartesiano quadriculado de dimensões M x N onde $M > N$, no qual o ponto inicial é denominado $A = (0,0)$ e o ponto final é $B = (M, N)$. Segue um exemplo abaixo de uma malha 5 x 3.

Figura 2 – Representação da malha utilizada na estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)*

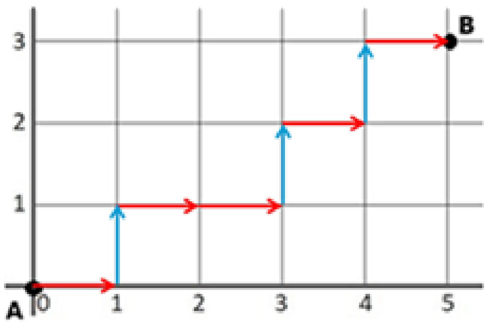
Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Para representar os deslocamentos, utiliza-se um saquinho opaco contendo M bolas vermelhas, que indicam um movimento de uma unidade para a direita no eixo X, e N bolas azuis, que correspondem a um movimento de uma unidade para cima no eixo Y.

No início de cada partida, cada participante escolhe um ponto qualquer da malha, exceto os pontos de início A e fim B, que são fixos. Em seguida, inicia-se o sorteio das bolas, que são retiradas do saquinho uma a uma, sem reposição. A cada sorteio, o movimento correspondente é executado: ao sair uma bola vermelha, o marcador avança uma unidade para a direita; ao sair uma bola azul, o marcador avança uma unidade para cima. Esse procedimento se repete até que todas as bolas sejam sorteadas, resultando em um caminho completo de A até B. Segue um exemplo abaixo de uma malha 5 x 3 com um caminho completo. A atividade se repete até que todas as bolas sejam sorteadas, resultando em um caminho completo de A até B.

A Figura 3 apresenta um exemplo de uma malha 5×3 com uma trajetória completa de $A(0,0)$ até $B(5,3)$. Nesse exemplo, as bolas são retiradas sem reposição, produzindo a seguinte sequência de deslocamentos, em que V representa uma bola vermelha e A, uma bola azul: (V, A, V, V, A, V, A, V)

Figura 3 – Exemplo de trajetória entre $A(0,0)$ e $B(5,3)$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

O objetivo da atividade é investigar se o ponto escolhido previamente pelo participante estará presente no caminho final formado pela sequência de deslocamentos sorteados. Considera-se que o participante acertou quando o ponto escolhido pertence ao percurso realizado. Caso mais de um participante tenha escolhido pontos presentes na mesma trajetória, todos têm suas previsões confirmadas naquela rodada. Se nenhum ponto escolhido estiver presente no caminho formado, considera-se que não houve acerto na rodada.

O recurso pedagógico *MISSÃO(X,Y)* pode ser adaptado a diferentes níveis de dificuldade alterando-se as dimensões da malha, premiando acertos de maior ou menor probabilidade de ocorrência ou promovendo discussões prévias sobre a chance de cada ponto ser visitado, favorecendo, assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico, da intuição probabilística e da compreensão dos conceitos de análise combinatória e probabilidade.

4.2 Observações Preliminares à Demonstração do Teorema 1

Nesta seção, será discutido qual ponto é o mais visitado por caminhos, nos retângulos. Conforme destacado por Hazzan (2013) e também por Santos, Mello e Murari (2007), a análise pode ser feita a partir da ideia de permutação com elementos repetidos. Nesse contexto, a quantidade $Q(x,y)$ de trajetos que passam por um ponto genérico intermediário $P(x,y)$ pertencente à malha cartesiana, em que x e y são inteiros não negativos tais que $0 \leq x \leq M$ e $0 \leq y \leq N$, com $P \neq A$ e $P \neq B$, corresponde ao produto entre duas parcelas: o número de caminhos possíveis que levam do ponto inicial (0,0) até (x,y) e o número de caminhos que partem de (x,y) até alcançar o ponto final (M,N). Em outras palavras, trata-se da multiplicação entre as possibilidades de chegada ao ponto e as de saída dele em direção ao destino.

Primeiramente, o número de caminhos que levam de $(0,0)$ até (x,y) é dado pensando-se na permutação do anagrama formado por *x* letras *D* e *y* letras *C*, sendo *D* para a direita e *C* para cima, isto é, uma permutação de $x+y$ elementos, sendo *x* repetidos e *y* repetidos. Como visto acima, a quantidade de caminhos será, portanto, a permutação com elementos repetidos:

$$P_{x+y}^{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}.$$

De maneira análoga, o número de caminhos que partem de (x,y) até (M,N) também é calculado pela permutação com elementos repetidos que, considerando os passos que restam em cada direção:

$$P_{M-x+N-y}^{M-x,N-y} = \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!\,(N-y)!}.$$

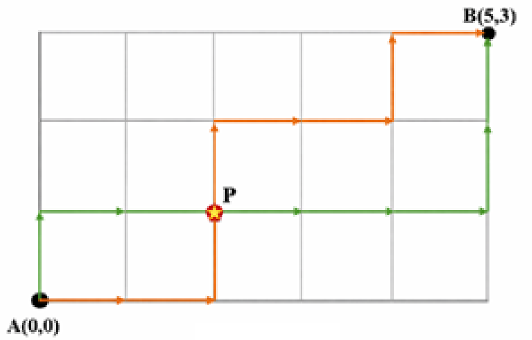
Portanto, a quantidade total de caminhos que passam por um ponto específico (x,y) será denotado por $Q(x,y)$ e é obtida, pelo princípio multiplicativo, multiplicando-se as duas parcelas:

$$Q(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!\,(N-y)!}$$

Essa expressão resume o raciocínio apresentado: primeiro se considera a quantidade de trajetos do ponto inicial $(0,0)$ até o ponto intermediário (x,y), depois a quantidade de trajetos a partir dele até o destino final (M,N), e, por fim, pelo princípio fundamental da contagem multiplicasse as possibilidades. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 30: Queremos calcular $Q(2,1)$, ou seja, a quantidade de caminhos de $A = (0,0)$ até $B = (5,3)$ que passam por $P(2,1)$. Na figura abaixo, observam-se dois caminhos, um em verde e outro em laranja, que passam pelo ponto P. Além disso, deseja-se determinar a probabilidade de que um caminho escolhido aleatoriamente entre todos os caminhos possíveis de A até B passe pelo ponto $P(2,1)$.

Figura 4 – Caminhos que passam por um ponto intermediário (x,y)



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Solução

Caminhos de $(0,0)$ até $(2,1)$: São 2 passos para a direita e 1 para cima, em qualquer ordem (total de 3 passos):

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

Caminhos de $(2,1)$ até $(5,3)$: Restam $5 - 2 = 3$ passos para a direita e $3 - 1 = 2$ para cima (total de 5 passos):

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Caminhos que passam por $(2,1)$ é;

$$Q(2,1) \ = P_3^{2,1} \cdot P_5^{3,2} = 3 \cdot 10 = 30.$$

O total de caminhos de $(0,0)$ a $(5,3)$ é

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Logo, a probabilidade de caminhos que passam por $(2,1)$ é

$$\frac{Q(2,1)}{P_8^{5,3}} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \cong 0{,}5357.$$

Portanto, há 30 caminhos que passam por $(2,1)$. Entre todos os 56 caminhos possíveis de A até B, e a probabilidade de caminhos que visita esse ponto é $\frac{15}{28}$.

Nosso objetivo é demonstrar que, em retângulos do tipo considerado, o ponto (1,0) é **um ponto de máxima visitação**, isto é, um dos pontos pelos quais passa a maior quantidade de caminhos possíveis, desconsiderando os vértices obrigatórios de início e fim, (0,0) e (M, N). Em outras palavras, deseja-se mostrar que a função $Q(x, y)$ atinge valor máximo em (1,0), embora outros pontos da malha possam apresentar a mesma quantidade de caminhos.

Antes de apresentar o argumento principal, convém estabelecer três observações preliminares e um exemplo, que auxiliarão na compreensão do argumento indutivo desenvolvido na demonstração.

Observação 1: Para todo ponto (x, y) no retângulo, vale a seguinte igualdade:

$$Q(M-x, N-y) = Q(x, y)$$

Justificativa. Basta aplicar diretamente a fórmula de $Q(x, y)$:

$$Q(M-x, N-y) = \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!\,(N-y)!} \cdot \frac{(x+y)!}{x!\,y!} = Q(x, y)$$

Isso mostra que o número de caminhos que passam por um ponto $P(x, y)$ é o mesmo que o número de caminhos que passam pelo ponto $P'(M-x, N-y)$. Esse ponto é obtido pela simetria em relação ao centro do retângulo, isto é, por uma rotação de 180º em torno de seu centro.

Dessa forma, cada caminho de $A(0,0)$ até $B(M, N)$ que passa por $P(x, y)$ possui um caminho correspondente que passa por $P'(M-x, N-y)$. Portanto, os dois pontos possuem a mesma quantidade de caminhos associados.

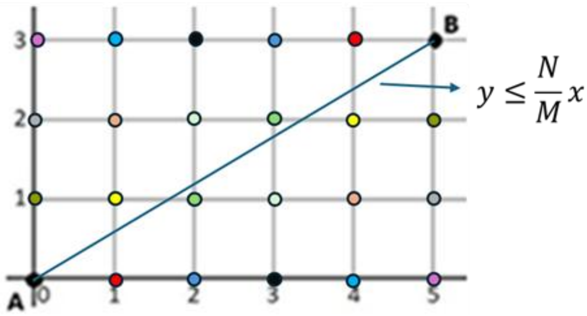
Observação 2: Se a desigualdade $Q(x, y) \leq Q(1,0)$ for válida para todos os pontos da malha situados na região abaixo ou sobre a diagonal que liga os pontos $(0,0)$ e (M, N), isto é, para os pontos que satisfazem

$$y \leq \frac{N}{M}x$$

então, por simetria, essa desigualdade também será válida para os pontos situados na região acima dessa diagonal.

A Figura 5 apresenta um exemplo dessa divisão, em que a diagonal que liga A a B separa a malha em duas regiões: a região abaixo ou sobre a diagonal, caracterizada por $y \leq \frac{N}{M}x$, e a região acima da diagonal $y > \frac{N}{M}x$.

Figura 5 – Exemplo da divisão da malha pelas regiões abaixo ou sobre a diagonal e acima da diagonal



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa. Seja (x_0, y_0) um ponto acima da diagonal, isto é, satisfazendo $y_0 > \frac{N}{M}x_0$. Defina o ponto,

$$(x_1, y_1) = (M - x_0,\, N - y_0)$$

Observe que,

$$y_0 > \frac{N}{M}x_0 \quad \Leftrightarrow \quad N - y_0 < N - \frac{N}{M}x_0 \quad \Leftrightarrow \quad N - y_0 < \frac{N}{M}(M - x_0) \underset{(5)}{\Leftrightarrow} \quad y_1 < \frac{N}{M}x_1$$

Portanto, o ponto (x_1, y_1) encontra-se abaixo da diagonal e estamos supondo que $Q(x_1, y_1) \leq Q(1,0)$. Além disso, pela Observação 1 (simetria), temos que $Q(x_1, y_1) = Q(x_0, y_0)$, consequentemente $Q(x_0, y_0) \leq Q(1,0)$. Portanto, basta restringir a análise aos pontos que satisfazem

$$y \leq \frac{N}{M}x.$$

Observação 3: No subconjunto determinado pela condição anterior, é suficiente provar a desigualdade apenas para pontos com $x \neq 0$ e $y \neq N$.

Justificativa. Pela Observação 2, já podemos nos restringir aos pontos que satisfazem

$$y \leq \frac{N}{M}x.$$

Dentro desse subconjunto:

- Se $x = 0$, então $y \leq \frac{N}{M} \cdot 0 = 0$, logo $y = 0$, o ponto é $(0,0)$, que está fora do conjunto de pontos a serem testados (é o ponto de partida).
- Se $y = N$, da condição $y \leq \frac{N}{M}x$ obtemos $N \leq \frac{N}{M}x \Longrightarrow x \geq M$, e como $x \leq M$ no retângulo, isso é a antissimétrica da relação de ordem, segue $x = M$. Assim, o ponto (M, N), também está fora do conjunto de pontos a testar (é o ponto de chegada).

Portanto, ao demonstrarmos o teorema 1 para os pontos com $x \neq 0$ e $y \neq N$, sabendo que $y \leq \frac{N}{M}x$, teremos coberto todos os casos (os demais são exatamente os vértices excluídos $(0,0)$ e (M, N)).

Com base nessas observações, o problema fica reduzido à análise dos pontos do retângulo situados abaixo ou sobre a diagonal que liga $(0,0)$ a (M, N), excluídos os vértices extremos. Para organizar essa análise, considera-se a soma $x + y = R$, que agrupa os pontos da malha em camadas sucessivas a partir da origem.

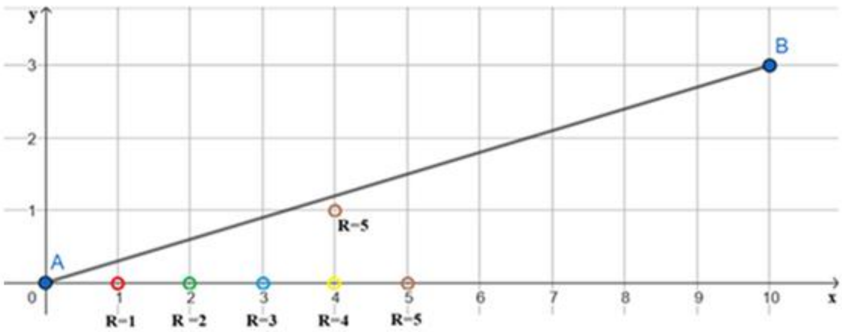
Para auxiliar na compreensão dessa organização, apresenta-se a seguir um exemplo visual. A Figura 6 ilustra como os pontos podem ser agrupados de acordo com o valor da soma $x + y = R$, permitindo visualizar quais pontos pertencem a cada camada e quais deles satisfazem a condição $y \leq \frac{N}{M}x$.

Na Figura 6, considera-se o retângulo 10×3, o ponto $(1,0)$, destacado em vermelho, pertence à camada $R = 1$, enquanto o ponto $(2,0)$, destacado em verde, pertence à camada $R = 2$. Esses dois casos serão verificados inicialmente na demonstração, constituindo os casos iniciais da indução. Para $R = 3$, aparece o ponto $(3,0)$ (em azul); para $R = 4$, o ponto $(4,0)$ (em amarelo) e para $R = 5$, surgem dois pontos admissíveis $(5,0)$ e $(4,1)$ destacados em marrom; e assim sucessivamente desde que satisfaçam a condição $y \leq \frac{N}{M}x$.

Assim, para cada valor fixo de R, os pontos a serem considerados correspondem às soluções inteiras não negativas da equação $x + y = R$ que ainda pertencem à região abaixo ou sobre a diagonal. Desse modo, a Figura 6 não constitui a demonstração do resultado, mas serve como apoio visual para compreender a organização dos pontos que será utilizada na formulação do Teorema 1.

Por exemplo, se a diagonal da Figura 6 abaixo, tivesse menor inclinação (isto é, $\frac{N}{M}$ menor), poderíamos ter apenas um ponto com $R = 5$, normalmente $(5,0)$, pois $(4,1)$ deixaria de satisfazer a condição $y \leq \frac{N}{M}x$. Em particular, se $\frac{N}{M} < \frac{1}{4}$, sobra só $(5,0)$. Caso contrário, se a diagonal da Figura abaixo tivesse maior inclinação (isto é, $\frac{N}{M}$ maior), poderíamos ter mais um ponto com $R = 5$, além de $(5,0)$ e $(4,1)$ o ponto $(3,2)$ iria satisfazer a condição $y \leq \frac{N}{M}x$. Em particular, se $\frac{2}{3} < \frac{N}{M} < 1$, teríamos agora três pontos.

Figura 6 – Organização dos pontos admissíveis por camada $x + y = R$ em uma malha 10×3



Fonte: Adaptado de Melo e Santos (2024).

A partir dessas observações, pode-se enunciar o resultado matemático que fundamenta a análise do ponto de máxima visitação em malhas retangulares.

4.3 Demonstração do Ponto Mais Visitado em Retângulos

Teorema 1 – Sejam $M, N \in \mathbb{N}$ com $M \geq N + 1$. Para todo $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq N$, com $(x, y) \neq (0,0)$ e $(x, y) \neq (M, N)$, tem-se

$$Q(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!(N-y)!} \leq \frac{(M-1+N)!}{(M-1)!N!} = Q(1,0) \tag{1}$$

Portanto, o ponto $(1,0)$, e por simetria também o ponto $(M-1, N)$, pertencem ao conjunto dos pontos que maximizam Q. Assim, esses pontos são pontos de máxima visitação, embora possam existir outros pontos da malha que atinjam o mesmo valor máximo.

Demonstração:

Para provar o Teorema 1, basta mostrar que, para todo ponto genérico $P(x, y)$ da malha, distinto dos vértices obrigatórios de início e fim, isto é, $P \neq (0,0)$ e $P \neq (M, N)$, vale a desigualdade

$$Q(x, y) \leq Q(1,0). \tag{2}$$

A demonstração será feita por indução sobre a soma $x + y$, tomando como base a demonstração apresentada por Melo e Santos (2024). Como x e y são inteiros não negativos e $P \neq (0,0)$, tem-se $x + y \geq 1$. Assim, a soma $x + y$ pode ser utilizada como parâmetro de indução.

Caso Base 1: Se $x + y = 1$. Nesse caso, como $M > N$ e $y \leq \frac{N}{M}x$, então $y < x$, portanto, o único ponto a ser testado é $(1,0)$. Temos então:

$$Q(x, y) = Q(1,0) \leq Q(1,0) = \frac{(M - 1 + N)!}{(M - 1)!\, N!}$$

o que mostra que a desigualdade é válida nesse caso inicial.

Caso Base 2: Caso $x + y = 2$, os pontos possíveis são $(2,0)$, $(1,1)$ e (0,2). No entanto, para $(1,1)$, a condição $y \leq \frac{N}{M}x$ exigiria que $1 \leq \frac{N}{M}$ o que levaria a $M \leq N$. Isso contradiz a hipótese $M > N$, e para (0,2) temos que $2 \leq \frac{N}{M} \cdot 0$ e teríamos $2 \leq 0$ que é absurdo. Logo, resta apenas o ponto $(2,0)$ a ser avaliado em:

$$Q(x, y) = \frac{(x + y)!}{x!\, y!} \cdot \frac{(M - x + N - y)!}{(M - x)!\, (N - y)!}.$$

Para esse ponto:

$$Q(2,0) = \frac{2!\, (M - 2 + N)!}{2!\, (M - 2)!\, N!} = \frac{(M - 2 + N)!}{(M - 2)!\, N!}.$$

Multiplicando e dividindo o numerador por $(M - 1)(M - 1 + N)$, temos que:

$$Q(2,0) = \frac{(M-1)(M-1+N) \cdot (M-2+N)!}{(M-1)(M-1+N) \cdot \ (M-2)!\, N!}$$

$$Q(2,0) = \frac{(M-1)(M-1+N)!}{(M-1)!\,(M-1+N)N!}$$

$$Q(2,0) = \frac{(M-1+N)!}{(M-1)!\,N!} \cdot \frac{(M-1)}{(M-1+N)} = Q(1,0) \cdot \frac{(M-1)}{(M-1+N)}.$$

Como $\frac{(M-1)}{(M-1+N)} < 1$, então;

$$Q(2,0) = Q(1,0) \cdot \frac{(M-1)}{(M-1+N)} < Q(1,0) \cdot 1 = Q(1,0).$$

Logo, $Q(2,0) \leq Q(1,0)$ e, portanto, vale o teorema, neste caso.

Seja $R \geq 2$, suponhamos que a desigualdade valha para todos os pontos (x, y) com $x + y = R$ e $y \leq \frac{N}{M}x$. Queremos provar que ela também é válida para todos os pontos (x, y) com $x + y = R + 1$.

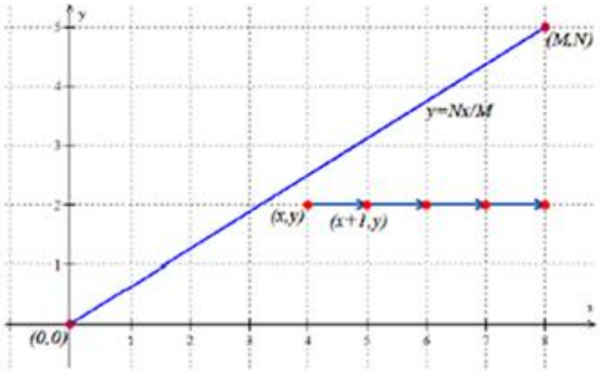
Pela hipótese de indução (HI), suponha válida a desigualdade

$$\frac{(x+y)!}{x! \cdot y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)! \cdot (N-y)!} \leq Q(1,0) \tag{3}$$

para todos os pares (x, y) com $x + y = R \geq 2$ e que satisfaçam $y \leq \frac{N}{M}x$. Queremos provar que a desigualdade análoga vale para todo ponto (x', y') com $x' + y' = R + 1$ e $y' \leq \frac{N}{M}x'$.

Consideremos o avanço horizontal de uma unidade, isto é, $(x', y') = (x + 1, y)$. Note que, se $y \leq \frac{N}{M}x$, então também $y \leq \frac{N}{M}(x + 1)$; isto é, ao mover uma unidade para a direita, permanecemos abaixo (ou sobre) a diagonal $y \leq \frac{N}{M}x$. A Figura 7 ilustra que, para y fixo, os pontos (x, y), $(x + 1, y)$, $(x + 2, y)$,… continuam na região válida.

Figura 7 – Passo de Indução Sob a Reta $y = \frac{N}{M}x$ de inclinação $\frac{N}{M}$



Fonte: Melo e Santos (2024).

Fazendo isso, o Teorema fica provado para qualquer $0 \leq y < N$, logo, para todo o retângulo. Sendo assim, seguindo a indução, após a substituição, (3) fica da seguinte forma:

$$Q(x+1,y) = \frac{\big((x+1)+y\big)!}{(x+1)! \cdot y!} \cdot \frac{(M-(x+1)+N-y)!}{\big(M-(x+1)\big)! \cdot (N-y)!} \tag{4}$$

Multiplicando o numerador e o denominador tanto por $M - x$ quanto por $M - x + N - y$, e trabalhando os fatoriais e comparando $Q(x + 1, y)$ com $Q(x, y)$, temos que;

$$Q(x+1,y) = \frac{\big((x+1)+y\big)!}{(x+1)! \cdot y!} \cdot \frac{(M-(x+1)+N-y)!}{\big(M-(x+1)\big)! \cdot (N-y)!} \cdot \frac{M-x}{M-x} \cdot \frac{M-x+N-y}{M-x+N-y}$$

$$Q(x+1,y) = \frac{(x+y)!}{x! \cdot y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)! \cdot (N-y)!} \cdot \frac{M-x}{M-x+N-y} \cdot \frac{x+y+1}{x+1}$$

$$Q(x+1,y) = Q(x,y) \cdot \frac{M-x}{M-x+N-y} \cdot \frac{x+y+1}{x+1}.$$

Como pela HI temos $Q(x, y) \leq Q(1,0)$, basta mostrar que o fator extra é ≤ 1, ou seja,

$$\frac{M-x}{M-x+N-y} \cdot \frac{x+y+1}{x+1} \leq 1. \tag{5}$$

Se (5) é verdadeira, então imediatamente

$$Q(x+1,y) \leq Q(x,y) \leq Q(1,0)$$

fechando o passo indutivo.

A desigualdade (5) é equivalente (cruzando termos positivos) a;

$$(M-x)(x+y+1) \leq (x+1)(M-x+N-y)$$

Reorganizando os termos, obtemos a forma linear:

$$(M+1)y \leq N(x+1) \tag{6}$$

Portanto, tudo se reduz a verificar (6).

Como $x \leq M$, somando Mx a ambos os membros se tem;

$$Mx + x \leq M + Mx \Leftrightarrow x(M+1) \leq M(1+x) \Leftrightarrow \frac{x}{M} \leq \frac{x+1}{M+1} \tag{7}$$

Multiplicando por N a desigualdade (7) em ambos os lados temos:

$$N\frac{x}{M} \leq N\frac{x+1}{M+1} \Leftrightarrow \frac{N}{M}x \leq \frac{N}{M+1}(x+1) \tag{8}$$

Da hipótese geométrica, $y \leq \frac{N}{M}x$ e comparando com (8), temos que,

$$y \leq \frac{N}{M}x \leq \frac{N}{M+1}(x+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y(M+1) \leq N(x+1)$$

que é exatamente (6).

Logo, (5) vale, pois o fator multiplicativo é ≤ 1. Assim, fica demonstrado por indução sobre R que,

$$Q(x+1,y) \leq Q(x,y) \leq Q(1,0)$$

■

Mostramos que, se a desigualdade (3) vale para todos os pontos com $x + y = R$, então também vale para todos os pontos com $x + y = R + 1$ que satisfaçam $y \leq \frac{N}{M}x$. Com os casos iniciais já verificados, a indução garante a validade para todas as somas $x + y \geq 1$ na região $0 \leq y < N$ e $y \leq \frac{N}{M}x$. Por fim, usando a simetria $Q(M - x, N - y) = Q(x, y)$, estendemos o resultado a todo o retângulo (excluídos os vértices $(0,0)$ e (M, N)). Portanto;

$$Q(x, y) \leq Q(1,0)$$

o que conclui a demonstração do Teorema 1.

O resultado referente aos pontos de máxima visitação em malhas retangulares é assumido, neste trabalho, a partir de Melo e Santos (2024), que apresentam a demonstração formal do caso similar. Nesta dissertação, esse resultado é retomado como fundamento teórico e reinterpretado no contexto didático da estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)*, com ênfase em sua aplicação pedagógica no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade. Desse modo, privilegia-se aqui a compreensão combinatória, probabilística e didática do problema, enquanto a demonstração completa do resultado pode ser encontrada na referência original.

5. AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

5.1 Importância das Sequencias Didáticas no Processo de Ensino e Aprendizagem

A sequência didática tem sido reconhecida como uma importante estratégia de organização do ensino, pois permite estruturar o trabalho pedagógico de forma articulada, intencional e progressiva. Nessa perspectiva, Zabala (1998, p. 18) afirma que "uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de determinados objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor quanto pelos alunos". Essa definição evidencia que a sequência didática não consiste em atividades isoladas ou improvisadas, mas em um percurso previamente planejado, no qual cada etapa possui sentido dentro do processo de aprendizagem. Assim, sua relevância está justamente na possibilidade de conferir coerência ao ensino, tornando mais claros os objetivos que orientam o trabalho em sala de aula.

Nessa mesma direção, Dolz e Schneuwly (2004, p. 97) destacam que "a sequência didática constitui um dispositivo de ensino organizado para permitir que os alunos aprendam, de forma progressiva, um conjunto de capacidades em relação a um gênero ou conteúdo específico". Tal compreensão amplia a ideia de organização ao evidenciar o caráter processual da aprendizagem. Isso significa que o conhecimento não é construído de forma instantânea, mas por meio de etapas sucessivas, em que o aluno avança gradativamente em sua compreensão. Desse modo, a sequência didática favorece não apenas a apresentação sistematizada dos conteúdos, mas também o desenvolvimento progressivo das capacidades cognitivas e operatórias dos estudantes.

A importância desse processo está diretamente relacionada à intencionalidade da ação docente. Conforme Libâneo (2009, p. 13), "os objetivos, gerais ou específicos, traduzem intenções sociais e políticas do ensino, expressando a dimensão de intencionalidade da ação docente". A partir dessa perspectiva, compreende-se que o trabalho do professor exige planejamento fundamentado, uma vez que ensinar envolve escolhas conscientes sobre o que ensinar, por que ensinar e de que maneira conduzir a aprendizagem. Nesse contexto, a sequência didática se apresenta como uma materialização dessa intencionalidade pedagógica, pois organiza as ações de ensino em função de objetivos claramente definidos e adequados às necessidades formativas dos alunos. Além disso, caracteriza-se por sua flexibilidade, podendo ser desenvolvida em uma ou várias aulas, conforme a natureza do conteúdo e os propósitos pedagógicos estabelecidos.

Outro aspecto essencial diz respeito à diversidade presente em sala de aula. Nem todos os alunos aprendem no mesmo ritmo, da mesma maneira ou com os mesmos recursos. Nesse sentido, Ferraz (2020, p. 73) afirma que "uma sequência bem planejada permite ao professor considerar as diversidades da turma e adaptar as atividades às necessidades individuais, promovendo equidade no processo de aprendizagem". Essa ideia é particularmente relevante, pois destaca que a sequência didática não deve ser compreendida apenas como organização de conteúdos, mas também como uma possibilidade de tornar o ensino mais sensível às diferenças entre os estudantes. Quando bem elaborada, ela permite flexibilizações, adaptações e intervenções que respeitam as singularidades da turma, contribuindo para uma prática pedagógica mais inclusiva e equitativa.

Diante disso, pode-se afirmar que a sequência didática constitui uma ferramenta pedagógica fundamental tanto para o professor quanto para o aluno. Para o professor, ela representa organização, intencionalidade, acompanhamento e possibilidade de intervenção qualificada. Para o aluno, representa um percurso de aprendizagem mais claro, progressivo, significativo e contextualizado. No ensino de Matemática, em especial, sua importância se evidencia na construção gradual dos conceitos, no fortalecimento do raciocínio lógico e na ampliação da capacidade de resolução de problemas. Assim, a sequência didática se consolida como uma estratégia indispensável para a promoção de um ensino mais estruturado, reflexivo e comprometido com a aprendizagem de todos.

5.2 Estrutura Utilizada na Organização das Sequências Didáticas

As sequências didáticas apresentadas neste capítulo foram organizadas com o objetivo de oferecer ao professor um percurso claro, progressivo e aplicável em sala de aula. Para isso, adotou-se uma estrutura comum nas duas propostas: inicialmente, apresenta-se a identificação geral da sequência didática e, em seguida, descrevem-se as aulas que compõem o percurso de ensino.

Na identificação geral da sequência didática, foram contemplados os seguintes elementos: área do conhecimento, componente curricular, ano escolar, turma, quantidade de aulas, conteúdos desenvolvidos, competências e habilidades da BNCC, objetivo geral, objetivos específicos, público-alvo, recursos didáticos, metodologia, avaliação e temática integradora. Essa organização permite ao professor compreender, antes da aplicação das aulas, quais são os objetivos da proposta, quais conteúdos serão trabalhados, quais recursos serão necessários e de que forma a aprendizagem dos estudantes poderá ser acompanhada.

Cada aula também foi estruturada seguindo um padrão próprio, composto por: título da aula, duração, objetivo da aula, conteúdos mobilizados, desenvolvimento, fechamento e sistematização e avaliação. Essa organização foi adotada para garantir clareza na condução do trabalho pedagógico e favorecer a progressão dos conceitos ao longo da sequência.

O título da aula indica o foco principal do encontro. A duração define o tempo previsto para sua realização. O objetivo da aula apresenta aquilo que se espera desenvolver com os estudantes naquele momento específico. Os conteúdos mobilizados indicam os conceitos matemáticos envolvidos na aula, permitindo ao professor visualizar quais conhecimentos serão retomados, aprofundados ou formalizados.

O desenvolvimento da aula foi organizado em etapas sucessivas. Essas etapas têm a função de orientar a ação do professor, indicando como iniciar a discussão, quais situações propor aos estudantes, como conduzir a investigação e de que maneira avançar do conhecimento intuitivo para a formalização matemática. Em geral, as etapas seguem uma progressão que parte da exploração concreta do jogo *MISSÃO(X,Y)*, passa pela discussão coletiva e chega à sistematização dos conceitos.

O fechamento e sistematização aparecem ao final de cada aula com a finalidade de retomar as principais ideias construídas, organizar os conceitos trabalhados e preparar os estudantes para a aula seguinte. Esse momento é importante porque ajuda a consolidar a aprendizagem e a dar continuidade ao percurso didático.

Por fim, a avaliação foi pensada com caráter diagnóstico, processual e formativo. Em cada aula, ela considera a participação dos estudantes, a compreensão dos conceitos, a clareza dos registros, a capacidade de justificar procedimentos e a relação estabelecida entre o jogo e os conteúdos matemáticos. Dessa forma, a avaliação não se limita à verificação de respostas finais, mas acompanha o processo de construção do conhecimento ao longo da sequência.

Assim, a estrutura adotada nas sequências didáticas busca oferecer ao professor um roteiro organizado, mas flexível, que pode ser ajustado conforme o tempo disponível, o nível da turma e os objetivos pedagógicos pretendidos. Essa organização favorece a aplicação do jogo *MISSÃO(X,Y)* como recurso didático para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, articulando experimentação, investigação, formalização e avaliação da aprendizagem.

A seguir, apresentam-se duas propostas de sequências didáticas organizadas a partir da estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)*: a primeira voltada ao ensino de Análise Combinatória, estruturada em 7 aulas, e a segunda destinada ao ensino de Probabilidade, organizada em 6 aulas. A primeira é voltada ao ensino de Análise Combinatória e busca conduzir os estudantes, de forma progressiva, da exploração concreta dos caminhos na malha à compreensão de conceitos como Princípio Fundamental da Contagem, permutação, anagramas, arranjo, combinação e contagem de caminhos que passam por um ponto intermediário.

Na continuidade, apresenta-se uma segunda proposta, centrada no conceito de Probabilidade, que toma o mesmo jogo como eixo estruturador, mas desloca o foco para a leitura probabilística dos caminhos gerados na malha, explorando noções como acaso, espaço amostral, eventos, casos favoráveis e probabilidade clássica. Desse modo, busca-se evidenciar o potencial pedagógico do jogo *MISSÃO(X,Y)* como recurso para articular, em contextos investigativos e significativos, o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico.

5.3 Sequência Didática para o Ensino de Análise Combinatória a partir da Estratégia Lúdica *MISSÃO(X,Y)*

Identificação da Sequência Didática

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

Componente curricular: Matemática.

Ano: 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Turma: Turmas do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Quantidade de aulas: 7 aulas de 50 minutos cada.

Conteúdos desenvolvidos

Plano cartesiano; leitura e representação de pontos (x, y); caminhos em malhas retangulares; Princípio Fundamental da Contagem; permutação simples; permutação com repetição; anagramas; arranjo simples; combinação simples; interpretação de caminhos como sequências de passos D direita e C cima; decomposição de percursos em dois trechos independentes; formalização da expressão $Q(x, y)$ para a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário.

Competências da BNCC

A sequência didática articula-se com competências da BNCC relacionadas à investigação, à resolução de problemas, ao uso de estratégias matemáticas e à interpretação de situações em diferentes contextos. Favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação matemática, da leitura de representações no plano cartesiano e da capacidade de relacionar experiências concretas de jogo a estruturas formais da Análise Combinatória.

Habilidades

As habilidades listadas, a seguir, constam na BNCC (Brasil, 2018) com seus respectivos códigos:

- **EM13MAT310** – Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Objetivo geral

Promover a compreensão de conceitos fundamentais da Análise Combinatória a partir do jogo *MISSÃO (X,Y)*, articulando experimentação, representação geométrica, linguagem combinatória e formalização matemática no estudo da contagem de caminhos em malhas retangulares.

Objetivos específicos

- Apresentar o jogo *MISSÃO (X,Y)* e explorar sua dinâmica em malhas retangulares.
- Retomar ideias iniciais de Análise Combinatória, especialmente o Princípio Fundamental da Contagem e a distinção entre situações em que a ordem importa e situações em que a ordem não importa.
- Relacionar a noção de anagrama com repetição à representação dos caminhos do jogo por sequências de passos D e C.
- Sistematizar formalmente os conceitos de permutação, anagramas, arranjo e combinação.
- Compreender a contagem de caminhos em malhas retangulares como problema combinatório.
- Analisar caminhos que passam por um ponto intermediário (x, y), decompondo o percurso em dois trechos independentes.
- Formalizar a expressão $Q(x, y)$ como modelo para a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário.
- Fazer com que os alunos possam intuir qual é o ponto mais visitado ou o mais provável de ser tocado por um caminho aleatório ao se escolher a trajetória por meio de retiradas aleatórias de bolas azuis e vermelhas sem reposição.

Público-alvo

Estudantes do 2º e do 3º ano do Ensino Médio, turmas que já tenham tido contato inicial ou não com os conteúdos básicos de Análise Combinatória e estejam em processo de consolidação e aprofundamento desses conceitos.

Recursos didáticos

Folha de aplicação do jogo *MISSÃO (X,Y)*; malhas retangulares impressas; saquinho com bolas coloridas representando movimentos para a direita e para cima; quadro; projetor, quando disponível; folhas de registro; calculadora, se necessário.

Metodologia usada

A sequência didática fundamenta-se em uma abordagem investigativa e progressiva, organizada de modo a articular experimentação, retomada conceitual, sistematização formal e aplicação matemática. Inicialmente, os estudantes entram em contato com o jogo $MISSÃO\ (X,Y)$ em sua dimensão concreta, explorando trajetórias em malhas retangulares e registrando caminhos possíveis. Em seguida, são retomadas ideias iniciais de Análise Combinatória, com ênfase na distinção entre diferentes estruturas de contagem e na leitura de situações em que a ordem interfere ou não no resultado.

Posteriormente, a proposta avança para a relação entre os caminhos do jogo e os anagramas com repetição, estabelecendo uma ponte conceitual entre a experiência lúdica e a formalização matemática. Na continuidade, os conceitos de permutação, anagramas, arranjo e combinação são formalizados e, por fim, aplicados ao problema da contagem de caminhos que passam por um ponto intermediário, culminando na construção da expressão $Q(x,y)$. Dessa forma, a metodologia privilegia a participação ativa dos estudantes, a formulação de hipóteses, a comparação de estratégias e a passagem gradual do concreto ao abstrato.

Avaliação

A avaliação assume caráter diagnóstico, processual e formativo, considerando a participação dos estudantes nas discussões, a compreensão das regras do jogo, a capacidade de representar caminhos por sequências de passos, a identificação de estruturas de contagem, a distinção entre permutação, arranjo e combinação, a decomposição correta dos percursos e a aplicação adequada da expressão $Q(x,y)$. Também serão observadas a clareza dos registros, a consistência das justificativas e a capacidade de relacionar estratégias intuitivas a formalizações matemáticas.

Temática integradora

Jogos matemáticos e raciocínio combinatório no plano cartesiano.

Aula 1 – Introdução ao recurso *MISSÃO (X,Y)*

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Apresentar o jogo *MISSÃO (X,Y)*, explorar sua dinâmica em uma malha retangular e iniciar a discussão sobre caminhos, sequências de movimentos e ideias iniciais de contagem.

Conteúdos mobilizados

Plano cartesiano; pontos (x, y); caminhos em malha retangular; representação de trajetórias por sequências de passos; ideias iniciais de contagem.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Discussão inicial e ativação de conhecimentos prévios

A aula tem início com a apresentação de uma malha retangular 5×3, na qual o professor propõe à turma a seguinte questão: como sair de $A = (0,0)$ e chegar a $B = (5,3)$, realizando apenas movimentos para a direita e para cima? A partir das respostas dos estudantes, são registrados no quadro dois ou três caminhos possíveis, tanto na forma de desenho na malha quanto na forma de sequência de passos, representados, por exemplo, pelas letras *D* para direita e *C* para cima. Esse momento busca ativar conhecimentos prévios relativos ao plano cartesiano e favorecer a percepção de que cada caminho pode ser entendido como uma sequência ordenada de movimentos.

Etapa 2 – Formulação da questão norteadora

Após a discussão inicial, o professor propõe uma questão norteadora para introduzir o problema matemático que será desenvolvido ao longo da sequência didática: sem listar um por um, como poderíamos contar quantos caminhos existem de A até B, usando apenas movimentos para a direita e para cima? Caso considere pertinente, pode ainda acrescentar uma segunda questão: se fixarmos um ponto (x, y), como contar quantos caminhos passam por ele? Nesse momento, não se espera uma formalização imediata, mas sim o levantamento de hipóteses e a mobilização do pensamento investigativo dos estudantes.

Etapa 3 – Apresentação do jogo *MISSÃO (X,Y)*

Em seguida, o professor apresenta a estratégia lúdica MISSÃO(X,Y), utilizando a folha de aplicação com a malha 5 × 3 disponibilizada no Apêndice A, bem como um saquinho previamente confeccionado pelo próprio professor, contendo 5 bolas vermelhas, que representam movimentos para a direita, e 3 bolas azuis, que representam movimentos para cima.

Os estudantes são organizados em duplas, e cada jogador escolhe um ponto da malha, excetuando-se os pontos inicial e final. As bolas são sorteadas sem reposição, uma a uma, e a sequência obtida determina o caminho a ser traçado na malha. Após o sorteio, verifica-se se o caminho passou ou não pelo ponto escolhido por cada estudante. Caso mais de um jogador tenha escolhido pontos visitados pelo caminho, todas registram o acerto. Caso nenhum dos pontos escolhidos seja visitado, a rodada é utilizada para análise coletiva do caminho formado.

Para garantir a compreensão das regras, o professor realiza inicialmente uma rodada demonstrativa no quadro, registrando a sequência sorteada e o caminho correspondente. O material do jogo prevê exatamente essa dinâmica, com plano 5 × 3, ponto inicial e final fixos, escolha prévia de pontos pelos participantes e registro das rodadas realizadas.

Etapa 4 – Exploração guiada do jogo

Após a demonstração, os estudantes realizam algumas rodadas do jogo, registrando, em cada uma, a sequência sorteada e o caminho correspondente. Durante esse momento de exploração, o professor acompanha os grupos, esclarece dúvidas e chama a atenção para regularidades importantes, como o fato de que todos os caminhos começam em A, terminam em B e utilizam sempre a mesma quantidade de movimentos para a direita e para cima. Busca-se, com isso, favorecer uma primeira aproximação intuitiva entre o jogo e o raciocínio combinatório, sem ainda introduzir formalizações excessivas.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma oralmente as ideias centrais discutidas: cada caminho pode ser representado por uma sequência de passos; caminhos diferentes surgem da reorganização desses movimentos; e o jogo levanta, de forma natural, questões relacionadas à contagem. Como encaminhamento para a aula seguinte, solicita-se que cada dupla registre duas sequências diferentes de caminho para a mesma malha, acompanhadas do respectivo desenho.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter diagnóstico e formativo, considerando a participação dos estudantes, a compreensão das regras da estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)*, a capacidade de registrar corretamente as sequências sorteadas e os caminhos traçados, bem como as observações levantadas durante a discussão coletiva. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 1 – Rubrica de avaliação diagnóstica e formativa da aula de apresentação da estratégia lúdica MISSÃO(X,Y).

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Participação dos estudantes nas atividades e discussões	☐	☐	☐	☐
2) Compreensão das regras da estratégia lúdica MISSÃO(X,Y)	☐	☐	☐	☐
3) Registro correto das sequências sorteadas e dos caminhos traçados	☐	☐	☐	☐
4) Observações e contribuições apresentadas na discussão coletiva	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem a finalidade de auxiliar o professor no acompanhamento da aprendizagem dos estudantes ao longo da aula, oferecendo critérios objetivos para observar avanços, identificar dificuldades e orientar intervenções pedagógicas. Desse modo, a avaliação não se limita ao resultado final da atividade, mas considera também a participação, a compreensão do processo e a qualidade dos registros e contribuições dos estudantes.

Aula 2 – Ideias iniciais de análise combinatória

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Estudar os conceitos iniciais de Análise Combinatória, especialmente o Princípio Fundamental da Contagem e a distinção entre situações em que a ordem importa e situações em que a ordem não importa, preparando os estudantes para a análise dos caminhos no jogo *MISSÃO (X,Y)*.

Conteúdos mobilizados

Princípio Fundamental da Contagem; permutação; arranjo; combinação; ordem importa e ordem não importa.

Desenvolvimento da aula:

Etapa 1 – Conceitos básicos de Análise Combinatória

A aula inicia-se com uma breve retomada de ideias já estudadas pelos alunos, com foco em conceitos que serão mobilizados ao longo da sequência didática. O professor apresenta, de forma oral e intuitiva, o Princípio Fundamental da Contagem, destacando que, quando uma escolha se organiza em etapas independentes, o número total de possibilidades pode ser obtido pela multiplicação das possibilidades de cada etapa. Em seguida, retoma a distinção entre situações em que a ordem importa e situações em que a ordem não importa, associando essas ideias aos conceitos de permutação, arranjo e combinação. Nesse momento, a abordagem deve privilegiar exemplos cotidianos e compreensão conceitual, sem formalização algébrica.

Etapa 2 – Atividade diagnóstica sobre situações de contagem

Após essa retomada inicial, o professor propõe uma atividade diagnóstica em que os estudantes são convidados a citar situações do cotidiano que envolvam contagem. As respostas apresentadas são organizadas no quadro em três colunas: situações em que a ordem importa e todos os elementos são utilizados (permutação); situações em que a ordem importa, mas apenas parte dos elementos ocupa os espaços disponíveis (arranjo); e situações em que a ordem não importa (combinação). A partir dessa sistematização, o professor conduz a discussão, ajustando classificações quando necessário e explorando oralmente o significado das diferentes formas de organização.

O objetivo dessa etapa é verificar se os estudantes reconhecem, em contextos simples, os significados envolvidos em permutação, arranjo e combinação. Além disso, busca-se levá-los a perceber, de forma intuitiva, que, em todos esses casos, os cálculos podem ser compreendidos a partir do Princípio Fundamental da Contagem, ainda que sem o uso imediato de fórmulas. A partir dos exemplos trazidos pelos próprios alunos, o professor pode explorar essas relações, favorecendo uma compreensão inicial das diferentes estruturas de contagem.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma as ideias centrais discutidas, destacando que a Análise Combinatória permite contar possibilidades em diferentes contextos e que, para isso, é essencial identificar se a ordem interfere ou não no resultado. Essa retomada prepara os estudantes para a aula seguinte, em que a noção de permutação será explorada por meio de anagramas.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter diagnóstico e formativo, considerando a participação dos estudantes, a capacidade de distinguir situações em que a ordem importa e situações em que não importa, bem como a clareza das justificativas apresentadas durante a discussão coletiva.

Aula 3 – Anagramas e a ponte entre permutação com repetição e o jogo *MISSÃO (X,Y)*

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Explorar a ideia de permutação por meio de anagramas com e sem repetição, estabelecendo uma ponte conceitual entre palavras com letras repetidas e os caminhos do jogo *MISSÃO (X,Y)*.

Conteúdos mobilizados

Permutação simples; permutação com repetição; anagramas; organização de sequências; representação de caminhos por letras D e C.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Exploração de anagramas com letras diferentes

O professor inicia a aula apresentando palavras formadas por letras todas diferentes, como por exemplo VIDA, e propõe aos estudantes a seguinte questão: quantos anagramas podem ser formados com essas letras? A discussão deve levar os alunos a perceber que, nesse caso, cada reorganização das letras gera uma nova palavra possível, pois todas as letras são distintas. O objetivo é reativar a ideia de permutação simples de modo concreto e acessível.

Etapa 2 – Exploração de anagramas com letras repetidas

Na sequência, o professor introduz palavras com letras repetidas, como ANA, MAMA, ARARA e CEREJA, e pergunta se todas as trocas de posição continuam gerando novas possibilidades distintas. A partir das respostas dos estudantes, conduz a percepção de que, quando há letras iguais, certas trocas não produzem uma nova configuração. Com isso, introduz-se intuitivamente a ideia de permutação com repetição, destacando que o número de arranjos distintos depende não apenas do número total de letras, mas também da existência de repetições.

Etapa 3 – Ponte conceitual com o jogo *MISSÃO (X,Y)*

Após a discussão com anagramas, o professor estabelece a ponte com o jogo *MISSÃO (X,Y)*. Destaca-se que cada caminho do jogo pode ser representado por uma palavra formada por letras D e C, em que D representa um passo para a direita e C um passo para cima. No caso da malha 5×3, por exemplo, cada caminho corresponde a uma sequência com 5 letras D e 3 letras C. Assim, o problema de contar caminhos pode ser interpretado como o problema de contar anagramas de uma palavra com letras repetidas. Essa aproximação torna a ideia de permutação com repetição mais concreta e mais coerente com o contexto do jogo.

Etapa 4 – Exploração de exemplos no contexto do jogo

Em seguida, o professor utiliza uma malha menor, como 3×2, e registra no quadro alguns caminhos possíveis, representando-os como palavras com letras D e C. A turma é convidada a observar que diferentes ordens das mesmas letras geram diferentes trajetórias. A partir disso, os estudantes discutem como a contagem dos caminhos se relaciona com a contagem de anagramas distintos. O objetivo não é ainda esgotar a formalização, mas consolidar a compreensão de que o jogo pode ser lido como um problema de permutação com repetição.

Etapa 5 – Atividade prática em duplas

Na parte final da aula, os estudantes trabalham em duplas com pequenos exemplos. Podem, por exemplo, representar caminhos em uma malha 4×2 ou 3×2 como palavras formadas por letras D e C, comparar diferentes sequências e discutir quais delas representam caminhos distintos. Durante essa atividade, o professor acompanha os grupos, ouve as estratégias utilizadas e seleciona algumas produções para socialização, reforçando a ligação entre anagramas com repetição e contagem de caminhos.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma a ideia central construída: assim como palavras com letras repetidas geram anagramas distintos, as sequências de movimentos do jogo *MISSÃO (X,Y)* também podem ser entendidas como reorganizações de símbolos repetidos. Dessa forma, a contagem dos caminhos do jogo passa a ser interpretada como um caso particular de permutação com repetição, preparando os estudantes para a formalização que será desenvolvida na aula seguinte.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes na discussão sobre anagramas, a capacidade de distinguir situações com e sem repetição, a compreensão da relação entre palavras com letras repetidas e caminhos na estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)*, bem como a clareza das justificativas apresentadas nas atividades em duplas.

Como apoio à avaliação, o professor poderá utilizar a seguinte rubrica:

Quadro 2 – Rubrica de avaliação formativa da aula sobre anagramas e permutação com repetição

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Participação na discussão sobre anagramas e nas atividades em dupla	☐	☐	☐	☐
2) Distinção entre situações com repetição e sem repetição	☐	☐	☐	☐
3) Relação entre anagramas com letras repetidas e caminhos na malha	☐	☐	☐	☐
4) Uso da ideia de permutação com repetição na contagem das possibilidades	☐	☐	☐	☐
5) Clareza e coerência das justificativas apresentadas	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

As rubricas propostas não têm a finalidade de reduzir a avaliação a uma classificação quantitativa simples, mas de oferecer ao professor critérios objetivos para acompanhar a aprendizagem dos estudantes, identificar dificuldades e orientar intervenções durante o desenvolvimento das atividades.

Aula 4 – Formalização de permutação e anagramas

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Sistematizar formalmente os conceitos de permutação e anagramas, relacionando suas definições e fórmulas a situações já discutidas em aula.

Conteúdos mobilizados

Permutação simples; permutação com repetição; anagramas; fatorial; ordem importa.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Retomada e organização dos exemplos da aula anterior

A aula inicia-se com uma breve retomada dos exemplos cotidianos apresentados pelos estudantes na Aula 2, já classificados conforme os critérios discutidos anteriormente. O professor recupera situações em que a ordem interfere no resultado, retomando a distinção entre diferentes estruturas de contagem. Esse momento tem como finalidade recuperar a base intuitiva construída anteriormente e preparar a turma para a sistematização formal dos conceitos que serão trabalhados nesta aula.

Etapa 2 – Formalização da permutação e dos anagramas

Em seguida, o professor apresenta a permutação simples como a ordenação de todos os elementos de um conjunto, introduzindo a expressão $P_n = n!$. Nesse momento, retoma exemplos em que todos os elementos são utilizados e a ordem altera o resultado, como a organização de pessoas em uma fila ou a disposição de objetos distintos em determinada sequência. A seguir, introduz a noção de anagrama como aplicação da permutação no contexto das palavras, mostrando inicialmente casos com letras todas diferentes. Depois, amplia a discussão para palavras com letras repetidas, destacando que, nesses casos, a contagem exige ajuste, pois trocas entre letras iguais não produzem novas disposições. Com isso, apresenta-se a ideia de permutação com repetição, utilizando exemplos simples que favoreçam a compreensão do conceito.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma as ideias principais construídas, destacando que a permutação está associada a situações em que todos os elementos são utilizados e a ordem interfere no resultado. No caso dos anagramas, evidencia-se que a mesma lógica pode ser aplicada a palavras com letras distintas ou repetidas, desde que se reconheça o papel das repetições na contagem. Como encaminhamento para a aula seguinte, o professor pode anunciar que a formalização será ampliada para situações em que apenas parte dos elementos é escolhida, com ou sem consideração da ordem.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes na retomada dos exemplos, a compreensão da ideia de permutação, a distinção entre anagramas com letras distintas e anagramas com letras repetidas, bem como a clareza das justificativas apresentadas durante a discussão.

Aula 5 – Formalização de arranjo e combinação

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Sistematizar formalmente os conceitos de arranjo e combinação, distinguindo situações em que a ordem importa daquelas em que a ordem não interfere no resultado.

Conteúdos mobilizados

Arranjo simples; combinação simples; fatorial; ordem importa e ordem não importa; comparação entre estruturas de contagem.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Formalização do arranjo simples

A aula inicia-se com a apresentação do arranjo simples como situação em que se escolhem alguns elementos de um conjunto e a ordem da escolha interfere no resultado. Introduz-se a expressão

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

e retomam-se, sempre que possível, exemplos já mencionados pelos estudantes, como a escolha de presidente e vice entre vários candidatos ou a definição de primeiro, segundo e terceiro lugares em uma competição. A intenção é mostrar que o arranjo difere da permutação por envolver apenas parte dos elementos disponíveis, preservando, porém, a importância da ordem.

Etapa 2 – Formalização da combinação simples

Na sequência, o professor formaliza a combinação simples como situação em que se escolhem elementos de um conjunto sem considerar a ordem. Introduz-se a expressão

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

e retomam-se exemplos nos quais apenas a escolha dos elementos importa, como a formação de uma comissão, de um grupo ou de uma equipe sem distribuição de cargos. Nesse momento, o professor destaca explicitamente o contraste entre arranjo e combinação, reforçando que a diferença central entre ambos está no papel da ordem.

Etapa 3 – Comparação entre arranjo e combinação

Na etapa final do desenvolvimento, o professor promove uma comparação dirigida entre arranjo e combinação, evidenciando que ambas as estruturas envolvem a escolha de elementos, mas se distinguem pelo papel da ordem no resultado. Com base em exemplos cotidianos já trabalhados com a turma, os estudantes analisam em quais situações a posição ocupada pelos elementos altera a contagem e em quais situações apenas a seleção do grupo é relevante. Essa atividade tem por finalidade consolidar os critérios de distinção entre os dois conceitos e fortalecer a capacidade dos estudantes de identificar, em diferentes contextos, o modelo de contagem mais adequado.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma as distinções fundamentais entre arranjo e combinação, destacando que, em ambos os casos, há escolha de elementos, mas que a relevância da ordem é o critério que determina o modelo adequado de contagem. Busca-se, assim, consolidar nos estudantes a capacidade de reconhecer, em diferentes situações, quando a posição ocupada pelos elementos altera o resultado e quando apenas a seleção do grupo é significativa. Como encaminhamento para a aula seguinte, o professor anuncia que esses conceitos serão aplicados à contagem de caminhos no jogo *MISSÃO (X,Y)*.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes na discussão, a capacidade de distinguir arranjo e combinação, a compreensão das fórmulas apresentadas e a clareza das justificativas dadas ao classificar as situações discutidas em sala. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 3 – Rubrica de avaliação formativa da aula sobre arranjo e combinação

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Participação dos estudantes na discussão	☐	☐	☐	☐
2) Capacidade de distinguir arranjo e combinação	☐	☐	☐	☐
3) Compreensão das fórmulas apresentadas	☐	☐	☐	☐
4) Clareza das justificativas dadas ao classificar as situações discutidas em sala	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem como finalidade auxiliar o professor na observação do processo de aprendizagem dos estudantes durante a aula. Por meio dela, é possível identificar avanços e dificuldades relacionados à compreensão dos conceitos de arranjo e combinação, bem como orientar intervenções pedagógicas quando necessário.

Aula 6 – Decomposição de caminhos que passam por um ponto intermediário

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Levar os estudantes a compreender que a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário (x, y) pode ser construída a partir da decomposição do percurso em dois trechos independentes.

Conteúdos mobilizados

Contagem de caminhos em malhas retangulares; anagramas com repetição; decomposição de trajetórias; ponto intermediário (x, y); leitura de coordenadas no plano cartesiano; Princípio Fundamental da Contagem.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Retomada de um exemplo da folha do jogo

A aula inicia-se com a retomada de um dos exemplos presentes na folha de aplicação utilizada na primeira aula da sequência, na qual os estudantes registraram caminhos obtidos no jogo *MISSÃO (X,Y)*. O professor recupera a malha correspondente e relembra com a turma que cada caminho pode ser representado por uma sequência de letras, em que D representa um passo para a direita e C representa um passo para cima. Nesse momento, o objetivo é recolocar os estudantes diante de um exemplo concreto já conhecido, para que a nova discussão se apoie em uma experiência previamente vivenciada.

Etapa 2 – Interpretação dos caminhos como anagramas com repetição

Na sequência, o professor retoma a ideia de que cada caminho no jogo pode ser visto como uma palavra formada por letras repetidas. Em uma malha $M \times N$, todo caminho entre $A = (0,0)$ e $B = (M, N)$ é composto por *M* passos para a direita e *N* passos para cima, podendo, portanto, ser interpretado como um anagrama de uma palavra com *M* letras *D* e *N* letras *C*. A partir dessa observação, o professor reforça que a contagem dos caminhos está diretamente ligada à contagem de anagramas com repetição, retomando a lógica combinatória construída nas aulas anteriores.

Etapa 3 – Introdução do ponto intermediário (x, y)

Depois dessa retomada, o professor escolhe, em conjunto com a turma, um ponto intermediário (x, y) da malha, deixando claro que, neste contexto, não serão considerados os pontos inicial A e final B. Em seguida, propõe a questão central da aula: **quantos caminhos de A até B passam obrigatoriamente por esse ponto?** A intenção, nesse momento, é deslocar a atenção do número total de caminhos para a contagem de um subconjunto específico deles, determinado pela condição de passagem por (x, y).

Etapa 4 – Decomposição do percurso em dois trechos e preenchimento da ficha de investigação

O professor conduz a turma à observação de que todo caminho que passa por um ponto intermediário (x, y) pode ser decomposto em dois trechos. O primeiro trecho corresponde ao percurso de $A(0,0)$ até (x, y), enquanto o segundo corresponde ao percurso de (x, y) até $B(M, N)$.

A partir dessa decomposição, os estudantes são levados a perceber que, no primeiro trecho, são necessários exatamente x movimentos para a direita e y movimentos para cima. No segundo trecho, por sua vez, são necessários $M - x$ movimentos para a direita e $N - y$ movimentos para cima. Desse modo, cada parte do percurso passa a ser interpretada como um problema próprio de contagem de caminhos, ou, equivalentemente, como uma permutação com repetição dos movimentos realizados.

Para favorecer a compreensão dessa estrutura combinatória, o professor propõe o preenchimento de uma ficha de investigação, tomando como referência uma malha 5×3. Nessa ficha, os estudantes deverão calcular a quantidade de caminhos de $A(0,0)$ até o ponto escolhido, a quantidade de caminhos desse ponto até $B(5,3)$ e, por fim, o produto dessas duas quantidades, obtendo o valor de $Q(x, y)$. O modelo da ficha utilizada na atividade encontra-se no Apêndice B. A seguir, apresenta-se um exemplo de sua organização.

Quadro 4 – Modelo da ficha de investigação preenchida

Ponto (x, y)	Movimentos de A até (x, y)	Permutação com repetição	Movimentos de (x, y) até B=(5,3)	Permutação com repetição	$Q(x, y)$
(1,0)	1 direita e 0 cima	$\frac{1!}{1!\cdot 0!} = 1$	4 direita e 3 cima	$\frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$	$1 \cdot 35 = 35$
(1,1)	1 direita e 1 cima	$\frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$	4 direita e 2 cima	$\frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$	$2 \cdot 15 = 30$
(2,1)	2 direita e 1 cima	$\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$	3 direita e 2 cima	$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$	$3 \cdot 10 = 30$
(3,1)	3 direita e 1 cima	$\frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$	2 direita e 2 cima	$\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$	$4 \cdot 6 = 24$

Fonte: Elabora pelo autor

Etapa 5 – Fechamento com o princípio fundamental da contagem

Ao final do desenvolvimento, o professor explicita que a quantidade de caminhos de A até (x, y) não interfere na quantidade de caminhos de (x, y) até B. Como se trata de duas etapas independentes, o problema pode ser interpretado à luz do Princípio Fundamental da Contagem. Assim, os estudantes são levados a compreender que, para determinar o número total de caminhos que passam por (x, y), será necessário combinar a quantidade de caminhos do primeiro trecho com a quantidade de caminhos do segundo. Essa conclusão funciona como preparação imediata para a aula seguinte, na qual essa relação será formalizada matematicamente.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma a ideia central construída: um caminho que passa por (x, y) não deve ser visto como um bloco único, mas como a composição de dois percursos sucessivos e independentes. Destaca-se que essa independência permite aplicar o Princípio Fundamental da Contagem, abrindo caminho para a formalização da expressão que será estudada na aula seguinte.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes, a compreensão da interpretação dos caminhos como anagramas com repetição, a capacidade de identificar o ponto intermediário, decompor o percurso em dois trechos e reconhecer a independência entre essas etapas.

Aula 7 – Formalização da expressão $\boldsymbol{Q(x,y)}$

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Formalizar a expressão $Q(x,y)$ para a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário (x,y), aplicando a lógica construída na aula anterior.

Conteúdos mobilizados

Combinação simples; contagem de caminhos; decomposição de trajetórias; expressão $Q(x,y)$; interpretação combinatória de percursos em malhas retangulares.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Contagem dos caminhos de A até $\boldsymbol{(x,y)}$

A aula inicia-se com a retomada da conclusão da aula anterior: um caminho que passa por (x,y) pode ser decomposto em dois trechos independentes. A partir disso, o professor analisa o primeiro trecho, de $A=(0,0)$ até (x,y), mostrando que ele é composto por x movimentos para a direita e y movimentos para cima. Assim, a quantidade de caminhos possíveis nesse trecho é dada por:

$$\binom{x+y}{x}=\frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

Nesse momento, o professor reforça que a expressão resulta da contagem das diferentes formas de organizar os movimentos necessários para atingir o ponto (x,y).

Etapa 2 – Contagem dos caminhos de $\boldsymbol{(x,y)}$ até $\boldsymbol{B}$

Em seguida, o professor analisa o segundo trecho do percurso, que vai de (x,y) até $B=(M,N)$. Como restam $M-x$ movimentos para a direita e $N-y$ movimentos para cima, a quantidade de caminhos possíveis nesse trecho é dada por:

$$\binom{(M-x)+(N-y)}{M-x}=\frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!\,(N-y)!}$$

A turma é levada a perceber que a mesma lógica combinatória utilizada no primeiro trecho também se aplica ao segundo.

Etapa 3 – Formalização da expressão $\boldsymbol{Q(x,y)}$

Após a contagem separada dos dois trechos, o professor formaliza a quantidade total de caminhos que passam por (x, y), escrevendo:

$$Q(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} \cdot \frac{(M-x+N-y)!}{(M-x)!\,(N-y)!}.$$

Nesse momento, destaca-se que a expressão resulta diretamente da decomposição do percurso em duas partes, cada uma delas contada separadamente.

Etapa 4 – Aplicação a exemplos e interpretação dos resultados

Na parte final da aula, o professor aplica a expressão a alguns pontos da malha, escolhidos com a participação dos estudantes, e promove comparações entre os valores obtidos, ou ainda podem usar a ficha de investigação encontrada no APENDICE B. O objetivo é mostrar que diferentes pontos pertencem a diferentes quantidades de caminhos e que essa diferença pode ser explicada combinatoriamente

Esse momento também tem como finalidade favorecer a percepção de padrões e regularidades, levando os estudantes a observar que a posição do ponto interfere diretamente na quantidade de caminhos que passam por ele. Além disso, busca-se destacar que o ponto (1,0) pertence ao conjunto dos pontos de máxima visitação, podendo haver outros pontos da malha com a mesma quantidade máxima de caminhos.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, o professor retoma a ideia principal construída: a expressão $Q(x, y)$ permite calcular a quantidade de caminhos que passam por um ponto intermediário (x, y), sendo resultado da contagem dos dois trechos em que o percurso pode ser decomposto. Desse modo, a formalização da expressão aparece como consequência natural do raciocínio desenvolvido progressivamente ao longo da sequência didática.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a compreensão da fórmula apresentada, a capacidade de interpretar o significado de cada fator da expressão, a correta aplicação da fórmula a pontos da malha e a clareza das interpretações produzidas pelos estudantes. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 5 – Rubrica de avaliação da aula sobre a expressão $Q(x, y)$

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Compreensão da fórmula apresentada	☐	☐	☐	☐
2) Interpretação do significado de cada fator da expressão	☐	☐	☐	☐
3) Aplicação correta da fórmula a pontos da malha	☐	☐	☐	☐
4) Clareza das interpretações produzidas pelos estudantes	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem como finalidade auxiliar o professor na observação do desenvolvimento dos estudantes durante a aula, permitindo identificar avanços e dificuldades na compreensão da fórmula e em sua aplicação aos pontos da malha. Dessa forma, a avaliação valoriza não apenas o resultado dos cálculos, mas também a interpretação dos procedimentos utilizados e a clareza das justificativas produzidas pelos alunos.

5.4 Sequência Didática Para o Ensino de Probabilidade a Partir da Estratégia Lúdica *MISSÃO(X,Y)*

Identificação da Sequência Didática

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

Componente curricular: Matemática.

Ano: 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Turma: Turmas do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Quantidade de aulas: 6 aulas de 50 minutos cada.

Conteúdos desenvolvidos

Experimento aleatório; acaso; espaço amostral; evento; casos favoráveis; casos possíveis; probabilidade clássica; representação de caminhos em malhas retangulares; interpretação de caminhos como sequências de movimentos; eventos associados à passagem por pontos específicos da malha; comparação de probabilidades em diferentes pontos; relação entre Análise Combinatória e Probabilidade; expressão $Q(x, y)$; total de caminhos possíveis; método do saquinho; sorteio sem reposição; interpretação probabilística do ponto mais visitado.

Competências da BNCC

A sequência didática articula-se com competências da BNCC relacionadas à investigação matemática, à resolução de problemas, à argumentação, à interpretação de informações e à utilização de conceitos matemáticos para analisar situações em diferentes contextos. Ao trabalhar a Probabilidade a partir do jogo *MISSÃO(X,Y)*, a proposta favorece o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, da leitura de eventos em espaços amostrais finitos e da capacidade de relacionar experiências concretas de sorteio, caminhos em malhas e formalizações matemáticas.

Habilidades

As habilidades listadas, a seguir, constam na BNCC (Brasil, 2018) com seus respectivos códigos:

• **EM13MAT106** – Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos, interpretando criticamente informações estatísticas e probabilísticas.

• **EM13MAT311** – Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

• **EM13MAT312** – Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Objetivo geral

Promover a compreensão de conceitos fundamentais de Probabilidade a partir do jogo *MISSÃO(X,Y)*, articulando experimentação, representação de caminhos, contagem de possibilidades e interpretação probabilística de eventos definidos por pontos da malha.

Objetivos específicos

- Reconhecer o jogo *MISSÃO(X,Y)* como um experimento aleatório.
- Compreender o conceito de acaso a partir do sorteio dos movimentos do jogo.
- Identificar o espaço amostral como o conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha.
- Compreender evento como subconjunto do espaço amostral.
- Identificar casos favoráveis associados à passagem do caminho por pontos específicos da malha.
- Aplicar a definição clássica de probabilidade em situações simples e no contexto do jogo.
- Relacionar a quantidade de caminhos que passam por um ponto à expressão $Q(x, y)$.
- Determinar a probabilidade de um caminho passar por um ponto específico da malha.
- Comparar probabilidades associadas a diferentes pontos da malha.
- Interpretar o ponto mais visitado como aquele associado ao maior número de caminhos favoráveis e, consequentemente, à maior probabilidade de visitação.

- Compreender o método do saquinho como uma forma concreta de analisar probabilidades em sorteios sucessivos sem reposição.

Público-alvo

Estudantes do 2º e do 3º ano do Ensino Médio que já tenham tido contato inicial com conceitos de Análise Combinatória ou que estejam em processo de consolidação desses conhecimentos, especialmente no que se refere à contagem de caminhos em malhas retangulares e à interpretação de sequências de movimentos.

Recursos didáticos

Folha de aplicação do jogo *MISSÃO(X,Y)*; malhas retangulares impressas; saquinho com bolas coloridas representando movimentos para a direita e para cima; quadro; pincel ou giz; projetor, quando disponível; folhas de registro; calculadora, se necessário.

Metodologia usada

A sequência didática fundamenta-se em uma abordagem investigativa, progressiva e contextualizada, utilizando o jogo *MISSÃO(X,Y)* como situação geradora para a construção dos conceitos de Probabilidade. Inicialmente, os estudantes vivenciam o jogo como experimento aleatório, observando que os caminhos produzidos dependem da ordem dos sorteios realizados. A partir dessa experiência concreta, são introduzidos os conceitos de acaso, espaço amostral, evento, casos favoráveis e casos possíveis.

Na sequência, a definição clássica de probabilidade é construída a partir da relação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Essa estrutura é então aplicada ao contexto dos caminhos em malhas retangulares, permitindo que os estudantes compreendam a probabilidade de um caminho passar por determinado ponto da malha. A proposta também retoma conhecimentos de Análise Combinatória, especialmente a expressão $Q(x,y)$, para interpretar os eventos associados à passagem por pontos específicos.

Por fim, a sequência promove a comparação entre probabilidades de diferentes pontos da malha, favorecendo a interpretação do ponto mais visitado sob uma perspectiva probabilística. O método do saquinho é utilizado como recurso concreto para aproximar os estudantes da lógica dos sorteios sucessivos sem reposição, possibilitando a construção intuitiva da probabilidade antes de sua formalização matemática.

Avaliação

A avaliação assume caráter diagnóstico, processual e formativo, considerando a participação dos estudantes nas discussões, a compreensão da dinâmica probabilística do jogo, a identificação correta do espaço amostral, a formulação de eventos, o reconhecimento de casos favoráveis e casos possíveis, a aplicação da definição clássica de probabilidade e a interpretação dos resultados obtidos.

Também serão observadas a capacidade dos estudantes de relacionar os conhecimentos de Análise Combinatória à Probabilidade, utilizar a expressão $Q(x, y)$ na análise de eventos definidos por pontos da malha, comparar probabilidades em diferentes posições e justificar matematicamente a ideia de ponto mais visitado.

Temática integradora

Jogos matemáticos, raciocínio probabilístico e contagem de caminhos no plano cartesiano.

Aula 1 – Introdução à ideia de acaso e espaço amostral com o recurso *MISSÃO (X,Y)*

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Introduzir as ideias de acaso e espaço amostral a partir da dinâmica do recurso *MISSÃO(X,Y)*, levando os estudantes a reconhecer que diferentes caminhos podem ser gerados aleatoriamente e que o conjunto desses caminhos constitui o universo de resultados possíveis do experimento.

Conteúdos mobilizados

Acaso; experimento aleatório; espaço amostral; representação de caminhos em malhas retangulares; leitura de coordenadas no plano cartesiano; interpretação de caminhos como sequências de movimentos; conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Apresentação do contexto probabilístico do jogo

A aula inicia-se com a apresentação do *MISSÃO(X,Y)* como situação de investigação probabilística. Organizados em duplas, os estudantes recebem a folha de aplicação com a malha retangular, bem como o material necessário para a realização do jogo, composto por bolas que representam movimentos para a direita e para cima. Explicita-se que o interesse da sequência estará voltado para a análise do caráter aleatório do processo que produz os caminhos. O recurso é, então, apresentado como um experimento em que o percurso final depende da ordem em que os movimentos são sorteados.

Etapa 2 – Vivência do recurso e observação dos resultados

Em seguida, os estudantes realizam algumas rodadas do recurso, registrando as sequências sorteadas e os caminhos correspondentes na malha. Durante essa exploração, observa-se que, embora a quantidade de movimentos para a direita e para cima permaneça fixa, os caminhos efetivamente produzidos podem variar de uma rodada para outra. Essa etapa tem por finalidade fazer com que os estudantes percebam, na prática, que o resultado do recurso não é previamente determinado, ainda que o conjunto de regras seja conhecido.

Etapa 3 – Discussão sobre a ideia de acaso

Após a realização das rodadas, desenvolve-se uma discussão coletiva a partir de questões como: o caminho obtido podia ser previsto com certeza antes do sorteio? Por que resultados diferentes podem surgir mesmo quando o material do jogo é o mesmo? Em que sentido o sorteio interfere no percurso final? A partir dessas questões, introduz-se a ideia de acaso, destacando que o jogo envolve um experimento cujo resultado não pode ser conhecido com certeza antes de sua realização, embora seja possível descrever as condições em que ele ocorre.

Etapa 4 – Introdução do conceito de espaço amostral em diferentes contextos

Na sequência, introduz-se o conceito de espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Para ampliar a compreensão dos estudantes, o conceito é inicialmente discutido em contextos mais familiares, como o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado e a retirada de uma carta de um baralho. Em cada caso, busca-se identificar com a turma quais são os possíveis resultados do experimento e, consequentemente, qual é o respectivo espaço amostral. Após essa exploração inicial, o conceito é retomado no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)*, no qual o espaço amostral passa a ser interpretado como o conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha, obedecendo às regras de movimentação estabelecidas.

Etapa 5 – Fundamentação do espaço amostral no contexto do jogo

Para consolidar essa ideia, os caminhos efetivamente obtidos pelos estudantes são comparados com outros caminhos possíveis que poderiam ter surgido, mas que não apareceram nas rodadas realizadas. Dessa forma, evidencia-se que o espaço amostral não se restringe aos resultados observados em sala, mas compreende todo o universo de trajetórias que o jogo admite. Nesse momento, os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos podem ser mobilizados como apoio para reconhecer que esse conjunto de possibilidades é estruturado e pode ser descrito matematicamente.

Fechamento e sistematização:

Ao final da aula, sistematiza-se que o jogo *MISSÃO(X,Y)* pode ser compreendido como um experimento aleatório, pois o caminho gerado em cada rodada depende do sorteio dos movimentos. Destaca-se ainda que cada trajetória possível corresponde a um resultado do experimento e que o conjunto de todas essas trajetórias constitui o espaço amostral do jogo.

Como encaminhamento para a etapa seguinte, indica-se que, uma vez conhecido o espaço amostral, torna-se possível identificar subconjuntos de interesse, isto é, eventos associados a determinadas condições, como a passagem por pontos específicos da malha.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter diagnóstico e formativo, considerando a participação dos estudantes na vivência do jogo, a capacidade de reconhecer o papel do acaso na produção dos caminhos, a compreensão inicial da noção de experimento aleatório e a apropriação do conceito de espaço amostral em diferentes contextos, com ênfase no jogo *MISSÃO(X,Y)*. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 6 – Rubrica de avaliação diagnóstica e formativa da aula sobre a ideia de acaso e espaço amostral na estratégia lúdica MISSÃO(X,Y)

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Participação dos estudantes na vivência do jogo	☐	☐	☐	☐
2) Reconhecimento do papel do acaso na produção dos caminhos	☐	☐	☐	☐
3) Compreensão inicial da noção de experimento aleatório	☐	☐	☐	☐
4) Apropriação do conceito de espaço amostral em diferentes contextos, com ênfase no MISSÃO(X,Y)	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem como finalidade auxiliar o professor na observação do desenvolvimento dos estudantes durante a aula, permitindo identificar avanços e dificuldades na compreensão da fórmula e em sua aplicação aos pontos da malha. Dessa forma, a avaliação valoriza não apenas o resultado dos cálculos, mas também a interpretação dos procedimentos utilizados e a clareza das justificativas produzidas pelos alunos.

Aula 2 – Eventos no contexto do jogo e contagem de casos favoráveis

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Compreender o conceito de evento no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)* e identificar, entre os caminhos possíveis, os casos favoráveis associados a condições específicas, como a passagem por determinados pontos da malha.

Conteúdos mobilizados

Evento; espaço amostral; casos favoráveis; representação de caminhos em malhas retangulares; interpretação de condições sobre trajetórias; conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Retomada do espaço amostral no contexto do jogo

A aula inicia-se com a retomada da ideia de que o jogo *MISSÃO(X,Y)* pode ser entendido como um experimento aleatório cujo espaço amostral é constituído pelo conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha. A partir dessa compreensão, desloca-se a atenção do conjunto total de caminhos para subconjuntos específicos desse espaço, com base em determinadas condições impostas ao percurso.

Etapa 2 – Introdução do conceito de evento

Na sequência, introduz-se o conceito de evento como um subconjunto do espaço amostral. Para tornar essa ideia acessível, propõem-se inicialmente exemplos simples em outros contextos probabilísticos, como no lançamento de uma moeda, de um dado ou na retirada de uma carta de um baralho. Em seguida, o conceito é trazido para o jogo *MISSÃO(X,Y)*, destacando que expressões como “o caminho passa pelo ponto (x, y)” ou “o caminho visita um ponto da primeira linha da malha” definem eventos, isto é, conjuntos de trajetórias que satisfazem uma condição previamente estabelecida.

Etapa 3 – Formulação de eventos no contexto do jogo

Após a introdução conceitual, os estudantes são convidados a propor diferentes eventos relacionados ao jogo. Entre as possibilidades, podem surgir situações como:

- o caminho passa por um ponto específico;
- o caminho não passa por certo ponto da malha.
- o caminho visita dois pontos determinados;

O objetivo dessa etapa é mostrar que um evento não corresponde a um único caminho, mas ao conjunto de todos os caminhos que atendem à condição proposta. Assim, amplia-se a compreensão dos estudantes sobre a estrutura probabilística do jogo.

Etapa 4 – Identificação de casos favoráveis

Na continuidade, a discussão volta-se para a noção de casos favoráveis. Escolhe-se, por exemplo, um ponto intermediário da malha e pede-se aos estudantes que identifiquem quais caminhos do espaço amostral correspondem ao evento "passar por esse ponto". Em malhas menores, essa identificação pode ser feita por observação direta; em malhas maiores, a intenção é apenas reconhecer que os casos favoráveis constituem parte do espaço amostral e que sua quantidade depende da condição imposta. Nesse momento, os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos podem ser mobilizados como apoio para interpretar a estrutura desses subconjuntos.

Etapa 5 – Comparação entre eventos e análise dos casos favoráveis

Na etapa final do desenvolvimento, diferentes eventos são comparados, de modo que os estudantes percebam que alguns deles reúnem mais caminhos favoráveis do que outros. Com isso, a turma começa a construir a percepção de que nem todos os eventos têm a mesma "força" dentro do espaço amostral, o que servirá de base para a introdução da probabilidade na etapa seguinte. Essa comparação pode ser feita a partir de pontos escolhidos pelos próprios estudantes, utilizando o jogo como referência concreta para a discussão.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, sistematiza-se que, no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)*, um evento corresponde a um subconjunto do espaço amostral, determinado por uma condição sobre os caminhos possíveis. Destaca-se ainda que os casos favoráveis são justamente os caminhos que pertencem a esse evento. Como encaminhamento para a etapa seguinte, indica-se que a comparação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis permitirá construir a ideia de probabilidade no contexto do jogo.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes na formulação de eventos, a compreensão da noção de subconjunto do espaço amostral, a capacidade de identificar casos favoráveis em diferentes situações e a clareza das justificativas apresentadas ao comparar eventos no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)*.

Aula 3 – Estudo da Probabilidade clássica

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Compreender a definição clássica de probabilidade a partir de experimentos aleatórios simples e reconhecer sua aplicação no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)*, relacionando espaço amostral, eventos, casos favoráveis e casos possíveis.

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; experimento aleatório; espaço amostral; evento; casos favoráveis; casos possíveis; interpretação probabilística de trajetórias; conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Introdução da probabilidade clássica em contextos cotidianos

A aula inicia-se com a apresentação de situações probabilísticas familiares, como o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado e a retirada de uma carta de um baralho. Em cada caso, busca-se identificar com os estudantes os resultados possíveis do experimento, bem como eventos de interesse, por exemplo: "obter cara", "obter número par" ou "retirar uma carta de copas". A partir desses exemplos, introduz-se a definição clássica de probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, desde que os resultados sejam equiprováveis.

Etapa 2 – Construção da linguagem probabilística

Na sequência, são organizadas, com a participação da turma, as noções de espaço amostral, evento, casos favoráveis e casos possíveis. Busca-se consolidar a compreensão de que o espaço amostral corresponde ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, enquanto o evento constitui um subconjunto desse universo. Os casos favoráveis, por sua vez, correspondem aos resultados que satisfazem a condição estabelecida pelo evento. Nesse momento, a ênfase recai sobre a interpretação dos conceitos, e não apenas sobre a memorização da fórmula probabilística.

Etapa 3 – Formalização da probabilidade clássica

Após a discussão conceitual, formaliza-se a probabilidade clássica pela expressão

$$P(E) = \frac{números\ de\ casos\ favoráveis\ a\ E}{números\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Essa formalização é acompanhada de exemplos simples, escolhidos de modo que os estudantes percebam o significado da razão probabilística como medida da chance de ocorrência de um evento. A intenção é fazer com que a expressão matemática surja como síntese de uma estrutura já compreendida, e não como uma fórmula apresentada de forma isolada.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, sistematiza-se que a probabilidade clássica pode ser compreendida como uma razão entre casos favoráveis e casos possíveis em experimentos aleatórios com resultados equiprováveis. Destaca-se ainda que essa estrutura não se restringe a exemplos tradicionais, como moedas e dados, mas também pode ser aplicada ao jogo *MISSÃO(X,Y)*, em que os caminhos possíveis constituem o espaço amostral e os eventos correspondem a subconjuntos desse universo. Como encaminhamento para a etapa seguinte, indica-se que a análise probabilística será direcionada para um evento específico: a passagem do caminho por um ponto escolhido da malha.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes nas discussões, a compreensão da definição clássica de probabilidade, a capacidade de identificar espaço amostral, eventos, casos favoráveis e casos possíveis em contextos cotidianos e no jogo, bem como a clareza das interpretações apresentadas ao transferir essa estrutura para o contexto das trajetórias em malhas retangulares. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 7 – Rubrica de avaliação formativa da aula do estudo clássico de probabilidade.

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Participação nas discussões Envolvimento, contribuição e respeito às ideias dos colegas durante as discussões propostas.	☐	☐	☐	☐
2) Compreensão da definição clássica de probabilidade Compreensão da relação entre casos favoráveis, casos possíveis e a probabilidade.	☐	☐	☐	☐
3) Identificação dos elementos do experimento Capacidade de identificar espaço amostral, eventos, casos favoráveis e casos possíveis em contextos cotidianos e no jogo.	☐	☐	☐	☐
4) Transferência para trajetórias em malhas retangulares Clareza ao aplicar a estrutura da probabilidade para compreender trajetórias no jogo MISSÃO(X,Y).	☐	☐	☐	☐
5) Clareza das interpretações Coerência, precisão e clareza ao explicar e justificar as respostas apresentadas.	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem como finalidade auxiliar o professor na observação do desenvolvimento dos estudantes durante a aula, permitindo identificar avanços e dificuldades na compreensão da fórmula e em sua aplicação aos pontos da malha. Dessa forma, a avaliação valoriza não apenas o resultado dos cálculos, mas também a interpretação dos procedimentos utilizados e a clareza das justificativas produzidas pelos alunos.

Aula 4 – Probabilidade de um caminho passar por um ponto específico

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Aplicar a definição clássica de probabilidade ao evento de um caminho passar por um ponto específico (x, y) da malha, relacionando o número de casos favoráveis à expressão $Q(x, y)$ e o número total de casos possíveis ao total de caminhos do jogo *MISSÃO(X,Y)*.

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; espaço amostral; evento; casos favoráveis; casos possíveis; contagem de caminhos em malhas retangulares; expressão $Q(x, y)$; interpretação probabilística de trajetórias.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Retomada da estrutura probabilística do jogo

A aula inicia-se com a retomada da ideia de que o jogo *MISSÃO(X,Y)* pode ser interpretado como um experimento aleatório, cujo espaço amostral é constituído pelo conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha. Recorda-se também que, na aula anterior, foi formalizada a probabilidade clássica como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, o que servirá como base para a análise do evento específico desta aula.

Etapa 2 – Definição do evento associado ao ponto (x, y)

Na sequência, escolhe-se um ponto específico (x, y) da malha, excluindo-se os pontos inicial e final, e define-se o evento correspondente como o conjunto de todos os caminhos que passam por esse ponto. Desse modo, o evento deixa de ser apenas uma condição verbal e passa a ser compreendido como um subconjunto do espaço amostral.

Etapa 3 – Identificação dos casos favoráveis por meio de $Q(x, y)$

Em seguida, a atenção se volta para o número de casos favoráveis do evento definido. Mobilizando os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados, explicita-se que a quantidade de caminhos que passam por (x, y) é dada por $Q(x, y)$. Nesse momento, reforça-se a interpretação de $Q(x,y)$ como a cardinalidade do conjunto dos caminhos favoráveis ao evento, isto é, como a quantidade de trajetórias que satisfazem a condição de passar pelo ponto escolhido.

Etapa 4 – Determinação do número total de casos possíveis

Após a identificação dos casos favoráveis, explicita-se que o número total de casos possíveis corresponde à quantidade total de caminhos entre o ponto inicial $A = (0,0)$ e o ponto final $B = (M,N)$. Com isso, o professor evidencia que a probabilidade de o caminho passar por (x,y) pode ser expressa como a razão entre a quantidade de caminhos favoráveis e a quantidade total de caminhos possíveis. No contexto de uma malha $M \times N$, essa relação pode ser escrita como:

$$P(E) = \frac{quantidade\ de\ caminhos\ favoráveis}{quantidade\ total\ de\ caminhos\ possíveis} = \frac{Q(x,y)}{n(\Omega)}$$

destacando-se que o denominador representa o total de caminhos do jogo e o numerador representa apenas aqueles que realizam o evento considerado.

Etapa 5 – Aplicação a exemplos na malha

Na parte final do desenvolvimento, a expressão é aplicada a alguns pontos específicos da malha, escolhidos com a participação dos estudantes. O objetivo é que a turma observe que diferentes pontos possuem diferentes probabilidades de serem visitados e que essas diferenças podem ser justificadas matematicamente pela relação entre $Q(x,y)$ e o número total de caminhos. A comparação entre os resultados obtidos favorece uma leitura mais refinada da malha sob o ponto de vista probabilístico.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, sistematiza-se que a probabilidade de um caminho passar por um ponto específico (x,y) é obtida pela razão entre o número de caminhos que passam por esse ponto e o número total de caminhos possíveis no jogo. Destaca-se, assim, que o estudo probabilístico do *MISSÃO(X,Y)* depende diretamente dos resultados já construídos em Análise Combinatória, especialmente da expressão $Q(x,y)$ e da contagem total de caminhos na malha. Como encaminhamento para a etapa seguinte, pode-se anunciar a comparação entre diferentes pontos da malha, com vistas à interpretação probabilística do ponto mais visitado.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a compreensão do evento associado ao ponto (x, y), a correta identificação dos casos favoráveis e dos casos possíveis, a interpretação da expressão probabilística construída e a clareza das justificativas apresentadas ao comparar probabilidades de diferentes pontos da malha. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 8 – Rubrica de avaliação formativa da aula de Probabilidade de um caminho passar por um ponto específico.

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Compreensão do evento associado ao ponto (x,y) Compreende o significado do evento relacionado ao ponto (x,y) na malha e sua representação no jogo MISSÃO(X,Y).	☐	☐	☐	☐
2) Identificação dos casos favoráveis e dos casos possíveis Identifica corretamente os casos favoráveis (C.F.) e os casos possíveis (C.P.) para o evento associado ao ponto (x,y).	☐	☐	☐	☐
3) Interpretação da expressão probabilística Compreende e interpreta corretamente a expressão probabilística construída para o ponto (x,y), relacionando-a com os casos favoráveis e possíveis.	☐	☐	☐	☐
4) Clareza das justificativas nas resoluções Apresenta justificativas claras, lógicas e completas para os procedimentos e conclusões realizadas.	☐	☐	☐	☐
5) Comparação de probabilidades entre diferentes pontos da malha Compara corretamente as probabilidades de diferentes pontos da malha, argumentando de forma coerente sobre semelhanças e diferenças.	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem como finalidade auxiliar o professor na observação do desenvolvimento dos estudantes durante a aula, permitindo identificar avanços e dificuldades na compreensão da fórmula e em sua aplicação aos pontos da malha. Dessa forma, a avaliação valoriza não apenas o resultado dos cálculos, mas também a interpretação dos procedimentos utilizados e a clareza das justificativas produzidas pelos alunos.

Aula 5 – Comparação entre probabilidades de diferentes pontos da malha e interpretação do ponto mais visitado

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Comparar as probabilidades associadas à passagem do caminho por diferentes pontos da malha, interpretando os resultados obtidos e relacionando-os ao problema do ponto mais visitado no recurso *MISSÃO(X,Y)*.

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; evento; casos favoráveis; comparação de probabilidades; interpretação de resultados em malhas retangulares; expressão $Q(x,y)$; leitura geométrica e probabilística de trajetórias.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Cálculo de probabilidades em pontos distintos da malha

O professor propõe o cálculo da probabilidade de o caminho passar por diferentes pontos da malha 5 × 3, considerando pontos de borda, pontos internos, pontos simétricos e o ponto (1,0). Inicialmente, retoma-se que o espaço amostral é composto por todos os caminhos possíveis de A = (0,0) até B = (5,3), totalizando 56 caminhos. Em seguida, os estudantes calculam, com apoio do professor, a quantidade de caminhos favoráveis $Q(x,y)$ para cada ponto escolhido e determinam a probabilidade correspondente pela razão entre os caminhos favoráveis e o total de caminhos possíveis.

Para organizar os cálculos, será utilizada uma ficha de investigação probabilística, apresentada no Apêndice C, na qual os estudantes registrarão o ponto analisado, o valor de $Q(x,y)$, o total de caminhos, a probabilidade obtida e uma breve observação sobre a posição do ponto na malha.

Etapa 2 – Comparação entre valores e identificação de padrões

Após os cálculos, os valores obtidos são colocados em comparação. Nesse momento, busca-se levar os estudantes a observar regularidades, como o fato de alguns pontos apresentarem maior probabilidade de visitação do que outros e a existência de pontos distintos com a mesma probabilidade, em razão de simetrias da malha. O professor pode conduzir a discussão por meio de perguntas como: quais pontos parecem mais favorecidos? Quais apresentam a mesma chance de serem visitados? O que a posição do ponto sugere sobre a quantidade de caminhos que passam por ele?

Etapa 3 – Interpretação probabilística do ponto mais visitado

Na continuidade, a discussão é direcionada para a ideia de ponto mais visitado. A partir da comparação entre probabilidades, os estudantes são levados a perceber que o ponto mais visitado pode ser interpretado, do ponto de vista probabilístico, como o ponto que pertence ao maior número de caminhos e, consequentemente, aquele que apresenta a maior probabilidade de ocorrência do evento “o caminho passa por (x, y)”. Assim, a noção de ponto mais visitado deixa de ser apenas uma observação empírica do jogo e passa a ser compreendida como um resultado matematicamente justificável.

Etapa 4 – Discussão final e articulação entre Combinatória e Probabilidade

Na etapa final do desenvolvimento, consolida-se a articulação entre os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados e a leitura probabilística do jogo. Os estudantes são levados a reconhecer que a comparação entre probabilidades depende diretamente da comparação entre os valores de $Q(x, y)$, isto é, entre as quantidades de caminhos que passam por cada ponto. Desse modo, o estudo probabilístico do jogo é apresentado como desdobramento natural da estrutura combinatória da malha.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, sistematiza-se que diferentes pontos da malha podem apresentar probabilidades distintas de serem visitados e que essa diferença decorre da quantidade de caminhos que passam por cada um deles. Destaca-se, assim, que a análise probabilística permite interpretar, de forma mais ampla, o problema do ponto mais visitado, articulando contagem de caminhos, eventos e comparação de probabilidades. Como fechamento da sequência, evidencia-se que o jogo *MISSÃO(X,Y)* constitui um contexto fértil para integrar raciocínio combinatório e raciocínio probabilístico em uma mesma situação investigativa.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes nas comparações propostas, a capacidade de calcular e interpretar probabilidades associadas a diferentes pontos da malha, a identificação de padrões e simetrias e a clareza das justificativas apresentadas ao relacionar o ponto mais visitado à maior probabilidade de ocorrência do evento correspondente.

Aula 6 – Método do saquinho: probabilidade de um caminho passar por um ponto da malha

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Construir, de forma intuitiva, a probabilidade de um caminho passar por um ponto da malha, utilizando o sorteio sucessivo das bolas do jogo *MISSÃO(X,Y)*, sem recorrer inicialmente a fórmulas gerais.

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; experimento aleatório sem reposição; casos favoráveis; ordem das retiradas; representação de caminhos na malha.

Desenvolvimento da aula

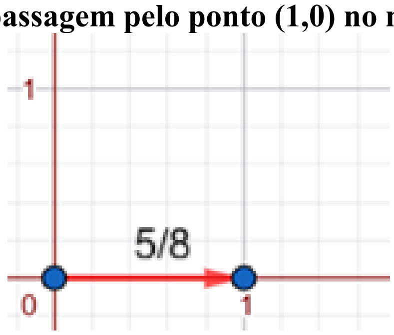
Etapa 1 – Apresentação do método do saquinho

A aula inicia-se com a explicação de que a probabilidade será construída a partir do próprio sorteio das bolas do jogo. Considera-se um saquinho com 5 bolas vermelhas, representando passos para a direita, e 3 bolas azuis, representando passos para cima. Cada retirada corresponde a um passo do caminho, e a ordem das retiradas determina a trajetória na malha.

Etapa 2 – Caso A: probabilidade de o caminho passar por $(\mathbf{1,0})$

Analisa-se inicialmente o ponto $(1,0)$. Para que o caminho passe por esse ponto, a primeira retirada precisa ser uma bola vermelha. Como há 8 bolas ao todo, sendo 5 vermelhas, conclui-se que: $P(1,0) = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$. Observe a figura 8 abaixo.

Figura 8 – Probabilidade de passagem pelo ponto (1,0) no método do saquinho

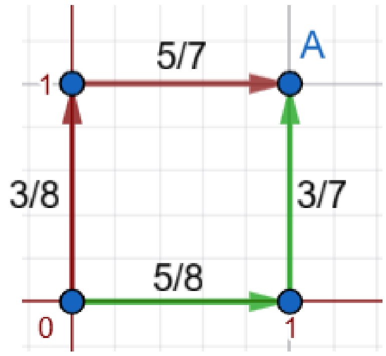


Fonte: Elaborada pelo autor.

Etapa 3 – Caso B: probabilidade de o caminho passar por $(1,1)$

Em seguida, considera-se o ponto $(1,1)$ na malha 5×3. Para que o caminho passe por esse ponto, nas duas primeiras retiradas deve aparecer 1 bola vermelha e 1 bola azul, em qualquer ordem. Há, portanto, duas possibilidades: Há 8 bolas ao todo; 5 são vermelhas e 3 azuis, para chegar a $(1,1)$, nas duas primeiras retiradas deve sair 1 vermelha (Direita) e 1 azul (Cima), em qualquer ordem, observe a figura abaixo, há dois caminhos ou vai pelo caminho verde (DC) ou pelo caminho em marrom (CD).

Figura 9 – Probabilidade de passagem pelo ponto (1,1) no método do saquinho



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para ir pelo caminho verde, temos de tirar uma bolinha vermelha no qual a probabilidade é $\frac{5}{8}$ e depois uma bolinha azul, como é sem reposição, no saquinho há 7 bolas e a probabilidade é $\frac{3}{7}$, logo, D → C: $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$. Para ir pelo caminho marrom, temos de tirar uma bolinha azul no qual a probabilidade é $\frac{3}{8}$ e depois uma bolinha vermelha, como é sem reposição, no saquinho agora há 7 bolas e a probabilidade é $\frac{5}{7}$, logo, C → D: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
Somando as duas ordens, temos;

$$P((1,1)) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \cong 0,5357 \approx 53,6\%$$

Etapa 4 – Caso C: probabilidade de o caminho passar por $(2,1)$

Na sequência, analisa-se o ponto (2,1). Para que o caminho passe por esse ponto, nas três primeiras retiradas devem aparecer 2 bolas vermelhas e 1 bola azul, em qualquer ordem.
As possibilidades são: DDC, DCD e CDD.
Cada uma dessas ordens tem probabilidade:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

Logo,

$$P\big((2,1)\big) = \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{5}{28} = \frac{15}{28}$$

Destaca-se que, depois da terceira retirada, o caminho já passou por (2,1), e o restante das retiradas não altera esse fato.

Etapa 5 – Síntese da ideia construída

Ao final, sistematiza-se que, para um ponto (x, y), é necessário observar apenas as primeiras $x + y$ retiradas e verificar se nelas aparecem exatamente x bolas vermelhas e y bolas azuis, em qualquer ordem. O que ocorre depois disso não modifica o fato de o caminho já ter passado pelo ponto considerado.

Fechamento e sistematização

Ao final da aula, conclui-se que o método do saquinho permite construir, de forma concreta, a probabilidade de um caminho passar por determinados pontos da malha. A análise dos casos simples mostra que a probabilidade pode ser obtida pela soma das probabilidades das ordens de retiradas que realizam o evento.

Avaliação

A avaliação da aula terá caráter formativo, considerando a participação dos estudantes, a compreensão da relação entre retiradas e caminhos, a identificação correta das ordens favoráveis e a interpretação dos resultados obtidos. Para orientar esse acompanhamento, propõe-se a seguinte rubrica avaliativa:

Quadro 9 – Rubrica de avaliação formativa da aula com o método do saquinho.

Critério	Fraco	Em desenvolvimento	Satisfatório	Avançado
1) Participação dos estudantes Envolvimento nas atividades propostas, nas discussões em grupo e na socialização das ideias.	☐	☐	☐	☐
2) Compreensão da relação entre retiradas e caminhos Compreende como a ordem das retiradas das bolas determina o caminho na malha.	☐	☐	☐	☐
3) Identificação correta das ordens favoráveis Identifica corretamente as ordens de retiradas que levam ao caminho ou ponto solicitado.	☐	☐	☐	☐
4) Interpretação dos resultados obtidos Interpreta corretamente os resultados encontrados, relacionando-os ao contexto do jogo e ao conceito de probabilidade.	☐	☐	☐	☐

Fonte: Elabora pelo autor

A rubrica apresentada tem como finalidade auxiliar o professor na observação do desenvolvimento dos estudantes durante a aula, permitindo identificar avanços e dificuldades na compreensão da fórmula e em sua aplicação aos pontos da malha. Dessa forma, a avaliação valoriza não apenas o resultado dos cálculos, mas também a interpretação dos procedimentos utilizados e a clareza das justificativas produzidas pelos alunos.

5.5 Integração entre as Sequências Didáticas de Análise Combinatória e Probabilidade

As sequências didáticas apresentadas nas seções 5.3 e 5.4 foram organizadas separadamente para facilitar a compreensão e a aplicação pelo professor. No entanto, elas também podem ser desenvolvidas de forma integrada, pois os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade estão diretamente relacionados no contexto do jogo *MISSÃO(X,Y)*.

Na sequência de Análise Combinatória, os estudantes aprendem a contar os caminhos possíveis na malha, a representar trajetórias por sequências de movimentos e a determinar a quantidade de caminhos que passam por um ponto intermediário por meio da expressão $Q(x, y)$. Esses conhecimentos servem de base para a sequência de Probabilidade.

Na sequência de Probabilidade, os mesmos caminhos passam a ser interpretados como resultados possíveis de um experimento aleatório. Assim, o conjunto de todos os caminhos corresponde ao espaço amostral, enquanto os caminhos que passam por um ponto específico representam os casos favoráveis de um evento.

Dessa forma, a Análise Combinatória permite contar os casos possíveis e favoráveis, enquanto a Probabilidade utiliza essas contagens para calcular a chance de ocorrência de determinado evento. Por isso, o professor pode aplicar as duas sequências como uma única proposta didática, iniciando pela contagem de caminhos e avançando, em seguida, para a interpretação probabilística.

Essa integração favorece uma aprendizagem mais significativa, pois evita a fragmentação dos conteúdos e permite que os estudantes percebam a relação entre contagem, caminhos, eventos e probabilidades. Assim, o jogo *MISSÃO(X,Y)* pode ser utilizado como eixo articulador entre Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo discutir o potencial pedagógico da estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)* para a construção do raciocínio combinatório e probabilístico no Ensino Médio, tomando como eixo matemático o problema do ponto mais visitado em malhas retangulares. Ao longo da pesquisa, buscou-se mostrar que a Matemática pode ser ensinada de forma mais significativa quando os conteúdos são apresentados em situações investigativas, visualmente acessíveis e conectadas à participação ativa dos estudantes, perspectiva que se aproxima das contribuições de Grando, ao destacar que “propostas lúdicas no ensino da Matemática favorecem o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, a criatividade, a participação e o senso crítico”. (GRANDO apud RIBEIRO, 2008, p. 23).

O problema aqui tratado em retângulos também possui relação com o estudo desenvolvido por Santos e Castilho (2013) para malhas quadradas, no qual o ponto de máxima visitação ocorre em $(1,1)$, diferentemente do caso retangular analisado neste trabalho, em que $(1,0)$ pertence ao conjunto dos pontos de máxima visitação.

A reflexão desenvolvida permitiu compreender que os jogos, quando utilizados com intencionalidade pedagógica, não se limitam à função de tornar a aula mais dinâmica ou atrativa. Eles podem constituir verdadeiros ambientes de investigação, nos quais os alunos são levados a observar regularidades, levantar hipóteses, comparar estratégias, registrar procedimentos, justificar respostas e avançar gradualmente da experiência concreta para a formalização matemática. Nesse sentido, o jogo *MISSÃO(X,Y)* mostrou-se especialmente adequado, pois articula elementos lúdicos com conceitos matemáticos relevantes, favorecendo a passagem do intuitivo ao sistematizado.

No campo da Análise Combinatória, o estudo evidenciou que a contagem de caminhos em malhas retangulares possibilita explorar de maneira integrada noções como princípio fundamental da contagem, permutação com repetição, anagramas, arranjos, combinações e decomposição de percursos. A representação dos caminhos por sequências de movimentos para a direita e para cima permite ao estudante visualizar o sentido das contagens antes de operar apenas com fórmulas. Assim, a expressão $Q(x,y)$, utilizada para determinar a quantidade de caminhos que passam por um ponto intermediário, deixa de aparecer como um resultado isolado e passa a ser compreendida como consequência da decomposição do percurso em dois trechos.

No campo da Probabilidade, o recurso também se mostrou fecundo, pois permite interpretar os caminhos possíveis como elementos de um espaço amostral e os caminhos que passam por determinado ponto como casos favoráveis de um evento. Desse modo, a definição clássica de probabilidade pode ser trabalhada a partir de uma situação concreta, em que a contagem dos casos possíveis e favoráveis ganha significado visual e combinatório. Essa relação contribui para que os estudantes compreendam que a Probabilidade não se reduz à aplicação mecânica de uma fórmula, mas depende da identificação adequada do experimento, do espaço amostral, dos eventos e das condições envolvidas.

As sequências didáticas propostas constituem uma das principais contribuições deste trabalho, pois organizam um percurso progressivo de ensino que parte da vivência do jogo, passa pela investigação e pela discussão coletiva, e alcança a sistematização dos conceitos matemáticos. A elaboração separada das sequências de Análise Combinatória e Probabilidade favorece a clareza didática para o professor; ao mesmo tempo, a possibilidade de integração entre elas evidencia que esses conteúdos não devem ser tratados de maneira fragmentada, uma vez que a contagem de caminhos fornece a base para a interpretação probabilística dos eventos.

Outro aspecto relevante diz respeito ao papel do professor como mediador do processo de aprendizagem. A proposta apresentada exige uma condução pedagógica planejada, na qual o docente não apenas apresenta regras ou fórmulas, mas cria condições para que os estudantes investiguem, argumentem, testem possibilidades e construam sentido para os conceitos estudados. Dessa forma, o recurso pedagógico *MISSÃO(X,Y)* pode contribuir para uma prática matemática mais ativa, reflexiva e participativa, aproximando o estudante do raciocínio próprio da Matemática.

Cabe destacar, contudo, que este trabalho possui caráter teórico-propositivo, uma vez que se dedicou à fundamentação do tema, à formalização matemática do problema e à elaboração de sequências didáticas. Assim, não se pretende afirmar resultados empíricos de aplicação em sala de aula, mas apresentar uma proposta consistente que poderá ser utilizada, adaptada e avaliada em contextos escolares reais. Estudos futuros poderão aplicar as sequências didáticas com turmas do Ensino Médio, analisar as produções dos estudantes, observar suas dificuldades e verificar de que modo o jogo contribui efetivamente para a aprendizagem dos conceitos combinatórios e probabilísticos.

Diante do percurso realizado, conclui-se que *MISSÃO(X,Y)* constitui um recurso pedagógico promissor para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, pois permite integrar ludicidade, visualização, investigação, contagem, modelagem e interpretação probabilística. Ao trabalhar o problema do ponto mais visitado no plano cartesiano, o professor pode favorecer a compreensão de conceitos matemáticos importantes e, ao mesmo tempo, estimular o raciocínio lógico, a autonomia intelectual, a argumentação e a resolução de problemas.

Portanto, a proposta defendida neste trabalho reafirma a importância de metodologias que tornem o ensino da Matemática mais significativo, acessível e intelectualmente desafiador. Ensinar Matemática, nessa perspectiva, não consiste apenas em transmitir técnicas de cálculo, mas em criar situações nas quais o estudante possa experimentar, formular, justificar e compreender. O recurso didático *MISSÃO(X,Y)*, ao articular o brincar com o pensar matemático, mostra que a ludicidade, quando bem planejada, pode ser caminho para uma aprendizagem mais profunda, rigorosa e conectada ao desenvolvimento do pensamento matemático na Educação Básica.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Luís Lindemberg Souza. *Uso de applets do GeoGebra na matemática: uma sequência didática de análise combinatória para o ensino médio*. 2025. 91 f. il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2025. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171058005&id1=8022. Acesso em: 17 Ago. 2025.

ALMEIDA, Cristina José de. *Jogos de papéis: um estudo sobre o jogo de faz de conta na criança com deficiência mental*. 1995. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Especial, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1995.

ARIÈS, Philippe. *História social da criança e da família*. Rio de Janeiro: Afiliada, 1981.

AUSUBEL, David P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2006.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates*, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19, 1989. Disponível em: http://www.diadiaeducacao.pr.gov.br. Acesso em: 19 jul. 2011.

DOLZ, J.; SCHNEUWLY, B. *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado de Letras, 2004.

DOMINGUES, Rodrigo. *Probabilidade no ensino básico: possibilidades para uma abordagem axiomática*. 2023. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7369&id2=171057686. Acesso em: 16 jul 2025.

FARIAS, Ana Maria Lima de; LAURENCEL, Luiz da Costa. *Probabilidade*. Niterói: [s. n.], 2007. 117 p.

FERNÁNDEZ, Alicia. *A mulher escondida na professora: uma leitura psicopedagógica do ser mulher, corporeidade e aprendizagem*. Tradução de Dagmar Zibas. Petrópolis: Vozes, 2006.
GIRARDI, M. J. Brincar de viver o corpo. In: PICCOLO, V. L. N. *Educação física escolar... ser ou não ter?* São Paulo: Editora da UNICAMP, 1993. p. 73-86.

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade*. v. 5. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: ciências e aplicações: ensino médio*. v. 2. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KAMII, Constance. *A criança e o número*. 33. ed. Campinas: Papirus, 2005.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. *O brinquedo na educação: considerações históricas. Ideias: o cotidiano da pré-escola*. São Paulo: Fundação para o Desenvolvimento da Educação, n. 7, p. 39-45, 1990.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. *Jogos tradicionais infantis: o jogo, a criança e a educação*. Petrópolis: Vozes, 1993.

LIBÂNEO, José Carlos. *Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa: unindo ensino e modos de investigação*. In: PIMENTA, Selma Garrido; ALMEIDA, Maria Isabel de (org.). Pedagogia universitária. São Paulo: Edusp, 2009. p. 11–38.

LOPES, Adriana. *Probabilidade. Educa+Brasil*, 2018. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/probabilidade. Acesso em: 20 Ago. 2025.

LOPES, V. G. *Linguagem do corpo e movimento*. Curitiba: FAEL, 2006.

MACEDO, Lino. *Relações entre a ação e sua compreensão*. Ribeirão Preto: Editora Moderna, 1997.

MACEDO, Lino; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. *Quatro cores, senha e dominó: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

MARCELINO, Nelson Carvalho. *Estudos do lazer: uma introdução*. Campinas: Autores Associados, 1996.

MELO, Antônio Luiz de; SANTOS, Rogério César dos. *Uma solução definitiva para o problema do ponto mais visitado no plano e no espaço*. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, Bento Gonçalves, RS, v. 10, n. 1, p. e3007, 28 abr. 2024. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2024v10i1id6840.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. *Análise combinatória e probabilidade*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

NAME, M. A. *Vencendo com a matemática*. São Paulo: do Brasil, 2007.

NEGRINE, A. S. Fontes epistemológicas da psicomotricidade. In: NEGRINE, A. S. *Aprendizagem e desenvolvimento infantil: psicomotricidade – alternativa pedagógica*. Porto Alegre: Prodil, 1995.

OLIVEIRA, Neuton Xavier de. *Dinâmicas de jogos aplicadas no ensino de análise combinatória e probabilidade na educação básica*. 2024. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, PROFMAT – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Goiânia, 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171058250&id1=7842. Acesso em: 07 jul. 2025.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. *Fatorial. Mundo Educação*, 2023. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/fatorial.htm. Acesso em: 02 jan. 2025.

OLIVEIRA, Zilma Ramos de (Org.). *Educação infantil: muitos olhares*. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

PAULO, F. F. de. *Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para o ensino*. 2013. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/135rofmat_tcc.php?id1=788&id2=38467. Acesso em: 18 Set. 2025.

REGO, Fabiano da Conceição. *O uso da Mega Sena e técnicas de programação como ferramentas para o ensino de análise combinatória e probabilidade na educação básica*. 2025. 138 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São Paulo, Campus Diadema, Diadema, 2025. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171056779&id1=8134. Acesso em: 07 jul. 2025.

GRANDO, Regina Célia. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000

RIBEIRO, D. F. *Metodologia do ensino de matemática e física: jogos e modelagem na educação matemática*. Curitiba: IBPEX, 2008.

ROCCO, L. R. O. de. História da Teoria das Probabilidades. *GPET Física Unicentro*, 2020. Disponível em: https://www3.unicentro.br/petfisica/2020/04/02/historia-da-teoria-das-probabilidades/. Acesso em: 17 jul. 2025.

ROSS, Sheldon. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. Rio de Janeiro: Bookman, 2010.

ROTUNNO, Sandra Aparecida Martins. *Estatística e Probabilidade: um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

SANTOS, Rogério César dos. *Análise praxeológica de produções de estudantes de graduação: um estudo a partir do problema do ponto mais visitado*. 2017. 146 f., il. Tese (Doutorado em Educação) Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/31409/1/2017_RogerioCesardosSantos.pdf Acesso em: 20 de Jun. 2025

SANTOS, Rogério César dos; CASTILHO, José Eduardo. O problema do ponto mais visitado. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 82, p. 50-52, 2013. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/82/11.html. Acesso em: 14 ago. 2023.

SILVA, Iago Barros dos Anjos. *Análise combinatória: uma abordagem com base em questões do ENEM*. 2024. 85 p. il. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, PROFMAT-SBM, Brasília, 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171058144&id1=7535. Acesso em: 07 jul. 2025.

SOARES, Elton José. *Probabilidade, erros intuitivos e falácias: uma abordagem para o ensino médio*. 2024. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7678&id2=171058140. Acesso em: 26 Ago. 2025.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – Folha de aplicação da malha 5 × 3 da estratégia lúdica *MISSÃO(X,Y)*

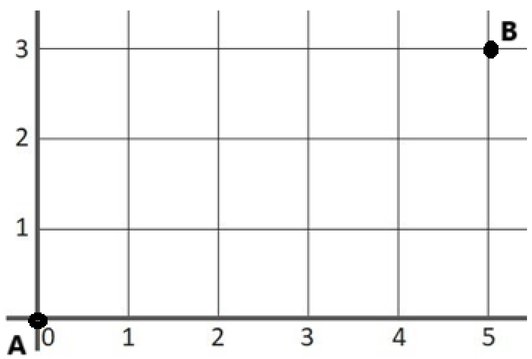
Nome completo:			
Data:	Professor:	Turma:	Nota:

RECURSO PEDAGÓGICO: MISSÃO (X, Y)

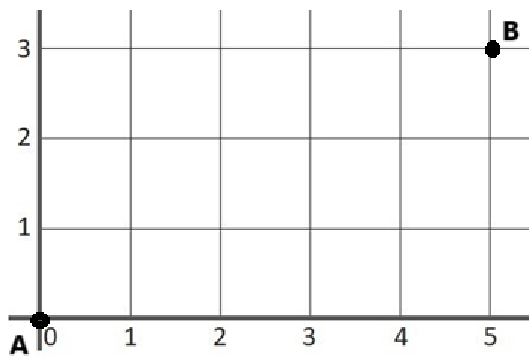
📃 Tabela de Instruções do Jogo

Etapa	Instrução
🎯 **Objetivo do jogo**	Acertar um ponto que esteja no caminho gerado pelo sorteio das bolas.
👫 **Participantes**	2 alunos por rodada.
🎁 **Material necessário**	1 saquinho com **8 bolas**: 5 vermelhas (→ direita) e 3 azuis (↑ cima).
🗺️ **Plano do jogo**	Plano cartesiano de **5x3**, com ponto inicial **A(0,0)** e final **B(5,3)**.
📍 **Escolha de ponto**	Cada aluno escolhe **um ponto qualquer** no plano (menos o início e o fim).
🔄 **Como jogar**	Sorteie as 8 bolas, uma a uma, e vá traçando o caminho no plano.
🏁 **Condição de vitória**	Vence quem tiver escolhido **um ponto que está no caminho sorteado**.
🤝 **Empate**	Se mais de um acertar, todos são vencedores. Pode haver empate!
💡 **Dica estratégica**	Pense nos pontos que têm **mais chance** de aparecer em vários caminhos.

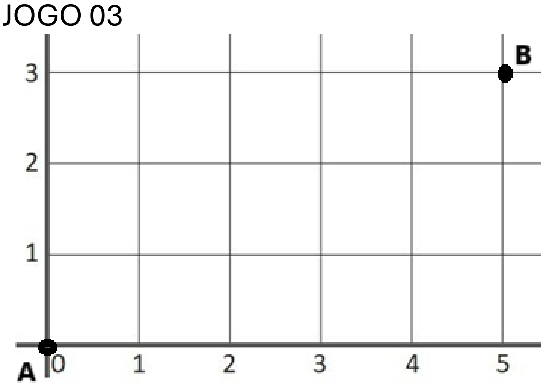
JOGO 01



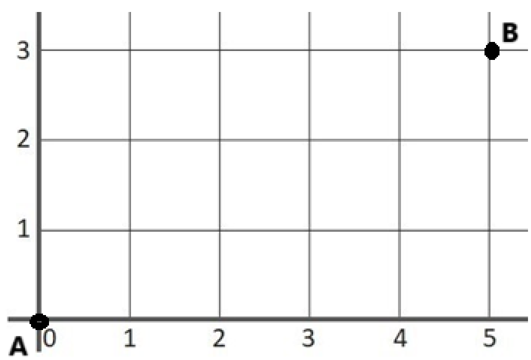
JOGO 02



JOGO 03



JOGO 04



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE B – Ficha de investigação de caminhos para a malha 5×3

Ponto (x,y)	Movimentos de A até (x,y)	Permutação com repetição	Movimentos de (x,y) até B=(5,3)	Permutação com repetição	$Q(x,y)$
(1,0)					
(2,0)					
(3,0)					
(4,0)					
(5,0)					
(0,1)					
(1,1)					
(2,1)					
(3,1)					
(4,1)					
(5,1)					
(0,2)					
(1,2)					
(2,2)					
(3,2)					
(4,2)					
(5,2)					
(0,3)					
(1,3)					
(2,3)					
(3,3)					
(4,3)					

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE C – Ficha de investigação probabilística para a malha 5×3

Ponto analisado	Localização do ponto	Caminhos favoráveis $Q(x,y)$	Total de caminhos	Probabilidade	Observação
(1,0)	Borda inferior		56		
(1,1)	Ponto interno		56		
(2,1)	Ponto interno		56		
(3,1)	Ponto interno		56		
(4,2)	Simétrico de (1,1)		56		
(4,3)	Simétrico de (1,0)		56		
(0,3)	Borda esquerda		56		
(5,0)	Borda inferior		56		

Fonte: Elaborado pelo autor.