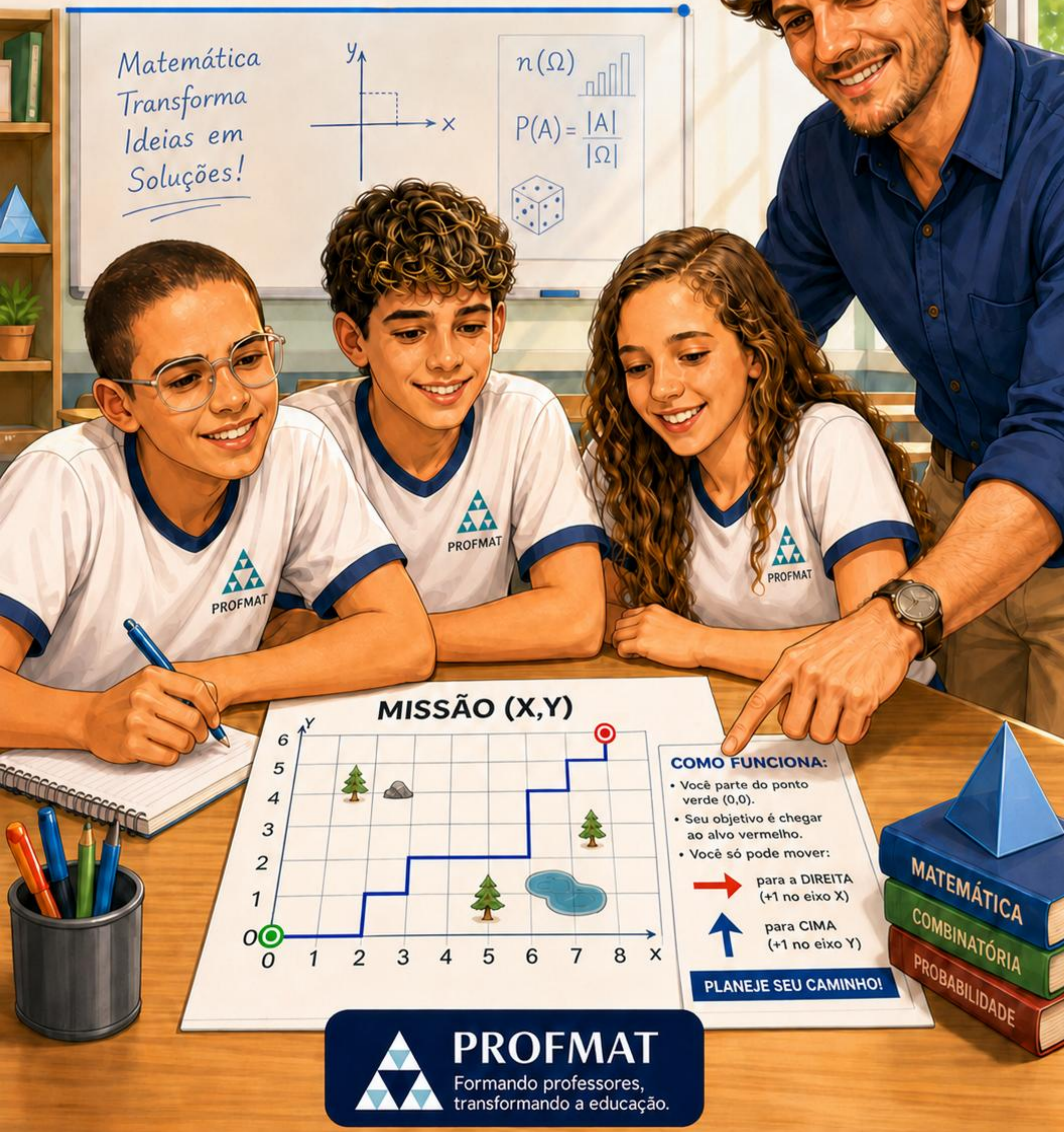
MISSÃO(X,Y)

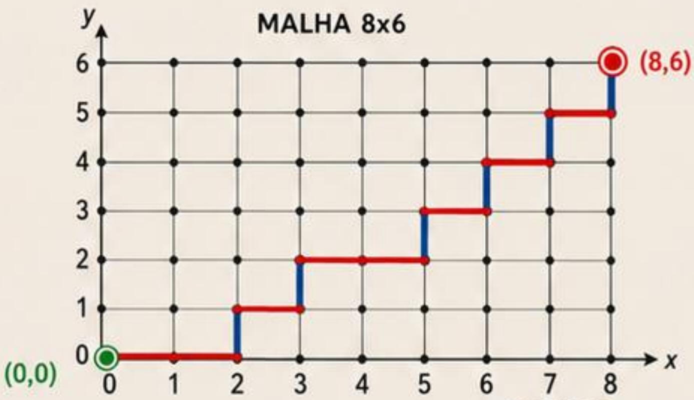
– Um desenvolvimento para o Raciocínio Combinatório e Probabilístico para o Ensino Médio



MISSÃO (X,Y)

Um recurso lúdico para desenvolver raciocínio combinatório e probabilístico no Ensino Médio

Este recurso educacional apresenta sequências didáticas para o Ensino Médio que integram Análise Combinatória e Probabilidade por meio do jogo MISSÃO (X,Y), utilizando o plano cartesiano como eixo estruturante.



As atividades exploram contagem, permutações, arranjos, combinações e probabilidades em malhas quadriculadas, conectando conceitos matemáticos a situações do jogo e a experiências significativas da vida real.

Ideal para promover investigação, colaboração, tomada de decisões e argumentação, o material convida os estudantes a aprender Matemática jogando, refletindo e construindo conhecimento.

O que este recurso proporciona:

Aprendizagem Investigativa
Atividades que estimulam a exploração, a conjectura e a argumentação.

Raciocínio e Probabilidade
Conexão entre o jogo, a teoria e situações do cotidiano.

Desenvolvimento de Competências
Raciocínio lógico, tomada de decisões e trabalho em equipe.

Conexão com o Ensino Médio
Conteúdos alinhados à BNCC e às demandas da educação contemporânea.

Recursos para Professores
Material pronto para aplicar, adaptar e transformar sua aula!

SOBRE O AUTOR

Geovanne Almeida dos Santos

Mestre em Matemática pela Universidade de Brasília

Professor da Rede Municipal de Formosa

Orientador: Dr. Rogério César dos Santos

ORIGEM ACADÊMICA DO TRABALHO

Este recurso é fruto de pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

UnB
Universidade de Brasília

TÍTULO DA PESQUISA

MISSÃO (X,Y): UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO POR MEIO DO ESTUDO DO PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO NO PLANO CARTESIANO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

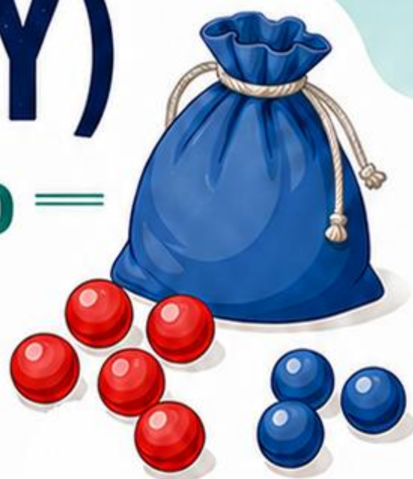
PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jogar, investigar e explicar: um caminho divertido para transformar desafios em aprendizagem significativa!

MISSÃO (X,Y)

Regras do Recurso



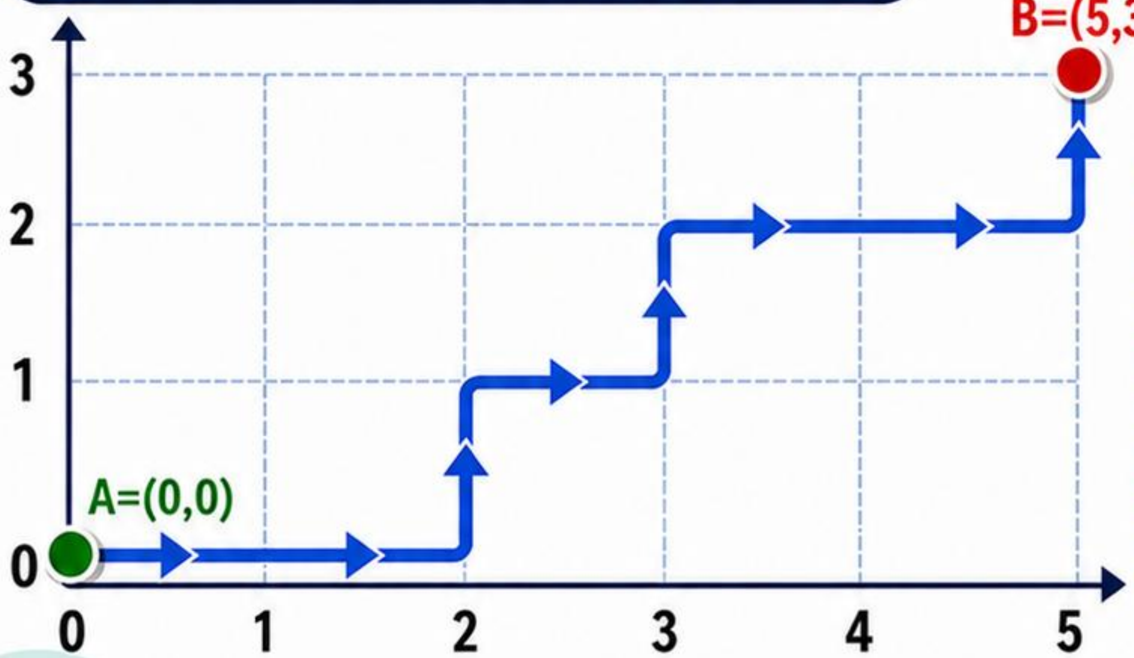
1 REGRAS DO RECURSO

- O recurso é realizado em qualquer malha M × N. Exemplo: 5 × 3.
- O caminho começa em A=(0,0) e termina em B=(5,3),
- Cada jogador escolhe um ponto da malha, exceto os pontos A e B.
- No saquinho há 5 bolas vermelhas e 3 bolas azuis.
- A cada retirada, sem reposição:
  - bola vermelha = 1 passo para a DIREITA
  - bola azul = 1 passo para CIMA
- As retiradas formam o caminho na malha.
- Vence quem escolher um ponto por onde o caminho passar.

→ Direita

↑ Cima

2 MALHA 5×3 – EXEMPLO DE CAMINHO



Sequência do exemplo

D, D, C, D, C, D, D, C

$y = mx + b$

π

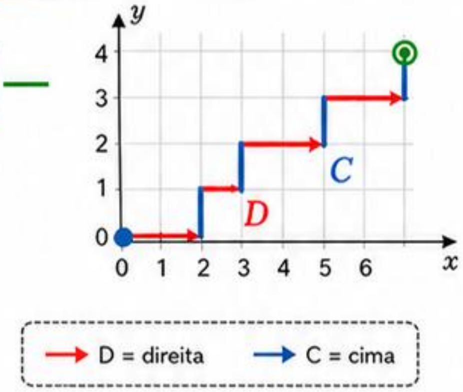
Sequência Didática Para o Ensino de Análise Combinatória a Partir do Recurso

MISSÃO(X,Y)

Raciocínio e Estratégia | Combinações e Probabilidades | Recursos que Ensinam | Aprendizagem Significativa

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sequência Didática Para o Ensino de Análise Combinatória a Partir do Recurso MISSÃO (X,Y)



Identificação da Sequência Didática

1

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

Componente curricular: Matemática.

Ano: 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Turma: Turmas do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Quantidade de aulas: 7 aulas de 50 minutos cada.

2

Conteúdos desenvolvidos

Plano cartesiano; leitura e representação de pontos (x,y); caminhos em malhas retangulares; Princípio Fundamental da Contagem; permutação simples; permutação com repetição; anagramas; arranjo simples; combinação simples; interpretação de caminhos como sequências de passos D direita e C cima; decomposição de percursos em dois trechos independentes; formalização da expressão $Q(x,y)$ para a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário.

3

Competências da BNCC

A sequência didática articula-se com competências da BNCC relacionadas à investigação, à resolução de problemas, ao uso de estratégias matemáticas e à interpretação de situações em diferentes contextos. Favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação matemática, da leitura de representações no plano cartesiano e da capacidade de relacionar experiências concretas de jogo a estruturas formais da Análise Combinatória.

4

Habilidades

As habilidades listadas, a seguir, constam na BNCC (Brasil, 2018) com seus respectivos códigos:

EM13MAT310 – Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

5

Objetivo geral

Promover a compreensão de conceitos fundamentais da Análise Combinatória a partir do recurso MISSÃO (X,Y), articulando experimentação, representação geométrica, linguagem combinatória e formalização matemática no estudo da contagem de caminhos em malhas retangulares.

6

Objetivos específicos

- Apresentar o jogo MISSÃO (X,Y) e explorar sua dinâmica em malhas retangulares.
- Retomar ideias iniciais de Análise Combinatória, especialmente o Princípio Fundamental da Contagem e a distinção entre situações em que a ordem importa e situações em que a ordem não importa.
- Relacionar a noção de anagrama com repetição à representação dos caminhos do jogo por sequências de passos D e C.
- Sistematizar formalmente os conceitos de permutação, anagramas, arranjo e combinação.
- Compreender a contagem de caminhos em malhas retangulares como problema combinatório.
- Analisar caminhos que passam por um ponto intermediário (x,y), decompondo o percurso em dois trechos independentes.
- Formalizar a expressão $Q(x,y)$ como modelo para a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário.
- Fazer com que os alunos possam intuir qual é o ponto mais visitado ou o mais provável de ser tocado por um caminho aleatório ao se escolher a trajetória por meio de retiradas aleatórias de bolas azuis e vermelhas sem reposição.

Sequência Didática Para o Ensino de Análise Combinatória a Partir do Recurso MISSÃO (X,Y)

Identificação da Sequência Didática

7 Público-alvo

Estudantes do 2º e do 3º ano do Ensino Médio, turmas que já tenham tido contato inicial ou não com os conteúdos básicos de Análise Combinatória e estejam em processo de consolidação e aprofundamento desses conceitos.

8 Recursos didáticos

Folha de aplicação do recurso MISSÃO (X,Y); malhas retangulares impressas; saquinho com bolas coloridas representando movimentos para a direita e para cima; quadro; projetor, quando disponível; folhas de registro; calculadora, se necessário.

9 Metodologia usada

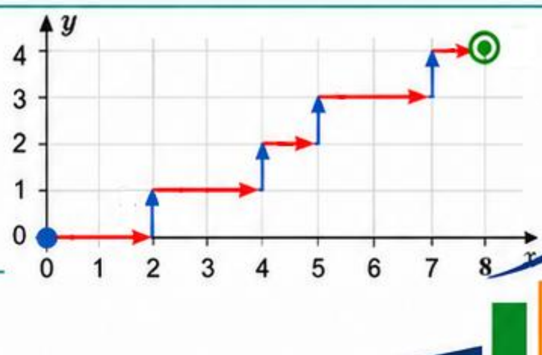
A sequência didática fundamenta-se em uma abordagem investigativa e progressiva, organizada de modo a articular experimentação, retomada conceitual, sistematização formal e aplicação matemática. Inicialmente, os estudantes entram em contato com o recurso MISSÃO (X,Y) em sua dimensão concreta, explorando trajetórias em malhas retangulares e registrando caminhos possíveis. Em seguida, são retomadas ideias iniciais de Análise Combinatória, com ênfase na distinção entre diferentes estruturas de contagem e na leitura de situações em que a ordem interfere ou não no resultado. Posteriormente, a proposta avança para a relação entre os caminhos do recurso e os anagramas com repetição, estabelecendo uma ponte conceitual entre a experiência lúdica e a formalização matemática. Na continuidade, os conceitos de permutação, anagramas, arranjo e combinação são formalizados e, por fim, aplicados ao problema da contagem de caminhos que passam por um ponto intermediário, culminando na construção da expressão Q(x,y). Dessa forma, a metodologia privilegia a participação ativa dos estudantes, a formulação de hipóteses, a comparação de estratégias e a passagem gradual do concreto ao abstrato.

10 Avaliação

A avaliação assume caráter diagnóstico, processual e formativo, considerando a participação dos estudantes nas discussões, a compreensão das regras do jogo, a capacidade de representar caminhos por sequências de passos, a identificação de estruturas de contagem, a distinção entre permutação, arranjo e combinação, a decomposição correta dos percursos e a aplicação adequada da expressão Q(x,y). Também serão observadas a clareza dos registros, a consistência das justificativas e a capacidade de relacionar estratégias intuitivas a formalizações matemáticas.

11 Temática integradora

Jogos matemáticos e raciocínio combinatório no plano cartesiano.



Aula 1 – Introdução ao recurso MISSÃO (X,Y)

$x^2 + y^2 = r^2$

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Apresentar o recurso MISSÃO (X,Y), explorar sua dinâmica em uma malha retangular e iniciar a discussão sobre caminhos, sequências de movimentos e ideias iniciais de contagem.

Professor

Estudantes em duplas

Contexto de sala de aula

Conteúdos mobilizados

Plano cartesiano; pontos (x,y); caminhos em malha retangular; representação de trajetórias por sequências de passos; ideias iniciais de contagem.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1 – Discussão inicial e ativação de conhecimentos prévios

A aula tem início com a apresentação de uma malha retangular 5×3, na qual o professor propõe à turma a seguinte questão: como sair de A=(0,0) e chegar a B=(5,3), realizando apenas movimentos para a direita e para cima? A partir das respostas dos estudantes, são registrados no quadro dois ou três caminhos possíveis, tanto na forma de desenho na malha quanto na forma de sequência de passos, representados, por exemplo, pelas letras D para direita e C para cima. Esse momento busca ativar conhecimentos prévios relativos ao plano cartesiano e favorecer a percepção de que cada caminho pode ser entendido como uma sequência ordenada de movimentos.

Etapa 2 – Formulação da questão norteadora

Após a discussão inicial, o professor propõe uma questão norteadora para introduzir o problema matemático que será desenvolvido ao longo da sequência didática: sem listar um por um, como poderíamos contar quantos caminhos existem de A até B, usando apenas movimentos para a direita e para cima? Caso considere pertinente, pode ainda acrescentar uma segunda questão: se fixarmos um ponto (x,y), como contar quantos caminhos passam por ele? Nesse momento, não se espera uma formalização imediata, mas sim o levantamento de hipóteses e a mobilização do pensamento investigativo dos estudantes.

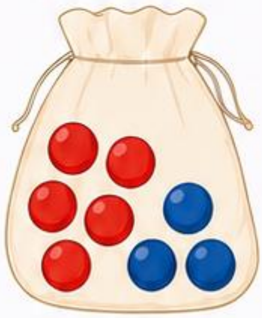
Etapa 3 – Apresentação do recurso MISSÃO (X,Y)

Em seguida, o professor apresenta a estratégia lúdica MISSÃO(X,Y), utilizando a folha de aplicação com a malha 5 × 3 disponibilizada no Apêndice A, bem como um saquinho previamente confeccionado pelo próprio professor, contendo 5 bolas vermelhas, que representam movimentos para a direita, e 3 bolas azuis, que representam movimentos para cima.

Os estudantes são organizados em duplas, e cada jogador escolhe um ponto da malha, excluindo-se os pontos inicial e final. As bolas são sorteadas sem reposição, uma a uma, e a sequência obtida determina o caminho a ser traçado na malha. Após o sorteio, verifica-se se o caminho passou ou não pelo ponto escolhido por cada estudante. Caso mais de um jogador tenha escolhido pontos visitados pelo caminho, todos registram o acerto. Caso nenhum dos pontos escolhidos seja visitado, a rodada é utilizada para análise coletiva do caminho formado.

Para garantir a compreensão das regras, o professor realiza inicialmente uma rodada demonstrativa no quadro, registrando a sequência sorteada e o caminho correspondente. O material do jogo prevê exatamente essa dinâmica, com plano 5×3, ponto inicial e final fixos, escolha prévia de pontos pelos participantes e registro das rodadas realizadas.

Saquinho do recurso



5 bolas vermelhas (movimentos para a direita)

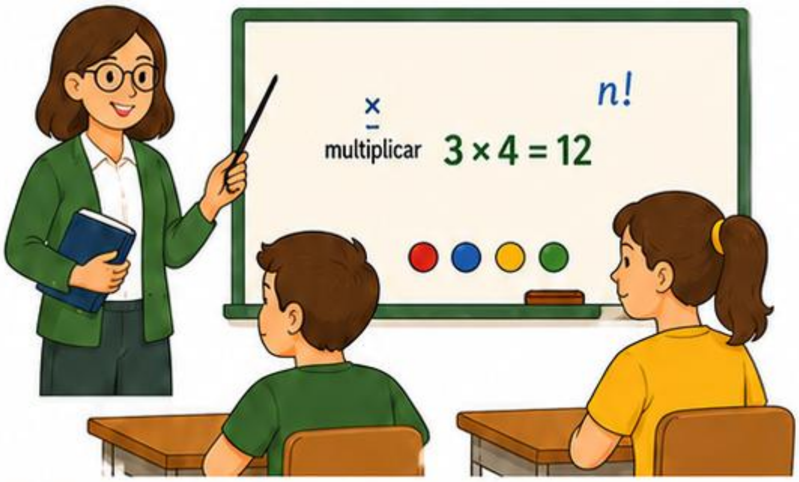
3 bolas azuis (movimentos para cima)

Etapa 4 – Exploração guiada do recurso

Após a demonstração, os estudantes realizam algumas rodadas do jogo, registrando, em cada uma, a sequência sorteada e o caminho correspondente. Durante esse momento de exploração, o professor acompanha os grupos, esclarece dúvidas e chama a atenção para regularidades importantes, como o fato de que todos os caminhos começam em A, terminam em B e utilizam sempre a mesma quantidade de movimentos para a direita e para cima. Busca-se, com isso, favorecer um primeiro aproximação intuitiva entre o recurso e o raciocínio combinatório, sem ainda introduzir formalizações excessivas.

Aula 2 – Ideias iniciais de análise combinatória

Duração: 50 minutos

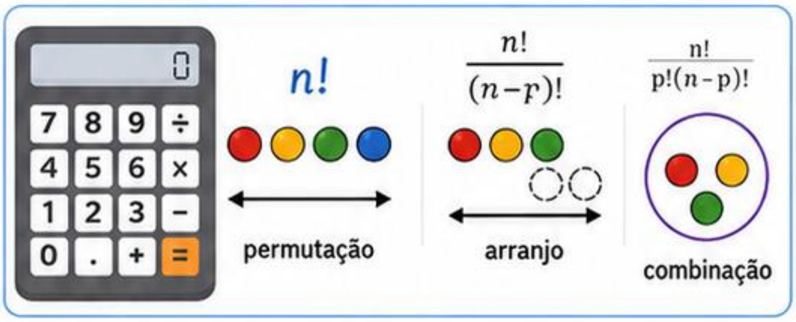


Objetivo da aula

Estudar os conceitos iniciais de Análise Combinatória, especialmente o Princípio Fundamental da Contagem e a distinção entre situações em que a ordem importa e situações em que a ordem não importa, preparando os estudantes para a análise dos caminhos no recurso MISSÃO (X,Y).

Conteúdos mobilizados

Princípio Fundamental da Contagem; permutação; arranjo; combinação; ordem importa e ordem não importa.



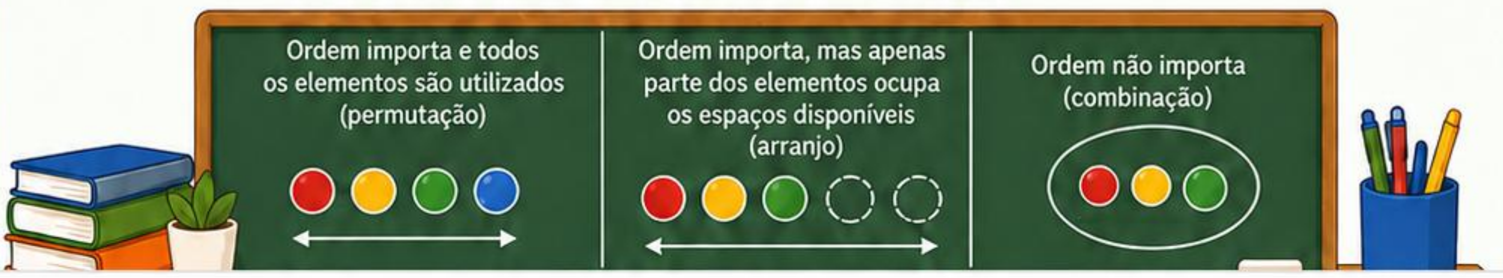
Desenvolvimento da aula:

Etapa 1 – Conceitos básicos de Análise Combinatória

A aula inicia-se com uma breve retomada de ideias já estudadas pelos alunos, com foco em conceitos que serão mobilizados ao longo da sequência didática. O professor apresenta, de forma oral e intuitiva, o Princípio Fundamental da Contagem, destacando que, quando uma escolha se organiza em etapas independentes, o número total de possibilidades pode ser obtido pela multiplicação das possibilidartes de cada etapa. Em seguida, retoma a distinção entre situações em que a ordem importa e situações em que a ordem não importa, associando essas ideias aos conceitos de permutação, arranjo e combinação. Nesse momento, a abordagem deve privilegiar exemplos cotidianos e compreensão conceitual, sem formalização algébrica.

Etapa 2 – Atividade diagnóstica sobre situações de contagem

Após essa retomada inicial, o professor propõe uma atividade diagnóstica em que os estudantes são convidados a citar situações do cotidiano que envolvam contagem. As respostas apresentadas são organizadas no quadro em três colunas: situações em que a ordem importa e todos os elementos são utilizados (permutação); situações em que a ordem importa, mas apenas parte dos elementos ocupa os espaços disponíveis (arranjo); e situações em que a ordem não importa (combinação). A partir dessa sistematização, o professor conduz a discussão, ajustando classificações quando necessário e explorando oralmente o significado das diferentes formas de organização. O objetivo dessa etapa é verificar se os estudantes reconhecem, em contextos simples, os significados envolvidos em permutação, arranjo e combinação. Além disso, busca-se levá-los a perceber, de forma intuitiva, que, em todos esses casos, os cálculos podem ser compreendidos a partir do Princípio Fundamental da Contagem, ainda que sem o uso imediato de fórmulas. A partir dos exemplos trazidos pelos próprios alunos, o professor pode explorar essas relações, favorecendo uma compreensão inicial das diferentes estruturas de contagem.



Aula 3 – Anagramas e a ponte entre permutação com repetição e o recurso MISSÃO (X,Y)

Duração: 50 minutos

Professor

Estudantes em duplas

Contexto de sala de aula

Objetivo da aula

Explorar a ideia de permutação por meio de anagramas com e sem repetição, estabelecendo uma ponte conceitual entre palavras com letras repetidas e os caminhos do recurso MISSÃO (X,Y).

Conteúdos mobilizados

Permutação simples; permutação com repetição; anagramas; organização de sequências; representação de caminhos por letras D e C.

Anagramas – exemplos

Letras diferentes

VIDA

V I D A

Alguns anagramas:
VIDA, VIAD, VDAI, VADI, ...

Letras repetidas

ANA

A N A

Alguns anagramas:
ANA, AAN, NAA

MAMA

M A M A

Alguns anagramas:
MAMA, MAAM, AMMA, ...

Desenvolvimento da aula

1 Etapa 1 – Exploração de anagramas com letras diferentes

O professor inicia a aula apresentando palavras formadas por letras todas diferentes, como por exemplo VIDA, e propõe aos estudantes a seguinte questão: quantos anagramas podem ser formados com essas letras? A discussão deve levar os alunos a perceber que, nesse caso, cada reorganização das letras gera uma nova palavra possível, pois todas as letras são distintas. O objetivo é reativar a ideia de permutação simples de modo concreto e acessível.

VIDA

V I D A

VIDA → VIAD → VDAI → VADI → ...

2 Etapa 2 – Exploração de anagramas com letras repetidas

Na sequência, o professor introduz palavras com letras repetidas, como ANA, MAMA, ARARA e CEREJA, e pergunta se todas as trocas de posição continuam gerando novas possibilidades distintas. A partir das respostas dos estudantes, conduz a percepção de que, quando há letras iguais, certas trocas não produzem uma nova configuração. Com isso, introduz-se intuitivamente a ideia de permutação com repetição, destacando que o número de arranjos distintos depende não apenas do número total de letras, mas também de existência de repetições.

Exemplos

ANA: A N A

MAMA: M A M A

ARARA: A R A R A

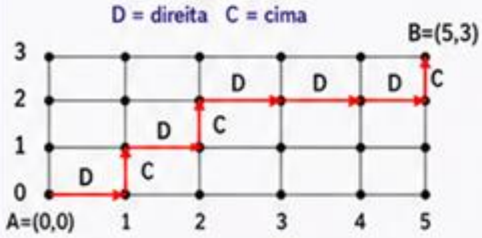
CEREJA: C E R E J A

3 Etapa 3 – Ponte conceitual com o recurso MISSÃO (X,Y)

Após a discussão com anagramas, o professor estabelece a ponte com o recurso MISSÃO (X,Y). Destaca-se que cada caminho do recurso pode ser representado por uma palavra formada por letras D e C, em que D representa um passo para a direita e C um passo para cima. No caso da malha 5×3, por exemplo, cada caminho corresponde a uma sequência com 5 letras D e 3 letras C. Assim, o problema de contar caminhos pode ser interpretado como o problema de contar anagramas de uma palavra com letras repetidas. Essa aproximação torna a ideia de permutação com repetição mais concreta e mais coerente com o contexto do recurso.

Malha 5×3

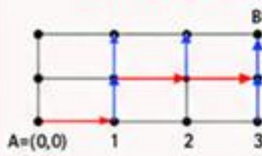
D = direita C = cima



4 Etapa 4 – Exploração de exemplos no contexto do recurso

Em seguida, o professor utiliza uma malha menor, como 3×2, e registra no quadro alguns caminhos possíveis, representando-os como palavras com letras D e C. A turma é convidada a observar que diferentes ordens das mesmas letras geram diferentes trajetórias. A partir disso, os estudantes discutem como a contagem dos caminhos se relaciona com a contagem de anagramas distintos. O objetivo não é ainda esgotar a formalização, mas consolidar a compreensão de que o recurso pode ser lido como um problema de permutação com repetição.

Malha 3×2 – Caminhos possíveis



Exemplos de sequências

D = direita C = cima

D D C D C
D C D D C

5 Etapa 5 – Atividade prática em duplas

Na parte final da aula, os estudantes trabalham em duplas com pequenos exemplos. Podem, por exemplo, representar caminhos em uma malha 4×2 ou 3×2 como palavras formadas por letras D e C, comparar diferentes sequências e discutir quais delas representam caminhos distintos. Durante essa atividade, o professor acompanha os grupos, ouve as estratégias utilizadas e seleciona algumas produções para socialização, reforçando a ligação entre anagramas com repetição e contagem de caminhos.

Malha 4×2

D = direita C = cima

Aula 4 – Formalização de permutação e anagramas

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Sistematizar formalmente os conceitos de permutação e anagramas, relacionando suas definições e fórmulas a situações já discutidas em aula.

Conteúdos mobilizados

Permutação simples; permutação com repetição; anagramas; fatorial; ordem importa.

IDEIAS-CHAVE DA AULA

ORDEM IMPORTA

Fila de pessoas. Ordens diferentes produzem resultados diferentes.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

$$P_n = n!$$

Ordenação de todos os elementos de um conjunto.

ANAGRAMAS

L E T R A

Aplicação da permutação no contexto das palavras.

ANAGRAMAS: DIFERENTES SITUAÇÕES

Letras todas diferentes

V I D A

Todas as trocas geram novas palavras.

Letras com repetição

M A M A

Trocas entre letras iguais não produzem novas disposições. É preciso ajustar a contagem.

Desenvolvimento da aula

1 Etapa 1 – Retomada e organização dos exemplos da aula anterior

A aula inicia-se com uma breve retomada dos exemplos cotidianos apresentados pelos estudantes na Aula 2, já classificados conforme os critérios discutidos anteriormente. O professor recupera situações em que a ordem interfere no resultado, retomando a distinção entre diferentes estruturas de contagem. Esse momento tem como finalidade recuperar a base intuitiva construída anteriormente e preparar a turma para a sistematização formal dos conceitos que serão trabalhados nesta aula.

EXEMPLOS RETOMADOS

Ordem interfere

A ordem das pessoas na fila muda o resultado.

Ordem não interfere

Conjuntos de frutas: a ordem de escolha não altera o resultado.

Recuperar a base intuitiva para a formalização dos conceitos.

2 Etapa 2 – Formalização da permutação e dos anagramas

Em seguida, o professor apresenta a permutação simples como a ordenação de todos os elementos de um conjunto, introduzindo a expressão $P_n = n!$. Nesse momento, retoma exemplos em que todos os elementos são utilizados e a ordem altera o resultado, como a organização de pessoas em uma fila ou a disposição de objetos distintos em determinada sequência.

A seguir, introduz a noção de anagrama como aplicação da permutação no contexto das palavras, mostrando inicialmente casos com letras todas diferentes. Depois, amplia a discussão para palavras com letras repetidas, destacando que, nesses casos, a contagem exige ajuste, pois trocas entre letras iguais não produzem novas disposições. Com isso, apresenta-se a ideia de permutação com repetição, utilizando exemplos simples que favoreçam a compreensão do conceito.

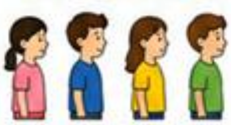
Permutação simples

Ordenação de todos os elementos.

$$P_n = n!$$

Exemplos (todos os elementos usados)

Pessoas em uma fila



Ordens diferentes produzem resultados diferentes.

Objetos em sequência

Sequências diferentes produzem resultados diferentes.

Anagramas: aplicação da permutação no contexto das palavras

Letras todas diferentes

V I D A

Todas as trocas entre as letras geram novas palavras.

Letras com repetição

M A M A

Trocas entre letras iguais não produzem novas disposições. É preciso ajustar a contagem.

A formalização conecta as ideias intuitivas à linguagem matemática, permitindo resolver e analisar diferentes problemas de contagem com precisão.

$n!$ P_n = ?

Aula 5 – Formalização de arranjo e combinação

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Sistematizar formalmente os conceitos de arranjo e combinação, distinguindo situações em que a ordem importa daquelas em que a ordem não interfere no resultado.

Conteúdos mobilizados

Arranjo simples; combinação simples; fatorial; ordem importa e ordem não importa; comparação entre estruturas de contagem.

Desenvolvimento da aula

Etapa 1

Formalização do arranjo simples

A aula inicia-se com a apresentação do arranjo simples como situação em que se escolhem alguns elementos de um conjunto e a ordem da escolha interfere no resultado. Introduz-se a expressão $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ e retomam-se, sempre que possível, exemplos já mencionados pelos estudantes, como a escolha de presidente e vice entre vários candidatos ou a definição de primeiro, segundo e terceiro lugares em uma competição. A intenção é mostrar que o arranjo difere da permutação por envolver apenas parte dos elementos disponíveis, preservando, porém, a importância da ordem.

Etapa 2

Formalização da combinação simples

Na sequência, o professor formaliza a combinação simples como situação em que se escolhem elementos de um conjunto sem considerar a ordem. Introduz-se a expressão $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$ e retomam-se exemplos nos quais apenas a escolha dos elementos importa, como a formação de uma comissão, de um grupo ou de uma equipe sem distribuição de cargos. Nesse momento, o professor destaca explicitamente o contraste entre arranjo e combinação, reforçando que a diferença central entre ambos está no papel da ordem.

Etapa 3

Comparação entre arranjo e combinação

Na etapa final do desenvolvimento, o professor promove uma comparação dirigida entre arranjo e combinação, evidenciando que ambas as estruturas envolvem a escolha de elementos, mas se distinguem pelo papel da ordem no resultado. Com base em exemplos cotidianos já trabalhados com a turma, os estudantes analisam em quais situações a posição ocupada pelos elementos altera a contagem e em quais situações apenas a seleção do grupo é relevante. Essa atividade tem por finalidade consolidar os critérios de distinção entre os dois conceitos e fortalecer a capacidade dos estudantes de identificar, em diferentes contextos, o modelo de contagem mais adequado.

Aula 6 – Decomposição de caminhos que passam por um ponto intermediário

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Levar os estudantes a compreender que a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário (x, y) pode ser construída a partir da decomposição do percurso em dois trechos independentes.

Conteúdos mobilizados

Contagem de caminhos em malhas retangulares; anagramas com repetição; decomposição de trajetórias; ponto intermediário (x, y); leitura de coordenadas no plano cartesiano; Princípio Fundamental da Contagem.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Etapa 1

Retomada de um exemplo da folha do recurso

A aula inicia-se com a retomada de um dos exemplos presentes na folha de aplicação utilizada na primeira aula da sequência, na qual os estudantes registraram caminhos obtidos no recurso MISSÃO(X, Y). O professor recupera a malha correspondente e relembra com a turma que cada caminho pode ser representado por uma sequência de letras, em que D representa um passo para a direita e C representa um passo para cima. Nesse momento, o objetivo é recolocar os estudantes diante de um exemplo concreto já conhecido, para que a nova discussão se apoie em uma experiência previamente vivenciada.

Etapa 2

Interpretação dos caminhos como anagramas com repetição

Na sequência, o professor retoma a ideia de que cada caminho no jogo pode ser visto como uma palavra formada por letras repetidas. Em uma malha $M \times N$, todo caminho entre $A = (0, 0)$ e $B = (M, N)$ é composto por M passos para a direita e N passos para cima, podendo, portanto, ser interpretado como um anagrama de uma palavra com M letras D e N letras C. A partir dessa observação, o professor reforça que a contagem dos caminhos está diretamente ligada à contagem de anagramas com repetição, retomando a lógica combinatória construída nas aulas anteriores.

Etapa 3

Introdução do ponto intermediário (x, y)

Depois dessa retomada, o professor escolhe, em conjunto com a turma, um ponto intermediário (x, y) da malha, deixando claro que, neste contexto, não serão considerados os pontos inicial A e final B. Em seguida, propõe a questão central da aula; quantos caminhos de A até B passam obrigatoriamente por esse ponto? A intenção, nesse momento, é deslocar a atenção do número total de caminhos para a contagem de um subconjunto específica deles, determinado pela condição de passagem por (x, y).

Etapa 4

Etapa 4 – Decomposição do percurso em dois trechos e preenchimento da ficha de investigação

O professor conduz a turma à observação de que todo caminho que passa por um ponto intermediário (x, y) pode ser decomposto em dois trechos. O primeiro trecho corresponde ao percurso de $A(0, 0)$ até (x, y), enquanto o segundo corresponde ao percurso de (x, y) até $B(M, N)$.

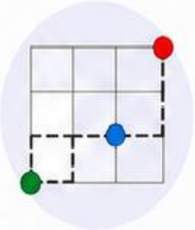
Continuação...

Aula 6 – Decomposição de caminhos que passam por um ponto intermediário

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Etapa 4

Etapa 4 – Decomposição do percurso em dois trechos e preenchimento da ficha de investigação



A partir dessa decomposição, os estudantes são levados a perceber que, no primeiro trecho, são necessários exatamente x movimentos para a direita e y movimentos para cima. No segundo trecho, por sua vez, são necessários $M-x$ movimentos para a direita e $N-y$ movimentos para cima. Desse modo, cada parte do percurso passa a ser interpretada como um problema próprio de contagem de caminhos, ou, equivalentemente, como uma permutação com repetição dos movimentos realizados.

Para favorecer a compreensão dessa estrutura combinatória, o professor propõe o preenchimento de uma ficha de investigação, tomando como referência uma malha 5×3. Nessa ficha, os estudantes deverão calcular a quantidade de caminhos de $A(0,0)$ até o ponto escolhido, a quantidade de caminhos desse ponto até $B(5,3)$ e, por fim, o produto dessas duas quantidades, obtendo o valor de $Q(x,y)$. O modelo da ficha utilizada na atividade encontra-se no **Apêndice B**. A seguir, apresenta-se um exemplo de sua organização.

Ponto (x,y)	Movimentos de A até (x,y)	Permutação com repetição	Movimentos de (x,y) até B $=(5,3)$	Permutação com repetição	$Q(x,y)$
$(1,0)$	1 direita e 0 cima	$\dfrac{1!}{1!\cdot 0!} = 1$	4 direita e 3 cima	$\dfrac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$	$1 \cdot 35 = 35$
$(1,1)$	1 direita e 1 cima	$\dfrac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$	4 direita e 2 cima	$\dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$	$2 \cdot 15 = 30$
$(2,1)$	2 direita e 1 cima	$\dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$	3 direita e 2 cima	$\dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$	$3 \cdot 10 = 30$
$(3,1)$	3 direita e 1 cima	$\dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$	2 direita e 2 cima	$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$	$4 \cdot 6 = 24$

Etapa 5

Etapa 5 – Fechamento com o princípio fundamental da contagem

Ao final do desenvolvimento, o professor explicita que a quantidade de caminhos de A até (x,y) não interfere na quantidade de caminhos de (x,y) até B. Como se trata de duas etapas independentes, o problema pode ser interpretado à luz do Princípio Fundamental da Contagem. Assim, os estudantes são levados a compreender que, para determinar o número total de caminhos que passam por (x,y), será necessário combinar a quantidade de caminhos do primeiro trecho com a quantidade de caminhos do segundo. Essa conclusão funciona como preparação imediata para a aula seguinte, na qual essa relação será formalizada matematicamente.

Aula 7 – Formalização da expressão $Q(x, y)$

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

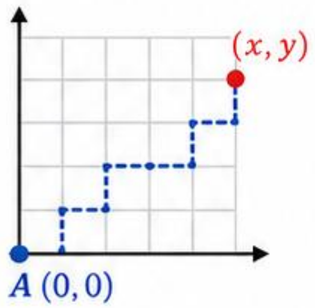
Formalizar a expressão $Q(x, y)$ para a contagem dos caminhos que passam por um ponto intermediário (x, y), aplicando a lógica construída na aula anterior.

Conteúdos mobilizados

Combinação simples; contagem de caminhos; decomposição de trajetórias; expressão $Q(x, y)$; interpretação combinatória de percursos em malhas retangulares.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Etapa 1 — Contagem dos caminhos de A até (x, y)

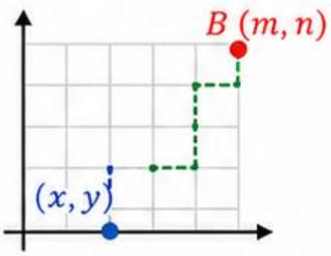


A aula inicia-se com a retomada da conclusão da aula anterior: um caminho que passa por (x, y) pode ser decomposto em dois trechos independentes. A partir disso, o professor analisa o primeiro trecho, de $A = (0, 0)$ até (x, y), mostrando que ele é composto por x movimentos para a direita e y movimentos para cima. Assim, a quantidade de caminhos possíveis nesse trecho é dada por:

$$\binom{x+y}{x} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

Nesse momento, o professor reforça que a expressão resulta da contagem das diferentes formas de organizar os movimentos necessários para atingir o ponto (x, y).

Etapa 2 — Contagem dos caminhos de (x, y) até B

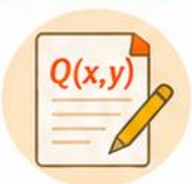


Em seguida, o professor analisa o segundo trecho do percurso, que vai de (x, y) até $B = (m, n)$. Como restam $m - x$ movimentos para a direita e $n - y$ movimentos para cima, a quantidade de caminhos possíveis nesse trecho é dada por:

$$\binom{(m-x) + (n-y)}{m-x} = \frac{(m-x+n-y)!}{(m-x)!\,(n-y)!}$$

A turma é levada a perceber que a mesma lógica combinatória utilizada no primeiro trecho também se aplica ao segundo.

Etapa 3 — Formalização da expressão $Q(x, y)$



Após a contagem separada dos dois trechos, o professor formaliza a quantidade total de caminhos que passam por (x, y), escrevendo:

$$Q(x, y) = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} \cdot \frac{(m-x+n-y)!}{(m-x)!\,(n-y)!}$$

Nesse momento, destaca-se que a expressão resulta diretamente da decomposição do percurso em duas partes, cada uma delas contada separadamente.

Aula 7 – Formalização da expressão $Q(x, y)$

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Etapa 4 Aplicação a exemplos e interpretação dos resultados

Na parte final da aula, o professor aplica a expressão a alguns pontos da malha, escolhidos com a participação dos estudantes, e promove comparações entre os valores obtidos, ou ainda podem usar a ficha de investigação encontrada no APÊNDICE B. O objetivo é mostrar que diferentes pontos pertencem a diferentes quantidades de caminhos e que essa diferença pode ser explicada combinatoriamente.

Esse momento também tem como finalidade favorecer a percepção de padrões e regularidades, levando os estudantes a observar que a posição do ponto interfere diretamente na quantidade de caminhos que passam por ele. Além disso, busca-se destacar que o ponto $(1, 0)$ pertence ao conjunto dos pontos de máxima visitação, podendo haver outros pontos da malha com a mesma quantidade máxima de caminhos.

Sequência Didática Para o Ensino de Probabilidade a Partir da Estratégia Lúdica

MISSÃO(X,Y)

Raciocínio e Estratégia | Combinações e Probabilidades | Recursos que Ensinam | Aprendizagem Significativa

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Identificação da Sequência Didática

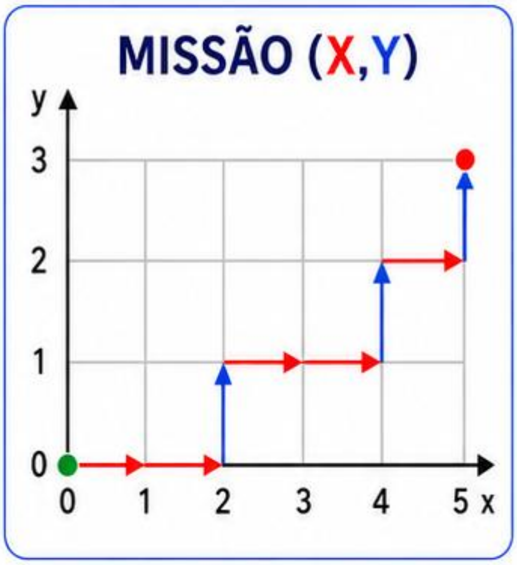
Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

Componente curricular: Matemática.

Ano: 2º e 3º ano do Ensino Médio.

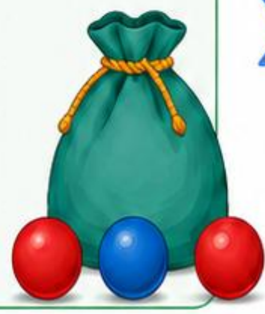
Turma: Turmas do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Quantidade de aulas: 6 aulas de 50 minutos cada.



Conteúdos desenvolvidos

Experimento aleatório; acaso; espaço amostral; evento; casos favoráveis; casos possíveis; probabilidade clássica; representação de caminhos em malhas retangulares; interpretação de caminhos como sequências de movimentos; eventos associados à passagem por pontos específicos da malha; comparação de probabilidades em diferentes pontos; relação entre Análise Combinatória e Probabilidade; expressão $Q(x, y)$; total de caminhos possíveis; método do saquinho; sorteio sem reposição; interpretação probabilística do ponto mais visitado.



Competências da BNCC

A sequência didática articula-se com competências da BNCC relacionadas à investigação matemática, à resolução de problemas, à argumentação, à interpretação de informações e à utilização de conceitos matemáticos para analisar situações em diferentes contextos. Ao trabalhar a Probabilidade a partir do recurso MISSÃO(X, Y), a proposta favorece o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, da leitura de eventos em espaços amostrais finitos e da capacidade de relacionar experiências concretas de sorteio, caminhos em malhas e formalizações matemáticas.

Habilidades

As habilidades listadas, a seguir, constam na BNCC (Brasil, 2018) com seus respectivos códigos:

- **EM13MAT106** – Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos, interpretando criticamente informações estatísticas e probabilísticas.
- **EM13MAT311** – Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- **EM13MAT312** – Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Objetivo geral

Promover a compreensão de conceitos fundamentais de Probabilidade a partir do recurso MISSÃO(X, Y), articulando experimentação, representação de caminhos, contagem de possibilidades e interpretação probabilística de eventos definidos por pontos da malha.

Objetivos específicos

- Reconhecer o jogo MISSÃO(X,Y) como um experimento aleatório.
- Compreender o conceito de acaso a partir do sorteio dos movimentos do jogo.
- Identificar o espaço amostral como o conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha.
- Compreender evento como subconjunto do espaço amostral.
- Identificar casos favoráveis associados à passagem do caminho por pontos específicos da malha.
- Aplicar a definição clássica de probabilidade em situações simples e no contexto do jogo.
- Relacionar a quantidade de caminhos que passam por um ponto à expressão Q(x,y).
- Determinar a probabilidade de um caminho passar por um ponto específico da malha.
- Comparar probabilidades associadas a diferentes pontos da malha.
- Interpretar o ponto mais visitado como aquele associado ao maior número de caminhos favoráveis e, consequentemente, à maior probabilidade de visitação.
- Compreender o método do saquinho como uma forma concreta de analisar probabilidades em sorteios sucessivos sem reposição.

Público-alvo

Estudantes do 2º e do 3º ano do Ensino Médio que já tenham tido contato inicial com conceitos de Análise Combinatória ou que estejam em processo de consolidação desses conhecimentos, especialmente no que se refere à contagem de caminhos em malhas retangulares e à interpretação de sequências de movimentos.

Recursos didáticos

- Folha de aplicação do jogo MISSÃO(X,Y);
- malhas retangulares impressas;
- saquinho com bolas coloridas representando movimentos para a direita e para cima;
- quadro;
- pincel ou giz;
- projetor, quando disponível;
- folhas de registro;
- calculadora, se necessário.

Metodologia usada

A sequência didática fundamenta-se em uma abordagem investigativa, progressiva e contextualizada, utilizando o jogo MISSÃO(X,Y) como situação geradora para a construção dos conceitos de Probabilidade. Inicialmente, os estudantes vivenciam o jogo como experimento aleatório, observando que os caminhos produzidos dependem da ordem dos sorteios realizados. A partir dessa experiência concreta, são introduzidos os conceitos de acaso, espaço amostral, evento, casos favoráveis e casos possíveis.

Na sequência, a definição clássica de probabilidade é construída a partir da relação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Essa estrutura é então aplicada ao contexto dos caminhos em malhas retangulares, permitindo que os estudantes compreendam a probabilidade de um caminho passar por determinado ponto da malha. A proposta também retoma conhecimentos de Análise Combinatória, especialmente a expressão Q(x,y), para interpretar os eventos associados à passagem por pontos específicos.

Por fim, a sequência promove a comparação entre probabilidades de diferentes pontos da malha, favorecendo a interpretação do ponto mais visitado sob uma perspectiva probabilística. O método do saquinho é utilizado como recurso concreto para aproximar os estudantes da lógica dos sorteios sucessivos sem reposição, possibilitando a construção intuitiva da probabilidade antes de sua formalização matemática.

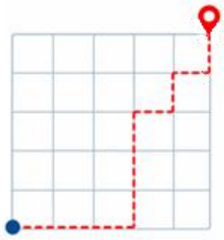
Avaliação

A avaliação assume caráter diagnóstico, processual e formativo, considerando a participação dos estudantes nas discussões, a compreensão da dinâmica probabilística do jogo, a identificação correta do espaço amostral, a formulação de eventos, o reconhecimento de casos favoráveis e casos possíveis, a aplicação da definição clássica de probabilidade e a interpretação dos resultados obtidos.

Também serão observadas a capacidade dos estudantes de relacionar os conhecimentos de Análise Combinatória à Probabilidade, utilizar a expressão Q(x,y) na análise de eventos definidos por pontos da malha, comparar probabilidades em diferentes posições e justificar matematicamente a ideia de ponto mais visitado.

Temática integradora

Jogos matemáticos, raciocínio probabilístico e contagem de caminhos no plano cartesiano.



Aula 1 – Introdução à ideia de acaso e espaço amostral com o recurso MISSÃO (X,Y)

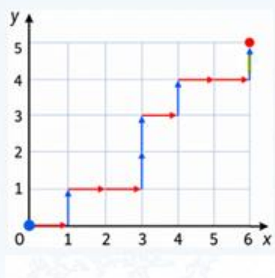
Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Introduzir as ideias de acaso e espaço amostral a partir da dinâmica do recurso MISSÃO(X,Y), levando os estudantes a reconhecer que diferenttes caminhos podem ser gerados aleatoriamente e que o conjunto desses caminhos constitui o universo de resultados possíveis do experimento.

Conteúdos mobilizados

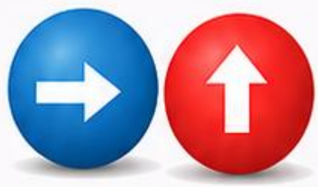
Acaso; experimento aleatório; espaço amostral; representação de caminhos em malhas retangulares; leitura de coordenadas no plano cartesiano; interpretação de caminhos como sequências de movimentos; conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos.



Desenvolvimento da aula

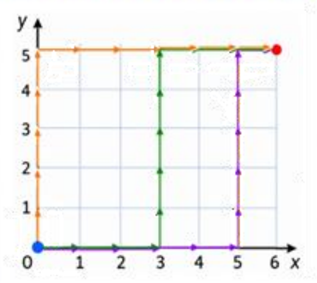
1 Etapa 1 – Apresentação do contexto probabilístico do recurso

A aula inicia-se com a apresentação do recurso MISSÃO(X,Y) como situação de investigação probabilística. Organizados em duplas, os estudantes recebem a folha de aplicação com a malha retangular, bem como o material necessário para a realização do recurso, composto por bolas que representam movimentos para a direita e para cima. Explicita-se que o interesse da sequência estará voltado para a análise do caráter aleatório do processo que produz os caminhos. O jogo é, então, apresentado como um experimento em que o percurso final depende da ordem em que os movimentos são sorteados.



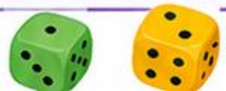
2 Etapa 2 – Vivência do recurso e observação dos resultados

Em seguida, os estudantes realizam algumas rodadas do recurso, registrando as sequências sorteadas e os caminhos correspondentes na malha. Durante essa exploração, observa-se que, embora a quantidade de movimentos para a direita e para cima permaneça fixa, os caminhos efetivamente produzidos podem variar de uma rodada para outra. Essa etapa tem por finalidade fazer com que os estudantes percebam, na prática, que o resultado do recurso não é previamente determinado, ainda que o conjunto de regras seja conhecido.



3 Etapa 3 – Discussão sobre a ideia de acaso

Após a realização das rodadas, desenvolve-se uma discussão coletiva a partir de questões como: o caminho obtido podia ser previsto com certeza antes do sorteio? Por que resultados diferentes podem surgir mesmo quando o material do jogo é o mesmo? Em que sentido o sorteio interfere no percurso final? A partir dessas questões, introduz-se a ideia de acaso, destacando que o jogo envolve um experimento cujo resultado não pode ser conhecido com certeza antes de sua realização, embora seja possível descrever as condições em que ele ocorre.



$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Aula 1 – Introdução à ideia de acaso e espaço amostral com o recurso MISSÃO (X,Y)

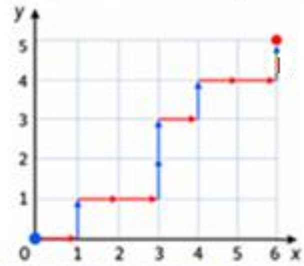
Duração: 50 minutos

Desenvolvimento da aula

4

Etapa 4 – Introdução do conceito de espaço amostral em diferentes contextos

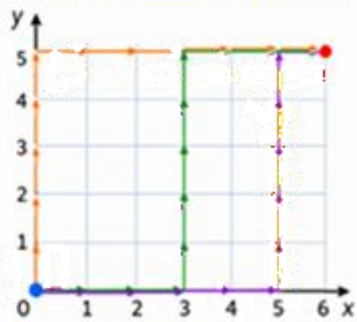
Na sequência, introduz-se o conceito de espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Para ampliar a compreensão dos estudantes, o conceito é inicialmente discutido em contextos mais familiares, como o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado e a retirada de uma carta de um baralho. Em cada caso, busca-se identificar com a turma quais são os possíveis resultados do experimento e, consequentemente, qual é o respectivo espaço amostral. Após essa exploração inicial, o conceito é retomado no contexto do jogo MISSÃO(X,Y), no qual o espaço amostral passa a ser interpretado como o conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha, obedecendo às regras de movimentação estabelecidas.



5

Etapa 5 – Fundamentação do espaço amostral no contexto do jogo

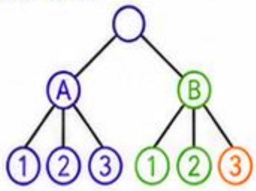
Para consolidar essa ideia, os caminhos efetivamente obtidos pelos estudantes são comparados com outros caminhos possíveis que poderiam ter surgido, mas que não apareceram nas rodadas realizadas. Dessa forma, evidencia-se que o espaço amostral não se restringe aos resultados observados em sala, mas compreende todo o universo de trajetórias que o jogo admite. Nesse momento, os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos podem ser mobilizados como apoio para reconhecer que esse conjunto de possibilidades é estruturado e pode ser descrito matematicamente.



Aula 2 – Eventos no contexto do recurso e contagem de casos favoráveis

Duração: 50 minutos

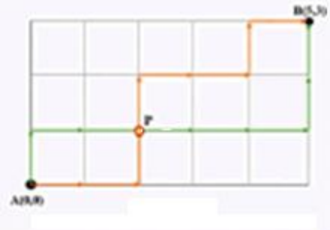
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$



$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

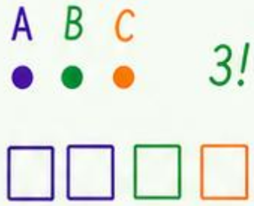
Objetivo da aula

Compreender o conceito de evento no contexto do recurso MISSÃO(X,Y) e identificar, entre os caminhos possíveis, os casos favoráveis associados a condições específicas, como a passagem por determinados pontos da malha.



Conteúdos mobilizados

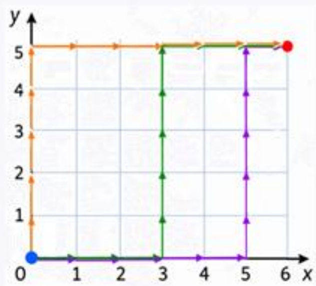
Evento; espaço amostral; casos favoráveis; representação de caminhos em malhas retangulares; interpretação de condições sobre trajetórias; conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos.



Desenvolvimento da aula

1 Etapa 1 – Retomada do espaço amostral no contexto do recurso

A aula inicia-se com a retomada da ideia de que o recurso MISSÃO(X,Y) pode ser entendido como um experimento aleatório cujo espaço amostral é constituído pelo conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha. A partir dessa compreensão, destaca-se a atenção do conjunto total de caminhos para subconjuntos específicos desse espaço, com base em determinadas condições impostas ao percurso.



2 Etapa 2 – Introdução do conceito de evento

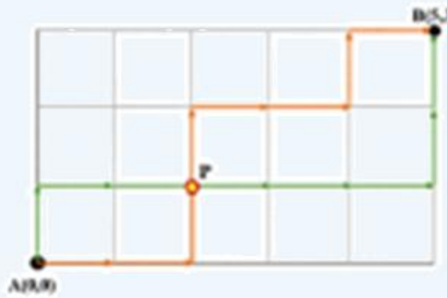
Na sequência, introduz-se o conceito de evento como um subconjunto do espaço amostral. Para tornar essa ideia acessível, propõem-se inicialmente exemplos simples em outros contextos probabilísticos, como no lançamento de uma moeda, de um dado ou na retirada de uma carta de um baralho. Em seguida, o conceito é trazido para recurso MISSÃO(X,Y), destacando que expressões como "o caminho passa pelo ponto (x,y)" ou "o caminho visita um ponto da primeira linha da malha" definem eventos, isto é, conjuntos de trajetórias que satisfazem uma condição previamente estabelecida.

3 Etapa 3 – Formulação de eventos no contexto do recurso

Após a introdução conceitual, os estudantes são convidados a propor diferentes eventos relacionados ao recurso. Entre as possibilidades, podem surgir situações como:

- o caminho passa por um ponto específico;
- o caminho não passa por certo ponto da malha.
- o caminho visita dois pontos determinados;

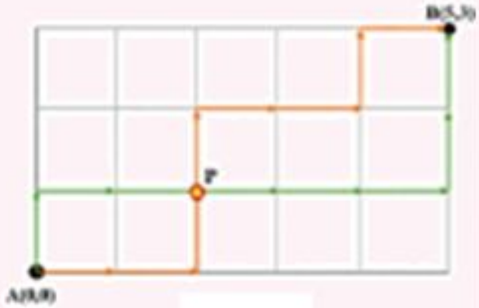
O objetivo dessa etapa é mostrar que um evento não corresponde a um único caminho, mas ao conjunto de todos os caminhos que atendem à condição proposta. Assim, amplia-se a compreensão dos estudantes sobre a estrutura probabilística do recurso.



4

Etapa 4 – Identificação de casos favoráveis

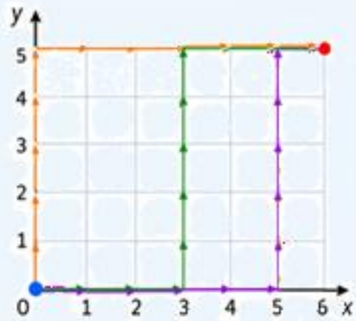
Na continuidade, a discussão volta-se para a noção de casos favoráveis. Escolhe-se, por exemplo, um ponto intermediário da malha e pede-se aos estudantes que identifiquem quais caminhos do espaço amostral correspondem ao evento “passar por esse ponto”. Em malhas menores, essa identificação pode ser feita por observação direta; em malhas maiores, a intenção é apenas reconhecer que os casos favoráveis constituem parte do espaço amostral e que sua quantidade depende da condição imposta. Nesse momento, os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos podem ser mobilizados como apoio para interpretar a estrutura desses subconjuntos.



5

Etapa 5 – Comparação entre eventos e análise dos casos favoráveis

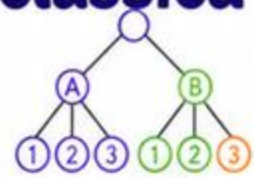
Na etapa final do desenvolvimento, diferentes eventos são comparados, de modo que os estudantes percebam que alguns deles reúnem mais caminhos favoráveis do que outros. Com isso, a turma começa a construir a percepção de que nem todos os eventos têm a mesma “força” dentro do espaço amostral, o que servirá de base para a introdução da probabilidade na etapa seguinte. Essa comparação pode ser feita a partir de pontos escolhidos pelos próprios estudantes, utilizando o jogo como referência concreta para a discussão.



Aula 3 – Estudo da Probabilidade clássica

Duração: 50 minutos

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$



$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Objetivo da aula

Compreender a definição clássica de probabilidade a partir de experimentos aleatórios simples e reconhecer sua aplicação no contexto do jogo MISSÃO(X,Y), relacionando espaço amostral, eventos, casos favoráveis e casos possíveis.

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; experimento aleatório; espaço amostral; evento; casos favoráveis; casos possíveis; interpretação probabilística de trajetórias; conhecimentos de Análise Combinatória já estudados pelos alunos.

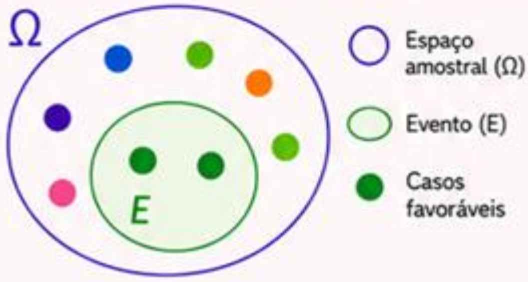
Desenvolvimento da aula

1 Etapa 1 – Introdução da probabilidade clássica em contextos cotidianos

A aula inicia-se com a apresentação de situações probabilísticas familiares, como o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado e a retirada de uma carta de um baralho. Em cada caso, busca-se identificar com os estudantes os resultados possíveis do experimento, bem como eventos de interesse, por exemplo: "obter cara", "obter número par" ou "retirar uma carta de copas". A partir desses exemplos, introduz-se a definição clássica de probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, desde que os resultados sejam equiprováveis.

2 Etapa 2 – Construção da linguagem probabilística

Na sequência, são organizadas, com a participação da turma, as noções de espaço amostral, evento, casos favoráveis e casos possíveis. Busca-se consolidar a compreensão de que o espaço amostral corresponde ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, enquanto o evento constitui um subconjunto desse universo. Os casos favoráveis, por sua vez, correspondem aos resultados que satisfazem a condição estabelecida pelo evento. Nesse momento, a ênfase recai sobre a interpretação dos conceitos, e não apenas sobre a memorização da fórmula probabilística.



3 Etapa 3 – Formalização da probabilidade clássica

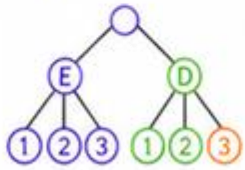
Após a discussão conceitual, formaliza-se a probabilidade clássica pela expressão

$$P(E) = \frac{\text{números de casos favoráveis a } E}{\text{números de casos possíveis}} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Essa formalização é acompanhada de exemplos simples, escolhidos de modo que os estudantes percebam o significado da razão probabilística como medida da chance de ocorrência de um evento. A intenção é fazer com que a expressão matemática surja como síntese de uma estrutura já compreendida, e não como uma fórmula apresentada de forma isolada.

Aula 4 – Probabilidade de um caminho passar por um ponto específico

Duração: 50 minutos



$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Objetivo da aula

Aplicar a definição clássica de probabilidade ao evento de um caminho passar por um ponto específico (x,y) da malha, relacionando o número de casos favoráveis à expressão $Q(x,y)$ e o número total de casos possíveis ao total de caminhos do jogo MISSÃO(X,Y).

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; espaço amostral; evento; casos favoráveis; casos possíveis; contagem de caminhos em malhas retangulares; expressão $Q(x,y)$; interpretação probabilística de trajetórias.

Desenvolvimento da aula

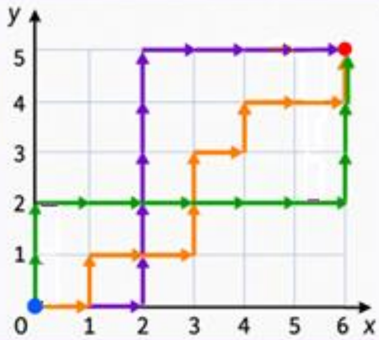
1 Etapa 1 – Retomada da estrutura probabilística do jogo

A aula inicia-se com a retomada da ideia de que o jogo MISSÃO(X,Y) pode ser interpretado como um experimento aleatório, cujo espaço amostral é constituído pelo conjunto de todos os caminhos possíveis entre o ponto inicial e o ponto final da malha. Recorda-se também que, na aula anterior, foi formalizada a probabilidade clássica como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, o que servirá como base para a análise do evento específico desta aula.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

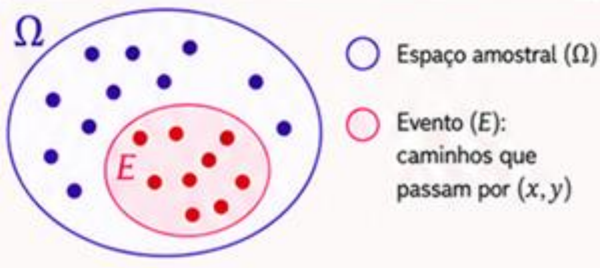
$n(E)$: casos favoráveis

$n(\Omega)$: casos possíveis



2 Etapa 2 – Definição do evento associado ao ponto (x,y)

Na sequência, escolhe-se um ponto específico (x,y) da malha, excluindo-se os pontos inicial e final, e define-se o evento correspondente como o conjunto de todos os caminhos que passam por esse ponto. Desse modo, o evento deixa de ser apenas uma condição verbal e passa a ser compreendido como um subconjunto do espaço amostral.

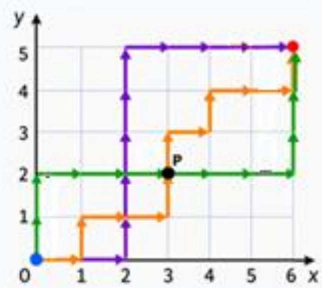


3 Etapa 3 – Identificação dos casos favoráveis por meio de $Q(x,y)$

Em seguida, a atenção se volta para o número de casos favoráveis do evento definido. Mobilizando os conhecimentos de Análise Combinatória já estudados, explicita-se que a quantidade de caminhos que passam por (x,y) é dada por $Q(x,y)$. Nesse momento, reforça-se a interpretação de $Q(x,y)$ como a cardinalidade do conjunto dos caminhos favoráveis ao evento, isto é, como a quantidade de trajetórias que satisfazem a condição de passar pelo ponto escolhido.

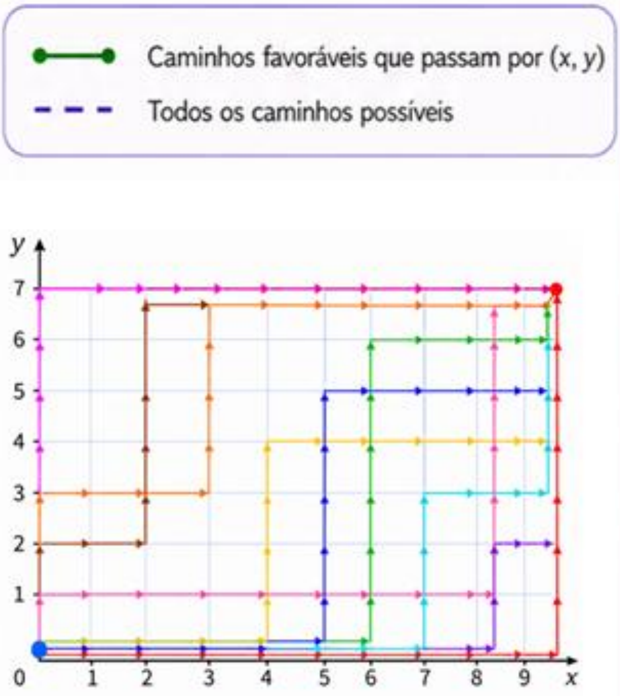
$$Q(x,y)$$

Número de caminhos que passam por (x,y) (casos favoráveis)



Caminhos que passam por (x,y)

4 Etapa 4 – Determinação do número total de casos possíveis



Após a identificação dos casos favoráveis, explicita-se que o número total de casos possíveis corresponde à quantidade total de caminhos entre o ponto inicial A=(0,0) e o ponto final B=(M, N). Com isso, o professor evidencia que a probabilidade de o caminho passar por (x, y) pode ser expressa como a razão entre a quantidade de caminhos favoráveis e a quantidade total de caminhos possíveis. No contexto de uma malha M × N, essa relação pode ser escrita como:

$$P(E) = \frac{\text{(números de casos favoráveis a } E\text{)}}{\text{(números de casos possíveis)}} = \frac{Q(x,y)}{n(\Omega)}$$

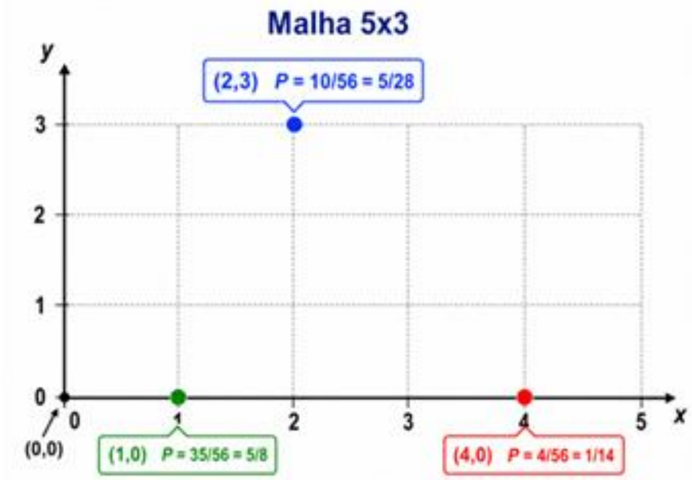
destacando-se que o denominador representa o total de caminhos do jogo e o numerador representa apenas aqueles que realizam o evento considerado.

$n(\Omega)$: número total de caminhos possíveis entre A e B.

$Q(x, y)$: número de caminhos favoráveis que passam por (x, y).

5 Etapa 5 – Aplicação a exemplos na malha

Na parte final do desenvolvimento, a expressão é aplicada a alguns pontos específicos da malha, escolhidos com a participação dos estudantes. O objetivo é que a turma observe que diferentes pontos possuem diferentes probabilidades de serem visitados e que essas diferenças podem ser justificadas matematicamente pela relação entre Q(x, y) e o número total de caminhos. A comparação entre os resultados obtidos favorece uma leitura mais refinada da malha sob o ponto de vista probabilístico.



Quanto maior o valor de $Q(x, y)$, maior a probabilidade de o caminho passar por esse ponto: $P(P) = Q(x, y) \ / \ n(\Omega)$.

Aula 5 – Comparação entre probabilidades de diferentes pontos da malha e interpretação do ponto mais visitado

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Comparar as probabilidades associadas à passagem do caminho por diferentes pontos da malha, interpretando os resultados obtidos e relacionando-os ao problema do ponto mais visitado no recurso MISSÃO(X, Y).

Conteúdos mobilizados

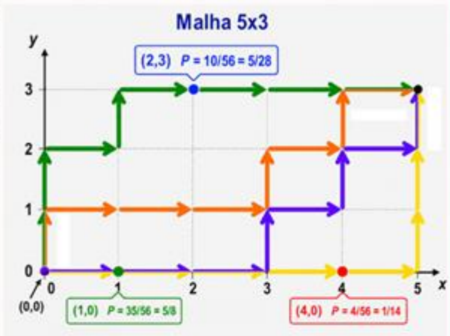
Probabilidade clássica; evento; casos favoráveis; comparação de probabilidades; interpretação de resultados em malhas retangulares; expressão $Q(x, y)$; leitura geométrica e probabilística de trajetórias.

Desenvolvimento da aula

1

Etapa 1 – Cálculo de probabilidades em pontos distintos da malha

O professor propõe o cálculo da probabilidade de o caminho passar por diferentes pontos da malha 5×3, considerando pontos de borda, pontos internos, pontos simétricos e o ponto $(1, 0)$. Inicialmente, retoma-se que o espaço amostral é composto por todos os caminhos possíveis de $A = (0, 0)$ até $B = (5, 3)$, totalizando 56 caminhos. Em seguida, os estudantes calculam, com apoio do professor, a quantidade de caminhos favoráveis $Q(x, y)$ para cada ponto escolhido e determinam a probabilidade correspondente pela razão entre os caminhos favoráveis e o total de caminhos possíveis.



Para organizar os cálculos, será utilizada uma ficha de investigação probabilística, apresentada no Apêndice C, na qual os estudantes registrarão o ponto analisado, o valor de $Q(x, y)$, o total de caminhos, a probabilidade obtida e uma breve observação sobre a posição do ponto na malha.

2

Etapa 2 – Comparação entre valores e identificação de padrões

Após os cálculos, os valores obtidos são colocados em comparação. Nesse momento, busca-se levar os estudantes a observar regularidades, como o fato de alguns pontos apresentarem maior probabilidade de visitação do que outros e a existência de pontos distintos com a mesma probabilidade, em razão de simetrias da malha. O professor pode conduzir a discussão por meio de perguntas como: quais pontos parecem mais favorecidos? Quais apresentam a mesma chance de serem visitados? O que a posição do ponto sugere sobre a quantidade de caminhos que passam por ele?

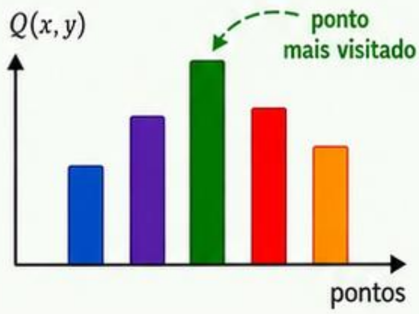
Ponto (x, y)	$Q(x,y)$ (nº de caminhos)	$P = Q/56$
(1,0)	35	35/56 = 5/8
(2,2)	24	24/56 = 3/7
(4,0)	4	4/56 = 1/14

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{7} > \frac{1}{14}$$

3

Etapa 3 – Interpretação probabilística do ponto mais visitado

Na continuidade, a discussão é direcionada para a ideia de ponto mais visitado. A partir da comparação entre probabilidades, os estudantes são levados a perceber que o ponto mais visitado pode ser interpretado, do ponto de vista probabilístico, como o ponto que pertence ao maior número de caminhos e, consequentemente, aquele que apresenta a maior probabilidade de ocorrência do evento "o caminho passa por (x, y)". Assim, a noção de ponto mais visitado deixa de ser apenas uma observação empírica do jogo e passa a ser compreendida como um resultado matematicamente justificável.



Aula 5 – Comparação entre probabilidades de diferentes pontos da malha e interpretação do ponto mais visitado

4 Etapa 4 – Discussão final e articulação entre Combinatória e Probabilidade

Na etapa final do desenvolvimento, consolida-se a articulação entre os conhecimentos de *Análise Combinatória* já estudados e a leitura probabilística do jogo. Os estudantes são levados a reconhecer que a comparação entre probabilidades depende diretamente da comparação entre os valores de $Q(x, y)$, isto é, entre as quantidades de caminhos que passam por cada ponto. Desse modo, o estudo probabilístico do jogo é apresentado como desdobramento natural da estrutura combinatória da malha.

Aula 6 – Método do saquinho: probabilidade de um caminho passar por um ponto da malha

Duração: 50 minutos

Objetivo da aula

Construir, de forma intuitiva, a probabilidade de um caminho passar por um ponto da malha, utilizando o sorteio sucessivo das bolas do jogo MISSÃO(X, Y), sem recorrer inicialmente a fórmulas gerais.

Conteúdos mobilizados

Probabilidade clássica; experimento aleatório sem reposição; casos favoráveis; ordem das retiradas; representação de caminhos na malha.

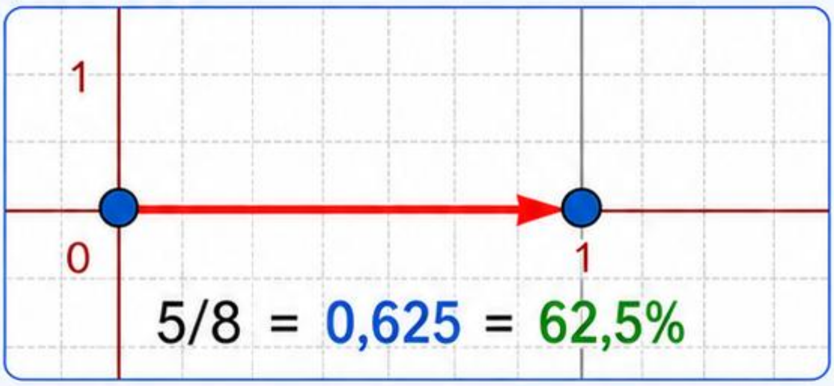
Desenvolvimento da aula

1 Etapa 1 – Apresentação do método do saquinho

A aula inicia-se com a explicação de que a probabilidade será construída a partir do próprio sorteio das bolas do jogo. Considera-se um saquinho com 5 bolas vermelhas, representando passos para a direita, e 3 bolas azuis, representando passos para cima, Cada retirada corresponde a um passo do caminho, e a ordem das retiradas determina a trajetória na malha.

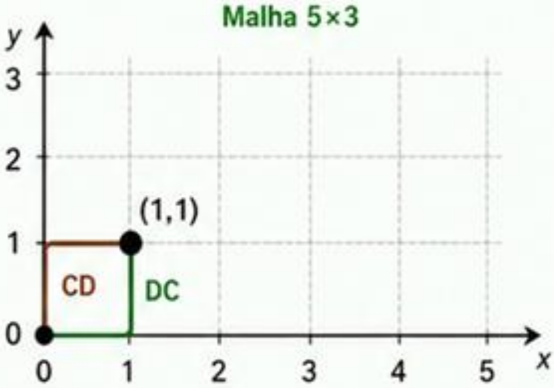
2 Etapa 2 – Caso A: probabilidade de o caminho passar por (1,0)

Analisa-se inicialmente o ponto (1,0). Para que o caminho passe por esse ponto, a primeira retirada precisa ser uma bola vermelha. Como há 8 bolas ao todo, sendo 5 vermelhas, conclui-se que: $P(1,0) = 5/8$.



$\binom{n}{k}$ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

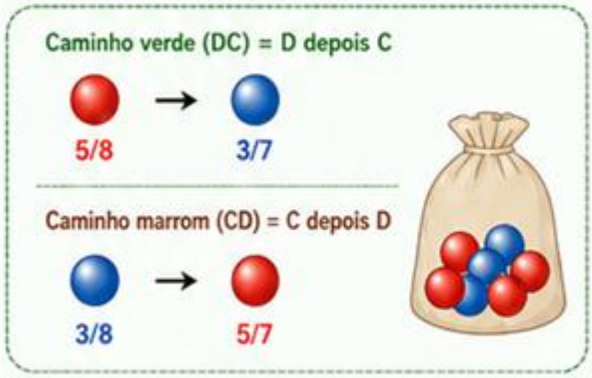
3 Etapa 3 – Caso B: probabilidade de o caminho passar por (1,1)



Em seguida, considera-se o ponto (1,1) na malha 5×3. Para que o caminho passe por esse ponto, nas duas primeiras retiradas deve aparecer 1 bola vermelha e 1 bola azul, em qualquer ordem. Há, portanto, duas possibilidades: Há 8 bolas ao todo; 5 são vermelhas e 3 azuis, para chegar a (1,1), nas duas primeiras retiradas deve sair 1 vermelha (Direita) e 1 azul (Cima), em qualquer ordem, observe a figura abaixo, há dois caminhos ou vai pelo caminho verde (DC) ou pelo caminho em marrom (CD).

- Para ir pelo caminho verde, temos de tirar uma bolinha vermelha no qual a probabilidade é $\frac{5}{8}$ e depois uma bolinha azul, como é sem reposição, no saquinho há 7 bolas e a probabilidade é $\frac{3}{7}$, logo, D → C: $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = 15/56$.

- Para ir pelo caminho marrom, temos de tirar uma bolinha azul no qual a probabilidade é $\frac{3}{8}$ e depois uma bolinha vermelha, como é sem reposição, no saquinho agora há 7 bolas e a probabilidade é $\frac{5}{7}$, logo, C → D: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = 15/56$

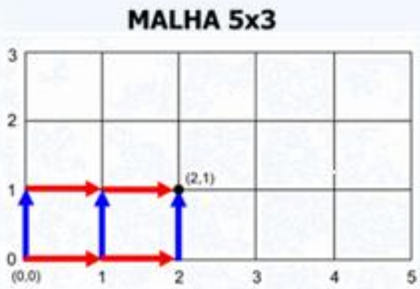


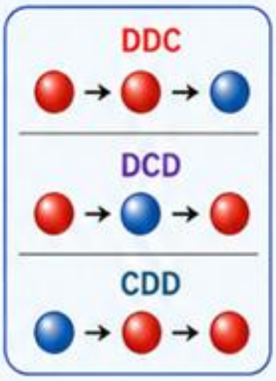
Somando as duas ordens, temos:

$P((1,1)) = 15/56 + 15/56 = 30/56 = 15/28 \approx 0{,}5357 \approx 53{,}6\%$

4 Etapa 4 – Caso C: probabilidade de o caminho passar por (2,1)

Na sequência, analisa-se o ponto (2,1). Para que o caminho passe por esse ponto, nas três primeiras retiradas devem aparecer 2 bolas vermelhas e 1 bola azul, em qualquer ordem. As possibilidades são: DDC, DCD e CDD.





Cada uma dessas ordens tem probabilidade:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = 5/28$$

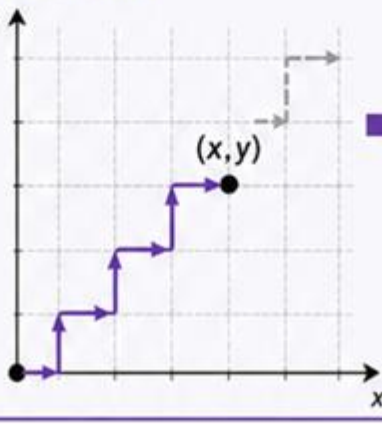
Logo,

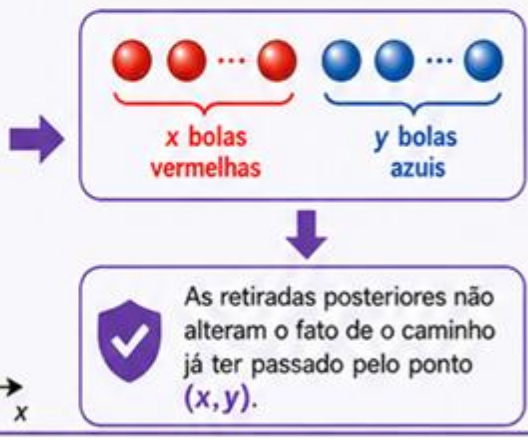
$$P((2,1)) = 5/28 + 5/28 + 5/28 = 15/28$$

Destaca-se que, depois da terceira retirada, o caminho já passou por (2,1), e o restante das retiradas não altera esse fato.

5 Etapa 5 – Síntese da ideia construída

Ao final, sistematiza-se que, para um ponto (x, y), é necessário observar apenas as primeiras $x+y$ retiradas e verificar se nelas aparecem exatamente x bolas vermelhas e y bolas azuis, em qualquer ordem. O que ocorre depois disso não modifica o fato de o caminho já ter passado pelo ponto considerado.





APÊNDICE A – Folha de aplicação da malha 5 × 3 da estratégia lúdica *MISSÃO(X, Y)*

Nome completo:			
Data: ___ /___ /_____	Professor: ____________________	Turma: _________	Nota: ______

RECURSO PEDAGÓGICO: MISSÃO (X, Y)

Tabela de Instruções do Jogo

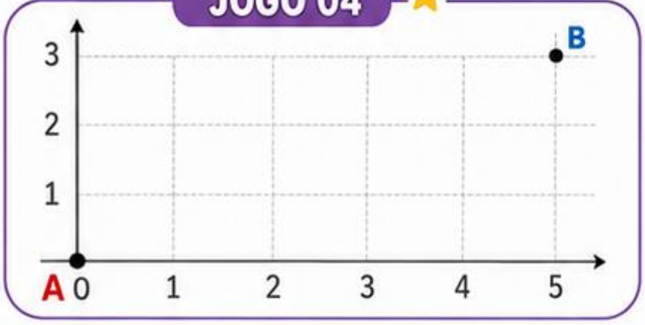
Etapa	Instrução
Objetivo do jogo	Acertar um ponto que esteja no caminho gerado pelo sorteio das bolas.
Participantes	2 alunos por rodada.
Material necessário	1 saquinho com **8 bolas**: 5 vermelhas (→ direita) e 3 azuis (↑ cima).
Plano do jogo	Plano cartesiano de **5x3**, com ponto inicial **A(0,0)** e final **B(5,3)**.
Escolha de ponto	Cada aluno escolhe um **ponto qualquer** no plano (menos o início e o fim).
Como jogar	Sorteie as 8 bolas, uma a uma, e vá traçando o caminho no plano.
Condição de vitória	Vence quem tiver escolhido **um ponto** que está no caminho sorteado.
Empate	Se mais de um acertar, todos são vencedores. Pode haver empate!
Dica estratégica	Pense nos pontos que têm **mais chance** de aparecer em vários caminhos.

JOGO 01

JOGO 02

JOGO 03

JOGO 04



Pense estrategicamente, visualize os caminhos e divirta-se com os desafios da **MISSÃO (X, Y)**!

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE B – Ficha de investigação de caminhos para a malha 5 × 3

Ponto (x,y)	Movimentos de A até (x,y) → - ↑	Permutação com repetição	Movimentos de (x,y) até B=(5,3) → - ↑	Permutação com repetição	$Q(x,y)$
(1,0)					
(2,0)					
(3,0)					
(4,0)					
(5,0)					
(0,1)					
(1,1)					
(2,1)					
(3,1)					
(4,1)					
(5,1)					
(0,2)					
(1,2)					
(2,2)					
(3,2)					
(4,2)					
(5,2)					
(0,3)					
(1,3)					
(2,3)					
(3,3)					
(4,3)					

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE C

– Ficha de investigação probabilística para a malha 5 × 3

Ponto analisado	Localização do ponto	Caminhos favoráveis $Q(x,y)$	Total de caminhos	Probabilidade	Observação
(1,0)	Borda inferior		56		
(1,1)	Ponto interno		56		
(2,1)	Ponto interno		56		
(3,1)	Ponto interno		56		
(4,2)	Simétrico de (1,1)		56		
(4,3)	Simétrico de (1,0)		56		
(0,3)	Borda esquerda		56		
(5,0)	Borda inferior		56		

Fonte: Elaborado pelo autor.