

Ciro Pylro Gouvea

# **A Apropriação do Raciocínio Lógico Matemático na Educação Básica Brasileira**

Vitória

2026

Ciro Pylro Gouvea

# **A Apropriação do Raciocínio Lógico Matemático na Educação Básica Brasileira**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
PROFMAT como parte dos requisitos exi-  
gidos para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



**PROFMAT**

Orientador: Prof. Dr. Fábio Julio da Silva Valentim

Vitória

2026

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

G719a Gouvea, Ciro Pylro, 1981-  
A Apropriação do Raciocínio Lógico Matemático na Educação Básica Brasileira / Ciro Pylro Gouvea. - 2026.  
91 p. : il.

Orientador: Fábio Julio da Silva Valentim.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Raciocínio lógico. 2. Ensino da lógica. 3. Ensino de Matemática. 4. BNCC. 5. Educação. I. da Silva Valentim, Fábio Julio. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**Centro de Ciências Exatas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**

## **“A Apropriação do Raciocínio Lógico Matemático na Educação Básica Brasileira”**

**Ciro Pylro Gouvêa**

Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo, composto por dissertação e recurso educacional, tipo Bibliográfico, subtipo Livro, intitulado “Raciocínio Lógico. Do básico à resolução de problemas”, autoria própria e exclusiva, editora Dialética, publicado em 2025, ISBN: 9786527076100, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 18/03/2026 por:

---

Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim  
Orientador – UFES

---

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho  
Examinador interno – UFES

---

Prof. Dr. Pedro Matos da Silva  
Examinador externo – UFES

---

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo  
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES | 29075-910 | (27) 4009-2473/2474  
<https://matematica.redenacional.ufes.br/> – [profmatt.ufes@gmail.com](mailto:profmatt.ufes@gmail.com) – [pos.matematicaredenacional@ufes.br](mailto:pos.matematicaredenacional@ufes.br)



Ciro Pylro Gouvea

# **A Apropriação do Raciocínio Lógico Matemático na Educação Básica Brasileira**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
PROFMAT como parte dos requisitos exi-  
gidos para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, 18 de março de 2026:

Vitória  
2026

*Vô Affonso, seu neto sempre se espelhou em você.*

# Agradecimentos

A presente dissertação não teria sido possível sem a colaboração, direta ou indireta, de numerosas pessoas, às quais expresso minha mais sincera gratidão.

A Deus, que é a origem e fundamento de toda razão, da minha existência e do conhecimento, por Sua presença constante ao longo desta jornada e pela tranquilidade concedida em momentos de dúvida. A fé se manifestou, muitas vezes, como a base silenciosa sobre a qual pude edificar meu trabalho intelectual.

À minha esposa Pamela Gama Albertassi, dedico minha gratidão de maneira integral. Sua paciência, compreensão e apoio incondicional foram fundamentais para a conclusão deste projeto. Durante os períodos de ausência ou dedicados aos estudos, nas horas de silêncio e concentração, seu apoio afetivo e sua assistência cotidiana proporcionaram o respaldo essencial e a paz sem as quais esta jornada não poderia ter sido realizada.

Aos meus pais, sou grato por tudo que sou e pelo que consegui alcançar até o momento. À minha mãe, Rosane Pylro, pela educação que foreneceu e fornece até os dias de hoje, pela escuta generosa nos momentos de exaustão e apoio. Ao meu pai, Ricardo Gouvea, pelo modelo de disciplina e pela confiança firme no valor da educação. Ambos semearam, em diferentes extensões, os fundamentos dessa trajetória.

Aos amigos que surgiram durante o mestrado, expresso minha sincera gratidão. A convivência acadêmica, os diálogos nos corredores, as resenhas, as leituras compartilhadas e o apoio mútuo em tempos difíceis transformaram esta experiência, frequentemente solitária, em uma jornada coletiva, rica e profundamente enriquecedora.

De maneira especial, dedico lembranças e afeto ao meu avô, Affonso, e à minha avó, Marinette. A saudade foi constante ao longo da formação. Ambos, de maneira singular, acreditaram em meu potencial antes mesmo que eu pudesse reconhecê-lo. A confiança que depositaram em mim permanece viva, e esta dissertação é, também, um testemunho da fé que tiveram em meus anseios.

Por fim, ao Professor Doutor Fábio Júlio Valentim, orientador desta pesquisa, expresso meu mais alto apreço e reconhecimento. Sua orientação foi além da dimensão técnica do trabalho. Cada encontro, cada feedback, cada leitura atenta e generosa não apenas contribuiu para a robustez desta dissertação, mas também para minha formação como pesquisador e educador. Agradeço pela confiança, pela rigorosidade que sempre foi acompanhada de gentileza e por possibilitar a concretização deste estudo..

*“Nada há de mais importante do que ver as fontes da invenção, que são, na minha  
opinião, mais interessantes do que as próprias invenções.”  
(Gottfried Wilhelm Leibniz, em carta a Tschirnhaus (1679))*

# Resumo

Neste trabalho propomos uma inserção maior de conteúdos do Raciocínio Lógico-Matemático no ensino básico. Para isto, fizemos uma análise qualitativa das principais diretrizes que norteiam o currículo da educação básica, desde a Constituição Federal de 1988, LDB, PCNs e BNCC, e observamos uma evolução significativa: o raciocínio lógico, que nos PCNs figurava de forma mais tímida, na BNCC é assumido como competência central, embora ainda persista o desafio de sua operacionalização sistematizada nos documentos. Para fundamentar essa discussão, ancorei-me em duas tradições que considero complementares: a filosófica, representada por Aristóteles e sua concepção da lógica como Organón, e a pedagógica, por meio das contribuições de George Polya e Terence Tao. Organizamos didaticamente as ferramentas lógicas, apropriando dos conectivos lógicos, tabelas-verdade, regras de inferência, quantificadores, etc. e as articulamos aos métodos de demonstração matemática (direta, por contraposição, contradição e indução). Essa sistematização busca sugerir caminhos concretos para que o RLM deixe de ser uma intenção normativa e passe a integrar, de fato, a rotina das salas de aula.

## **Palavras-chave:**

Raciocínio Lógico Matemático. Educação Básica Brasileira. BNCC. Resolução de Problemas. Demonstração Matemática. Formação Docente. Pensamento Crítico.

# Abstract

In this work, we propose a greater inclusion of Logical-Mathematical Reasoning content in basic education. To this end, we conducted a qualitative analysis of the main guidelines that guide the basic education curriculum, from the 1988 Federal Constitution, the LDB (Law of Directives and Bases of National Education), the PCNs (National Curriculum Parameters), and the BNCC (National Common Core Curriculum), and we observed a significant evolution: logical reasoning, which appeared more timidly in the PCNs, is assumed as a central competence in the BNCC, although the challenge of its systematized operationalization in the documents still persists. To support this discussion, I anchored myself in two traditions that I consider complementary: the philosophical, represented by Aristotle and his conception of logic as *Organon*, and the pedagogical, through the contributions of George Polya and Terence Tao. We organized the logical tools didactically, appropriating logical connectives, truth tables, inference rules, quantifiers, etc. and we articulate them with the methods of mathematical demonstration (direct, by contraposition, contradiction and induction). This systematization seeks to suggest concrete ways for RLM to cease being a normative intention and become an actual part of the routine of classrooms.

## **Keywords:**

Logical-Mathematical Reasoning. Brazilian Basic Education. BNCC (National Common Core Curriculum). Problem Solving. Mathematical Proof. Teacher Training. Critical Thinking.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama da Função Injetora . . . . .	51
Figura 2 – Diagrama da Função Sobrejetora . . . . .	52
Figura 3 – Diagrama da Função Bijetora . . . . .	52
Figura 4 – Soma dos ângulos internos do triângulo . . . . .	66

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Diferenças fundamentais entre os PCNs e a BNCC . . . . .	25
Tabela 2 – Tabela Verdade da Conjunção . . . . .	37
Tabela 3 – Tabela Verdade da Disjunção . . . . .	38
Tabela 4 – Tabela Verdade da Disjunção Exclusiva . . . . .	39
Tabela 5 – Tabela Verdade da Condicional . . . . .	40
Tabela 6 – Tabela Verdade da Bicondicional . . . . .	40
Tabela 7 – Tabela Verdade da Negação . . . . .	41
Tabela 8 – Tabela Verdade da Implicação e suas Equivalentes . . . . .	42
Tabela 9 – Tabela Verdade da Implicação e da Conjunção com Negação . . . . .	43
Tabela 10 – Tabela Verdade da Disjunção e da Conjunção das Negações . . . . .	44
Tabela 11 – Tabela Verdade da Conjunção e da Disjunção das Negações . . . . .	44
Tabela 12 – Tabela Verdade do Modus Ponens . . . . .	46
Tabela 13 – Tabela Verdade do Modus Tollens . . . . .	46
Tabela 14 – Tabela Verdade do Silogismo Hipotético . . . . .	47
Tabela 15 – Tabela Verdade da Simplificação Lógica . . . . .	48
Tabela 16 – Tabela Verdade da Adição Lógica . . . . .	48
Tabela 17 – Tabela Verdade do Silogismo Disjuntivo . . . . .	49
Tabela 18 – Os números primos gerados por $p(n) = n^2 + n + 41$ e a refutação da conjectura de que $p(n)$ produz resultados primos para todo $n \geq 1$ . . .	60

# Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CF	Constituição Federal
CNE	Conselho Nacional de Educação
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação do Brasil
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBRL	Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação
RLM	Raciocínio Lógico Matemático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA DA PESQUISA</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>LEVANTAMENTO DOCUMENTAL: CF, PCN E BNCC</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>O raciocínio lógico no contexto da BNCC e dos PCNs</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: RACIOCÍNIO LÓGICO MATEMÁTICO</b>	<b>29</b>
<b>4.1</b>	<b>A resolução de Problemas</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>RACIOCÍNIO LÓGICO</b>	<b>34</b>
<b>5.1</b>	<b>A Lógica Proposicional</b>	<b>35</b>
<b>5.2</b>	<b>Os Conectivos Lógicos</b>	<b>37</b>
5.2.1	Conjunção	37
5.2.2	Disjunção	38
5.2.3	Disjunção Exclusiva	39
5.2.4	Condicional	40
5.2.5	Bicondicional	40
5.2.6	Negação	40
<b>5.3</b>	<b>Tabela Verdade</b>	<b>41</b>
<b>5.4</b>	<b>Negação da Condicional</b>	<b>43</b>
<b>5.5</b>	<b>De Morgan: Negação da Conjunção e da Disjunção</b>	<b>44</b>
<b>5.6</b>	<b>Regras de Inferências</b>	<b>45</b>
5.6.1	Modus Ponens (MP)	45
5.6.2	Modus Tollens (MT)	46
5.6.3	Silogismo Hipotético (SH)	47
5.6.4	Simplificação (SIMP)	47
5.6.5	Adição (ADD)	48
5.6.6	Silogismo Disjuntivos (SD)	49
<b>5.7</b>	<b>Quantificadores Lógicos</b>	<b>49</b>
5.7.1	Quantificador Universal $\forall$	50
5.7.2	Quantificador Existencial $\exists$	50
5.7.3	Uso dos Quantificadores Lógicos	51
<b>6</b>	<b>TERMINOLOGIAS NAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS</b>	<b>54</b>
<b>6.1</b>	<b>Axiomas ou Postulados</b>	<b>55</b>

6.2	Lema . . . . .	56
6.3	Teorema . . . . .	56
6.4	Corolário . . . . .	57
6.5	Conjectura . . . . .	58
7	<b>MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICA: UMA CUL-</b> <b>MINÂNCIA LÓGICA . . . . .</b>	<b>62</b>
7.1	Demonstração Matemática Direta . . . . .	63
7.2	Demonstração por Equivalência . . . . .	67
7.3	Demonstração por Contraposição . . . . .	72
7.4	Demonstração por Contradição ( <i>reductio ad absurdum</i> ) . . . . .	75
7.5	Contraexemplo . . . . .	78
7.6	Demonstração por Exaustão (Dividir para Conquistar) . . . . .	80
7.7	Indução Matemática . . . . .	83
8	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>91</b>

# 1 Introdução

A educação é um processo contínuo no desenvolvimento humano. A aquisição de conhecimentos, habilidades, valores e atitudes dentro do contexto da educação formal tende a preparar o indivíduo para a convivência em sociedade, desenvolvendo o seu senso crítico, transformando suas percepções a respeito do mundo e interagindo sobre ele. É um processo complexo, plural, mutável e adaptativo e sempre buscando uma consonância com os anseios comunitários. Embora sejamos constantemente incentivados pelo imediatismo e conectividade, uma aprendizagem de qualidade exige uma postura distinta, requerendo uma análise profunda do aprender, buscando sempre a ponderação, capacidade argumentativa, criticidade sobre os resultados e uma estruturação consistente do pensamento.

Mais do que decorar fórmulas, compartimentar assuntos em habilidades totalmente desconexas ou replicar um conhecimento de forma mecânica é necessário construir a habilidade do pensar, refletir sobre resultados, formular argumentos convincentes, levantando hipóteses, as confirmando ou as refutando, e por meio destas criar teses ou então seguir numa cadência de condicionantes que possam afastar de argumentações ou soluções que se mostram na forma de uma falácia. Neste contexto, o raciocínio lógico, se mostra uma ferramenta valiosa, que por muitas vezes é negligenciada dentro do processo da educação básica brasileira. Seja na matemática ou em outras áreas de conhecimento, o aprendizado significativo acontece quando o aluno questiona, possui condições para testar hipóteses e refletir criticamente sobre o que aprende e sua aplicabilidade.

No contexto sala de aula, os desafios mudam de geração para geração, mas uma invariante acende: há uma nítida necessidade de capacitação dos alunos na resolução problemas, principalmente na forma da sua argumentação, nas suas habilidades em reconhecer uma solução válida, ou mesmo criar analogias para outros problemas correlatos ou situações que envolvam aspectos da sua realidade. Diante de séculos de conhecimento matemático, repensar ou representar problemas atuais, sob novas perspectivas ou criar teorias que contribuam para o conjunto de soluções matemáticas é fundamental que seja incentivado um ambiente que traga luz à criação de novas habilidades, análise, dedução e tomada de decisões baseadas em boas práticas ou resultados mensuráveis. Um dos papéis do professor de matemática é promover condições para resoluções de situações problemas, e os materiais de ensino assim como o ambiente de aprendizado devem não apenas apresentar os conceitos básicos, mas estimular a estruturação do conhecimento de forma reflexiva e criativa ao longo das diversas etapas da vida e do saber.

Para compreender o papel fundacional do raciocínio lógico na construção do conhecimento, é necessário retornar à sua origem filosófica. A própria etimologia do termo

“lógica”, derivada do grego *logos*, que abrange significados como palavra, pensamento, discurso e razão, o que indica seu caráter estruturante do pensamento humano. Foi Aristóteles, no século IV a.C., quem primeiro sistematizou esse campo do saber em sua obra *Analíticos*, posteriormente compilada no *Organón*, "instrumento" ou "ferramenta" para o correto proceder do pensamento.

Esse marco histórico não é um mero registro, mas o alicerce de uma proposta educacional que valoriza o pensamento crítico e autônomo. Ao conceber a lógica como um *Organón*, Aristóteles a apresentava não como um fim em si mesma, mas como um instrumento intelectual primordial para a análise, a demonstração e a validação de ideias. É precisamente essa noção de lógica como ferramenta para o pensar que ressoa no cerne desta pesquisa: defender que o RLM, herdeiro dessa tradição, deve ser apropriado na Educação Básica não como conteúdo acessório, mas como instrumento cognitivo essencial. Sua integração ao ensino possibilita ao aluno transitar da mera reprodução de informações para a capacidade de construir, questionar e validar argumentos – convertendo-se, assim, em agente ativo de seu próprio aprendizado e em cidadão capaz de navegar criticamente pela complexidade do mundo contemporâneo.

Esta dissertação debruça-se sobre os documentos norteadores da matemática na educação básica brasileira, fazendo uma profunda pesquisa a respeito das suas diretrizes e concepções, com a intencionalidade de discutir como o raciocínio lógico é estruturado na gênese do currículo nacional. Em consonância, este estudo busca verificar como a lógica pode ser posta como ferramenta de consolidação do saber, propondo a dedução, argumentação, inferência e analogias aos recursos já adotados como práticas comuns de uma sala aula.

Além disso, busca-se neste trabalho refletir sobre o quanto os alunos estão sendo de fato preparados para usufruto dos conhecimentos adquiridos em sala de aula para aplicações reais em suas vidas, trazendo sentido e verdadeira apropriação do saber. Segundo Miguel (2008), observa-se, com frequência, uma prática em que a resolução de problemas é abordada como atividade de fixação, desprovida de seu caráter desafiador. Nesse cenário, a tarefa do aluno resume-se a reconhecer e aplicar um procedimento algorítmico específico, em detrimento do desenvolvimento de habilidades centrais como a formulação de hipóteses, a análise crítica de caminhos e a argumentação – bases fundamentais do RLM.

A predominância de modelos tradicionais de ensino possibilitou-nos constatar que as aulas de Matemática são desprovidas de diálogo. Assim sendo, as aulas podem ser descritas desta forma: o professor, à frente dos alunos, expõe o conteúdo e determina qual fórmula deve ser utilizada ou a regra a ser seguida para resolver os exercícios. O aluno, por sua vez, copia as fórmulas e aplica nos chamados exercícios de fixação. O objetivo é atingido quando os alunos memorizam as formulações e conseguem aplicá-las sem recorrer às suas anotações, ou seja, quando enfim conseguiu memorizá-las. (MIGUEL 2008 p.418).

Esta defesa por um ensino matemático que priorize a estruturação do pensamento encontra respaldo nos próprios documentos norteadores da educação brasileira. Os PCNs já assinalavam, em sua gênese, que a Matemática “interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na construção do pensamento e agilização do raciocínio dedutivo do aluno” (BRASIL, 1997, p. 15). Diretriz essa que foi reafirmada e atualizada pela BNC, ao estabelecer, como uma de suas competências gerais, a necessidade de o estudante “valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BRASIL, 2018, p. 9). Especificamente no componente de Matemática, a BNCC explicita que seu estudo “favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes” (BRASIL, 2018, p. 265). No entanto, entre a prescrição normativa e a realidade da sala de aula, persiste um significativo hiato. Esta pesquisa se insere justamente nesse espaço, fazendo uma análise mais profunda dentro dos documentos oficiais que norteiam a educação básica brasileira e se posicionando de forma crítica a respeito do que de fato é entregue ao educando dentro da sala de aula. Ela toma essas diretrizes não como ponto de chegada, mas como ponto de partida para uma investigação crítica sobre como o RLM pode ser efetivamente apropriado, transformando-se de um princípio declarado em uma prática efetiva, capaz de materializar a formação crítica e autônoma almejada pelos documentos oficiais.

O raciocínio lógico constitui um eixo estruturante do ensino da matemática, sendo decisivo para a resolução de problemas que demandam planejamento, análise sistemática e tomada de decisão fundamentada. Nesse contexto, Huf (2018) ressalta que a proposição de situações-problema na educação matemática potencializa o desenvolvimento do pensamento dedutivo, possibilitando ao estudante apreender os conceitos em suas relações internas e com outros saberes. Essa perspectiva favorece a superação de uma aprendizagem puramente mecânica, ao fomentar a construção de estratégias cognitivas mais sofisticadas e, conseqüentemente, promover a autonomia intelectual do aluno. Enquanto Huf (2018) ressalta o valor pedagógico das situações-problema, é com George Polya que se consolida uma metodologia heurística explícita para transformar o ato de resolver problemas em um processo de aprendizado profundo. Para Polya (1945), a resolução não é um fim mecânico, mas uma "arte" estruturada em etapas interdependentes que materializam, passo a passo, o exercício do raciocínio lógico em ação. Nesse sentido, Polya (1945) constitui um pilar teórico fundamental para esta pesquisa. Sua heurística oferece um modelo tangível de como a lógica pode ser operacionalizada em sala de aula na resolução de problemas, transpondo-a da abstração filosófica para uma ferramenta cognitiva acessível e apropriável pelo aluno. Cada etapa do método, desde a análise cuidadosa do enunciado até a verificação crítica do resultado, exercita habilidades centrais do RLM: a identificação de dados e incógnitas, análise, a formulação de estratégias baseadas em conhecimentos

prévios, dedução e analogia, a execução sistemática, organização e a revisão reflexiva por meio da validação e autoavaliação.

Portanto, a relevância de Polya (1945) extrapola a oferta de uma técnica. Seu trabalho orienta o posicionamento intelectual que esta dissertação defende: o quanto podemos propor uma educação matemática de maior qualidade ao propor o raciocínio lógico como instrumento transversal e integrante ao longo da educação básica e que o enfrentamento produtivo de problemas é a via régia para a apropriação ativa do conhecimento matemático. Ao guiar o estudante a “pensar sobre o próprio pensamento” durante a resolução, a heurística levantada por Polya não o leva apenas a uma resposta, mas o capacita a construir e refinar suas ferramentas internas de raciocínio – que é, em última instância, o objetivo maior da educação matemática crítica e significativa proposta neste trabalho.

O desenvolvimento do raciocínio lógico está intrinsecamente ligado à ativação e ao refinamento de funções cognitivas complexas, tais como a atenção sustentada, a memória operacional e a capacidade de abstração. Ao enfrentar conteúdos de crescente complexidade, o estudante é conduzido a exercitar a organização sistêmica de informações, o estabelecimento de relações causais e a construção de argumentos fundamentados. Essas competências não apenas impactam positivamente o desempenho acadêmico específico, como também transcendem o ambiente escolar, capacitando o indivíduo a analisar criticamente contextos do cotidiano, tomar decisões mais conscientes e posicionar-se de maneira reflexiva na sociedade. O pensamento matemático na Educação Básica pode ser compreendido como um movimento contínuo e ativo de cognição e apropriação. Segundo Moreira e Masini (2011, p. 13), “Cognição é o processo do qual o mundo de significados tem origem. [...] Esses significados [...] constituindo-se nos ‘pontos básicos de ancoragem’ dos quais derivam outros significados”. Ou seja, a cognição refere-se ao processo pelo o indivíduo, ao interagir com o mundo, constrói e organiza suas estruturas mentais, atribuindo sentidos à realidade.

Nesse processo, o raciocínio lógico atua como um operador fundamental: é a ferramenta que permite organizar, conectar e validar esses “pontos de ancoragem” cognitivos. Por meio da dedução, da inferência e da análise de relações, a lógica ajuda a estruturar o pensamento e a transformar informações isoladas em redes coerentes de significado. E se a cognição é a construção inicial dos significados, a apropriação é o processo ativo pelo qual o estudante internaliza, reconstrói e torna pessoalmente significativo um conhecimento. Mais do que receber informações, o aluno se apropria das ferramentas do raciocínio lógico quando passa a utilizá-las de forma autônoma para resolver problemas, construir argumentos e questionar hipóteses, afastando conclusões erradas, prematuras ou mesmo falaciosas. Dessa forma, a apropriação do Raciocínio Lógico Matemático não é a mera repetição de regras formais, mas a incorporação ativa de um modo de pensar que reorganiza a própria

cognição, permitindo ao indivíduo interpretar, analisar e transformar sua relação com o mundo.

## 2 Metodologia da Pesquisa

O presente estudo é em síntese uma investigação básica e teórica, cujo objetivo central está na crítica e reflexão sistemática com relação a apropriação (ou não) do Raciocínio Lógico Matemático no contexto da educação básica brasileira. Para tal, a escolha da natureza desta dissertação é qualitativa, com foco na compreensão e interpretação dos significados, intencionalidades e pressupostos pedagógicos propostos nos documentos oficiais que norteiam a educação brasileira. Os trabalhos metodológicos se somam na forma documental e bibliográfico, dado que a estrutura argumentativa e elaboração das análises são fundamentalmente baseadas nas fontes escritas dos documentos normativos, outras produções acadêmicas que ao longo da investigação inspiraram novas reflexões no campo da educação matemática e da filosofia educacional.

A base documental que forma esta investigação foi selecionada e organizada meticulosamente por mim e divididos em dois eixos que se complementam dada a intencionalidade desta pesquisa. A primeira parte se vale dos documentos oficiais normativos que regulam e estruturam a educação brasileira, onde foi levado em consideração as ênfases e/ou omissões em relação ao Raciocínio Lógico Matemático no currículo básico nacional. Para isso foram considerados com relevantes a Constituição Federal de 1988, em especial os artigos 205 e 206 que sustentam como cláusula pétrea o direito à educação básica e os seus princípios, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em especial a Lei 9.394 de 1996 que enfatiza as normas, princípios e a organização da educação brasileira, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997 e por fim a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 com ênfase nas competências gerais e nas habilidades específicas do componente curricular de Matemática e o Plano Nacional de Educação (PNE 2014 – 2024). Já nas primeiras investigações e análises comparativas entre os PCNs e a BNCC já se evidenciou uma evolução e compreensão da necessidade do Raciocínio Lógico no currículo básico.

O segundo eixo incorpora a produção teórica que serve de apoio e perspectiva analítica para a interpretação dos documentos oficiais. Este componente inclui desde obras clássicas e fundamentais do pensamento lógico e pedagógico, como os Analíticos de Aristóteles, cuja concepção de Organón ressoa na proposta central desta pesquisa. Os Elementos de Euclides e contexto paradigmático de construção axiomática. Neste último grupo, destacam-se as obras de George Polya, *A arte de resolver problemas* (1945), que proporciona a estrutura heurística para operacionalizar o RLM e o trabalho de Terence Tao, *Como resolver problemas matemáticos* (2013), que complementa a perspectiva de Polya com uma tipologia prática de problemas, além de outras contribuições de autores brasileiros como Miguel (2008), que critica o ensino que se limita ao procedimento e Huf

(2018), que investiga o raciocínio dedutivo em ambientes de sala de aula e Moreira e Masini (2011), que fundamentam a discussão sobre aprendizagem significativa e cognição.

O procedimento analítico realizado seguiu uma lógica que é tanto processual quanto cíclica, configurada em três etapas interconectadas na análise de conteúdo em investigações qualitativas, com adaptações para o contexto documental. A fase inicial consistiu na coleta e imersão nas fontes, através de leituras exploratórias e detalhadas de todos os documentos e obras selecionadas, com a finalidade de compreender seu conteúdo geral e os contextos de produção.

A segunda fase, dedicada à análise crítica dos documentos, abordou uma leitura focada e codificadora, onde foram identificados e destacados trechos que valorizavam, de modo explícito ou implícito, a conceitos como raciocínio lógico, pensamento dedutivo, demonstração, argumentação, resolução de problemas e formação crítica. Na terceira e última fase, ocorreu a síntese interpretativa e a constituição dos eixos temáticos. Nesse momento, os fragmentos identificados foram agrupados, comparados e contrastados, gerando os grandes temas que estruturam o corpo desta dissertação. A necessária inclusão do RLM nos currículos nacionais além de uma visita nas resoluções de problemas na forma de demonstrações associados às ferramentas lógicas de demonstrações representa a culminância deste trabalho. A exposição dos resultados dessa análise não segue um cronograma ou sequência documental estrita, mas adota uma ordem lógico-argumentativa, com o intuito de conectar a norma prescrita, a fundamentação teórica e a exemplificação didática em um discurso que se apresenta coeso e coerente sobre a necessidade e a possibilidade de uma verdadeira apropriação do RLM.

É importante salientar que a intencionalidade que permeia a elaboração deste trabalho vai além do formalismo da finalização de um curso. Ele proporciona ao leitor, que provavelmente será um educador ou um estudante em formação básica, uma seleção relevante de questões examinadas sob a perspectiva do raciocínio lógico. Dessa forma, esta obra também se configura como um testemunho da forma como a compreensão do Raciocínio Lógico Matemático se interconecta com as habilidades de organização do conhecimento, na preservação da veracidade das demonstrações e nas estratégias voltadas para a validação ou contestação de argumentos que se apresentam na forma de falácias. Nesse sentido, o capítulo 7 deste texto é verdadeiramente a "cereja do bolo", pois a entrega significativa da seleção de problemas, que foram solucionados e comentados, sob a ótica deste autor, traz à tona a ansiedade envolvida em suas resoluções e um aprofundamento no tratamento do pensamento baseado nas ferramentas lógicas. Essa escolha metodológica é considerada estratégica e justificável. Ao se dedicar a uma análise aprofundada dos fundamentos e das diretrizes, o estudo busca estabelecer uma base teórica robusta e uma problematização claramente definida, que pode, em investigações futuras, orientar e fundamentar pesquisas de campo, formações docentes ou a elaboração de materiais

didáticos, quem sabe uma tese de doutorado. A ambição final, portanto, não é esgotar o tema, mas iluminar com rigor e clareza uma de suas dimensões fundamentais, a que se estabelece entre a intenção expressa nos documentos oficiais e as ferramentas lógico-matemáticas indispensáveis para sua realização, defendendo que a apropriação dessas ferramentas é condição essencial para a concretização da intenção mencionada.

### 3 Levantamento Documental: CF, PCN e BNCC

O desafio de garantir uma educação básica de qualidade, equitativa e que promova o pleno desenvolvimento do cidadão assume contornos singulares em um país de dimensões continentais e diversidade sociocultural como o Brasil. A Constituição Federal de 1988 estabelece o direito de todos à educação e o dever do Estado de oferecê-la, princípios que devem ser materializados em políticas públicas capazes de transpor desigualdades regionais, econômicas e culturais. Esta pluralidade, se por um lado enriquece e engrandece nossa cultura e identidade, por outro lado traz grandes desafios na questão da educação, que diante desta imensidão precisa garantir a uniformidade, o pleno desenvolvimento do cidadão, tal qual segue em nossa Constituição Federal de 1988 em seus artigos 205 e 206:

Art. 205. A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Art. 206. O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: I – Igualdade de condições para o acesso e permanência na escola (BRASIL, 1988).

Logo, com o intuito de promover uma educação justa e equitativa quanto a distribuição dos povos ao longo do território brasileiro e sobre suas características regionais, houve a necessidade de normatizar o acesso à educação, consolidando assim os PCNs que são diretrizes elaboradas pelo governo federal para orientar a educação básica brasileira, sejam de escolas públicas ou particulares, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Criados em 1996, no contexto das discussões da LDB estes documentos se fizeram necessários para que juntos representassem um referencial para a organização curricular nacional. No Artigo 26 da LDB, destaca que

Os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental, do Ensino Médio devem ter base nacional comum, a ser complementada em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1966).

Os PCNs, em sua gênese, incorporam um princípio fundamental da educação crítica: a necessidade de que o conhecimento seja significativo e construído a partir da realidade do educando. Essa visão ecoa o pensamento de Paulo Freire (1996), para quem “não há docência sem discência”, ou seja, o ato de ensinar é inseparável e deve ser constantemente alimentado pelo ato de aprender, o qual é profundamente contextual. Assim, os PCNs foram concebidos como um referencial a ser ajustado às necessidades regionais e locais, permitindo que escolas, municípios e estados criem seus currículos próprios, escolhendo e priorizando conteúdos relevantes para sua comunidade. Essa flexibilidade não era uma

falha, mas uma intencionalidade pedagógica. Permitir adequações no método de ensino, na avaliação e no próprio processo de ensino-aprendizagem, de modo a promover uma verdadeira apropriação do conhecimento, e não sua mera transmissão.

Dessa forma, os PCNs, ao promoverem a participação ativa da comunidade escolar e a adaptação curricular local, representaram um avanço democrático na busca por uma educação mais significativa. No entanto, essa mesma plasticidade descentralizadora, virtude de um plano político-pedagógico que em sua gênese propunha uma ação mais democrática da construção do currículo nacional, revelou-se uma limitação didática para a consolidação de competências cognitivas complexas e estruturadas, como o RLM. A ênfase na flexibilidade e nos temas transversais, sem um eixo operacional claro sobre como desenvolver sistematicamente o pensamento dedutivo, a argumentação formal e a validação de hipóteses, pode ter contribuído para que o RLM fosse tratado como um subproduto implícito do ensino de Matemática, e não como um objeto de aprendizagem explícito e necessário. Em outras palavras, o documento abria espaço para o pensamento crítico, mas não fornecia os instrumentos lógicos específicos para sua construção, deixando a apropriação dessa competência flexível demasiadamente e sujeita às formações e do discernimento individual de cada educador, escola, região, etc. Foi essa lacuna, entre outras, que se mostrou evidente a necessidade de um documento posterior que especificasse com maior clareza e obrigatoriedade as competências e habilidades a serem desenvolvidas, abrindo caminho para a BNCC.

Após anos de debates sobre a formação de um currículo comum brasileiro e à luz do Plano Nacional de Educação (PNE 2014 - 2024) formou-se o documento atual da Base Nacional Comum Curricular, sendo este obrigatório e balizador de forma única todas as competências e habilidades das escolas brasileiras. A promoção deste propõem de forma não fragmentada ou adaptativa, tal como os PCNs, mas sim integrativa e alinhada com avaliações nacionais como SAEB e o Novo Ensino Médio. Diante destes dois elementos que direcionam a educação brasileira como um todo, diferenças claras se mostram, mas ambas estão alinhadas com um projeto nacional, equitativo e universal.

Embora tenham natureza distintas, os documentos elaborados para consolidação da BNCC e dos PCNs não são substitutivos um do outro, ou mesmo excludentes entre si, mas complementares. Se por um lado a BNCC veio para aprofundar as diretrizes educacionais os PCNs continuam sendo uma referência importante, democrática e plural. Não distante das suas intencionalidades pedagógicas, estes documentos norteadores concordam entre a respeito da educação matemática, como fundamental para a formação do cidadão, crítico, reflexivo e capaz de resolver situações problemas em seu dia a dia.

A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a matemática desempenha um papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras

Tabela 1 – Diferenças fundamentais entre os PCNs e a BNCC

Aspecto	PCN	BNCC
<b>Natureza</b>	Referencial. Não obrigatório. Adaptativo.	Normativo. Obrigatório. Final.
<b>Estrutura</b>	Disciplinas + temas transversais	Competências e Habilidades por área de conhecimento e por etapas.
<b>Flexibilidade</b>	Maior autonomia local. Proposição e adequação local.	Diretrizes nacionais rígidas.
<b>Foco</b>	Conteúdos conceituais	Competências socioemocionais e cognitivas

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na construção do pensamento e agilização do raciocínio dedutivo do aluno (PCN. 1997, p 15.).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em seu caráter normativo, eleva o status do conhecimento matemático ao explicitá-lo como um pilar indispensável para a formação integral na sociedade contemporânea. O documento afirma, de maneira cristalina que “O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais” (BRASIL, 2017, p. 265).

Essa declaração é fundamental por operar em dois planos convergentes: o utilitário (a aplicação na sociedade) e o formativo (a construção da criticidade). No entanto, é precisamente na concretização desse segundo plano, na formação do cidadão crítico que reside o desafio central desta pesquisa. A BNCC aponta como finalidade a criticidade, mas o meio para alcançá-lo permanece, em grande medida, uma caixa-preta pedagógica, valendo-se de citações pontuais a respeito do raciocínio lógico como instrumento formador.

É aqui que a presente dissertação busca avançar. Argumenta-se que a chave para materializar a formação crítica proposta pela BNCC está na explicitação e na apropriação sistemática do Raciocínio Lógico Matemático (RLM). A crítica socialmente responsável não surge espontaneamente. Ela é cultivada por meio de ferramentas intelectuais que permitem analisar, deduzir, inferir e validar argumentos. Portanto, a efetividade da BNCC em atingir seu próprio objetivo declarado está intrinsecamente ligada a como ela concebe, posiciona e orienta o ensino do RLM como o instrumento cognitivo primordial para a construção desse pensamento crítico. A análise subsequente dedicar-se-á a investigar em como o documento opera essa articulação entre o fim desejado e os meios lógicos necessários para alcançá-lo.

### 3.1 O raciocínio lógico no contexto da BNCC e dos PCNs

A presença do Raciocínio Lógico Matemático (RLM) nos documentos norteadores – PCNs e BNCC – não é meramente decorativa. Ela sinaliza e reconhecimento de forma oficial a sua condição como componente essencial para uma educação matemática de qualidade. Ambos os textos partem do pressuposto de que o estudo aprofundado da disciplina, quando conduzido por meio de processos de formulação de hipóteses, argumentação rigorosa e dedução, atua de forma decisiva na arquitetura das capacidades intelectuais dos estudantes. É essa convicção sobre o poder formativo da lógica que se materializa textualmente, por exemplo, quando os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que

É certo que os matemáticos também fazem constante uso de modelos e analogias físicas e recorrem à exemplos bem concretos, na descoberta de teoremas e métodos. Mas os teoremas matemáticos são rigorosamente demonstrados por um raciocínio lógico. Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes (PCN. 1997, p 23).

Neste sentido, o PCN concorda com a práxis matemática quando é levado em consideração o momento no qual a demonstração de algum teorema, proposição, lema, corolário etc., se faz necessária. O processo no qual há a construção do saber por meio de confirmação ou refutação de hipóteses, é calcada nas ferramentas lógicas dedutivas ou proposicionais, ajudando assim na refutação de falácias ou confirmação de teoremas.

Ainda no trato do papel da matemática na educação básica, os documentos do PCN abordam os conceitos do raciocínio lógico não o dissociando de outras competências ligadas à demais áreas de conhecimento ou vida do cidadão. Desta forma, promove e incentiva a relação do pensamento matemático por meio dos recursos da lógica para promover desde as primeiras séries do fundamental a capacidade argumentativa e de formação de conclusões em diversos cenários.

A matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerência que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico, [...] é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza quanto ciências sociais [...] (PCN. 1997, p 25).

Dentro do processo de aprendizagem da matemática na educação básica, o documento dos Parâmetros Curriculares aponta o lúdico como parte da sistematização da compreensão da matemática, implicando ainda na condição do uso da lógica como ferramenta decisória num sistema de jogos estruturados em cenários e estratégicos como damas, xadrez ou dominó. Enfatiza ainda, propondo que por meio dos jogos os estudantes não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por meio da analogia. Tão logo, há um claro incentivo na participação dos jogos

em grupo pois este representa uma conquista cognitiva para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

Ao consolidar suas diretrizes, os Parâmetros Curriculares Nacionais conferem ao raciocínio lógico um lugar estratégico entre os objetivos gerais do ensino de Matemática. A lógica não é apresentada como um tópico isolado, mas sim elevada à condição de ferramenta cognitiva transversal, cuja apropriação ativa por parte do aluno é entendida como condição para o alcance das finalidades formativas da disciplina. Desse modo, o documento opera uma distinção: mais do que ensinar lógica, propõe-se ensinar com e por meio da lógica, integrando-a como o instrumento que estrutura a resolução de problemas, a validação de estratégias e a própria construção do conhecimento matemático ao longo da Educação Básica.

Resolver situação problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínios e processos, com dedução, indução, intuição, analogia, estimativa e utilizando procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (PCN. 1997, p 37).

Por fim, o sucesso escolar dentro dos conhecimentos matemáticos, alinhado aos PCNs, depende de uma capacidade construtiva entre as múltiplas relações entre conceitos e formas do raciocínio. A sistematização de conceitos fragmentados, mesmo que de forma completa e profunda não garante um aprendizado significativo e formativo para o cidadão, entretanto, as correlações, implicações, capacidades de analogias, inferências, induções e construção de múltiplas relações entre os objetos de estudos ou áreas de conhecimento por meio da lógica e cognição atenuam as dificuldades apresentadas pelo estudante e promovem um saber mais global.

A Base Nacional Comum Curricular, por sua vez, não se limita em citar o raciocínio lógico. Ela o integra como um princípio estruturador e transversal. Diferentemente dos PCNs, que o abordam de forma mais discursiva, a BNCC opera pela convergência entre competências gerais e habilidades específicas da Matemática para promover seu desenvolvimento. A competência de “utilizar diferentes linguagens” (BNCC, 2018, p. 9), por exemplo, encontra ressonância na habilidade de “utilizar diferentes registros de representação” matemática, ato que exige tradução lógica. De modo mais explícito, a competência de “argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis” (BRASIL, 2018, p. 9) materializa-se nas habilidades que demandam a construção de justificativas, a avaliação de argumentos alheios e a formulação de conjecturas para, então, “testar sua validade no contexto dos conhecimentos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 268). Dessa forma, a BNCC fomenta a capacidade investigativa não por meio de um tratado de lógica, mas pela sistemática exigência de processos dedutivos, argumentativos e de validação de hipóteses, mecanismos estes que constituem a própria essência do Raciocínio Lógico Matemático em ação, tanto no domínio puro quanto nas ciências aplicadas.

Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a matemática, independente

das suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes (BNCC 2018, p 55).

Por sua natureza, a BNCC se consolida de modo normativo e final e o fato de trazer poucas inserções a respeito do raciocínio lógico no contexto da educação básica, não configura um abandono desta no processo de ensino e aprendizagem. A gênese da base comum está amparada pela sua complementação em relação aos PCNs, incorporando e sistematizando as habilidades e competências necessárias por série e áreas de conhecimento ao longo da formação dos estudantes.

A eloquência com que os documentos normativos enaltecem o raciocínio lógico como alicerce do pensamento crítico contrasta, contudo, com a complexidade de sua materialização na prática pedagógica cotidiana. O discurso prescritivo, por mais generoso, não se converte automaticamente em aprendizagem efetiva. Entre a declaração de princípios e a sala de aula, interpõe-se um hiato de implementação crítico, determinado por variáveis como: a concepção de RLM presente nos materiais didáticos adotados; a formação e a preparação dos educadores para ensinar não apenas matemática, mas pensamento lógico por meio da matemática; e as condições concretas de trabalho que possibilitam (ou inviabilizam) aulas investigativas e dialógicas. A pergunta que se impõe, portanto, e que orienta os desdobramentos desta pesquisa, não é se o raciocínio lógico é importante pois os documentos são unânimes e eloquentes a esse respeito, mas como as condições materiais, formativas e curriculares podem ser articuladas para que essa potencialidade declarada se transforme em capacidade crítica consolidada no repertório intelectual do aluno.

## 4 Resolução de Problemas: Raciocínio Lógico Matemático

A matemática constitui-se menos como um corpo estático de conhecimentos e mais como uma prática humana fundamental de modelar, interpretar e transformar a realidade. Sua presença é transversal, atuando como ferramenta decisória tanto no planejamento financeiro de uma nação quanto na avaliação instantânea de um pedestre ao atravessar uma rua. O que distingue a ação reflexiva da reação intuitiva, no entanto, é a capacidade de tornar explícitos os processos lógico-matemáticos subjacentes à tomada de decisão.

Esta capacidade, a da resolução sistemática de problemas, é o motor histórico do desenvolvimento científico e tecnológico. Desde a estimativa de recursos nas comunidades primitivas até os cálculos precisos que levaram o homem à Lua, a humanidade tem progredido ao transformar desafios concretos em problemas estruturados, solucioná-los e acumular esse conhecimento resolutivo. Assim, a história da matemática é, em grande medida, a história de um pensamento em evolução, cujo poder reside não em um conjunto fechado de verdades, mas em um método contínuo de investigação e descoberta, conectando conhecimentos pretéritos em novas hipóteses e formulando de modo crescente novas teorias, teoremas, proposições, etc.

Se na escala da civilização esse processo é incremental, na escala do indivíduo ele precisa ser cultivado. O papel da educação matemática, portanto, é criar as condições para que o aluno não apenas acesse os produtos acumulados desse pensamento como fórmulas e teoremas, mas principalmente se aproprie de seu processo gerador. A sala de aula deve converter-se no laboratório onde se exercita, de forma reflexiva e mediada, a mesma capacidade resolutiva que impulsiona o avanço do conhecimento: a capacidade de analisar, conjecturar, deduzir, argumentar e validar, tal qual são norteados nos documentos oficiais que orientam o currículo nacional.

É neste contexto que a resolução de problemas deixa de ser um tópico curricular para assumir o status de eixo central para a apropriação do Raciocínio Lógico Matemático (RLM). Enquanto a vida apresenta problemas de forma implícita e caótica, a escola tem a função de selecionar e estruturar problemas que funcionem como micromundos onde as ferramentas do pensamento lógico podem ser observadas, compreendidas e dominadas. Para iluminar essa transição do problema cotidiano para o problema pedagógico, e por meio deste para a autonomia do pensamento, este capítulo recorre às contribuições de George Polya e Terence Tao, cujos trabalhos oferecem, respectivamente, um método estruturado e uma reflexão sobre a atitude investigativa necessárias para transformar a resolução de problemas em uma prática efetiva de aprendizagem lógica e significativa.

## 4.1 A resolução de Problemas

Uma situação problema legítima não se apresenta em um formato universal. Ela pode manifestar-se por meio de um enunciado textual denso, uma representação gráfica ou pictórica, uma tabela de dados, uma montagem lúdica (puzzle, gameificação, jogos) ou mesmo por uma narrativa cotidiana. Essa diversidade de modos de apresentação não é acidental. Ela exige e, simultaneamente, desenvolve no solucionador a capacidade de traduzir informações entre diferentes registros de representação (DUVAL, 2003). Longe de ser um obstáculo, essa variedade constitui uma dimensão fundamental do processo, pois provoca a mobilização de um repertório igualmente amplo e flexível de metodologias investigativas. A escolha do caminho resolutivo, portanto, inicia-se com a análise crítica da própria configuração do problema, um primeiro e crucial exercício de raciocínio lógico que antecede qualquer cálculo ou manipulação formal.

Os problemas ou puzzles matemáticos são importantes para a matemática a sério (aquela que os matemáticos praticam), do mesmo modo que os contos, fábulas e historietas são importantes para as crianças entenderem a vida real. Os problemas matemáticos são matemática desinfetada, em que uma solução elegante foi já encontrada (por outra pessoa, claro), a questão foi extirpada de tudo quanto é supérfluo, e ela nos é apresentada de um modo interessante e (espera-se) estimulante. (TAO, 2013 p. 15)

Terence Tao, matemático australiano, em 2006 e com apenas 31 anos de idade foi o ganhador da medalha Fields (sendo assim o mais jovem laureado com esta honra), e ainda jovem já demonstrava sua genialidade quando produz aos 15 anos uma obra incrivelmente sóbria sobre como resolver problemas matemáticos, trazendo uma perspectiva pessoal sobre como aborda soluções às situações que considerou relevante durante sua formação ao longo da educação básica. Com uma abordagem simples e direta, apresenta um compêndio de questões e resoluções, mas sempre propondo um caminho da compreensão do enunciado, levantamento de hipóteses até a resolução.

Segundo TAO, há três tipos de problemas, facilmente identificáveis de acordo com os comandos associados.

- questões do tipo mostre que... ou calcule..., em que se deve provar que uma certa afirmação é verdadeira, ou manipular uma expressão para obter um certo resultado;
- questões do tipo encontre... ou encontre todos..., em que se pede para determinar algum-objeto (ou todos os objetos) satisfazendo certas condições;
- questão do tipo existe ou não..., em que se tem que provar uma afirmação ou fornecer um contraexemplo (e, portanto, cai num dos dois tipos anteriores). (TAO, 2013, p.2)

Mais do que uma etapa preliminar, a identificação e classificação do problema constituem o primeiro ato de análise lógica, onde o solucionador decodifica a natureza da tarefa

intelectual que lhe é proposta. Esse processo exige uma leitura ativa que transcende a decodificação textual, voltando-se para a compreensão da estrutura lógica do comando ("mostre que...", "encontre...", "existe...") e para a identificação do tipo de resposta ou procedimento esperado. Tal análise não é passiva pois se trata de uma busca sobre a própria investigação, que permite selecionar, dentre o repertório de estratégias disponíveis, um plano de abordagem coerente com a natureza do problema. Nesse sentido, a tipologia proposta por Tao (2013) não é um simples catálogo, mas uma ferramenta heurística de primeira ordem. Ao classificar um problema como de demonstração, busca ou existência, o resolvidor já mobiliza esquemas lógicos distintos (prova direta, exploração sistemática, construção de exemplos/contraexemplos), direcionando seu pensamento para os caminhos mais exitosos desde o início do processo.

Se Terence Tao oferece uma tipologia para compreender a natureza dos problemas, coube antes ao matemático húngaro George Polya (1887-1985) dedicar sua vida a sistematizar o processo por meio do qual eles são solucionados. Em sua obra mais reconhecida, *A Arte de Resolver Problemas* (1945), Polya transcende a visão da resolução como uma arte intuitiva e propõe uma metodologia heurística explícita, um conjunto de estratégias e perguntas-guia que tornam o ato de resolver problemas um processo consciente, analisável e, portanto, ensinável. Seu objetivo era precisamente democratizar o acesso ao pensamento matemático experiente, decompondo a prática dos solucionadores hábeis em etapas discerníveis que pudessem ser compreendidas e reproduzidas por professores e alunos. Neste sentido, a argumentação lógica se mostra uma ferramenta poderosa nas mãos de Polya, com a verdadeira intencionalidade pedagógica de tornar acessível e transmissível o processo de aprendizagem na resolução de problemas. Para tanto, Polya não se limitou a descrever um método, ele investigou e formalizou o papel do professor como mediador desse processo, equilibrando assistência e autonomia para garantir que o aluno fosse o agente ativo na construção de sua própria compreensão. Dessa forma, sua contribuição vai além da heurística. Ela funda uma pedagogia da investigação matemática, cujo cerne é a apropriação, pelo aprendiz, das ferramentas do raciocínio lógico por meio da prática reflexiva.

Para Polya, a aprendizagem significativa da resolução de problemas é uma construção que ocorre na zona delicada entre a autonomia do aluno e a orientação especializada. É nesse contexto que sua reflexão sobre a mediação docente se torna paradigmática, ao afirmar que

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas, se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não exprima qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de modo que o estudante caiba numa parcela razoável do trabalho (POLYA, 1945 p.5).

Esta passagem não é um mero conselho didático. Ela encapsula o princípio da

mediação ajustada, onde o educador atua como um facilitador cognitivo que remove obstáculos desnecessários, mas preserva o desafio intelectual essencial. Desse modo, Polya define a verdadeira ajuda pedagógica como aquela que potencializa a atividade mental autônoma do aluno, garantindo que a experiência de resolver um problema seja, de fato, uma experiência de apropriação ativa das estratégias e do raciocínio lógico nela envolvidos, condição fundamental para que a heurística transcenda a teoria e se torne uma competência internalizada pelo estudante.

Enquanto professor em Stanford, Polya propôs que o aprender dentro do espectro das resoluções de problemas segue uma lógica que vai além do saber das coisas: é despertar a mente dos alunos, fazendo-os pensar com criatividade, atenção e uma intencionalidade. Para tal, com o objetivo efetivo do êxito, o aluno precisa antes de se jogar às soluções propostas, reconhecer, concatenar ideias e hipóteses referentes ao problema e assim propor uma sequência de passos que direcionam cada vez mais até a solução, doravante chamada de incógnita da questão.

Acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e traçar figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano (POLYA, 1945 p.8).

A matemática não é só um monte de regras condensadas e compactadas em aulas da educação básica ou academia, ela é útil na vida e para o trabalho, na formação do cidadão e na sua capacidade crítica. Os problemas de ordem matemática permeiam o cotidiano do cidadão, e para aprender a resolvê-los, é necessário desde a formação básica preparar-se enquanto alunos. Neste sentido, é necessário mais do que repetir exercícios, deve-se tentar coisas novas, que desafiam o aluno desde cedo a pensar de forma profunda e usar ideias diferentes. Caso a solução almejada não seja encontrada, vale um retrospecto até o ponto de falha e então retroceder para situações análogas, com condições semelhantes tanto quanto puder, até que a proposição da resposta seja mais natural. Segundo Polya (1945, p. 8), “se não conseguir resolver um problema, procure antes resolver um problema correlato”. Portanto, as ferramentas lógicas de resolução por analogias são fundamentais para que o aluno possa correlacionar diferentes situações em espectros de similaridades para que resoluções adjacentes possam complementar a compreensão ampla e de forma generalizada.

A grande contribuição de Polya (1945) para a educação matemática reside precisamente na decomposição do ato aparentemente indivisível de "resolver" numa sequência lógica de operações mentais. Seu método heurístico, organizado em quatro etapas interdependentes, pode ser lido não apenas como um roteiro prático, mas como um protocolo para o exercício sistemático do Raciocínio Lógico Matemático (RLM):

(i) Compreender o problema: Esta fase inicial vai além da leitura superficial. Ela exige uma análise lógica para identificar dados, incógnitas, condições e restrições. É o momento de traduzir a situação para uma estrutura formal manipulável, mobilizando habilidades de classificação e organização de informações.

(ii) Conceber um plano: Aqui, o raciocínio se torna hipotético-dedutivo. Com base na análise anterior e no repertório de estratégias conhecidas (por analogia, decomposição, procura de padrões, etc.), o resolvidor formula um caminho potencial. Esta é a etapa da inferência e da construção de argumentos que justificam a viabilidade do plano.

(iii) Executar o plano: A implementação do plano testa sua consistência lógica e operacional. Requer a aplicação precisa de técnicas, o raciocínio dedutivo e o raciocínio propositivo, passo a passo e a verificação da coerência interna de cada operação, exercitando o rigor e a disciplina do pensamento formal.

(iv) Rever/Retrospecto: Esta etapa final é a validação lógica. Envolve revisar o processo para confirmar a correção da solução, buscar métodos alternativos, generalizar o resultado ou explorar casos-limite. É o exercício supremo do pensamento crítico, onde a resposta é submetida ao escrutínio da argumentação e da prova.

Dessa forma, a heurística de Polya opera uma didatização do RLM. Cada etapa do método requer e, ao mesmo tempo, desenvolve um conjunto específico de ferramentas lógicas. A promessa de um "aprendizado sistematizado" e de "horizontes abertos" mencionada por Polya só se concretiza porque o método transforma a resolução de problemas em um ciclo recursivo de aplicação e refinamento do pensamento lógico. O "histórico de resoluções anteriores" a que ele se refere é, na verdade, a acumulação de experiência no manejo dessas ferramentas, permitindo que o aluno não apenas resolva a questão imediata, mas se aproprie progressivamente de um modo lógico de pensar que será transferido para desafios futuros. É nessa internalização que reside a conexão direta entre a metodologia de Polya e o cerne desta pesquisa: a apropriação do RLM como competência cognitiva durável.

## 5 Raciocínio Lógico

A promoção de uma educação matemática que valorize o pensamento crítico e a autonomia, conforme registrado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), requer mais do que apenas a transmissão de conteúdos específicos. É necessário esclarecer os recursos intelectuais que possibilitam a avaliação, a argumentação e a validação de ideias. Nesse contexto, a lógica proposicional deixa de ser um campo abstrato da filosofia ou da matemática pura e se estabelece como a base cognitiva essencial para a aplicação das competências gerais e das habilidades matemáticas descritas no documento nacional. Habilidades como “argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis” (BNCC, 2018, p. 9) e “utilizar diferentes linguagens” para desenvolver e comunicar raciocínios encontram na lógica proposicional sua estrutura formal, que serve como um sistema de regras para diferenciar um argumento válido de uma simples opinião ou de uma falácia.

Essa necessidade de equipar o pensamento é amparado nas contribuições educacionais de George Polya e Terence Tao. Polya, ao elaborar sua heurística para resolução de problemas, não se limitou a enumerar etapas. Ele pressupôs implicitamente que o solucionador seja capaz de realizar inferências lógicas em cada fase, desde a compreensão do problema (que envolve a identificação das proposições pertinentes, hipóteses e suas correlações) até a formulação e a execução de um plano (que requer a concatenação de ações matemáticas com base em implicações lógicas). Por outro lado, Tao, ao categorizar os problemas em tipos como “prove que...” ou “há algum...?”, está, de fato, definindo a natureza da tarefa lógica a ser executada, a prova universal, a busca existencial de alguma solução ou a refutação por meio de contraexemplo. Assim, ambos os autores ressaltam a importância de um pensamento logicamente estruturado. Contudo, cabe à lógica proposicional fornecer os recursos específicos, seja por meio dos seus conectivos, equivalências ou mesmo das regras de inferências, que tornam esse raciocínio não apenas intuitivo, mas também rigoroso, analisável e passível de ensino ainda no contexto da educação básica.

As boas práticas e bom uso deste conjunto de ferramentas lógicas permitem ao aluno uma mudança no sentido de uma observação passiva a uma construção ativa do saber. Compreender a configuração de uma proposição condicional ou implicação (“se  $p$ , então  $q$ ”) e sua conexão com a sua negação é fundamental para o domínio tanto de uma prova direta quanto de uma demonstração por negação. As leis de D’Morgan são valiosas para a negação apropriada de proposições compostas, uma competência vital para a elaboração da contra positiva de um teorema ou para a detecção da negação de uma conjectura que se busca contestar. As regras de inferência, como o modus ponens e o modus tollens, são consideradas os “elementos básicos” de qualquer prova, representando

os passos lógicos mínimos que, ao serem encadeados corretamente asseguram que uma conclusão segue legitimamente de suas premissas. Sem esse conhecimento formal, há o risco de que o “argumento persuasivo” citado pela BNCC permaneça em um nível de retórica, sem alcançar a validação lógica e matemática.

Por isso, este capítulo tem como objetivo expor e discutir os aspectos essenciais da lógica proposicional, seja na compreensão dos conectores, tabelas verdadeiras, equivalências, negações e regras de inferência, sempre como fundamento aplicável no contexto da educação básica. A intenção não é formar especialistas em lógica, mas capacitar educadores e estudantes a empregarem a lógica como uma ferramenta para analisar e interpretar tanto a realidade matemática quanto a não-matemática. Ao implementar o RLM em sala de aula, proporcionaremos meios concretos para que a resolução de problemas, baseada na aprendizagem significativa e na formação de um cidadão crítico, conforme previsto pela BNCC. Neste sentido, a aprendizagem deixa de ser meras intenções documentais e se tornem práticas efetivas em sala de aula, onde cada conclusão decorra de um raciocínio claro, cada argumento possa ser explícito e cada falácia possa ser reconhecida e desmantelada. Assim, a lógica se apresenta não como um conteúdo adicional, mas como a chave para uma aprendizagem matemática verdadeiramente significativa e libertadora.

## 5.1 A Lógica Proposicional

A lógica proposicional (ou cálculo sentencial) é um sistema formal que estuda a estrutura lógica de proposições — entendidas como sentenças declarativas que podem ser verdadeiras ou falsas, mas não ambas. Nesse sistema, proposições simples são combinadas por meio de conectivos lógicos para formar proposições compostas, cujo valor de verdade depende exclusivamente dos valores de verdade das proposições componentes e das regras semânticas dos conectivos.

Os principais conectivos da lógica proposicional e suas respectivas condições de verdade são:

- **Negação** ( $\neg$ ): inverte o valor de verdade de uma proposição. Se  $P$  é verdadeira,  $\neg P$  é falsa; se  $P$  é falsa,  $\neg P$  é verdadeira.
- **Conjunção** ( $\wedge$ ): resulta verdadeira apenas quando ambas as proposições conjuntas são verdadeiras. Exemplo:  $P \wedge Q$  é verdadeira se, e somente se,  $P$  e  $Q$  forem verdadeiras.
- **Disjunção** ( $\vee$ ): na lógica clássica, é inclusiva, resultando verdadeira quando pelo menos uma das proposições é verdadeira.

- **Condicional** ( $\rightarrow$ ):  $P \rightarrow Q$  é falsa apenas quando  $P$  é verdadeira e  $Q$  é falsa; nos demais casos, é verdadeira.
- **Bicondicional** ( $\leftrightarrow$ ):  $P \leftrightarrow Q$  é verdadeira quando  $P$  e  $Q$  possuem o mesmo valor de verdade (ambas verdadeiras ou ambas falsas).

A partir desses conectivos e de um conjunto de regras de inferência (como *modus ponens*, *modus tollens*, silogismo disjuntivo, etc.), a lógica proposicional permite verificar a validade de argumentos: uma conclusão é logicamente válida se for derivada das premissas por meio dessas regras, independentemente do conteúdo específico das proposições. Esse processo de inferência preserva a verdade — se as premissas forem verdadeiras, a conclusão será necessariamente verdadeira —, o que torna a lógica proposicional uma ferramenta eficiente para analisar demonstrações formais e identificar falácias argumentativas.

Desta maneira, a lógica proposicional é uma alternativa eficiente na verificação de conclusões dentro de um sistema axiomático de demonstrações. De posse das regras de inferência, e trazendo hipóteses verificadas e conectadas por uma sequência de premissas, é possível inferir resultados verificáveis e verdadeiros ou mesmo demonstrar conclusões que se apoiam em argumentos falaciosos, sendo assim, portanto, o processo de inferência é a preservação da verdade dentro de uma miríade argumentativa.

No âmago do raciocínio lógico, o que de fato devemos observar é se uma proposição é verdadeira ou falsa, caso estejamos tratando de uma proposição propriamente dita. Uma proposição lógica é uma frase declarativa que apresenta condições necessárias para análise de sua validade. A palavra “proposição” vem de “propor”, que significa submeter à apreciação. (PYLRO, 2025 p. 12)

A formação de um raciocínio lógico coerente e a habilidade de criar, examinar e validar argumentos são características que requerem a assimilação e o domínio de estruturas formais que estruturam o pensamento. Neste cenário, o cálculo sentencial é visto como o sistema formal mais básico e, ao mesmo tempo, essencial para o aprimoramento do Raciocínio Lógico Matemático (RLM).

Se o cálculo sentencial define o sistema formal e a proposição como sua unidade fundamental de significado, os conectivos lógicos atuam como operadores relacionais, trazendo estrutura e profundidade ao raciocínio dedutivo. Eles funcionam como conexões sintáticas que possibilitam a combinação de proposições simples, transformando-as em proposições compostas, cujo valor de verdade depende de uma relação clara e definida entre os elementos que as compõem. A ideia de organizar o discurso racional não é algo novo. Suas origens podem ser rastreadas até a abordagem então inovadora de Aristóteles na Antiguidade grega. Em suas obras *Analíticos* e no *Organón*, Aristóteles não só reconheceu a necessidade de um método para um raciocínio adequado, mas também delineou as formas

fundamentais de conexão entre juízos, atualmente chamamos de conectivos. Para ele, a lógica era o Organón, a ferramenta para alcançar conhecimento válido, e o uso cuidadoso dos conectores linguísticos era uma parte que fundamentava o bom uso dessa ferramenta, pois permitia, por exemplo, distinguir entre uma afirmação universal e uma particular, ou entre uma condição necessária e uma suficiente.

## 5.2 Os Conectivos Lógicos

A definição clara de cada conectivo, como utilizamos atualmente, é definida através de tabelas-verdade, que analisam meticulosamente o valor das proposições compostas para todas as combinações viáveis dos valores das proposições simples. Essa formalização, resultante de avanços na lógica contemporânea, utiliza os seguintes operadores principais:

### 5.2.1 Conjunção

Conjunção ( $\wedge$ , "e"): A proposição  $p \wedge q$  é verdadeira se, e somente se, ambas as proposições  $p$  e  $q$  forem simultaneamente verdadeiras. Formaliza a interseção de condições, a necessidade cumulativa de requisitos, ideia presente no raciocínio categórico aristotélico.

Tabela 2 – Tabela Verdade da Conjunção

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

A representação da conjunção lógica ( $p \wedge q$ ) por meio da interseção de conjuntos vai além de uma simples analogia visual, constituindo uma relação estrutural significativa que demonstra a consistência entre variados sistemas formais da matemática. No âmbito da teoria dos conjuntos, ao associar a proposição  $p$  ao conjunto  $P$ , que compreende todos os casos (ou "mundos possíveis") onde  $p$  se verifica, a operação de interseção  $P \cap Q$  reflete com precisão a semântica da conjunção.

Um elemento faz parte da interseção  $A \cap B$  se, e somente se, ele está presente em  $p$  e em  $q$  ao mesmo tempo. Esta definição se alinha de maneira exata à tabela-verdade da conjunção: a proposição composta ( $p \wedge q$ ) é verdadeira apenas quando ambas as partes,  $p$  e  $q$ , são simultaneamente verdadeiras. Em situações diferentes, nas quais pelo menos uma das proposições é falsa, o "caso" não estará dentro de um dos conjuntos, portanto não faz parte da interseção, resultando na falsidade da conjunção.

Essa relação não é apenas elegante, ela também garante um valor pedagógico. Permite que o estudante visualize e compreenda o significado do conectivo “e” como uma sobreposição de condições, onde a verdade requer que todos os critérios sejam atendidos. Ao converter um problema lógico para a linguagem dos diagramas de Venn, o aluno pode realmente observar a área de validade de uma afirmação composta, transformando uma ideia lógica abstrata em uma imagem concreta de interseção. Assim, a teoria dos conjuntos serve como um elo cognitivo que aprimora a análise da tabela-verdade, mostrando como diferentes linguagens matemáticas se unem para expressar a mesma estrutura relacional essencial.

### 5.2.2 Disjunção

Disjunção ( $\vee$ , “ou”): A proposição  $(p \vee q)$  é verdadeira quando pelo menos uma das proposições  $(p$  ou  $q)$  é verdadeira. Na lógica matemática, trata-se do *ou* inclusivo, cuja compreensão evita falácias de falsa disjunção.

Assim como a interseção expressa a conjunção visualmente, a disjunção lógica inclusiva  $(p \vee q)$  está intimamente ligada à operação de união  $(P \cup Q)$  dentro da teoria dos conjuntos. Se o conjunto  $P$  cobre todas as situações em que  $p$  é verdadeira e  $Q$  representa aquelas em que  $q$  é verdadeira, a união  $(P \cup Q)$  inclui todos os cenários em que pelo menos uma proposição é verdadeira.

A conexão entre a disjunção lógica inclusiva  $(p \vee q)$  e a operação de união de conjuntos  $(P \cup Q)$  vai além da analogia, pois apresenta uma estrutura comum. Similarmente à forma como a união agrega todos os elementos de pelo menos um dos conjuntos envolvidos, a disjunção é considerada verdadeira se ao menos uma das proposições que a compõem é verdadeira. Essa relação torna possível entender a disjunção não apenas como uma regra formal, mas como uma operação que, da mesma forma que a união, define um espaço lógico de alternativas. Assim, com os valores de verdade atribuídos a cada proposição, é viável determinar o valor lógico da disjunção através de uma analogia rigorosa entre lógica e teoria dos conjuntos. Essa comparação evidencia a coerência interna entre esses dois campos e dá à disjunção uma base tanto intuitiva quanto formalmente sólida.

Tabela 3 – Tabela Verdade da Disjunção

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Esse vínculo reflete de forma precisa a tabela-verdade da disjunção inclusiva. A

proposição composta ( $p \vee q$ ) é considerada falsa somente no caso em que ambas as partes são falsas (o que se refere à área externa dos conjuntos  $p$  e  $q$ ). Em qualquer outra eventualidade, se  $p$  for verdadeira,  $q$  for verdadeira ou ambas, essa situação se encaixa na união ( $P \cup Q$ ), resultando em uma disjunção verdadeira. O diagrama de Venn, ao mostrar a área compartilhada dos dois conjuntos, proporciona uma visão clara dessa lógica da disjunção inclusiva, onde a verdade de um componente é suficiente, mas não exclusiva, para assegurar a verdade do conjunto como um todo. Essa representação reforça a ideia de que o “ou” lógico matemático é inclusivo por sua natureza, o qual deve ser evidenciado ao tratar de raciocínios errôneos originados da interpretação coloquial e excludente do termo.

### 5.2.3 Disjunção Exclusiva

Disjunção exclusiva ( $\veebar$ , "ou ... ou"): A proposição ( $p \veebar q$ ) é verdadeira quando há uma exclusividade verdadeira entre as proposições  $p$  ou  $q$ . Na lógica matemática, trata-se do *ou* exclusivo, cuja compreensão evidencia conjuntos ou condições que são desconexos, como por exemplo o princípio da tricotomia.

Tabela 4 – Tabela Verdade da Disjunção Exclusiva

$p$	$q$	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Frequentemente expressa por *ou...ou...* no sentido de uma escolha excludente, encontra uma interpretação análoga na diferença simétrica entre conjuntos. Dados dois conjuntos  $P$  e  $Q$ , a diferença simétrica, denotada por  $(P \Delta Q)$  é definida como a união das partes que pertencem a um conjunto, mas não a ambos simultaneamente:  $(P \cup Q) \setminus (P \cap Q)$ .

Esta operação captura exatamente a semântica da disjunção exclusiva ( $p \veebar q$ ). A proposição composta é verdadeira quando uma, e apenas uma, das proposições componentes é verdadeira. Em outras palavras, mas com mesma compreensão, isso significa que o caso considerado deve pertencer a  $P$  ou a  $Q$ , mas não à interseção de ambos. A tabela-verdade da disjunção exclusiva reflete essa condição. Ela é verdadeira quando os valores de  $p$  e  $q$  são diferentes (um verdadeiro, outro falso) e falsa quando são iguais (ambos são verdadeiros ou ambos são falsos).

No diagrama de Venn, a região correspondente à disjunção exclusiva é visualizada como as áreas exclusivas de cada conjunto, excluindo-se a região de sobreposição central. Esta representação gráfica contrasta claramente com a imagem da união completa usada para a disjunção inclusiva. Ela reforça a compreensão de que, na lógica matemática, a

disjunção pode assumir dois significados distintos, inclusivo ou exclusivo, e que a escolha do conectivo adequado é fundamental para a precisão do raciocínio e para a correta interpretação de problemas e definições.

### 5.2.4 Condicional

Condicional ( $p \rightarrow q$ , "se... então..."): A proposição ( $p \rightarrow q$ ) é falsa unicamente no caso em que a antecedente  $p$  é verdadeira e a conseqüente  $q$  é falsa. Este conectivo, pedra angular da noção de implicação e diretamente relacionado ao silogismo hipotético aristotélico, formaliza a ideia de que a verdade de  $p$  é condição suficiente para a verdade de  $q$ .

Tabela 5 – Tabela Verdade da Condicional

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

### 5.2.5 Bicondicional

Bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ , "se e somente se"): a proposição ( $p \leftrightarrow q$ ) é verdadeira precisamente quando  $p$  e  $q$  possuem o mesmo valor de verdade. Expressa uma relação de equivalência lógica e dependência mútua.

Tabela 6 – Tabela Verdade da Bicondicional

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

### 5.2.6 Negação

Negação ( $\neg$ , "não"): Operador unário fundamental, a negação inverte o valor de verdade da proposição à qual se aplica. A proposição  $\neg p$  é verdadeira se, e somente se,  $p$  for falsa. É a ferramenta básica para a refutação e para o raciocínio por contradição, método já valorizado na dialética grega.

Tabela 7 – Tabela Verdade da Negação

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

A importância desses conectores vai além de simplesmente decorar suas definições. Eles proporcionam aos estudantes uma forma analítica clara e respaldada historicamente para desvendar a organização de proposições. Entender, por exemplo, a negação de conjunções, disjunções e equivalências capacita o aluno a trabalhar com declarações complexas, uma habilidade essencial na elaboração de provas matemáticas. Da mesma maneira, ter domínio sobre a estrutura dos condicionais é crucial para realizar uma prova direta ou elaborar uma expressão na forma da contra positiva. Portanto, os conectivos lógicos desempenham, na dinâmica da sala de aula, a função prática identificada por Aristóteles: são as ferramentas fundamentais para construir argumentos válidos. A sua apropriação consciente é uma condição necessária para o aprimoramento das habilidades de análise e pensamento crítico propostas na educação básica, criando um elo entre a tradição lógica do Ocidente e a prática ativa do raciocínio matemático.

### 5.3 Tabela Verdade

Na lógica proposicional, a tabela-verdade se estabelece como um instrumento algorítmico essencial para a identificação metódica e exaustiva do valor lógico de proposições compostas. Este recurso é apresentado de forma tabular, listando como entrada da tabela todas as combinações possíveis de valores verdadeiros (Verdadeiro ou Falso) para as proposições atômicas envolvidas. A partir da aplicação recorrente das definições dos conectivos, é possível calcular o valor resultante da proposição composta para cada combinação. Sua integralidade, que abrange a listagem de todos os cenários possíveis é o que a torna uma ferramenta analítica poderosa, convertendo-a em um método crítico para a verificação de propriedades lógicas como tautologia, contradição, contingência e, principalmente, equivalência e validade argumentativa.

A aplicação da tabela-verdade como um meio de prova é direta e eficaz de uma argumentação lógica. Para demonstrar que duas fórmulas proposicionais, por exemplo, A e B, são logicamente equivalentes ( $A \equiv B$ ), elabora-se uma tabela que contemple colunas para ambas. A equivalência é estabelecida se, e somente se, os valores resultantes nas colunas finais de A e B forem idênticos em todas as linhas (ou seja, para toda atribuição possível de valores de verdade às variáveis).

Exemplo: tomemos por exemplo duas proposições atômicas:

$p$ : O número natural  $a$  é divisível por 6.

$q$ : O número natural  $a$  é divisível por 2.

As formas para as proposições compostas:

$A$ : Se o número natural  $a$  é divisível por 6 então ele é divisível por 2.

$B$ : Se o número natural  $a$  não é divisível por 2 então ele não é divisível por 6.

$C$ : O número natural  $a$  não é divisível por 6 ou é divisível por 2.

As formas simbólicas para as proposições  $A$ ,  $B$  e  $C$  são:

**Expressão 1:** Equivalências lógicas

$$A: p \longrightarrow q$$

$$B: \neg q \longrightarrow \neg p$$

$$C: \neg p \vee q$$

Os quais podem ser calculados na tabela verdade a seguir.

Tabela 8 – Tabela Verdade da Implicação e suas Equivalentes

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$A : p \rightarrow q$	$B : \neg q \rightarrow \neg p$	$C : \neg p \vee q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

É possível notar que as colunas referentes às proposições  $A$ ,  $B$  e  $C$  apresentam resultados idênticos, independentemente das variações de  $V$  ou  $F$  de  $p$  e  $q$ . Logo, essas proposições compostas são equivalentes.

A equivalência da forma  $(p \longrightarrow q) \equiv (\neg q \longrightarrow \neg p)$  é chamada de contra positiva. A sua relevância se manifesta em sua função como um instrumento estratégico para a demonstração. Muitas vezes, estabelecer que  $p$  implica  $q$  pode ser uma tarefa que apresenta complexidade ou que não é intuitiva. Contudo, demonstrar que a negação de  $q$  implica a negação de  $p$  pode se revelar significativamente mais simples ou direto. Essa abordagem, denominada prova por contraposição, é válida exatamente porque a equivalência lógica assegura que verificar a contrapositiva equivale, por definição, a validar a implicação original. Em sua essência, a contrapositiva proporciona um caminho lógico alternativo para a mesma verdade, investigando a relação entre a falsidade da conclusão e a falsidade da hipótese.

Já a equivalência da forma  $(p \longrightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$  é a Definição da Implicação Material, que estabelece a completa equivalência entre a condicional e a disjunção. Ela

evidencia que a afirmação “se  $p$ , então  $q$ ” é logicamente equivalente a declarar “ou  $p$  é falsa, ou  $q$  é verdadeira”. A validação por meio da tabela-verdade corrobora que ambas as expressões são falsas unicamente quando  $p$  é verdadeira e  $q$  é falsa, a única circunstância que contraria a garantia implícita presente na implicação.

No âmbito da educação básica, a apreensão e aplicação das equivalências são essenciais para o avanço do raciocínio lógico. No campo da matemática ainda, as demonstrações ou provas de teses são fortemente impactados pelas equivalências lógicas, que ao serem corretamente empreendidas geram argumentos mais fáceis de serem verificados ou mesmo ilustram alternativas para compreensão do problema ou mesmo a validação de algum teorema. Ela ilustra de forma concreta como a estrutura de uma proposição pode ser manipulada formalmente sem perda de significado, cultivando habilidades de negação precisa e de reorganização argumentativa.

## 5.4 Negação da Condicional

De maneira semelhante, a tabela-verdade é a principal ferramenta para determinar a negação apropriada de uma proposição composta. Por definição, a negação de uma fórmula deve ter a tabela-verdade que é precisamente o oposto da tabela original. Ao criar a tabela para a fórmula original e procurar uma fórmula cuja coluna de resultados seja inversa entrada por entrada de verdadeiro ou falso, pode-se identificar formalmente a negação lógica, afastando-se de interpretações inadequadas da linguagem natural.

Tabela 9 – Tabela Verdade da Implicação e da Conjunção com Negação

$p$	$q$	$\neg q$	$A : p \rightarrow q$	$B : p \wedge \neg q$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

### Expressão 2: Negação Lógica da Condicional

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$$

Portanto, a construção e análise de tabelas-verdade são mais do que um exercício repetitivo. Elas representam uma prática essencial de rigor lógico. Essa prática capacita o estudante a ir além da intuição e a confirmar, de forma incontestável e metódica, as relações que fundamentam o raciocínio dedutivo, solidificando a transição de uma compreensão superficial dos conectivos para um domínio operacional da estrutura da argumentação válida.

## 5.5 De Morgan: Negação da Conjunção e da Disjunção

As Leis de De Morgan constituem um par de equivalências lógicas fundamentais tanto na lógica proposicional quanto na teoria dos conjuntos. Elas estabelecem como a negação se distribui sobre a conjunção e sobre a disjunção, transformando uma proposição composta em outra logicamente equivalente. Formalmente, para quaisquer proposições  $P$  e  $Q$ , tem-se:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \quad (\text{negação da conjunção}) \quad (5.1)$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q) \quad (\text{negação da disjunção}) \quad (5.2)$$

Em linguagem natural, a primeira lei afirma que a negação de uma conjunção equivale à disjunção das negações: “não é verdade que  $P$  e  $Q$  são ambos verdadeiros” equivale a “ $P$  é falso ou  $Q$  é falso”. A segunda lei estabelece que a negação de uma disjunção equivale à conjunção das negações: “não é verdade que pelo menos um entre  $P$  e  $Q$  é verdadeiro” equivale a “ $P$  é falso e  $Q$  é falso”.

Essas equivalências são essenciais para o raciocínio dedutivo, a simplificação de fórmulas lógicas, a avaliação de argumentos e a elaboração de demonstrações formais, pois permitem reescrever expressões com negação antecedendo conectivos em formas mais tratáveis.

Tabela 10 – Tabela Verdade da Disjunção e da Conjunção das Negações

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Tabela 11 – Tabela Verdade da Conjunção e da Disjunção das Negações

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$(\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Além disso, a Lei de De Morgan elucida um erro comum na linguagem coloquial, onde a negação de uma afirmação composta é frequentemente mal interpretada. Por exemplo, a negação da proposição “está chovendo e ventando” não deve ser compreendida como “não está chovendo e não está ventando”, mas sim como “não está chovendo ou não está ventando”, o que implica que uma, outra ou ambas as situações podem não ocorrer.

## 5.6 Regras de Inferências

Além das relações entre as estruturas atômicas categorizadas por meio de proposições simples, o Raciocínio Lógico se vale de um conjunto de regras que permitem derivar conclusões verdadeiras a partir de premissas hipoteticamente verdadeiras, mantendo assim, de forma sistemática e organizada a preservação da verdade. Tais regras são conhecidas como Regras de Inferências, constituindo-se como chaves-mestras no raciocínio dedutivo, com aplicações que abastecem desde a matemática pura até o princípio da argumentação de um discurso.

Em essência, uma norma de inferência representa uma estrutura lógica que assegura que, dadas certas configurações de proposições verdadeiras, as premissas, uma outra proposição que delas se deriva será igualmente verdadeira.

A apropriação das regras de inferência representa a passagem de uma lógica intuitiva para uma lógica reflexiva. Elas são as peças com as quais se monta o quebra-cabeça do raciocínio válido, permitindo que o aluno deixe de ser espectador do pensamento alheio para tornar-se arquiteto do próprio. (PYLRO, 2025 p. 104)

A validade de uma regra de inferência pode ser confirmada através de tabelas-verdade, porém sua aplicabilidade ultrapassa a simples verificação formal: ela atua como uma maneira de raciocínio organizado, um protocolo cognitivo que garante a manutenção da verdade ao longo de um encadeamento argumentativo.

### 5.6.1 Modus Ponens (MP)

Do latim, *Modus Ponens*, que numa tradução superficial indica o modo que afirma, é a regra de inferência mais elementar e intuitiva da lógica dedutiva. Ela estabelece que, a partir de uma implicação e da confirmação de seu antecedente, podemos concluir diretamente o conseqüente.

**Expressão 5:** *Modus Ponens*

$$(p \rightarrow q), (p) \mapsto q$$

Na linguagem natural, esta proposição pode ser expressa como: “Caso  $p$  implique  $q$ , e  $p$  se revele verdadeiro, então  $q$  igualmente é verdadeiro.” Devido à sua clareza e à sua ampla aplicabilidade, o *Modus Ponens* é parte considerável da capacidade argumentativa do raciocínio, tanto matemático quanto do dia a dia, sendo frequentemente utilizado de maneira implícita em argumentos e provas.

A validade lógica desta regra pode ser verificada de maneira inequívoca por meio da tabela-verdade a seguir, que mostra que, sempre que ambas as premissas ( $p \rightarrow q$ ) e  $p$

são verdadeiras, a conclusão  $q$  também o é. Assim, a implicação final,  $((p \rightarrow q) \wedge p) \mapsto q$  se revela na forma de uma tautologia.

Tabela 12 – Tabela Verdade do Modus Ponens

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \mapsto q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Um exemplo prático, no contexto da educação básica, que é simples de construir o debate baseado nas seguintes hipóteses:

$P_1$  : Se o número que procuramos é múltiplo de 15 então ele é divisível por 5.

$P_2$  : O número realmente é múltiplo de 15.

*Conclusão* : O número que procuramos é divisível por 5.

Esse exemplo ilustra como uma regra lógica formal  $(p \rightarrow q), p \vdash q$  se traduz em um raciocínio matemático seguro e verificável, mesmo em etapas iniciais de escolarização.

### 5.6.2 Modus Tollens (MT)

Do latim, *Modus Tollens*, que numa tradução superficial indica a modo que nega, constitui uma norma de inferência que funciona através de contraposição lógica. Diferentemente do *Modus Ponens*, que aceita o conseqüente com base na confirmação do antecedente, o *Modus Tollens* segue uma lógica oposta, refutando o antecedente a partir da negação do conseqüente.

**Expressão 6:** *Modus Tollens*

$$(p \rightarrow q), (\neg q) \mapsto \neg p$$

Tabela 13 – Tabela Verdade do Modus Tollens

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)$	$((p \rightarrow q) \wedge (\neg q)) \mapsto \neg p$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

### 5.6.3 Silogismo Hipotético (SH)

O silogismo hipotético constitui uma norma de inferência que possibilita a ligação das proposições condicionais de maneira transitiva, formando uma sequência lógica que liga as premissas à conclusão. Esse silogismo indica que, caso uma proposição leve a outra, e esta, por sua vez, implique uma terceira, então a proposição inicial implica diretamente a terceira. A sua configuração formal é:

**Expressão 7:** *Silogismo Hipotético*

$$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \mapsto (p \rightarrow r)$$

A tabela verdade que comprova a validade desta regra de inferência é um pouco mais extensa dada condição de entrada com 3 proposições lógicas atômicas em sua composição.

Tabela 14 – Tabela Verdade do Silogismo Hipotético

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Numa linguagem mais natural, o que se expressa é: “Se  $p$  leva a  $q$ , e  $q$  leva a  $r$ , então  $p$  leva a  $r$ .” Essa norma é essencial para a elaboração de argumentos complexos e para a validação de teoremas que se baseiam em uma sucessão de implicações intermediárias, reforçando a ideia de transitividade lógica.

### 5.6.4 Simplificação (SIMP)

A regra da simplificação é uma das regras de inferência mais diretas e imediatas da lógica proposicional. Ela afirma que, a partir de uma conjunção verdadeira, é possível concluir qualquer uma de suas partes isoladamente. Sua formulação pode ser apresentada de duas formas equivalentes:

**Expressão 8:** *Simplificação*

$$(p \wedge q) \mapsto p \quad (p \wedge q) \mapsto q$$

Numa linguagem mais natural, isso pode ser expresso como: “Se  $p$  e  $q$  são verdadeiros, então  $p$  é verdadeiro, e  $q$  também é verdadeiro.” A norma da simplificação representa

Tabela 15 – Tabela Verdade da Simplificação Lógica

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

a ideia intuitiva de que, quando duas proposições são simultaneamente verdadeiras, cada uma delas, por sua vez, também deve ser verdadeira de forma independente.

Essa norma é comumente empregada em provas matemáticas para extrair informações pertinentes a partir de premissas compostas, o que possibilita um raciocínio que avança de maneira organizada e direcionada.

### 5.6.5 Adição (ADD)

A regra da adição é uma regra de inferência que permite expandir uma proposição verdadeira para uma disjunção que a inclui, independentemente do valor de verdade do outro termo.

**Expressão 9:** *Adição Lógica*

$$(p) \mapsto (p \vee q)$$

Tabela 16 – Tabela Verdade da Adição Lógica

$p$	$q$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow (p \vee q))$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Numa linguagem mais natural, caso  $p$  seja verdadeiro, conseqüentemente a disjunção “ $p$  ou  $q$ ” também se torna verdadeira. Esta norma investiga a característica inclusiva da disjunção lógica, onde apenas um dos elementos é suficiente para que a totalidade da expressão seja considerada verdadeira. A regra da adição se revela particularmente vantajosa em provas matemáticas quando se busca reformular um dado de maneira mais abrangente, criando uma base para a utilização de outras regras, como o silogismo disjuntivo.

### 5.6.6 Silogismo Disjuntivos (SD)

O silogismo disjuntivo constitui uma norma de inferência que possibilita a dedução de uma das opções contidas em uma disjunção quando a outra é eliminada. A sua apresentação formal pode ser realizada de duas maneiras que se complementam.

**Expressão 10:** *Silogismo Disjuntivo*

$$(p \vee q), (\neg q) \mapsto p \quad (p \vee q), (\neg p) \mapsto q$$

Tabela 17 – Tabela Verdade do Silogismo Disjuntivo

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee q)$	$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Numa linguagem mais natural, isso pode ser interpretado como: "Se temos conhecimento de que  $p$  ou  $q$  é verdadeiro, e que  $p$  se revela falso, então  $q$  deve ser considerado verdadeiro. Essa regra representa o raciocínio cotidiano de exclusão: quando confrontados com duas possibilidades, a negação de uma implica na aceitação da outra. Comumente empregado em demonstrações por casos e em argumentos relacionados à tomada de decisão, o silogismo disjuntivo é fundamental para a formulação de estratégias lógicas em situações que apresentam alternativas mutuamente excludentes.

## 5.7 Quantificadores Lógicos

Até este momento, abordamos o raciocínio lógico matemático com base na lógica proposicional e em seus conectivos, que são ferramentas adequadas para a análise de argumentos cuja configuração é determinada unicamente pela junção de proposições elementares. Contudo, uma parcela significativa do raciocínio matemático, e em particular, aquele que diz respeito às definições, generalizações e demonstrações, requerem a superação da simples combinação de sentenças declarativas. Torna-se necessário então formular proposições sobre as totalidades, existências e inter-relações entre entidades dentro de um domínio. Com esse intuito, apresentamos os quantificadores lógicos, que potencializam a capacidade expressiva da lógica e avançam sobre as bases da denominada lógica de primeira ordem.

O domínio dos quantificadores é um divisor de águas no desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Enquanto os conectivos ensinam a combinar verdades, os quantificadores ensinam a pensar sobre totalidades

e existências, e, num nível mais avançado, sobre totalidades de totalidades, como no caso da indução. É nesse salto que o pensamento matemático ganha seu caráter universal. (PYLRO, 2025 p. 91)

O trabalho com quantificadores tem a possibilidade, e deve ser realizado, de maneira gradual e contextualizada. A compreensão de expressões como “todo número par é divisível por 2” ou “existe um triângulo retângulo isósceles” já ativa o raciocínio relacionado a quantificadores. Propor aos alunos o desafio de negar sentenças quantificadas, utilizando as normas de negação de  $\forall$  e  $\exists$ , constitui um exercício enriquecedor para aprimorar a precisão na argumentação e prevenir generalizações inadequadas. Os dois quantificadores fundamentais são o Universal e o Existencial.

### 5.7.1 Quantificador Universal $\forall$

Quantificador universal ( $\forall$ ): lê-se “para todo”, “qualquer que seja”, etc. Expressa a ideia de que uma propriedade ou relação vale para todos os elementos de um domínio. O quantificador universal, devido à sua natureza abrangente e generalizadora, desempenha uma função essencial na elaboração de definições, axiomas e teoremas que sustentam praticamente todos os setores da matemática. Sua utilização vai além da simples expressividade de regularidades numéricas ou algébricas, expandindo-se para a formulação de conceitos, como funções contínuas, limites, convergência de sequências e características de estruturas algébricas.

Além de sua função na formalização de teorias, o quantificador universal assume um papel pedagógico de grande importância na formação do raciocínio dedutivo. Ao converter declarações como “todos os números pares são divisíveis por 2” ou “qualquer triângulo equilátero é equiangular” para a notação simbólica  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ , o aluno é incentivado a identificar a estrutura lógica subjacente às generalizações matemáticas, fazendo a distinção entre propriedades essenciais e acidentais. Esse exercício de simbolização e análise promove o aprimoramento da habilidade de abstração, da precisão na linguagem e da consciência a respeito da abrangência e dos limites de uma afirmação, competências fundamentais para a prática argumentativa e demonstrativa.

### 5.7.2 Quantificador Existencial $\exists$

Quantificador existencial ( $\exists$ ): lê-se “existe”, “há pelo menos um”, etc. Expressa que existe pelo menos um elemento para o qual uma propriedade ou relação é verdadeira. O quantificador  $\exists$  oferece em sua gênese a função da formalização da existência ou singularidade. Ao contrário da condição exposta na generalização do quantificador universal, o  $\exists$  opera no domínio da constatação e verificação, sendo essencial para consolidar conceitos e teoremas da existência (existe um único elemento  $\exists!$ ) e a construção de contraexemplos e é fundamental para refutar conjecturas. Na álgebra, a definição do elemento inverso de

$x$  pressupõe que  $\exists y \in \mathbb{R} (x \cdot y = 1)$ . Já na geometria analítica e decorrência dos processos axiomáticos da geometria euclidiana, afirma que existe uma reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ ,  $\exists! r (A \in r \wedge B \in r)$ .

Do ponto de vista pedagógico, o quantificador existencial incita uma postura investigativa e inovadora em relação a problemas matemáticos. Esse tipo de interação não apenas aprimora a compreensão dos conceitos envolvidos, mas também fortalece a habilidade de argumentação por meio de exemplos e contraexemplos. Ao apresentar questões como “há um número real cujo quadrado seja negativo?” ou “existe alguma matriz quadrada cujo determinante é nulo e o não há duas filas que são combinações lineares?”, o aluno mergulha em diferentes áreas e níveis de compreensão, experimenta a formulação de hipóteses e se vale de conhecimentos anteriores apreendidos para validar ou refutar a existência de certos objetos matemáticos, tal qual se espera da capacidade crítica e analítica do aluno para formação de completa e é uma habilidade fundamental na pesquisa.

Como aplicação dos quantificadores, no contexto da educação básica, um exemplo prático da sua aplicabilidade está nas definições das funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

### 5.7.3 Uso dos Quantificadores Lógicos

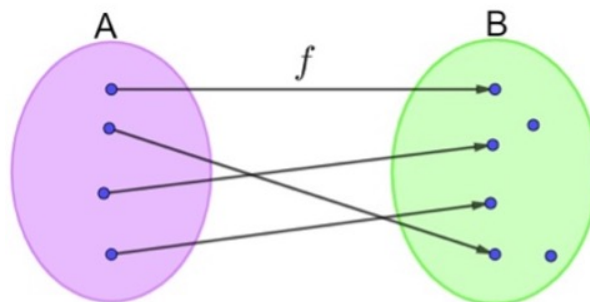
Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Podemos caracterizar suas propriedades fundamentais através de sentenças lógicas com quantificadores:

**Expressão 11:** *Função Injetora*

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$

Numa linguagem natural: para todos  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes ao domínio da função  $f$ , se  $f(x_1) = f(x_2)$  então  $x_1 = x_2$ .

Figura 1 – Diagrama da Função Injetora



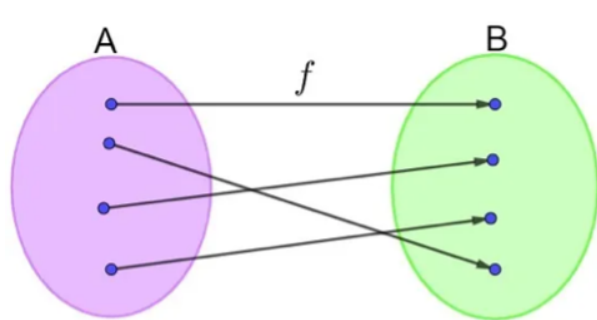
**Expressão 12:** *Função Sobrejetora*

$$\forall y \in B, \exists x \in A (f(x) = y)$$

Na linguagem natural, de modo matemático: para  $y$  pertencente ao contradomínio  $B$ , existe algum elemento  $x$  pertencente ao domínio  $A$  tal que  $f(x) = y$ .

$$\forall y \in B, \exists x \in A (f(x) = y)$$

Figura 2 – Diagrama da Função Sobrejetora



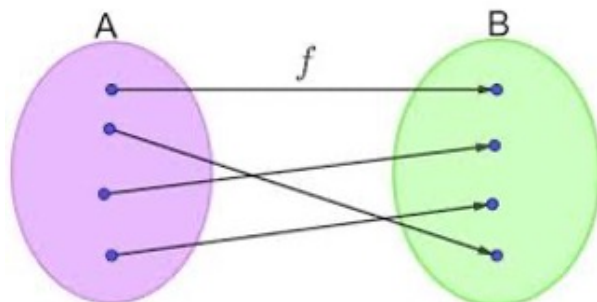
Fonte: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-bijetora.htm>. Acessado em 28 de janeiro de 2026.

**Expressão 13:** *Função Bijetora*

$$\forall y \in B, \exists! x \in A (f(x) = y)$$

Na linguagem natural: para todo elemento  $y$  pertencente ao contradomínio  $B$  existe um único elemento  $x$  do domínio  $A$  tal que  $f(x) = y$ .

Figura 3 – Diagrama da Função Bijetora



Fonte: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-bijetora.htm>. Acessado em 28 de janeiro de 2026..

Além disso, um exemplo relevante que utiliza os conceitos de quantificadores lógicos de forma mais elaborada é o princípio da indução matemática. Sua expressão integral não apenas requer a quantificação dos números naturais, mas também abrange propriedades

ou subconjuntos desses números, o que o classifica como uma afirmação de segunda ordem. Na sua forma mais intuitiva e expansiva, o princípio da indução pode ser formalizado como:

**Expressão 14:** *Princípio da Indução Matemática*

$$\forall P \subseteq \mathbb{N} \{P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \rightarrow P(n+1))\}$$

Cuja leitura detalhada pode ser: dada qualquer propriedade  $P$  que se aplique aos números naturais, se  $P$  vale para 0 e, além disso, para todo número natural  $n$ , a validade de  $P$  em  $n$  implica sua validade em  $n+1$ , então  $P$  vale para todos os números naturais.

## 6 Terminologias nas Demonstrações Matemáticas

O raciocínio lógico, como uma ferramenta sistematizada para a verificação, produção de conhecimento, refutação de falácias e comprovação de teses foi primeiramente contextualizada nos trabalhos de Aristóteles (384 – 322 a.C.) na Grécia antiga. Muito embora, trabalhos anteriores ao próprio Aristóteles tenham elementos do pensamento lógico, mas foi ele o primeiro a sistematizar esta disciplina como elemento de demonstrações, propondo um modo de pensamento correto para validação e busca pela verdade. Em virtude desta brilhante contribuição, é atribuído à Aristóteles a honrosa qualidade de pai do pensamento lógico.

A análise documental deste trabalho já evidencia que tanto os PCNs quanto a BNCC reconhecem o raciocínio lógico com eixo transversal indispensável para a formação matemática do cidadão. Contudo, no ambiente da sala de aula ainda há um hiato considerável entre prescrição normativa nos documentos oficiais e a sua efetiva materialização nas práticas pedagógicas. É exatamente nesse período que a contribuição de pensadores como George Polya e Terence Tao se destaca: eles não apenas defendem a importância do raciocínio lógico de forma argumentativa, mas também apresentam métodos e classificações específicas que tornam possível o “como realizar”. Polya, com sua abordagem heurística dividida em fases, e Tao, com sua categorização dos desafios matemáticos, mudam a atenção do resultado matemático (o teorema, a fórmula) para o raciocínio que o cria, que é em sua natureza, lógico e demonstrativo.

Se a BNCC determina a importância de cultivar "a habilidade de elaborar argumentos convincentes" e Polya e Tao nos oferecem guias para a resolução de problemas, é essencial então reconhecer e dominar as ferramentas específicas que possibilitam a formação desses argumentos. É nesse contexto que os métodos de demonstração matemática se tornam fundamentais e inspiram a consolidação deste capítulo. Eles fazem parte do conhecimento técnico do raciocínio dedutivo, as formas tradicionais de validação que, desde os tempos dos gregos, permitem que a matemática se desenvolva como um campo de conhecimento sólido e acumulativo. Demonstrações diretas, contraposições, contradições, contraexemplos e análises de casos não são meramente artifícios restritos ao ensino superior, mas sim maneiras de pensar que sustentam nossa própria capacidade cognitiva ao lidar com questões desafiadoras desde a educação básica. Apresentar esses métodos de forma clara para os alunos no contexto educação básica, ajustando a linguagem e o nível de complexidade, significa prepará-los com as ferramentas necessárias para passar da simples utilização de algoritmos à verdadeira elaboração e fundamentação do conhecimento. Este trabalho

argumenta que a apropriação desses métodos é um passo importante e subsequente para realizar na prática, na sala de aula, o projeto educacional delineado pelos documentos oficiais e enriquecido pelas ideias heurísticas de Polya e Tao.

## 6.1 Axiomas ou Postulados

Um axioma ou um postulado é uma proposição ou declaração essencial e que seja vista como evidente por si mesma, aceita como verdadeira sem a necessidade de validação ou evidência. Serve como o fundamento, princípio ou “norma” para a elaboração de outras teses, que na matemática, a partir da qual se chegam a novas deduções ou teoremas.

Certamente que no contexto da educação básica, os postulados de Euclides são os mais citados dada aplicabilidade nas construções geométricas:

Postulado I: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

Postulado II: Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado III: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

Postulado IV: Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos. (BICUDO 2009, p. 12)

Numa primeira vista estes postulados se apresentam de forma despreziosa e simples, entretanto, a potencialidade deles não se encerram neste contexto, dada base que consolida todo um pensamento geométrico que pode ser demonstrado por meio destas declarações essenciais. No contexto da educação básica, compreender a natureza axiomática é fundamental para a criação de um sistema sólido em sua gênese, superando uma visão fragmentada e superficial do saber uma vez que cada novo conceito é uma extensão natural e justificada das ideias anteriores. Esta perspectiva axiomática favorece uma apropriação mais profunda e significativa para o estudante uma vez que ele é convidado a acompanhar e progressivamente construir o percurso lógico que trilha entre o postulado às conclusões, desenvolvendo a capacidade argumentativa, a dedução e a validação ou refutação de hipóteses. Dessa forma, se o postulado ou axioma introduz uma verdade simples e desacompanhada de grandes esforços para validar a sua veracidade então o raciocínio lógico subjacente à este converte-se numa ferramenta cognitiva.

## 6.2 Lema

Muitas vezes, a trajetória rumo a um resultado relevante é construída sobre verdades intermediárias, que atuam de forma auxiliar, mas que são igualmente rigorosas. Um lema é, fundamentalmente, um resultado inicial que já foi provado e serve como um teorema de apoio dentro de uma demonstração mais ampla e complexa. Sua função é estratégica, ao dividir uma prova longa ou complicada em partes menores e mais gerenciáveis, funcionando como uma base que organiza o raciocínio, garantindo clareza e viabilidade ao argumento principal.

Vale ressaltar que a definição de uma proposição como “lema” é, em grande parte, uma questão de convenção e contexto. O que em uma demonstração aparece como um passo auxiliar pode, em um diferente contexto teórico ou histórico, se revelar um resultado de grande relevância por si só, a ponto de em algumas ocasiões, ofuscar a importância do próprio teorema que ajudou a demonstrar. Um exemplo clássico e aplicável no contexto da educação básica é o Lema de Euclides, vital para a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética: se um número  $n$  divide o produto  $(a * b)$  e é coprimo com  $a$ , então  $n$  deve dividir  $b$  (BEZERRA, 2018, p. 61).

A aplicabilidade do lema na formulação de resultado mostra como as ferramentas lógicas vão além de sua função original, estabelecendo-se como pilares autônomos do pensamento matemático. Assim, na hierarquia discursiva da matemática, que se estende dos axiomas, passando por lemas e teoremas, até os corolários, o lema atua como o elo funcional, o mecanismo lógico que permite não apenas progredir, mas também estruturar e esclarecer o processo de demonstração como um todo.

## 6.3 Teorema

Se os axiomas são basais e encerram em si a verdade num modo próximo da singularidade e os lemas conectam as formulações axiomáticas em resultados iniciais mais simples, então o teorema representa a culminância lógica deste processo incremental e construtivo. Em sua natureza, um teorema é uma afirmação que pode ser provada como válida através de uma sequência rigorosa de deduções lógicas, fundamentando-se em resultados já conhecidos (como outros teoremas ou lemas) e, em última análise, em axiomas do sistema. A sua prova não é apenas um exercício formal, mas a concretização do raciocínio dedutivo, transformando relações abstratas em resultados mais expressivos e gerais.

A configuração de um teorema representa o próprio fluxo do raciocínio matemático. Essa configuração gira em torno da relação lógica entre as hipóteses (as premissas iniciais, aquilo que se considera verdade) e a tese (o resultado que se procura provar). Provar

um teorema significa, portanto, elaborar uma cadeia de raciocínio que demonstrará que, se as hipóteses forem corretas, a tese igualmente o será. Essa relação é necessária e o cerne das demonstrações matemáticas. Durante esse procedimento, as normas de inferência introduzidos ainda nos trabalhos de Aristóteles e os axiomas lógicos funcionam como os dispositivos que possibilitam cada “passo” seja legítimo no raciocínio, garantindo que a jornada das hipóteses até a tese mantenha a veracidade. Portanto, entender um teorema e o formato no qual se mantém a verdade por meio das implicações lógicas vai além de apenas decorar sua formulação ou aplicabilidade, sendo necessário seguir, e idealmente, reconstruir o caminho lógico que sustenta sua validade, uma experiência essencial para o desenvolvimento de um pensamento organizado, crítico e apto a criar e avaliar argumentos consistentes ou mesmo refutando falácias.

## 6.4 Corolário

O corolário pode ser compreendido como uma consequência imediata e evidente de um teorema, um resultado que, uma vez que o teorema foi formulado, aparece quase como um desfecho intuitivo. Em termos estruturais, um corolário é uma proposição cuja demonstração é diretamente obtida de um teorema ou lema previamente validado, requerendo pouca ou nenhuma argumentação adicional além daquela dos próprios processos de demonstração do teorema. Sua eficácia reside precisamente nesta lógica simplificada, pois, ao invés de demandar uma nova e complexa prova, o corolário aproveita o caminho já estabelecido pelo resultado anterior, enfatizando uma implicação específica, uma aplicação particular ou uma generalização que já estava potencialmente presente na prova original.

O valor educacional do corolário é duplo. Em primeiro lugar, ele ilustra a natureza acumulativa e interconectada do conhecimento matemático, demonstrando como uma prova sólida pode levar a diversas percepções e resultados derivados. Além disso, o corolário instiga o aluno a desenvolver uma visão sintética e consequential sobre o que foi demonstrado, incentivando-o a questionar: “O que mais pode ser deduzido disso?”. Um exemplo clássico e simples provém da geometria, mas especificamente do Teorema de Pitágoras (que define a relação  $a^2 + b^2 = c^2$  em um triângulo retângulo onde  $a$  e  $b$  são os seus catetos e  $c$  a hipotenusa), deriva naturalmente como corolário a desigualdade triangular em sua versão específica para triângulos retângulos, ou a fórmula para a diagonal de um quadrado em relação a seu lado. Outro exemplo importante é o Corolário do Teorema Fundamental da Aritmética, que estabelece que a fatoração em primos de um número inteiro é única, um resultado que embora tenha um impacto significativo, surge quase como uma consequência direta da lógica do teorema anterior.

Assim, o corolário não é apenas um adendo, mas sim um agente de eficiência e clareza dentro da estrutura matemática, reforçando a ideia de que a matemática avança

não por saltos isolados, mas por uma rede coerente de lógicas implicativas.

## 6.5 Conjectura

Enquanto teoremas, lemas e corolários refletem conclusões firmemente estabelecidas através da demonstração rigorosa, a conjectura ocupa um papel único e dinâmico, quase que um desafio questionador no cenário da matemática: é uma proposição que parece razoável, baseada em pistas, tendências ou intuições, mas que ainda não recebeu comprovação ou refutação. Ao contrário de um axioma (que é uma verdade amplamente aceita) ou de um teorema (que já foi demonstrado), a conjectura situa-se na fronteira do que se conhece, simbolizando uma hipótese não resolvida que provoca a comunidade matemática a testá-la ou desmenti-la. Ela surge da observação de padrões, como no caso em que, ao experimentar certos valores, percebe-se por exemplo que uma certa fórmula gera sempre números primos. Contudo, como a história da matemática nos ensina, a plausibilidade não assegura a verdade. A simples reunião de evidências favoráveis não substitui a necessidade de uma demonstração lógica rigorosa. Neste sentido, a conjectura carece de mais atenção pois ao ser tratada como um problema em aberto e não resolvido, é um risco evitável assumir sua validade ou refutação sem grandes estudos que balizem tais conclusões.

O contraexemplo tem um forte significado na solução de uma conjectura, atuando como um recurso lógico para uma refutação definitiva. Quando uma conjectura propõe uma propriedade que deve ser verdadeira em todos os casos, por exemplo, “para cada  $x$  em um conjunto  $X$ ,  $P(x)$  é verdadeiro”, a apresentação de um único caso “ $a \in X$ ” em que  $P(a)$  não se aplica já é suficiente para invalidar completamente essa proposição  $P(x)$ . Esse foi o resultado da conjectura de Euler relacionada às somas de quartas potências, mesmo que a falta de soluções conhecidas por mais de duzentos anos fizesse crer em sua veracidade, mas ela foi definitivamente refutada.

Em 1769, Leonhard Euler propôs uma extensão ao chamado Último Teorema de Fermat, conjecturando que a equação  $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ , com  $a, b, c, d$  naturais não nulos, não admitia solução.

Em 1988, Roger Frye apresentou um contraexemplo, baseando sua demonstração no trabalho de Noam Elkies, pondo fim de vez à conjectura levantada por Euler:  $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$ .

Dessa forma, o contraexemplo não somente encerra a condição de “em aberto” da conjectura, mas também redireciona o foco da pesquisa matemática, frequentemente revelando facetas inesperadas da estrutura do problema em questão. No âmbito educacional, é interessante entender a força lógica do contraexemplo para que os alunos desenvolvam a habilidade de analisar criticamente afirmações universais, sendo capazes de diferenciar entre provas circunstanciais e argumentações rigorosas. A presença de conjecturas não

resolvidas tem um impacto profundo e ambíguo tanto no avanço da matemática quanto na sua pedagogia. De um lado, elas atuam como poderosos impulsionadores de pesquisa, encorajando a formulação de novas teorias, mas por outro lado, atua no aprimoramento de métodos de prova e a cooperação entre os pesquisadores. Conjecturas notórias, como as de Goldbach <sup>1</sup> e Poincaré <sup>2</sup>, provocaram progressos teóricos significativos antes mesmo de serem solucionadas.

Em um contexto educacional, apresentar conjecturas que sejam acessíveis aos estudantes pode incitar o interesse investigativo, evidenciando que a matemática é um domínio dinâmico e em constante evolução, onde fazer perguntas relevantes é tão relevante quanto descobrir as próprias respostas. Entretanto, uma conjectura que permaneça em aberto por um longo período, especialmente se oferecer uma intuição forte ou uma ampla evidência numérica, pode criar uma falsa sensação de certeza, que é por vez arriscada na sua conclusão de forma prematura. Um outro exemplo clássico é dado pelo polinômio  $p(n) = n^2 + n + 41$ , que produz números primos para números inteiros  $n = 0$  até 39, mas falha para  $n = 40$ , demonstrando claramente que evidência não equivale a prova.

Na educação em álgebra, a análise de padrões em sequências de polinômios proporciona um espaço rico para o desenvolvimento de conjecturas e para a assimilação da lógica que as confirmam ou as refutam. Por exemplo, pense-se na sequência de polinômios que se define, para cada número inteiro positivo  $n$ , por:

$$P_n(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \dots (x - n)$$

Uma observação imediata que surge com uma análise deste polinômio é que para um valor fixo  $n \in \mathbb{N}$ , o polinômio  $P_n(x)$  possui  $n$  raízes reais distintas: 1, 2, 3, ...,  $n$ . Os testes validam pequenas hipóteses,  $P_5(3) = 0$ ,  $P_{13}(7) = 0$ ,  $P_{2026}(2024) = 0$ , etc. Diante deste padrão sistemático é natural conjecturar: Para qualquer número natural  $x$ , existe um  $n$  suficientemente grande ( $n \geq x$ ) tal que  $P_n(x) = 0$ .

Numa linguagem menos formal, “cada número natural é a raiz de algum polinômio dessa sequência”. Essa suposição é correta e pode ser facilmente confirmada ao supor algum  $x$ , é só selecionar algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que ( $n \geq x$ ) para que o termo  $(x - x)$  esteja

<sup>1</sup> A conjectura de Goldbach. Ela postula que, se  $n$  é um número natural que é maior ou igual a 4, então  $n$  pode ser representado como a soma de dois números primos. Por exemplo, 6 pode ser expresso como 3 mais 3, e 8 como 3 mais 5. Em 1742, o matemático prussiano Christian Goldbach enviou uma correspondência ao seu colega suíço Leonhard Euler, sugerindo que qualquer número par superior a dois poderia ser escrito como a adição de dois números primos. Até o momento, não foi encontrada uma prova para essa conjectura. Desde o tempo de Goldbach e Euler, essa proposição aguarda uma demonstração ou uma refutação.

<sup>2</sup> Formulada pelo matemático francês Henri Poincaré em 1904, propunha que toda variedade compacta e simplesmente conexa de dimensão 3 é homeomorfa à esfera tridimensional. Em termos mais intuitivos, questionava se uma superfície fechada e sem "buracos" em três dimensões poderia sempre ser deformada em uma esfera. A conjectura permaneceu sem solução por mais de um século, desafiando gerações de matemáticos e tornando-se um dos problemas mais famosos da topologia. Sua demonstração só foi alcançada em 2006 pelo matemático russo Grigori Perelman

Tabela 18 – Os números primos gerados por  $p(n) = n^2 + n + 41$  e a refutação da conjectura de que  $p(n)$  produz resultados primos para todo  $n \geq 1$ 

$n$	$p(n)$	É primo?	$n$	$p(n)$	É primo?
1	43	Sim	21	503	Sim
2	47	Sim	22	547	Sim
3	53	Sim	23	593	Sim
4	61	Sim	24	641	Sim
5	71	Sim	25	691	Sim
6	83	Sim	26	743	Sim
7	97	Sim	27	797	Sim
8	113	Sim	28	853	Sim
9	131	Sim	29	911	Sim
10	151	Sim	30	971	Sim
11	173	Sim	31	1033	Sim
12	197	Sim	32	1097	Sim
13	223	Sim	33	1163	Sim
14	251	Sim	34	1231	Sim
15	281	Sim	35	1301	Sim
16	313	Sim	36	1373	Sim
17	347	Sim	37	1447	Sim
18	383	Sim	38	1523	Sim
19	421	Sim	39	1601	Sim
20	461	Sim	40	1681	Não

Fonte: Produção do próprio autor (2026).

presente no produto que compõem o polinômio  $P_n(x)$ , resultando em zero. Entretanto, o debate sobre as raízes do polinômio  $P_n(x)$  se torna mais rica ao reformular a hipótese de uma forma distinta. Após confirmar a afirmação anterior, o educador pode apresentar a questão a seguir, que altera a atenção do comportamento em relação a cada  $x$  para uma característica geral do polinômio: “Será que, para  $n$  suficientemente grande, o polinômio  $P_n(x)$  se anula para todo  $x$  natural?”

Neste caso, a leve alteração no quantificador, de "para cada  $x$  há um  $n$ " para "há um  $n$  tal que para cada  $x$ ", transforma totalmente o sentido da declaração. Essa nova formulação apresenta uma conjectura diferente, muito mais robusta e, como será demonstrado, incorreta. Ela implica a existência de um polinômio particular, de grau constante, que possivelmente teria infinitas raízes naturais.

É justamente neste contexto que a compreensão do contraexemplo se torna decisivo para refutar uma conjectura. Não é necessário testar todos os valores de  $x$ , basta exibir um único valor de  $x$  para o qual a afirmação falha, dado um  $n$  qualquer. Por exemplo, fixemos  $n = 100$ . A conjectura forte afirma que  $P_{100}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$ . Mas:

$$P_{100}(101) = (101 - 100)(101 - 99)(101 - 98) \dots (101 - 1) = 101! \neq 0$$

O valor 101 serve como contraexemplo explícito que invalida a conjectura para  $n = 100$ . O argumento mais geral: para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  fixo, o número  $x = n + 1$  será um contraexemplo, pois  $P_n(n + 1) = (n + 1)! \neq 0$ . Portanto, nenhum polinômio  $P_n(x)$  da sequência se anula  $\forall x \in \mathbb{N}$ .

Este exemplo didático ilustra de maneira clara os passos do verdadeiro raciocínio matemático, desde a identificação de um padrão, a elaboração de uma hipótese clara, a modificação para uma versão mais robusta (e examinável) e, por fim, a invalidade por meio de um contraexemplo criado com base na estrutura do próprio problema. Ele mostra que uma hipótese pode ser verdadeira num dado contexto, mas totalmente errada em outro, destacando a relevância da precisão tanto na linguagem quanto no raciocínio lógico, em especialmente a ordem adequada dos quantificadores. Em sala de aula, essa sequência não apenas apresenta características dos polinômios com relação a pesquisa das suas raízes reais, mas também aprimora a habilidade de avaliar afirmações, desenvolver exemplos e contraexemplos, e entender os limites entre evidência e prova, habilidades essenciais para a formação do raciocínio lógico conforme os princípios da BNCC.

A ocorrência de conjecturas no campo da matemática não se limita ao domínio da investigação avançada. Ela personifica-se de maneira intensa (ou pelo menos deveria ser) e educativa no processo de resolução de problemas na educação básica. Quando um aluno se depara com um problema e identifica um padrão, formula uma suposição a respeito de um resultado geral ou prevê o próximo elemento de uma sequência, ele está, fundamentalmente, criando uma pequena conjectura, ou no mínimo formulando uma hipótese a respeito do padrão de formação. Esse ato representa o início do raciocínio lógico investigativo, pois coloca o estudante na posição de propor teses testáveis, em vez de se colocar como um executor de procedimentos algorítmicos. Nesse instante, a matemática deixa de ser uma construção estática e se manifesta como uma prática dinâmica de descoberta.

A inclusão de conjecturas nas atividades escolares é, sem dúvidas, uma abordagem pedagógica com grande potencial na formação básica. Com potencial de converter a resolução de problemas em um ciclo integral de raciocínio: da exploração do assunto ou problema, passando pela conjectura, munindo de condições para uma argumentação e por fim uma validação/refutação da tese. Este ciclo reflete a heurística de Polya e a postura investigativa sugerida por Tao, estando intimamente relacionado às habilidades da BNCC que valorizam a formação de argumentos fundamentados em evidências.

## 7 Métodos de Demonstrações Matemática: Uma Culminância Lógica

O ato de demonstrar na matemática, ou demonstrar matematicamente vai além de um simples processo técnico de validação. É, na verdade, o núcleo central da construção do saber matemático. Ao longo desta dissertação, e até o momento, abordamos como o Raciocínio Lógico Matemático (RLM) se configura como uma ferramenta cognitiva essencial para o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo. Neste capítulo, é de se esperar que a culminância na forma das demonstrações traga luz sobre a escolha do tema para este trabalho. Nos capítulos anteriores, examinamos os princípios lógicos, que vão desde os conectivos proposicionais até as regras de inferência e quantificadores, bem como exploramos as estratégias de resolução de problemas com base nas contribuições e os trabalhos de Polya e Tao, que também inspiraram este desenvolvimento. Agora, nos propomos a integrar essas ferramentas em um objetivo mais abrangente: a prática da demonstração, e, apresentar neste capítulo um legado testemunhal das técnicas de demonstrações aplicados à problemas selecionados ou visitados em publicações de relevância dentro da educação básica.

Em sua essência mais rigorosa, uma demonstração consiste em um argumento lógico-dedutivo que confirma a veracidade de uma proposição a partir de premissas aceitas. Neste contexto, podemos e devemos incluir axiomas, definições ou teoremas que já foram demonstrados. A matemática se vale de demonstrações implicando em demonstrações, aumentando seu escopo e compreensão do mundo, ampliando a sua base de premissas testadas e conclusões confirmadas para novas hipóteses. Funciona como uma sucessão de implicações, as quais cada nova ligação deve ser sustentada por regras de inferência válidas, assegurando que se as premissas iniciais forem verídicas, a conclusão também o será. Essa perspectiva, inspirada na lógica formal, apresenta na demonstração como um processo fechado, objetivo e infalível, um ideal de precisão que frequentemente é considerado o paradigma do raciocínio matemático.

Entretanto, a prática matemática no mundo real, seja ela em salas de aula, em publicações científicas ou no intercâmbio entre pesquisadores, exhibe uma faceta mais humana e social da demonstração. Não é sempre necessário que cada detalhe lógico seja exaustivo, uma abordagem pedante, mas deve ser, antes de tudo, convincente, clara e comunicável ao leitor que se fizer interessado em compreender o processo da demonstração. Passos tidos como triviais podem ser omitidos, novas notações podem ser introduzidas para facilitar a apresentação, e a linguagem sempre que possível, deve ser adaptada ao contexto do leitor, com um cuidado especial à sua profundidade com os argumentos matemáticos

e conhecimentos que se ponham como pré-requisitos para sua total compreensão. Essa flexibilidade não deve ser encarada como uma falha, mas sim como uma necessidade cognitiva. A mente humana opera por meio de sínteses, reconhecimento de padrões, e omissão consciente do que já foi dominado, permitindo maior foco no novo e no essencial.

Portanto, demonstrar em matemática também pode ser interpretado como um ato pedagógico e dialógico. No contexto da educação básica, o aluno tende a colocar o professor num status de condutor da verdade, pouco questionando e replicando o raciocínio mecanicamente apreendido, limitando-se à reprodução da aplicação de equações e algoritmos que geram números, e em algumas vezes nenhum significado ou aplicação real em sua vida. As práticas em sala de aula que implementam as demonstrações levam os alunos a desenvolver seus próprios argumentos, a testar hipóteses, a identificar falácias e a validar conclusões. Este processo é complexo e demanda algo além do simples domínio de regras lógicas. Exige também intuição, uma boa leitura do problema, testando pequenas variações para mapear as nuances dos resultados, criatividade, perseverança e a capacidade de transmitir ideias com rigor e clareza. Nesse contexto, a demonstração torna-se um instrumento para a apropriação do RLM, pois coloca o estudante na posição de agente ativo do conhecimento. Neste capítulo, examinaremos os principais métodos de demonstração empregados na matemática, abrangendo desde os mais diretos até aqueles mais complexos, apresentando exemplos pontuais que demonstram como a Lógica se insere nos contextos das demonstrações. Neste sentido, iremos analisar como cada método se fundamenta nas estruturas lógicas previamente discutidas, como contraposição, negação, quantificação e regras de inferência, e como estas demonstrações e habilidades lógicas podem ser introduzidos progressivamente na educação básica, alinhando-se com a BNCC e com uma visão de aprendizagem significativa.

Distantes de serem apenas formalidades, tais métodos simbolizam diversas abordagens de pensamento, organização do raciocínio e resolução de desafios intelectuais. Dessa forma, representam a conclusão lógica de toda a discussão que foi realizada até o presente momento. A concretização tangível de como o raciocínio lógico matemático pode ser apropriadamente assimilado, transformando-se de um conjunto abstrato de instrumentos em uma prática dinâmica, crítica e criativa da matemática.

## 7.1 Demonstração Matemática Direta

A demonstração matemática direta representa o modo mais intuitivo e natural de demonstração. Ela é a via pela qual o raciocínio segue, passo a passo, das premissas à conclusão, sem desvios, sem contradições, sem necessidade de assumir o oposto do que se quer provar. É o percurso lógico mais transparente, onde cada afirmação se apoia legitimamente na anterior.

A demonstração direta é uma aplicação perfeitamente alinhada com a regra de inferência Modus Ponens, na qual se parte de uma proposição inicial, dentro do domínio no qual a hipótese está inserida, e por uso de axiomas ou mesmo de teoremas, lemas ou corolários já conhecidos, constrói-se uma sequência de implicações logicamente válidas, concluindo a tese desejada. O caminho pode ser curto ou longo, elementar ou sofisticado, mas mantém-se sempre linear: se  $A$  é verdadeiro e  $A$  implica  $B$ , então  $B$  é verdadeiro. De modo análogo, se  $B$  implica  $C$ , então  $C$  também o será, e assim sucessivamente, até alcançar a conclusão final.

Esse método dialoga diretamente com a heurística de Polya, especialmente na fase de “execução do plano”. Uma vez compreendido o problema e concebida uma estratégia, a demonstração direta é a materialização dessa estratégia em linguagem matemática precisa. Ela exige clareza na definição dos termos, rigor na aplicação das regras lógicas e transparência na conexão entre os passos. Não há espaço para ambiguidades ou saltos intuitivos não justificados; cada elo da cadeia dedutiva deve ser explicitado e validado.

De modo geral, a prova direta tem início com a introdução de um elemento que simbolize, de maneira abrangente, um termo qualquer dentro do domínio em análise, sem depender de suposições particulares ou exemplos específicos. Esse domínio, denotado por  $D$ , é o conjunto de todos os objetos aos quais a afirmação se aplica (por exemplo, números inteiros, figuras geométricas etc.). Assim, tomamos um  $x$  arbitrário em  $D$  e, a partir da hipótese  $P(x)$ , utilizamos resultados, definições, teoremas e regras de inferência para alcançar a conclusão  $Q(x)$ . Em síntese, a demonstração direta de uma proposição universal se estrutura na forma:

**Expressão 15:** *A Demonstração Direta*

$$\forall x \in D : (P(x) \rightarrow Q(x)),$$

onde a validade da implicação para um elemento genérico  $x$  garante sua validade para todos os elementos do domínio  $D$ .

**Exemplo 1:** Demonstre que se  $n \in \mathbb{N}$  é ímpar, então  $n^2$  também é ímpar.

**Demonstração:** queremos provar que  $\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \rightarrow Q(n))$ , no qual  $P(n)$  é um predicado com o significado:  $n$  é um número ímpar e  $Q(n)$  é um predicado com o significado  $n^2$  é ímpar.

Para isso, tomemos um elemento genérico  $k \in \mathbb{N}$ . Logo, é possível contruir o número  $n$  ímpar valendo-se de  $k$ :

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 &\implies n^2 = (2k + 1)^2 \implies \\ n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \implies \\ n^2 &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \implies \end{aligned}$$

Mas  $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$  pois a soma e a multiplicação são fechadas em  $\mathbb{N}$ . Logo, podemos chamar de  $k' = 2k^2 + 2k$

$$n^2 = 2k' + 1$$

Como  $n^2$  é um sucessor natural de um par, tem-se portanto que  $n^2$  é um natural ímpar. ■

**Exemplo 2:** Mostre que a soma de dois números racionais também é racional.

Para isso, tomamos como ponto de partida a definição de número racional, a qual pressupõe o conceito de número inteiro (conjunto  $\mathbb{Z}$ ) como previamente estabelecido. Um número  $r$  é dito racional se existem inteiros  $m$  e  $n$ , com  $n \neq 0$ , tais que  $r = \frac{m}{n}$ .

**Demonstração:** Seja  $r$  e  $s$  dois números racionais. Assim, existem valores,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  e  $q \in \mathbb{Z}$ , com  $n \cdot q \neq 0$  tais que:

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad s = \frac{p}{q}$$

Logo,

$$r + s = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$

Como o produto de inteiros tem resultado inteiro, assim como a soma, concluímos que

$$r + s = \frac{mq + pn}{nq}$$

tem como resultado a razão de dois inteiros, satisfazendo assim a definição de número racional como resultado desta soma. ■

**Exemplo 3:** Mostre que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Para esta demonstração direta será necessária a utilização da propriedade comutativa da soma: dados  $a, b \in \mathbb{N} \implies a + b = b + a$ . Além disso, o Princípio de Equivalência: ao somar, subtrair, multiplicar ou dividir ambos os lados (membros) de uma equação pelo mesmo valor, a igualdade se mantém.

**Demonstração:** Seja  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$ .

Pela propriedade da comutatividade da soma, tem-se que

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \implies \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Valendo-se do princípio da equivalência, a soma das equações fornece:

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1) \implies$$

$$2S = n(n + 1) \implies$$

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

■

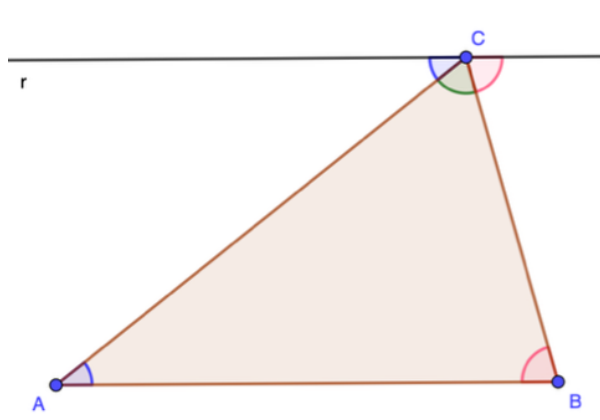
Uma mesma proposição pode ser demonstrada por diferentes métodos. No caso deste exemplo, a indução matemática mostra-se particularmente adequada, uma vez que a proposição envolve uma propriedade indexada aos números naturais.

**Exemplo 4:** Demonstre que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale  $180^\circ$ .

Para esta demonstração será aplicado o Teorema do Ângulo Externo, sobre a existência da reta: dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora dela, existe uma reta passando por  $P$  que é paralela a  $r$ . Além disso, o Teorema dos Ângulos Alternos e Internos (consequência direta do 5º postulado), quando duas retas paralelas são interceptadas por uma transversal, os ângulos alternos internos formados são congruentes.

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer.

Figura 4 – Soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: próprio autor (2026)

1º: Trace uma reta  $r$  passando por  $C$  e paralela ao lado  $\overline{AB}$ . A reta  $r$  existe pelo Teorema do sistema Ângulo Externo.

2º: Tome  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  como retas transversais que cortam as retas paralelas  $r$  e a reta suporte do segmento  $\overline{AB}$ .

3º: Pelo Teorema do Ângulo Alternos e Interno, o ângulo  $\angle A$  é alterno e interno em relação ao menor ângulo formado pela reta  $r$  e o segmento  $\overline{AC}$ . De modo análogo,

o ângulo  $\angle B$  é alterno e interno em relação ao menor ângulo formado pela reta  $r$  e o segmento  $\overline{BC}$ .

4º: No ponto  $C$ , os três ângulos,  $\angle A + \angle B + \angle C$  formam um ângulo raso pois se apoiam de forma suplementar numa reta. Logo,  $\angle A + \angle B + \angle C = 180$ , conforme queríamos demonstrar. ■

A demonstração direta, fundamentalmente, é mais do que uma técnica. Ela apropria-se das expressões mais genuína da matemática e na habilidade do intelecto humano de estabelecer verdades a partir de fundamentos sólidos e verificados. Ao seguir de maneira linear o trajeto das premissas até a conclusão ela concretiza um ideal de clareza, transparência e precisão.

Os casos ilustrativos apresentados, devidamente escolhidos, transitam desde a aritmética fundamental até a geometria passando pela teoria dos números, evidenciando a adaptação deste método a variados contextos, preservando sempre a mesma estrutura lógica subjacente: iniciar com conhecimento existente, aplicar regras de inferência e transformação válidas, com o foco em alcançar aquilo que se deseja demonstrar. Tal estrutura não é apenas funcional, é também extremamente instrutiva. Ela apresenta ao estudante um vislumbre de que a matemática não se refere a um conjunto de dogmas irrefutáveis, mas a um sistema de ideias inter-relacionadas, onde cada nova verdade surge como um desdobramento necessário das anteriores.

No âmbito da educação básica, a demonstração direta abre uma via acessível ao vasto mundo das provas formais. Ela possibilita que o aluno experiencie, muitas vezes pela primeira vez, a satisfação intelectual de não apenas “saber que” algo é verdadeiro, mas de “compreender por que” isso se dá. Essa transição qualitativa, da memorização à compreensão, da execução à justificativa, é impactante na formação do aluno e por diversas vezes negligenciado ao adiado até o contexto da educação superior.

Deve-se, entretanto, enfatizar que a aparente simplicidade da demonstração direta não deve ser confundida com trivialidade. Como se observou nos exemplos, mesmo as provas mais concisas demandam precisão nas definições, cuidado nas manipulações e atenção às condições de validade de cada etapa. Esse rigor, longe de constituir um impedimento, é exatamente o que confere à matemática sua força e sua beleza.

## 7.2 Demonstração por Equivalência

O uso da equivalência na demonstração ou resolução de problemas representa um tipo de argumentação na qual se define uma conexão de implicação entre proposições, estabelecendo assim, uma identidade lógica entre elas. Se por um lado a demonstração

direta dar-se-á de forma linear a partir de premissas até chegar a conclusões, por outro lado a demonstração por equivalência frequentemente se consolida em formas circulares, nas quais diversas definições ou propriedades se inter-relacionam de maneira mútua, criando um sistema integrado de conceitos que podem ser utilizados de forma intercambiável.

Esta abordagem baseia-se em uma utilização ampliada do silogismo hipotético, não simplesmente como uma sequência de implicações, mas como um mecanismo que produz ciclos lógicos completos. Ao demonstrar que as três proposições  $A$ ,  $B$  e  $C$  completam o ciclo  $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ , a transitividade da implicação assegura que qualquer par delas é considerado equivalente. Esse padrão revela uma característica essencial da estrutura do conhecimento matemático, a capacidade de um único objeto ser descrito através de condições que, embora distintas em aparência, são logicamente equivalentes.

No contexto da educação básica, essa estrutura se evidencia, por exemplo, na equivalência entre várias definições de retas paralelas na Geometria Euclidiana, seja pela falta de interseção, pela manutenção de uma distância constante ou pela congruência de ângulos correspondentes. Evidenciar que essas três caracterizações são equivalentes envolve mais do que a verificação de cada implicação de maneira independente. Trata-se de reconhecer que elas representam aspectos complementares de um único conceito geométrico. O valor educacional dessa compreensão é duplo, simultaneamente o aluno é levado a perceber que um mesmo objeto matemático pode ser explorado de diferentes maneiras, aprimorando sua habilidade de articular argumentos que se movem entre diversas formas de representação.

Sob uma perspectiva lógica, a prova por equivalência utilizando ciclos de implicações apresenta benefícios metodológicos evidentes. Primeiramente, ela desagrega a complexidade da prova completa em componentes demonstrativos menores e possivelmente mais elementares. Em segundo lugar, ela destaca a conexão entre os conceitos envolvidos, reforçando a consistência interna do arcabouço teórico. Finalmente, ela estabelece as bases para entendimentos mais complexos, como a ideia de caracterizações alternativas em contextos algébricos ou analíticos, fundamentais já no ensino superior, mas pouco aproveitado na educação básica.

**Exemplo 5:** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Definimos:

- Intervalo fechado  $[a, b]$ :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

- Intervalo aberto  $(a, b)$ :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Demonstre que são equivalentes as seguintes definições:

- a) Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado quando existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $X \subset [a, b]$ .
- b) Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado quando existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $X \subset (a, b)$ .
- c) Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado quando existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < c, \forall x \in X$ .

**Demonstração:****(a)  $\Rightarrow$  (b)**Suponha que  $X \subset [a, b]$ .Tome  $a' = a - 1$  e  $b' = b + 1$ .Então  $X \subset [a, b] \subset (a - 1, b + 1) = (a', b')$ .Logo,  $\exists a', b' \in \mathbb{R}$  tais que  $X \subset (a', b')$ , que é a definição proposta no item (b).**(b)  $\Rightarrow$  (c)**Suponha que  $X \subset (a, b)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .Seja ainda  $c = \max\{|a|, |b|\}$ .Como  $X \subset (a, b)$  então temos que  $a < x < b, \forall x \in X$ .Em particular,  $x < b \leq |b| \leq c$ . Logo,  $x < c$ .De modo análogo,  $x > a \geq -|a| \geq -c$ . Logo  $x > -c$ .Portanto,  $-c < x < c$ , ou seja,  $|x| < c$ .Logo, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < c, \forall x \in X$ , que é a definição proposta no item (c).**(c)  $\Rightarrow$  (a)**Suponha que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < c, \forall x \in X$ .Isso significa que  $-c < x < c, \forall x \in X$ .Tomando  $a = -c$  e  $b = c$ , então  $X \subset (-c, c) \subset [-c, c] = [a, b]$ .Logo, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $X \subset [a, b]$ , que é a definição proposta no item (a).

Como provamos que (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (a), fica demonstrado que as três definições propostas no exemplo 5 são equivalentes. ■

**Exemplo 6:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial de grau 2. Mostre que as três formas, geral, canônica e fatorada são equivalentes:

- a)  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . (Forma Geral)
- b)  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ , com  $a, h, k \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , onde  $(h, k)$  são as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico de  $f$ . (Forma Canônica)

c)  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ , com  $a \neq 0$ , onde  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes (reais ou complexas) de  $f(x)$ . (Forma Fatorada)

**Demonstração:** Para provar a equivalência entre as três formas, demonstraremos as implicações  $(a) \Rightarrow (b)$ ,  $(b) \Rightarrow (c)$  e  $(c) \Rightarrow (a)$ , completando assim o ciclo.

$(a) \Rightarrow (b)$ : Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ . Para reescrever  $f(x)$  na forma canônica, utilizamos o método de **completar quadrados**:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Tomando  $h = -\frac{b}{2a}$  e  $k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , obtemos:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

que é exatamente a forma canônica proposta em  $(b)$ . Observe que  $(h, k)$  são as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico da função  $f(x)$ .

$(b) \Rightarrow (c)$ : Seja  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ , com  $a \neq 0$ . Para obter a forma fatorada, devemos encontrar as raízes  $r_1$  e  $r_2$  de  $f(x) = 0$ . Resolvemos a equação:

$$a(x - h)^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - h)^2 = -\frac{k}{a}.$$

Definindo  $\Delta' = -\frac{k}{a}$  (que pode ser positivo, negativo ou nulo), temos:

$$x - h = \pm \sqrt{-\frac{k}{a}} \quad \Rightarrow \quad x = h \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}.$$

Assim, as raízes são:

$$r_1 = h + \sqrt{-\frac{k}{a}}, \quad r_2 = h - \sqrt{-\frac{k}{a}}.$$

Portanto, a forma fatorada de  $f(x)$  é:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2),$$

que corresponde à forma (c). Caso  $-\frac{k}{a} < 0$ , as raízes  $r_1, r_2$  são números complexos conjugados, e a fatoração ainda é válida no conjunto dos complexos.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Seja  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ , com  $a \neq 0$ . Expandindo o produto:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a(r_1r_2). \end{aligned}$$

Tomando  $b = -a(r_1 + r_2)$  e  $c = a(r_1r_2)$ , obtemos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

que é a forma geral proposta em (a).

Demonstramos que (a)  $\Rightarrow$  (b), (b)  $\Rightarrow$  (c) e (c)  $\Rightarrow$  (a). Portanto, as três formas são equivalentes, ou seja, qualquer função polinomial do 2º grau pode ser representada indistintamente pelas formas geral, canônica ou fatorada. ■

As equivalências entre distintas formulações de um mesmo princípio matemático não se limitam a um exercício de precisão formal, mas configura uma evidência prática da forma como o raciocínio lógico organiza e integra o saber na matemática. Ao afirmar que várias definições, como as três expressões da função quadrática ou as múltiplas definições de conjuntos limitados e que foram cuidadosamente selecionados como exemplos, são logicamente intermutáveis. Neste sentido, revela-se a estrutura conceitual subjacente que liga estas propriedades ou diferentes formas de escrever um mesmo princípio de maneira intrínseca e conectada.

O método do ciclo de implicações, fundamentado no silogismo hipotético, vai além de sua aplicação técnica e assume um papel epistemológico relevante. Ao demonstrarmos que (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (a) dentro dos exemplos resolvidos anteriormente, não é pelo movimento de validação de equivalências pontuais que nos apegamos, quando na verdade estamos evidenciando como o saber matemático se organiza em uma rede de dependências lógicas, em que cada elemento apoia e é apoiado por outros. O objeto matemático passa a ser entendido não por meio de uma definição isolada, mas como uma entidade multifacetada, cuja essência se mantém inalterada sob diversas representações.

### 7.3 Demonstração por Contraposição

A demonstração por contraposição é uma abordagem lógica sofisticada, pois baseia-se na equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva. Essa técnica emprega um desvio estratégico no qual se aplicam as negações tanto da hipótese quanto da tese. Formalmente, consideramos um domínio  $D$  (o conjunto de todos os elementos aos quais a afirmação se aplica, como números, objetos geométricos etc.) e um elemento arbitrário  $x \in D$ . A equivalência lógica pode ser expressa como:

**Expressão 16:** *Demonstração por Contraposição*

$$\forall x \in D : (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x \in D : (\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Assim, em vez de provar diretamente que  $P(x)$  implica  $Q(x)$  para todo  $x$ , podemos provar que a negação de  $Q(x)$  implica a negação de  $P(x)$  para o mesmo  $x$  genérico. Essa mudança de perspectiva muitas torna a demonstração mais acessível, intuitiva ou tecnicamente mais simples.

Como foi demonstrado através de tabelas de verdade, essa equivalência garante que provar a contrapositiva é logicamente igual a provar a proposição original. Portanto, a contraposição não deve ser compreendida como uma “outra prova”, mas sim na forma de uma prova em igual teor, executada por um caminho lógico alternativo, e que por vezes, pode ser mais esclarecedor ou de menor esforço.

Esse modo de demonstração tem sua validade amparada na argumentação do *Modus Tollens* e da própria estrutura da implicação material. Se o *Modus Ponens* afirma o conseqüente ao se aferir o antecedente, a contraposição utiliza a negação do conseqüente para deduzir a negação do antecedente. Este raciocínio lógico é especialmente vantajoso quando as negações das condições envolvidas  $\neg Q(n)$  e  $\neg P(n)$  são mais fáceis de lidar, mais concretas ou mais associáveis a teoremas previamente conhecidos do que as condições iniciais.

**Exemplo 7:** Demonstre que se o quadrado de um número inteiro  $n$  é par, então  $n$  é par. Para que a demonstração possa ser implementada, consideraremos que  $P(n) : n^2$  é par e que  $Q(n) : n$  é par. Adicionalmente, se  $n$  é um número ímpar então  $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$ .

**Demonstração:** “Se o quadrado de um número inteiro  $n$  é par, então  $n$  é par” é equivalente à proposição “se  $n$  não é par então o quadrado de  $n$  não é par”, ou melhor ainda, “se  $n$  é ímpar então o quadrado de  $n$  é ímpar”.

Logo, tomemos  $n = (2k + 1)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  um número ímpar.

$$\text{Assim, } n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2L + 1.$$

Como  $L = (2k^2 + 2k)$  e  $k$  é um número inteiro, então  $L$  também é inteiro.

Portanto,  $n^2 = 2L + 1$ , que é um número ímpar, o que demonstra a contrapositiva e que, por sua vez, confirma a equivalência original. ■

**Exemplo 8:** Demonstre que se  $n = a \cdot b$ , com  $a, b$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então  $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$ .

**Demonstração:** O resultado que queremos demonstrar pode ser reescrito com a simbologia dos conectivos lógicos da seguinte forma:

$$\forall n \in \mathbb{N} (n = ab \implies a \leq \sqrt{n} \vee b \leq \sqrt{n})$$

Fazendo a contraposição e valendo-se ainda da negação do conectivo segundo De Morgan, chega-se à seguinte condicional:

$$\forall n \in \mathbb{N} (a > \sqrt{n} \wedge b > \sqrt{n} \implies n \neq ab)$$

Como tem-se que  $a > \sqrt{n}$  e ao mesmo tempo que  $b > \sqrt{n}$ , é simples compreender que  $a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n^2} = n$ .

Portanto, como alcançamos o resultado de  $a \cdot b > n$ , nos conduzimos à uma interpretação consequente e final:  $a \cdot b \neq n$  por ser estritamente maior que  $n$ . ■

Seja  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $f$  é **estritamente crescente** em  $D$  se:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

**Exemplo 9:** Demontre que se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente crescente então  $f$  é injetora.

A prova por contraposição neste caso seria pela proposição: “Se  $f$  não é injetora então  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não é estritamente crescente”.

**Demonstração:**

Supondo que  $f$  não seja injetora. Neste caso, existem  $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$ , condição na injetividade. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $x_1 < x_2$ , dado que  $x_1 \neq x_2$ .

Como  $f(x_1) = f(x_2)$ , não se pode ter  $f(x_1) < f(x_2)$ . Logo, a função  $f$  não satisfaz a condição de ser estritamente crescente, pois exigiria  $(x_1 < x_2) \implies f(x_1) < f(x_2)$ .

Portanto,  $f$  não é estritamente crescente. ■

Como provamos a contraposição, que por sua vez se equivale à proposição original, fica demonstrado que de fato “se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente crescente então  $f$  é injetora”.

Além disso, a recíproca da proposição do exemplo 9 (se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é injetora então  $f$  é estritamente crescente) não é verdadeira. Existem funções injetoras que não são estritamente crescentes. Um contraexemplo simples é a função  $f(x) = -x$ , que é injetora, mas é estritamente decrescente. Outros exemplos incluem funções que não são monótonas, como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

que é injetora, mas não é monótona.

Para verificar que  $f$  é injetora, tomemos  $x_1 \neq x_2$  e analisamos os casos:

- Se  $x_1, x_2$  pertencem ambos a  $\mathbb{Q}$ , então  $f(x_1) = x_1$  e  $f(x_2) = x_2$ ; como  $x_1 \neq x_2$ , temos  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- Se ambos pertencem a  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , então  $f(x_1) = -x_1$  e  $f(x_2) = -x_2$ ; a função  $x \mapsto -x$  é injetora, logo  $x_1 \neq x_2$  implica  $-x_1 \neq -x_2$ , ou seja,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- Se um pertence a  $\mathbb{Q}$  e o outro a  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , suponha  $x_1 \in \mathbb{Q}$  e  $x_2 \notin \mathbb{Q}$ . Então  $f(x_1) = x_1$  e  $f(x_2) = -x_2$ . Para que houvesse igualdade, teríamos  $x_1 = -x_2$ , isto é,  $x_2 = -x_1$ . Mas se  $x_1$  é racional,  $-x_1$  também é racional, contradizendo  $x_2 \notin \mathbb{Q}$ . Logo  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . O caso simétrico é análogo.

Portanto, em todas as possibilidades,  $x_1 \neq x_2$  implica  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , donde  $f$  é injetora. No entanto,  $f$  não é monótona (pois alterna entre crescimento e decrescimento conforme a racionalidade do ponto). Assim, a implicação recíproca não se sustenta: **não é verdade** que toda função injetora seja estritamente crescente.

A demonstração pela contraposição é um método formal e lógico que se baseia na equivalência tautológica entre uma implicação condicional e sua contrapositiva. Esta abordagem tem sua validade aplicável ainda como uma ferramenta útil para reestruturar problemas quando o enfrentamento do problema de modo direto é acompanhado de dificuldades técnicas ou conceituais.

Essa conversão entre implicações com as negações, tanto do antecedente quanto do conseqüente, não mudam o valor de verdade da proposição, mas altera sua estrutura gramatical, muitas vezes esclarecendo ou tornando mais simples as relações entre os conceitos envolvidos.

## 7.4 Demonstração por Contradição (*reductio ad absurdum*)

A prova por contradição, conhecida também como redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*), é um método lógico e dedutivo, simples, porém de grande eficácia heurística, dada sua capacidade de supor a negação da tese como parte da demonstração. Ao contrário de uma abordagem direta ou da própria contrapositiva, métodos de demonstração nos quais mantém-se a busca por confirmar a veracidade de uma proposição por meio de uma sequência de implicações válidas a partir de premissas aceitas, a redução ao absurdo segue numa estratégia mais indireta. Assumindo-se temporariamente que a tese a ser provada é falsa, ou melhor, diametralmente oposta ao que se deseja confirmar, e, a partir dessa nova hipótese advinda da oposição, chega-se a uma contradição lógica com premissas já estabelecidas ou com resultados considerados verdadeiros.

A base formal deste método é sustentada pelo princípio lógico do terceiro excluído e pela ideia de consistência em um sistema dedutivo, cujos valores basais que validam a contradição sejam amplamente conhecidos e outrora testados e validados.

Se, partindo da hipótese de não  $P$  (negação da proposição  $P$  a ser demonstrada) e de um conjunto de axiomas ou teoremas verdadeiros, chega-se a uma contradição da forma  $Q$  e não  $Q$ , pode-se concluir que a suposição inicial é inaceitável. Assim, conforme a lei da contradição e do terceiro excluído, a proposição  $P$  deve ser considerada verdadeira.

A abordagem da contradição mostra-se particularmente útil nos cenários nos quais a própria proposição  $P$  carrega em si uma complexidade que torna a demonstração direta mais complexa, exigindo a construção de diversos objetos ou a verificação de muitos casos. Ademais, existem casos nos quais a negação de  $P$  é mais facilmente manipulável do que a própria proposição  $P$ , indicando um caminho lógico mais prático e menos pedante. A abordagem *reductio ad absurdum* remonta aos diálogos de Sócrates e historicamente foi amplamente utilizada na matemática helênica, tal qual pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, estabelecendo resultados essenciais na teoria dos números e na geometria.

No contexto do ensino básico, a prova por contradição se mostra como oportunidade pedagógica para aprimorar a compreensão dos alunos sobre a lógica matemática. Ela destaca a relação entre verdade lógica, consistência e refutação, além de exigir a prática cuidadosa de três operações mentais interligadas:

1. A formulação exata da negação da tese.
2. A análise dedutiva das consequências dessa negação proposta.
3. A clara identificação de uma contradição com fatos previamente aceitos.

Portanto, a prova por contradição é mais que uma simples técnica de demonstração,

servindo como ferramenta para o desenvolvimento de um raciocínio hipotético e dedutivo rigoroso e autocontrolado.

De modo prático, a demonstração por contradição baseia-se no *modus tollens* e na ideia de que, ao negar a tese, chegamos a uma contradição. Para uma afirmação universal  $\forall x \in D : P(x)$ , onde  $D$  é o domínio dos objetos em questão (por exemplo, números reais), a demonstração por contradição equivale a mostrar que a suposição da existência de um elemento  $x \in D$  com  $\neg P(x)$  leva a uma contradição. Logicamente, isso pode ser expresso pela equivalência:

**Expressão 17:** *Demonstração por Contradição*

$$\forall x \in D : P(x) \quad \equiv \quad \forall x \in D : (\neg P(x) \rightarrow F),$$

onde  $F$  denota uma contradição. Assim, provar que  $\neg P(x)$  implica  $F$  para todo  $x$  em  $D$  é suficiente para estabelecer a veracidade de  $P(x)$  para todos os elementos do domínio.

**Exemplo 10:** Demonstre que  $\sqrt{2}$  é um número irracional

Como visto nos exemplos anteriores, um número  $n \in \mathbb{Q}$  se  $\exists(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ , tais que  $n = \frac{a}{b}$ .

**Demonstração:**

Suponha o caso contrário da tese:  $\sqrt{2}$  é um número racional. Logo,  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . Consideramos ainda que  $(a, b) = 1$ , ou seja,  $a$  e  $b$  são primos entre si.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies a = b\sqrt{2} \implies a^2 = 2b^2$$

Mas o número  $2b^2$  é par. Portanto, pela igualdade,  $a^2$  também é par.

Mas isso implica que  $a$  também deve ser par.

(i) Já que  $a$  é par, então deve existir algum  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $a = 2k$ . Mas isso tem implicações nas hipóteses, pois:

$$a^2 = 2b^2 \implies (2k)^2 = 2b^2 \implies 4k^2 = 2b^2 \implies 2k^2 = b^2$$

(ii) Mas, então de forma análoga, temos que  $b^2$  é par, assim como deve ser par  $b$ .

Mas os argumentos (i) e (ii) não podem coexistir, pois pela hipótese  $(a, b) = 1$ . Portanto, chega-se a uma contradição, já que eles são primos entre si e não poderiam ambos ser pares (múltiplos de 2).

Portanto, fica evidenciado que a hipótese  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  não se sustenta diante dos fatos apresentados e, pelo princípio do terceiro excluído, não resta outra condição senão afirmar que  $\sqrt{2}$  não pode ser escrito como uma razão entre dois inteiros  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ .

■

**Exemplo 11:** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Demonstre que se  $13n + 4$  é um número ímpar então  $n$  é ímpar.

Para demonstrações a respeito da propriedade de número ímpar, podemos recorrer aos comentários do exemplo 1.

**Demonstração:**

Podemos reescrever esta proposição como: “se  $13n + 4$  é um número ímpar então  $n$  é ímpar”. Ou seja,  $P(n) \rightarrow Q(n)$ , onde  $P(n)$  representa “ $13n + 4$  é um número ímpar” e  $Q(n)$  representa “ $n$  é ímpar”.

Vamos assumir como verdadeira a oposição da condicional:  $P(n) \wedge \neg Q(n)$ . A proposição que assumimos neste momento é:  $13n + 4$  é um número ímpar e  $n$  não é ímpar.

Mas se  $n$  não é ímpar, então ele é par. Logo,  $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$ .

Assim,

$$13n + 4 = 13(2k) + 4 = 26k + 4 = 2(13k + 2) = 2L.$$

Isso quer dizer, então, que  $13n + 4$  é par, mas isso contradiz a hipótese de que deveria ser ímpar. Concluimos, então, que  $P(n) \wedge \neg Q(n)$  cai numa contradição e, portanto, é falso.

Mas se  $P(n) \wedge \neg Q(n)$  é falso e representa a negação da proposição  $P(n) \rightarrow Q(n)$ , então, pelo princípio do terceiro excluído,  $P(n) \rightarrow Q(n)$  só pode ser verdadeiro. Portanto, demonstrado. ■

Seja  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais. Um número  $p \in \mathbb{N}$ , com  $p > 1$ , é dito **primo** se seus únicos divisores positivos são 1 e  $p$  mesmo. Em termos formais:

$$p \text{ é primo} \iff \forall a, b \in \mathbb{N}, (p = ab \implies \text{ou } a = 1 \text{ ou } b = 1).$$

Equivalentemente,  $p$  não pode ser escrito como produto de dois números naturais menores do que ele.

**Exemplo 12:** Demonstre, usando o princípio da contradição, a infinitude dos números primos.

A demonstração da infinitude dos números primos, originalmente atribuída a Euclides nos livros Elementos (mais especificamente Livro IX, Proposição 20), surge no contexto da sistematização do conhecimento matemático grego. Embora não se saiba efetivamente se Euclides foi o primeiro a conjecturar ou demonstrar esse resultado, o registro e sua abordagem revelam uma notável economia lógica.

**Demonstração:** A hipótese é que os números primos são infinitos. Vamos supor, por um momento, a negação desta hipótese, ou seja, que a lista dos números primos  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_k\}$ , com  $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \dots < p_k$ , tenha um termo  $p_k$ , o último primo natural.

É possível construir, então, o número

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_k + 1,$$

e fica evidente que  $N > p_k$ .

Mas, sistematicamente, é possível demonstrar que nenhum dos primos  $p_i$  da lista  $P$  divide o número  $N$  pois como todo  $p_i$  divide o produto  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_k$ , então  $p_i$  divide a diferença  $N - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_k = 1$ , o que é um absurdo. ■

## 7.5 Contraexemplo

Na estrutura dedutiva e nos problemas de demonstrações matemáticas, a prova por contraexemplo é um método de refutação que se destaca por sua economia e elegância. Ao contrário das abordagens que visam demonstrar a verdade de uma afirmação, seja qual método for, o contraexemplo visa desmentir declarações de natureza geral, desmontando as generalizações predicativas de uma proposição. Essa técnica é utilizada quando se busca contestar uma afirmação do tipo “Para todo  $P(x)$ ”, mostrando um caso específico onde  $P(x_0)$  se revela falso.

A importância acadêmica desse método não está apenas em sua força lógica, mas também em sua função educacional e epistemológica, mostrando que uma única exceção pode destruir uma generalização, enfatizando a necessidade de precisão ao formular conjecturas. Formalmente, se consideramos um domínio  $D$  (o conjunto de objetos em estudo, como números, funções, figuras geométricas, etc.) e uma propriedade  $P(x)$  definida para cada  $x \in D$ , a negação de uma afirmação universal  $\forall x \in D, P(x)$  equivale à existência de um contraexemplo:

**Expressão 18:** *O Contraexemplo*

$$\neg(\forall x \in D, P(x)) \iff \exists x_0 \in D, \neg P(x_0).$$

Assim, para refutar que todos os elementos de  $D$  têm a propriedade  $P$ , basta exibir um único elemento  $x_0$  em  $D$  que não a satisfaz.

Escolher um bom contraexemplo é o desafio maior deste método de demonstração. Além disso, conjecturas fortes e que se arrastam por séculos podem ser notavelmente desmontadas ao serem analisados resultados que tornam falsas algumas afirmações universais.

Um dos mais conhecidos é a conjectura de Fermat (1607 – 1665), que propôs a seguinte hipótese:

**Exemplo 13:** Seja  $F_n = 2^{2^n} + 1$ .

Seja  $F_n = 2^{2^n} + 1$  o  $n$ -ésimo número de Fermat. Temos  $F_0 = 3$ ,  $F_1 = 5$ ,  $F_2 = 17$ ,  $F_3 = 257$ ,  $F_4 = 65\,537$ , todos primos. Fermat conjecturou que todos os números  $F_n$  são primos, mas morreu em 1665 sem ter essa questão resolvida <sup>1</sup>. Demonstre, por meio de um contraexemplo, que a afirmação  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n$  é primo é falsa.

**Demonstração:** Em 1732, o matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) usou um argumento engenhoso para encontrar um contraexemplo. Ao calcular o valor de  $F_5$ , encontrou 4 294 967 297, o que gerou a suspeita de ser mais um número primo. Mas, por um processo de congruências, encontrou um fator primo que divide  $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ . Portanto,  $F_5$  não é primo, que desmonta a proposição universal  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$  uma vez que  $n = 5$  se faz como contraexemplo à tese. ■

Obviamente que os esforços na busca por um contraexemplo eficiente podem ser tão custosos quanto uma prova mais direta, entretanto, o poder desta metodologia não deve ser esquecido dada capacidade de desmobilização de proposições universais fortes.

**Exemplo 14:** Demonstre se a seguinte proposição universal é verdadeira ou falsa:

“Dadas as matrizes não nulas  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , com  $n \geq 2$ , se  $A \cdot B = 0$  (matriz nula), então  $B \cdot A = 0$ .”

Caso seja falsa, apresente um contraexemplo.

**Demonstração:**

Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $A \cdot B = 0$ .

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $B \cdot A \neq 0$ .

<sup>1</sup> Ironia histórica: Fermat tentou provar que TODOS eram primos. Com uso de recursos computacionais, hoje suspeita-se que quase NENHUM (além dos cinco primeiros) seja primo.

Portanto, o par de matrizes  $(A, B)$  acima é um contraexemplo explícito que pertence ao domínio da proposição, satisfazendo a hipótese  $A \cdot B = 0$ , mas não satisfazendo  $B \cdot A = 0$ . Assim, a proposição universal  $\forall(A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})), A \cdot B = 0 \not\Rightarrow B \cdot A = 0$  é falsa. ■

Partindo da premissa de que as generalizações estão sujeitas aos riscos da presunção, o contraexemplo se faz na forma de uma humilde validação de pequenas etapas quando confirmam as hipóteses iniciais, mas tem um poder transformador quando encontra dentro dos domínios desta uma condição que não leva ao resultado esperado. O salto indutivo, que passa de alguns casos para a totalidade, é uma constante tentação no raciocínio, e a história matemática há um rol de grandes mentes que formaram conjecturas extremamente atraentes e plausíveis que sucumbiram diante de uma exceção tenaz. Assim, o método não se restringe a refutar, ele disciplina.

A refutação de uma proposição geral por meio da apresentação de um único caso problemático não é um ato destrutivo de uma hipótese, ou mesmo que se ponha em questionamento os trabalhos do matemático que a criou a própria conjectura, mas sim um ato que traz clareza sobre o domínio da proposição geradora. É o gesto que distingue o que é fundamental do que é contingente, forçando uma nova interpretação das hipóteses e, muitas vezes, levando à descoberta de novos princípios derivativos, talvez com aplicabilidade distinta daquela formada pelo formulador da própria proposição.

A força epistêmica do contraexemplo reside exatamente nessa economia lógica e em seu caráter decisivo. Enquanto uma série de exemplos favoráveis apenas torna uma conjectura mais plausível, e a história mostra que uma plausibilidade acumulada ao longo de séculos pode desabar em um instante, um contraexemplo autêntico a invalida de maneira clara e definitiva. Essa assimetria entre confirmação e refutação demonstra que a veracidade de uma lei geral requer uma prova que vá além da enumeração de casos comprobatórios. O contraexemplo, neste sentido, é a tipificação do “pelo menos um não satisfaz”. O existencial lógico que derruba a generalização “para todos”. Seu valor educativo é inestimável. É um antídoto contra a complacência intelectual, um convite constante ao ceticismo sistemático.

## 7.6 Demonstração por Exaustão (Dividir para Conquistar)

A abordagem chamada demonstração por divisão de casos, ou prova por exaustão, é uma forma dedutiva, quando a hipótese lógica da proposição não pode ser abordada com um único argumento geral. Em vez disso, é necessário avaliar individualmente condições que, em conjunto, abrangem todas as possibilidades formadoras da própria hipótese de tal modo que cada um dos cenários decorrentes das divisões em casos implica por si na própria tese. Ao contrário de métodos que tentam seguir uma única linha de raciocínio que se aplique a toda a área, essa técnica aceita a diversidade presente no problema,

interpretando-a como o aspecto central da estratégia demonstrativa.

Sendo uma implicação  $P \rightarrow Q$ , suponha, por um instante, que a hipótese  $P$  pode ser dividida em casos. Podemos, assim, reescrever

$$P \equiv P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee \cdots \vee P_n.$$

Desse modo,  $P \rightarrow Q$  deve ser compreendido como

$$(P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee \cdots \vee P_n) \rightarrow Q.$$

Portanto, ao confirmar cada uma das proposições  $P_1 \rightarrow Q$ ,  $P_2 \rightarrow Q$ ,  $P_3 \rightarrow Q$ ,  $\dots$ ,  $P_n \rightarrow Q$  e valendo-se do silogismo disjuntivo, concluímos que, de fato,  $P \rightarrow Q$ .

A utilização dessa abordagem demanda, assim, um passo inicial e vital de análise de todos os casos da hipótese geradora. A determinação de um conjunto integral e que não se sobreponha de cenários, que abranjam todas as configurações válidas segundo as suposições feitas, é condição primeira para a aplicabilidade dessa metodologia de demonstração. Essa divisão do espaço de possibilidades não é simplesmente uma tarefa de listagem, mas sim um ato de compreensão minuciosa da organização da questão.

**Exemplo 15:** Demonstre a propriedade da desigualdade triangular dos números reais:  $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \leq |a| + |b|$ .

Embora sua formulação seja breve, a demonstração direta demanda uma análise atenta dos sinais de  $a$ ,  $b$  e de sua soma, o que leva, de forma natural, a uma segmentação em diferentes casos. Essa exigência decorre da própria definição da função de valor absoluto, que apresenta comportamentos diferentes para argumentos que não são negativos e para os negativos. A prova tradicional, assim, se organiza em uma divisão abrangente das possíveis relações entre os sinais de  $a$  e  $b$ .

### Demonstração:

Começamos examinando os três cenários que são simultaneamente distintos e abrangentes, os quais incluem todas as possíveis combinações de sinais para os números reais  $a$  e  $b$ :

**Caso 1:**  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ .

Neste cenário, as definições se simplificam, pois  $|a| = a$  e  $|b| = b$ . Como  $a + b \geq 0$ , temos também  $a + b = |a + b| = |a| + |b|$ . Segue-se imediatamente que  $|a + b| = |a| + |b| \implies |a + b| \leq |a| + |b|$ . O que satisfaz a desigualdade para este caso.

**Caso 2:**  $a < 0$  e  $b < 0$ .

Neste cenário, ambos os números são negativos. Pela definição do valor absoluto e valendo-se das condições do caso 2,  $|a| = -a$  e  $|b| = -b$ . Além disso, o resultado da soma  $a + b$  é

negativo. Portanto,  $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$ . Assim, segue-se, mais uma vez, que  $|a + b| = |a| + |b| \implies |a + b| \leq |a| + |b|$ . O que satisfaz a desigualdade para este caso.

**Caso 3:**  $a$  e  $b$  têm sinais opostos.

Neste cenário, é o caso mais sutil, pois a soma  $a + b$  pode ser positiva, negativa ou zero, dependendo das magnitudes relativas dos números  $a$  e  $b$ . Sem perda de generalidade, assumimos por um instante que  $a \geq 0$  e  $b < 0$ ; o caso simétrico é análogo. Nesta situação,  $|a| = a$  e  $|b| = -b$ . Precisamos agora considerar dois subcasos, baseados no sinal de  $a + b$ :

*Subcaso 3.1:* Supondo inicialmente que  $a + b \geq 0$ . Neste subcaso,  $|a + b| = a + b$ . Como  $b < 0$ , segue que  $-b > 0$  e, portanto,

$$|a + b| = a + b < a + (-b) = |a| + |b|.$$

Assim, segue-se que  $|a + b| < |a| + |b| \implies |a + b| \leq |a| + |b|$ . O que satisfaz a desigualdade para este subcaso.

*Subcaso 3.2:* Supondo que  $a + b < 0$ . Neste subcaso,  $|a + b| = -(a + b)$ . Como  $a \geq 0$ , temos que  $-a \leq 0 \leq a$ . Logo,

$$|a + b| = -a - b \leq a - b = |a| + |b|.$$

Assim, segue-se que  $|a + b| < |a| + |b| \implies |a + b| \leq |a| + |b|$ . O que satisfaz a desigualdade para este subcaso.

Em ambos os subcasos, a desigualdade  $|a + b| \leq |a| + |b|$  se verifica, completando assim a análise do caso 3. Uma observação: a análise do caso simétrico foi omitida por se tratar de uma repetição de escrita, comutando apenas as variáveis  $a$  e  $b$ .

Dado que as situações, consideradas em conjunto, cobrem todas as alternativas para os números reais  $a$  e  $b$ , e que em cada caso a desigualdade triangular foi comprovada, podemos afirmar que a proposição é válida para todos os números reais.

■

Este exemplo demonstra de maneira clara como a abordagem de divisão de casos trata a complexidade que vem com uma definição segmentada, convertendo a exigência de analisar as distintas condutas no núcleo de uma prova sólida e abrangente. A técnica não oculta a diversidade do desafio, mas a aborda frontalmente, estabelecendo a certeza final através da verificação sistemática de cada possível situação.

**Exemplo 16:** Dados dois números  $a, b \in \mathbb{R}$ . Definimos as funções máximo e mínimo da seguinte forma:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq b \\ b, & \text{se } a < b \end{cases} \quad \text{e} \quad \min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq b \\ b, & \text{se } a > b \end{cases}$$

Demonstre que  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \max(a, b) + \min(a, b) = a + b$ .

**Demonstração:** Para os números  $a, b \in \mathbb{R}$  só existem três possíveis casos:

**Caso 1:**  $a < b$ .

Mas se  $a < b$ , então  $\max(a, b) + \min(a, b) = b + a = a + b$ , usando as próprias definições e os intervalos de aplicações. Portanto, para este caso, fica demonstrado que vale a propriedade.

**Caso 2:**  $a > b$ .

Mas se  $a > b$ , então  $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$ , usando as próprias definições e os intervalos de aplicações. Portanto, para este caso, fica demonstrado que vale a propriedade.

**Caso 3:**  $a = b$ .

Mas se  $a = b$ , então  $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$ , usando as próprias definições e os intervalos de aplicações. Portanto, para este caso, fica demonstrado que vale a propriedade.

Dadas que as três situações, consideradas em conjunto, cobrem todas as alternativas para os números reais  $a$  e  $b$ , e que em todos os casos  $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$  é satisfeito, podemos concluir a demonstração completa. ■

A demonstração por divisão em casos, ou prova por exaustão, não se resume a um procedimento técnico. Representa sim uma importante afirmação sobre a metodologia do conhecimento matemático em especial na capacidade argumentativa do silogismo disjuntivo. Ao decidir explorar todas as possibilidades através de uma divisão meticulosa do problema, esse método entende que a verdade, em determinadas situações, não pode ser capturada por uma única abordagem lógica geral, mas sim por meio da análise cuidadosa de cenários mutuamente excludentes, mas todos implicando na manutenção da hipótese geradora da discussão. Em face desta técnica demonstrativa e amparada na argumentação lógica inerente, a compreensão da pluralidade que existe em algumas estruturas matemáticas não deve ser vista como um obstáculo a ser superado, mas sim uma característica que precisa ser entendida e organizada sistematicamente para que uma validade sobre uma proposição, lema ou mesmo um teorema possa ser confirmado.

## 7.7 Indução Matemática

A prova por meio da indução matemática constitui uma abordagem metodológica fundamental para a validação de proposições por meio de uma relação com os números naturais. Valendo-se de uma bijeção entre a estrutura axiomática do conjunto  $\mathbb{N}$  e de uma conexão direta com a hipótese discreta, esta metodologia demonstra a validade de uma proposição por meio da sucessão, calcada, em especial, no silogismo hipotético como manutenção lógica e organizacional da verdade.

Essa abordagem se alicerça nos princípios formulados por Peano (1852–1932), os quais caracterizam os números naturais iniciando a partir de um elemento base e de uma função de sucessão, formando uma configuração discreta e ordenada em que cada número, exceto o inicial, possui um único antecessor do qual é sucessor imediato. É neste ponto que se revela a grandiosidade deste modal de demonstrações, pois a ideia de que qualquer número natural pode ser alcançado a partir de uma base, mediante a repetição da operação de sucessão, é o que a indução matemática se apropria como forma lógica.

O princípio da indução, derivado dos axiomas de Peano, postula formalmente que, se uma propriedade  $P(n)$  é verdadeira para uma instância de base (ou para um número inteiro inicial  $n_0$ ), e se a veracidade de  $P(k)$  implica a veracidade de  $P(k + 1)$  para todos os elementos  $k$  contidos no domínio, então  $P(n)$  será verdadeira para todos os números naturais a partir desse ponto inicial.

A estrutura da prova por indução adere estritamente a essa dupla validação lógica. Na **etapa base**, demonstra-se que a propriedade é verdadeira para o caso inicial, assegurando assim o início da cadeia de raciocínio. Em seguida, na **etapa indutiva**, admitindo-se a veracidade da propriedade para um inteiro  $k$  arbitrário — conhecida como hipótese de indução — e, a partir dessa premissa, conclui-se logicamente que a propriedade deve ser verdadeira também para o sucessor  $k + 1$ . Esse segundo passo é o núcleo do mecanismo de propagação: não se verifica a propriedade para cada número de forma isolada, mas estabelece-se uma relação geral  $P(k) \rightarrow P(k + 1)$  que, uma vez iniciada pelo passo base, se estende infinitamente. A demonstração reside precisamente nessa combinação: a base inicia a sequência, e a etapa indutiva garante que, por meio do silogismo hipotético, se um elo da corrente se mantém, o próximo também se manterá, espalhando a verdade por todos os números naturais de maneira tão inevitável quanto o próprio ato de contar.

Sob a perspectiva lógica, a indução matemática transforma uma alegação universal, “para todo  $n$ ,  $P(n)$ ”, em duas alegações que podem ser verificadas: uma específica e uma condicional. Esse é seu grande benefício, tanto pedagógico quanto epistemológico. Ela possibilita que enfrentemos a infinitude dos números naturais por meio de um argumento finito e contido, substituindo a verificação individual — que seria impossível — por uma garantia de herança lógica. Assim, a indução não apenas atua como uma ferramenta de prova, mas também expõe a natureza recursiva presente em muitas estruturas matemáticas, abrangendo somatórios e desigualdades, assim como definições recursivas de sequências e propriedades de algoritmos. O ensino desse método, portanto, vai além de apresentar um formato de demonstração. É uma forma de mostrar como a lógica formal se conecta com a intuição de repetição e recursão, oferecendo aos estudantes um modelo claro de como a matemática forma verdades gerais a partir de verdades localizadas e de regras de transição asseguradas.

**Exemplo 17:** Prove, usando a indução matemática, que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

**Demonstração: 1º:** Demonstrando a validade do caso base:

$$\text{Para } n = 1 \implies (2n - 1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2.$$

**2º:** Hipótese de indução: Supomos, como hipótese indutiva, que a propriedade é verdadeira para um número natural  $k$  qualquer. Isto é, assumimos que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

**3º:** Passo indutivo: supondo que a hipótese indutiva é válida, então deve ser para  $k + 1$ .

$$(1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

que é exatamente o resultado para  $n = k + 1$ .

Como o passo base foi verificado e o passo indutivo foi demonstrado, concluímos, pelo Princípio da Indução Matemática, que a igualdade é válida para todo número natural  $n$ . ■

**Exemplo 18:** A desigualdade de Bernoulli – propriedade de ordem.

Demonstre, por indução matemática, que para todo número natural  $n$  e para todo número real  $x > -1$ , vale a seguinte desigualdade:  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

**Demonstração:**

**1º:** Demonstrando o caso base,  $n = 1$ :

$$(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + x,$$

o que é uma igualdade verdadeira e, portanto, vale o caso base.

**2º:** Hipótese de indução: Supomos, para um  $k \in \mathbb{N}$  arbitrário, que a desigualdade é verdadeira. Isto é, assumimos:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

**3º:** Passo indutivo: supondo que a hipótese indutiva é válida, queremos provar que a validade para  $k$  implica a validade para  $k + 1$ . Partimos de  $(1 + x)^{k+1}$ :

$$(1 + x)^k \cdot (1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x).$$

Podemos multiplicar ambos os membros da desigualdade por  $(1 + x)$  pois, pelas condições iniciais,  $x > -1$ , o fator é positivo e não altera o sentido da desigualdade. Logo,

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2.$$

Como  $kx^2 \geq 0$ , podemos concluir que  $1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$ .

Portanto,

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x,$$

completando o passo indutivo.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a desigualdade de Bernoulli é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x > -1$ . ■

**Exemplo 19:** Utilize o método da indução matemática para demonstrar que  $3^{2n} - 1$  é divisível por 8,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

**1º:** Demonstrando o caso base,  $n = 1$ :

Neste caso, fica facilmente verificado, pois  $3^{2 \cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8$ , portanto divisível por 8.

**2º:** Hipótese de indução: Supomos, para um  $k \in \mathbb{N}$  arbitrário, que  $3^{2k} - 1 = 8m$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

**3º:** Passo indutivo: supondo que a hipótese indutiva é válida, queremos provar que esta também deve ser válida para  $n = k + 1$ , ou seja, que  $3^{2(k+1)} - 1$  seja divisível por 8.

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 \\ &= 9 \cdot 3^{2k} - 1 \\ &= 9 \cdot 3^{2k} - 1 + (9 - 9) \\ &= (9 \cdot 3^{2k} - 9) + (9 - 1) \\ &= 9(3^{2k} - 1) + 8. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,  $3^{2k} - 1 = 8m$ . Substituindo:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 9 \cdot 8m + 8 = 8(9m + 1).$$

Como  $9m + 1 \in \mathbb{N}$ , concluímos que  $8(9m + 1)$  é divisível por 8. Portanto, pelo princípio da indução matemática,  $3^{2n} - 1$  é múltiplo de 8 para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Exemplo 20:** Considere a sequência  $a_n$  definida recursivamente por:

$$a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = 3a_n + 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Demonstre, por indução matemática, que o termo geral é dado por  $a_n = 3^n - 1$ .

**Demonstração:**

**1º:** Demonstrando o caso base,  $n = 1$ :

Neste caso, aplicando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_1 = 3^1 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Portanto, a base está confirmada. **2º:** Hipótese de indução: Supomos, para um  $k \in \mathbb{N}$  arbitrário, que  $a_k = 3^k - 1$ . **3º:** Passo indutivo: supondo que a hipótese indutiva é válida para  $k \in \mathbb{N}$ , queremos provar que também será válida para  $k + 1$ .

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3a_k + 2 \\ &= 3(3^k - 1) + 2 \\ &= 3^{k+1} - 3 + 2 \\ &= 3^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Portanto, fica confirmado que, com a hipótese indutiva  $a_k = 3^k - 1$ , a fórmula fechada é válida para  $a_{k+1} = 3^{k+1} - 1$ . Concluimos, por indução matemática, que a fórmula fechada  $a_n = 3^n - 1$  é verdadeira para todo número natural  $n$ . ■

Todo número natural  $n \geq 2$  pode ser representado de maneira única (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos. Em outras palavras, para cada  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 2$ , ou  $n$  é primo, ou existem primos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (não necessariamente distintos) tais que

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k.$$

Essa é a essência do **Teorema Fundamental da Aritmética**.

**Exemplo 21:** A existência da fatoração em primos.

Utilizando o Princípio da Indução Forte (ou segunda forma de indução), demonstre o Teorema Fundamental da Aritmética em sua parte de existência: Todo número natural  $n \geq 2$  pode ser escrito como um produto de números primos.

**Demonstração:**

**1º:** Demonstrando o caso base  $n = 2$ , que é um número primo. Logo, a afirmação do caso base é trivialmente verdadeira.

**2º:** Hipótese de Indução Forte: Supomos que a propriedade é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a um certo  $k \in \mathbb{N}$ . Isto é,

assumimos que todo inteiro  $m$  com  $2 \leq m \leq k$  pode ser fatorado em primos, ou ele próprio é primo.

**3º:** Passo indutivo: supondo a hipótese indutiva forte, devemos provar que a propriedade também vale para  $n = k + 1$ . Temos dois casos a considerar:

- Se  $k + 1$  é um número primo, então ele próprio se confirma sobre a hipótese indutiva, e, portanto, a demonstração fica concluída sobre ele.
- Se  $k + 1$  não é primo, ou seja, ele é composto, então, por definição, existem dois naturais  $a, b$  tais que  $a \cdot b = k + 1$ , com  $2 \leq a, b \leq k$ .

Pela hipótese de indução forte, como  $a \leq k$  e  $b \leq k$ , ambos os fatores estão no alcance da hipótese indutiva. Isso significa que  $a$  e  $b$  podem ser escritos como produto de números primos (ou são eles próprios primos). Portanto, existem primos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  e  $q_1, q_2, \dots, q_s$  tais que:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \quad b = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Consequentemente:

$$k + 1 = a \cdot b = (p_1 \cdots p_r) \cdot (q_1 \cdots q_s),$$

que é um produto de números primos. Assim, a propriedade vale também para  $k + 1$ , completando o passo indutivo.

Pela hipótese de indução forte, aplicada a todos os números naturais no intervalo  $2 \leq m \leq k$ , garantimos que ou  $k + 1$  admite uma representação de decomposição como produto de números primos (a partir dos fatores  $a$  e  $b$ ), ou o próprio  $k + 1$  é primo natural, o que conclui a demonstração.

Como em ambos os casos a conclusão se verifica, o Princípio da Indução Forte garante que a propriedade é verdadeira para todo número natural  $n \geq 2$ .



## 8 Considerações Finais

A presente pesquisa evidenciou as potencialidades das apropriações do Raciocínio Lógico Matemático no contexto da educação básica como elemento estruturante do pensamento crítico, argumentativo e na formação do cidadão. Não distante da realidade dos documentos norteadores e formadores do currículo nacional, o bom uso desta ferramenta se coloca como parte integrante e estrutural desde os PCNs até os documentos mais atuais que orientam todo o currículo da educação básica. A investigação realizada foi ancorada no aspecto crítico dos documentos, desde sua gênese, incluindo a concepção aristotélica como o Organón, passando ainda pelas contribuições dos trabalhos de George Polya e Terence Tao nas formações de heurísticas de resolução de problemas e na classificação ou tipologia de cada um destes. Embora incentivado o uso do RLM nas salas de aula, a sua materialização ainda permanece fragilizada, pouco usada em sala de aula e gerando uma sensação de lacuna operacional entre os documentos norteadores as práxis de sala de aula.

Ao longo dos estudos delineados nesta investigação, ficou claro que a inclusão do Raciocínio Lógico e Matemático na Base Nacional Comum Curricular como um eixo orientador das competências representa um progresso significativo. A intencionalidade epistemológica deste movimento está alinhada aos objetivos da argumentação, utilizando a habilidade de fomentar um diálogo entre evidências e conjecturas, até alcançar a validação de hipóteses e a construção do raciocínio dedutivo. Contudo, a descrição nos documentos ainda não garante sua efetiva aplicabilidade. A genuína apropriação do raciocínio lógico demanda um salto qualitativo, que transforma a lógica de implícita para uma metodologia explícita de pensamento, promovendo uma integração transversal do ensino da matemática com outras áreas do conhecimento. Os exemplos selecionados com extremo cuidado, que ilustram a demonstração direta, a contraposição, a redução ao absurdo ou a indução matemática, não devem ser considerados apenas formalismos de uma pesquisa, mas sim um contexto aplicável na educação básica brasileira, dada condição e intencionalidade pedagógica. Uma visão mais apropriada está no sentido de constituir um testemunho do uso apropriado das argumentações dentro de estruturas lógicas, em especial, no contexto das resoluções de problemas, sendo este um ambiente fértil para aplicação do pensamento lógico, elevando a discussão sobre o processo de validação do conhecimento a um plano paralelo.

Neste contexto, a relevância desta dissertação vai além da identificação de problemas nos quais os operadores lógicos se fazem úteis. Neste trabalho é proposto, de forma didático-metodológica, a sistematização das ferramentas da lógica proposicional, das regras de inferência, do princípio dedutivo e dos métodos de demonstração. Essa sistemática proporciona um repertório funcional que permite ao professor converter as diretrizes

curriculares em planejamentos de aulas investigativas. O foco passa a ser a criação de situações-problema que incentivem os alunos a articular premissas explícitas, a desenvolver conjecturas que sejam passíveis de teste, e a construir argumentos coesos, promovendo, dessa forma, uma cultura de justificação em oposição à aceitação de resultados por meio da réplica apenas.

Por outro lado, a apropriação do Raciocínio Lógico tem por premissa a formação dos educadores, tanto no início da sua carreira quanto ao longo da sua trajetória profissional nos modos da formação continuada. O domínio da matemática por parte do professor não garante a aplicabilidade plena das ferramentas lógicas no contexto da sala de aula. Há uma carência notável nos livros da educação básica de matemática com relação as atividades ou textos que produzam incentivos na prática crítica ou argumentativa, ancoradas na manutenção da verdade face os princípios da lógica Aristotélica. É de extrema relevância que os docentes da área da matemática entendam a lógica subjacente aos conteúdos lecionados de tal forma que seja natural a implementação de questionamentos junto dos alunos para a validação de algum método de resolução de situação problema. Assim, ao longo da formação do docente, a inclusão de práticas ou cursos que privilegiam o aprofundamento e reflexão sobre a lógica matemática, suas apropriações no contexto investigativo em sala de aula e suas pedagogias é de suma importância, e alinhada com as propostas formadoras na BNCC.

Assim, a pesquisa chega à sua culminância apontando um horizonte na qual a integração ou apropriação do RLM na Educação Básica se mostra na forma de um projeto coletivo e estratificado, envolvendo consistência na sua apropriação, em alinhamento com os documentos orientadores do Currículo Nacional. Há uma necessidade inerente na produção de conteúdos, textos, livros, formações etc., sempre no compromisso coletivo do empoderamento do professor como agente transformador em suas práticas didáticas por meio da inquietação em demonstrar os argumentos por meio da lógica. Ao equipar professores e estudantes com as ferramentas do RLM está sendo cultivada uma cultura de investigação, formando o cidadão crítico, reflexivo, capaz de argumentar e interagir sobre si e sobre seu meio, fomentando e articulando entre as áreas de conhecimentos elementos que balizam decisões no sentido de manutenção da verdade, tão cara e tão almejada pela BNCC. Esta apropriação, em análise temporal e mais longa sobre a vida do cidadão possivelmente é a contribuição mais profunda que a educação matemática, alicerçada no RLM, pode oferecer à formação do cidadão, humano e integral.

# Referências

Base Nacional Comum Curricular. BNCC, educação é a base. MEC 2017. Disponível em: <<https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 25 jul. 2025.

BICUDO, Irineu. *Os Elementos de Euclides*. São Paulo: Editora da Unesp, 2009.

BRASIL. Constituição Federal de 1988. Direitos Fundamentais do Cidadão: Art. 205 e Art. 206. Disponível em: <<https://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/constituicao.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2025.

DUVAL, Raymond. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. São Paulo: Papirus, 2003.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

HUF, V. B. S. Investigação do raciocínio lógico dedutivo no ensino de números inteiros em turmas de 7º ano. *Experiências em Ensino de Ciências*, v. 13, n. 2, 2018. Disponível em: <[https://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo\\_ID480/v13\\_n2\\_a2018.pdf](https://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID480/v13_n2_a2018.pdf)>. Acesso em: 20 dez. 2025.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. LDB. MEC, 1996. Disponível em: <[https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm)>. Acesso em: 31 jul. 2025.

MIGUEL, J. C. *Alfabetização Matemática: implicações pedagógicas*. Projeto do Núcleo de Ensino da FFC-UNESP-Marília. UNESP, 2008.

MOREIRA, A. Marco; MASINI, S. F. Elcie. *Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2011.

NAZARÉ BEZERRA. *Teoria dos Números – Um Curso Introdutório*. Belém: EditAedi, 2018.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Uma Introdução aos PCNs – MEC, 1997. Disponível em: <<https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2025.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PYLRO, Ciro. *Raciocínio Lógico: do Básico à Resolução de Problemas*. Vitória: Editora Dialética, 2025.

TAO, Terence. *Como resolver problemas matemáticos: uma perspectiva pessoal*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2013.