Marcelle Daher do Valle

Progressão aritmética e progressão geométrica no ENEM, em vestibulares e em livros-texto: algumas aplicações observadas por análise de questões, e modos de abordagem do tema.

Vitória

2026

Marcelle Daher do Valle

Progressão aritmética e progressão geométrica no ENEM, em vestibulares e em livros-texto: algumas aplicações observadas por análise de questões, e modos de abordagem do tema.

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Bayer

Vitória

2026

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

V181p

Valle, Marcelle Daher do, 1978-

Progressão aritmética e progressão geométrica no ENEM, em vestibulares e em livros-texto: algumas aplicações observadas por análise de questões, e modos de abordagem do tema. / Marcelle Daher do Valle. - 2026.

69 p. : il.

Orientador: Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Sequências. 2. Ensino médio. I. Bayer, Valmecir Antonio dos Santos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Progressão aritmética e progressão geométrica no ENEM, em vestibulares e em livros textos: algumas aplicações observadas por análise de questões, e modos de abordagem do tema”

Marcelle Daher do Valle

Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo, composto por dissertação e recurso educacional, tipo Técnica, subtipo Cursos de curta duração, intitulado “Curso de teoria e exercícios sobre progressões aritméticas e geométricas”, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 20/05/2026 por:

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Orientador – UFES

Prof. Dr. Pedro Matos da Silva
Examinador externo – IFES

Prof. Dr. Fábio Júlio Valentim
Examinador interno – UFES

Prof. Dr. Eleonésio Strey
Examinador externo – UFES - Alegre
Examinador externo – IFES

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Examinador interno – UFES

Marcelle Daher do Valle

Progressão aritmética e progressão geométrica no ENEM, em vestibulares e em livros-texto: algumas aplicações observadas por análise de questões, e modos de abordagem do tema.

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, 20 de maio de 2026:

Prof. Dr. Valmecir Bayer
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Eleonésio Strey
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Fábio Júlio Valentim
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Pedro Matos da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo
Membro Externo

Vitória
2026

Dedico este trabalho ao meu Senhor, o Deus Criador, ao meu Salvador, Jesus Cristo. Sem as providências e determinações do Altíssimo, nada disso seria possível.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, Criador, Pai e Senhor, pela vida, pela salvação por meio de Cristo, pela proteção, pelo amparo, pela minha família, pela saúde e pelas portas abertas até aqui, e por toda bênção que virá.

Agradeço ao meu orientador, pela atenção, apoio e gentileza.

Agradeço a todos os professores das disciplinas do PROFMAT, pela atenção e pelos ensinamentos.

Agradeço ao professor César, de quem sempre me lembro, a cada passo na matemática.

Agradeço ao meu cachorrinho recentemente falecido, meu ChoKito, pelos 17 anos e 5 dias de amizade, companhia, afeto e por todas as experiências vividas com ele, que me ajudaram tanto a crescer, de tantas formas.

Agradeço ao meu antigo colega de trabalho, e hoje amigo, Alex Sandro Silvestre Menon, que “me obrigou” a fazer o ENA do PROFMAT quando eu já não planejava mais fazer um mestrado, anos após ter me formado na licenciatura, esta concluída poucas semanas antes de uma pandemia, que gerou uma rotina que afetou meus planos.

“Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que têm coragem de irem a fundo nela."

(Carl Friedrich Gauss)

Resumo

Esta é uma pesquisa sobre progressões aritméticas e geométricas que traz, primeiramente, um conteúdo teórico relevante para o ensino médio e, em seguida, uma curadoria de questões de livros, de vestibulares tradicionais e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O objetivo deste trabalho é mostrar a relevância do tema progressões para o ensino médio, aplicações, diferenças entre abordagens em questões, fazendo uma pesquisa, seleção e organização de exercícios diferentes, de provas de diversos lugares do Brasil, e de diferentes livros. Para cada questão, se verifica o tema principal (PA ou PG), os temas associados, o grau de dificuldade, aspectos do enunciado, presença ou ausência de contextualização, comparações e observações diversas, enquanto é exposta a resolução. O trabalho também traz alguns aspectos históricos, associação das progressões à matemática financeira, e algumas habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular.

Palavras-chave: Progressão aritmética. Progressão geométrica. Ensino Médio. ENEM. Vestibulares.

Abstract

This research on arithmetic and geometric progressions first presents relevant theoretical content for high school education, followed by a curated selection of questions from textbooks, traditional university entrance exams, and the Brazilian National High School Exam (ENEM). The objective of this research is to show the relevance of the topic of progressions for high school education, applications, and differences between approaches in questions, by researching, selecting, and organizing different exercises from tests from various places in Brazil and from different books. For each question, the main theme (arithmetic or geometric progression), associated themes, difficulty level, aspects of the wording, presence or absence of contextualization, comparisons, and various observations are examined, while the solution is presented. The work also includes some historical aspects, the association of progressions with financial mathematics, and some skills listed in the Brazilian National Common Curriculum Base.

Keywords: Arithmetic progressions. Geometric progressions. High school education. ENEM. Entrance exams.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A ideia de fazer este trabalho sobre progressões aritméticas e geométricas surgiu com a memória do momento em que percebi meu desejo de cursar matemática no ensino superior. Eu tinha 15 anos de idade quando um professor me observou desenvolver a resolução de exercícios, cujo conteúdo ainda não tinha sido exposto em aula. O assunto em estudo naquele momento da minha vida escolar era conceito de progressão aritmética. Esse mesmo professor sugeriu que eu me tornaria profissional da matemática. Antes disso, aos 14 anos, também incentivada por outro professor, assumi a monitoria de matemática no colégio, e com isso comecei a ministrar aulas. Eu cursava o ensino médio, que era chamado segundo grau, no início dos anos 90. O caminho profissional tomado inicialmente foi diferente, mas do início de 2016 ao final de 2019 a licenciatura em matemática foi cumprida, como previsto tantos anos antes, e agora, o mestrado em matemática.

O conteúdo deste trabalho pode atender estudantes do ensino médio, pois embora algumas demonstrações tragam conceitos que não fazem parte do currículo do ensino básico, e embora algumas questões sejam complexas e excessivamente rigorosas para o ensino médio, as principais ideias podem ser compreendidas, especialmente com o auxílio do recurso educacional produzido a partir desta dissertação. Esse recurso educacional é uma sequência de vídeo aulas, e foi publicado no Portal EduCapes, com o título "Curso de teoria e exercícios sobre progressões aritméticas e geométricas". O trabalho pode também auxiliar estudos de pessoas que já concluíram o ensino médio, e ajudar nos estudos e no trabalho de professores do ensino básico.

O trabalho pretende trazer, inicialmente, todos os aspectos teóricos relevantes sobre progressão aritmética e progressão geométrica que são abordados no ensino médio. Em seguida, trazer, de forma didática, a solução de questões selecionadas em provas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), em provas de vestibulares e processos de seleção e em livros. Trazer também comentários importantes a respeito das questões e seus conteúdos, observar o nível de exigência de conteúdo matemático e de habilidades em matemática, observar em que contexto a questão abordou o assunto ou se não houve contextualização, apresentar os erros e as confusões que podem ocorrer na resolução, criando, com o corpo do trabalho, um conteúdo de teoria e exercícios resolvidos e comentados.

Assim sendo, o objetivo deste trabalho é mostrar a relevância do tema progressões para o ensino médio, aplicações, diferenças entre abordagens em questões, fazendo uma pesquisa, seleção e organização de questões diferentes, de provas de diversos lugares do Brasil, e de diferentes livros.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular), dentro da competência específica 5, traz, entre outras, as seguintes habilidades:

> (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, 533)

A BNCC traz também, dentro da competência específica 3:

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros. (BRASIL, 2018, 528)

Raciocinar, planejar, resolver problemas, todas essas ações fazem parte da vida das pessoas, para atender a compromissos e a necessidades diárias diversas. Muitos tipos de questão são repetidamente cobrados em exames e seleções. A resolução dos exercícios, especialmente dos que trazem contextos alinhados à realidade, é uma atividade que pode ajudar a desenvolver as habilidades mencionadas na BNCC. Um fato que pode trazer preocupação é a má formulação de enunciados, sem esse alinhamento à realidade, ou sem contextualização.

A história da matemática, que será resumidamente apresentada no próximo capítulo, mostra o surgimento de conceitos matemáticos, que aconteceram como consequência de necessidades humanas específicas. No capítulo seguinte aparecerá o referencial teórico deste trabalho, para então abordar as questões selecionadas na pesquisa.

A pergunta que surge para a pesquisa é: é adequado classificar as questões, tão diferentes entre si, em melhores ou piores para o ensino e a aprendizagem, e também para as avaliações dos estudantes?

2 Um pouco de história

De acordo com historiadores da matemática, como Boyer (1996), a busca do homem por modelar fenômenos que apresentam algum tipo de regularidade, acontece desde os babilônicos e egípcios, passando pelos orientais, pelos europeus e por outras culturas. Nesse sentido, a linguagem, o pensamento algébrico e a criação dos símbolos, enquanto se desenvolviam, possibilitavam um melhor entendimento e representação dos modelos sequenciais.

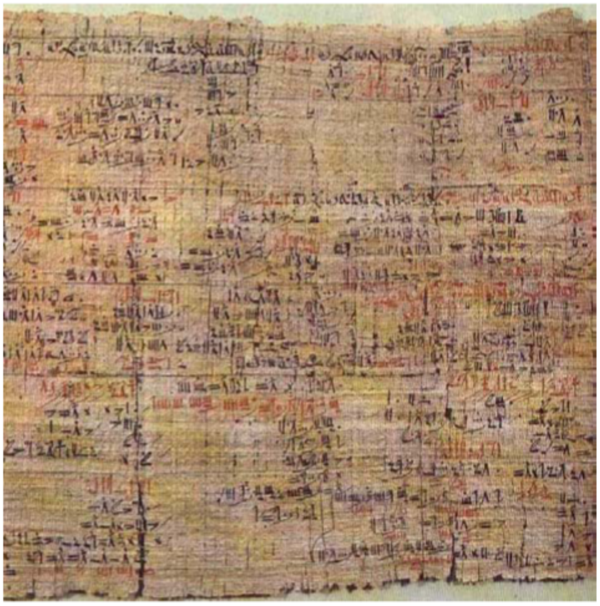
Em um artigo escrito por Lima et al. (2004), são encontrados relatos de vários acontecimentos históricos ligados às progressões aritméticas e geométricas. De acordo com os autores, as progressões são estudadas há milênios, com o objetivo de atender a necessidades específicas dos povos.

O artigo relata que os egípcios tinham necessidade de conhecer o padrão da enchente do rio Nilo, para poderem plantar na época certa e garantir a alimentação. Observaram que o rio subia a cada 365 dias, e criaram um calendário solar. Pereira e Resende (2025) contam que, por meio da observação dos fenômenos regulares, os egípcios conseguiram, na época, elaborar um calendário anual bem semelhante ao que se tem hoje. Os meses do ano formavam uma sequência, na qual cada mês correspondia a uma posição no calendário.

Os egípcios preservaram muitos papiros que contribuíram para nossos conhecimentos matemáticos atuais. Um importante exemplo, o papiro Rhind (1650 a.C.), escrito por Ahmes, é um texto matemático com 85 problemas em escrita hierática, que Ahmes reproduziu de outro trabalho anterior. Ele chegou em partes ao Museu Britânico, as partes chegando em momentos diferentes. Ele foi publicado em 1927, e é uma rica fonte dos conhecimentos matemáticos do antigo Egito, inclusive mostrando que os egípcios sabiam somar termos de uma progressão aritmética. Também somavam progressões geométricas com 6 elementos, usando multiplicação por um fator comum. No Rhind aparecem frações em progressão geométrica, que eram frações da unidade adotada para medição de quantidade de grãos.

No papiro Rhind também há exercícios, que hoje poderiam ser resolvidos usando os conceitos de equações lineares e de progressão aritmética. Observe a ilustração do Rhind na figura 1:

Figura 1 – Papiro Rhind

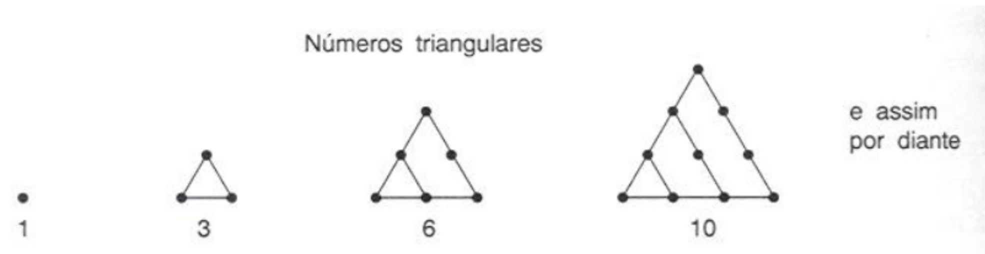


Fonte: (LIMA et al., 2004).

Um dos problemas que aparece no Rhind será abordado em uma das questões deste trabalho, pois foi questão de vestibular em Niterói, no Rio de Janeiro: "Divida 100 pães entre 5 homens, de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética, e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores."

Lima et al. (2004) também mencionam tabletas babilônicas, com destaque para Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.). Mencionam Pitágoras e os pitagóricos, que associaram a matemática à música. Também por meio de pitagóricos vieram os números figurados, eles expressam o número de pontos em arranjos geométricos. O número triangular é obtido pela soma dos termos de uma progressão aritmética, é possível observar na figura 2.

Figura 2 – Números triangulares



Fonte: (LIMA et al., 2004).

Sendo n a posição de cada figura na sequência, o número triangular T_n será $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Outros matemáticos são mencionados, como Euclides, e sua obra "Os Elementos", com conteúdos relacionados a progressões geométricas, Diofanto de Alexandria (destaque para a obra "a Aritmética"), Leonardo de Pisa (obra "Liber Abacci"), Bhaskara (tratado "lilavati"), Michael Stifel (obra "Arithmética"), John Napier, Abraham De Moivre e Gauss, este último ainda será mencionado neste trabalho, ao trazer soma dos termos da progressão aritmética, cujo desenvolvimento contou com o brilhantismo de Gauss, ainda com pouca idade. Gauss contribuiu para todos os ramos da Matemática e para a Teoria dos Números.

Pereira e Resende (2025) também falam a respeito dos números figurados na história da matemática e chamam a atenção para Michael Stifel (1486 - 1567), que observou que os termos de uma progressão geométrica de razão q $(q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, \cdots)$ correspondiam aos termos de uma progressão aritmética de razão 1 formada por expoentes dos termos da progressão geométrica, que é a progressão aritmética $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$. Assim, ao multiplicar dois termos da progressão geométrica, o resultado era um termo cujo expoente representava a soma dos dois números correspondentes na progressão aritmética. Por exemplo, $q^4 \times q^1 = q^{4+1} = q^5$. Michael Stifel, por meio de suas pesquisas sobre Aritmética e Álgebra, formulou os logaritmos, usando aproximações diferentes das utilizadas por Napier.

Essa correspondência de termos da progressão aritmética com os expoentes dos termos da progressão geométrica também é explicada no trabalho de Leitão (2014), que traz também que, ao dividir um termo da progressão geométrica por outro, subtraem-se os expoentes. Por exemplo:

$$\frac{q^3}{q^1} = q^{3-1} = q^2$$

$$\frac{q^2}{q^3} = q^{2-3} = q^{-1} = \frac{1}{q}$$

Então, com essas definições, pode-se estender infinitamente as progressões geométrica e aritmética:

$$(\cdots, q^{-5}, q^{-4}, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, \cdots)$$

$$(\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$$

Cada termo da progressão geométrica é uma potência da razão q, e os expoentes de q formam uma progressão aritmética. Essa correspondência é a ideia por trás dos logaritmos.

Outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento da progressão aritmética foi Leonardo de Pisa, conhecido também como Fibonacci. Existe uma sequência conhecida como sequência de Fibonacci. Nessa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$$

3 Progressões - Aspectos Teóricos

Este capítulo é essencial para o desenvolvimento deste trabalho, pois estabelece a fundamentação teórica rigorosa necessária para a análise crítica que se segue. As definições e conceitos aqui apresentados foram baseados e consolidados a partir das diretrizes e abordagens em (IEZZI; HAZZAN, 2013), (IEZZI et al., 2014) e (MORGADO; CARVALHO, 2023), servindo de alicerce para a compreensão das estruturas algébricas fundamentais.

3.1 Sequências

3.1.1 Definição e Conceitos Iniciais

Uma sequência numérica é uma lista ordenada de números reais dispostos em uma sequência lógica. Formalmente, é uma função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural não nulo n um número real a_n.

A representação geral de uma sequência é dada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

Onde:

- a_1 é o primeiro termo;
- a_n é o termo geral da sequência, ocupando a n-ésima posição.

Exemplo: Na sequência dos números primos positivos $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$, temos que $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_4 = 7$.

3.1.2 Lei de Formação e Recorrência

Os termos de uma sequência podem ser determinados a partir de regras matemáticas estabelecidas de duas formas principais:

1. Lei de Formação (ou Termo Geral): Uma fórmula expressa a_n explicitamente em função de sua posição n.

   Exemplo: Seja a sequência definida por $a_n = 2n + 1$, para $n \geq 1$.

   - $a_1 = 2(1) + 1 = 3$

- $a_2 = 2(2) + 1 = 5$
- $a_3 = 2(3) + 1 = 7$

A sequência gerada é $(3, 5, 7, \dots)$.

2. Fórmula de Recorrência: Determina um termo a partir de seus antecessores imediatos, necessitando da definição de pelo menos o primeiro termo.

   Exemplo (Sequência de Fibonacci): Definida por:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 3 \end{cases}$$

   Os termos seguintes são calculados pela soma dos dois anteriores: $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 2 + 1 = 3$, gerando $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

3.1.3 Classificação de Sequências

As sequências numéricas podem ser classificadas de acordo com o seu número de termos(finitas ou infinitas) ou com o comportamento de seus valores:

- Finitas: Possuem um número finito de elementos.

  Exemplo: Sequência dos algarismos do sistema decimal: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

- Infinitas: Possuem infinitos termos, indicadas por reticências.

  Exemplo: Sequência dos números positivos pares: $(2, 4, 6, 8, \dots)$.

- Crescentes: Cada termo é maior que o seu antecedente $(a_{n+1} > a_n)$.

  Exemplo: $a_n = 3n \Rightarrow (3, 6, 9, 12, \dots)$.

- Decrescentes: Cada termo é menor que o seu antecedente $(a_{n+1} < a_n)$.

  Exemplo: $a_n = 10 - n \Rightarrow (9, 8, 7, 6, \dots)$.

- Constantes (ou Estacionárias): Todos os termos são iguais $(a_{n+1} = a_n)$.

  Exemplo: $a_n = 5 \Rightarrow (5, 5, 5, 5, \dots)$.

3.2 Progressão aritmética

"Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r." (MORGADO; CARVALHO, 2023, 38) Existem situações na vida real em que grandezas sofrem acréscimos ou decréscimos constantes em intervalos de tempo iguais. Progressões aritméticas, considerando a_n a representação genérica de seus termos (com n natural), podem ser crescentes, quando cada termo é maior que o termo anterior $(a_n > a_{n-1})$, o que implica $a_n - a_{n-1} > 0$, o que implica $r > 0$. Podem ser decrescentes, quando cada termo é menor que o termo anterior $(a_n < a_{n-1})$, o que implica $a_n - a_{n-1} < 0$, o que implica $r < 0$. Podem ser constantes, quando cada termo é igual ao anterior $(a_n = a_{n-1})$, o que implica $a_n - a_{n-1} = 0$, o que implica $r = 0$. (IEZZI; HAZZAN, 2013)

Vejamos alguns exemplos:

- $(5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ \ldots)$ é uma PA crescente com $r = 3$, $a_1 = 5$, $a_6 = 20$
- $(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ \ldots)$ é uma PA decrescente com $r = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_5 = -\frac{3}{2}$
- $(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ldots)$ é uma PA constante com $r = 0$, $a_1 = 2$, $a_5 = 2$

3.2.1 Termo geral da PA

Observando o primeiro exemplo dado acima, temos: $a_1 = 5$ (primeiro termo) e $r = 3$ (razão), e, consequentemente, $8 = 5 + 3$ $(a_2 = a_1 + r)$, $11 = 8 + 3$ $(a_3 = a_2 + r)$, e assim por diante. Considere a_n o termo geral da progressão aritmética finita ou infinita.

Fazendo então:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Podemos somar todas as igualdades obtendo:

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + (n-1).r \quad \Rightarrow$$

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

"Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, para avançar um termo, basta somar a razão, para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante."(MORGADO; CARVALHO, 2023, 38)

E, pelo mesmo raciocínio, qualquer termo pode ser obtido a partir de outro. Sendo a_n e a_m (com m e n naturais) dois termos da PA, fazemos:

$$a_n = a_m + (n-m) \cdot r$$

"Em uma progressão aritmética de termos inteiros e razão não nula, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pelo módulo da razão." (MORGADO; CARVALHO, 2023, 40).

Isso ocorre porque ao mudarmos de um termo para o seguinte na PA, sempre adicionamos um múltiplo da razão. Seja uma PA de termos inteiros com o primeiro termo a_1 e razão $r \neq 0$. O termo geral (ou genérico) é:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Pelo Teorema da Divisão Euclidiana, podemos expressar o termo a_1 em função da sua divisão por $|r|$ (módulo da razão):

$$a_1 = |r| \cdot q + re$$

Onde q é o quociente e re é o resto da divisão de a_1 por $|r|$, com $0 \leq re < |r|$. Substituindo a expressão de a_1 na fórmula do termo geral, e em seguida reordenando os termos, teremos:

$$a_n = (|r| \cdot q + re) + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = [|r| \cdot q + (n-1) \cdot r] + re$$

A parte entre colchetes é divisível por $|r|$, pois tanto $|r|$ quanto r são múltiplos de $|r|$. Então, dividindo a_n por $|r|$, teremos como resto o re (o mesmo resto do primeiro termo).

Isso é trazido no contexto de um exemplo sobre o cometa Halley, que visita o planeta Terra a cada 76 anos, e visitou pela última vez em 1986. O exemplo pergunta quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo, e em que ano foi sua primeira passagem na era cristã. Temos uma progressão aritmética de razão $r = -76$. Temos:

$$a_n = 1986 + (n-1).(-76) = 1986 - 76n + 76 = 2062 - 76n$$

Para que $a_n > 0$ devemos ter $n < \frac{2062}{76} \approx 27,13$. Os termos positivos da progressão serão então os 27 primeiros, ou seja, 27 visitas na era cristã. A primeira passagem na era cristã foi em:

$$a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$$

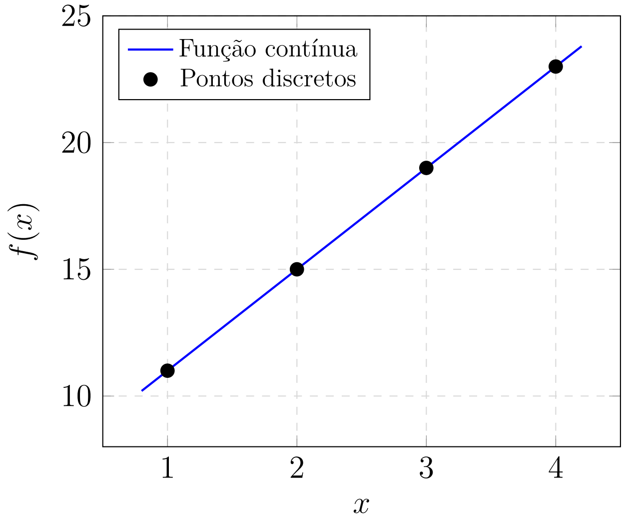
O número 1986 dividido por 76 (módulo da razão) dá resto 10. Isso ocorre com todos os anos em que Halley visitou a Terra. Entre os anos 1 e 76, inclusive, quando ocorreu a primeira visita, o único ano que dividido por 76 dá resto 10 é o ano 10.

3.2.2 Relação entre PA e função afim

Qual seria o termo geral de uma PA de razão 4 e primeiro termo igual a 11? Temos $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, e, no caso, $a_n = 11 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow a_n = 11 + 4n - 4$

$\Rightarrow a_n = 7 + 4n$. Considere pares ordenados $(n{,}a_n)$ no plano cartesiano. Observe que podemos considerar $a_n = f(n)$, e, portanto, $f(n) = 7 + 4n$. Iremos obter os pares $(1, 11), (2, 15), (3, 19), (4, 23), \cdots, (n, f(n))$. Temos abscissas em PA de razão 1 e as ordenadas em PA de razão 4. Temos $f(1) = 11$, $f(2) = 15$, $f(3) = 19$, $f(4) = 23$, e, com isso, a formação dos pares ordenados mencionados, correspondentes a pontos sobre uma reta. Essa reta é o gráfico de uma função real $f(x) = 4x + 7$ para x real. A PA restringe o domínio ao conjunto dos números naturais não nulos, como mostra o gráfico na figura 3:

Figura 3 – Discretização da reta $f(x) = 4x + 7$



Fonte: Produção do próprio autor (2026).

Note que, generalizando, $f(x) = a_1 - r + rx$. É possível observar que r é o coeficiente angular da função.

3.2.3 Interpolação aritmética

Interpolar k meios aritméticos (k termos da progressão) entre a_1 e a_n é obter uma progressão aritmética com os extremos a_1 e a_n, com $n = k + 2$ termos (com n e k naturais, $n \geq 2$). (IEZZI; HAZZAN, 2013) Para determinar os meios, precisamos da razão da PA: Temos $n = k + 2 \Rightarrow n - 1 = k + 1$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \Rightarrow$$

$$a_n = a_1 + (k + 1).r \Rightarrow$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{k + 1}$$

3.2.4 Soma dos termos da PA

O matemático Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), ainda com pouca idade, deduziu a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Quando solicitado que calculasse a soma dos números naturais de 1 a 100, Gauss procedeu da seguinte forma (definindo como S a soma solicitada):

$$S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$$

E também:

$$S = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1$$

Gauss percebeu que obteria 100 somas iguais (50 pares de somas iguais), tendo 101 como resultado de cada soma:

$$1^{\underline{o}} par : 1 + 100 = 100 + 1 = 101$$

$$2^{\underline{o}} par : 2 + 99 = 99 + 2 = 101$$

E assim por diante. Teremos:

$$2S = 100 \times 101 \Rightarrow$$
$$S = \frac{100 \times 101}{2} \Rightarrow$$
$$S = 50 \times 101 = 5050$$

A sequência de números naturais de 1 a 100 é uma PA crescente de razão 1. O primeiro termo (a_1) é representado por 1, 100 representa o último termo (a_{100}) em uma PA de 100 termos. Generalizando a resolução para uma PA de n termos, sendo a_1 o primeiro termo e a_n o último termo, Gauss obteve:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

sendo S_n a soma dos n termos.

Assim sendo, a soma dos n primeiros números inteiros positivos será:

$$\frac{(1 + n)n}{2}$$

Para obter essa soma dispondo do valor do primeiro termo, do número de termos e da razão da PA, Iezzi e Hazzan (2013) nos trazem o seguinte:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

A soma dessas igualdades $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ nos dá:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = na_1 + \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} r \Rightarrow$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2} r$$

3.2.5 Progressão aritmética de segunda ordem

As progressões aritméticas de ordem superior, em geral, não são vistas sendo objeto de estudo no ensino médio. Porém pode haver abordagem de uma PA de segunda ordem, como já ocorreu, por exemplo, no ENEM, para que o candidato percebesse o padrão da progressão em questão. Essa questão será abordada neste trabalho, falando sobre números pentagonais, no item 4.2.6.

"Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não estacionária."(MORGADO; CARVALHO, 2023, 46)

A sequência (a_n)=(19, 22, 26, 31, 37,...), por exemplo, é uma PA de segunda ordem, visto que a sequência das diferenças entre cada termo e o termo imediatamente anterior, é uma PA não estacionária.

Uma sequência cujo termo de ordem n é soma de n primeiros termos de uma PA de ordem p, é uma PA de ordem $p+1$. Os números figurados (triangulares, quadrangulares, pentagonais) são exemplos disso. E "toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então (a_n) é um polinômio de grau p em n"(MORGADO; CARVALHO, 2023, 48). Um exemplo aparece na questão 23, item 4.2.23, que apresenta linhas com sequências de números ímpares.

Em seguida, é demonstrada a validade do teorema acima citado para progressões aritméticas de segunda ordem ($p = 2$). Se $a_n = an^2 + bn + c$ com $a \neq 0$:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

$$= a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c)$$

$$= an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c$$

$$= 2an + a + b$$

Temos então $2an + a + b$ que é de primeiro grau em n não estacionária.

E se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma PA com razão diferente de zero, e:

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

Temos $a_{n+1} - a_1$ que é um polinômio de segundo grau em n. Assim, a_n também é um polinômio de segundo grau em n.

Existem outras ordens superiores de progressão aritmética, como é mostrado na obra de Morgado e Carvalho (2023).

3.2.6 Progressão aritmética e juros simples

Este trabalho não pretende se aprofundar em matemática financeira, apenas fazer um paralelo entre as progressões e esse tema. Outros trabalhos se dedicam à matemática financeira como o de Favero (2024).

Os juros simples (J_s) são o percentual cobrado, a cada unidade de tempo (t), sobre o valor inicial da operação financeira. Esse valor inicial se chama capital (C), e a taxa de juros (i) incide a cada unidade de tempo sobre ele. O montante (M) é a soma do valor inicial com os juros. Teremos:

$$J_s = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J_s = C + C \cdot i \cdot t = C \cdot (1 + it)$$

Trabalharemos com um exemplo: "Uma dívida de R$1000,00 será paga com juros de 50% ao ano. Ela deverá ser quitada após um número inteiro de anos."(IEZZI et al., 2014, 346)

A questão fala de juros anuais de 50%=0,5. A taxa $i = 0,5$. Temos $0,5 \times 1000,00 = 500,00$. Como os juros incidem sempre sobre o valor inicial, teremos uma sequência de montantes a cada unidade de tempo, ou seja, a cada ano $(1500, 2000, 2500, 3000, 3500, \cdots)$ que é uma progressão aritmética de razão $r = 500 = C \cdot i$:

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow$$

$$a_n = 1500 + (n-1).500 \Rightarrow$$

$$a_n = 500n + 1000$$

Observe que n pode ser substituído por t, $C = 1000$, e $500n = 1000 \times 0,5 \times n = 1000 \times 0,5 \times t = C \cdot i \cdot t = 500t$. O termo a_n é o montante M.

3.3 Progressão geométrica

Progressão geométrica (PG) é a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é dado pelo produto do termo anterior por uma constante. Essa constante é chamada q. A classificação das PG ocorre da seguinte forma segundo (IEZZI; HAZZAN, 2013):

1. PG crescente (cada termo é maior que o termo anterior), que ocorre de duas diferentes formas:

   Na PG com termos positivos temos: $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$

Na PG com termos negativos temos: $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$

2. PG constante (cada termo é igual ao termo anterior), também ocorre de duas formas:

   Na PG com todos os termos nulos temos $a_1 = 0$ e q igual a qualquer valor.

   Na PG com termos iguais e não nulos temos: $a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1$

3. PG decrescente (cada termo é menor que o termo anterior) ocorre também de duas maneiras:

   Na PG com termos positivos temos: $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$

   Na PG com termos negativos temos: $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$

4. PG alternantes (cada termo tem sinal contrário ao sinal do termo anterior) ocorrem quando $q < 0$.

5. PG estacionárias têm $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = ... = 0$, e ocorrem quando $q = 0$.

Como exemplos, podemos apontar:

- $(6, 18, 54, 162, \cdots)$ PG crescente com termos positivos, com $a_1 = 6$ e $q = 3$.
- $(-512, -256, -128, -64, \cdots)$ PG crescente com termos negativos, com $a_1 = -512$ e $q = \frac{1}{2}$.
- $(0, 0, 0, 0, \cdots)$ PG constante com todos os termos nulos.
- $(7, 7, 7, \cdots)$ PG constante com termos iguais e não nulos e $a_1 = 7$.
- $(27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \cdots)$ PG decrescente com termos positivos, com $a_1 = 27$ e $q = \frac{1}{3}$.
- $(-5, -10, -20, -40, \cdots)$ PG decrescente com termos negativos e com $a_1 = -5$ e $q = 2$.
- $(1, -1, 1, -1, \cdots)$ PG alternante com $a_1 = 1$ e $q = -1$.
- $(7, 0, 0, 0, \cdots)$ PG estacionária.

3.3.1 Termo geral da PG

Observando o primeiro exemplo dado acima, temos: $a_1 = 6$ (primeiro termo) e $q = 3$ (razão), e, consequentemente, $18 = 6 \times 3$ $(a_2 = a_1.q)$, $54 = 18 \times 3$ $(a_3 = a_2.q)$, e assim por diante.

Como $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, fazendo então:

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1}.q$$

Multiplicando todas as igualdades obtemos:

$$a_2 \times a_3 \times ... \times a_n = a_1 \times a_2 \times ... \times a_{n-1} \times q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

"Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ...)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante."(MORGADO; CARVALHO, 2023, 62)

E, pelo mesmo raciocínio, qualquer termo pode ser obtido a partir de outro. Sendo a_n e a_m (com m e n naturais) dois termos da PG, fazemos:

$$a_n = a_m.q^{n-m}$$

3.3.2 Relação entre PG e função exponencial

Qual seria o termo geral de uma PG de razão $q = 2$ e primeiro termo igual a 1?

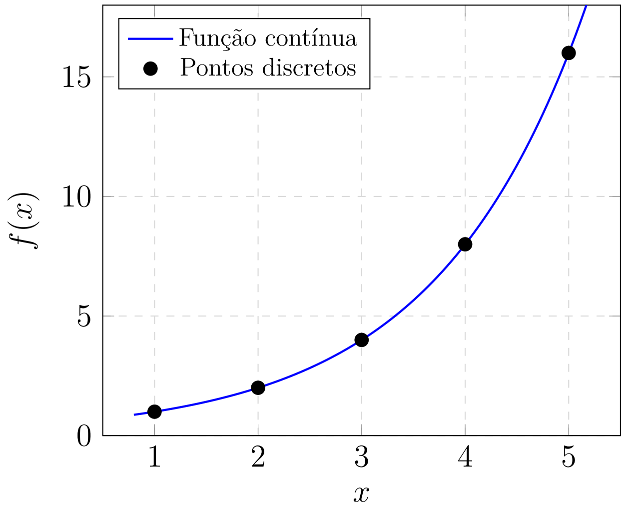
Temos:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

Considere pares ordenados (n,a_n) no plano cartesiano. Observe que podemos considerar $a_n = f(n)$, e, portanto, $f(n) = \frac{1}{2} \cdot 2^n$. Iremos obter os pares (1,1), (2,2), (3,4), (4,8), (5,16), ..., (n,$f(n)$). Temos $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 8$, $f(5) = 16$, e, com isso, a formação dos pares ordenados mencionados, correspondentes a pontos sobre uma curva. Essa curva é o gráfico de uma função real $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ para x real. A PG restringe o domínio ao conjunto dos números naturais não nulos, como mostra o gráfico na figura 4:

Figura 4 – Discretização da curva exponencial $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$



Fonte: Produção do próprio autor (2026).

3.3.3 Interpolação geométrica

Interpolar k meios geométricos (k termos da progressão) entre a_1 e a_n é obter uma progressão geométrica com os extremos a_1 e a_n, com $n = k+2$ termos (com n e k naturais, $n \geq 2$). (IEZZI; HAZZAN, 2013)

Para determinar os meios, precisamos da razão da PG: Temos $n = k + 2 \Rightarrow n - 1 = k + 1$

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_n = a_1.q^{k+1} \Rightarrow$$

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

3.3.4 Soma dos termos da PG finita

Sabendo os valores de a_1 e q é possível calcular S_n que é a soma dos n termos iniciais da PG, como segue, de acordo com Iezzi e Hazzan (2013), sendo $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

Multiplicamos os dois membros da igualdade por q:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Agora subtraindo a primeira igualdade da segunda, teremos:

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow$$

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Desse modo, partindo desta conclusão, também teremos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{(a_1 q^{n-1})q - a_1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

3.3.5 Soma dos termos da PG infinita

Para embasar este tópico, Iezzi e Hazzan (2013) inicialmente abordam o conceito de limite de uma sequência. Trazem o exemplo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$ e propõem observar que o enésimo termo da sequência será tão próximo de zero quanto desejado, para n suficientemente grande. Desejando que a distância entre 0 e $\frac{1}{2^n}$ seja inferior a $\frac{1}{1000}$, fazemos:

$$|\frac{1}{2^n} - 0| < \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$2^n > 1000 \Rightarrow$$

$$n > 9$$

Assim, a partir do décimo termo da sequência, a proximidade entre os termos e zero será inferior a $\frac{1}{1000}$. Generalizando, dado $\epsilon > 0$, haverá n_0 natural tal que $|\frac{1}{2^n} - 0| < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Portanto, o limite de $\frac{1}{2^n}$ quando n tende ao infinito é zero.

Representamos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Toda sequência da forma $(1, q, q^2, ..., q^n, ...)$ com $-1 < q < 1$ converge para zero. Então:

$$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Quando tomamos a PG $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$ e criamos a sequência $(S_1, S_2, ..., S_n, ...)$ onde:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Utilizando o limite, concluímos que a sequência de somas criada converge para 1, pois:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2^n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Generalizando, dada uma PG infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, a soma de seus termos será igual a S se, criando a sequência $(S_1, S_2, ..., S_n, ...)$ onde:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

essa sequência de somas converge para S, e então:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Podemos observar que:

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$$

Observando que q é constante, e a_1 é constante, teremos $-\frac{a_1}{1-q}$ constante. Considerando o que estudamos, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - \frac{a_1}{1-q}) = \lim_{n\to\infty} -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0$$

considerando $-1 < q < 1$.

Chamando de S a soma dos termos da PG infinita, resulta:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

É importante lembrar que, tendo $a_1 = 0$, independentemente do valor de q, obviamente $S = 0$. E se $a_1 \neq 0$ e $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, a sequência de somas $(S_1, S_2, S_3, ...)$ não converge, e, sendo assim, não é possível calcular a soma dos termos da PG.

3.3.6 Produto de n primeiros termos de uma PG

Apesar de não ser comumente abordado no ensino médio, existe um simples raciocínio que permite calcular o produto de n primeiros termos de uma PG. Ele está presente nas obras voltadas ao ensino médio, entre elas a de Iezzi et al. (2014), que nos traz o seguinte:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_1.q^2$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Podemos fazer a multiplicação:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n = a_1^n \times q^{\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}}$$

E então, considerando o produto:

$$P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n$$

Temos:

$$P_n = a_1^n \times q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

3.3.7 Progressão geométrica e juros compostos

Os juros compostos (J_c) são cobrados, após 1 unidade de tempo (t), sobre o valor inicial, que se chama capital (C), e depois, a cada unidade de tempo, sobre o montante (M) anterior da operação financeira. A taxa de juros é (i). Teremos:

$$M = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot \cdots$$

A multiplicação por $(1+i)$ ocorrerá t vezes:

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

Trabalharemos com um exemplo: "Uma dívida de R$1000,00 será paga com juros de 50% ao ano. Ela deverá ser quitada após um número inteiro de anos."(IEZZI et al., 2014, 346)

Os juros incidem sobre o valor inicial apenas no primeiro ano, em seguida, a cada ano, incidem sobre o montante do ano anterior (1,5 vez o montante anterior). Teremos uma sequência de montantes (1500; 2250; 3375; 5062,50; 7593,75; ...) que é uma progressão geométrica de razão $q = 1,5$ ($q = 1 + 0,5 = 1,5$). Teremos:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_n = 1500.1,5^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_n = 1500.\frac{1,5^n}{1,5} \Rightarrow$$

$$a_n = 1000.1,5^n$$

Observe que n é o tempo t, a razão $q = 1,5 = 1 + 0,5 = 1 + i$. O termo a_n é o montante M e $C = 1000$.

Um tipo de questão por vezes abordada no ensino médio, diz respeito a um problema fundamental na matemática financeira, que é o deslocamento de quantias no tempo. Morgado e Carvalho (2023) explicam que, em regime de juros compostos, um valor inicial C_0, após n períodos de tempo, com uma taxa i, se torna um montante $C_n = C_0(1 + i)^n$. Observe que temos uma PG, onde $q = 1 + i$. Estamos aqui nos referindo à equivalência de capitais. Para obter um valor no futuro, após n períodos de tempo, multiplicamos o valor atual por $(1 + i)^n$. Do contrário, para obter o valor atual, dividimos esse valor futuro por $(1 + i)^n$. Esse tipo de questão também fará parte deste trabalho, na parte de análise de questões, item 4.2.7.

"Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T, e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$,então $1 + I = (1 + i)^n$."(MORGADO; CARVALHO, 2023, 64)

Sendo C_0 o valor inicial de determinada grandeza, após um período T, o valor será $C_0(1 + I)^1 = C_0(1 + i)^n$. Observe que $(1 + i)$ é a razão q de uma progressão geométrica, sendo i a taxa de crescimento constante (taxa positiva), ou de decrescimento constante (taxa negativa) de cada termo para o termo seguinte.

Por exemplo, se uma pessoa tem $C_0 = 5000$ reais e ganha 1% ao mês sobre esse valor, $i = 1\% = 0,01$, $1 + i = 1 + 0,01 = 1,01$, após 3 meses ($T = 3$, $t = 1$) terá:

$$1 + I = (1 + i)^3 = 1,01^3 = 1,030301 \Rightarrow I = 0,030301 \Rightarrow I = 3,0301\%$$

$$5000 \times 1,030301 = 5151,505$$

A pessoa terá $R\$5151,50$. Se, ao contrário, perder 1% do valor ao mês ($1 + i = 1 - 0,01 = 0,99$), após 3 meses terá:

$$1 + I = (1 + i)^3 = 0,99^3 = 0,970299 \Rightarrow I = -0,029701 = -2,9701\%$$

$$5000 \times 0,970299 = 4851,495$$

A pessoa terá $R\$4851,49$.

4 Metodologia e análise de questões

4.1 Metodologia

Este trabalho é caracterizado como uma pesquisa qualitativa, pois analisa o comando das questões, a interpretação exigida, a presença ou ausência de contextualização, o rigor matemático e os conteúdos exigidos. A presente pesquisa tem caráter descritivo, e une a análise documental à didática da matemática.

Para a coleta de dados (questões) foram utilizados os seguintes livros:

- Fundamentos da Matemática Elementar volume 4 (IEZZI; HAZZAN, 2013)
- Matemática ciência e aplicações, volume 1 (IEZZI et al., 2014)
- Matemática discreta (SBM)(MORGADO; CARVALHO, 2023)
- Progressões e Matemática Financeira (MORGADO; WAGNER; ZANI, 1993)

Os dois primeiros livros já contêm diversas questões de vestibulares de universidades federais e estaduais e de instituições tradicionais do Brasil, além das questões próprias dos autores, estas presentes nas quatro obras. Além disso, questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) estão disponíveis no portal do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira). Também diversos sites de cursos preparatórios para concursos e vestibulares disponibilizam questões.

As questões selecionadas nesta pesquisa são próprias dos autores dos livros ou de processos de seleção dos últimos 20 anos, abordando especificamente progressões, em diferentes níveis de complexidade, sendo o conteúdo "progressões" associado ou não a outros conteúdos, com ou sem contextualização.

Para cada questão, será feita a categorização temática, observando se o problema trata de PA ou PG, quais os outros conteúdos envolvidos (quando presentes), verificação se o comando da questão exige apenas a aplicação direta da teoria ou se há necessidade de tradução para linguagem matemática a partir de um texto. Será feita também a resolução comentada, com desenvolvimento de raciocínio lógico matemático, e observações importantes e comparações com outras questões, quando couber.

4.2 Análise de questões

4.2.1 Questão 1 - uma aposta em uma antiga moeda brasileira

A primeira questão foi selecionada na obra de Morgado, Wagner e Zani (1993), observado que se trata de um curioso exemplo de progressão geométrica, que possui duas diferentes razões. Aborda uma situação de aposta feita em moeda brasileira antiga, o cruzeiro. A questão diz que Vera, iniciando com o valor de Cr$ 64.000,00 em dinheiro, faz seis apostas consecutivas. Em cada aposta arriscou ganhar ou perder a metade do que possuía na ocasião. Sabendo-se que ganhou três apostas, e perdeu também três apostas, pode-se afirmar que ela:

a. Ganhou dinheiro.

b. Nem ganhou nem perdeu dinheiro.

c. Ganhou ou perdeu dinheiro, dependendo da ordem em que se sucederam suas vitórias e derrotas.

d. Perdeu Cr$ 27.000,00

e. Perdeu Cr$ 37.000,00

É claramente uma questão contextualizada, demanda a interpretação de um texto e uma tradução para linguagem matemática. Para a resolução, deve-se saber que cada termo de uma PG, a partir do segundo, é dado pelo produto do termo anterior por uma constante. Nesse caso, duas constantes estão envolvidas, e ocorrem 3 vezes cada uma, em qualquer ordem, já que a questão fala em "ganhar ou perder metade do que possuía na ocasião", e que "ganhou três e perdeu três". A pessoa que resolve a questão precisa observar um conhecimento básico: "a ordem dos fatores não altera o produto".

Também convém observar que, nos ganhos, a razão é um fator de acréscimo, $q_1 = 1 + 0,5 = 1,5$, e nas perdas, temos um fator de decréscimo, $q_2 = 1 - 0,5 = 0,5$. Podemos ter, chamando de V o valor final que Vera possui após as apostas:

$$V = 64000 \times q_1 \times q_2 \times q_1 \times q_1 \times q_2 \times q_2$$

Ou:

$$V = 64000 \times q_2 \times q_2 \times q_1 \times q_1 \times q_1 \times q_2$$

Ou qualquer outra ordem de ganhos e perdas. E em todas as possibilidades teremos:

$$V = 64000 \times q_1^3 \times q_2^3 \Rightarrow$$

$$V = 64000 \times 1,5^3 \times 0,5^3 \Rightarrow$$

$$V = 27000$$

E então, se iniciou com 64000 e terminou com 27000, temos $64000 - 27000 = 37000$. O que significa que houve uma perda de Cr$ 37.000,00 e a resposta correta é a alternativa e.

Como se trata de uma questão de múltipla escolha, um erro comum seria marcar a alternativa d., que é o valor que Vera possui ao final das apostas, e não o valor perdido, ou seja, responder corretamente demandará atenção a isso. Caso o estudante não tenha os conhecimentos básicos para a resolução, poderá considerar que a ordem de vitórias e derrotas importa, marcando então a alternativa c.

Essa questão pode ser considerada de baixa complexidade para o ensino médio, no caso de estudantes com conhecimento em nível ideal para essa etapa de ensino.

4.2.2 Questão 2 - O papiro Rhind

A seguinte questão vem do vestibular da UFF - RJ (Universidade Federal Fluminense), do ano de 2011, trazida por Iezzi et al. (2014): ao se fazer um exame histórico da presença africana no desenvolvimento do pensamento matemático, os indícios e vestígios remetem à matemática egípcia, sendo o papiro de Rhind um dos documentos que resgatam essa história. Nele é encontrado o seguinte problema:

"Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores."Coube ao homem que recebeu a parte maior da divisão acima a quantidade de:

a. $\frac{115}{3}$ pães

b. $\frac{55}{6}$ pães

c. 20 pães

d. $\frac{65}{6}$ pães

e. 35 pães

O próprio enunciado deixa claro que se trata de uma questão de progressão aritmética. Demanda também a tradução de um texto para linguagem matemática e é apresentado um contexto histórico.

Para a resolução, é possível considerar uma PA de $n = 5$ termos cuja soma $S_5 = 100$. Pode ser representada por $(x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r)$. De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{x + x + r + x + 2r}{7} = x - 2r + x - r \Rightarrow$$

$$3x + 3r = 7(2x - 3r) \Rightarrow$$

$$24r = 11x \Rightarrow$$

$$r = \frac{11x}{24}$$

Dessa forma teremos a seguinte PA:

$$\left(\frac{2x}{24}, \frac{13x}{24}, \frac{24x}{24}, \frac{35x}{24}, \frac{46x}{24}\right)$$

Considerando (sendo a_1 o primeiro termo e a_5 o quinto termo) que:

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \times 5}{2} = 100$$

Temos então:

$$\frac{(\frac{2x}{24} + \frac{46x}{24}) \times 5}{2} = 100 \Rightarrow$$

$$10x = 200 \Rightarrow$$

$$x = 20$$

Coube ao homem com a parte maior da divisão:

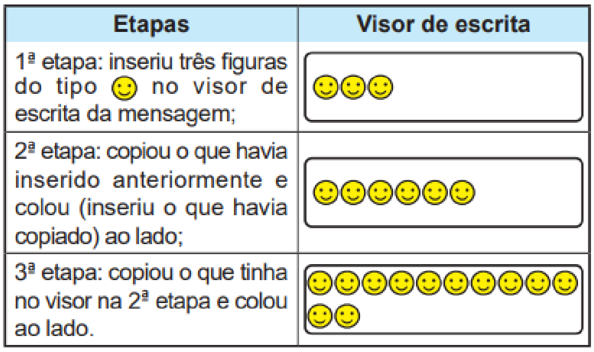
$$\frac{46 \times 20}{24} = \frac{115}{3}$$

A resposta é apresentada no item a. É necessário gerar uma equação que dê o valor da razão r em função de x. Para encontrar x, não é obrigatório conhecer a fórmula da soma dos termos de uma PA. É possível observar que $x-2r+x-r+x+x+r+x+2r = 5x = 100$. Também é necessário realizar operações corretamente, inclusive com números racionais. Podem ocorrer erros ao gerar a equação relacionando r a x, ou eventualmente erros nos cálculos, dificultando a resolução da questão. Pode ser considerado um problema de médio rigor para o ensino médio, e seu acerto ser um diferencial para o sucesso no vestibular.

4.2.3 Questão 3 - Criança brinca no aplicativo

O INEP (2024), trouxe no ENEM 2024 a seguinte questão: uma criança, utilizando um aplicativo, escreveu uma mensagem para um amigo. Essa mensagem foi escrita seguindo as etapas da figura 5.

Figura 5 – Etapas da escrita da mensagem



Etapas	Visor de escrita
1ª etapa: inseriu três figuras do tipo no visor de escrita da mensagem;	
2ª etapa: copiou o que havia inserido anteriormente e colou (inseriu o que havia copiado) ao lado;	
3ª etapa: copiou o que tinha no visor na 2ª etapa e colou ao lado.	

Fonte: ENEM - (INEP, 2024)

A criança seguiu copiando e colando, em cada etapa, o que tinha no visor na etapa imediatamente anterior, até concluir a vigésima etapa. Em seguida, enviou a mensagem. Qual foi o total de figuras contidas na mensagem enviada?

a. 3×2^{19}

b. 3×2^{20}

c. 3×2^{21}

d. $3 \times 2^{20} - 1$

e. $3 \times 2^{20} - 3$

A questão trata de uma progressão geométrica, e as alternativas mostram com clareza leis de formação de funções exponenciais. A PG aparece no contexto de uma escrita de mensagem eletrônica. É necessário o conhecimento do termo geral da PG: $a_n = a_1.q^{n-1}$. Para responder, o estudante precisará também interpretar o texto e convertê-lo em uma equação do termo geral, porém não há aqui a necessidade de conhecimentos mais aprofundados sobre progressão geométrica. Questões do ENEM, em sua maioria, têm características semelhantes às da presente questão.

Sendo $a_1 = 3$ (inseridas inicialmente 3 figuras), e $q = 2$ (processo de copiar e colar duplica a mensagem a cada etapa), teremos:

$$a_{20} = a_1 \times q^{20-1} \Rightarrow$$

$$a_{20} = 3 \times 2^{19}$$

Obtemos assim a resposta do item a. Um possível erro poderia induzir o estudante a marcar o item d., utilizando equivocadamente $a_n = a_1.q^n - 1$.

4.2.4 Questão 4 - O perímetro do triângulo

Essa questão, de Iezzi e Hazzan (2013), aborda PA no contexto da geometria, exigindo o conhecimento do conceito de perímetro para sua resolução completa, além de conhecimento de resolução de equação do segundo grau. Não é uma questão de múltipla escolha. Diz que as medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x+1$, $2x$ e x^2-5, e estão em PA, nessa ordem. Solicita o cálculo do perímetro do triângulo.

Para a resolução é fundamental lembrar que a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo imediatamente anterior, é uma constante. Assim sendo:

$$2x-(x+1)=x^2-5-2x \Rightarrow$$

$$x-1=x^2-5-2x \Rightarrow$$

$$x^2-3x-4=0$$

A equação do segundo grau obtida tem duas raízes, cuja soma é 3 e cujo produto é -4. São elas: 4 e -1. Porém, para $x=-1$ teríamos medida de lado do triângulo com valor negativo. Ficaremos então com $x=4$. Os lados medirão:

$$4+1=5$$

$$2\times 4=8$$

$$4^2-5=16-5=11$$

Observe que, de fato, (5,8,11) é uma PA de razão $r=3$. Sabendo que o perímetro $2p$ é a soma das medidas dos lados, teremos, $2p=5+8+11=24$. Pode ser avaliada como uma questão de baixo rigor para o ensino médio. Aqui, o comando da questão exige a aplicação direta da teoria relacionada ao problema.

4.2.5 Questão 5 - Uma prova complexa

Iezzi e Hazzan (2013, 36), trazem o problema: prove que em toda PG $S_n^2+S_{2n}^2=S_n.(S_{2n}+S_{3n})$. Esse tipo de problema, livre de qualquer contexto, solicita uma prova, baseada em aplicação direta de conhecimentos sobre PG. Pode ser considerado um problema de alta complexidade para o ensino médio. Sendo $q\neq 1$:

$$S_n^2+S_{2n}^2=S_n^2+\left[\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}\right]^2$$

$$=S_n^2+\left[\frac{a_1(q^n-1)(q^n+1)}{q-1}\right]^2$$

$$= S_n^2 + S_n^2 \times (q^n + 1)^2 = S_n^2 \times [(q^n + 1)^2 + 1]$$

$$= S_n \times \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \times (q^{2n} + 2q^n + 2)$$

$$= S_n \times \frac{a_1}{q - 1} \times (q^{3n} + 2q^{2n} + 2q^n - q^{2n} - 2q^n - 2)$$

$$= S_n \times \frac{a_1}{q - 1} \times (q^{3n} - 1 + q^{2n} - 1)$$

$$= S_n \times \left[\frac{a_1(q^{3n} - 1)}{q - 1} + \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}\right]$$

$$= S_n(S_{2n} + S_{3n})$$

E sendo $q = 1$, teremos todos os termos iguais ao primeiro $a_n = a_1$. Assim, $2S_n = S_{2n}$ e $3S_n = S_{3n}$. E então:

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n \cdot S_n + S_{2n} \cdot S_{2n}$$

$$= S_n \cdot S_n + 2S_n \cdot 2S_n = S_n \cdot S_n + 4S_n^2$$

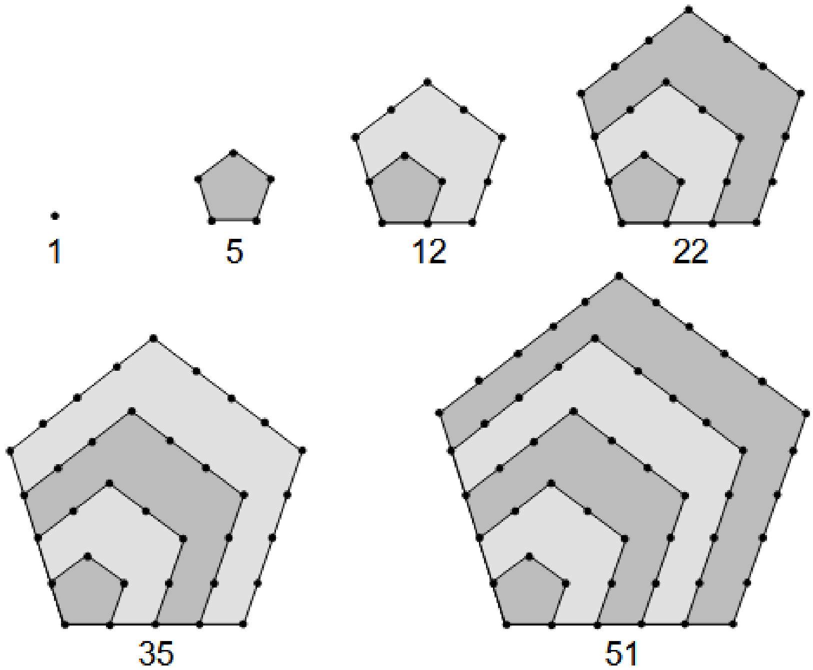
$$= S_n(S_n + 4S_n) = S_n(2S_n + 3S_n) = S_n(S_{2n} + S_{3n})$$

Além de conhecer a soma dos termos da PG finita, para atender ao comando da questão precisa-se saber desenvolver diferença de quadrados, quadrado da soma e fazer toda a manipulação como mostrado no desenvolvimento acima. Apesar de ser uma questão de lista de exercícios de uma obra voltada ao ensino médio, não costuma ser cobrada dos estudantes, ficando como atividade complementar.

4.2.6 Questão 6 - Os números pentagonais

No ENEM 2023 foi cobrada a seguinte questão pelo INEP (2023): os números figurados pentagonais foram provavelmente introduzidos por pitagóricos no século V a.C. A figura 6 mostra como obter os seis primeiros números, sendo os seguintes obtidos pelo mesmo padrão geométrico.

Figura 6 – Números pentagonais



Fonte: ENEM - (INEP, 2023)

O oitavo número pentagonal é:

a. 59

b. 83

c. 86

d. 89

e. 92

Aqui se apresenta uma progressão aritmética de segunda ordem. Observamos que $5 - 1 = 4$, $12 - 5 = 7$, $22 - 12 = 10$, $35 - 22 = 13$, $51 - 35 = 16$. A sequência $(a_n) = (4, 7, 10, 13, 16)$ é uma PA de razão $r = 3$. Temos $a_5 = 16$ (quinto intervalo entre os números pentagonais) e queremos a_6 e a_7 (sexto e sétimo intervalos). É possível fazer $a_6 = a_5 + 3$ e $a_7 = a_6 + 3$, e então teremos $a_6 = 16 + 3 = 19$ e $a_7 = 19 + 3 = 22$.

O sétimo número pentagonal será $51 + 19 = 70$, e o oitavo, pedido na questão, será $70 + 22 = 92$, cuja alternativa é a letra e.

A questão fala dos pitagóricos e traz um contexto histórico. Exige a percepção de que, nos intervalos entre os números é que existe uma progressão aritmética, podendo ser considerada uma questão de baixa/média complexidade. O candidato pode observar as figuras, e perceber que a diferença entre os números é sempre 3 unidades maior a cada intervalo, sem necessariamente conhecer progressões aritméticas, ou observando os números abaixo das figuras, ou observando mais um contorno com 3 bolinhas a mais que o contorno interno, no número seguinte, na própria figura. Ou seja, não demanda, necessariamente, conhecimentos teóricos. Um possível equívoco que levaria a marcar a alternativa incorreta, seria somar 16 à sexta figura, e depois mais 16, tendo como resultado 83, caso o estudante observe apenas o último intervalo mostrado.

Outra forma de resolução pode ocorrer, como trazem Lima et al. (2004), pois o enésimo número pentagonal P_n é dado pela soma de uma progressão aritmética, em função do número triangular T_{n-1}. Isso está de acordo com o que foi explicado por Morgado e Carvalho (2023), que uma sequência cujo termo de ordem n é soma de n primeiros termos de uma PA de ordem p, é uma PA de ordem $p + 1$. A fórmula do número triangular T_n(soma dos termos de uma PA) é explicada logo abaixo da figura 2.

$$P_n = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2)$$

$$= \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{3n(n-1)}{2}$$

$$= n + \frac{3n(n-1)}{2} = n + 3T_{n-1}$$

Nesse caso, teremos $P_8 = 8 + 3T_7$, e como $T_7 = \frac{(1+7)\times 7}{2} = 28$, concluímos que $P_8 = 8 + 3 \times 28 = 92$.

Não é obrigatório fazer o cálculo em função de um número triangular. Quando obtemos $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, já podemos fazer $n = 8$ e calcular.

Uma observação cabível é que todos os polígonos regulares têm relação com progressões aritméticas de ordens superiores.

4.2.7 Questão 7 - Quitação antecipada de dívida

Na prova do ENEM de 2017, o INEP (2017) abordou o seguinte: um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, a juros compostos, em 8 parcelas fixas iguais a P. O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a quinta parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a sexta parcela. A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação é:

a.
$$P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$$

b.
$$P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{2i}{100})}\right]$$

c.
$$P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$$

d.
$$P\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{2i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{3i}{100})}\right]$$

e.
$$P\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^3}\right]$$

As questões relacionadas à matemática financeira, que abordam juros compostos (tema ligado a progressão geométrica) e esse deslocamento de quantias no tempo, apontam em geral uma data focal. A questão apontou a data do pagamento da sexta parcela. Portanto, a sexta parcela será P, não será multiplicada ou dividida por nenhum número. Já as duas parcelas seguintes serão adiantadas, são valores P no futuro, um deles após 1 mês, o outro após 2 meses.

Portanto, para obter o valor atual, a sétima será dividida por $(1+i\%)^1$, e a oitava será dividida por $(1+i\%)^2$, o que nos leva à alternativa a. Dessa forma, o valor da quitação será:

$$P+\frac{P}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{P}{(1+\frac{i}{100})^2}$$

E apenas colocando P em evidência, obtemos a resposta.

A questão demanda especificamente o conhecimento do deslocamento de quantias no tempo relacionado aos juros compostos. O conhecimento sobre valores no presente e no futuro ajudam a tomar decisões financeiras. Se tenho uma dívida de 100 reais, e houver a possibilidade de esse dinheiro render 10% ao mês, é mais vantajoso eu pagar 107 reais daqui a um mês que pagar 100 reais agora. Mas se em um mês minha dívida será de 115 reais, é mais vantajoso pagar logo 100 reais.

Para estudantes com nível de conhecimento ideal para o ensino médio, a questão é bastante simples de responder. No entanto, caso, por exemplo, o estudante não perceba que a sexta parcela não está sendo adiantada, e sim sendo paga na data prevista, pode marcar equivocadamente a letra e.

O contexto da matemática financeira é muito importante, com conhecimentos sobre situações que fazem parte da realidade de qualquer pessoa. Essa equivalência de capitais também é abordada com exemplos no trabalho de Favero (2024).

4.2.8 Questão 8 - Progressão aritmética no vestibular do ITA

O Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), no vestibular de 2010, elaborou a seguinte questão, também trazida na seção de questões de vestibulares de Iezzi e Hazzan (2013): considere a PA $(a_1, a_2, ..., a_{50})$ de razão d; se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é:

a. 3

b. 6

c. 9

d. 11

e. 14

Temos aqui uma questão de progressão aritmética não contextualizada, para aplicação direta de conteúdos relacionados. Temos o valor de $S_{50} = 4550$ dessa PA:

$$4550 = \frac{(a_1 + a_{50}) \times 50}{2} \Rightarrow$$

$$a_1 + a_{50} = 182 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_1 + 49d = 182 \Rightarrow$$

$$2a_1 + 49d = 182$$

Temos também que $S_{10} = 10 + 25d$:

$$\frac{(a_1 + a_{10}) \times 10}{2} = 10 + 25d \Rightarrow$$

$$a_1 + a_1 + 9d = 2 + 5d \Rightarrow$$

$$2a_1 + 4d = 2 \Rightarrow$$

$$a_1 + 2d = 1$$

Substituindo o valor de $a_1 = 1 - 2d$ em $2a_1 + 49d = 182$:

$$2 - 4d + 49d = 182 \Rightarrow$$

$$45d = 180 \Rightarrow$$

$$d = 4$$

E então:

$$a_1 + 2 \times 4 = 1 \Rightarrow$$

$$a_1 = -7$$

O comando da questão pede $d - a_1$, que será $4 - (-7) = 4 + 7 = 11$. A alternativa correta será a d.

A questão demanda conhecimento sobre soma dos termos de PA, saber reescrever cada termo em função de a_1 e de sua posição na sequência, e resolução de sistema de equações com duas equações e duas variáveis. O vestibular do ITA costuma ter um nível de dificuldade maior que o da maioria dos vestibulares, porém esse não é um exemplo dos mais difíceis que a instituição cobra.

4.2.9 Questão 9 - Proporção áurea

Na prova de matemática do ENEM 2021, o INEP (2021) aplicou uma questão interessante, que aborda progressão geométrica, sem que o assunto esteja expressamente mencionado. O problema requer a percepção da necessidade de utilizar a igualdade que o enunciado fornece. Eis o problema: um segmento de reta está dividido em duas partes na proporção áurea, quando o todo está para uma das partes na mesma razão em que essa parte está para a outra. Essa constante de proporcionalidade é representada pela letra ϕ, e seu valor é dado pela solução positiva de $\phi^2 = \phi + 1$. As potências superiores de ϕ também podem ser expressas da forma $a\phi + b$, em que a e b são inteiros positivos, como apresentado abaixo na tabela 1:

Tabela 1 – Potências de ϕ

ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7
$\phi + 1$	$2\phi + 1$	$3\phi + 2$	$5\phi + 3$	$8\phi + 5$	...

Fonte: ENEM - (INEP, 2021)

A potência ϕ^7, na forma $a\phi + b$ (a e b inteiros positivos), é:

a. $5\phi + 3$

b. $7\phi + 2$

c. $9\phi + 6$

d. $11\phi + 7$

e. $13\phi + 8$

O problema inicia falando a respeito da proporção áurea, e sobre o que ela representa. Apresenta a igualdade $\phi^2 = \phi + 1$. Essa igualdade é o ponto chave para a resolução, e ϕ funciona como uma razão de uma PG apresentada ao longo da tabela, já que a cada coluna, o item da coluna anterior é multiplicado por ϕ, da forma como definiu Morgado e

Carvalho (2023), quando disse que para avançar um termo, basta multiplicar pela razão. Então:

$$\phi^3 = \phi \times \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$

$$...$$

$$\phi^6 = \phi \times \phi^5 = \phi(5\phi + 3) = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5$$

E, portanto,

$$\phi^7 = \phi \times \phi^6 = \phi(8\phi + 5) = 8\phi^2 + 5\phi = 8(\phi + 1) + 5\phi = 13\phi + 8$$

A resolução aponta a alternativa e. O problema possui um nível médio de dificuldade e demanda uma boa interpretação.

A dissertação de mestrado de Santos (2013) traz uma boa explicação sobre como foi obtido o número ϕ. Tendo um segmento de reta $\overline{AB}$, procura-se um ponto C que divida o segmento em duas partes, extrema e média. Para isso é necessário considerar:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi$$

Considerou então $AB = x$ e $AC = y$, tendo $BC = x - y$ e portanto:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x - y} = \phi \Rightarrow$$

$$y^2 = x^2 - xy$$

O valor positivo da resolução de $x^2 - xy - y^2 = 0$ será $x = \frac{(1+\sqrt{5})y}{2}$, e, portanto,

$$\frac{x}{y} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mas a partir daí, tomando novamente a equação $y^2 = x^2 - xy$, dividindo-a por y^2, teremos:

$$1 = \phi^2 - \phi \Rightarrow$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

E observamos que obtivemos a equação trazida no enunciado da questão.

4.2.10 Questão 10 - O Triângulo de Sierpinsky

Esse é um problema aplicado na prova do vestibular da Universidade Federal de Uberlândia em 2012, e também está na obra de Iezzi et al. (2014).

Os "fractais" são criados a partir de funções matemáticas cujos cálculos são transformados em imagens. Geometricamente são criados fazendo divisões sucessivas de uma figura em partes semelhantes à figura original. O Triângulo de Sierpinsky é obtido por meio do seguinte processo recursivo, ilustrado na Figura 7:

Figura 7 – Triângulo de Sierpinsky

Fonte: Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski>. Acesso em 01 fev 2026.

- Considerando um triângulo equilátero de $1cm^2$ de área (primeiro triângulo da figura 7 - figura original). Na primeira iteração (segundo triângulo da figura 7), divida em quatro triângulos equiláteros idênticos e retire o triângulo central (os 3 triângulos em preto restantes na iteração 1 são semelhantes ao triângulo original).
- Na iteração 2 (terceiro triângulo da figura 7) repita o procedimento em cada um dos três triângulos pretos da primeira iteração, e assim por diante.

Considerando um triângulo preto em cada iteração (da 1 até a N), e sabendo que o produto dos valores numéricos das áreas desses triângulos é igual a $\frac{1}{2^{240}}$, então N:

a. é um número primo.

b. é múltiplo de 2.

c. é um quadrado perfeito.

d. é divisível por 3.

Com a interpretação correta do problema, e sua tradução adequada para linguagem matemática, nota-se que se trata de produto P_n de n termos iniciais de uma progressão geométrica:

$$P_n = a_1^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Se a área do triângulo original é 1, a área de um triângulo preto da primeira iteração é $\frac{1}{4}$, então $a_1 = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{1}{4}$. Deve-se tomar o cuidado de não considerar equivocadamente $a_1 = 1$, pois a_1 se refere à área de um triângulo preto da primeira iteração, e não à área do triângulo original (eu mesma cometi esse erro, o que faz marcar a alternativa incorreta). Temos também, no caso, $n = N$. Assim:

$$P_N = a_1^N \times q^{\frac{N(N-1)}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2^{240}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{N} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Rightarrow$$

$$2^{-240} = (2^{-2})^{N} \times (2^{-2})^{\frac{N(N-1)}{2}} \Rightarrow$$

$$2^{-240} = 2^{-2N} \times 2^{N(1-N)} \Rightarrow$$

$$2^{-240} = 2^{-2N+N-N^2} \Rightarrow$$

$$N^2 + N - 240 = 0$$

Temos, na resolução da equação: $\Delta = 1 + 960 = 961$. E então: $\sqrt{\Delta} = 31$. Sabemos que N deve ser positivo por se referir a uma área: $N = 15$.

N é divisível por 3, alternativa d. Esse problema pode ser considerado de grau médio/alto de dificuldade devido às várias etapas do raciocínio e da resolução, envolvendo inclusive equação exponencial e do segundo grau. O erro que mencionei ter cometido mudaria a equação de segundo grau e levaria à alternativa c, pois nesse caso teríamos $N = 16$, um quadrado perfeito.

4.2.11 Questão 11 - Progressão aritmética e soma dos termos, aplicação direta

Uma questão não contextualizada do vestibular UNICAMP (2024) comanda: seja (a_n)=$(a_1, a_2, a_3, ...)$ com $n \in \mathbb{N}$ uma progressão aritmética de razão r, e seja $(s_1, s_2, s_3, ...)$ a sequência definida por $s_n = a_1 + ... + a_n$, isto é, o seu enésimo termo é a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n). Sabendo que 168, 220, e 279 são termos consecutivos de (s_n), $n \in \mathbb{N}$, a razão de (a_n) é:

a. 5

b. 7

c. 9

d. 11

O problema exige conhecimento de soma dos termos de PA e resolução de sistema de equações. Considerando os itens:

1. $$s_{n-1} = 168 = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-2)r)(n-1)}{2}$$

2. $$s_n = 220 = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}$$

3.
$$s_{n+1} = 279 = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + nr)(n+1)}{2}$$

Teremos:

1.
$$2a_1n + n^2r - 3nr - 2a_1 + 2r = 336$$

2.
$$2a_1n + n^2r - nr = 440$$

3.
$$2a_1n + n^2r + 2a_1 + nr = 558$$

Fazendo a subtração item 2 - item 3 temos $-2a_1 - 2nr = -118$ e utilizando essa igualdade no item 1 teremos:

1.
$$2a_1n + n^2r - nr + 2r = 454$$

2.
$$2a_1n + n^2r - nr = 440$$

Por fim, utilizando o item 2 no item 1: $440 + 2r = 454 \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = 7$. A resposta será então a alternativa b. Nesse problema fazemos a aplicação direta da teoria, pois o comando da questão é direto. Erros podem ocorrer nos cálculos, a resolução do sistema exige atenção. É uma resolução trabalhosa e pode ser considerada de nível médio de dificuldade.

4.2.12 Questão 12 - Progressão aritmética e progressão geométrica, aplicação da teoria básica

A UNICENTRO (2019) aplicou no vestibular a seguinte questão: a sequência crescente $(2, x, y, ...)$ forma, nesta ordem, uma progressão aritmética, e a sequência $(\frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{8+y})$ forma, nesta ordem, uma progressão geométrica decrescente. A razão da progressão geométrica é:

a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{3}{4}$

c. $\frac{3}{5}$

d. $\frac{1}{2}$

e. $\frac{1}{3}$

Para iniciar essa resolução, sendo a primeira sequência uma PA, $y - x = x - 2 \Rightarrow 2x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2}$, o que significa que $\frac{1}{x} = \frac{2}{y+2}$. Na PG teremos:

$$\frac{\frac{1}{8+y}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}}$$

Substituindo $\frac{1}{x}$ por $\frac{2}{y+2}$:

$$\left(\frac{2}{y+2}\right)^2 = \frac{1}{2(8+y)} \Rightarrow$$
$$\frac{4}{y^2+4y+4} = \frac{1}{16+2y} \Rightarrow$$
$$64 + 8y = y^2 + 4y + 4 \Rightarrow$$
$$y^2 - 4y - 60 = 0$$
$$\Delta = 16 + 240 = 256 \Rightarrow$$
$$\sqrt{\Delta} = 16$$

O valor deve ser $y > 2$, então $y = 10$, o que implica $x = 6$. A razão da PG será dada por:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

.

A resposta está na alternativa e. Uma solução simples utilizando os conceitos de razão da PA e da PG, crescimento e decrescimento. Sabemos, por exemplo, que $y > 2$ pelo fato de a PA ser crescente. Erros podem ocorrer nos cálculos, ou por desconhecimento da teoria básica.

4.2.13 Questão 13 - Evolução das vendas

No ENEM, o INEP (2023) apresentou o seguinte: O gerente de uma fábrica quer comparar a evolução das vendas de dois produtos similares (I e II). Então passou a verificar o número de unidades vendidas de cada um deles em cada mês. Os resultados para os meses de abril a junho são apresentados na tabela 2:

Tabela 2 – Evolução das vendas

Produto	**Vendas abril (unid)**	**Vendas maio (unid)**	**Vendas junho (unid)**
I	80	90	100
II	190	170	150

Fonte: (INEP, 2023).

O gerente decidiu cessar a produção do produto II no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II. Suponha que a variação na quantidade de unidades vendidas dos produtos I e II se manteve, mês a mês, como no período representado na tabela.

Em qual mês o produto II parou de ser produzido?

a. junho

b. julho

c. agosto

d. setembro

e. outubro

Ao observar a tabela, rapidamente são identificadas duas progressões aritméticas. A primeira, na primeira linha, crescente de razão $r_1 = 10$; a segunda, na segunda linha, decrescente de razão $r_2 = -20$. É o que se espera do estudante razoavelmente preparado, para iniciar o raciocínio da questão. Não é necessário, para quem resolve a questão de múltipla escolha, fazer complexos cálculos, logo se nota que a primeira linha continua com 110 e, em seguida, 120, e a segunda linha continua com 130 e, em seguida, 110. Em agosto terá ocorrido a ultrapassagem, passando a ser o produto I o mais vendido (120 contra 110). O comando da questão fala que a cessação da produção do produto II ocorrerá no mês seguinte a essa ultrapassagem. Então, a resposta será setembro.

É uma questão contextualizada, envolvendo a produção e as decisões de uma fábrica, e tem um nível baixo de dificuldade. É necessário converter o contexto em linguagem de PA. Para formalizar esse resultado, poderíamos fazer (sendo n o número de meses desde abril até a ultrapassagem):

$$80 + (n-1).r_1 > 190 + (n-1).r_2 \Rightarrow$$

$$80 + (n-1) \times 10 > 190 + (n-1) \times (-20) \Rightarrow$$

$$70 + 10n > 210 - 20n \Rightarrow$$

$$30n > 140 \Rightarrow$$

$$n > 4,6$$

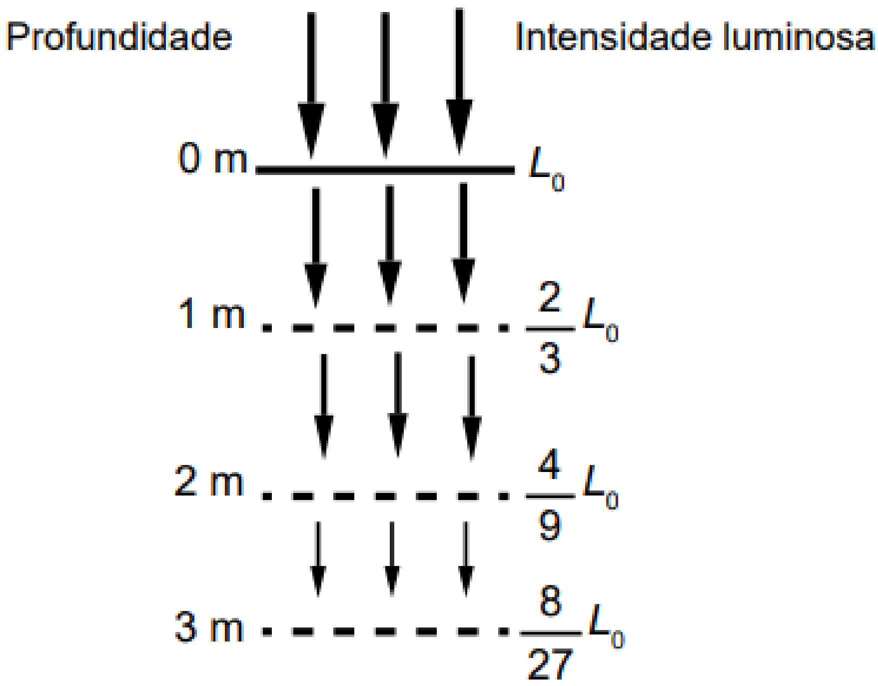
O primeiro número inteiro maior que $4,6$ é 5. Se $n = 1$ corresponde a abril, $n = 5$ corresponde a agosto, mês da ultrapassagem. Após agosto virá setembro, a resposta da questão.

Um possível erro seria o estudante não observar, no comando da questão, a frase "no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II", e então marcar a alternativa correspondente a agosto. Também são possíveis os erros de interpretação, não conseguir desenvolver o raciocínio e até mesmo o estudante não conhecer a sequência dos meses do ano, o que também já foi observado na prática.

4.2.14 Questão 14 - Intensidade luminosa e profundidade

No ENEM, o INEP (2023) cobrou a seguinte questão: o esquema (figura 8) mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L_0 a intensidade na superfície.

Figura 8 – Intensidades luminosas



Fonte: (INEP, 2023)

Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o padrão do esquema da figura 8. A intensidade luminosa correspondente à profundidade de $6m$ é igual a:

a. $\frac{1}{9}L_0$

b. $\frac{16}{27}L_0$

c. $\frac{32}{243}L_0$

d. $\frac{64}{729}L_0$

e. $\frac{128}{2187}L_0$

A questão já afirma que a intensidade decresce com a profundidade, já mostra que existe ali uma sequência decrescente. E qual seria então essa sequência? Os números que multiplicam L_0 são: $(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, ...)$. Aqui se apresenta uma progressão geométrica de razão $q = \frac{2}{3}$. O sétimo termo da progressão (a_7) corresponderá à profundidade de $6m$.

$$a_7 = a_1.q^{7-1} \Rightarrow$$

$$a_7 = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow$$

$$a_7 = \frac{64}{729}$$

Temos uma questão contextualizada, com resposta alternativa d. O problema demanda interpretação, converter todo o contexto em linguagem de progressão geométrica. E para isso, é necessário perceber na figura, a razão $q = \frac{2}{3}$. Esse talvez seja o ponto mais difícil do raciocínio para o estudante do ensino médio, mas podemos considerar uma questão de nível médio de dificuldade. É semelhante à questão sobre evolução das vendas, porém em vez de PA, temos uma PG.

A atenuação exponencial da intensidade luminosa em profundidades é abordada no trabalho de Vieira (2020), no capítulo 3.

4.2.15 Questão 15 - PG no triângulo retângulo

A UECE (2016) trouxe uma interessante questão: se as medidas de comprimento dos lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente, então a razão dessa progressão é igual a:

a. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

b. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

c. $\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}}$

d. $\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}}$

Notamos que o problema demanda conhecimentos sobre progressão geométrica, triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras. A questão chama a atenção por uma peculiaridade: não traz qualquer valor numérico em seu enunciado, mas sua resposta é necessariamente um valor numérico. No triângulo retângulo, assim como em qualquer triângulo, o maior lado é oposto ao maior ângulo, portanto, a hipotenusa, que é oposta ao ângulo reto, é o maior lado. Considerando q a razão podemos escrever a PG da seguinte forma:

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$$

Onde xq corresponde à hipotenusa, $x > 0$ e $q > 1$. Então teremos, pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2q^2 = x^2 + \frac{x^2}{q^2} \Rightarrow$$

$$x^2q^4 = x^2q^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$q^4 = q^2 + 1$$

Utilizando aqui uma variável substituta $m = q^2$ temos:

$$m^2 = m + 1 \Rightarrow m^2 - m - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

E então:

$$m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Observe que não consideramos o valor negativo, m é um quadrado, e também q é um valor positivo na questão. Seguindo:

$$q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Temos como resposta a alternativa b. O problema tem médio/alto nível de dificuldade e demanda completamente a tradução do enunciado para a linguagem matemática, no contexto da geometria. Notamos também, na resolução, o surgimento de equação quadrática (após uma substituição de variável, pois a equação era inicialmente de grau 4), assim como ocorreu em outras questões deste trabalho.

4.2.16 Questão 16 - O logaritmo da soma da PG na base a

O problema da UECE (2019) diz que S é a soma dos termos da progressão geométrica $(x_1, x_2, x_3, ...)$, cuja razão é q, sendo $0 < q < 1$. Se $x_1 = a$, $a > 0$ e $a \neq 1$, o valor de $\log_a S$ é:

a. $a + \log_a(1 - q)$

b. $a - \log_a(1 - q)$

c. $1 + \log_a(1 - q)$

d. $1 - \log_a(1 - q)$

A questão dá diversos dados ao ser interpretada: temos uma progressão geométrica decrescente, de termos positivos e infinita. O problema aponta tudo isso ao nos dizer o intervalo de q e que $a > 0$ (primeiro termo), inclusive porque a deve ser maior que zero e diferente de 1 por ser base do logaritmo. Toda essa interpretação é necessária e todo esse conhecimento teórico é demandado. Neste trabalho, trouxemos a fórmula da soma de infinitos termos desse tipo de PG, que aplicada ao problema, nos dá:

$$S = \frac{x_1}{1-q}$$

Ou,

$$S = \frac{a}{1-q}$$

E então:

$$\log_a S = \log_a \left(\frac{a}{1-q}\right) = \log_a a - \log_a(1-q) = 1 - \log_a(1-q)$$

A resposta é a alternativa d. Na resolução, aparecem também propriedades de logaritmos. A questão pode ser considerada de média dificuldade, se considerarmos um estudante com preparo ideal para o ensino médio.

4.2.17 Questão 17 - O resto das divisões

Morgado e Carvalho (2023) apresentam a seguinte questão: calcule a soma de todos os inteiros que divididos por 11 dão resto 7 e estão compreendidos entre 200 e 400.

Esse problema não é de múltipla escolha e exige conhecimento de aritmética de divisão euclidiana, e demanda também a capacidade de fazer uma conexão das divisões com a progressão aritmética.

Deve-se identificar o primeiro e o último termos da PA em questão. Com alguns cálculos isso é possível, se por exemplo divido 399 por 11 tenho $399 = 11 \times 36 + 3$ (resto 3). Preciso de um número menor, o primeiro inteiro menor que 399, que ao ser dividido por 11 dará resto 7 será o 392, desta forma: $392 = 11 \times 35 + 7$. Basta relacionar cada inteiro 1 unidade menor, partindo de 399, aos restos correspondentes, dentro dos possíveis valores para o resto (de 0 a 10). Ou escrever:

$$399 = 11 \times 36 + 3 = 11 \times 35 + 14 \Rightarrow$$

$$399 - 7 = 11 \times 35 + 7 \Rightarrow$$

$$392 = 11 \times 35 + 7$$

Procedendo de forma análoga, temos $201 = 11 \times 18 + 3$, então o primeiro termo da PA será 205, pois $205 = 11 \times 18 + 7$. Os inteiros na PA em questão serão da forma:

$$I = 11x + 7$$

A razão da PA, pelo que observamos, será $r = 11$. E quantos termos essa PA terá? Fazemos $392 - 205 = 187$ e $\frac{187}{11} = 17$, encontramos 17 intervalos entre 205 e 392, então temos $17 + 1 = 18$ termos (ou simplesmente $35 - 18 + 1 = 18$). Daí, a soma pedida no problema é:

$$\frac{(205 + 392) \times 18}{2} = 5373$$

Não há um contexto nesse problema, a resolução depende do conhecimento e da aplicação de conteúdos matemáticos. Um estudante de ensino médio preparado em nível ideal consideraria fácil a resolução.

Para saber mais sobre divisibilidade, congruência modular, aritmética dos restos, a obra de Hefez (2022) é ideal.

4.2.18 Questão 18 - Interpolação

Iezzi e Hazzan (2013, 15) fazem a seguinte pergunta: quantos números inteiros positivos de 3 algarismos são múltiplos de 13?

Como estamos falando de múltiplos de 13, devemos pensar em uma progressão aritmética de razão $r = 13$. Em seguida, determinar o primeiro e o último termo da progressão. Temos:

$$100 = 13 \times 7 + 9 \Rightarrow$$

$$100 + 4 = 13 \times 7 + 13 \Rightarrow$$

$$104 = 13 \times 8$$

Portanto, 104 é o primeiro termo da PA: $a_1 = 104$. De forma análoga:

$$999 = 13 \times 76 + 11 \Rightarrow$$

$$999 - 11 = 13 \times 76 \Rightarrow$$

$$988 = 13 \times 76$$

Assim, 988 é o último termo da PA: $a_n = 988$. O número de termos n será a resposta à pergunta do problema, e podemos interpolar k termos entre 104 e 988, $n = k + 2$ $\Rightarrow n - 1 = k + 1$. Segue:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \Rightarrow$$

$$a_n = a_1 + (k + 1).r \Rightarrow$$

$$988 = 104 + (k + 1).13 \Rightarrow$$

$$988 = 104 + 13k + 13 = 117 + 13k \Rightarrow$$

$$13k = 871 \Rightarrow k = 67$$

Por fim temos $n = k + 2 \Rightarrow n = 69$. Trata-se de uma questão de nível baixo de dificuldade, que demanda conhecimentos aritméticos básicos. Não há contextualização, apenas a necessidade da interpretação adequada do comando da questão, para fazer os cálculos. Essa questão foi colocada pelos autores na seção que fala de interpolação aritmética. Seria muito mais simples apenas observar que, já que $988 = 13 \times 76$ e $104 = 13 \times 8$, o número de termos é $76 - 8 + 1 = 69$. Porém, temos o tema progressão aritmética, assunto deste trabalho, a intenção era mostrar uma questão utilizando o que foi exposto no referencial teórico.

4.2.19 Questão 19 - PG FUVEST

No vestibular FUVEST (2025) foi proposto o problema: a soma dos 5 elementos de uma PG de razão $q = 2$ é 651. O último termo dessa PG é:

a. 312

b. 320

c. 324

d. 332

e. 336

O próprio enunciado já mostra que é uma questão sobre progressão geométrica, e observaremos que é de baixo nível de dificuldade. Não há contextualização. Já temos diretamente a informação de que $n = 5$ (são 5 elementos na PG). Temos também $q = 2$ e $S_5 = 651$. Devemos calcular a_5.

$$a_5 = a_1.q^{5-1} \Rightarrow a_5 = a_1.q^4 \Rightarrow$$

$$a_5 = a_1.2^4 \Rightarrow a_5 = 16a_1$$

Já temos a_5 em função de a_1 e agora temos também:

$$S_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} \Rightarrow 651 = \frac{a_1(2^5 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$$

$$651 = 31a_1 \Rightarrow a_1 = 21$$

E então:

$$a_5 = 16a_1 \Rightarrow a_5 = 16 \times 21 = 336$$

Temos como resposta a alternativa e. É necessário conhecer termo geral e soma finita dos termos de PG.

4.2.20 Questão 20 - PA FUVEST

No vestibular FUVEST (2022) foi proposta a questão: Joana comprou um celular e dividiu o pagamento em 24 parcelas mensais que formam uma progressão aritmética crescente. As três primeiras parcelas foram de $R\$120,00$, $R\$126,00$ e $R\$132,00$. Sabendo que, ao final, notou-se que Joana não pagou a 19ª parcela, o valor pago foi:

a. $R\$3954,00$

b. $R\$4026,00$

c. $R\$4200,00$

d. $R\$4308,00$

e. $R\$4382,00$

O enunciado já aponta que é uma questão de progressão aritmética, nesse caso, no contexto de pagamento em parcelas, pela compra de um celular. É uma PA de $n = 24$ termos $(a_1 = 120, a_2 = 126, a_3 = 132, \cdots, a_{24})$. Joana não pagou a_{19}, mas pagou as outras parcelas. Pergunta-se o valor total pago, ou seja, $S_{24} - a_{19}$. Observe que há necessidade de tradução do texto para linguagem matemática. A razão é $r = 6$. Verificamos o valor de a_{19}:

$$a_{19} = a_1 + (19 - 1) \times r \Rightarrow$$

$$a_{19} = 120 + 18 \times 6 = 228$$

E agora o valor de a_{24}, podemos obter partindo do valor de a_{19}:

$$a_{24} = a_{19} + (24 - 19) \times r \Rightarrow$$

$$a_{24} = 228 + 5 \times 6 = 258$$

Temos a soma S_{24}:

$$S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24}).24}{2} = \frac{(120 + 258).24}{2} = 4536$$

Finalmente temos $S_{24} - a_{19}$:

$$S_{24} - a_{19} = 4536 - 228 = 4308$$

A resposta está na alternativa d. Pode ser considerada uma questão de baixo nível de dificuldade, conhecendo a teoria básica de progressão aritmética.

Nessa questão, pode ser observado que a PA poderia estar em outro contexto, o de juros simples. Os termos seriam montantes, considerando um valor inicial de 120, a juros simples de 5% ao mês. Teríamos $0,05 \times 120 = 6$. Os termos não seriam somados, o último termo seria o montante, 23 meses após a aplicação dos 120 iniciais.

$$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \times 6 \Rightarrow$$

$$a_{24} = 120 + 23 \times 6 = 258$$

4.2.21 Questão 21 - Uma prova complexa em PA

Iezzi e Hazzan (2013) solicita: prove que, se (a, b, c) é PA, então $(a^2(b+c), b^2(a+c), c^2(a+b))$ é também uma PA.

Chamemos de r a razão da PA (a, b, c). Teremos $a = b - r$ e $c = b + r$. Na segunda sequência faremos:

1.
$$a^2(b+c) = (b-r)^2(b+b+r) = (b^2 - 2br + r^2)(2b+r)$$
$$= 2b^3 + b^2r - 4b^2r - 2br^2 + 2br^2 + r^3 = 2b^3 - 3b^2r + r^3$$
$$= 2b^3 - (3b^2r - r^3)$$

2.
$$b^2(a+c) = b^2(b - r + b + r) = 2b^3$$

3.
$$c^2(a+b) = (b+r)^2(b-r+b) = (b^2 + 2br + r^2)(2b - r)$$
$$= 2b^3 - b^2r + 4b^2r - 2br^2 + 2br^2 - r^3$$
$$= 2b^3 + (3b^2r - r^3)$$

Concluímos que a segunda sequência de fato é uma progressão aritmética, e sua razão é $3b^2r - r^3$. Esse é um problema não contextualizado, e, apesar de sua solução ser trabalhosa e algo complexa, demanda apenas a noção conceitual de progressão aritmética. Erros podem ser comuns no desenvolvimento algébrico.

4.2.22 Questão 22 - Progressão geométrica no vestibular da UFES

No vestibular da UFES (Universidade Federal do Espírito Santo) foi abordado um problema, reproduzido por Iezzi et al. (2014): para que a soma de n primeiros termos de uma progressão geométrica dada por $(3, 6, 12, 24, \cdots)$ seja um número entre 50000 e 100000, devemos ter n igual a

a. 16

b. 15

c. 14

d. 13

e. 12

Soma de n termos de PG, com razão q e primeiro termo a_1:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Na questão: $a_1 = 3$ e $q = 2$.

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$$

$$S_n = 3(2^n - 1)$$

Condição para S_n:

$$50000 < 3(2^n - 1) < 100000 \Rightarrow$$

$$16667,6 < 2^n < 33334,3$$

Temos que: $2^{10} = 1024$ e $2^5 = 32$ e $1024 \times 32 = 32768$, então

$$16667,6 < 2^{10} \times 2^5 < 33334,3 \Rightarrow$$

$$16667,6 < 2^{15} < 33334,3$$

Concluímos $n = 15$ e a alternativa correta é a b. É um problema de média dificuldade, com vários cálculos e manipulação usando potências de 2 conhecidas e multiplicação de potências de mesma base. O próprio comando da questão já fala que trata de progressão geométrica. Não há contextualização, existe sim a necessidade de compreender o enunciado para desenvolver a resolução.

4.2.23 Questão 23 - Um problema e mais de uma resolução

Na Mackenzie (São Paulo), em 2006, o vestibular trouxe a seguinte questão, reproduzida por Iezzi et al. (2014): observe a disposição da sequência dos números naturais ímpares.

1ª linha 1

2ª linha 3, 5

3ª linha $7, 9, 11$

4ª linha $13, 15, 17, 19$

5ª linha $21, 23, 25, 27, 29$

E assim por diante. O quarto termo da vigésima linha é:

a. 395

b. 371

c. 387

d. 401

e. 399

Uma possível forma de raciocinar, é saber quantos ímpares teremos até o final da 19ª linha. A quantidade de ímpares ao longo das linhas é uma PA de razão 1 (na primeira linha 1 número, na segunda linha 2 números e assim por diante).

$$\frac{(1+19)\times 19}{2} = 190$$

Então serão 380 números até então, e o primeiro ímpar da vigésima linha será 381. Após isso, facilmente concluímos que o quarto ímpar da vigésima linha é 387, alternativa c.

Mas também é possível pensar sobre PA de segunda ordem. Neste trabalho já foi feita uma citação: "toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então (a_n) é um polinômio de grau p em n". (MORGADO; CARVALHO, 2023, 48) Já temos os termos 19 e 27. Na sexta linha virá o 37, na sétima linha o 49, e assim por diante. Identifica-se uma PA de segunda ordem $(19, 27, 37, 49, ...)$. Faremos um sistema de equações de grau 2, ou seja, na forma an^2+bn+c, teremos:

$$n = 1 \Rightarrow a + b + c = 19$$

$$n = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c = 27$$

$$n = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c = 37$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$3a + b = 8 \Rightarrow 9a + 3b = 24$$

Utilizando este resultado na terceira equação:

$$24 + c = 37 \Rightarrow c = 13$$

E então na primeira equação:

$$a + b + 13 = 19 \Rightarrow a + b = 6$$

Subtraindo $a + b = 6$ de $3a + b = 8$ temos $2a = 2 \Rightarrow a = 1$. E por fim $b = 5$.

$$a_n = n^2 + 5n + 13$$

Se o primeiro termo da PA de segunda ordem está na quarta linha, na vigésima estará o décimo sétimo termo.

$$a_{17} = 17^2 + 5 \times 17 + 13 = 387$$

Essa resolução não foi colocada aqui por ser necessária para encontrar a resposta do problema, e sim para exemplificar; é uma situação em que temos polinômios de grau 2 em n que são termos de PA de segunda ordem. É um problema de nível médio de dificuldade, demanda interpretação de vários aspectos que se apresentam, demanda identificar que se trata de progressão aritmética, não é um problema de aplicação direta de teoria, a aplicação se faz após a interpretação dos dados.

4.2.24 Questão 24 - PA ou PG?

A Aman (RJ), Academia Militar das Agulhas Negras, em 2011, propôs uma questão também reproduzida por Iezzi et al. (2014): se x é número real positivo, a sequência $(\log_3 x, \log_3 3x, \log_3 9x)$ é:

a. uma progressão aritmética de razão 1

b. uma progressão aritmética de razão 3

c. uma progressão geométrica de razão 3

d. uma progressão aritmética de razão $\log_3 x$

e. uma progressão geométrica de razão $\log_3 x$

Iremos utilizar propriedades de logaritmos:

$$\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$$

$$\log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = 2 + \log_3 x$$

Reescrevendo a sequência:

$$(\log_3 x, 1 + \log_3 x, 2 + \log_3 x)$$

Agora, escrita no novo formato, facilmente se nota uma progressão aritmética de razão 1, alternativa a. Não há contextualização, mas há necessidade de conhecimento de outros conteúdos, como propriedades de logaritmos. Um erro que pode ocorrer, é confundir com progressão geométrica, se observar o logaritmando sendo multiplicado por 3 a cada termo, porém o que está em sequência são os logaritmos, não os logaritmandos. Para o ensino médio, considerando desenvolvimento escolar adequado para essa etapa do ensino, é um problema de baixa/média complexidade.

4.2.25 Questão 25 - Aplicações financeiras

Essa é uma questão da FGV (Fundação Getúlio Vargas), do ano de 2013, trazida por Iezzi et al. (2014, 365): um capital de $R\$10.000,00$ é aplicado a juros compostos, à taxa de 20% ao ano, e, ao mesmo tempo, um capital de $R\$5.000,00$ é aplicado a juros compostos, à taxa de 68% ao ano. Após quanto tempo os montantes de igualam?

a. 22 meses

b. 22,5 meses

c. 23 meses

d. 23,5 meses

e. 24 meses

A questão traz a tabela 3 para auxiliar a solução.

Tabela 3 – Logaritmos decimais

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
log(x)	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,96

Fonte: (IEZZI et al., 2014)

Outra questão que vai demandar conhecimento de propriedades de logaritmos ao longo da resolução, e fala em aplicações a juros compostos, o que nos aponta progressão geométrica. Vamos chamar os montantes de M_1 e M_2, e o tempo em anos de t. Os fatores de acréscimo são $1 + 0,2 = 1,2$ para o rendimento de 20%, e $1 + 0,68 = 1,68$ para o rendimento de 68%.

$$M_1 = 10000 \times 1,2^t$$

$$M_2 = 5000 \times 1,68^t$$

Se os montantes em um tempo t se igualam, vamos obter o tempo por meio de $M_1 = M_2$.

$$10000 \times 1,2^t = 5000 \times 1,68^t$$

Faremos $10000 = 10^4$; $1,2 = 3 \times 4 \times 10^{-1}$; $5000 = 5 \times 10^3$; $1,68 = 3 \times 7 \times 8 \times 10^{-2}$.

$$10^4 \times (3 \times 4 \times 10^{-1})^t = 5 \times 10^3 \times (3 \times 7 \times 8 \times 10^{-2})^t \Rightarrow$$

$$\log[10^4 \times (3 \times 4 \times 10^{-1})^t] = \log[5 \times 10^3 \times (3 \times 7 \times 8 \times 10^{-2})^t] \Rightarrow$$

$$\log 10^4 + t\log(3 \times 4 \times 10^{-1}) = \log 5 + \log 10^3 + t\log(3 \times 7 \times 8 \times 10^{-2}) \Rightarrow$$

$$\log 10^4 + t\log 3 + t\log 4 + t\log 10^{-1} = \log 5 + \log 10^3 + t\log 3 + t\log 7 + t\log 8 + t\log 10^{-2}$$

Utilizando a tabela:

$$4 + 0,48t + 0,6t - t = 0,7 + 3 + 0,48t + 0,85t + 0,9t - 2t \Rightarrow$$

$$4 + 0,08t = 3,7 + 0,23t \Rightarrow$$

$$0,3 = 0,15t \Rightarrow$$

$$t = 2$$

O tempo em anos é 2, correspondente a 24 meses, alternativa e. É fundamental perceber que é necessária uma fatoração, de modo que a tabela nos permita fazer os cálculos. O problema é de média/alta complexidade para o ensino médio. O contexto é de aplicações financeiras, aprendizado importante ligado ao cotidiano.

Erros podem ocorrer ao longo do desenvolvimento algébrico, por exemplo, quando tenho t multiplicando o logaritmo de um produto, que irá se tornar uma soma de logaritmos, se não prestar atenção, posso esquecer que t multiplica todas as parcelas dessa soma.

Por fim, reforçando a importância dos conhecimentos em matemática financeira, lembrar que uma boa exposição dos conteúdos desse tema se apresenta na obra de Morgado e Carvalho (2023).

5 Conclusão

A presente pesquisa buscou fazer uma curadoria de questões, ou seja, uma pesquisa, seleção, combinação e organização de questões importantes do tema progressões aritméticas e geométricas, obtidas de livros, vestibulares e ENEM, após a exposição da teoria básica a respeito do assunto, com conteúdos relevantes para serem estudados e compreendidos pelos alunos. Isso foi feito considerando história, contextos diversos, questões de diferentes instituições, associação de PA e PG a diferentes conteúdos, diferentes pontos de vista em uma mesma questão, peculiaridades de algumas questões e considerando também símbolos, como o que é utilizado como logomarca do PROFMAT, o triângulo de Sierpinsky.

A pesquisa também procurou investigar o panorama do ensino contido nos livros didáticos, e uma visão geral de provas de seleção, observando o que traz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as exigências das avaliações de acesso à graduação, inclusive avaliações de larga escala, como o ENEM, cuja nota é transferida ao SISU (Sistema de Seleção Unificada), e então permite o ingresso em universidades públicas, e observando também o suporte que os livros podem proporcionar.

É um trabalho essencial para entender como a matemática chega ao aluno. Documentos oficiais, como a BNCC, prezam pelo desenvolvimento do pensamento algébrico e pela modelagem dos fenômenos. Algumas das questões que foram analisadas demandam aplicação mecânica de fórmulas. Muitas das questões de livros-texto apresentam enunciados curtos, com comando específico, e por vezes deixam de explorar a progressão como uma função de domínio restrito aos números naturais (domínio discreto). Isso pode ser visto como uma forma de limitar a visão do aluno, porém, as questões de aplicação direta da teoria e de fórmulas, que são numerosas nos livros, inclusive muitas bem mais simples que as selecionadas neste trabalho, são fundamentais para treinamento, repetição, fixação e maior assimilação dos aspectos teóricos.

O ENEM utiliza muito a contextualização, e foi observado que, em certas questões, não se aprofunda tanto em aspectos teóricos, utiliza apenas o conceito de PA ou PG. Os vestibulares tradicionais tendem a um aprofundamento maior na teoria e a um nível de dificuldade mais elevado, incluindo também, em muitos casos, a contextualização. Algumas questões de livros têm nível de dificuldade mais alto em desenvolvimento algébrico.

Foi observado também que, nem sempre o contexto trazido tem um alinhamento com a realidade. Isso pode ser notado, por exemplo, na questão que menciona um pagamento em 24 parcelas cujos valores estão em progressão aritmética crescente. Então, a contextualização pode ser válida na prática ou apenas adornar o enunciado. Na questão do ENEM sobre uma criança brincando com um aplicativo, até ocorre um contexto, que mostra a quantidade de "emoticons"duplicando. Isso identifica uma razão $q = 2$ de uma PG, o primeiro termo, um aumento exponencial de "emoticons", e as alternativas apresentam uma aplicação da fórmula do termo geral. Pode ser visto como um contexto “decorativo” apenas.

Em progressões, ao analisar o enunciado das questões, é necessária a habilidade de identificar o ritmo de crescimento ou de decrescimento de uma sequência numérica (aritmético ou geométrico). É necessária também a habilidade de extrair do enunciado os dados que ele traz, e saber o que, de acordo com os aspectos teóricos, se pode fazer com esses dados até chegar ao resultado.

Vários foram os conteúdos que apareceram associados a PA e PG, como por exemplo, logaritmos e suas propriedades, geometria, equação exponencial, equação de grau 2 e de grau 4.

Não me parece adequado classificar as questões em melhores ou piores para a avaliação de estudantes, todos os modelos de questão cumprem um papel importante. Para que o ensino de progressões cumpra seu papel na formação dos alunos, é fundamental o equilíbrio entre a abstração teórica e a aplicação prática. O nível de dificuldade das questões não se revela somente por uma exigência maior ou menor de desenvolvimento algébrico, mas também por exigir a tradução de textos para a linguagem matemática. O rigor matemático, inclusive com cobrança de conhecimento de diversos símbolos matemáticos (a questão do ITA, no item 4.2.8, traz o símbolo de somatório, nem sempre utilizado em provas), mesmo nas questões sem contextualização, tem a sua importância, pois desafia e desenvolve o raciocínio lógico e matemático, que é uma habilidade importante para a vida e o cotidiano de qualquer pessoa.

Na sociedade, é muito comum o questionamento: "onde utilizarei isso na vida?". Creio que a resposta adequada seria: "em tudo". Raciocinar, planejar, resolver problemas, tudo isso é fundamental para todos os aspectos da vida. Assim como atividades físicas são importantes, atividades de raciocínio também são. A importância das atividades físicas, se algum dia foi questionada, não tomei conhecimento.

A memorização de fórmulas, apesar de não ser o ideal, em um contexto de vestibular ou ENEM, ou em provas em geral, habitualmente se torna inevitável. O estudante/candidato provavelmente não terá tempo de prova suficiente para deduzir cada fórmula necessária. Em avaliações e processos de seleção, em geral, são muitos os desafios com os quais é necessário lidar para obter sucesso.

Foi satisfatório realizar este trabalho, e espero que ele se torne também um material de estudos, que possa ser utilizado como complemento na formação de estudantes, e como auxílio para tarefas diversas.

Referências

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. Citado na página 16.

BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em:<https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 6 de novembro de 2025. Citado na página 15.

FAVERO, A. L. *Matemática Financeira: uma proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 43.

FUVEST. *Fundação Universitária para o vestibular - Universidade de São Paulo - vestibular*. 2022. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/provas/fuvest-2022-usp-vestibular-1-fase>. Acesso em: 07 de fevereiro de 2026. Citado na página 58.

FUVEST. *Fundação Universitária para o vestibular - Universidade de São Paulo - vestibular*. 2025. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5a2f28f3-1a>. Acesso em: 07 de fevereiro de 2026. Citado na página 57.

HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2022. Citado na página 56.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações, 1*. São Paulo: Atual, 2014. Citado 10 vezes nas páginas 19, 26, 32, 34, 36, 46, 59, 60, 62 e 63.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar, 4:sequências, matrizes, determinantes e sistemas*. São Paulo: Atual, 2013. Citado 12 vezes nas páginas 19, 21, 23, 24, 26, 29, 30, 34, 39, 44, 56 e 59.

INEP. *ENEM-Exame Nacional do Ensino médio*. 2017. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2026. Citado na página 42.

INEP. *ENEM-Exame Nacional do Ensino médio*. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 25 de janeiro de 2026. Citado na página 45.

INEP. *ENEM-Exame Nacional do Ensino médio*. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 29 de janeiro de 2026. Citado 4 vezes nas páginas 40, 41, 50 e 52.

INEP. *ENEM-Exame Nacional do Ensino médio*. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 29 de janeiro de 2026. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

LEITãO, F. A. *Logaritmos: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o seu ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2014. Citado na página 18.

LIMA, V. S. de et al. *Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações*. [S.l.]: Intellectus Revista Acadêmica Digital ISSN 1679-8902, 2004. Disponível em: <https://revistasunifajunimax.unieduk.com.br/intellectus/article/view/29/25>. Acesso em: 18 de janeiro de 2026. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 42.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matémática discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2023. Citado 14 vezes nas páginas 19, 20, 21, 22, 25, 26, 28, 33, 34, 42, 46, 55, 61 e 64.

MORGADO, A. C. de O.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

PEREIRA, E. J.; RESENDE, M. R. *O movimento Lógico-Histórico da Progressão Aritmética: uma contribuição para o ensino de Matemática*. Uberlândia: Ensino em Re-Vista ISSN 1983-1730, 2025. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S1983-17302025000100106&script=sci_arttext>. Acesso em: 22 de maio de 2026. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

SANTOS, G. V. dos. *Explorando a Matemática do número Φ, o Número de Ouro*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2013. Citado na página 46.

UECE. *Universidade Estadual do Ceará - vestibular*. 2016. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/progressao-geometrica-pg/questoes?page=3>. Acesso em: 07 de fevereiro de 2026. Citado na página 53.

UECE. *Universidade Estadual do Ceará - vestibular*. 2019. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/progressao-geometrica-pg/questoes?page=2>. Acesso em: 07 de fevereiro de 2026. Citado na página 54.

UNICAMP. *Universidade Estadual de Campinas - vestibular*. 2024. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/progressao-aritmetica-pa/questoes>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2026. Citado na página 48.

UNICENTRO. *Universidade Estadual do Centro-Oeste - vestibular*. 2019. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/progressao-aritmetica-pa/questoes?page=2>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2026. Citado na página 49.

VIEIRA, T. de O. *Uma Abordagem didática sobre Propagação de Luz em Meios Complexos e Desordenados em Situações Cotidianas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020. Citado na página 53.