



UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT



LUIS NOCRATO SOARES JUNIOR

**ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM AUXÍLIO DO
GEOGEBRA: Uma proposta de sequência didática**

JUAZEIRO DO NORTE - CE
2026

LUIS NOCRATO SOARES JUNIOR

**ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM AUXÍLIO DO
GEOGEBRA: Uma proposta de sequência didática**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Flávio França Cruz

JUAZEIRO DO NORTE- CE
2026

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Junior, Luis Nocrato Soares Junior NOCRATO

N759e ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM AUXÍLIO DO
GEOGEBRA: Uma proposta de sequência didática / Luis Nocrato Soares Junior
NOCRATO Junior. JUAZEIRO - CE, 2026.

114p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da
Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. FLÁVIO FRANÇA CRUZ

1.Funções do 2º grau, 2.Software GeoGebra, 3.Metodologias ativas, 4.Percurso
de aprendizagem.; I.Título.

CDD: 510

LUIS NOCRATO SOARES JUNIOR

**ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM AUXÍLIO DO
GEOGEBRA: Uma proposta de sequência didática**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA: em 11/05/2026



Documento assinado digitalmente

FLAVIO FRANÇA CRUZ
Data: 28/05/2026 21:28:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>



Documento assinado digitalmente

JOYCE SARAIVA SINDEAUX
Data: 28/05/2026 15:17:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador: Dr. Flávio França Cruz



Documento assinado digitalmente

DANILO FERREIRA DA SILVA
Data: 28/05/2026 15:46:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. Joyce Saraiva Sindeaux (URCA)



Documento assinado digitalmente

ALEXSANDRO GOMES FERNANDES
Data: 28/05/2026 21:00:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Danilo Ferreira da Silva (URCA)

Ms. Alexsandro Gomes Fernandes (SEDUC-CE)

JUAZEIRO DO NORTE - CE
2026

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais, Luiz Nocrato Soares [*in memoriam*] e à minha mãe, Maria Rosania de Alencar, por todo o amor, apoio e incentivo que me deram ao longo da minha vida. Aos meus filhos: Marcos Luidny, Yanni Ludmilly e Pedro Gael, e à minha esposa Antonia Vladia Alencar, por serem a verdadeira razão de toda a perseverança neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida.

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, direta ou indiretamente. Em especial, gostaria de agradecer:

Ao meu orientador, Dr. Flávio França Cruz, pela orientação e apoio prestados durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Luiz Nocrato Soares [*in memoriam*] e Maria Rosania de Alencar, por todo o amor e apoio que me deram ao longo da minha vida.

À minha esposa, Antonia Vladia G. A. Nocrato, por todo o incentivo e motivação durante o curso.

Aos meus filhos, Marcos Luidny R. Nocrato, Yanni Ludmilly R. Nocrato e Pedro Gael A. Nocrato, por serem a verdadeira razão de toda a perseverança durante o curso.

Aos meus colegas e amigos, que me apoiaram e incentivaram durante este processo.

À minha instituição de ensino Universidade Regional do Cariri - URCA, pela qual tenho grande apreço e que me proporcionou a oportunidade de realizar este estudo.

Muito obrigado a todos por fazerem parte desta jornada. Sem o apoio e a contribuição de cada um de vocês, este trabalho não seria possível.

RESUMO

O presente trabalho teve como principal objetivo produzir e executar uma sequência didática abordando o ensino de funções quadráticas, utilizando, como ferramenta auxiliar, o software GeoGebra. Como produto educacional, elaborou-se uma sequência didática para o ensino de funções quadráticas aplicadas no contexto da educação básica, utilizando o software GeoGebra, afim de facilitar a visualização geométrica e os conceitos envolvidos. A proposta foi aplicada em uma turma mista, composta por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e das 1º, 2º e 3º séries do Ensino Médio. As principais estratégias metodológicas envolveram a análise de referências bibliográficas específicas sobre o tema, bem como dissertações de mestrado disponíveis no portal do PROFMAT. O desenvolvimento do produto educacional iniciou-se com um diagnóstico preliminar, realizado por meio da aplicação de duas atividades introdutórias baseadas em metodologias ativas, especialmente na Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), com o intuito de identificar lacunas na formação matemática dos alunos envolvidos na sequência didática. Em seguida, a sequência didática elaborada foi aplicada culminando na realização de um simulado final para fins avaliativos. A pesquisa, de caráter qualitativo, fundamentou-se em documentos orientadores da educação, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Partindo da hipótese de que o uso de metodologias ativas, aliado à utilização do GeoGebra, favorece uma aprendizagem significativa e participativa, os resultados obtidos apontam para confirmação dessa suposição, tanto sob critérios quantitativos quanto qualitativos.

Palavra-chave: Funções do 2º grau; Software GeoGebra; Metodologias ativas; Percorso de aprendizagem.

ABSTRACT

The present work had as its main objective to produce and execute a didactic sequence addressing the teaching of quadratic functions, using the GeoGebra software as an auxiliary tool. As an educational product, a didactic sequence was developed for the teaching of quadratic functions applied in the context of basic education, using the GeoGebra software, in order to facilitate geometric visualization and the concepts involved. The proposal was applied in a mixed class, composed of students from the 9th grade of Elementary School and the 1st, 2nd, and 3rd years of High School. The main methodological strategies involved the analysis of specific bibliographic references on the subject, as well as master's theses available on the PROFMAT portal. The development of the educational product began with a preliminary diagnosis, carried out through the application of two introductory activities based on active methodologies, especially Problem-Based Learning (PBL), in order to identify gaps in the mathematical education of the students involved in the teaching sequence. Next, the instructional sequence that was developed was applied, culminating in the completion of a final simulation for evaluative purposes. The research, of a qualitative nature, was based on guiding educational documents, such as the National Curriculum Parameters (PCNs) and the National Common Curricular Base (BNCC). Starting from the hypothesis that the use of active methodologies, combined with the use of GeoGebra, promotes meaningful and participatory learning, the results obtained point to the confirmation of this assumption, both under quantitative and qualitative criteria.

Keywords: Second-degree functions; GeoGebra software; Active methodologies; Learning path.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Parábola de vértice V , Foco F e diretriz d	16
Figura 2: Parábola com eixo focal no eixo y	17
Figura 3: A parábola $y = ax^2$, para $a > 0$ e $a < 0$	18
Figura 4: Parábola $x = \frac{-y^2}{4p}$ com foco $F = (-p, 0)$ e vértice $V = (0, 0)$	19
Figura 5: Parábolas $x = ay^2$ com $a < 0$ e $a > 0$	19
Figura 6: $y = ax^2$ e $y - k = a(x - h)^2$	20
Figura 7: Diagrama de Flexas da função $f(x) = x + l$	21
Figura 8: Tablete de argila com escrita cuneiforme	27
Figura 9: Tablete YBC 6967 com escrita cuneiforme	29
Figura 10: Método babilônico de “cortar e colar” (1ª passagem)	30
Figura 11: Método babilônico de “cortar e colar” (2ª passagem)	30
Figura 12: Método babilônico de “cortar e colar” (3ª passagem)	31
Figura 13: Completando quadrados	38
Figura 14: Método de completar quadrados	38
Figura 15: Vértice da Parábola	43
Figura 16: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$	45
Figura 17: Gráfico das funções f, g, h, i ;	45
Figura 18: Gráfico das funções f, g, h, i ;	46
Figura 19: Gráfico das funções f, g, h, i ;	46
Figura 20: Gráfico das funções f, g, h, i ;	47
Figura 21: Gráfico das funções f, g, h, i ;	47
Figura 22: Gráfico das funções f, g, h, i ;	48
Figura 23: Gráfico das funções f, g, h, i ;	49
Figura 24: Gráfico das funções f, g, h, i ;	49
Figura 25: Gráfico da $f(x) = x^2 + 2x + 1$, com $a > 0, b > 0$ e $c > 0$	50
Figura 26: Gráfico da $f(x) = x^2 + 2x - 1$, com $a > 0, b > 0$ e $c < 0$	50
Figura 27: Gráfico da $f(x) = ax^2$, com $a = 1$	51
Figura 28: Gráfico Família da $f(x) = ax^2$, com $a > 0$	51
Figura 29: Gráfico da $f(x) = ax^2$, com $a = -1$	52
Figura 30: Gráfico Família da $f(x) = ax^2$, com $a < 0$	52
Figura 31: Gráfico Família da função $f(x) = x^2 + bx + 2$ com b variando de $(-2$ a $2)$	53

Figura 32: Gráfico da $f(x) = x^2 + 2x + 2$	54
Figura 33: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$	56
Figura 34: Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 4x + 4$	56
Figura 35: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$	57
Figura 36: Passos para criação de modelos matemáticos	65
Figura 37: Gráfico da função Oferta e Demanda	67
Figura 38: Gráfico relativo à questão 01 – (Atividade 01).	103
Figura 39: Gráfico relativo à questão 02 – (Atividade 01)	103
Figura 40: Gráfico: Definir Vértice da parábola.	104
Figura 41: Gráfico relativo à questão 01.(Atividade 02)	104
Figura 42: Função quadrática no GeoGebra.	105

LISTA DE ABREVIATURAS

ABP – Aprendizagem Baseada em Problemas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

ENA – Exame Nacional de Acesso

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

ENQ – Exame Nacional de Qualificação

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

MRUV – Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

MU – Movimento Uniforme

MUV – Movimento Uniformemente Variado

OBM – Olimpíadas Brasileiras de Matemática

OBMEP – Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT – Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 REFERÊNCIAL TEÓRICO	16
2.1 Parábola.....	16
2.1.1 Definição de função.....	20
2.2 Forma canônica.....	24
2.2.1 Zeros da função quadrática.....	26
2.2.2 Equação do segundo grau.....	28
2.3 Gráfico da função	44
2.3.1 Vários tipos de gráficos	46
2.3.2 Análise do gráfico (crescente ou decrescente)	58
3 FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO MÉDIO	61
4 APLICAÇÕES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA	66
4.1 Na física.....	66
4.2 Na economia	68
5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	72
5.1 Questões do ENEM.....	72
5.2 Questões olímpicas.....	77
5.3 Questões do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT (ENA).....	80
5.4 Questões do Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT (ENQ).....	85
6 METODOLOGIA	90
7 PROPOSTA PEDAGÓGICA/ PRODUTO EDUCACIONAL	91
7.1 Ensino da função quadrática e a BNCC	91
7.2 Aprendizagem Baseada em Problemas e o ensino de função quadrática	93
7.3 Sequência didática: Ensino da função quadrática utilizando GeoGebra.....	96
7.4 Resultados e discussões.....	108
CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112
APÊNDICES	115

1 INTRODUÇÃO

A noção de funções quadráticas é introduzida nos anos finais do ensino fundamental e, de forma mais aprofundada, no primeiro ano do ensino médio. Em geral, o tema é introduzido destacando suas aplicações em outras áreas do conhecimento, como Física, Economia e Engenharia. A forte presença deste tema no currículo básico lhe confere uma posição de destaque no processo de ensino-aprendizagem. Documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também ressaltam a importância desse conteúdo, evidenciando a necessidade de consolidar habilidades relacionadas ao estudo das funções quadráticas.

O período pandêmico da COVID-19 provocou profundas repercussões no cenário educacional brasileiro, especialmente no que se refere aos processos de ensino e aprendizagem. A transição repentina para o ensino remoto, a limitação do acesso a recursos tecnológicos e a desigualdade nas condições de estudo contribuíram para ampliar lacunas na formação dos estudantes, dificultando o desenvolvimento de competências essenciais e tornando o processo educativo ainda mais desafiador. Nessa etapa, anos finais do ensino fundamental, inicia-se o estudo das equações do segundo grau, desenvolvendo conceitos como coeficientes e zeros (ou raízes) da equação. Essa abordagem estabelece uma relação direta com o estudo das funções quadráticas, pois as raízes da equação correspondem aos zeros da função, as quais podem ser interpretadas geometricamente como os pontos em que o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas.

Nesse sentido, as habilidades referentes à conceituação e à resolução de equações do segundo grau tornam-se primordiais para a compreensão das funções quadráticas e, neste momento, a utilização do GeoGebra pode contribuir positivamente para um processo de ensino-aprendizagem mais significativo. No contexto de inovações metodológicas impulsionadas, principalmente pelas restrições impostas pela pandemia, muitas tendências de abordagens metodológicas ganharam espaço no dia a dia escolar, principalmente no que se refere à recomposição das aprendizagens. Junto com essa corrente de inovação metodológica, o uso de novas tecnologias passou a ser uma necessidade para um processo de ensino que resulte em uma aprendizagem mais significativa e com habilidades consolidadas. O GeoGebra, recurso educacional pedagógico utilizado no produto educacional deste trabalho, apresenta-se como uma ferramenta que pode contribuir notoriamente para a aprendizagem de diversos tópicos de Matemática, principalmente no ensino de geometria e funções. Dessa forma, este trabalho tem como foco estimular a participação dos alunos nas aulas de Matemática por meio do uso do

GeoGebra, visando a uma melhor compreensão das funções quadráticas. Com este objetivo, produziu-se e executou-se uma sequência didática que aborda o tema funções quadráticas, utilizando o GeoGebra.

De acordo com a professora Aline Soares em matéria para a Revista Nova Escola feita pela jornalista Dimitria Coutinho:

(...) os docentes ainda precisam se apropriar de forma mais robusta desses métodos, que podem ajudar bastante na recomposição das aprendizagens, já que partem do princípio de focar em cada aluno, contemplando a diversidade de aprendizagens que há dentro das salas de aula. As metodologias ativas colocam o estudante no centro do processo. Então, se o professor usar dessas estratégias, eu acredito que a gente consiga recuperar muito mais esse processo que foi perdido nesses dois anos de pandemia (Coutinho, 2023, n.p).

Documentos norteadores, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), constituem referenciais teórico-normativos fundamentais para a organização do ensino de Matemática no Brasil, ao delinarem, de modo sistemático, as competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica. Tais diretrizes não apenas orientam a prática pedagógica, mas também explicitam o lugar epistemológico e didático de conceitos estruturantes, como as funções quadráticas, no currículo escolar. Nesse sentido, oferecem um quadro analítico que permite compreender a relevância desse objeto matemático na formação dos estudantes. A seguir, apresentam-se as habilidades relacionadas ao estudo de funções quadráticas, conforme estabelecido pela BNCC:

- **(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser apresentados por equações polinomiais de segundo grau do tipo $ax^2 = b$. (Brasil, 2018, P.313)
- **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medidas de terrenos. (Brasil, 2018, P. 315)
- **(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (Brasil, 2018, p. 317)
- **(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do segundo grau. (Brasil, 2018, p. 317).

- **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de primeiro e segundo grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (Brasil,2018, p. 536)
- **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial do segundo grau do tipo $y = ax^2$. (Brasil, 2018,p. 541).
- **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, matemática financeira ou cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (Brasil, 2018, p. 541)

Este trabalho está dividido em três partes. A primeira apresenta de forma fundamentada e consistente a definição e as principais propriedades das funções quadráticas. A segunda apresenta diversas aplicações do tema proposto em áreas do conhecimento como Física, Engenharia e Economia, além da resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de Olimpíadas de Matemática, do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT (ENA) e do Exame Nacional de Qualificação (ENQ) do PROFMAT. A terceira apresenta a construção de uma sequência didática como proposta pedagógica para o ensino de funções quadráticas, fazendo uso da metodologia ativa da Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) e do GeoGebra. O presente trabalho tem como público-alvo os alunos da rede pública de ensino do município de Saboeiro, Ceará, contemplando estudantes das escolas públicas locais e buscando contribuir para o processo de ensino e aprendizagem no contexto educacional da região.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Iniciamos com a apresentação da definição formal de parábola e a dedução de algumas de suas propriedades. Na sequência, definimos formalmente as funções quadráticas. Em seguida, estudamos as principais propriedades destas funções, com destaque para as raízes ou zeros da função, a concavidade e a simetria do gráfico.

Este capítulo foi construído com base em leituras exploratórias de livros e artigos, com destaque para Elon (2023), Neres (2023), Delgado (2010), Machado (1982), entre outros. Abordaremos, de forma objetiva, os conteúdos básicos do componente curricular Matemática sobre funções quadráticas (definição e principais propriedades).

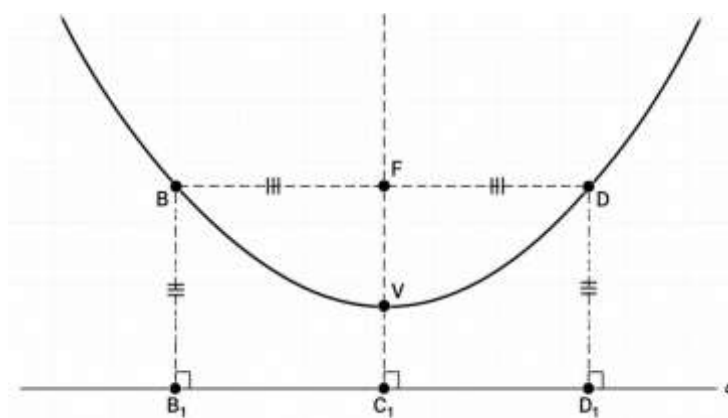
2.1 Parábola

Consideremos uma reta d e um ponto F no plano cartesiano de modo que F não pertença a reta d . A parábola P de foco F e diretriz d é o lugar geométrico p dos pontos do plano que equidistam de F e d , ou seja,

$$P = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, F) = d(p, d)\}.$$

Como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1: Parábola de vértice V , foco F e diretriz d



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Observe que na figura 1 estão assinalados sete pontos que são equidistantes do ponto F e da reta d .

$$(p \in P) \Leftrightarrow d(p, F) = d(p, d)$$

O *parâmetro* da parábola P é a distância entre o foco F e a diretriz d . Denotamos o parâmetro por $2p$, ou seja,

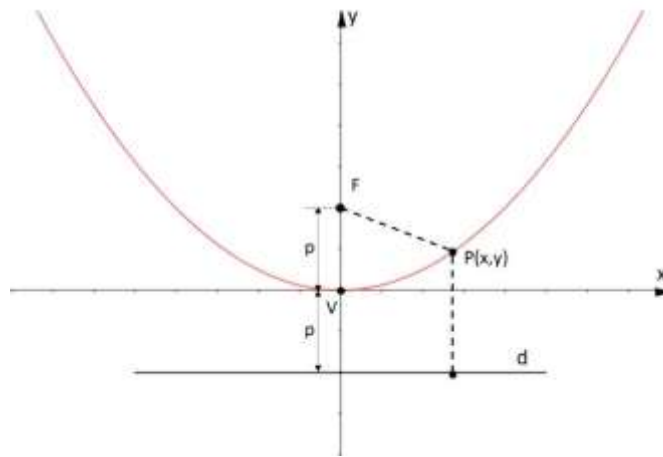
$$2p = d(F, d).$$

O *vértice* da parábola P é o ponto $V \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz a condição $d(V, F) = d(V, d) = p$. A reta que contém o foco F e o vértice V da parábola P é chamada de *eixo da parábola* P ou *reta focal*.

Para encontrarmos a equação de uma parábola vamos fixar um sistema de coordenadas xOy . Sendo $2p$ o parâmetro, onde $p > 0$, a distância de F à reta d , ou seja, $d(F, d) = 2p$. Consideremos inicialmente o vértice V na origem do sistema e o eixo da parábola um dos eixos de coordenadas. Na parábola o eixo da parábola coincide com o eixo de simetria, ou seja, é a reta que passa pelo foco F e pelo vértice V . Tomaremos por caso I quando o eixo da parábola coincide com o eixo Oy e por caso II quando o eixo da parábola coincidir com o eixo Ox .

Como pode ser observado na Figura 2.

Figura 2: Parábola com eixo focal no eixo y



Fonte: www.bing.com//parabolaofocodiretriz

Caso I: Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $(0,p)$. Pela definição, sabemos que $d(P, F) = d(P, d)$. Seja $P' \in d$, o pé da perpendicular baixada de por P , ou seja, $P' = (x, -p)$. Portanto,

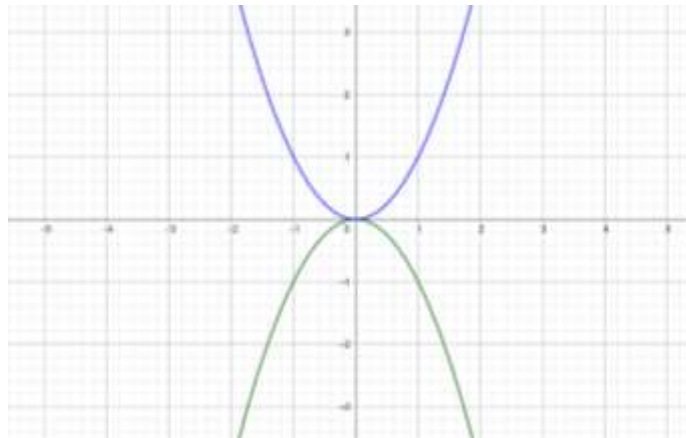
$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in P &\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, P') \\
 &\Leftrightarrow d((x, y), (0, p)) = d((x, y), (x, -p)) \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2} \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + (y - p)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(y + p)^2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 4py
 \end{aligned}$$

Na Geometria Analítica, a adoção de $a = \frac{1}{4p}$ na equação da parábola decorre da forma canônica $x^2 = 4py$ ou ($y^2 = 4px$), ou seja, na expressão $x^2 = 4py$ tome $a = \frac{1}{4p}$ assim,

$$a = \frac{1}{4p} \Leftrightarrow 4p = \frac{1}{a}.$$

Substituindo em $x^2 = 4py$, temos $y = ax^2$. Essa escolha não é arbitrária, mas sim uma parametrização que explicita a conexão entre o coeficiente quadrático e a abertura da parábola, permitindo interpretar geometricamente o comportamento da curva em função da posição do foco. É importante observar que, na definição de parábola, considera-se que o foco não pode pertencer à diretriz. Portanto, $p \neq 0$. Caso $p = 0$, a parábola deixa de existir como curva, caracterizando um caso degenerado. Como $x^2 \geq 0$, então $4py \geq 0$, sendo assim, os sinais de p e y são sempre iguais, consequentemente, se $p > 0$ a parábola está no semiplano $\{(x, y): y \geq 0\}$ e se $p < 0$, a parábola está no semiplano $\{(x, y): y \leq 0\}$, conforme Figura 3.

Figura 3: A parábola $y = ax^2$, para $a > 0$ e $a < 0$.

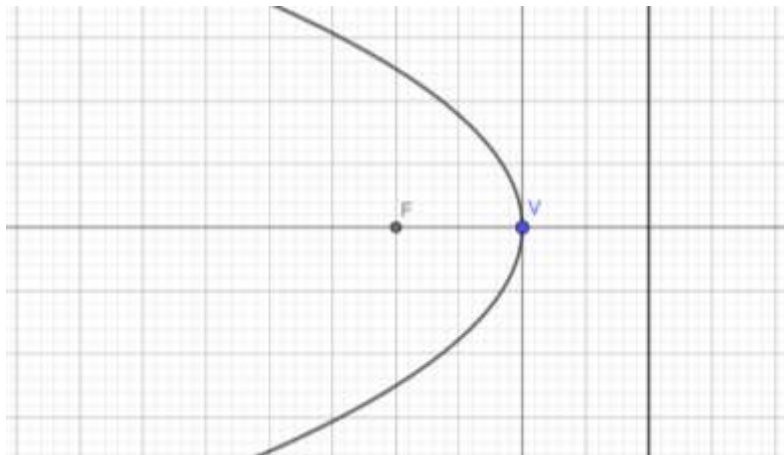


Fonte: Produzido pelo próprio autor

Caso II: Analisaremos, a seguir, a equação da parábola quando o eixo da parábola é o eixo Ox e o vértice na origem. Considere $P(x,y)$, um ponto arbitrário da parábola (Figura 4), com foco $F(-p,0)$, de forma análoga ao caso anterior, obteremos a equação reduzida

$$y^2 = 4px.$$

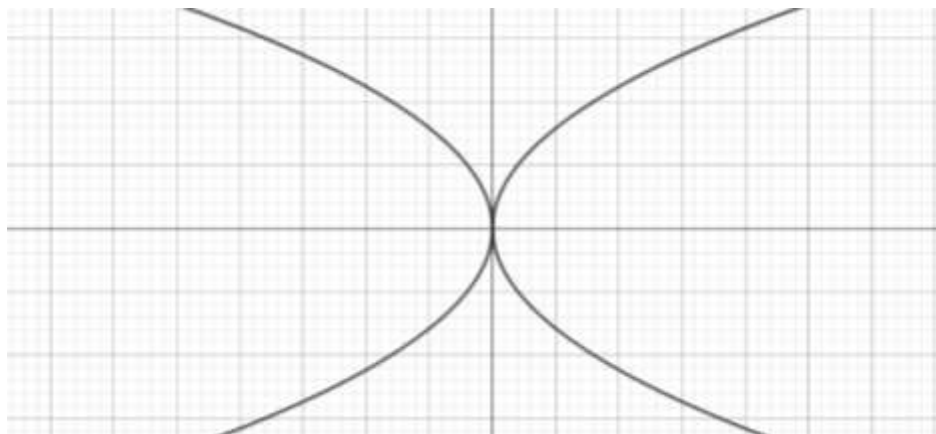
Figura 4: Parábola $x = \frac{-y^2}{4p}$ com foco $F = (-p, 0)$ e vértice $V = (0, 0)$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Daí temos que, se $p > 0$, a parábola se estende no sentido positivo do eixo horizontal, se $p < 0$, ela se estende no sentido negativo desse eixo. Conforme Figura 5.

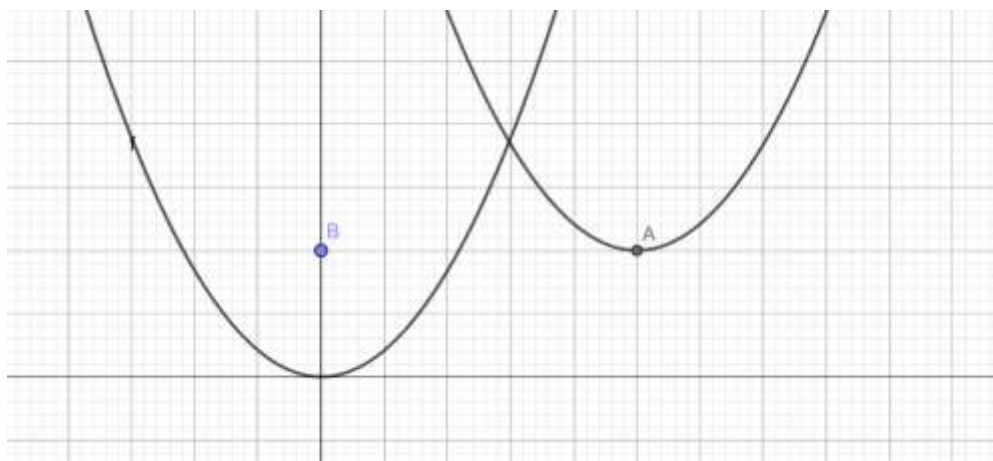
Figura 5: Parábolas $x = ay^2$ com $a < 0$ e $a > 0$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Consideremos o caso em que o vértice da parábola não coincide com a origem do sistema de coordenadas. Vamos assumir que o eixo da parábola é paralelo ao eixo Oy . Seja $V = (h, k)$ o vértice da parábola. De modo geral, dada uma parábola $y = ax^2$, com vértice na origem $(0, 0)$ e eixo de simetria $x = 0$, quando esta é transladada de h unidade na horizontal e de k unidades na vertical, obtemos uma parábola congruente à primeira, tendo como equação $y - k = a(x - h)^2$. Onde $A = (h, k)$, conforme a Figura 6.

Figura 6: $y = ax^2$ e $y - k = a(x - h)^2$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Seja $P=(x,y)$ um ponto na parábola P de equação $y - k = a(x - h)^2$, ou seja, a parábola de vértice $V=(h,k)$. Vamos analisar dois casos:

(i) Se $a > 0$, então $y = a(x - h)^2 + k \geq 0$, logo $y = k$ é o valor mínimo assumido por y e o mesmo ocorre quando $x = h$.

(ii) Se $a < 0$, então $y = a(x - h)^2 + k \leq k$, logo $y = k$ é o valor máximo assumido por y e o mesmo ocorre quando $x = h$.

2.1.1 Definição de função

A noção de função quadrática possui seus primeiros registros nos primórdios da civilização. No entanto, sua formulação, até o formato apresentado atualmente foi concebida ao longo de milhares de anos, após a contribuição de diferentes matemáticos e civilizações. Sua associação com equações do segundo grau considera-se fundamental para sua análise integral, dessa forma, remotamente, seus primeiros registros retomam tabletes de barro babilônicos com escrita cuneiforme de 4000 anos. Nesse contexto, torna-se necessário conhecer a definição formal tal como as condições para existência e unicidade. Inicialmente, definiremos função e seguiremos com a definição formal de função quadrática.

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação R entre A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Se $(a, b) \in R$ dizemos que a está relacionado a b pela relação R e denotamos aRb .

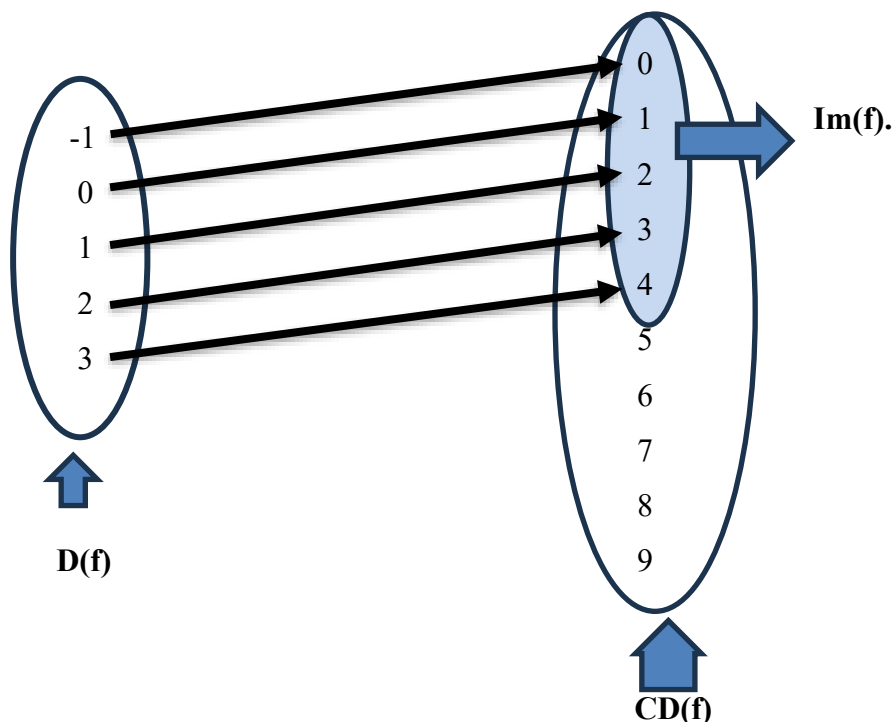
Definição: Uma função f de A em B é uma relação de A em B na qual cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B . Uma função f de A em B é denotada por $f: A \rightarrow B$.

Chamamos o conjunto A de *domínio* da função f o conjunto constituído pelos elementos $x \in A$ e denotamos por $D(f)$. O conjunto B é chamado de *contradomínio* da função e denotado

por $CD(f)$. A *imagem* da função é o conjunto $Im(f)$ constituído pelos elementos $y \in B$ para os quais existe algum $x \in A$ tal que $y = f(x)$, isto é, $Im(f) = \{y \in B: \exists x \in A; f(x) = y\}$, ou ainda, $Im(f) = \{f(x): x \in A\} \subset B$.

Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z}; -1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x \leq 9\}$ dois conjuntos e $f: A \rightarrow B, f(x) = x + 1$. Como pode ser observado na Figura 7.

Figura 7: Diagrama de Flexas da função $f(x)=x+1$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Dessa forma temos,

$$f = \{(x, f(x)) \in A \times B\} = \{(-1,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$$

$$D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$Im(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Uma função está bem definida quando são conhecidos $D(f)$, $CD(f)$ e a lei de correspondência $y=f(x)$. No entanto, para funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, é comum apresentarmos a sentença aberta $y = f(x)$, para nos referirmos a uma função f . Nesse sentido, fica subentendido que $D(f)$ é o conjunto formado pelos números reais cujas imagens são reais, isto é:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Nesse contexto, já podemos apresentar uma definição mais formal de função quadrática, no qual segue-se como:

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função quadrática* quando existem números reais a, b e c , com $a \neq 0$, tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, a função f , de tal forma que $f(x) = 6 + 3x + 5x^2$ é uma função quadrática pois $a = 5 \neq 0$. Por outro lado, a função h , dada por $h(x) = 1 + 5x + 0x^2$ não representa uma função quadrática, pois $a = 0$.

Verificaremos a seguir a unicidade de uma função quadrática, isto é, dados $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções quadráticas, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ com $a, a' \neq 0$, então $f = g$ se, e somente se, $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, se $f = g$ então

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c', \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para $x = 0$ a igualdade acima torna-se $c = c'$. Portanto, temos

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Tomando $x = 1$ e $x = -1$ nesta equação, obtemos o sistema

$$a + b = a' + b'$$

$$a - b = a' - b'.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = a'$, $b = b'$. Portanto concluímos que se $f = g$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Visto dessa forma, essa observação nos permite relacionar uma função quadrática a uma terna $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, com $a \neq 0$. Assim, vamos identificar a função quadrática como um trinômio do segundo grau a ela associada,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposição: Sejam $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, dois a dois distintos e $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Considere os pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) . Se esses pontos não forem colineares, então existe uma única função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tal que $f(x_i) = y_i$, $i=1,2,3$.

Suponha que

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3.$$

Então, temos o sistema

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação das demais, obtemos:

$$(1) a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$$(2) a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1$$

Como x_1, x_2 e x_3 são números reais distintos dois a dois, segue que

$$x_2 - x_1 \neq 0 \text{ e } x_3 - x_1 \neq 0$$

Multiplicar a equação (1) pela equação $\frac{1}{x_2 - x_1}$, obtemos:

$$(3) a \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{(x_2 - x_1)} + b = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}.$$

Utilizando a fatoração $(x_2^2 - x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$, segue:

$$a(x_2 + x_1) + b = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}.$$

Analogamente, dividindo a equação (2) pela equação $(x_3 - x_1)$, obtemos:

$$(4) a(x_3 + x_1) + b = \frac{y_3 - y_1}{(x_3 - x_1)}.$$

Subtraindo a equação (4) da equação (3), resulta:

$$a[(x_2 + x_1) - (x_3 + x_1)] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Logo,

$$a(x_2 - x_3) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},$$

e, portanto,

$$a = \frac{1}{(x_2 - x_3)} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right).$$

Observa-se que $a \neq 0$, pois, caso contrário, f seria uma função afim. Além disso, a condição de não colinearidade dos pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) garante a existência e a unicidade de $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assim, dados três pontos não colineares com abscissas distintas, existe uma única função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

tal que

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2 \text{ e } f(x_3) = y_3.$$

2.2 Forma canônica

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

A forma canônica de f é obtida por meio do método de completar quadrados, o que permite uma análise estrutural mais precisa dessa função.

Inicialmente, fatoramos o coeficiente a dos termos:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Para completar o quadrado, observamos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Assim, adicionando e subtraindo o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ no interior do parêntese, obtemos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \cdot \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]. \\ &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]. \\ &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Distribuindo o coeficiente a , segue que:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Definindo o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, a forma canônica é dada por:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau (chamada de forma canônica) nos permite observar algumas propriedades que possibilitam uma melhor compreensão da função quadrática. Uma dessas consequências, mais imediata, é a dedução da fórmula que permite obter as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

De fato, sejam $a \neq 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, obtemos as seguintes equivalências:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad (3)$$

Supondo $b^2 - 4ac \geq 0$, segue que:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (5)$$

e, portanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Note que na passagem (1) para (2) asseguramos que $\Delta \geq 0$, pois $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, em consequência, garantimos que a equação possua raízes reais, caso contrário, isto é, $\Delta < 0$, significa que a equação não possui raízes reais.

Analisando mais profundamente a fórmula resolutive obtida na passagem (5) conseguimos perceber que:

(I) Se o discriminante for positivo, temos de imediato duas raízes reais distintas. De fato, seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e a, b e $c \in \mathbb{R}$. Considere x' e x'' raízes da equação. Logo:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Daí, $x' > x''$, são as raízes distintas da equação. Além disso, valem as relações clássicas de Viète:

- $x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a},$
- $x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$

A média aritmética das raízes é dada por:

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Esse valor corresponde à abscissa do vértice da parábola e define o eixo de simetria do gráfico da função.

(II) Se o discriminante for igual a zero, teremos duas raízes reais iguais, isto é, a equação possui apenas uma única raiz real.

Considere $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e a, b e $c \in \mathbb{R}$. Considere x' e x'' raízes da equação, logo:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como $\Delta = 0$, temos

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b - 0}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

Daí, $x' = x''$. Nesse caso, o vértice da parábola pertence ao eixo Ox , e as relações de Viète permanecem válidas:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a} \text{ e } x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

A forma canônica evidencia a simetria da função quadrática. De fato, para x' e $x'' \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x') = f(x'') \Leftrightarrow \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x'' + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Isso ocorre se, e somente se,

$$x' + \frac{b}{2a} = -\left(x'' + \frac{b}{2a}\right),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, a função assume valores iguais em pontos simétricos em relação à reta vertical

$$x = \frac{-b}{2a},$$

que constitui o eixo de simetria da parábola.

2.2.1 Zeros da Função Quadrática

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Denominam-se *zeros* (ou *raízes*) de f os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$.

Equivalentemente, determinar os zeros de f consiste em resolver a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Por exemplo: Considere $f(x) = x^2 - 4x + 4$, uma função quadrática. Observa-se que $f(x) = (x - 2)^2$, de onde segue que $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Logo, $x = 2$ é a única raiz real de f , com multiplicidade algébrica igual a 2. De fato, $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$.

De modo geral, as soluções da equação quadrática são dadas pela fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado *discriminante* da equação. A natureza das raízes depende do sinal de Δ :

i) $\Delta = 0$: $x' = x''$, com $x', x'' \in \mathbb{R}$, isto é, existe uma única raiz real $x = \frac{-b}{2a}$. Geometricamente, o gráfico de f tangencia o eixo Ox em um único ponto.

ii) $\Delta > 0$: $x' \neq x''$, com $x', x'' \in \mathbb{R}$, isto é, existem duas raízes reais e distintas

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nesse caso, o gráfico de f intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos.

iii) $\Delta < 0$: $x', x'' \notin \mathbb{R}$. Nesse caso, as soluções pertencem à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e o gráfico de f não intercepta o eixo Ox .

Além da “fórmula de Bhaskara”, a determinação das raízes pode ser realizada por outros métodos, tais como fatoração do polinômio, completamento de quadrados e análise geométrica do gráfico da função. Do ponto de vista didático e teórico, a escolha do método mais adequado depende tanto da estrutura algébrica da expressão quanto do contexto em que o problema está inserido.

No tópico seguinte, será abordada a resolução sistemática de equações do segundo grau, consolidando o processo de determinação dos zeros de funções quadráticas.

2.2.2 Equação do 2º grau

Ao longo de toda a história da matemática, vários povos se destacaram e deram importantes contribuições ao desenvolvimento dessa ciência. De acordo com ALMEIDA (2020), egípcios, babilônios, gregos, romanos, hindus, árabes, entre outros, tiveram um papel fundamental nesse processo.

Os babilônios, civilização que habitou a antiga Mesopotâmia, tiveram uma enorme contribuição para o desenvolvimento da matemática nos campos de álgebra e geometria. O conhecimento nessa ciência foi extremamente valioso para o desenvolvimento da agricultura, arquitetura e astronomia, aplicando em várias situações, por exemplo, cálculo dos dias, meses e anos, construção de templos e palácios.

Entre os vários documentos deixados pelos babilônios, dentre eles tabletas de barro com escrita cuneiforme, há um antigo texto que apresenta um problema que podemos enunciar assim: Qual a medida de comprimento do lado de uma região quadrada, sabendo que a medida da área dela menos a medida de comprimento do lado é igual a 870? Como ilustra a Figura 8.

Figura 8: Tablete de argila com escrita cuneiforme



Placa de argila de aproximadamente 2000 a.C. -1600 a.C. (19,4 cm x 11,7 cm), guardada no Museu Britânico, em Londres (Inglaterra). O primeiro problema dessa placa, registrada em escrita cuneiforme, corresponde ao problema citado no texto.

Fonte: Yale Peabody Museum

Apresentamos a seguir, a formalização matemática do problema descrito na placa de argila, bem como sua resolução no contexto das equações quadráticas. Posteriormente, serão discutidos métodos gerais para a resolução de equações do segundo grau, com ênfase na dedução da chamada fórmula de Bháskara, além de abordagens alternativas de natureza algébrica e geométrica.

A tradução da situação-problema para a linguagem algébrica conduz à equação

$$x^2 - x = 870.$$

Reescrevendo-a na forma padrão das equações quadráticas, obtemos

$$x^2 - x - 870 = 0.$$

De modo geral, uma equação do segundo grau é uma equação polinomial da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, e x é a incógnita. No caso em análise, identificamos os coeficientes como

$$a = 1, b = -1, c = -870.$$

O discriminante da equação é definido por

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Substituindo os valores dos coeficientes, obtemos

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-870) = 3481.$$

Como $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais distintas, dadas pela fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Logo,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{3481}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 59}{2}.$$

Portanto, as soluções são

$$x' = \frac{1+59}{2} = 30 \text{ e } x'' = \frac{1-59}{2} = -29.$$

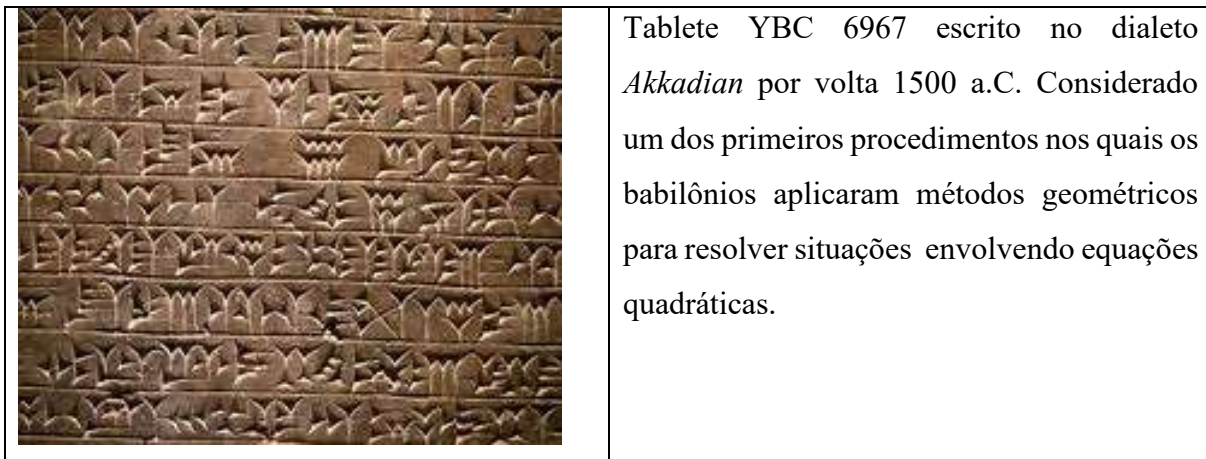
Contudo, diante do problema, percebemos que o comprimento deve ser 30. Cabe destacar que, por se tratar de uma medida, a raiz negativa não pode ser considerada solução para o problema.

Segundo Rosa (2008), um outro importante problema matemático encontrado em uma placa de argila é o Tablete YBC 6967, escrito no dialeto *Akkadian* por volta de 1500 a.C., é considerado um dos primeiros problemas em que os babilônios aplicaram métodos geométricos

para resolver situações envolvendo equações do segundo grau. O problema pode ser enunciado da seguinte forma:

“O comprimento de um retângulo excede a sua largura em sete unidades. Sabendo-se que a área do retângulo é de 60 unidades quadradas, determine o seu comprimento e a sua largura.”

Figura 9: Tablete YBC 6967 com escrita cuneiforme



Fonte: Yale Peabody Museum

Sejam $l, c \in \mathbb{R}$ as medidas da largura e do comprimento de um retângulo, respectivamente, com a restrição natural $l > 0$ e $c > 0$. As condições do problema são formalizadas por:

$$\text{i) } c = l + 7, \text{ ii) } c \cdot l = 60.$$

De (i) e (ii) temos

$$(l + 7) \cdot l = 60 \Rightarrow l^2 + 7l - 60 = 0.$$

Trata-se de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx + c = 0$, de coeficientes

$$a = 1, b = 7 \text{ e } c = -60$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 289.$$

Como $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais distintas, dadas por

$$l = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 17}{2}.$$

Logo,

$$l' = \frac{-7+17}{2} = 5 \text{ e } l'' = \frac{-7-17}{2} = -12.$$

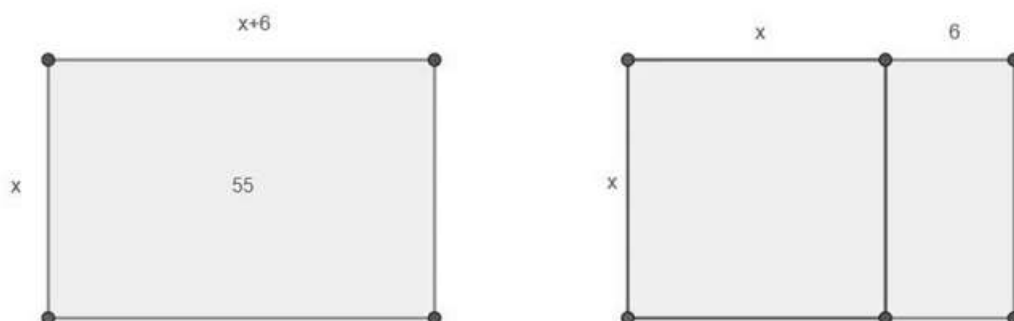
Impondo a condição de $l > 0$, concluímos que as dimensões do retângulo são $l = 5$ e $c = 12$.

Uma característica comum em cálculos utilizados pelos babilônios para resolver situações geométricas era o método “cortar e colar”. Vejamos outro problema da civilização babilônica.

“O comprimento de um retângulo excede a sua largura em seis unidades. Sabendo-se que a área do retângulo é de 55 unidades quadradas, determine o seu comprimento e a sua largura.”

Chamemos de x a medida da largura e de y a medida do comprimento. Como o comprimento excede a largura em 6 unidades então $y = x + 6$. Dessa forma geometricamente temos,

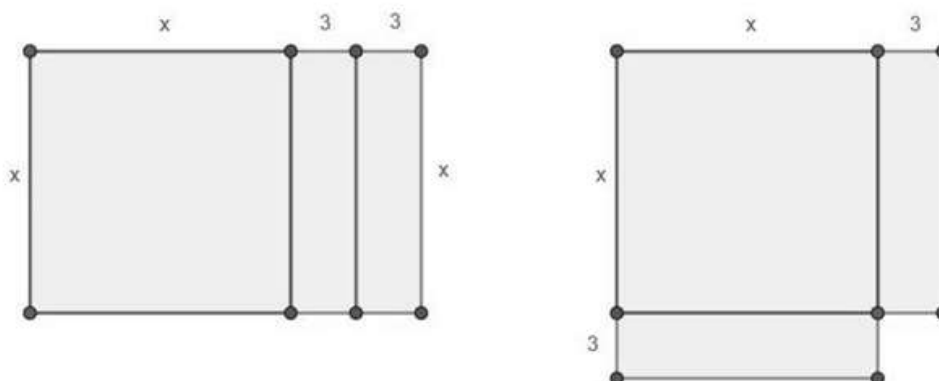
Figura 10: Método babilônico de “cortar e colar” (1ª passagem)



Fonte: Neres,2023.

Perceba que a figura inicial, com área $A_1 = x(x + 6)$, aplicando o método babilônico de “cortar e colar” formamos a Figura 10. Note que o mesmo retângulo da figura 10 foi “cortado” em um quadrado de $A_q = x^2$ e um retângulo de $A_r = 6 \cdot x$.

Figura 11: Método babilônico de “cortar e colar” (2ª passagem)

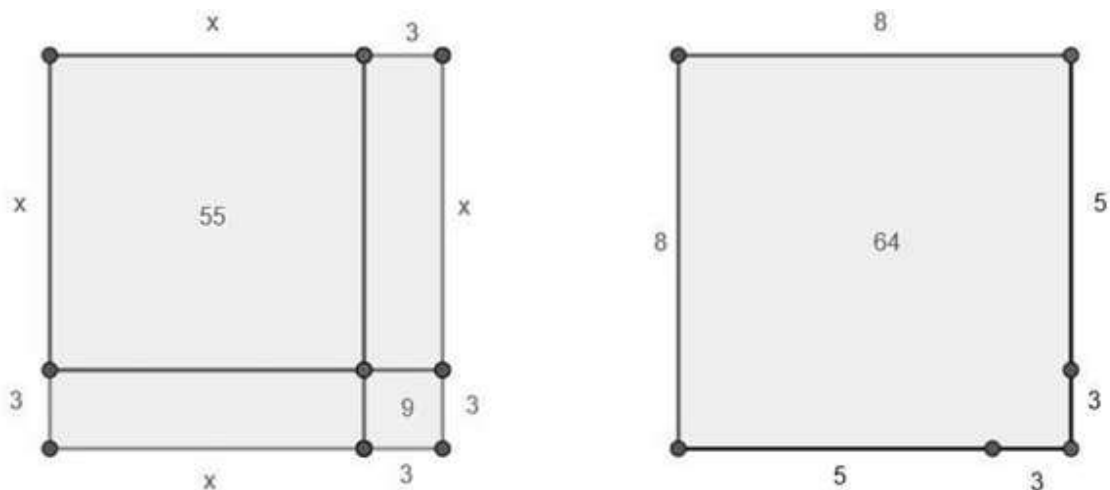


Fonte: Neres,2023.

Note que o primeiro retângulo é composto por um quadrado de $A_q = x^2$ e dois retângulos de $A_r = 3x$. Já o segundo retângulo é determinado por $A_q = 3x + x(x + 3) + 3 \cdot 3$. Note que o 2º retângulo é um quadrado.

Temos então que $55 + 9 = 64$. (O quadrado que falta = 9 unidades de área). Como, $64 = 8^2 \Leftrightarrow (5 + 3)^2$, a medida procurada x é igual a 5 unidades de comprimento. Dessa forma,

Figura 12: Método babilônico de “cortar e colar” (3ª passagem)



Fonte: Neres,2023.

O chamado método de “cortar e colar” corresponde, em linguagem matemática, ao método de completar quadrados. Tal procedimento consiste em reescrever um trinômio quadrático como o quadrado de um binômio acrescido de uma constante, permitindo não apenas a resolução algébrica da equação associada, mas também uma interpretação geométrica, especialmente quando se consideram áreas. Essa abordagem evidencia, em particular, a estrutura das soluções reais da equação quadrática.

Historicamente, a resolução de equações do segundo grau foi sistematizada por diversos matemáticos. No contexto usual do ensino contemporâneo, destaca-se a chamada fórmula resolutiva, frequentemente atribuída a Bháskara (1114–1185), matemático indiano que, em sua obra *Bījagaṇita*, apresentou métodos gerais para a resolução de problemas algébricos, incluindo equações quadráticas.

Consideremos a equação do segundo grau na forma geral

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que a equação é completa quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, e incompleta quando pelo menos um desses coeficientes é nulo. Em particular, distinguem-se os seguintes casos:

- $b = 0$: equação incompleta em b ;
- $c = 0$: equação incompleta em c ;
- $b = c = 0$: caso particular em que a equação reduz-se a $ax^2 = 0$.

O estudo sistemático dessas equações permite compreender o comportamento das raízes em função dos coeficientes, bem como a estrutura da função quadrática associada.

Do ponto de vista pedagógico, embora o ensino tradicional enfatize a aplicação repetitiva da fórmula resolutiva, é matematicamente mais enriquecedor explorar diferentes estratégias (algébricas e geométricas) que conduzam à solução do problema. Tal abordagem favorece a compreensão conceitual e prepara o estudante para contextos mais avançados.

A equação do segundo grau, usualmente introduzida no 9º ano do Ensino Fundamental, é frequentemente apresentada por meio de sua forma geral e de procedimentos algorítmicos de resolução. Nesse contexto, observa-se uma prática pedagógica fortemente baseada na repetição, materializada, em geral, na resolução de extensas listas de exercícios, cujo objetivo central é a memorização de regras e fórmulas. Embora tal abordagem contribua para a aquisição de habilidades operacionais, ela tende a limitar a compreensão conceitual dos estudantes acerca do objeto matemático em questão.

Diante disso, este trabalho propõe a apresentação de diferentes abordagens para a resolução de equações do segundo grau, contemplando tanto representações algébricas quanto geométricas. A ênfase recai sobre a construção de significados e o desenvolvimento de competências que serão fundamentais para o estudo de conteúdos mais avançados, particularmente no âmbito da análise de funções.

Para alcançar esse objetivo, serão exploradas demonstrações de fórmulas, aplicações em problemas e discussões detalhadas de etapas intermediárias dos cálculos. Tais elementos visam proporcionar uma compreensão mais profunda do comportamento da função quadrática associada ao trinômio do segundo grau, favorecendo, assim, uma resolução que transcenda o caráter meramente mecânico.

Inicialmente, abordaremos a resolução de equações do segundo grau incompletas, avançando, em seguida, para o método geral de resolução, amplamente conhecido no Brasil como “fórmula de Bháskara”. Paralelamente, serão apresentadas diferentes estratégias algébricas comumente utilizadas nos anos finais do Ensino Fundamental, com o intuito de evidenciar a relevância de múltiplas abordagens. Essa diversidade metodológica busca promover a autonomia do estudante na escolha dos procedimentos que considerar mais adequados.

Por fim, cabe destacar um aspecto histórico relevante. De acordo com a *Revista do Professor de Matemática* (1996), a denominação “fórmula de Bháskara” consolidou-se no Brasil por volta da década de 1960, não sendo usual em outros países. Há ainda registros de que o termo foi utilizado anteriormente pelo professor André Pérez y Marín, em 1909, ao se referir

ao método de resolução de equações quadráticas. Tal fato evidencia que a nomenclatura consagrada no contexto brasileiro não corresponde, necessariamente, a uma padronização internacional

Passemos agora ao estudo de um caso geral de equação incompleta. Suponha

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b = 0 \text{ e } c \neq 0.$$

A equação reduz-se a

$$ax^2 + c = 0.$$

Resolvendo, obtemos

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Assim,

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

A existência de soluções reais depende do sinal da quantidade $-\frac{c}{a}$. Mais precisamente:

- Se $-\frac{c}{a} > 0$, a equação admite duas soluções reais distintas, dadas por

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

as quais possuem o mesmo valor absoluto e sinais opostos;

- Se $-\frac{c}{a} = 0$, há uma raiz real dupla;
- Se $-\frac{c}{a} < 0$, não existem soluções reais.

Esse resultado evidencia que, no caso $b = 0$ e $c \neq 0$, as raízes, quando reais, são simétricas em relação à origem, refletindo a simetria da função quadrática $f(x) = ax^2 + c$ em relação ao eixo vertical $x=0$.

Por exemplo: Considere a equação do segundo grau $2x^2 - 32 = 0$, onde $a = 2, b = 0$ e $c = 32$.

Somando 32 em ambos os membros, obtemos

$$2x^2 = 32.$$

Dividindo ambos os membros por 2, segue que

$$x^2 = 16.$$

Portanto, as soluções reais da equação são dadas por $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

Conclui-se que o conjunto solução é $S = \{+4, -4\}$.

Note que, para haver soluções reais no caso de $b = 0$ e $c \neq 0$, é necessário que os sinais de a e c sejam diferentes.

Considere agora que $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$. Temos, então, uma equação do segundo grau incompleta em c .

Segue o algoritmo de resolução, $ax^2 + bx + c = 0$. Como $c = 0$, temos $ax^2 + bx = 0$.

Fatorando o termo comum x , obtemos $x \cdot (ax + b) = 0$.

Segue-se de imediato que $x = 0$ ou $ax + b = 0$. Logo,

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Portanto, o conjunto solução é dado por

$$S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}.$$

Por exemplo, considere a equação $2x^2 - 32x = 0$, na qual $a = 2$, $b = -32$ e $c = 0$. Fatorando, temos $2x \cdot (x - 16) = 0$, de onde obtemos $x = 0$ ou $x = 16$.

Assim, o conjunto solução é $S = \{0, 16\}$.

No contexto do ensino de equações algébricas, é desejável que a progressão das atividades propostas esteja associada à consolidação efetiva das habilidades previamente desenvolvidas, de modo que o aumento do nível de complexidade ocorra de forma gradual e fundamentada.

Do ponto de vista matemático, consideremos a equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Suponha, agora, o caso particular em que $a \neq 0$ e $b = c = 0$. Nessas condições, a equação reduz-se a $ax^2 = 0$.

Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por a , obtendo a equação equivalente

$$x^2 = 0.$$

Observa-se que $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot x = 0$.

Pela propriedade do produto nulo no corpo \mathbb{R} , segue que $x = 0$. De modo que $S = \{0\}$.

Por exemplo, seja $6x^2 = 0$, temos, nessa equação, $a = 6$, $b = c = 0$. Logo,

$$6x^2 = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{6} = 0 \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 0.$$

Concluimos, assim, o estudo das equações do segundo grau incompletas, contemplando os diferentes casos obtidos pela anulação de um ou mais coeficientes. Passamos agora à análise do caso geral, isto é, das equações quadráticas completas, bem como à apresentação de distintos métodos de resolução, tais como a fatoração, o método de completar quadrados, as relações de Girard e a fórmula geral de resolução.

Considere a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

O problema consiste em determinar o conjunto solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\}.$$

Um dos métodos mais difundidos para a obtenção das raízes é a chamada fórmula de Bháskara, segundo a qual as soluções são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação. A natureza das soluções depende do sinal de Δ : se $\Delta > 0$, existem duas raízes reais distintas; se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla; e, se $\Delta < 0$, não há soluções reais.

Por exemplo, considere a equação $x^2 - 3x - 10 = 0$, na qual $a = 1, b = -3$ e $c = -10$. Calculando o discriminante, obtemos

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49.$$

Como $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais e distintas. Aplicando a fórmula geral, segue que

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{+3 \pm 7}{2}.$$

Portanto,

$$x' = \frac{3+7}{2} = 5 \text{ e } x'' = \frac{3-7}{2} = -2.$$

Conclui-se que o conjunto solução é $S = \{5, -2\}$.

No estudo das equações, é fundamental que o estudante compreenda o papel do discriminante na caracterização das soluções. Além da fórmula resolutive (fórmula de Bháskara), é matematicamente relevante apresentar métodos alternativos para a determinação das raízes, ampliando o repertório técnico dos estudantes. Dentre esses métodos, destaca-se o método da fatoração, que consiste em reescrever a equação sob a forma de um produto de fatores, explorando identidades algébricas notáveis.

Em particular, utilizam-se as seguintes identidades fundamentais:

(i) Quadrado da soma de dois termos

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(ii) Quadrado da diferença de dois termos

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(iii) Diferença de quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

De modo geral, o método da fatoração baseia-se na identificação de padrões algébricos, como trinômios quadrados perfeitos, diferença de quadrados, ou ainda na extração de fatores comuns e no reagrupamento de termos.

Por exemplo,

$$4x^2 - 32x = 0.$$

Nota-se que

$$4x \cdot x - 8 \cdot 4x = 0.$$

Observa-se que ambos os termos possuem o fator comum $4x$. Colocando-o em evidência, obtemos:

$$4x \cdot (x - 8) = 0.$$

Pela propriedade do produto nulo, segue que $4x = 0$ ou $(x - 8) = 0$, de onde se conclui que as soluções são $x = 0$ ou $x = 8$.

Esse procedimento ilustra como a fatoração pode simplificar significativamente a resolução de equações quadráticas, sobretudo em casos nos quais a estrutura algébrica da expressão favorece tal abordagem.

Mesmo quando o trinômio quadrático não é, inicialmente, um quadrado perfeito, é possível recorrer a manipulações algébricas que preservam a equivalência da equação, com o objetivo de obter uma expressão fatorável. Uma técnica recorrente consiste em adicionar e subtrair uma mesma constante, isto é, “somar zeros”, de modo a completar quadrados.

Considere, por exemplo, a equação $x^2 - 22x + 120 = 0$.

Observa-se que o coeficiente do termo linear sugere a construção de um quadrado perfeito envolvendo o número 11, uma vez que $-22x = -2 \cdot 11 \cdot x$. Assim, adicionamos e subtraímos $11^2 = 121$, preservando a igualdade:

$$x^2 - 22x + 120 + 1 - 1 = 0,$$

isto é,

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 11 + 11^2 = 1 \Rightarrow (x - 11)^2 = 1.$$

O membro da esquerda passa a ser um trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 - 22x + 121 = (x - 11)^2,$$

de modo que a equação se reduz a

$$(x - 11)^2 = 1,$$

onde

$$(x - 11) = \pm\sqrt{1}.$$

Donde seguem as soluções $x = 12$ ou $x = 10$.

Além disso, há situações em que a fatoração pode ser realizada em etapas sucessivas, mediante a identificação de fatores comuns e o uso de identidades algébricas. Considere a equação

$$3x^2 - 75 = 0.$$

Inicialmente, colocamos o fator comum 3 em evidencia:

$$3x^2 - 3 \cdot 25 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 25) = 0.$$

Em seguida, reconhece-se uma diferença de quadrados:

$$(x^2 - 25) = x^2 - 5^2 = (x + 5) \cdot (x - 5).$$

Logo, a equação pode ser reescrita como

$$3 \cdot (x + 5) \cdot (x - 5) = 0.$$

Pela propriedade do produto nulo, segue que $x + 5 = 0$ ou $x - 5 = 0$, de onde se obtém

$$x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

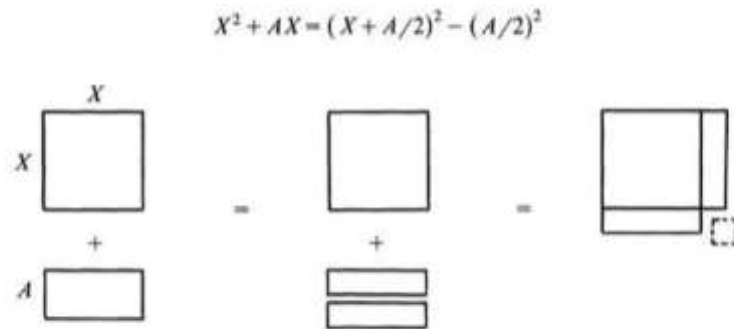
Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{-5, 5\}$.

O método da fatoração revela-se uma ferramenta algébrica eficiente, não apenas para a resolução de equações quadráticas, mas também para o desenvolvimento de habilidades fundamentais, como a manipulação simbólica e o reconhecimento de estruturas algébricas. Tais competências são amplamente mobilizadas em contextos mais avançados da matemática, como, por exemplo, no cálculo de limites, em que a fatoração desempenha um papel central na simplificação de expressões indeterminadas.

Passemos agora ao método de completar quadrados, cuja origem remonta à matemática babilônica. Trata-se de um procedimento que admite tanto uma interpretação algébrica quanto geométrica, o que o torna particularmente relevante do ponto de vista didático. Sob a perspectiva geométrica, o método permite visualizar a construção de um quadrado a partir de uma configuração inicial incompleta; sob o ponto de vista pedagógico, essa abordagem pode ser explorada com o auxílio de materiais concretos, favorecendo uma aprendizagem mais significativa.

De acordo com Lima et al. (2013, p.49) este método consiste em reconhecer que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, de modo que $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2$, isto é, $a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$. Portanto, pelo raciocínio apresentado, podemos concluir que completar quadrados consiste em escrever uma expressão do tipo $a^2 + 2ab$ sob a forma $(a + b)^2 - b^2$.

Figura 13. Completando quadrados



Fonte: Mathematical Association of America

Considere a equação $x^2 + 4x = 12$. Com o objetivo de resolvê-la pelo método de completar quadrados, procedemos adicionando o termo necessário para transformar o primeiro membro em um quadrado perfeito. Observa-se que,

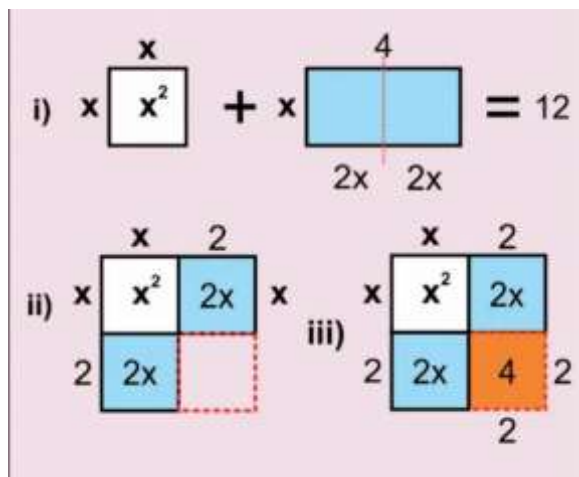
$$x^2 + 4x = 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 12 + 4.$$

Dessa forma, obtemos $x^2 + 4x + 4 = 16$, isto é, $(x + 2)^2 = 16$.

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, segue que $x + 2 = \pm 4$, de onde se conclui que $x = 2$ ou $x = -6$.

Do ponto de vista geométrico, a expressão $x^2 + 4x$ pode ser interpretada como a área de um retângulo formado por um quadrado de lado x acrescido de dois retângulos de dimensões x e 2 . Ao adicionar a área correspondente a um quadrado de lado 2 , completa-se um quadrado maior de lado $x + 2$, cuja área total é $(x + 2)^2$. Assim, a equação original equivale à condição de que a área desse quadrado seja igual a 16 , o que conduz naturalmente à equação $(x + 2)^2 = 16$ e, conseqüentemente, às soluções encontradas. Conforme evidenciado na Figura 14.

Figura 14: Método de completar quadrados



Fonte: <http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br>

Generalizando o procedimento de completar quadrados, é possível deduzir uma expressão fechada para as soluções de qualquer equação quadrática, independentemente de ser completa ou incompleta. Tal expressão é conhecida como fórmula resolvente da equação do segundo grau (ou fórmula de Bháskara).

Considere a equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Dividindo ambos os membros por a , obtemos

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}.$$

Dessa forma, “Completando Quadrados”, adicionamos $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros, obtendo

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

O primeiro membro é agora um quadrado perfeito:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, segue que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Isolando x , obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Definindo o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, temos, então

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como ilustração, considere a equação

$$4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

I) Por completamento de quadrados

Inicialmente, reescrevemos

$$4x^2 - 8x = -3.$$

Somando 4 a ambos os membros, obtemos $4x^2 - 8x + 4 = 1$, isto é, $(2x - 2)^2 = 1$. De onde segue

$$2x - 2 = \pm 1.$$

Assim, $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

II) Pela fórmula resolutive

Temos $a = 4$, $b = -8$ e $c = 3$. Logo,

$$\Delta = 64 - 48 = 16.$$

Assim,

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8},$$

o que fornece

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Conclui-se, portanto, que o método de completar quadrados não apenas conduz à fórmula resolutive geral, mas também fornece uma interpretação estrutural da equação quadrática, evidenciando sua conexão com quadrados perfeitos e com o processo de fatoração.

Seguiremos apresentando outras formas alternativas de determinar as raízes de uma equação do segundo grau, e agora de forma mais consistente, proporemos estratégias relacionadas à soma e ao produto das raízes, abordando, assim, as relações de Girard e o “macete” do método da soma e produto das raízes.

Pelas relações de Girard, tem-se:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \text{ e } x' \cdot x'' = \frac{c}{a},$$

onde x' e x'' são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Essas relações decorrem da fatoração do polinômio quadrático associado. De fato, sendo x' e x'' raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 + \frac{a}{a}bx + \frac{a}{a} \cdot c. \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right). \\ &= a \left[x^2 - \left(-\frac{b}{a} \right)x + \frac{c}{a} \right] \end{aligned}$$

Quando $a = 1$, temos:

$$x^2 + bx + c = x^2 - Sx + P,$$

onde, $S = x' + x''$ e $P = x' \cdot x''$.

Essa caracterização permite determinar as raízes por meio da busca de pares (x', x'') que satisfaçam simultaneamente as condições impostas pela soma e pelo produto, quando tais raízes pertencem a um domínio conveniente.

Por exemplo, considere a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Sabemos que

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5 \text{ e } P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6.$$

Procuramos, então, dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 6. Observa-se que 2 e 3 satisfazem tais condições, logo

$$x' = 2 \text{ e } x'' = 3.$$

Por outro lado, podemos obter, através do método soma e produto uma outra forma representativa da equação do segundo grau.

Seja $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação do segundo grau e sejam x' e x'' raízes da equação.

Vimos que,

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 - \left(-\frac{b}{a} \right) x + \frac{c}{a} \right].$$

Substituindo as expressões fornecidas pelas relações de Girard, obtemos:

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x''].$$

Fatorando a expressão quadrática no interior dos colchetes obtemos,

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x') \cdot (x - x'').$$

Como exemplo, considere a equação

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Fatorando a equação temos,

$$x^2 - 7x + 10 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 5).$$

Logo $x' = 2$ e $x'' = 5$, são as raízes da equação.

Concluimos, neste capítulo, o estudo das raízes de um trinômio do segundo grau, no qual foram apresentados diferentes métodos de resolução, incluindo abordagens alternativas de reconhecida utilidade no contexto educacional. Ressalta-se que, no desenvolvimento desse conteúdo, é fundamental que o docente evidencie não apenas os procedimentos operacionais, mas também a origem e a fundamentação teórica das técnicas empregadas, de modo a ampliar o repertório conceitual e metodológico dos estudantes.

Na sequência, serão introduzidos os conceitos de gráfico de uma função e de parábola, bem como a análise das diferentes configurações geométricas que o gráfico de uma função quadrática pode assumir no plano cartesiano, em função da variação de seus coeficientes.

2.3 Gráfico da Função

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função é uma aplicação

$$f: A \rightarrow B,$$

isto é, uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$. O conjunto A é denominado *domínio* da função, enquanto B é chamado *contradomínio*. A imagem de um elemento $x \in A$ pela função f é denotada por $f(x)$, e escreve-se, de forma mais formal,

$$x \mapsto f(x).$$

A definição de função implica duas propriedades fundamentais:

1. **(Existência)** Para todo $x \in A$, existe $f(x) \in B$;
2. **(Unicidade)** Se $x_1, x_2 \in A$ são tais que $x_1 = x_2$, então $f(x_1) = f(x_2)$.

O gráfico da função $f: A \rightarrow B$, denotado por G_f , é o subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ dado por

$$G_f = \{(x, f(x)) \in A \times B; x \in A\}.$$

Equivalentemente, $G_f \subseteq A \times B$ é caracterizado pela propriedade de que, para cada $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in G_f$ e $y = f(x)$.

No caso em que $A, B \subseteq \mathbb{R}$, essa unicidade corresponde ao conhecido *teste da reta vertical*: qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas intercepta o gráfico em, no máximo, um ponto.

Consideremos agora a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

O gráfico de f é uma parábola, que pode ser caracterizada geometricamente como o lugar geométrico dos pontos no plano que são equidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma reta fixa d (diretriz).

Os pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox correspondem às soluções da equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

isto é, às raízes da função. A natureza dessas raízes é determinada pelo discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac:$$

- Se $\Delta > 0$, existem duas raízes reais distintas e o gráfico intercepta o eixo Ox em dois lugares distintos.
- Se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla e o gráfico tangencia o eixo Ox .
- Se $\Delta < 0$, não existem raízes reais e o gráfico não intercepta o eixo Ox .

A parábola possui um eixo de simetria vertical, que passa pelo seu *vértice* $V=(x_v, y_v)$. Se x' e x'' são as raízes reais (quando existem), então, pela simetria, a abscissa de vértice V é o ponto médio entre elas:

$$x_v = \frac{x' + x''}{2}.$$

Como

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a},$$

então, $x_v = -\frac{b}{2a}$.

A ordenada do vértice é dada por $y_v = f(x_v)$. Substituindo, temos:

$$y_v = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c.$$

Simplificando, obtemos:

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, segue que: $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Portanto, o vértice da parábola associada à função quadrática

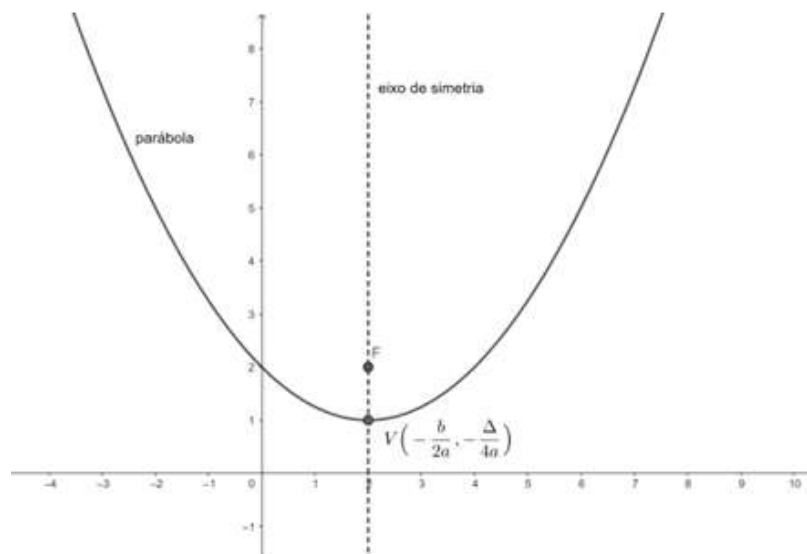
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

é dado por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Conforme representado na Figura 15.

Figura 15: Vértice da Parábola



Fonte: Neres,2023.

2.3.1 Vários tipos de gráficos

Analisaremos, a seguir, o comportamento da função quadrática

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0,$$

à medida que variamos os coeficientes a , b e c . Tal análise permite compreender, de forma estruturada, como esses parâmetros influenciam propriedades geométricas do gráfico, tais como concavidade, posição do vértice, interseções com os eixos coordenados e simetria.

No contexto do ensino básico, em particular nos anos finais do ensino fundamental, é comum introduzir a construção de gráficos de funções por meio da determinação de pares ordenados. Esse procedimento consiste em selecionar valores $x \in \mathbb{R}$, calcular as respectivas imagens $f(x)$ e, em seguida, representar os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano. Embora operacionalmente simples, esse método possui caráter essencialmente exploratório e não evidencia, de imediato, a estrutura analítica da função.

Como ilustração, considere o problema de esboçar o gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1.$$

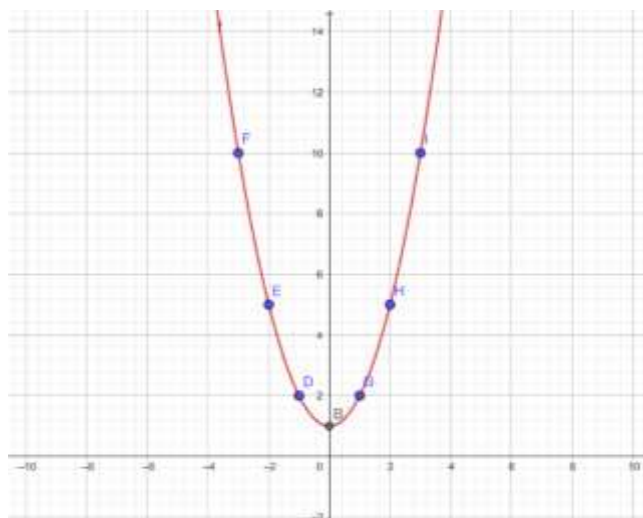
Nesse caso, é usual que o estudante construa uma tabela de valores, escolhendo um conjunto finito de pontos x (por exemplo, simetricamente distribuídos em torno da origem), com o objetivo de obter pares ordenados que orientem a representação gráfica. Tal procedimento, embora útil em uma abordagem inicial, deve ser posteriormente complementado por uma análise mais teórica, baseada nas propriedades intrínsecas da função quadrática, como a identificação do vértice, do eixo de simetria e da concavidade da parábola.

A seguir, apresentamos uma tabela de valores:

x	$f(x) = x^2 + 1$	y	(x, y)
-3	$f(-3) = (-3)^2 + 1$	10	$(-3, 10)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 + 1$	5	$(-2, 5)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 + 1$	2	$(-1, 2)$
0	$f(0) = 0^2 + 1$	1	$(0, 1)$
1	$f(1) = 1^2 + 1$	2	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 + 1$	5	$(2, 5)$
3	$f(3) = 3^2 + 1$	10	$(3, 10)$

Logo em seguida, esboça-se o gráfico no plano cartesiano com as coordenadas indicadas na tabela.

Figura16: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Passemos agora à análise da família de funções

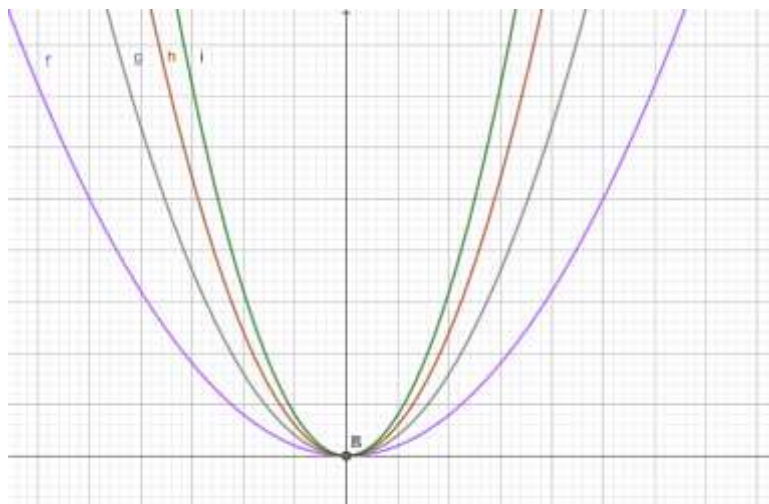
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2, a \neq 0,$$

onde, implicitamente, consideramos $b = c = 0$. Essas funções constituem um caso particular importante, pois seus gráficos são parábolas com vértice na origem $(0,0)$ e eixo de simetria coincidente com o eixo Oy .

Consideremos inicialmente o caso $a > 0$. Sejam, por exemplo, as funções

$$f(x) = x^2, g(x) = 2x^2, h(x) = 3x^2, i(x) = 4x^2.$$

Figura 17: Gráfico das funções f, g, h, i ;



Fonte: Produzido pelo próprio autor

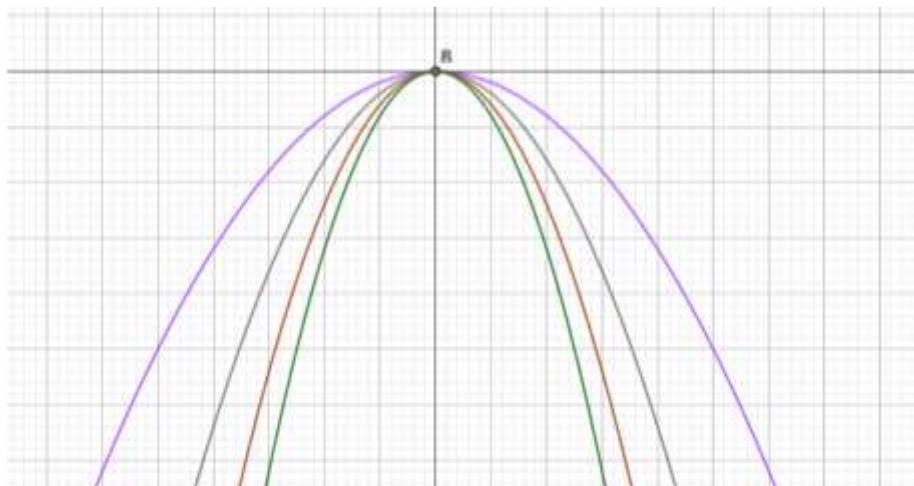
Note que a variação do coeficiente a controla a abertura da parábola: quanto maior o valor de $a > 0$, mais “fechada” (ou estreita) é a parábola. Formalmente, para $x \neq 0$, se $a_1 > a_2 > 0$, então $a_1x^2 > a_2x^2$, o que implica que o gráfico de $y = a_1x^2$ cresce mais

rapidamente que o de $y = a_2x^2$, resultando em uma parábola mais contraída em torno do eixo de simetria.

Consideremos agora o caso $a < 0$. Sejam, por exemplo, as funções

$$f(x) = -x^2, g(x) = -2x^2, h(x) = -3x^2, i(x) = -4x.$$

Figura 18: Gráfico das funções f, g, h, i ;



Fonte: Produzido pelo próprio autor

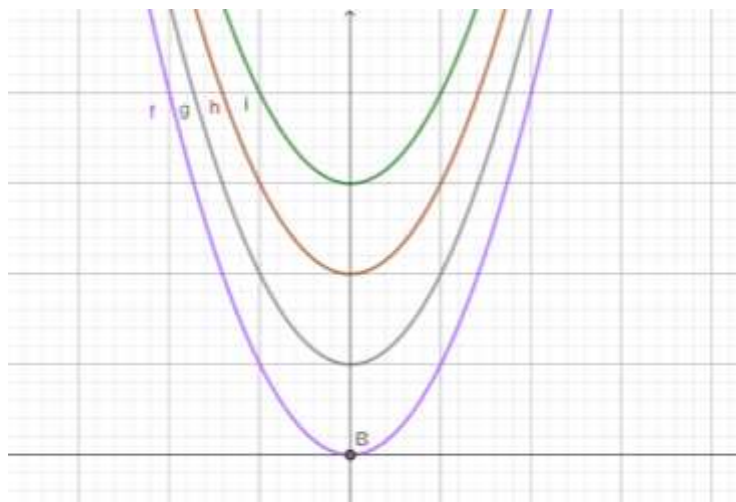
Note que, quando $a > 0$, e $b = c = 0$ possui concavidade voltada para cima, assumindo vértice na origem, dessa forma, a função possui ponto mínimo e é ilimitada superiormente. Por outro lado, quando $a < 0$, e $b = c = 0$, o gráfico possui concavidade voltada para baixo, assumindo ponto máximo no vértice e sendo ilimitada inferiormente.

Analisemos a família de funções quadráticas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + c, a \neq 0$, no qual $b = 0$.

Consideremos, inicialmente, o caso $a > 0$ e $c \geq 0$. Sejam, por exemplo,

$$f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1, h(x) = x^2 + 2, i(x) = x^2 + 3.$$

Figura 19: Gráfico das funções f, g, h, i ;

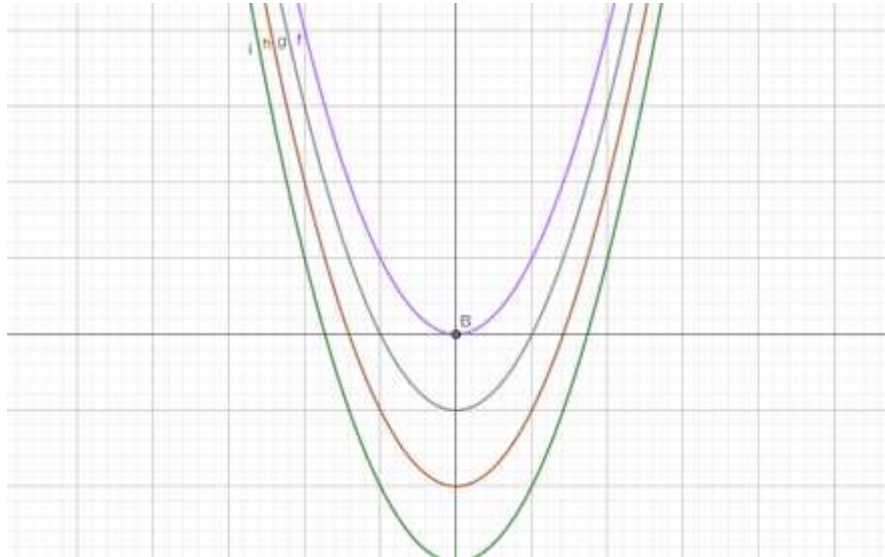


Fonte: Produzido pelo próprio autor

Vejam, o caso $a > 0$ e $c \leq 0$. Sejam, por exemplo,

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad h(x) = x^2 - 2, \quad i(x) = x^2 - 3.$$

Figura 20: Gráfico das funções f, g, h, i ;

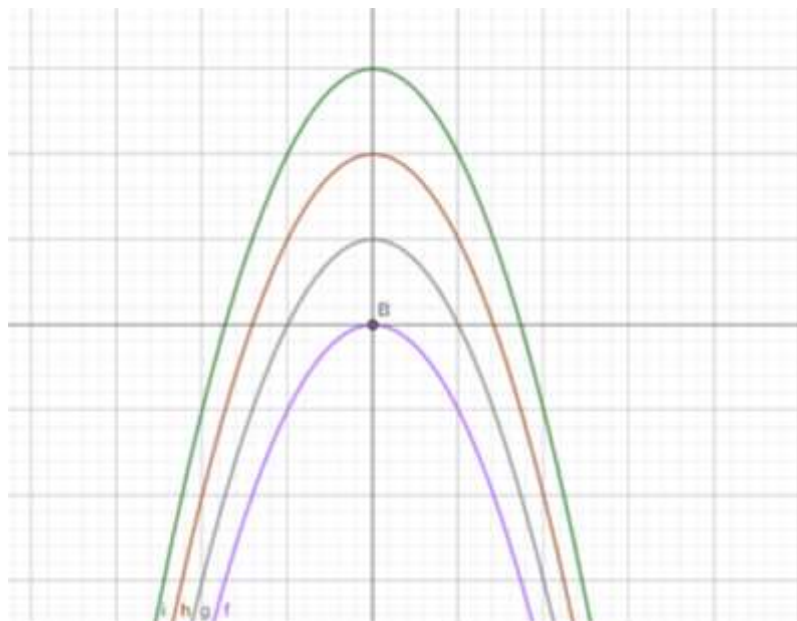


Fonte: Produzido pelo próprio autor

Consideremos, a seguir, o comportamento da função no caso $a < 0$ e $c \geq 0$. Sejam, por exemplo,

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = -x^2 + 1, \quad h(x) = -x^2 + 2, \quad i(x) = -x^2 + 3.$$

Figura 21: Gráfico das funções f, g, h, i ;

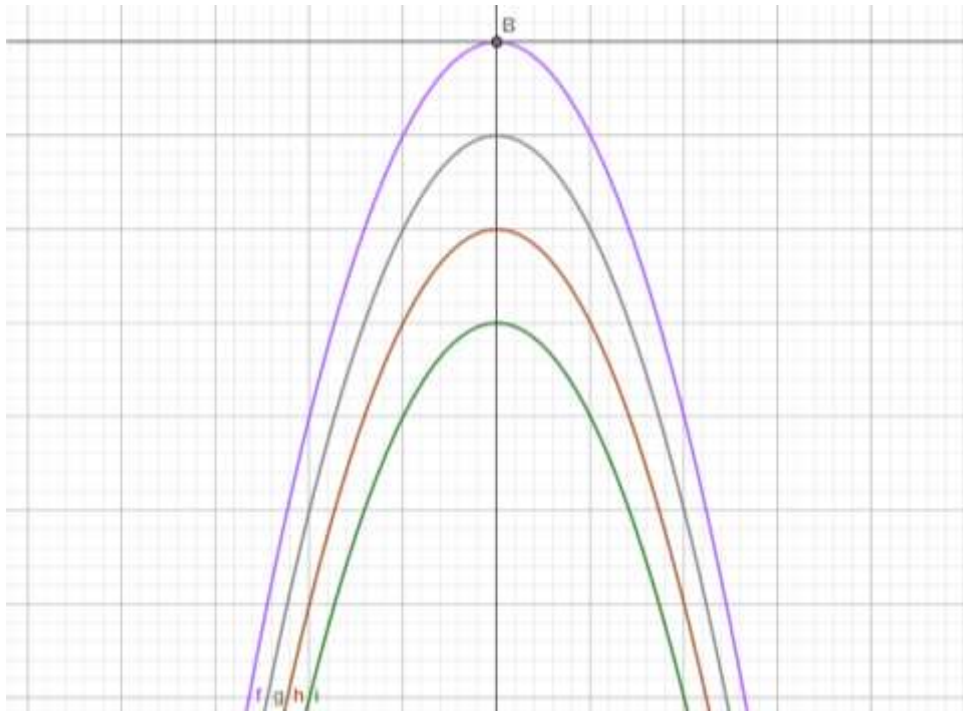


Fonte: Produzido pelo próprio autor

Vejam, agora, o caso $a < 0$ e $c \leq 0$. Sejam, por exemplo,

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = -x^2 - 1, \quad h(x) = -x^2 - 2, \quad i(x) = -x^2 - 3.$$

Figura 22: Gráfico das funções f, g, h, i ;



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Podemos perceber que o coeficiente c caracteriza a translação vertical, isto é, de modo geral, funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$ possuem vértice $V(0,c)$.

Consideremos a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx, a \neq 0.$$

Note, inicialmente que $f(x) = x(ax + b)$, de modo que suas raízes são $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$, quando $b \neq 0$.

Completando quadrados, obtemos a forma canônica:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a},$$

da qual segue que o vértice da parábola é

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} \right).$$

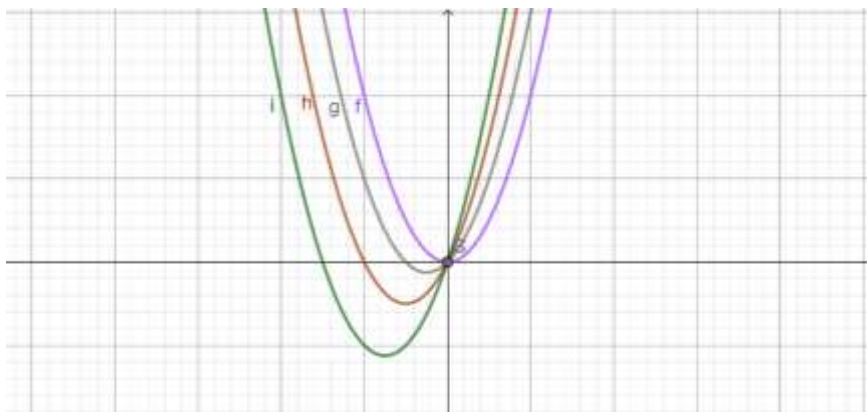
Assim, o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$, interceptando o eixo Ox nos pontos já determinados e passando pela origem.

A seguir, procederemos ao esboço do gráfico dessa função e, com base nele, analisaremos de forma mais sistemática suas principais características, tais como concavidade, vértice, eixo de simetria e interseções com os eixos coordenados.

Considere as funções:

$$f(x) = x^2; g(x) = x^2 + x; h(x) = x^2 + 2x; i(x) = x^2 + 3x; (a = 1 > 0 \text{ e } b \geq 0).$$

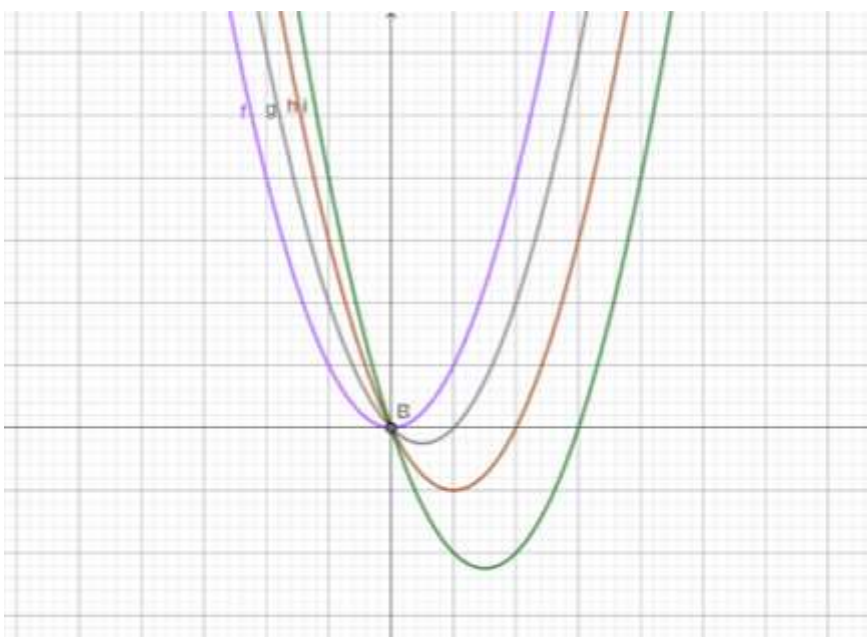
Figura 23: Gráfico das funções f, g, h, i ;



Fonte: Produzido pelo próprio autor

$$f(x) = x^2; g(x) = x^2 - x; h(x) = x^2 - 2x; i(x) = x^2 - 3x; (a = 1 > 0 \text{ e } b \leq 0)$$

Figura 24: Gráfico das funções f, g, h, i ;



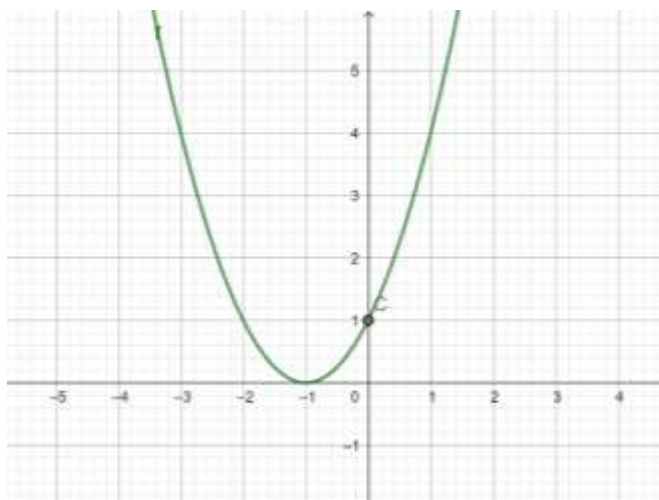
Fonte: Produzido pelo próprio autor

Podemos perceber que o coeficiente $b \neq 0$ provoca um deslocamento do gráfico tanto verticalmente como horizontalmente. Algo bastante importante é que o coeficiente c corresponde ao ponto em que a parábola intercepta o Oy , isto é, $f(0) = c$.

Veremos, adiante, o esboço de gráficos da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com todos os coeficientes diferentes de zero.

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \text{ com } a > 0, b > 0 \text{ e } c > 0.$$

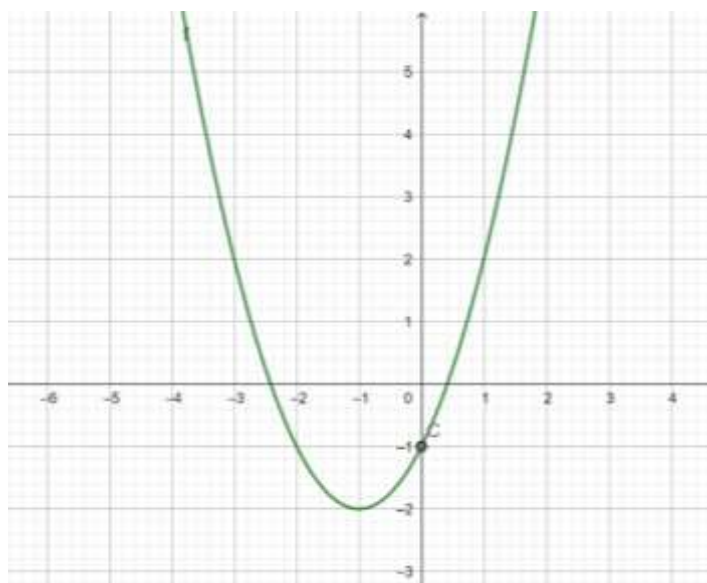
Figura 25: Gráfico da $f(x) = x^2 + 2x + 1$, com $a > 0, b > 0$ e $c > 0$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

$$f(x) = x^2 + 2x - 1, \text{ com } a > 0, b > 0 \text{ e } c < 0.$$

Figura 26: Gráfico da $f(x) = x^2 + 2x - 1$, com $a > 0, b > 0$ e $c < 0$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

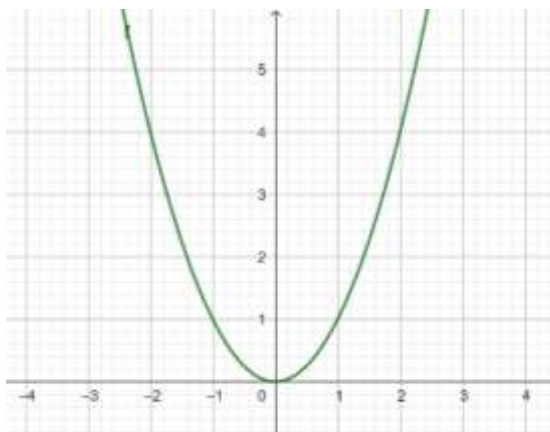
Veremos a seguir o papel de cada coeficiente e assim compreender melhor o comportamento da função quadrática de acordo com seus coeficientes.

i) Sobre o coeficiente a e o gráfico.

O coeficiente a da função quadrática relaciona-se com o comportamento da parábola associando-se ao sentido da concavidade (voltada para cima ou voltada para baixo) e à abertura da parábola. Assim podemos perceber que, quando $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima, quando $a < 0$, possui concavidade voltada para baixo. Além disso, quando

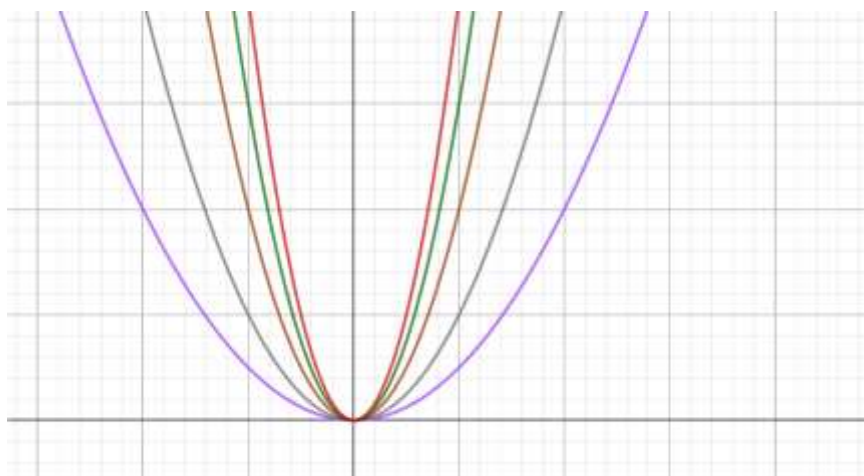
variarmos o valor de a , a abertura da parábola aumenta ou diminui: quando maior $|a|$, mais “fechada” é a parábola; quanto menor $|a|$, mais “aberta” ela é.

Figura 27: Gráfico da $f(x) = ax^2$, com $a = 1$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

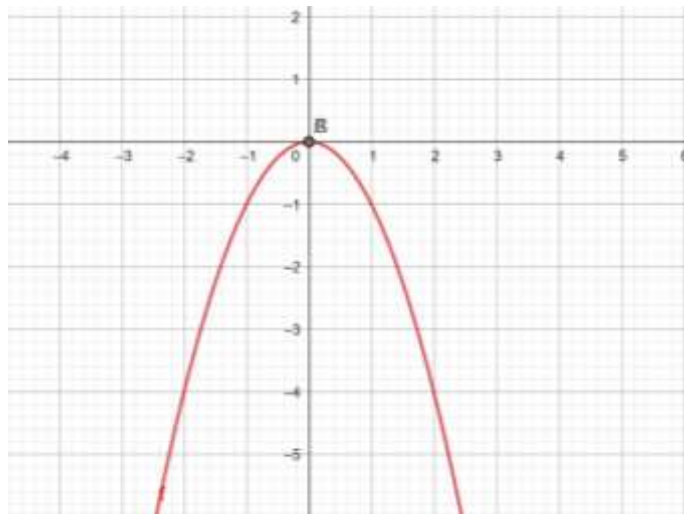
Figura 28: Gráfico Família da $f(x) = ax^2$, com $a > 0$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

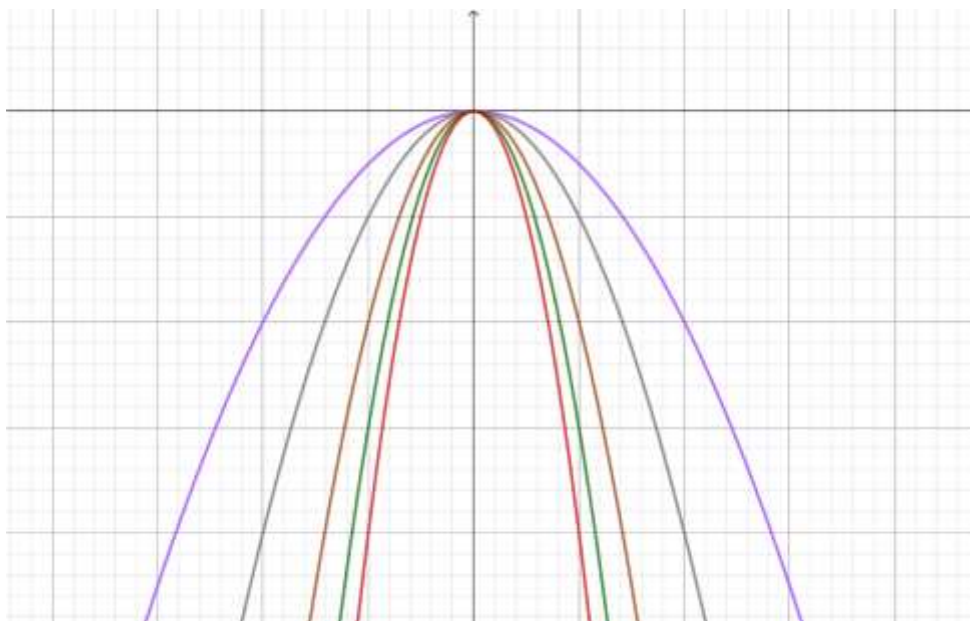
Para compreender o comportamento da função quadrática na forma $f(x) = ax^2$, é importante analisar seus gráficos para diferentes valores do coeficiente a . Considerando $x = -1$, observa-se como a variação desse coeficiente influencia a concavidade, a abertura e a posição da parábola no plano cartesiano. Assim, os gráficos a seguir apresentam representações da função $f(x) = ax^2$, destacando as principais características associadas aos valores assumidos por a .

Figura 29: Gráfico da $f(x) = ax^2$, com $a = -1$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 30: Gráfico Família da $f(x) = ax^2$, com $a < 0$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

ii) Coeficiente b e o gráfico

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Denotando por $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola, tem-se

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Logo, o vértice é dado por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

Substituindo $x_v = -\frac{b}{2a}$ em $f(x)$, obtemos

$$f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c = -ax_v^2 + c.$$

Portanto,

$$V(x_v, -ax_v^2 + c), \text{ com } x_v = -\frac{b}{2a}.$$

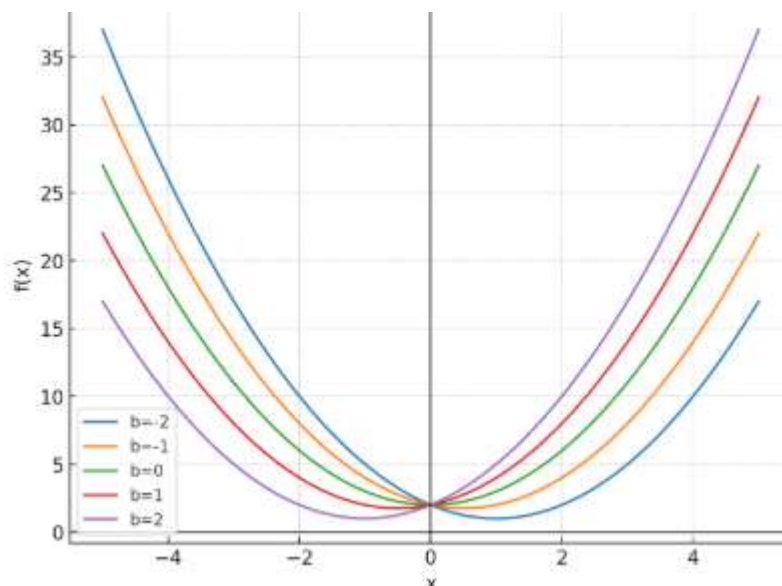
Assim, fixados a e c , o coeficiente b controla a posição do vértice, pois $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Logo, ao variar b , o vértice desloca-se ao longo do plano cartesiano. Conforme apresentado no gráfico da Figura 24. A coordenada do vértice ajusta-se de acordo com

$$y_v = -ax_v^2 + c.$$

Para compreendermos melhor considere a função $f(x) = x^2 + bx + 2$. Note que fixamos a e c ($a = 1$ e $c = 2$). Verificaremos a seguir o comportamento da família de gráficos quando variamos b (considerando b assumindo os valores $-2, -1, 0, 1$ e 2).

Figura 31: Gráfico Família da função $f(x) = x^2 + bx + 2$ com b variando de $(-2$ a $2)$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

O coeficiente b determina a posição horizontal do vértice e do eixo de simetria da parábola. Ao variar b , o gráfico não sofre uma translação horizontal simples, mas sim uma modificação que desloca o vértice no plano, alterando simultaneamente suas coordenadas horizontal e vertical.

iii) Coeficiente c e o gráfico

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

A interseção do gráfico de f com o eixo Oy ocorre no ponto $x = 0$. Avaliando a função nesse ponto, obtemos

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Portanto, o gráfico de f intercepta o eixo Oy no ponto $(0, c)$.

Considere $g(x) = ax^2 + bx$. Então

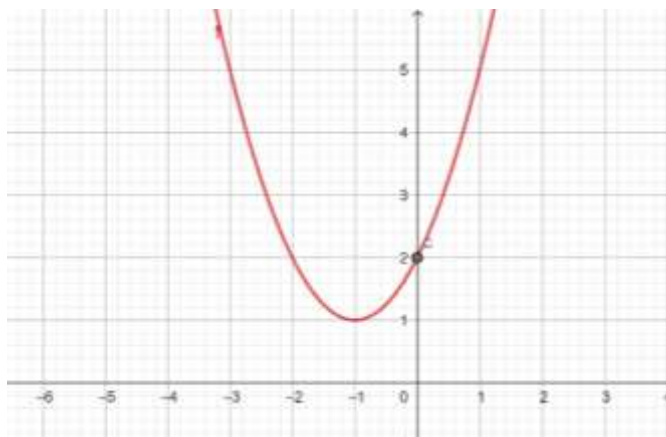
$$f(x) = g(x) + c,$$

o que mostra que o gráfico de f é obtido a partir do gráfico de g por uma translação vertical de vetor $(0, c)$. Assim,

- se $c > 0$, o gráfico é deslocado para cima;
- se $c < 0$, o gráfico é deslocado para baixo;
- se $c = 0$, o gráfico passa pela origem;

Considere, por exemplo a função $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Tomando $x = 0$, temos graficamente:

Figura 32: Gráfico da $f(x) = x^2 + 2x + 2$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

2.3.2 Análise do gráfico (Crescente ou decrescente)

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a > 0$. Logo,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

Note que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ é dependente de x , já $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ é constante e seu valor mínimo ocorre quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Em consequência, $f(x)$ também

assume seu menor valor. Logo, quando $a > 0$ e $x = -\frac{b}{2a}$, $f(x)$ assume seu valor mínimo, isto é, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é ilimitada superiormente com $\inf = y_v$.

De fato, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

Fazendo $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, temos

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c.$$

Logo,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Suponhamos agora que $a < 0$. Daí, temos que $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior valor de $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo, portanto, o valor máximo da função, isto é, quando $a < 0$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é ilimitada inferiormente com $\sup = y_v$.

Concluimos, a partir da forma canônica da função quadrática, importantes propriedades do seu gráfico, em particular a determinação de seus valores extremos. De fato, a forma canônica permite identificar diretamente o valor mínimo ou o valor máximo da função, conforme o sinal do coeficiente a .

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Sabe-se que o gráfico de f é uma parábola cuja concavidade depende do sinal de a . A saber:

- se $a > 0$, a parábola é voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola é voltada para baixo;

O vértice $V(x_v, y_v)$ desempenha papel central nessa análise, sendo dada por

$$V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right), \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Do ponto de vista geométrico e analítico:

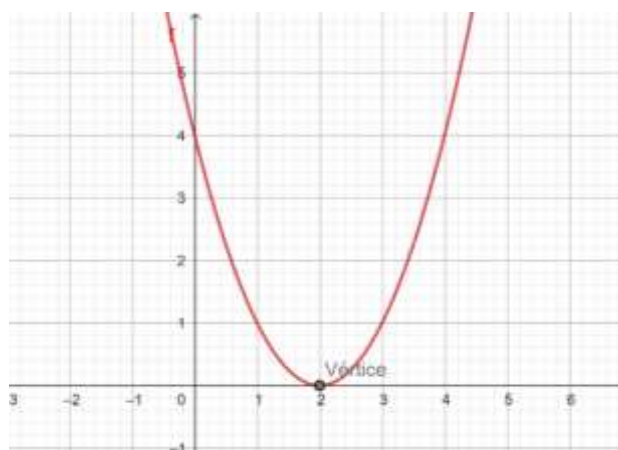
- se $a > 0$, o vértice representa o ponto de mínimo global da função;
- se $a < 0$, o vértice representa o ponto de máximo global da função;

Além disso, a abscissa do vértice, $x_v = -\frac{b}{2a}$, divide o domínio \mathbb{R} em dois intervalos nos quais a função é monótona. Mais precisamente, no caso $a > 0$:

- A função é decrescente no intervalo $(-\infty, x_v]$;
- A função é crescente no intervalo $[x_v, +\infty)$.

Vejamos um exemplo na Figura 33.

Figura 33: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

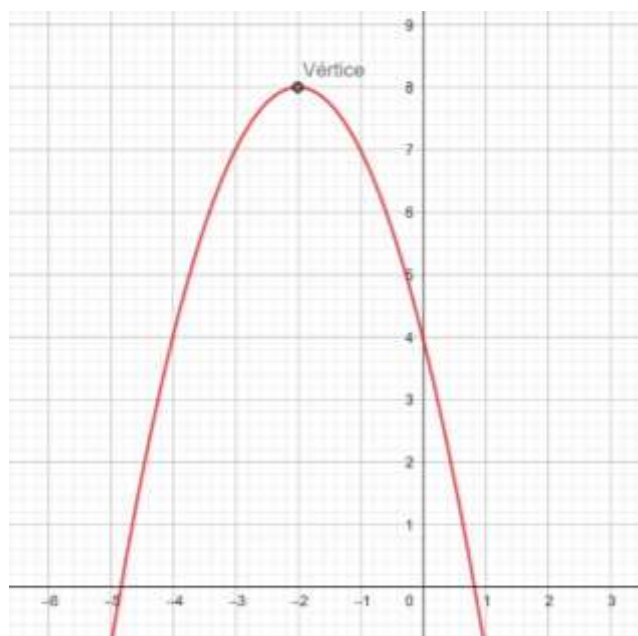
Conforme o gráfico, os intervalos são: decrescente em $(-\infty, 2]$ e crescente em $[2, +\infty)$.

No caso $a < 0$:

- A função é crescente no intervalo $(-\infty, x_v]$;
- A função é decrescente no intervalo $[x_v, +\infty)$;

Conforme Figura 34.

Figura 34: Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 4x + 4$



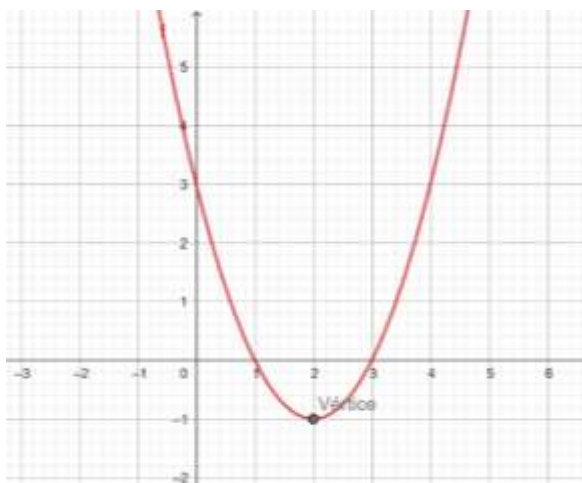
Fonte: Produzido pelo próprio autor

Como exemplo, considere a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Note que $a > 0$, logo a parábola possui concavidade voltada para cima. O vértice é dado por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 2.$$

Portanto, $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 2]$ e crescente no intervalo $[2, +\infty)$, como pode ser observado no exemplo apresentado na Figura 35.

Figura 35: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Portanto, diante do exposto, podemos concluir que a análise dos intervalos de crescimento e decréscimo de funções quadráticas depende essencialmente do sinal do coeficiente a e da posição do vértice.

3 FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO MÉDIO

A função quadrática constitui um dos tópicos mais importantes do currículo de matemática no ensino médio. As habilidades associadas a essa temática são desenvolvidas desde os anos finais do ensino fundamental até todas as séries do ensino médio, apresentando com isso seu grau de relevância.

Diante do exposto, conclui-se que seu ensino não contempla apenas um componente curricular a ser seguido, mas uma base para a consolidação de conhecimentos algébricos essenciais para a modelagem de diversas situações e interpretações gráficas, além da resolução de problemas.

Comumente apresentada pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, às vezes acaba passando despercebido seu papel em outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana, tais como na Física, relacionada principalmente a cálculos de movimento uniformemente variado (MUV), na Economia (lucro e custo), na Engenharia (trajetórias) e até na Biologia.

No entanto, principalmente após o período pandêmico, o processo de ensino foi significativamente prejudicado. O distanciamento do ensino presencial no período de pandemia potencializou as lacunas de aprendizagem já existentes.

O ensino da função quadrática muitas vezes ficava restrita a estratégias metodológicas tradicionais e se limitava à apresentação de fórmulas e sua aplicação em situações propostas, omitindo com isso conceitos e demonstrações essenciais. Procedimentos mecânicos de repetição faziam parte do dia a dia escolar.

Hoje, o novo perfil de alunos requer abordagens mais interativas. A busca por metodologias que possam de fato incluir os alunos no processo de ensino e aprendizagem, aliada a práticas que promovam uma compreensão significativa da temática sem a dependência exclusiva da repetição de fórmulas, tornou-se essencial.

De acordo com Elias e Silva (2016), a natureza abstrata das funções quadráticas é um dos desafios epistemológicos intrínsecos ao ensino desse tópico matemático. As funções quadráticas, representadas pela forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, podem parecer distantes e complexas para muitos alunos, especialmente aqueles que estão sendo introduzidos a conceitos mais avançados da Matemática.

Silva (2022) aponta ainda que uma das dificuldades inerentes é que a representação algébrica das funções quadráticas, com suas letras e símbolos, pode parecer desvinculada da realidade concreta, onde considerável parcela dos estudantes pode se deparar com uma barreira

de compreensão de como essa representação se relaciona. Essa abstração exige dos alunos a capacidade de transcender os símbolos e traduzi-los em situações concretas.

Em particular, no currículo do ensino médio, a função quadrática surge como uma extensão natural do estudo de funções iniciado no ensino fundamental, precedida pelo estudo das funções afim e linear. Essa progressão permite que os alunos reconheçam padrões e generalizem comportamentos de funções com base em suas representações algébricas, gráficas e em tabelas de valores, além de reconhecer suas aplicações em situações diversas tais como cálculos de área, volume, movimento e etc.

A função quadrática, atua apresentando aos estudantes uma maior complexidade principalmente quando passam a analisar a curva (parábola) possibilitando com isso um melhor entendimento dos pontos máximos, mínimos, raízes e características exclusivas da parábola.

O gráfico da função quadrática (parábola) tem sua construção voltada para cima ou para baixa definida pelo sinal do coeficiente a . Nesse contexto, é importante ressaltar que as habilidades inerentes a essa temática se consolidam quando os estudantes conseguem perceber e projetar informações da parábola a partir dos coeficientes e assim interpretar corretamente os zeros da função, reconhecer o eixo de simetria e a translação do gráfico do plano cartesiano.

Compreender essas características permite que o estudante interprete situações do cotidiano onde há variação crescente e decrescente, como o lucro em função do preço de um produto ou a altura de um projétil lançado verticalmente. Nesse sentido interdisciplinar, o ensino da função quadrática não deve ser visto apenas como um conteúdo isolado, mas como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas reais e para o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático.

Contudo, mesmo apresentando o quanto a temática é relevante, muitos alunos ainda apresentam dificuldades na aprendizagem da função quadrática que ora pode ser motivada pela escassez metodológica do professor ou por lacunas de aprendizagem de habilidades anteriores porém necessárias para o tema, ou mesmo pela dificuldade do tema em si.

Segundo Silva (2019) e Passos (2020), a abstração matemática das funções quadráticas pode parecer distante da realidade cotidiana para os estudantes, na qual se perguntam se precisam aprender essa representação aparentemente abstrata, e como ela está relacionada com os fenômenos que encontram em suas vidas diárias.

Diante disso, será apresentado alguns fatores principais que justificam as dificuldades de aprendizagem da função quadrática pelos alunos:

i) Abstração de conceitos e aplicações: É notável o nível de dificuldade que os estudantes apresentam em compreender a relação dos coeficientes e o comportamento do gráfico da

função. Sem a consolidação dessa habilidade visual e contextual, essas relações tornam-se meramente decorativas.

ii) Foco na álgebra: É comum o uso frequente de fórmulas para determinação de raízes ou zeros da função. A mais famosa fórmula de Bháskara usada mecanicamente e isolada de definições conduz os alunos à mecanização e repetição de passos e operações. Negligenciando com isso a interpretação geométrica e a resolução de problemas que envolvam a função.

iii) Descontextualização: Quando o conteúdo é apresentado de forma descolada da realidade dos alunos, perde-se o potencial motivador e investigativo que a função quadrática oferece.

iv) Pouca utilização de recursos tecnológicos: Ferramentas digitais como softwares gráficos, aplicativos educacionais ou até mesmo a calculadora gráfica são pouco utilizados, apesar de contribuírem significativamente para a compreensão do comportamento da função.

Passos (2020) e Iezzi (2013) apontam que para superar esse desafio no ensino da função quadrática requerem-se metodologias e condutas pedagógicas que demonstrem claramente como as equações quadráticas estão vinculadas a situações reais, de modo a utilizar exemplos concretos do mundo físico, econômico e até mesmo artístico pode ajudar a ilustrar essa situação.

Esses desafios reforçam a necessidade de repensar práticas pedagógicas que coloquem o estudante como agente ativo na construção do conhecimento. Muitas metodologias ativas foram criadas e incorporadas ao dia a dia escolar, visando fomentar o protagonismo dos alunos durante o processo de ensino.

Para superar as dificuldades mencionadas, é essencial que o ensino da função quadrática esteja fundamentado em abordagens que favoreçam a compreensão conceitual, a exploração gráfica e a resolução de problemas contextualizados. Estratégias ativas como agrupamentos produtivos, aprendizagem baseada em problemas, rotação por estações e/ou sala de aula invertida podem contribuir fortemente no dia a dia estudantil.

De acordo com Apple (2018), percebe-se que existem diversos desafios no ensino da Matemática, aos quais certamente existem abordagens multidisciplinares e interdisciplinares, que buscam adaptar-se às necessidades e realidades dos alunos, fazendo com que estes, com o passar do tempo, consigam realizar as conexões sobre o tema e como estas ferramentas estão ligadas com seu cotidiano.

Algumas sugestões que podem transformar o ensino da função quadrática em um espaço de construção do conhecimento:

i) Exploração de situações-problema: Iniciar o estudo da função quadrática a partir de um problema do cotidiano (Aprendizagem Baseada em Problemas - ABP), como o cálculo da área de um terreno, a análise da trajetória de um objeto lançado verticalmente para cima ou o custo

de produção de um produto, permite que o aluno perceba a relevância do conteúdo e se envolva na busca por soluções.

ii) Construção de gráficos com tecnologia: Utilizar ferramentas como GeoGebra, permite que os estudantes visualizem, em tempo real, as alterações no gráfico da parábola conforme os coeficientes da função são modificados apresentando o papel de cada coeficiente no comportamento do gráfico (translação vertical e translação horizontal), identificação do vértice e zeros da função. Isso torna o aprendizado mais dinâmico e significativo.

iii) Análise de variações: Trabalhar com tabelas de valores e identificar quando a função está crescendo ou decrescendo, além de reconhecer tais taxas a partir do vértice da função, bem como o valor máximo ou mínimo, promove a compreensão do comportamento da função em diferentes intervalos.

iv) Articulação entre representações: Estimular o aluno a transitar entre as formas algébrica, gráfica e descritiva da função ajuda a consolidar a aprendizagem e desenvolver múltiplas formas de pensar matematicamente.

v) Uso de jogos e atividades lúdicas: Jogos matemáticos (por exemplo, Torre de Hanoi), desafios e atividades investigativas podem tornar o processo de aprendizagem mais motivador e promover maior engajamento por parte dos estudantes.

O professor tem papel fundamental na mediação do processo de ensino e aprendizagem da função quadrática. Para isso, é necessário que ele domine o conteúdo matemático, compreenda as dificuldades mais comuns dos estudantes e conheça diferentes abordagens didáticas para o ensino do tema. A formação continuada e o acesso a materiais didáticos atualizados são essenciais para que o docente possa inovar em suas práticas e promover uma educação matemática mais crítica e reflexiva.

Portanto é considerável admitir que o ensino da função quadrática no Ensino Médio representa uma excelente oportunidade para o desenvolvimento de competências matemáticas essenciais. Mais do que ensinar fórmulas e procedimentos, é preciso favorecer a compreensão conceitual, a análise gráfica, a resolução de problemas e a contextualização do conteúdo.

Para isso, é fundamental que o ensino esteja alinhado às necessidades e interesses dos estudantes, incorporando tecnologias, metodologias ativas e estratégias que promovam o protagonismo do aluno no processo de aprendizagem. O papel do professor, nesse contexto, é o de facilitador e mediador, capaz de criar um ambiente favorável à construção de conhecimento matemático significativo. Investir na melhoria do ensino da função quadrática é, portanto, investir na formação de cidadãos mais críticos, autônomos e preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

4 APLICAÇÕES

A função quadrática desempenha um importante papel na modelagem de situações que envolvem várias outras áreas. Seu gráfico modela situações cotidianas e fenômenos que fundamentam precisamente as tomadas de decisões. Como exemplos podemos apresentar o estudo dos movimentos uniformemente variados (MUV), que verificam o comportamento apresentado no lançamento de projéteis. Na economia, as funções quadráticas são utilizadas para estudar lucros, receitas e custos, tendo em vista a otimização de resultados. Na construção civil (engenharia e arquitetura) é comum aparecer estruturas parabólicas em pontes, arcos, túneis e telhados. Assim, o cálculo da curvatura, por meio de funções quadráticas, auxilia no dimensionamento seguro de construções e no design estético de obras arquitetônicas. As aplicações da função quadrática se estendem a várias outras áreas, no entanto, neste trabalho, apresentaremos as aplicações na física e na economia.

4.1 NA FÍSICA

O estudo dos movimentos é uma das principais características do campo da física, pois tal análise nos permite compreender o comportamento dos corpos que se deslocam no espaço em função do tempo. Na Física, um dos principais tipos de movimento é o Movimento Uniformemente Variado (MUV), que ocorre quando um corpo tem sua velocidade variando de forma constante ao longo do tempo, ou seja, quando está submetido a uma aceleração constante.

O Movimento Uniformemente Variado (MUV) caracteriza-se principalmente pela existência de uma aceleração constante. Dessa forma:

- Quando a aceleração é positiva ($a > 0$) o movimento é dito acelerado, e sua velocidade cresce com o tempo.
- Quando a aceleração é negativa ($a < 0$), o movimento é dito retardado, e sua velocidade diminui com o tempo.

Além disso, a equação da posição apresenta, por meio de uma função quadrática a modelagem do MUV, onde a posição $s = f(t)$ é dada em função de t (tempo) e representa os sucessivos instantes de tempo registrados durante o movimento, isto é,

$$s(t) = At^2 + Bt + C$$

onde, para $t = 0$, temos $C = s(0)$, que é a posição inicial do móvel.

Dentre as principais equações do MUV, destacam-se:

1) Função horária da velocidade:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

onde:

- $v(t)$: velocidade no instante t ;
- v_0 : velocidade inicial;
- a : aceleração constante;
- t : tempo.

2) Função horária da posição:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

onde:

- $s(t)$: posição no instante t ;
- s_0 : posição inicial;
- v_0 : velocidade inicial;
- a : aceleração;
- t : tempo.

3) Equação de Torricelli (quando não se conhece o tempo):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

Por exemplo: Uma bola situada a 3m acima do solo, é lançada para cima com uma velocidade de 14m/s. Quando atinge o chão? (Almeida,2020, p. 62)

Nesta questão, podemos notar algumas informações importantes, tais como: o movimento ocorre no sentido ascendente (vertical para cima), o que será modelado por uma função quadrática com concavidade voltada para baixo ($a < 0$), o tipo de lançamento, a aceleração (no caso aceleração da gravidade – vamos adotar $g=10m/s^2$), velocidade inicial (v_0) de 14m/s e espaço inicial (s_0) de 3m.

Modelando a altura $h(t)$ (em metros) pelo MUV vertical temos:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$= 3 + 14 \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2},$$

$$= 3 + 14t - 5t^2,$$

onde $h(t)$ é a altura atingida pela bola no instante t .

Sabemos que, ao atingir o solo, a altura da bola é nula, isto é, $h(t) = 0$. Logo, devemos resolver $h(t) = 0$, ou seja, $3 + 14t - 5t^2 = 0$.

A modelagem do problema conduz a uma função quadrática do tipo

$$h(t) = at^2 + bt + c,$$

com coeficientes $a = -5$, $b = 14$ e $c = 3$. O instante em que a trajetória atinge o solo corresponde às soluções da equação

$$3 + 14t - 5t^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, temos $t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Calculando o discriminante,

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3 = 256.$$

Logo,

$$t = \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{-10}.$$

Daí, obtemos as duas soluções:

$$t' = \frac{-14+16}{-10} = -\frac{1}{5}, t'' = \frac{-14-16}{-10} = 3.$$

Do ponto de vista físico, o tempo deve satisfazer $t \geq 0$. Portanto, a única solução admissível é $t = 3s$.

4.2 NA ECONOMIA

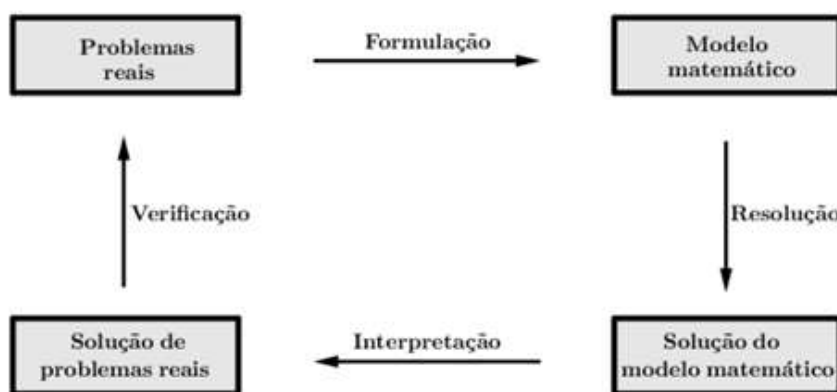
A modelagem matemática possibilita a interpretação de situações-problemas em diversas áreas, representando-as muitas vezes, através de uma função quadrática. Na economia, diversas situações de demanda, consumo, receita e lucro, dentre outras, são representadas por modelos matemáticos através da modelagem matemática.

Sistematicamente, alguns modelos matemáticos são desenvolvidos através de conhecimentos geométricos ou algébricos, considerando alguns passos essenciais para sua formulação. Segundo TAN (2007) a criação de modelos matemáticos inicia-se escolhendo letras para representar as variáveis descritas no problema, se necessário, constrói-se a representação geométrica da situação (o que muitas vezes facilita o entendimento), em seguida,

construa uma expressão algébrica considerando as condições e restrições do domínio provenientes da situação-problema.

A construção de modelos matemáticos que interpretem problemas reais nas mais variadas áreas contribui significativamente na resolução de problemas. Segundo TAN (2007), há quatro passos que ilustram, de forma sequencial, o processo de criação de modelos.

Figura 36: Passos para criação de modelos matemáticos



Fonte: Tan, S.T (2007)

De forma sistemática, observa-se que há etapas bem definidas. A formulação baseia-se na apresentação de um problema real, e em seguida, na construção de um modelo matemático, empregando variáveis para a construção de funções com uma ou mais variáveis. Em continuidade, tem-se a etapa de resolução, na qual, após a formulação do problema por meio de um modelo matemático, aplica-se estratégias para determinar os valores que as variáveis assumem nas condições dadas no problema.

A passagem da interpretação representa um importante momento para a resolução da questão, pois nem sempre as soluções dadas são soluções viáveis, tudo depende da contextualização do problema às condições reais. Por fim, a verificação consiste em analisar se os resultados são satisfatórios

Existem diversos modelos econômicos que utilizam funções quadráticas como ferramentas de interpretação de problemas. Em uma economia de livre concorrência, a oferta e a demanda de bens de consumo destacam-se no mercado, apresentando propostas de oferta nas quais a quantidade consumida de um determinado produto depende de seu preço unitário (existem outros fatores que influenciam a oferta e a demanda de produtos aos quais omitiremos neste estudo).

De modo geral, quanto maior o preço de um bem, menor é a quantidade consumida (relação inversamente proporcional). Dessa forma, é intuitivo perceber que a demanda por certo

produto depende da procura do mercado por ele. Assim, a relação entre o preço unitário e a quantidade produzida é conhecida como equação de demanda, a qual pode ser expressa através de modelos algébricos na forma de uma função que relaciona a demanda e o preço.

Uma equação de demanda pode ser dada de várias formas, a depender das condições do problema e restrições do domínio para a formulação da função representativa. Assim, considerando p o preço e $f(x)$ o preço unitário do produto ou bem temos então $p = f(x)$, onde $f(x)$ é a representação algébrica do preço em função de x que é o número de unidades demandadas.

Podemos ainda considerar que a produção x de unidades do produto é condicionada por outros fatores de custo, os quais podem ser representados por $g(p)$, logo $x = g(p)$. A função $g(p)$ é a função demanda, sendo $g(p)$ o número de itens demandados quando p for o preço unitário.

Vamos analisar a seguinte situação hipotética:

Em um mercado local de garrafas d'água, as quantidades demandadas e ofertadas (em unidades por semana) em função do preço p (em R\$ por unidade) são dadas por:

- **Demanda:** $F(p) = 500 - 80p - p^2$

Note que o modelo matemático que interpreta a situação de mercado é uma função quadrática que apresenta gráfico decrescente e concavidade voltada para baixo. Já para equação da oferta, temos:

- **Oferta:** $G(p) = -100 + 40p + \frac{1}{2}p^2$

Nesse caso, observa-se que o gráfico da função é crescente e possui concavidade voltada para cima,

Queremos determinar o preço e a quantidade de equilíbrio entre demanda e oferta.

Inicialmente, devemos para obter o equilíbrio de mercado, devemos determinar os pontos de intersecção dos gráficos de demanda e oferta. Para isso vamos colocar $F(p) = G(p)$. Igualando as expressões:

$$500 - 80p - p^2 = -100 + 40p + \frac{1}{2}p^2.$$

Reorganizando os termos, obtemos:

$$500 + 100 - 80p - 40p - p^2 - \frac{1}{2}p^2 = 0,$$

ou seja,

$$600 - 120p - \frac{3}{2}p^2 = 0.$$

Para facilitar o desenvolvimento dos cálculos multiplicaremos ambos os lados por 2

$$1200 - 240p - 3p^2 = 0.$$

Note que 1200, 240 e 3 são múltiplos de 3, logo dividiremos por 3.

$$400 - 80p - p^2 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática temos:

$$\begin{aligned} p &= \frac{-(-80) \pm \sqrt{(-80)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 400}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 1600}}{-2} \\ &= \frac{80 \pm \sqrt{8000}}{-2} \end{aligned}$$

Tomando a raiz positiva temos:

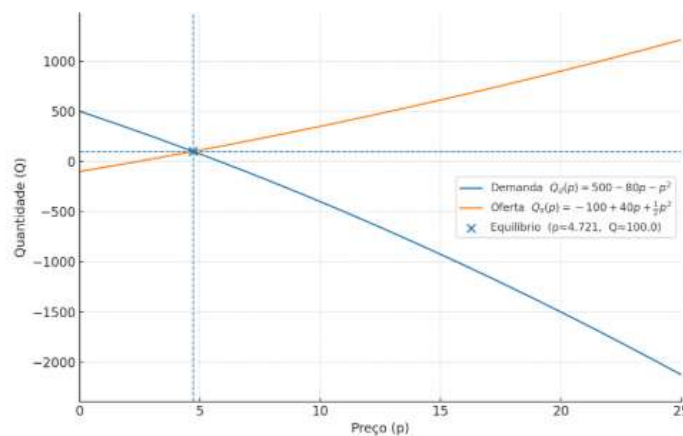
$$\begin{aligned} p &= \frac{80 - \sqrt{8000}}{-2} \\ p &\approx 4,721 \end{aligned}$$

Dessa forma, a quantidade de equilíbrio é dado substituindo em qualquer das funções o valor de p por 4,721. Utilizando $G(p) = -100 + 40p + \frac{1}{2}p^2$, temos:

$$G(4,721) \approx 100.$$

Logo, o preço de equilíbrio é aproximadamente R\$ 4,72 e a quantidade de equilíbrio é de aproximadamente 100 unidades por semana. Conforme ilustra a Figura 37.

Figura 37: Gráfico da função Oferta x Demanda



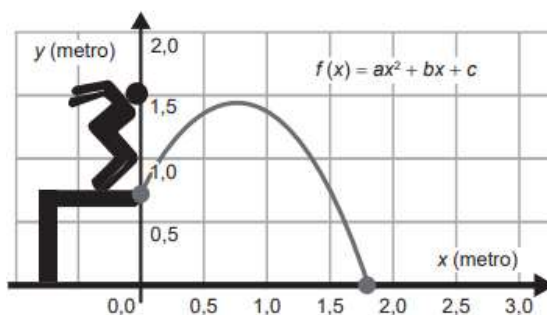
Fonte: Produzido pelo próprio autor

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, veremos algumas questões em exames nacionais (ENEM, ENA e ENQ) e algumas questões olímpicas que envolvem função quadrática. O objetivo é analisar diferentes abordagens e níveis de complexidade, evidenciando a aplicação desse conteúdo em contextos variados. Além disso, busca-se promover a compreensão dos conceitos envolvidos por meio da resolução e interpretação das questões propostas.

5.1 Questões do ENEM

1.(ENEM – 2022) A trajetória de uma pessoa que pula de um andaime até o chão é descrita por uma função $y = f(x)$, sendo x e y medidos em metro, conforme mostra a figura.



Seja D o domínio da função $f(x)$, como definida na figura.

Para que a situação representada na figura seja real, o domínio dessa função deve ser igual a

- A) $\{x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
- B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
- C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_1 e x_2 a raiz positiva de $f(x)$, com $x_1 < x_2$.
- D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- E) $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Note que a parábola apresentada possui domínio iniciando em $x=0$ indo até $x=x_2$, no qual x_2 é raiz positiva. Portanto, o domínio D da função é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq x_2\}$.

Alternativa correta: letra B.

2. (ENEM – 2022) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde

decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \leq t \leq 2$;
- II: $3 \leq t \leq 4$;
- III: $5 \leq t \leq 6$;
- IV: $7 \leq t \leq 9$;
- V: $10 \leq t \leq 12$;

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a

Alternativas

- A) I.
- B) II.
- C) III.
- D) IV.
- E) V.

Solução: Note que a função $p(t) = -t^2 + 10t + 24$ possui $a = -1, b = 10$ e $c = 24$. O discriminante da função dada é definido por

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c .$$

Substituindo os coeficientes, obtemos

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 24 = 196.$$

Determinando o x_v , temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-1)} = 5.$$

Logo, diante das alternativas, o período de maior infectados é: III: $5 \leq t \leq 6$;

Alternativa correta: letra C.

3. (ENEM 2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é

Alternativas

A) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

B) $T(x) = -11/16 x^2 + 11x + 72$

C) $T(x) = 3/5 x^2 - 24/5 x + 381/5$

D) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

E) $T(x) = 11/6 x^2 - 11/2x + 72$

Solução.

Note que o máximo ocorre em $x = 8$, assim $x_v = 8$. Logo, para $T(x) = ax^2 + bx + c$, vale

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 8 \Rightarrow b = -16a.$$

Além disso:

$$T(1) = 72 \text{ e } T(12) = 105.$$

Substituindo $b = -16a$ na expressão geral:

$$T(x) = ax^2 - 16ax + c.$$

Agora usando os dados:

1) Para $x = 1$:

$$a - 16a + c = 72 \Rightarrow -15a + c = 72. (1)$$

2) Para $x = 12$:

$$144a - 192a + c = 105 \Rightarrow -48a + c = 105. (2)$$

Subtraindo (1) de (2):

$$\begin{aligned} (-48a + c) - (-15a + c) &= 105 - 72 \\ -33a &= 33 \Rightarrow a = -1. \end{aligned}$$

Então,

$$b = 16.$$

Substituindo em (1),

$$-15 \cdot (-1) + c = 72 \Rightarrow c = 57.$$

Portanto,

$$T(x) = -x^2 + 16x + 57.$$

Alternativa correta: A.

4. (ENEM – 2021) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R\$ 2,00;
- Barra II: R\$ 3,50;
- Barra III: R\$ 4,00;
- Barra IV: R\$ 7,00;
- Barra V: R\$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

Alternativas

- A) I.
- B) II.
- C) III.
- D) IV.
- E) V.

Solução.

A função lucro é

$$L(x) = -x^2 + 14x - 45,$$

uma parábola côncava para baixo ($a = -1 < 0$), portanto o lucro máximo ocorre no vértice.

A abscissa do vértice é

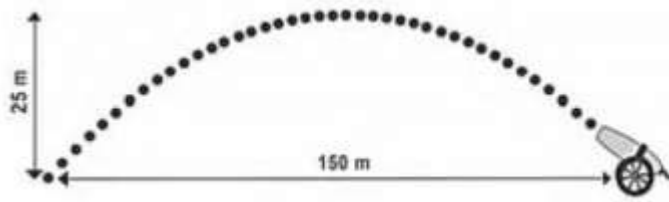
$$x_v = -\frac{b}{2a} = 7.$$

Logo, o lucro máximo ocorre quando o preço é $x = 7$.

Portanto, a empresa deve investir nessa barra (Barra IV:R\$ 7,00).

Alternativa correta D.

5. (ENEM – 2018) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xOy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150; 0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(0; 0)$ do plano xOy . A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é:

Alternativas

A) $y = 150x - x^2$

B) $y = 3\,750x - 25x^2$

C) $75y = 300x - 2x^2$

D) $125y = 450x - 3x^2$

E) $225y = 150x - x^2$

Solução:

A trajetória é uma parábola que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(150,0)$, logo pode ser escrita da forma fatorada

$$y = ax(150 - x), \text{ com } a > 0.$$

O vértice ocorre no ponto médio das raízes:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 75.$$

A altura máxima é 25, então:

$$y(75) = 25.$$

Substituindo:

$$25 = 75a(150 - 75) = 5625a.$$

Logo,

$$a = \frac{25}{5625} = \frac{1}{225}.$$

Portanto,

$$y = \frac{1}{225}(150x - x^2) \Rightarrow 225y = 150x - x^2.$$

Alternativa correta E.

5.2 Questões Olímpicas

1. (OBM) a, b, c e d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$, e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

Solução:

Pelas relações de Viète, temos

$$a + b = 3c \text{ (I)}, \quad a \cdot b = -8d \text{ (II)}, \quad c + d = 3a \text{ (III)} \text{ e } c \cdot d = -8b \text{ (IV)}$$

Somando (I) e (III), obtemos: $a + b + c + d = 3c + 3a = 3(a + c)$.

Logo, o problema se reduz a determinar $a + c$.

Como a e c são raízes dos respectivos polinômios, temos:

$$a^2 - 3ac - 8d = 0 \text{ e } c^2 - 3ac - 8b = 0.$$

Subtraindo as duas equações, resulta:

$$(a^2 - 3ac - 8d) - (c^2 - 3ac - 8b) = 0,$$

isto é,

$$a^2 - c^2 - 8d - 8b = 0.$$

Logo,

$$a^2 - c^2 = 8(d - b).$$

Fatorando,

$$(a + c)(a - c) = 8(d - b). \text{ (V)}$$

Agora, subtraindo (III) de (I), obtemos:

$$(a + b) - (c + d) = 3(c - a),$$

ou seja,

$$a + b - c - d = 3(c - a).$$

Reorganizando,

$$b - d = 4(c - a). \text{ (VI)}$$

Substituindo (VI) em (V), segue que:

$$(a + c)(a - c) = 8(d - b) = 8[-(b - d)] = 32(a - c).$$

Se $a \neq c$, podemos dividir ambos os lados por $a - c$, obtendo:

$$a + c = 32.$$

Por conseguinte,

$$a + b + c + d = 3(a + c) = 96.$$

Portanto,

$$a + b + c + d = 96.$$

2. (Rússia) Sejam a, b e c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ têm exatamente uma raiz real em comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também têm exatamente uma raiz real em comum. Determine a soma $a + b + c$.

Solução:

Chamemos de r e s as raízes comuns dos dois pares de equações. Dessa forma

$$r^2 + ar + 1 = r^2 + br + c = 0 \Rightarrow r(b - a) = 1 - c,$$

e

$$s^2 + s + a = s^2 + cs + b = 0 \Rightarrow s(1 - c) = b - a.$$

Note que, se $a = b$ e $c = 1$ os pares de equações coincidem e as equações devem ter somente uma raiz em comum, a não ser que ela seja dupla, ou seja, $a = b = \pm 2$, mas aí, $x^2 + x + a = 0$ não tem raiz dupla, o que nos leva a uma contradição. Portanto $a \neq b$ e $c \neq 1$.

Deste modo $s = \frac{1}{r}$, e

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + a = 0 \Leftrightarrow 1 + r(1 + ar) = 0 \Leftrightarrow 1 + ar = -\frac{1}{r}.$$

Assim,

$$r^2 + ar + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 - \frac{1}{r} = 0 \Leftrightarrow r = 1,$$

e

$$1^2 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ e } 1 + b + c = 0 \Leftrightarrow b + c = -1.$$

Logo, $a + b + c = -2 - 1 = -3$.

3. (OBMEP 2017 – 1ª Fase – Nível 3) Se $f(x) = 5x^2 + ax + b$, com $a \neq b$, $f(a) = b$ e $f(b) = a$, qual é o valor de $a + b$?

- a) -5 b) $-\frac{1}{5}$ c) 0 d) $\frac{1}{5}$ e) 5

Solução:

Se $f(a) = b$, então $5a^2 + a \cdot a + b = b \Leftrightarrow 6a^2 + b = b \Leftrightarrow 6a^2 = 0$. Logo, $a = 0$.

Como $f(b) = a$ então

$$5b^2 + a \cdot b + b = a \Leftrightarrow 5b^2 + 0 \cdot b + b = 0 \Leftrightarrow b(5b + 1) = 0.$$

Portanto,

$$b = 0 \text{ ou } b = -\frac{1}{5},$$

e, como $b = 0$ ou $b = -\frac{1}{5}$, e, como $a \neq b$ então $b = -\frac{1}{5}$.

Assim, $a + b = 0 + (-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{5}$. Alternativa correta: letra B.

4. (OBM 2001 – 1ª Fase – Nível 3) O número de soluções inteiras distintas da equação

$$(-6x^2 + 12x - 2)^{x^2 - 2x + 2} = 4 \text{ é:}$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução:

Note que $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$. Temos então que:

$$(-6x^2 + 12x - 2)^{x^2 - 2x + 2} = (2)^2 \text{ ou } (-6x^2 + 12x - 2)^{x^2 - 2x + 2} = (-2)^2$$

Assim temos:

(I) $-6x^2 + 12x - 2 = 2$ e $(x - 1)^2 + 1 = 2$ não obtendo soluções em comum.

(II) $-6x^2 + 12x - 2 = -2$ e $(x - 1)^2 + 1 = 2$ obtendo $x = 0$ ou $x = 2$ como soluções comuns.

(III) $-6x^2 + 12x - 2 = 4$ e $(x - 1)^2 + 1 = 1$ obtendo $x = 1$ como solução.

Portanto, a equação admite três soluções inteiras distintas.

Alternativa correta: letra D.

5. (OBM 2001 – 1ª Fase – Nível 3) A soma dos valores reais de x tais que $x^2 + x + 1 = \frac{156}{x^2 + x}$

é:

- a) 13 b) 6 c) -1 d) -2 e) -6

Solução:

(C) Seja $y = x^2 + x$. Temos que

$$x^2 + x + 1 = \frac{156}{x^2 + x} \Leftrightarrow y + 1 = \frac{156}{y} \Leftrightarrow y^2 + y = 156 \Leftrightarrow y^2 + y - 156 = 0.$$

Calculando o determinante, temos

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 625.$$

Assim,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2 \cdot 1}.$$

Dessa forma, as raízes são dadas por:

$$y_1 = \frac{-1 + 25}{2} = 12 \text{ e } y_2 = \frac{-1 - 25}{2} = -13.$$

(I) $x^2 + x = y_1$

$$x^2 + x = 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0, \text{ obtendo } x' = 3 \text{ e } x'' = -4.$$

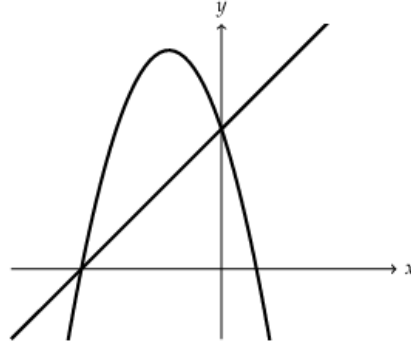
(II) $x^2 + x = y_2$

$$x^2 + x = -13 \Leftrightarrow x^2 + x + 13 = 0, \text{ obtendo } x', x'' \notin \mathbb{R}.$$

Logo, a soma das raízes reais são $3 + (-4) = -1$. Alternativa correta: letra C.

5.3 Questões do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT (ENA)

1. (ENA 2025) Observe o sistema de coordenadas abaixo em que estão representados os gráficos de uma função afim e de uma função quadrática



Assinale a opção cujas expressões podem ser representadas pelos gráficos

- (A) $y = -x^2 + 3x + 3$ e $y = x + 3$.
- (B) $y = -x^2 + 3x + 4$ e $y = x + 4$
- (C) $y = -x^2 - 3x + 2$ e $y = x + 2$
- (D) $y = -x^2 - 5x - 4$ e $y = x - 4$
- (E) $y = -x^2 - 3x + 4$ e $y = x + 4$

Solução:

Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x + b'$ as funções apresentadas no plano cartesiano.

Note que, para $x = 0$, determinamos o ponto no eixo y aos quais os gráficos se interceptam. Dessa forma, $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ e $g(0) = a' \cdot 0 + b'$, logo $c = b'$.

Além disso, $f(x)$ possui concavidade voltada para baixo, logo $a < 0$.

Note, ainda, que uma das raízes de $f(x)$ também é raiz de $g(x)$ e é negativa.

Fazendo a alternativa (E) temos:

(E) $y = -x^2 - 3x + 4$ e $y = x + 4$, logo $y = -x^2 - 3x + 4$, com $a = -1$, $b = -3$ e $c = +4$.

Calculando o discriminante obtemos: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 25$.

Fazendo $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, temos: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{3 \pm 5}{-2}$. Logo, $x' = \frac{8}{-2} = -4$ e $x'' = \frac{-2}{-2} = 1$.

Fazendo $y = 0$ na equação $y = x + 4$, obtemos $x = -4$. Note que, $c = +4$ e $b' = +4$, e $x' = -4$ e $x'' = -4$.

Alternativa correta letra (E)

2. (ENA 2025) O menor elemento do conjunto $\{n^2 - 25n \mid n \text{ é inteiro}\}$ é:

- (A) -154
- (B) -155
- (C) -156
- (D) -157
- (E) -158

Solução:

Considere a função quadrática $y = n^2 - 25n$. Note que, como $a > 0$, a parábola apresenta concavidade voltada para cima. Dessa forma, determinando o vértice temos:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = (-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 25.$$

Daí,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-25)}{2 \cdot 1}, \frac{-25}{4 \cdot 1}\right) = \left(\frac{25}{2}, -\frac{25}{4}\right).$$

Assim, a função assume seu menor valor quando $n = \frac{25}{2} = 12,5$. Logo, o menor elemento do conjunto ocorre quando $n = 12$ ou $n = 13$.

Fazendo $n = 12$, obtemos

$$y = 12^2 - 25 \cdot 12 = -156.$$

Portanto, o menor elemento é -156 .

Alternativa correta: letra (C)

3. (ENA 2024) Sendo $-1 < x_1 < 0$ e $x_2 > 1$, a inequação $ax^2 + bx + c < 0$ possui solução $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ se, e somente se,

- (A) $a < 0, b > 0, c < 0$
- (B) $a < 0, b < 0, c < 0$
- (C) $a < 0, b > 0, c > 0$.
- (D) $a > 0, b > 0, c < 0$
- (E) $a < 0, b < 0, c > 0$.

Solução:

Para que a solução da inequação

$ax^2 + bx + c < 0$ seja $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ é necessário que $a < 0$.

Além disso, considerando x' e x'' as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} > -1 + 1 > 0, \text{ logo } \frac{b}{a} > 0.$$

Como $a < 0$, então $b > 0$.

Temos, ainda, que $x' \cdot x'' = \frac{c}{a} < 0$. Como $a < 0$, segue-se que $c > 0$.

Alternativa correta: letra (C)

4. (ENA 2024) Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + 6$ no domínio dos reais. Sabendo que $f(2023) = k$, determine em função de k o valor de $f(-2015)$.

- (A) k
- (B) $2k + 1012$
- (C) $k^2 - 403$
- (D) $2k^2 - 880$
- (E) $3k$

Solução:

Observe que,

$$f(x) = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow (x - 4)^2 - 10.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f(2023) &= (2023 - 4)^2 - 10 = (2019)^2 - 10 \\ f(-2015) &= (-2015 - 4)^2 - 10 = (-2019)^2 - 10. \end{aligned}$$

Logo, $f(2023)$ e $f(-2015)$ são simétricos em relação ao eixo $x = 4$.

Portanto, $f(2023) = f(-2015) = k$

Alternativa correta: letra (A)

5. (ENA 2023) Todas as funções abaixo têm como gráficos parábolas cujos vértices estão no primeiro quadrante, exceto:

- (A) $y = -(x + 1) \cdot (2 - x)$
- (B) $y = (x + 2) \cdot (3 - x)$
- (C) $y = -3x^2 + 6x + 7$
- (D) $y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 3$
- (E) $y = x^2 - 20x + \frac{201}{2}$

Solução:

Sabemos que o vértice da parábola é dado por $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Note que, para o vértice pertencer ao 1º quadrante, $x_v > 0$ e $y_v > 0$. Logo, determinando os vértices de cada função, temos:

a) $y = -(x + 1) \cdot (2 - x) = x^2 - x - 2$. Com $a = 1$, $b = -1$ e $c = -2$.

Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 9.$$

Daí,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-1)}{2 \cdot 1}, \frac{-9}{4 \cdot 1}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$

Portanto, o vértice da função $y = -(x + 1) \cdot (2 - x)$ está no 4º quadrante.

b) $y = (x + 2) \cdot (3 - x) = -x^2 + x + 6$. Com $a = -1$, $b = 1$ e $c = 6$.

Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 25.$$

Daí,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-1}{2 \cdot (-1)}, \frac{-25}{4 \cdot (-1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

Portanto, o vértice da função $y = (x + 2) \cdot (3 - x)$ está no 1º quadrante.

c) $y = -3x^2 + 6x + 7$. Com $a = -3$, $b = 6$ e $c = 7$

Temos que

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 120.$$

Daí,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-6}{2 \cdot (-3)}, \frac{-120}{4 \cdot (-3)}\right) = (1, 10)$$

Portanto, o vértice da função $y = -3x^2 + 6x + 7$ está no 1º quadrante.

d) $y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5$. Com $a = 2$, $b = -4$ e $c = 5$.

Temos que

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = -24.$$

Daí,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-4)}{2 \cdot 2}, \frac{-(-24)}{4 \cdot 2}\right) = (1, 3)$$

Portanto, o vértice da função $y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 3$ está no 1º quadrante.

e) $y = x^2 - 20x + \frac{201}{2}$. Com $a = 1$, $b = -20$ e $c = \frac{201}{2}$.

Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = -1.$$

Daí,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-20)}{2 \cdot 1}, \frac{-(-1)}{4 \cdot 1}\right) = \left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Portanto, o vértice da função $y = x^2 - 20x + \frac{201}{2}$ está no 1º quadrante.

Concluimos assim, que todas as parábolas têm vértice no primeiro quadrante, exceto a do item (A).

5.4 Questões do Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT (ENQ)

1.(ENQ 2021.1) Sejam r e s raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são números reais dois a dois distintos, com a e c não nulos. Suponha que, **nesta ordem**, a, c e b estão em progressão aritmética e também que, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}, r + s, r^2 + s^2$ estão em progressão geométrica, nesta ordem. Mostre que $\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$.

Solução:

Note que o produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dado por $\frac{c}{a}$. Chamemos de k esse produto. Logo $\frac{c}{a} = k$.

Como a, c e b estão em progressão aritmética (P.A), temos que $c - a = b - c$. Logo, $2c = a + b$. Dividindo tudo por a . ($a \neq 0$)

$$2\frac{c}{a} = \frac{a+b}{a}.$$

Como $\frac{c}{a} = k$, temos que

$$2k = 1 + \frac{b}{a}.$$

Agora, como $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}, r + s, r^2 + s^2$ estão em progressão geométrica (P.G.), temos:

$$\frac{r+s}{\frac{1}{r} + \frac{1}{s}} = \frac{r^2 + s^2}{r+s} \Leftrightarrow r^2 + s^2 = rs(r+s).$$

Note que $r^2 + s^2 = (r+s)^2 - 2rs$. Logo, $(r+s)^2 - 2rs = rs(r+s)$.

Como $r + s = -\frac{b}{a} = 1 - 2k$. Substituindo na identidade encontrada, temos:

$$(1 - 2k)^2 - 2k = k(1 - 2k),$$

onde

$$6k^2 - 7k + 1 = 0.$$

Com $a = 6, b = -7$ e $c = 1$.

O discriminante é dado por

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25.$$

Logo,

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 5}{12}.$$

Segue que as raízes são

$$k' = \frac{12}{12} = 1 \text{ e } k'' = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Considerando que $a \neq c$, temos que $k = \frac{c}{a} \neq 1$, logo $\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$.

2. (ENQ 2020.2) Determine a equação da reta tangente a parábola $y = x^2 + x + 1$ no ponto $P = (1, 3)$ usando o seguinte procedimento:

- Escreva a equação de uma reta r passando pelo ponto $P = (1, 3)$ com inclinação m .
- Determine m de modo que a interseção entre a parábola $y = x^2 + x + 1$ e a reta r tenha um único ponto, no caso o ponto P .

Solução:

Sabemos que a equação geral da reta é dada por: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ onde m é a inclinação de r . Assim temos que o ponto $P(1, 3)$ possui $x_1 = 1$ e $y_1 = 3$. Substituindo temos:

$$y - 3 = m \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = m \cdot (x - 1) + 3.$$

Tomemos

$$y = x^2 + x + 1 \text{ (I) e } y = m \cdot (x - 1) + 3 \text{ (II)}.$$

Igualando (I) e (II) temos:

$$x^2 + x + 1 = m \cdot (x - 1) + 3 \Leftrightarrow x^2 + (1 - m)x + (m - 2) = 0.$$

Note que, teremos solução única se, e somente se, $\Delta = 0$. Sendo assim,

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Fazendo $\Delta = 0$,

$$(1 - m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 2) = 0.$$

Então,

$$(m - 3)^2 = 0.$$

Logo $m = 3$.

Portanto a equação da reta tangente é $y = 3 + 3 \cdot (x - 1) = 3x$.

3. (ENQ 2017.2) Sejam a, b e c números reais com $a \neq 0$. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Escreva a expressão de f na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

(b) Utilizando o item anterior, prove que, se $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, são dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solução:

(a) Vamos fatorar a função $f(x)$.

- Inicialmente, vamos multiplicar a função por $\frac{1}{a}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right].$$

- Vamos, agora, completar quadrados

$$f(x) = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right].$$

Logo,

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Daí temos que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

(b) Utilizando o item (a), temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = - \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} - \frac{b}{2a} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Daí, as raízes r_1 e r_2 são:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4. (ENQ 2017.1) Determine as equações das duas retas tangentes à parábola de equação $y = x^2 - 2x + 4$ que passam pelo ponto $(2, -5)$.

Solução:

A equação da reta que passa por um ponto (x_0, y_0) é dada por: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$. Daí a equação da reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ é

$$y - (-5) = m \cdot (x - 2),$$

daí,

$$y = m \cdot (x - 2) - 5.$$

Como a reta é tangente à parábola, o sistema formado deve possuir uma única solução. Logo,

$$x^2 - 2x + 4 = m \cdot (x - 2) - 5,$$

Assim,

$$x^2 - (2 + m)x + 2m + 9 = 0.$$

Vamos agora determinar o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2 + m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m + 9),$$

então

$$\Delta = m^2 - 4m - 32.$$

Para haver tangência, $\Delta = 0$. Assim,

$$m^2 - 4m - 32 = 0.$$

Resolvendo a equação usando a fórmula de Bháskara, temos:

Logo,

$$\begin{aligned} m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{2}. \end{aligned}$$

Segue que as raízes são dadas por

$$m_1 = \frac{4 + \sqrt{144}}{2} = 8 \text{ e } m_2 = \frac{4 - \sqrt{144}}{2} = -4$$

Temos então que para $m_1 = 8$ a equação da reta é: $y = 8 \cdot (x - 2) - 5 = 8x - 21$.

Para $m_2 = -4$ a equação da reta é: $y = -4 \cdot (x - 2) - 5 = -4x + 3$.

5. (ENQ 2020.1) Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Existe um número real x tal que $5x + 7 < 2 - x < 7x + 8$.

(b) Se x é um número real tal que $x > 3$, então $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} \geq 0$.

(c) Para todo número real x , tem-se que $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.

Solução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned} 5x + 7 < 2 - x < 7x + 8 &\Leftrightarrow 5x + 7 < 2 - x \text{ e } 2 - x < 7x + 8. \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{5}{6} \text{ e } x > -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Portanto, a sentença é falsa, pois $-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4}$.

(b) Como $x > 3$, temos que $x^2 + 4x + 3 > 0$ e assim

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0.$$

Concluimos que, se $x > 3$ então $(x - 1)(x - 3) > 0$. Portanto, a sentença é verdadeira.

(c) Usando $x = -2$ como exemplo, temos: $-2 < 1$ e $(-2)^2 > 1$ Portanto, a sentença é falsa.

6. METODOLOGIA

Para a elaboração deste trabalho, que culmina na construção de uma sequência didática, realizou-se uma ampla pesquisa bibliográfica acerca da temática proposta, bem como das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes nas séries finais do Ensino Fundamental e em todas as séries do Ensino Médio. Nesse percurso, foram analisados livros didáticos amplamente utilizados nas escolas, tomando como referência o locus de aplicação da sequência didática, que envolveu duas instituições de ensino, uma municipal e outra estadual.

Os materiais didáticos adotados foram Teláris Essencial, da Editora Ática, e Prisma Matemática, da Editora FTD. Além desses, consultaram-se obras de autores renomados e relevantes para a área, como Elon Lages, James Stewart, George Polya, entre outros, bem como dissertações disponibilizadas no repositório do PROFMAT.

O conjunto dessas pesquisas forneceu bases sólidas para a apresentação das definições, conceitos e demonstrações essenciais à compreensão plena do tema. A seleção das fontes foi conduzida de forma criteriosa, considerando sempre a pertinência didática e a profundidade teórica necessária para sustentar o estudo.

A proposta pedagógica apresentada por meio da sequência didática fundamentou-se também em documentos normativos oficiais, como os PCNs e a BNCC, além de autores de referência no campo das metodologias ativas, especialmente na Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), como Moran, Valente, Demo, entre outros. Consultaram-se ainda dissertações do PROFMAT que abordam o uso do software GeoGebra no ensino de Matemática. Dessa forma, constituiu-se um arcabouço teórico robusto, que embasa e legitima a estrutura geral do trabalho.

Por fim, a sequência didática foi aplicada em uma turma mista, composta por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e das três séries do Ensino Médio, ao longo de 10 aulas, distribuídas em seis encontros. Os resultados obtidos, apresentados no tópico *Resultados e Discussões*, evidenciam significativa contribuição e elevado grau de alinhamento com os objetivos inicialmente propostos.

A pesquisa desenvolvida caracterizou-se como de natureza qualitativo-quantitativa, considerando que buscou analisar tanto os aspectos descritivos quanto os dados numéricos obtidos durante a investigação. A abordagem qualitativa permitiu compreender as percepções e dificuldades apresentadas pelos estudantes, enquanto a quantitativa possibilitou a organização e análise dos resultados obtidos nas atividades aplicadas.

A metodologia adotada contemplou a seleção dos participantes por meio de sorteio, garantindo maior imparcialidade na composição da amostra. Foram selecionados 20 alunos ao

todo, distribuídos da seguinte forma: 5 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, 5 alunos do 1º ano do Ensino Médio, 5 alunos do 2º ano e 5 alunos do 3º ano do Ensino Médio.

A coleta de dados ocorreu por meio da aplicação de atividades diagnósticas, elaboradas com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios, as principais dificuldades e o nível de compreensão dos estudantes acerca dos conteúdos abordados na pesquisa. Os resultados obtidos serviram de base para a análise e interpretação dos dados apresentados no estudo.

7 PROPOSTA PEDAGÓGICA/ PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo, apresenta-se o desenvolvimento de uma sequência didática voltada ao ensino de função quadrática, com a utilização do software GeoGebra como ferramenta de apoio pedagógico. A proposta tem como objetivo central implementar uma intervenção metodológica diferenciada, que favoreça uma aprendizagem mais interativa, investigativa e significativa por parte dos estudantes.

Inicialmente, a sequência fundamenta-se em uma abordagem baseada na resolução de problemas, característica das metodologias ativas. Nesse contexto, propõe-se que os alunos analisem situações oriundas do cotidiano, de modo a identificar e compreender os elementos essenciais que conduzem à construção do conceito de função quadrática. Essa etapa busca promover o protagonismo discente e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Em seguida, a proposta incorpora o uso do software GeoGebra como recurso didático, com a finalidade de potencializar a compreensão das propriedades da função quadrática por meio de sua representação gráfica. A exploração dinâmica proporcionada pelo ambiente computacional permite ao estudante estabelecer relações entre as expressões algébricas e suas interpretações geométricas, favorecendo a construção de significados.

Entende-se que a articulação entre situações-problema e o uso de tecnologias digitais, como o GeoGebra, pode contribuir de forma significativa para o fortalecimento do processo de ensino e aprendizagem, em consonância com as habilidades previstas no currículo. Ademais, a sequência didática proposta busca auxiliar na superação das dificuldades associadas ao estudo da função quadrática, previamente identificadas, bem como oferecer subsídios ao planejamento pedagógico dos docentes.

7.1 Ensino da Função Quadrática e a BNCC

O ensino da função quadrática ocupa papel central no currículo da Matemática do Ensino Médio, não apenas por sua relevância no campo algébrico, mas também por seu potencial de desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de modelagem e da interpretação de fenômenos reais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece competências e habilidades que devem nortear o trabalho docente, de forma que o conteúdo não se restrinja à manipulação simbólica, mas se estenda à compreensão conceitual e à aplicação em contextos significativos.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 523), "as funções devem ser estudadas de forma contextualizada, de modo a possibilitar que os estudantes reconheçam e representem relações entre grandezas, utilizem diferentes registros de representação e interpretem o significado de

parâmetros e variáveis em diferentes situações". Esse direcionamento demanda que a função quadrática seja abordada não apenas em sua forma algébrica, mas também por meio de representações gráficas, tabelas e problemas aplicados.

A função quadrática, usualmente representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é um dos primeiros modelos matemáticos não lineares que o estudante encontra. A BNCC, ao indicar que “os alunos devem compreender as diferentes formas de representação de funções e transitar entre elas” (BRASIL, 2018, p. 524), estimula a exploração integrada das representações algébrica, gráfica e tabular, permitindo que os discentes percebam as relações entre os coeficientes e a forma da parábola.

De acordo com Dante (2018), o ensino da função quadrática deve priorizar o significado da expressão matemática, para que os alunos sejam capazes de interpretar o papel de cada coeficiente e seu impacto no gráfico da função. Essa compreensão amplia as possibilidades de aplicação, como na modelagem de fenômenos físicos (por exemplo, o movimento de um projétil) ou econômicos (análise de lucro e custo), aspectos que se alinham à competência geral da BNCC que propõe “utilizar conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2018, p. 265).

Além disso, pesquisas em Educação Matemática, como a de Smole, Diniz e Cândido (2015), apontam que a abordagem contextualizada facilita a compreensão e a retenção do conteúdo. A BNCC reforça essa perspectiva ao defender que “a contextualização deve considerar problemas significativos para o aluno, conectando a Matemática com outras áreas do conhecimento e com a vida cotidiana” (BRASIL, 2018, p. 262). Assim, atividades como a análise de trajetórias, cálculo de áreas máximas e estudo de variação de grandezas permitem a integração entre teoria e prática.

Outro ponto relevante é o uso de tecnologias digitais. Softwares de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas e aplicativos gráficos potencializam o aprendizado, permitindo que os alunos visualizem a alteração dos coeficientes e o comportamento da parábola em tempo real. Borba e Penteado (2016) destacam que “a tecnologia pode contribuir para uma mudança no paradigma de ensino, oferecendo novas formas de visualização e exploração de conceitos matemáticos”.

Por fim, o trabalho com função quadrática deve desenvolver não apenas a habilidade de resolver equações do segundo grau, mas também a de interpretar soluções no contexto do problema. A BNCC enfatiza que o estudante deve ser capaz de “relacionar raízes de equações a interseções de gráficos com o eixo Ox , compreendendo o significado dessas soluções no contexto analisado” (BRASIL, 2018, p. 525).

O ensino da função quadrática, quando guiado pelas orientações da BNCC, deve transcender a mera aplicação de fórmulas, buscando promover o pensamento crítico, a resolução de problemas e a capacidade de modelagem matemática. A exploração de diferentes representações, a contextualização em situações reais e o uso de tecnologias são estratégias que favorecem uma aprendizagem mais significativa.

A BNCC propõe um ensino que integre conceitos, habilidades e atitudes, de modo que a função quadrática não seja percebida como um conteúdo isolado, mas como um instrumento para compreender e atuar sobre o mundo. Nesse sentido, o professor desempenha papel fundamental na mediação desse processo, criando oportunidades para que o aluno construa o conhecimento de forma ativa e contextualizada.

7.2 Aprendizagem Baseada em Problemas e o ensino de função quadrática

No período pós-pandêmico, a educação, em seus diversos níveis, foi significativamente impactada, o que tornou necessária a adaptação e, em muitos casos, a criação de novas estratégias pedagógicas capazes de assegurar a efetividade do processo de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, observou-se um crescimento expressivo na utilização de mídias digitais e tecnologias educacionais no ambiente escolar. Tais recursos passaram a integrar o cotidiano pedagógico, promovendo novas perspectivas de abordagem didática e contribuindo para o processo de recomposição das aprendizagens comprometidas durante a pandemia.

Dentre essas estratégias, destacam-se as chamadas metodologias ativas, que progressivamente passaram a ocupar espaço central no planejamento docente. Atualmente, torna-se essencial a elaboração de práticas pedagógicas que incorporem tais metodologias de forma intencional e estruturada. Nesse sentido, será apresentada uma análise da Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), a qual constitui uma das principais referências para a construção do produto educacional proposto.

Ressalta-se que, no cenário educacional contemporâneo, discussões acerca do ensino e de suas abordagens metodológicas permanecem em evidência, sendo consideradas elementos centrais para a promoção de uma aprendizagem significativa. A Aprendizagem Baseada em Problemas, enquanto estratégia de ensino, destaca-se por possibilitar a introdução de conteúdo a partir de situações contextualizadas, favorecendo a construção do conhecimento por meio da investigação, da análise crítica e da aplicação prática dos conceitos abordados.

(...) é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas matemáticos cotidiano; para

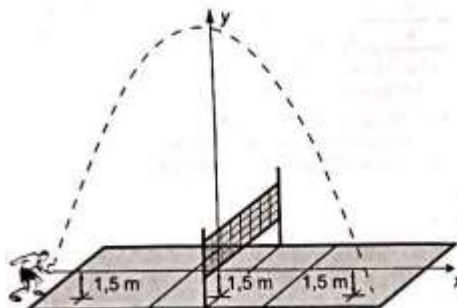
modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; e saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, P.69)

Segundo Pereira (1998), a condição necessária para que a aprendizagem ocorra é seu fator transformacional, exigindo do professor uma compreensão de novos significados, relacionando-os às experiências prévias e às vivências dos alunos, permitindo a formulação de problemas que estimulem, desafiem e incentivem novas aprendizagens. Nesse sentido a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) surge com o propósito de auxiliar o discente no conhecimento do conteúdo teórico, fortalecer a sua capacidade de resolver problemas e envolvê-lo no aprendizado (LEVIN, 2001).

Nesse sentido, busca-se iniciar a aula apresentando uma situação-problema que os discentes reconheçam como situação do cotidiano e a partir da exploração do professor, apresentar o tema proposto.

Por exemplo,

(ENEM – 2022) QUESTÃO MOTIVADORA) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



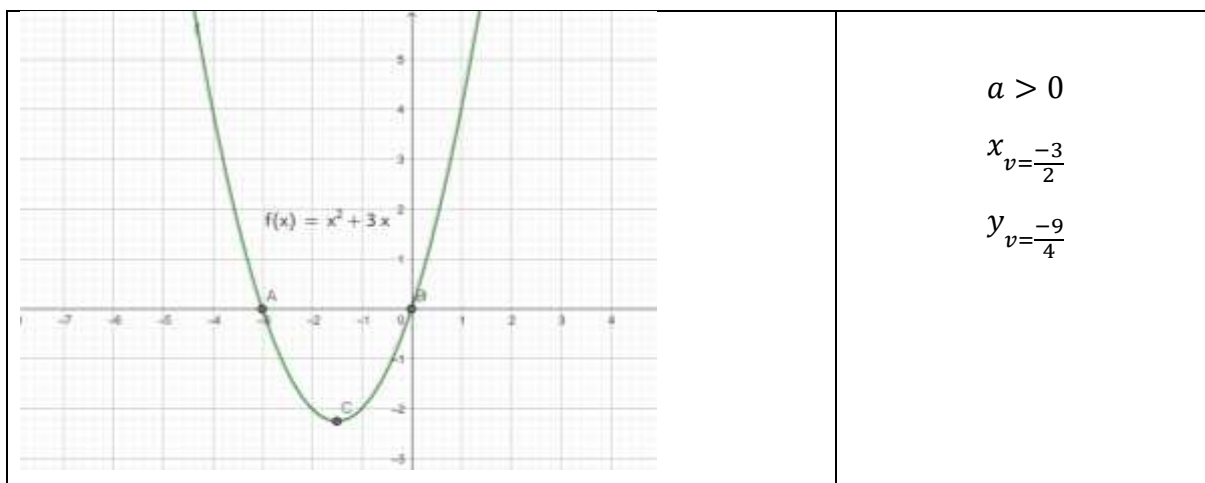
A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

• ginásio I: 17 m; • ginásio II: 18 m; • ginásio III: 19 m • ginásio IV: 21 m;• ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

- A) apenas no ginásio I.
- B) apenas nos ginásios I e II.
- C) apenas nos ginásios I, II e III.
- D) apenas nos ginásios I, II, III e IV.
- E) Em todos os ginásios.

Após a exploração e apresentação da temática, a utilização do Software GeoGebra propicia uma maior interação, pois geometricamente aponta-se o comportamento da parábola em relação ao sinal dos coeficientes, além dos zeros da função, valor máximo ou mínimo. Por exemplo, na tabela de valores abaixo



Podemos perceber que a representação “visual” geométrica apresentada por meio do software propicia uma melhor compreensão das principais características que a função quadrática possui. Os passos posteriores descritos na sequência didática conduzem em paralelo à utilização do GeoGebra, à exploração sistemática do tema, em nível superficial, do conteúdo em questão, cuja finalidade, após todos os encontros previstos, é a consolidação das habilidades basilares relacionadas ao tema e, assim, propiciar melhores resultados nas avaliações propostas, sejam elas internas ou externas.

7.3 Sequência Didática: Ensino das funções quadráticas utilizando GeoGebra

A sequência didática aqui apresentada constitui o produto educacional vinculado à pesquisa de mestrado intitulada “*Ensino das Funções Quadráticas utilizando o software GeoGebra*”, cujo objetivo é promover o ensino de Matemática por meio da integração de tecnologias digitais, favorecendo um processo de ensino-aprendizagem mais significativo.

Esta pesquisa integra os requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), ofertado pela Universidade Regional do Cariri (URCA), campus Juazeiro do Norte. Seu objetivo central consiste em proporcionar uma melhor compreensão da temática proposta mediante a utilização de metodologias ativas, com ênfase na Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), aliadas ao uso do software GeoGebra como recurso didático.

A implementação da sequência didática foi realizada em uma turma mista, composta por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e das 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, de uma escola pública do município de Saboeiro–CE. Inicialmente, foram aplicadas duas atividades diagnósticas (Apêndices 1 e 2), com o objetivo de identificar o nível de compreensão dos estudantes acerca do conteúdo, bem como possíveis lacunas de aprendizagem.

Na etapa seguinte, desenvolveu-se uma sequência composta por oito aulas (duas aulas semanais), contemplando tanto momentos expositivos quanto atividades práticas com o uso do software GeoGebra. Essas atividades foram direcionadas à resolução de problemas e à identificação das principais características das funções quadráticas, especialmente por meio de sua representação gráfica.

Ao final da intervenção, foi aplicado um instrumento avaliativo (Apêndice 3), com a finalidade de verificar o progresso dos estudantes, por meio da comparação entre os resultados obtidos nas atividades diagnósticas iniciais e na avaliação final.

A análise dos dados fundamenta-se na perspectiva da Análise de Conteúdo proposta por Bardin (1977), adotando como corpus as produções escritas dos estudantes, especialmente no que se refere à resolução de problemas e à aplicação dos conceitos estudados. As dificuldades identificadas foram classificadas em duas categorias: lacunas conceituais e lacunas operacionais. A discussão dos resultados estrutura-se em três etapas: pré análise, exploração do material e tratamento dos resultados, seguidos de sua interpretação.

O produto educacional contempla: (i) o roteiro detalhado da sequência didática; (ii) dois instrumentos diagnósticos iniciais; (iii) um planejamento sugestivo de aulas, correspondente a oito horas-aula; (iv) um instrumento avaliativo final, que investiga tanto a aprendizagem dos conteúdos quanto a percepção dos estudantes acerca do uso do GeoGebra; e (v) uma seção dedicada à discussão da relevância desse software no ensino de Matemática.

O GeoGebra, utilizado como principal recurso tecnológico, consiste em uma plataforma digital voltada à construção de gráficos, análise de funções e estudo de conteúdos de geometria plana e analítica. Sua utilização, no contexto desta pesquisa, permite estabelecer uma articulação entre representações algébricas e geométricas, especialmente no estudo das funções quadráticas, por meio da visualização dinâmica de seus gráficos no plano cartesiano.

Por fim, o objetivo principal desta proposta consiste em tornar o processo de aprendizagem mais dinâmico e atrativo, favorecendo a compreensão dos conceitos envolvidos e contribuindo para a superação das lacunas de aprendizagem previamente identificadas. Ademais, busca-se evidenciar a relevância do uso de tecnologias digitais, em particular o software GeoGebra, como ferramenta potencializadora no ensino de funções quadráticas

A base teórica que fundamentou essa sequência didática envolve Onuchic e Allevato (2021, p.47) os quais apresentam para o professor a concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, assumindo, o professor, o papel de mediador. Lima, E.L et., que forneceram grandes contribuições teóricas de análise do tema mencionado, Zabala (2014), apresentando a importância de conhecer e compreender as dificuldades específicas da turma. Libâneo (1990), apontando a necessidade de utilização de recursos tecnológicos como ferramenta pedagógica. Sá e Machado (2017), ao afirmarem que a utilização de softwares matemáticos permite uma melhor compreensão e visualização de conteúdo, além de documentos referencias como PCNs e a BNCC.

Como apontado nas avaliações de caráter diagnóstico, podemos perceber o quanto é importante reforçar o trato da função quadrática, a fim de suprir tais dificuldades de aprendizagem ora identificadas. Nesse contexto metodológico, faz-se necessário utilizar estratégias que possam, de forma efetiva, atrair a atenção dos estudantes e, assim, envolvê-los no processo de aprendizagem. Daí a importância de utilizar ferramentas tecnológicas no processo pedagógico.

De acordo com os PCNs “A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores” (Brasil, 1998, p. 140.).

Nesse sentido o GeoGebra surge como uma ferramenta pedagógica que, nos dias atuais, atua de forma interativa e atrativa para o ensino de matemática. O GeoGebra é um software gratuito e de fácil acesso na internet, podendo ser utilizado tanto em smartphones como em computadores e notebooks. Esse software é comumente usado para o ensino de Geometria (plana e analítica), Álgebra, estatística, entre outros assuntos matemáticos.

“os softwares matemáticos surgem como alternativa que amplia os conceitos teóricos dos conteúdos em sala de aula e de recurso dinâmico que pode atrair o interesse e a intuição dos alunos e incentivar o estudo dos conceitos de forma inovadora.” (BARROS; PACHECO, 2013, p. 8).

Portanto, a partir de uma concepção construtivista, este trabalho visa utilizar o software GeoGebra para o ensino de função quadrática, propondo, nesse sentido, o desenvolvimento de uma sequência didática, passando por alguns momentos sistematicamente bem definidos, tais como:

- 1) Aplicação das atividades 1 e 2. (APÊNDICES 1 e 2)
- 2) Apresentação da situação problemática.
- 3) Exposição do conceito e definições.
- 4) Generalizações;
- 5) Aplicações;
- 6) Exercitações;
- 7) Avaliação final. (APÊNDICE 3)
- 8) Análise dos resultados.

Dessa forma, espera-se que, ao final do desenvolvimento e da implementação desta sequência didática, haja uma contribuição efetiva para o desenvolvimento cognitivo e conceitual dos estudantes, especialmente no que se refere às habilidades de leitura, interpretação, análise e resolução de situações-problema envolvendo funções quadráticas. Ademais, pretende-se evidenciar a relevância da utilização de ferramentas tecnológicas no contexto da sala de aula, de modo a tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, interativo e significativo.

Com o intuito de assegurar clareza quanto à necessidade da abordagem proposta, estruturou-se inicialmente o **Momento I**, constituído por uma atividade motivadora

(Apêndice 1), cuja finalidade foi diagnosticar o nível de compreensão prévia dos estudantes acerca da temática. Posteriormente, após cinco aulas (distribuídas em três encontros), foi aplicada a **Atividade 2** (Apêndice 2), denominada **Momento II**, com o objetivo de aprofundar a análise diagnóstica e acompanhar a evolução dos estudantes.

A partir da aplicação dessas atividades e da análise dos resultados obtidos, tornou-se possível elaborar, de forma mais fundamentada, um roteiro pedagógico que orienta a sequência didática, visando à promoção de uma aprendizagem significativa. Para conferir maior dinamismo à proposta, adotou-se a metodologia ativa da Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), a qual favorece o protagonismo discente e a construção coletiva do conhecimento.

A utilização da ABP, quando implementada de forma planejada e contextualizada, tende a ampliar o engajamento dos estudantes, bem como a fortalecer sua autonomia no processo de aprendizagem. Nesse sentido, a sequência didática foi estruturada de modo a possibilitar que os objetivos estabelecidos em cada etapa sejam alcançados de forma progressiva e integrada. Para garantir maior efetividade ao produto educacional, adotou-se a seguinte organização didática

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA
Componente curricular: Matemática
Série: Turma mista –9º ano do Ensino Fundamental, 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio
Tema: Função quadrática
Questão Norteadora: Como o uso do GeoGebra pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da função quadrática?
Conteúdos trabalhados: Gráfico da função quadrática; Zeros da função; Ponto máximo e ponto mínimo; Translação horizontal e translação vertical do gráfico; Vértice; Eixo de simetria e concavidade.
Objetivos: Utilizar o software Geogebra na construção e análise de gráficos da função quadrática.

Identificar possíveis dificuldades de aprendizagem relacionados aos conceitos e aplicações da função quadrática;

Apresentar o software GeoGebra e os seus recursos para a construção e análise de gráficos da função quadrática;

Compreender o conceito de função quadrática e sua representação gráfica.

Analisar as características da função quadrática, incluindo zeros, vértice, eixo de simetria e concavidade.

Explorar recursos tecnológicos do software para investigar propriedades e comportamentos da função quadrática.

Resolver problemas matemáticos envolvendo funções quadráticas com o auxílio do GeoGebra.

Habilidades e competências:

EF09MA09: Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do segundo grau. (Brasil, 2018, p. 317).

EM13MAT302: Resolver e elaborar problemas que envolvam funções quadráticas, incluindo a identificação de suas características e a determinação de suas raízes.

EM13MAT303: Analisar e interpretar gráficos de funções quadráticas, incluindo a identificação de vértice, eixo de simetria e concavidade.

EM13MAT304: Utilizar funções quadráticas para modelar e resolver problemas reais.

Duração da sequência didática: 6 encontros e 10 aulas

Materiais utilizados na sequência didática:

- Quadro branco, Caneta, Data show, Computadores;
- Software GeoGebra;
- Instrumentos de desenho técnico (régua, escalímetro e esquadros).

Tendo em vista que todos os pré-requisitos que fundamentam a construção de uma sequência didática são atendidos pela organização didática, descreveremos, a seguir, o desenvolvimento de cada encontro, bem como os objetivos, materiais utilizados e procedimentos metodológicos realizados.

Encontro 1 (1 tempo de aula)
Conteúdo: Atividade Diagnóstica: Definição de função quadrática; zeros da função; ponto máximo e ponto mínimo.
Objetivo específico: <ul style="list-style-type: none">• Identificar conhecimentos prévios: Avaliar o nível de conhecimento e compreensão dos alunos sobre função quadrática desde conceitos básicos a aplicações pontuais.• Detectar possíveis dificuldades relacionadas aos conceitos e propriedades da função quadrática.• Avaliar habilidades e competências dos alunos no tema proposto.
Autores: Stewart (2013), Larson (2014), Iezzi (2010), Dante (2015)
Duração da aula: 50 min.
Materiais: Atividade diagnóstica impressa.
Procedimentos: <ul style="list-style-type: none">• Aplicação da atividade diagnóstica: Definição de função quadrática; zeros da função; ponto máximo e ponto mínimo.• Aplicação individual da avaliação diagnóstica;• Observação das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões.
Referências: <ul style="list-style-type: none">• IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2010.• DANTE, L. R. Matemática: contextos e aplicações. v. 1. São Paulo: Ática, 2015.• STEWART, J. Cálculo. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.• LARSON, R. Cálculo Aplicado. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

Nesse primeiro encontro, após uma acolhida, a turma convidada, foi aplicado uma atividade diagnóstica (Apêndice 01), cuja finalidade foi verificar o nível de entendimento dos alunos a respeito do tema proposto –Função quadrática: definição, zeros da função, ponto máximo e ponto mínimo. A atividade teve duração de aplicação de 50 min.

Encontro 2 (2 tempos de aula)
Conteúdo: Introdução à função quadrática; análise do gráfico da função quadrática;
Objetivo específico: <ul style="list-style-type: none"> • Introduzir o conceito de função quadrática e sua representação gráfica. • Analisar as características do gráfico da função quadrática.
Autores: Stewart (2013), Larson (2014), Iezzi (2010), Dante (2015)
Duração da aula: 1h e 40min.
Materiais: Quadro branco, pincel e datashow.
Procedimentos: <ul style="list-style-type: none"> • Definição de função quadrática e exemplos. • Utilização do GeoGebra para plotar gráficos de funções quadráticas simples. • Utilização do GeoGebra para plotar gráficos de funções quadráticas com diferentes coeficientes. • Análise das características do gráfico (vértice, eixo de simetria, concavidade etc)
Referências: <ul style="list-style-type: none"> • IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2010. • STEWART, J. Cálculo. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Neste segundo momento (Encontro 2), após acolhida à turma convidada, iniciamos a aula apresentando uma situação cotidiana. Visto que a prática esportiva adotada pela instituição foco da aplicação desta sequência didática é o vôlei, foi apresentada aos alunos uma situação-problema (Questão Motivadora, p. 90). Após análise da situação proposta, apresentamos a definição de função quadrática, bem como sua representação gráfica por meio do GeoGebra.

Em seguida, utilizando o GeoGebra plotamos funções quadráticas simples para análise do vértice, eixo de simetria, raízes e concavidade.

Encontro 3 (2 tempos de aula)
Conteúdo: Vértice e eixo de simetria; concavidade e pontos de interseção.
Objetivo específico: <ul style="list-style-type: none"> • Compreender o vértice e o eixo de simetria da função quadrática. • Analisar a concavidade e os pontos de interseção da função quadrática.
Autores: Iezzi (2010), Dante (2015), Stewart (2013), Larson (2014)
Duração da aula: 1 h e 40 min.
Materiais: Quadro branco, pincel para quadro branco, datashow e GeoGebra.
Procedimentos: <ul style="list-style-type: none"> • Plotar gráficos de funções quadráticas no GeoGebra para identificação do vértice e do eixo de simetria; • Exploração da concavidade da parábola a partir da variação dos coeficientes da função; • Utilização do GeoGebra para plotar gráficos de funções quadráticas e analisar a concavidade. • Identificação dos pontos de interseção com os eixos x e y.
Referências: <ul style="list-style-type: none"> • IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2010. • DANTE, L. R. Matemática: contextos e aplicações. v. 1. São Paulo: Ática, 2015. • LARSON, R. Cálculo Aplicado. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

Neste terceiro encontro, o foco da aula voltou-se para o estudo do vértice, do eixo de simetria e do sentido da concavidade. Nesse contexto, destacamos o papel dos coeficientes na compreensão do comportamento da parábola. Após um momento inicial formativo, apresentando definições e demonstrações do vértice e o papel dos coeficientes no quadro branco utilizamos o software GeoGebra e construímos o gráfico de uma função quadrática qualquer. Em seguida, fixamos os coeficientes b e c , por meio da barra deslizante, variamos o coeficiente a , de modo que a concavidade da parábola alterasse seu sentido. Foi impressionante perceber como os alunos permaneceram atentos e compreenderam claramente o papel dos coeficientes no comportamento da função quadrática.

Encontro 4 (1 tempo de aula)
Conteúdo: (Atividade de acompanhamento): resolução de equações quadráticas; aplicação de funções quadráticas; análise de funções quadráticas com parâmetros;
Objetivo específico: <ul style="list-style-type: none"> • Avaliar a compreensão dos alunos sobre resolução e interpretação de funções quadráticas. • Identificar avanços e possíveis dificuldades relacionadas às propriedades e aplicações da função quadrática. • Verificar a capacidade dos alunos de analisar funções quadráticas envolvendo diferentes parâmetros.
Autores: Stewart (2013), Larson (2014), Iezzi (2010), Dante (2015)
Duração da aula: 50 min.
Materiais: Atividade de acompanhamento
Procedimentos: <ul style="list-style-type: none"> • Aplicação individual da atividade avaliativa; • Observação das estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução das questões; • Discussão coletiva das principais dificuldades identificadas na atividade.
Referências: <ul style="list-style-type: none"> • IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2010. • DANTE, L. R. Matemática: contextos e aplicações. v. 1. São Paulo: Ática, 2015. • STEWART, J. Cálculo. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Nesse quarto encontro, após uma acolhida à turma convidada, foi aplicado um questionário (Apêndice 02), cuja finalidade foi verificar o nível de entendimento dos alunos a respeito do tema proposto – Função quadrática: resolução de equações quadráticas; aplicação de funções quadráticas e análise de funções quadráticas com parâmetros. A atividade teve duração de 50 min.

Encontro 5 (2 tempos de aula)
Conteúdo: Resolução de equações quadráticas;
Objetivo específico: <ul style="list-style-type: none"> • Compreender e resolver equações quadráticas com o auxílio do GeoGebra, analisando geometricamente suas soluções.
Autores: Iezzi (2010), Dante (2015)
Duração da aula: 1 h e 40 min.
Materiais: Quadro branco; pincel para quadro branco; projetor multimídia, GeoGebra.
Procedimentos: <ul style="list-style-type: none"> • Apresentação de equações quadráticas e discussão inicial sobre possíveis estratégias de resolução; • Utilização do GeoGebra para construir os gráficos das funções correspondentes às equações propostas; • Identificação das raízes da função por meio da análise gráfica; • Comparação entre os métodos algébrico e gráfico de resolução; • Discussão coletiva sobre a interpretação geométrica das soluções encontradas.
Referências: <ul style="list-style-type: none"> • IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2010. • DANTE, L. R. Matemática: contextos e aplicações. v. 1. São Paulo: Ática, 2015.

Neste quinto encontro, focamos na resolução de equações do 2º grau. Inicialmente, foram apresentadas algumas equações do 2º grau e aplicamos diferentes métodos de resolução. Algumas equações foram resolvidas por meio do método babilônico de completar quadrados, enquanto foram resolvidas utilizando a fórmula de Bháskara. Após esse momento, com o auxílio do software GeoGebra, construímos os gráficos das funções quadráticas associadas às equações trabalhadas e analisamos o gráfico de cada uma. Nesse contexto, os alunos compreenderam que as raízes da equação correspondem aos zeros da função quadrática a ela relacionada.

Encontro 6 (2 tempos de aula)
Conteúdo: Aplicação de funções quadráticas; análise de funções quadráticas com parâmetros. Simulado Final.
Objetivo específico: <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar funções quadráticas na resolução de situações-problema contextualizadas; • Analisar a influência dos parâmetros no comportamento do gráfico da função quadrática.
Autores: Iezzi (2010), Dante (2015), Stewart (2013), Larson (2014)
Duração da aula: 1h e 40 min.
Materiais: Quadro branco; pincel para quadro branco; projetor multimídia, GeoGebra.
Procedimentos: <ul style="list-style-type: none"> • Fortalecer o caráter investigativo e evidenciar melhor a culminância da sequência; • Construção, no GeoGebra, de gráficos de funções quadráticas envolvendo diferentes parâmetros; • Investigação da influência dos coeficientes no comportamento do gráfico da função quadrática; • Modelagem e resolução de situações-problema relacionados a funções quadráticas; • Discussão coletiva sobre a interpretação dos resultados obtidos; • Aplicação de um simulado final para avaliação da aprendizagem dos conteúdos trabalhados na sequência didática.
Referências: <ul style="list-style-type: none"> • STEWART, J. Cálculo. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013. • LARSON, R. Cálculo Aplicado. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

Neste último encontro, foram abordadas aplicações da função quadrática que exigia a modelagem matemática. Esse tema foi o que apresentou maior dificuldade entre os alunos, pois exigia, além do domínio de função quadrática, boa fluência leitora e capacidade de interpretação das informações para modelá-las por meio de uma função. Ao final do encontro 6, foi aplicado um simulado final (Apêndice 03), cuja finalidade é verificar o nível de aprendizagem dos alunos após os encontros formativos realizados.

7.4 Resultados e discussões

Diante das atividades propostas (Atividade diagnóstica e atividade de acompanhamento), obtiveram-se informações essenciais sobre o nível de conhecimento dos estudantes. Constatou-se que 90% dos alunos avaliados não sabiam definir corretamente o termo “parábola”, embora fossem capazes de identificar, sem dificuldade, o gráfico de uma função quadrática. (Figura 38)

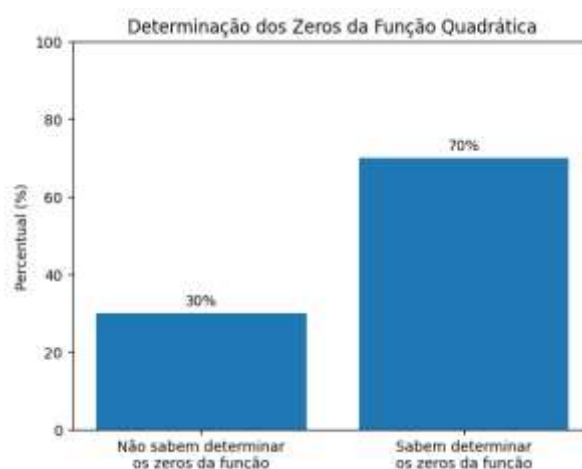
Figura 38: Gráfico relativo à questão 01 – (Atividade 01).



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

No que se refere ao cálculo dos zeros da função quadrática, verificamos que 70% dos estudantes resolveram corretamente a questão proposta. Entre aqueles que não obtiveram êxito, a principal justificativa apresentada foi a ausência de estudo prévio do conteúdo na série em curso ou o esquecimento das fórmulas necessárias.

Figura 39: Gráfico relativo à questão 02 – (Atividade 01).

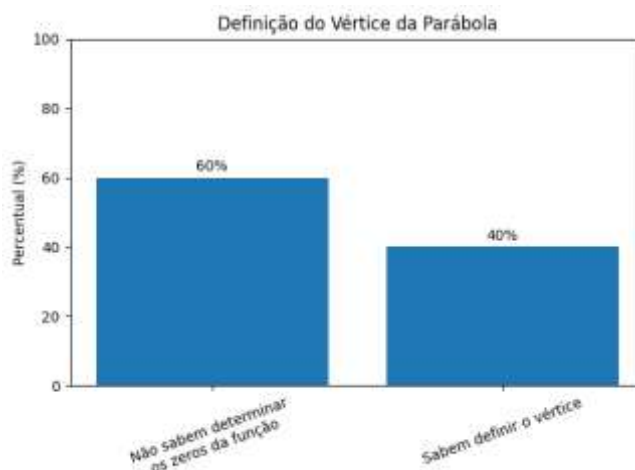


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Quando solicitada a definição de ponto máximo e ponto mínimo, observou-se que nenhum estudante conseguiu demonstrar ou justificar formalmente as fórmulas utilizadas.

Entretanto, todos conseguiram identificar o vértice no gráfico e classificá-lo corretamente como ponto mínimo ou máximo. Apenas 40% dos alunos recordavam as fórmulas no momento da atividade.

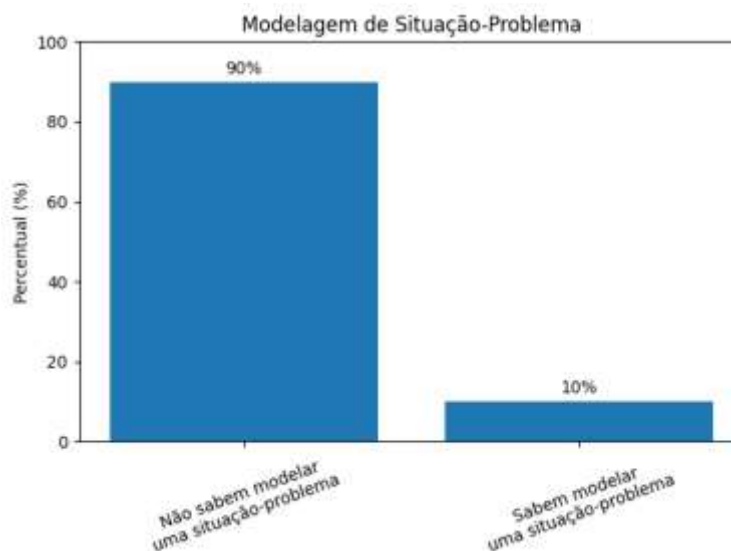
Figura 40: Gráfico relativo à questão 3 (Atividade 02)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O dado mais preocupante, no entanto, surgiu quando foi apresentada uma situação-problema que exigia a elaboração de um modelo matemático para construir a função quadrática e determinar seus zeros: somente 10% dos alunos conseguiram resolver adequadamente a atividade proposta.

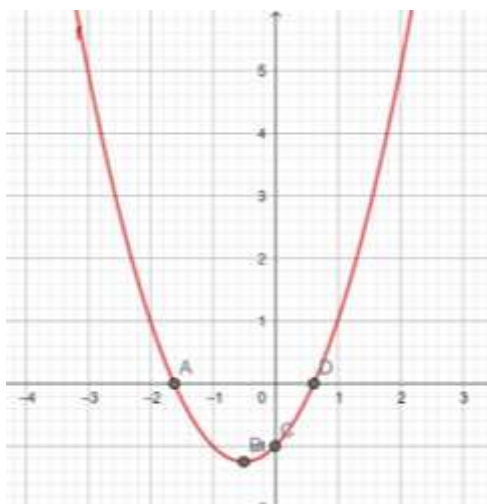
Figura 41: Gráfico relativo à questão 01.(Atividade 02)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Durante o desenvolvimento das aulas, observou-se que diversos conceitos foram compreendidos com maior facilidade quando apresentados por meio do software GeoGebra.

Figura 42: Função quadrática no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

As demonstrações formais também foram bem recebidas pelos estudantes; porém, devido às lacunas de aprendizagem relacionadas a habilidades matemáticas básicas, apenas 60% conseguiram reproduzi-las corretamente.

Ao final das nove aulas previstas, destinadas à exploração do tema, foi aplicado um simulado final (Apêndice 03), cujos resultados mostraram-se satisfatórios. Todos os alunos foram capazes de identificar corretamente, no gráfico de uma função quadrática, as raízes, o vértice, a classificação da concavidade em função do sinal do coeficiente a e os intervalos de crescimento e decréscimo.

Quanto à determinação algébrica das raízes e do vértice, 90% dos estudantes responderam corretamente. No entanto, no que se refere à demonstração formal das fórmulas estudadas, apenas 40% apresentaram domínio satisfatório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise fundamentada da temática proposta, explorando conceitos e demonstrações essenciais à construção do arcabouço teórico relacionado ao estudo das funções quadráticas no âmbito do currículo de Matemática.

Para sua elaboração, foram consideradas aplicações do tema em diferentes contextos, notadamente na Física e na Economia, bem como a resolução de problemas provenientes de avaliações de larga escala e competições acadêmicas, tais como ENEM, ENA, ENQ, OBM e OBMEP. Adicionalmente, propõe-se o desenvolvimento de uma sequência didática que incorpora o uso do software GeoGebra, com a finalidade de favorecer a compreensão das principais propriedades da função quadrática por meio de sua representação geométrica.

A definição da temática e das abordagens metodológicas adotadas foi fortemente influenciada pelas lacunas de aprendizagem identificadas nas atividades diagnósticas iniciais (Atividades I e II), o que reforça a pertinência e relevância do estudo desenvolvido. Nesse sentido, o trabalho orienta-se para a consolidação conceitual dos elementos fundamentais das funções quadráticas, contribuindo para a compreensão de suas propriedades e aplicações.

A adoção da metodologia ativa de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) mostrou-se adequada à organização da sequência didática, ao promover maior engajamento dos estudantes e favorecer a construção do conhecimento de forma mais significativa e contextualizada.

Por fim, este trabalho configura-se como um recurso pedagógico de apoio, passível de utilização no contexto escolar, com potencial para subsidiar práticas docentes e contribuir para o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

- ABREU E SILVA, R. Funções quadráticas e suas aplicações no ensino médio. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.
- ALMEIDA, E. A. Funções Quadráticas: ensino e aplicações. 2020. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2020.
- ASSIS, V. H. D. Características da função quadrática e a metodologia de resolução de problemas. 2015. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto, 2015.
- BARDIN, L. Análise de Conteúdo. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.
- BARRETO, N. S. Resolução de problemas: a conexão entre Matemática e Física por meio da função afim e quadrática. 2019. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2019.
- BONWELL, C.; EISON, J. Metodologias Ativas de Aprendizagem. TOTVS, 2024.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.
- CAMINHA, A. Tópicos de matemática elementar, vol. 1. Números Reais, SBM, 2011.
- COUTINHO, D. Confira 7 tendências da Educação em 2023. Revista Nova Escola, 2023.
- COUTINHO, R. P. Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016
- D'Ambrosio, U. Educação matemática: Da teoria à prática. São Paulo: Papyrus, 2013.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2018.
- DELGADO, J. J. Geometria analítica I. v. único / Jorge J. Delgado Gómez. – 3.ed. Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2010.
- GALLANT, C. D. “Proof without Words: Completing the Square”. Mathematics Magazine, v. 56, n. 2, 1983, p. 110. Disponível em: JSTOR, <https://doi.org/10.2307/2690382>. Acesso em: 10 jan. 2025
- GEOGEBRA. GeoGebra. Disponível em <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 20 de jul. de 2025.

- GUEDES, E. G. A equação quadrática e as contribuições de Bháskara. 2019. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.
- IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar. v. 1. São Paulo: Atual Editora. 2010.
- KENSKI, V. M. Educação e tecnologia: O novo ritmo da informação. São Paulo: Papyrus, 2012.
- LIBÂNEO, José Carlos. Didática. São Paulo: Cortez, 1990.
- LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.
- LIMA, E. L. et al. A Matemática do ensino médio. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LIMA, E. L. et al. Temas e problemas elementares. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- MAHMOOD, M.; MAHMOOD, I. "Proof without Words: Completing the Square via the Difference of Squares". The College Mathematics Journal, v. 45, n. 1, p. 21, 2014. Disponível em: JSTOR, <https://doi.org/10.4169/college.math.j.45.1.021>. Acesso em: 10 jan. 2025.
- MACHADO, A. S. Álgebra linear e geometria analítica / 2. ed. -- São Paulo : Atual, 1982.
- MORAN, J. M. Metodologias Ativas de Aprendizagem. Educação Transformadora, 2013.
- NERES, D. W. S.; BEZERRA, W. W. V.; EVANGELISTA, T.S. Função quadrática: uma análise da aprendizagem em tempos de pandemia numa escola pública do Distrito Federal. Revista Educação Pública. Rio de Janeiro, v. 23, n. 30, 8 de agosto de 2023.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de problemas: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.
- PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais. Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 1997.
- POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência. 1995.
- ROSA, M. Uma solução geométrica babilônia. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, n. 67, p. 1-3, 2008. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/67/3.html>. Acesso em: 10 out. 2023.
- SÁ, A. L. MACHADO, Marília Costa. O uso do *software* Geogebra no estudo de funções. XIVEVIDOSOL e XI CILTEC- online-junho/2017. Disponível em: <http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia>. Acesso em: 20 de março de 2025.
- SILVA, H. L. Função quadrática: investigar os conhecimentos que os alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática. 2019. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional)- Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

SILVA, M. P. Equações e funções quadráticas: aplicações e uma coletânea de problemas. 2017. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017

SKOVSMOSE, Ole. *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.

SMOLE, K.S; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. *Matemática no Ensino Médio: reflexões e propostas*. Porto Alegre: Artmed, 2015.

STEWART, J. Cálculo. Vol. 1. São Paulo: Cengage Learning. 2013.

LARSON, R. Cálculo Aplicado. Vol. 1. São Paulo: Cengage Learning. 2014.

TAN, S. T. Matemática aplicada à administração e economia. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2007.

UGALDE, M. C. P. ROWEDER, C. Sequência Didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. V.6. Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, 2020.

ZABALA, A. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Art Med, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE 01

ATIVIDADE 01 : Função Quadrática: Definição, zeros da função, ponto máximo e ponto mínimo.

01) Defina Função Quadrática.

02) Dada a função $f(x) = x^2 + 10x - 25$. Determine $f(x) = 0$.

03) Considere a função $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$. Quais os coeficientes a, b e c ?

04) Dada a região retangular abaixo. O valor de x que faz com que a área dessa região seja igual a 21 é?



05) Uma equação foi descrita da seguinte maneira: $(k^2 - 4)x^3 + (k - 2)x^2 + 7x - 8 = 0$

Analisando os coeficientes, o valor de k que faz com que essa equação seja uma equação do 2º grau é?

06) (Enem 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -t^2/4 + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C .

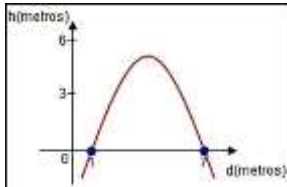
Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

- A) 19,0
- B) 19,8
- C) 20,0
- D) 38,0
- E) 39,0

APÊNDICE 02

ATIVIDADE 02 : Função Quadrática: Gráfico da função.

1. Em uma partida de futebol, a bola descreveu uma trajetória parabólica representada pela curva a seguir:



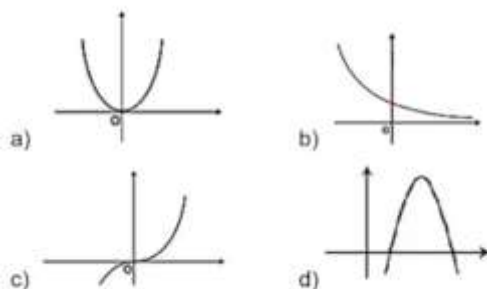
De acordo com o gráfico, a altura máxima atingida pela bola foi de aproximadamente:

2. No lançamento de foguetes de sua escola, Jonas atirou seu foguete para cima de modo que sua altura em relação ao solo pode ser descrita pela função $h(t) = 10 + 150t - 4t^2$ onde h é a altura dada em metros e t é o tempo expresso em segundos. Qual a altura atingida pelo foguete 2 segundos após o seu lançamento?

3. A soma das raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x - 5$ é:

4. Um atleta de salto com vara, ao sair do solo, descreve no ar uma curva com formato de um arco de parábola, descrito pela função do 2º grau $f(x) = 8x^2 - 4x + 1$. Quais os coeficientes da função?

5. Raissa Rocha é recordista mundial de lançamento de dardo. Em um determinado lançamento, um professor de Matemática representou a trajetória descrita pelo dardo. Sabendo que a trajetória corresponde ao gráfico de uma função quadrática, identifique o gráfico que melhor representa esse lançamento.



APÊNDICE 03 (simulado final)

01) Defina Função Quadrática.

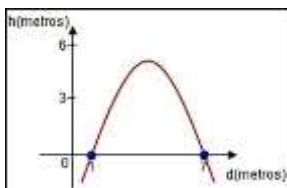
02) A função quadrática é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais. Para que essa função represente uma parábola voltada para cima, qual deve ser a condição sobre o coeficiente (a)?

03) Considere a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Qual é o seu vértice?

04) Em relação à função quadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. Determine $f(x) = 0$?

05) Considere a função $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$. Quais os coeficientes a , b e c ?

06) Em uma partida de futebol, a bola descreveu uma trajetória parabólica representada pela curva a seguir:



De acordo com o gráfico, a altura máxima atingida pela bola foi de aproximadamente:

07) No lançamento de foguetes de sua escola, Jonas atirou seu foguete para cima de modo que sua altura em relação ao solo pode ser descrita pela função $h(t) = 10 + 150t - 4t^2$ onde h é a altura dada em metros e t é o tempo expresso em segundos. Qual a altura atingida pelo foguete 2 segundos após o seu lançamento?

APÊNDICE 04: GeoGebra – Variando os coeficientes

