



UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

A LINGUAGEM ALGÉBRICA COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

SILAS MICAEL DO NASCIMENTO GOMES

Juazeiro do Norte – Ceará

2026

SILAS MICAEL DO NASCIMENTO GOMES

A LINGUAGEM ALGÉBRICA COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri – URCA, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira.

JUAZEIRO DO NORTE – CEARÁ

2026

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Gomes, Silas Micael Do Nascimento

G633l A linguagem algébrica como ferramenta de resolução de problemas:
proposta de sequência didática para o Ensino Médio / Silas Micael Do Nascimento
Gomes. Juazeiro do Norte - CE, 2026.

144p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da
Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira

1.Linguagem Algébrica, 2.Resolução de Problemas, 3.Ensino de Álgebra,
4.Sequência Didática, 5.Educação Básica; I.Título.

CDD: 510

A Linguagem Algébrica como Ferramenta de Resolução de Problemas: Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio

Silas Micael do Nascimento Gomes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título mestre em matemática.

Aprovada em 18/03/2026



Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)

Universidade Regional do Cariri(URCA)



Profa. Dra. Valéria Gerônimo Pedrosa

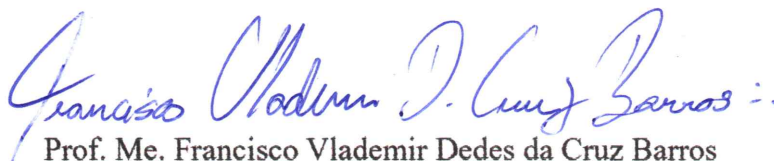
Universidade Regional do Cariri(URCA)



Profa. Dra. Juscelândia Machado Vasconcelos

Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação - CREDE 19

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - URCA



Prof. Me. Francisco Vlademir Dedes da Cruz Barros

Secretária de Educação do Estado do Ceará - SEDUC/CE

À minha família. Especialmente à minha
esposa, Rosimeire, e à minha filha, Alice.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela ajuda diária e pelas oportunidades.

Aos amigos e colegas de jornada, pelos momentos e ensinamentos compartilhados.

Aos meus pais e minha família, em especial à minha esposa e minha filha, Rosimeire e Alice, pelo apoio incondicional.

À Universidade Regional do Cariri - URCA, ao meu orientador, Dr. Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira, e demais professores, pela contribuição indispensável ao meu desenvolvimento acadêmico.

Muito obrigado.

"A Matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza, uma beleza fria e austera, como aquela da escultura, sem apelo a qualquer parte de nossa natureza mais fraca, sem as encantadoras armadilhas da pintura ou da música, mas sublimemente pura, e capaz de uma rigorosa perfeição que somente a maior das artes pode exibir."

(Bertrand A. W. Russell)

RESUMO

Esta pesquisa, desenvolvida no contexto do Ensino Médio, investigou como uma abordagem explícita e estruturada da linguagem algébrica, fundamentada na sua evolução histórica e aliada à metodologia Resolução de Problemas - RP, pode contribuir para a compreensão e o uso consciente dessa linguagem pelos estudantes. Partindo do diagnóstico de dificuldades recorrentes, como a tradução entre registros linguísticos, a modelagem de situações, a generalização de padrões e a compreensão conceitual de símbolos, foi elaborada e aplicada uma sequência didática organizada em quatro encontros. Cada um dos quatro encontros correspondeu a uma fase histórica da linguagem algébrica (retórica, sincopada e simbólica), utilizando a RP como eixo norteador. A pesquisa, de natureza qualitativa e do tipo pesquisa-ação, foi realizada com 39 alunos do 1º ano do Ensino Médio da EEMTI Filgueiras Lima, escola situada em Iguatu/CE. Os dados foram coletados por meio de questionários diagnóstico e pós-intervenção, observações em sala de aula e análise de produções discentes. Os resultados apontaram avanços significativos em todas as dimensões avaliadas, com destaque para a capacidade de generalização e para a apropriação de conceitos fundamentais como igualdade, incógnita e variável. Concluiu-se que a integração da perspectiva histórica com a RP ressignificou a linguagem algébrica para os alunos, transformando-a de um código arbitrário em uma ferramenta funcional e necessária, consolidando uma base conceitual robusta para aprendizagens posteriores. A sequência didática na íntegra é apresentada como produto educacional da pesquisa.

Palavras-chave: Linguagem Algébrica, Resolução de Problemas, Ensino de Álgebra, Sequência Didática, Educação Básica.

ABSTRACT

This research, developed within the context of secondary education, investigated how an explicit and structured approach to algebraic language, grounded in its historical evolution and combined with the Problem Solving (PS) methodology, can contribute to students' understanding and conscious use of this language. Based on a diagnosis of recurring difficulties, such as translation between linguistic registers, situation modeling, pattern generalization, and conceptual understanding of symbols, a didactic sequence organized into four sessions was developed and implemented. Each of the four sessions corresponded to a historical phase of algebraic language (rhetorical, syncopated, and symbolic), using PS as a guiding principle. The research, qualitative in nature and of the action-research type, was conducted with 39 first-year high school students from EEMTI Filgueiras Lima, a school located in Iguatu/CE. Data were collected through diagnostic and post-intervention questionnaires, classroom observations, and analysis of student work. The results showed significant progress in all dimensions evaluated, particularly in the ability to generalize and in the appropriation of fundamental concepts such as equality, unknown, and variable. It was concluded that the integration of the historical perspective with Problem Solving redefined algebraic language for students, transforming it from an arbitrary code into a functional and necessary tool, consolidating a robust conceptual base for subsequent learning. The complete didactic sequence is presented as an educational product of the research.

Keywords: Algebraic Language, Problem Solving, Algebra Teaching, Didactic Sequence, Basic Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Síntese visual dos dados Questão 01	55
Figura 2 – Resposta de Aluno(a)1. O item (a) foi Intermediário enquanto o item (b) foi Adequado	56
Figura 3 – Síntese visual dos dados Questão 02	58
Figura 4 – Resposta de Aluno(a)7, classificada como Intermediário . . .	58
Figura 5 – Síntese visual dos dados Questão 03	60
Figura 6 – Resposta de Aluno(a)11. A resposta do item (a) foi Adequada enquanto que a do item (b) foi Intermediária	60
Figura 7 – Síntese visual dos dados Questão 04	62
Figura 8 – Resposta de Aluno(a)33. O item (a) foi Adequado, o item (b) foi Crítico e o item (c) foi Intermediário	62
Figura 9 – Síntese visual dos dados Questão 05	64
Figura 10 – Resposta de Aluno(a)15. O item (a) foi Intermediário, en- quanto os itens (b) e (c) foram Críticos	64
Figura 11 – Síntese visual dos dados Questão 06	66
Figura 12 – Resposta de Aluno(a)39. A resposta do item (a) foi Crítica enquanto que a do item (b) foi Adequada	66
Figura 13 – Primeiro dia de aplicação da Sequência Didática	68
Figura 14 – Exemplo de resposta na fase retórica para um dos problemas propostos (Aluno(a)17)	69
Figura 15 – Exemplo de resposta na fase sincopada para o problema motivador (Aluno(a)22)	70
Figura 16 – Resposta de Aluno(a)8 anterior e posterior as intervenções .	72
Figura 17 – Resposta de Aluno(a)26 após intervenções	74
Figura 18 – Resposta de Aluno(a)4	77
Figura 19 – Resposta de Aluno(a)16	78
Figura 20 – Resposta de Aluno(a)9	79
Figura 21 – Resposta de Aluno(a)14	80
Figura 22 – Resposta de Aluno(a)31	81
Figura 23 – Resposta de Aluno(a)14	82

Figura 24 – Evolução percentual das respostas Adequadas nas dimensões da linguagem algébrica após a intervenção	83
Figura 25 – Redução percentual das respostas Críticas nas dimensões da linguagem algébrica após a intervenção	84
Figura 26 – Redução percentual das respostas Em branco nas dimensões da linguagem algébrica após a intervenção	85

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	A LINGUAGEM ALGÉBRICA: CONCEITOS E EVOLUÇÃO HISTÓRICA	17
2.1	Álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica	17
2.2	Evolução da linguagem algébrica	21
2.2.1	A fase retórica: a álgebra das palavras	21
2.2.2	A fase sincopada: as primeiras abreviações	23
2.2.3	A fase simbólica: a consolidação de uma linguagem universal	24
2.2.4	Síntese da evolução	26
3	O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - RP	28
3.1	Implicações para a Educação Matemática	28
3.2	A linguagem algébrica na Educação Básica	30
3.3	Principais dificuldades na aprendizagem de álgebra	34
3.4	A Resolução de Problemas - RP	38
4	METODOLOGIA	43
4.1	Tipo de pesquisa	43
4.2	Contexto e participantes	45
4.3	Instrumentos para a coleta de dados	46
4.4	Organização da Sequência Didática	47
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	53
5.1	Análise do Questionário Diagnóstico	53
5.2	Análise da aplicação da Sequência Didática	67
5.3	Análise do Questionário Pós-Intervenção	75
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICES	92
	APÊNDICE A – Questionário Diagnóstico	93
	APÊNDICE B – Questionário Pós-Intervenção	95
	APÊNDICE C – Sequência Didática	97

1 INTRODUÇÃO

A construção do conhecimento matemático assemelha-se à construção de uma escada onde cada degrau sustenta o próximo, criando uma estrutura coerente e sólida. Quando um desses degraus apresenta falhas, todo o processo ascendente fica comprometido. Ao longo de minha trajetória acadêmica e profissional, percebi que lacunas na aprendizagem dos estudantes comprometiam significativamente a construção do conhecimento matemático que se busca desenvolver em sala de aula, particularmente no que se refere ao ensino e à aprendizagem da linguagem algébrica e, conseqüentemente, da álgebra.

Minha primeira percepção sobre essa fragilidade surgiu durante a disciplina *Seminário de Álgebra* na graduação e, posteriormente, foi reforçada durante os estágios supervisionados. Em sala de aula, pude observar de perto a dificuldade recorrente que os alunos apresentavam ao tentar transitar entre a linguagem natural e a simbólica. A simples, porém crucial, tarefa de traduzir um enunciado em palavras para uma expressão ou equação algébrica representava um obstáculo significativo, evidenciando que a compreensão da álgebra como linguagem não estava consolidada.

Anos mais tarde, atuando como professor de Física, deparei-me com as conseqüências diretas dessa lacuna. Ao ensinar as funções horárias dos movimentos, que são a base da Cinemática, percebi que a dificuldade dos alunos não estava necessariamente nos conceitos físicos, mas na incapacidade de interpretar, manipular e relacionar as variáveis presentes nas equações. A linguagem algébrica, que deveria ser uma ferramenta para modelar e resolver problemas, transformava-se em mais uma barreira a ser transposta.

Posteriormente, já como professor de Matemática, a dimensão do problema tornou-se ainda mais clara. Ao trabalhar com situações-problema mais complexas e, principalmente, com funções, constatei que a deficiência na compreensão da linguagem algébrica limitava não apenas o desempenho em tópicos específicos, mas toda a capacidade de abstração, generalização e raciocínio lógico dos estudantes. Era evidente que o “degrau” da linguagem algébrica estava fragilizado, comprometendo a subida para patamares superiores do conhecimento matemático.

Essas experiências sucessivas, em diferentes contextos educacionais, consolidaram em mim a convicção de que o ensino da linguagem algébrica precisa ser repensado. Não se trata apenas de um conteúdo a ser cumprido, mas de uma competência linguística fundamental que deve ser desenvolvida de forma explícita, contextualizada e intencional.

Esta dissertação é fruto dessa trajetória e da busca por compreender e propor alternativas para um ensino de álgebra que efetivamente prepare os alunos para os desafios matemáticos que encontrarão adiante em sua escada de aprendizagem.

Essas reflexões pessoais se conectam diretamente com o cenário mais amplo do ensino de álgebra no Brasil, encontrando respaldo na literatura especializada. A álgebra ocupa um papel central no currículo da Educação Básica, sendo considerada pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC, um dos eixos estruturantes da Matemática (Brasil, 2018). No entanto, pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que a aprendizagem da álgebra é permeada por dificuldades persistentes.

Estudos como os de Martins (2024), que analisa o ensino, a aprendizagem e a avaliação em álgebra, Estevão e Moura (2021), que discutem os principais entraves nesse processo, e Lima e Bianchini (2022), que refletem sobre os desafios contemporâneos do tema, revelam que muitos estudantes conseguem aplicar mecanicamente regras de resolução de equações, mas apresentam obstáculos significativos ao tentar interpretar a função das letras, traduzir enunciados da linguagem natural para expressões algébricas ou compreender o significado das variáveis em diferentes contextos.

Além dessas dificuldades conceituais, o ensino tradicional de álgebra, centrado na manipulação de símbolos e na memorização de regras, leva o aluno a encarar a disciplina como algo sem relevância (Maia et al., 2020). Essa percepção é intensificada pelo uso indiscriminado de tecnologias que oferecem respostas rápidas para problemas matemáticos, muitas vezes sem a necessidade da compreensão dos processos envolvidos.

Esse cenário revela um descompasso entre o que se espera no currículo e o que de fato é apropriado pelo aluno, tornando-se crucial repensar as práticas pedagógicas para além da simples resolução de equações, focando na álgebra como uma linguagem essencial para a formação do pensamento crítico e da capacidade de modelagem. Grande parte do ensino ainda privilegia procedimentos simbólicos desconectados de situações concretas, o que leva os estudantes a verem a álgebra como um conjunto de regras a ser decoradas, em vez de reconhecê-la como uma linguagem que facilita a generalização e a modelagem de problemas. Essa dissociação acaba comprometendo não apenas o desempenho em álgebra, mas também a compreensão de conteúdos posteriores, como funções, progressões e geometria analítica, contrariando as expectativas formativas explicitadas na BNCC.

Diante desse contexto, o problema que se coloca é: como promover o ensino da linguagem algébrica de forma explícita e estruturada, para que os alunos compreendam

sua função e utilizem-na conscientemente? Mais especificamente, questiona-se: de que forma o ensino explícito e estruturado da linguagem algébrica, por meio de uma sequência didática, pode contribuir para a melhoria da compreensão e da resolução de problemas matemáticos na Educação Básica?

Para orientar este trabalho, estabeleceu-se como objetivo geral: implementar uma sequência didática que promova o uso consciente da linguagem algébrica como ferramenta de resolução de problemas. Para alcançar este propósito, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos: fazer um levantamento histórico do desenvolvimento da linguagem algébrica; identificar na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, onde e como a linguagem algébrica aparece (ou é esperada); diagnosticar, por meio de questionário, as principais dificuldades dos alunos na tradução e formulação algébrica de problemas; desenvolver e implementar uma sequência didática contextualizada que trabalhe explicitamente a construção e manipulação de expressões e equações; avaliar a eficácia da sequência didática mediante análise comparativa dos dados coletados nos questionários pré e pós-intervenção.

O presente trabalho justifica-se pela centralidade da linguagem algébrica na formação matemática dos estudantes e pela constatação de que seu ensino ainda enfrenta entraves significativos. Diante dessa lacuna entre a manipulação procedimental e a compreensão conceitual, este trabalho propõe uma intervenção didática que articula explicitamente a dimensão histórica e sintática da álgebra. Conforme estabelece a BNCC, é necessário desenvolver o pensamento algébrico desde os anos iniciais, enfatizando a habilidade de generalizar padrões, modelar situações e articular diferentes registros de representação (Brasil, 2018). Entretanto, na prática escolar, observa-se uma ênfase predominante na manipulação simbólica, sem um trabalho sistemático que explicita a álgebra como linguagem e instrumento de pensamento.

Ao realizar um levantamento histórico da evolução da linguagem algébrica, constata-se que as dificuldades contemporâneas dos alunos espelham, em grande parte, os mesmos desafios históricos que a humanidade levou séculos para superar. Reconhecer esse paralelo pode auxiliar o professor a compreender as dificuldades dos alunos não como falhas individuais, mas como parte de um processo histórico e cognitivo, reforçando a necessidade de intervenções didáticas intencionais.

Nesse contexto, a elaboração de uma sequência didática voltada ao uso consciente da linguagem algébrica configura-se como estratégia promissora para enfrentar tais

lacunas. A proposta visa oferecer atividades que favoreçam a tradução entre diferentes registros, a construção de expressões e a resolução de problemas contextualizados. Além disso, será implementada a partir de um diagnóstico inicial e avaliada por meio de um questionário pós-intervenção, de modo a possibilitar a análise da evolução dos alunos no uso consciente da linguagem algébrica. Assim, espera-se não apenas melhorar o desempenho imediato em tarefas algébricas, mas também fortalecer a autonomia intelectual e a capacidade de raciocínio matemático dos estudantes, em consonância com as competências previstas na BNCC.

O referencial teórico estrutura-se em duas bases complementares. A base histórica para a evolução da linguagem algébrica foi construída a partir de obras clássicas de história da matemática, como as de Boyer (1996), Eves (2011) e Roque e Carvalho (2012), complementadas por análises específicas de Puig (1998) e Silva, Lima e Oliveira (2020). A base didática, por sua vez, teve a metodologia de Resolução de Problemas fundamentada em Polya (1995), com inspiração nos trabalhos de Dante (1994) e Onuchic, Allevato, Noguti e Justulin (2014). A articulação entre esses dois eixos é a marca distintiva da proposta, que busca ensinar a álgebra não apenas como um conjunto de regras, mas como uma linguagem em evolução, cujo domínio se conquista pela prática reflexiva da resolução de problemas.

A pesquisa é de natureza qualitativa, caracterizada metodologicamente como pesquisa-ação, por ser uma abordagem que articula a produção de conhecimento com uma intervenção planejada e conduzida pelo pesquisador, como também por ser uma “linha de pesquisa associada a diversas formas de ação coletiva que é orientada em função da resolução de problemas” (Thiollent, 2011, p. 13).

Conforme a conceituação de Thiollent (2011), a pesquisa-ação estrutura-se em quatro ciclos: diagnóstico inicial, planejamento da intervenção, execução e monitoramento, e avaliação reflexiva. Na condução deste trabalho, essa estrutura cíclica orientou tanto o macroprocesso da investigação como microciclos internos ao desenvolvimento da sequência didática. Em cada etapa, um diagnóstico fundamentado gerou um planejamento interventivo específico, que foi aplicado e monitorado por meio de intervenções pontuais e, por fim, submetido a uma reflexão crítica, propiciando o aperfeiçoamento contínuo da proposta pedagógica.

Quanto à estrutura, este trabalho está organizado da seguinte forma: após esta Introdução, que apresenta o panorama geral, a motivação, o problema de pesquisa, a justi-

ficativa, os fundamentos teóricos e a metodologia, o Capítulo 2 dedica-se à fundamentação conceitual e histórica da linguagem algébrica. Sua primeira seção aborda as definições e inter-relações entre álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica na perspectiva da Educação Básica. A segunda seção, por sua vez, descreve as fases da evolução histórica dessa linguagem: retórica, sincopada e simbólica.

O Capítulo 3 discute as implicações pedagógicas dessa abordagem. Na primeira seção, são apresentadas as contribuições do estudo histórico para a Educação Matemática. A segunda seção identifica e analisa as habilidades relacionadas à linguagem algébrica na Base Nacional Comum Curricular - BNCC. A terceira seção sintetiza as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos da Educação Básica na aprendizagem da álgebra. Por fim, a quarta seção apresenta a metodologia de Resolução de Problemas, que norteará a sequência didática proposta.

No Capítulo 4, detalha-se a metodologia da pesquisa. São especificados o tipo de investigação, o contexto e os participantes, os instrumentos de coleta de dados e um resumo da sequência didática que inclui os objetivos de aprendizagem, orientações preliminares, conteúdos, problema motivador e reflexão proposta para cada um dos quatro encontros.

O Capítulo 5 apresenta a análise e discussão dos resultados. Nele, são examinados: o questionário diagnóstico, que serviu de base para o planejamento da intervenção; a aplicação da sequência didática, com base nos registros e interações observadas em sala de aula; e o questionário pós-intervenção, cuja análise comparativa com os dados iniciais permite avaliar a eficácia da proposta.

O Capítulo 6, apresenta as considerações finais da pesquisa. Nele, conclui-se que os objetivos geral e específicos foram alcançados, sugerem-se possíveis aprofundamentos futuros e apontam-se limitações do estudo.

Por fim, nos Anexos, são disponibilizados os instrumentos de pesquisa (questionários diagnóstico e pós-intervenção) e a sequência didática, produto educacional originado do trabalho, na íntegra.

2 A LINGUAGEM ALGÉBRICA: CONCEITOS E EVOLUÇÃO HISTÓRICA

Este capítulo foi construído com base em leitura exploratória de livros e artigos, com destaque para Boyer (1996), Eves (2011), Roque e Carvalho (2012), Gomes (2013) e Puig (1998).

A linguagem algébrica, tal qual a conhecemos hoje, é resultado de um longo processo histórico, marcado por transformações na forma como diferentes povos pensaram e representaram matematicamente as situações do cotidiano. A construção do pensamento algébrico nas diferentes culturas deu-se tanto de forma independente quanto mediante processos de troca e influência mútua entre povos (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993). Da mesma forma a linguagem algébrica, usada por cada civilização para registrar seu pensamento algébrico, evoluiu ao longo do tempo.

Antes de nos debruçarmos em sua evolução, faz-se necessário distinguirmos, no contexto da Educação Básica, álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica. A compreensão dessas diferenças é particularmente relevante no ensino básico, uma vez que a forma como o estudante lida com símbolos, generalizações e representações influencia sua aprendizagem e consolidação do raciocínio matemático. Diante disso, apresentamos a seguir uma seção que busca diferenciar os três termos, destacando suas inter-relações e implicações didáticas.

2.1 Álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais de Álgebra, explorando-a não apenas como um conteúdo, mas através de três dimensões essenciais: a álgebra em si, o pensamento algébrico que a sustenta e a linguagem algébrica que a formaliza, todos explanados a seguir.

(a) Álgebra

Ainda que não seja comum os livros da Educação Básica trazerem uma definição formal para a álgebra, ela pode ser entendida, em sentido amplo, como o ramo da Matemática que estuda estruturas, relações e operações envolvendo símbolos e variáveis. Tradicionalmente, está associada à resolução de equações e manipulação de expressões, mas em um contexto mais avançado se expande para o estudo de estruturas como grupos, anéis e corpos.

Do ponto de vista escolar, a álgebra é frequentemente apresentada como uma extensão da aritmética, na qual letras passam a representar números desconhecidos ou variáveis. Nesse sentido, a álgebra escolar é vista por Gomes (2013) a partir de quatro perspectivas:

1. Como a generalização de padrões aritméticos:

Nesse contexto é comum que seja atribuído às letras o papel de generalizar, como em “todo número, diferente de zero, elevado a zero é igual a um”, no qual podemos representar por

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ temos } a^0 = 1.$$

Nessa perspectiva, as tarefas principais para os estudantes são as de interpretar e expandir conceitos.

2. Como o estudo de procedimentos para resolver determinados problemas:

No problema “Comprei um bolo de dez reais e quatro pães doces, pagando um total de quatorze reais. Qual é o preço do pão doce?” temos como equação

$$10 + 4x = 14,$$

o que nos dá $x = 1$, ou seja, o pão doce custa um real. A álgebra aqui é vista como os procedimentos realizados para resolver a equação acima, que seriam adicionar -10 a ambos os lados da equação e depois dividi-los por 4. Agora, os alunos precisam, além de saber transpor o enunciado em linguagem natural para a linguagem algébrica, ter habilidades para manipular as equações obtidas, sendo ações essenciais simplificar e encontrar soluções.

3. Como a representação funcional de relações entre grandezas:

Diferentemente da anterior, onde as letras são incógnitas, isto é, valores desconhecidos, nesta concepção as letras realmente variam e a álgebra lida com padrões e regras que relacionam duas ou mais grandezas. No caso a seguir, temos a fórmula que relaciona a área A do quadrado ao seu lado a , sendo que ela se altera sempre que variamos a medida do lado:

$$A = a^2.$$

4. Como o estudo de estruturas:

Posto que, aparentemente, o estudo de estruturas pela álgebra só ocorre no ensino

superior, podemos relacionar essa perspectiva ao ensino de propriedades das operações polinomiais, por exemplo. Temos o produto notável

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

muito comum no ensino básico, situado dentro dessa perspectiva. Além disso, o estudo de estruturas como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais, mesmo não estando presente no ensino básico, fundamentam a resolução de equações nesse nível.

Para que seja possível trabalhar a álgebra dentro de qualquer perspectiva, bem como a matemática como um todo, é necessário o desenvolvimento de um pensamento algébrico, conceituado adiante.

(b) Pensamento algébrico

Pensamento algébrico refere-se à capacidade cognitiva de perceber regularidades, estabelecer generalizações, formular relações e raciocinar de forma abstrata sobre grandezas e estruturas matemáticas. Trata-se de uma dimensão epistemológica e pedagógica, que ultrapassa a mera manipulação de símbolos.

Pesquisadores em Educação Matemática como Borralho e Barbosa (2009), Gomes (2013) e Silva e Moreira (2018) destacam que o pensamento algébrico não se limita à aprendizagem formal da álgebra, mas pode se manifestar desde os primeiros anos da escolarização, quando o estudante começa a: identificar padrões em sequências numéricas ou geométricas; generalizar propriedades aritméticas (por exemplo, reconhecer que a soma de dois números pares é sempre par); raciocinar sobre relações entre grandezas sem necessariamente recorrer a números específicos; e estabelecer conexões entre representações diferentes (tabelas, gráficos, expressões).

Assim, o pensamento algébrico é mais amplo do que a linguagem algébrica e do que a própria álgebra escolar. Ele corresponde ao modo de raciocinar que fundamenta a compreensão da álgebra e de outros campos matemáticos.

(c) Linguagem algébrica

Por fim, a linguagem algébrica corresponde ao sistema de símbolos, convenções e regras que permitem expressar ideias matemáticas de forma concisa e precisa. Ela é, portanto, a forma como o pensamento matemático é registrado e comunicado.

Enquanto a aritmética se apoia essencialmente na linguagem numérica, a álgebra utiliza letras e variáveis para representar incógnitas ou grandezas, símbolos de

operações, convenções de escrita (uso de parênteses, ordem de operações, notação funcional) e igualdade e desigualdade como expressões de relações. É por meio da linguagem algébrica que generalizações podem ser formalizadas.

Para operacionalizar didaticamente essas distinções conceituais e oferecer uma visão clara e comparativa apresentamos a seguir o Quadro 1, que sintetiza as principais características de cada um dos três conceitos, destacando suas definições, principais funções e exemplos ilustrativos. Esta sistematização visa não apenas facilitar a compreensão das peculiaridades de cada termo, mas também fundamentar a prática pedagógica ao explicitar como essas dimensões se inter-relacionam e se manifestam na aprendizagem matemática.

Quadro 1 – Distinções entre álgebra, pensamento algébrico e linguagem algébrica

Dimensão	Definição	Função Principal	Exemplo
Álgebra	Ramo da Matemática que estuda estruturas, relações e quantidades por meio de símbolos e variáveis	Fornecer um corpo de conhecimento e métodos formais para generalizar e resolver problemas	Resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$
Pensamento Algébrico	Habilidade cognitiva de perceber padrões, generalizar relações, modelar situações e raciocinar de forma abstrata	Fundamentar a compreensão conceitual das relações matemáticas	Generalizar a sequência 2, 4, 6, 8... como $2n$
Linguagem Algébrica	Sistema de símbolos, convenções e regras usado para representar e comunicar ideias algébricas	Expressar e comunicar o pensamento algébrico de forma precisa e universal	Usar o símbolo = para denotar equivalência, e não apenas para o resultado, na expressão $3x + 1 = 10$

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Gomes (2013) e Silva e Moreira (2018).

A compreensão dessas distinções é fundamental para analisar criticamente como a linguagem algébrica, enquanto sistema de representação, não surgiu de forma completa, mas foi resultado de um longo processo de amadurecimento.

Já o domínio de sua evolução auxilia o professor a diagnosticar as dificuldades de seus alunos. Com o diagnóstico, é possível criar abordagens didáticas que facilitem o domínio dessa linguagem, elevando as taxas de sucesso em sua aprendizagem (Gomes, 2013), por isso, trazemos a evolução da linguagem algébrica na próxima seção.

2.2 Evolução da linguagem algébrica

Para organizar a análise do desenvolvimento da linguagem algébrica, é recorrente na literatura a divisão proposta por Nesselmann. No primeiro volume de seu trabalho, *Ensaio sobre uma história crítica da álgebra* (1842), ele categorizou a evolução da linguagem algébrica em três fases principais em que o critério central para essa divisão se fundamentou nas diferentes formas de notação utilizadas para expressar operações e equações (Puig, 1998).

A primeira é a fase retórica, na qual os problemas eram resolvidos por meio de descrições inteiramente verbais, sem abreviações ou símbolos. Em seguida, surge a fase sincopada, na qual se passou a empregar abreviações para designar elementos comuns, como operações e quantidades, representando um primeiro avanço na simplificação. Por fim, consolida-se a fase simbólica, caracterizada pelo uso de símbolos abstratos, independentes da linguagem natural. Cada uma delas reflete não apenas a evolução da notação, mas também diferentes formas de pensar a matemática.

Interessante observar que muitas dificuldades enfrentadas pelos estudantes atualmente (como a interpretação de variáveis, a tradução da linguagem natural para a simbólica e a abstração) espelham os próprios obstáculos que a humanidade levou séculos para superar. Ou seja, o percurso histórico da linguagem algébrica serve como um espelho para os desafios atuais do ensino. Diante disso, apresentamos a seguir cada fase, relacionando o contexto histórico com o processo de aprendizagem dos alunos com base na prática e observação em sala de aula.

2.2.1 A fase retórica: a álgebra das palavras

As primeiras manifestações algébricas podem ser encontradas em civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, sendo destacada por Silva, Lima e Oliveira (2020) a indicação em registros de que os babilônicos detinham um conhecimento algébrico mais avançado, pois, além de resolverem equações lineares, também trabalhavam com equações quadráticas e até cúbicas. O fato de uma equação do tipo $ax^4 + bx^2 = c$ ser reinterpretada como uma equação quadrática oculta, é citado por Boyer (1996) como um indício do elevado nível atingido pelo pensamento algébrico babilônico. Porém, assim como na egípcia, ainda não havia uma notação simbólica e os procedimentos para resolução de problemas eram descritos por meio de instruções em linguagem natural.

A característica principal dessa fase é o fato de que o raciocínio era extremamente ligado à linguagem. Resolver um problema exigia, além da habilidade matemática, habilidade linguística para interpretar o enunciado, formular os passos mentalmente e descrever a solução de forma clara. Muitos dos problemas eram apresentados em forma de versos e o método de resolução era narrado passo a passo, como uma receita, sem nenhuma notação algébrica. Isso limitava a complexidade dos problemas que poderiam ser tratados e a generalização dos métodos.

Al-Khwarizmi (século IX) foi um dos principais expoentes da fase verbal, sendo reconhecido como o maior escritor da matemática árabe devido a sua mais importante obra, *Hisab al-jabr w'al muqabalah*. É ainda incerto o real significado de algumas palavras utilizadas na obra mas acredita-se que *muqabalah* signifique “equilíbrio”, em referência ao cancelamento de termos semelhantes em ambos os lados da equação e *al-jabr* seja traduzido como “restauração”, um conceito relacionado à transposição de termos em uma equação (Silva; Lima; Oliveira, 2020), sendo a última considerada a origem do termo álgebra.

Um exemplo de problema escrito na linguagem retórica seria: “Deseja-se conhecer a natureza de dois números. A condição sobre eles é que, quando unidos pela adição, sua soma deve ser igual a dez. Uma segunda condição impõe que, quando tomados um pelo outro na operação de multiplicação, o resultado encontrado deve ser o número vinte e um. Qual é, portanto, o valor de cada um destes números?”

Esse problema seria rapidamente resolvido com símbolos algébricos através do sistema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 21 \end{cases},$$

porém, à época, a solução retórica certamente exigia grande esforço mental. Apesar de eficaz para problemas simples, a álgebra retórica mostrou-se limitada para generalizações e problemas mais complexos, o que motivou o surgimento de formas mais abreviadas de representação.

Bem como na álgebra retórica, muitos alunos hoje dependem exclusivamente da linguagem natural, apresentando dificuldade em transformar um enunciado dessa natureza em equação simbólica. Alguns alunos, muitas vezes, até conseguem realizar algumas manipulações algébricas mas frequentemente não conseguem transpor o problema à expressões simbólicas correspondentes. Parte dessa desconexão pode ser atribuída à

maneira como o simbolismo algébrico geralmente é apresentado, sem destacar sua origem histórica e contextualizada. Ao ensinar de forma mais integrada com sua história e evolução, é possível ajudar os alunos a compreender melhor a transição do verbal para o simbólico, facilitando a aprendizagem e tornando a matemática menos abstrata e mais palpável.

2.2.2 A fase sincopada: as primeiras abreviações

As limitações naturais da álgebra retórica impulsionaram um processo lento, porém revolucionário, de abreviação, dando origem à álgebra sincopada. Essa forma intermediária pode ser entendida como um estágio de transição, ainda dependente da linguagem natural, mas já experimentando uma simbolização inicial.

O principal representante dessa fase é Diofanto de Alexandria (século III d.C.), que iniciou a introdução de abreviaturas e símbolos para representar sobretudo incógnitas, potências de incógnitas e operações aritméticas, permitindo uma escrita mais enxuta, mas ainda com boa parte das operações por extenso. Segundo Boyer (1996), em *Arithmetica*, Diofanto apresentou uma sistematização de abreviações para potências de números, relações e operações, sendo um número desconhecido representado por um símbolo semelhante a letra grega ς (sigma final). Já Eves (2011) aponta que uma expressão como $x^3 + 13x^2 + 5x$, seria escrita por Diofanto como uma sequência de abreviaturas, cuja leitura literal era

“incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5”.

No Quadro 2 abaixo estão listados alguns símbolos, chamados por Diofanto de “designações abreviadas”, os quais ele introduziu já no Livro 1 de *Arithmetica*, com a finalidade de descrever variados tipos de números (Roque; Carvalho, 2012).

Quadro 2 – "Designações abreviadas"

Símbolo	Origem	Representa
ς	última letra da palavra <i>arithmos</i>	a quantidade desconhecida
Δ^{Υ}	primeira letra de <i>dynamis</i>	o quadrado da quantidade desconhecida
K^{Υ}	primeira letra de <i>kybos</i>	o cubo da quantidade desconhecida
$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	primeira letra de <i>dynamis</i>	o quadrado-quadrado (quarta potência)
ΔK^{Υ}	primeiras letras de <i>dynamis</i> e <i>kybos</i>	o quadrado-cubo (quinta potência)
$K^{\Upsilon}K$	primeira letra de <i>kybos</i>	o cubo-cubo (sexta potência)

Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho (2012).

A ausência de padronização dificultava a comunicação e a difusão do conhecimento, representando o principal obstáculo a ser superado para que a linguagem algébrica se tornasse concisa e universal como é hoje. A superação definitiva desse obstáculo marcaria o início da fase simbólica.

Essa falta de padronização lembra as dificuldades que estudantes enfrentam para atribuir significados consistentes às letras, confundindo incógnitas e variáveis. Quando apresentados a problemas em que precisem generalizar uma relação, ou mesmo construir uma equação que lhes auxilie a encontrar a solução, comumente constroem equações distintas da ideal ou acabam por criar um simbolismo próprio inadequado. Com base nesse paralelo, torna-se pedagogicamente importante tornar explícito para os alunos essa jornada histórica da notação. Mostrar que a simbolização foi um processo lento e cheio de tentativas pode validar suas próprias dificuldades e fornecer um contexto significativo para a adoção da padronização atual, transformando-a de uma imposição arbitrária em uma ferramenta poderosa e necessária para o avanço do conhecimento.

2.2.3 A fase simbólica: a consolidação de uma linguagem universal

É nesse momento que a álgebra se torna uma linguagem de fato, capaz de representar relações gerais e de articular a matemática com outras áreas do conhecimento. Ela deixa de ser apenas um conjunto de técnicas para resolver problemas específicos com números e se torna uma verdadeira linguagem, com um sistema de símbolos e regras, capaz de expressar verdades universais e se conectar de forma profunda e produtiva com outras

formas de conhecimento. Em Eves (2011), argumenta-se que, embora o surgimento da álgebra simbólica se deu na Europa Ocidental no século XVI, esse estilo se firmou apenas na metade do século XVII.

François Viète (1540–1603) comumente é apontado como figura central dessa transição. Segundo Boyer (1996), ele foi o primeiro a propôr usar consoantes para representar quantidades conhecidas (constantes) e vogais para quantidades desconhecidas (variáveis), introduzindo a noção clara de parâmetro. Embora ainda utilizasse algumas expressões verbais, Viète inaugurou uma álgebra mais próxima da atual. Isso permitiu que ideias complexas fossem expressas de maneira clara e manipulada de acordo com regras definidas.

Mesmo que já utilizasse os símbolos atuais de + e –, Eves (2011) ressalta que Viète não dispunha de nenhum símbolo para representar igualdade fazendo com que uma expressão do tipo

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

fosse escrita por ele como

$$B5 \text{ in } A \text{ quad} - C \text{ plano } 2 \text{ in } A + A \text{ cub aequatur } D \text{ solido.}$$

Posteriormente, René Descartes (1596–1650) consolidou o uso das letras x , y , z para incógnitas e a , b , c para constantes. Wallis (1616–1703) introduziu o símbolo ∞ para o infinito, e Leibniz (1646–1716) implementou a notação dx no cálculo diferencial. Com a contribuição de muitos outros, a álgebra simbólica atingiu maturidade, estabelecendo-se como uma linguagem compacta, precisa e universal.

O processo histórico de consolidação da linguagem simbólica, que demandou séculos de refinamento por algumas das mentes mais brilhantes da ciência, não se encerra com Leibniz, Wallis ou Descartes. Ele é percebido, em escala individual, na jornada de aprendizagem de cada estudante. Ainda hoje, alguns deles não se apropriam plenamente da notação simbólica, repetindo um processo histórico: a dificuldade em entender o símbolo como representação abstrata de relações gerais. A dificuldade que muitos ainda encontram em se apropriar plenamente dessa notação, enxergando no símbolo x não uma abstração universal, mas apenas um número a ser descoberto, reflete os mesmos desafios superados historicamente.

A transição para uma compreensão genuína da álgebra como linguagem, um sistema de símbolos com regras próprias para expressar e manipular relações gerais, representa, para o aluno, a mesma revolução conceitual que Viète e seus sucessores promoveram para a matemática. Reconhecer esse paralelo é fundamental para desenvolver abordagens pedagógicas que conscientemente guiem os estudantes na superação dessa barreira, facilitando a internalização dessa poderosa linguagem universal.

2.2.4 Síntese da evolução

A jornada da notação algébrica, desde a retórica até a simbólica, é um processo de síntese de séculos de esforço para sistematizar o pensamento humano sobre relações matemáticas e quantidades. O amadurecimento da notação simbólica foi fundamental para o estabelecimento da álgebra moderna, servindo inclusive como base para o desenvolvimento de campos aplicados atuais, como a criptografia e da ciência de dados. A capacidade de manipular símbolos de forma autônoma permitiu que a matemática se libertasse de algumas de suas mais antigas limitações e avançasse para níveis de abstração sem precedentes.

No Quadro 3 a seguir, apresentamos os principais marcos da evolução da linguagem algébrica:

Quadro 3 – Principais marcos da evolução da linguagem algébrica

Período	Autor/ cultura	Características principais	Linguagem	Dificuldade didática correspondente
~ 2000 a.C. – 500 a.C.	Babilônios e egípcios	Problemas práticos descritos em linguagem natural, sem símbolos	Retórica	Dificuldade em traduzir a linguagem natural para a algébrica
Século IX d.C.	Al-Khwarizmi	Sistematização de métodos para resolver equações, ainda em forma verbal, e origem do termo “álgebra”	Retórica sistematizada	Dificuldade em traduzir a linguagem natural para a algébrica
Século III d.C.	Diofanto de Alexandria	Uso de abreviações e símbolos rudimentares para incógnitas e operações	Sincopada	Dificuldade em criar e, principalmente, em padronizar uma notação (confusão entre incógnitas e variáveis)
Séculos XVI–XVII	François Viète	Introdução da noção clara e uso de vogais/-consoantes para representar incógnitas/constantes	Simbólica inicial	Dificuldade em entender o símbolo como uma abstração de relações gerais, e não apenas um número a ser descoberto
Séculos XVI–XVII	Descartes, Wallis, Leibniz	Consolidação da notação moderna	Simbólica madura	Dificuldade em entender o símbolo como uma abstração de relações gerais, e não apenas um número a ser descoberto

Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante do exposto, fica claro que a evolução da linguagem algébrica não consistiu apenas em uma mudança notacional, mas em uma transformação profunda na maneira de pensar e expressar a matemática, passando por séculos de ajustes e transformações. Do mesmo modo, o estudante enfrenta obstáculos semelhantes: interpretar, representar e manipular símbolos. Reconhecer essa relação é fundamental para que o professor compreenda as dificuldades dos alunos não como falhas individuais, mas como parte de um processo histórico e cognitivo mais amplo, trazendo melhorias para a prática docente e, conseqüentemente, para o processo ensino-aprendizagem.

3 O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - RP

Apresentados os fundamentos conceituais e históricos da linguagem algébrica, neste capítulo discutiremos as implicações do estudo de sua evolução para a Educação Matemática, os contextos de aprendizagem e as principais dificuldades dos estudantes, bem como a abordagem da Resolução de Problemas, que será a metodologia central para enfrentar tais desafios.

3.1 Implicações para a Educação Matemática

O estudo desta evolução histórica tem implicações para a Educação Matemática. Segundo Walle (2009, p. 32), “o sistema tradicional recompensa a aprendizagem de regras”, fazendo com que a abordagem do ensino da álgebra seja excessivamente focada na aprendizagem de procedimentos técnicos, gerando obstáculos de compreensão. Isso ocorre porque desconsidera a evolução histórica e conceitual que levou séculos para ser consolidada. A história da linguagem algébrica pode ser uma ferramenta pedagógica valiosa, permitindo que os professores despertem nos alunos o sentimento de elaboração e necessidade para com os símbolos, deixando de lado o sentimento de imposição arbitrária.

Uma forma concreta de explorar esse legado é transformar cada fase histórica da linguagem algébrica em uma etapa de aprendizagem para os alunos, permitindo que eles vivenciem, mesmo que em escala reduzida, o mesmo percurso histórico. Para isso, é imprescindível que o professor propicie um ambiente como o descrito por Walle (2009), estimulante e fértil, baseado numa cultura que não penalize o erro, mas o veja como uma oportunidade de crescimento coletivo. Algumas propostas de atividades, que serão exploradas na sequência didática, são:

1. “Atividades retóricas”: apresentar problemas exclusivamente em linguagem natural e solicitar que os alunos escrevam, passo a passo, como chegariam ao resultado sem utilizar símbolos. Por exemplo, sugerir o problema “A soma de dois números é trinta e um deles é o dobro do outro. Quais são esses números?” e incentivar que descrevam a estratégia verbalmente antes de formalizá-la.
2. “Atividades sincopadas”: pedir que os alunos criem abreviações próprias para incógnitas e operações na resolução de problemas, socializando e discutindo as diferentes soluções e notações criadas. O professor deve conduzir a discussão para ressaltar a

importância da padronização da linguagem matemática, partindo das experiências práticas dos alunos. Embora promover esse tipo de ambiente interativo e investigativo seja desafiador, ele tem um grande potencial para aprofundar a aprendizagem (Ponte, Rodrigues e Menezes, 2014).

3. “Atividades simbólicas”: apresentar o mesmo problema e conduzir a turma para a notação atual. Mostrar como as equações ficam mais simples de manipular quando se usa símbolos, evidenciando a eficiência da linguagem algébrica moderna.
4. Atividades comparativas: sintetizar, como no Quadro 4 abaixo, a resolução hipotética de um mesmo problema nas três fases da linguagem algébrica incentivando discussões sobre a utilização, eficiência e eficácia de cada forma. Esse tipo de atividade é essencial visto que “o uso e articulação de diversas representações assume um papel muito importante” para a aprendizagem (Ponte, 2017, p.5).

Quadro 4 – A linguagem algébrica nas três fases

Fase	Resolução hipotética	Comentário
Retórica	Procura-se dois números tais que sua soma seja 20 e sua diferença seja 4. Se somarmos as duas condições, obtemos o dobro do maior, resultando em 24. Logo, o maior número é 12 e o menor é 8.	Exige memória e linguagem verbal para acompanhar o raciocínio e se aproxima da forma como geralmente os alunos explicam soluções em palavras
Sincopada	Seja \dagger o maior número e Υ o menor. \dagger mais Υ igual a 20 e \dagger menos Υ igual a 4. Somando temos $2\dagger$ igual a 24, então \dagger igual a 12, então Υ igual a 8.	Introduz símbolos, mas ainda depende de explicações textuais mostrando a transição entre linguagem natural e notação formal, validando o uso de representações próprias dos alunos
Simbólica	$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases} . \text{ Assim, temos} \\ 2x = 24 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow y = 8.$	Representação compacta, permite generalização e manipulação algébrica onde se destaca a eficiência da notação moderna e sua aplicabilidade a casos gerais

Fonte: Elaborado pelo autor.

5. Modelagem como ferramenta de aprendizagem: utilizar situações do cotidiano (custos de produtos, crescimento populacional, padrões geométricos, problemas locais) para que os alunos construam generalizações algébricas pois elas são, como ressalta Ponte (2017, p. 2), “um aspecto fundamental do pensamento algébrico”, reforçando que a álgebra não é apenas um “conjunto de regras”, mas uma linguagem para descrever

relações gerais.

6. Análise do processo de aprendizagem: promover uma reflexão com os alunos sobre como sua própria forma de pensar evoluiu durante as atividades a partir das intervenções docentes, com o intuito de minimizar as barreiras cognitivas e fomentar uma colaboração efetiva entre alunos e professores na construção do saber (Salvatierra, 2023). Essa etapa ajuda a internalizar nos estudantes a percepção de que sua disposição e colaboração favorecem uma aprendizagem significativa.

Compreender e vivenciar essas etapas em sala de aula legitima o simbolismo como uma ferramenta de pensamento, em vez de um conjunto arbitrário de regras. A notação algébrica é um dos maiores feitos intelectuais da humanidade, um testemunho do poder da abstração e da linguagem para transformar não apenas a ciência, mas a própria forma de pensar. Conhecer a evolução de sua linguagem é fundamental para compreender a natureza da matemática e para implementar uma abordagem de ensino que valorize a conexão entre o pensamento abstrato, a história da matemática e a construção ativa do conhecimento pelos alunos.

3.2 A linguagem algébrica na Educação Básica

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, é um documento normativo fundamental que estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem adquirir ao longo da Educação Básica. Seu objetivo é garantir os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, alinhando-se a políticas como o Plano Nacional de Educação - PNE. Ela serve como uma referência nacional para a criação de currículos e propostas pedagógicas em todo o país, ajudando a unificar as políticas educacionais e a garantir uma qualidade de ensino comum para todos os estudantes (Brasil, 2018).

Em seu texto, reconhece a álgebra como um dos eixos estruturantes da Matemática, presente desde o Ensino Fundamental, devido os primeiros contatos com a linguagem algébrica através, principalmente, dos signos matemáticos, pois nesse nível de ensino

ampliam-se também as experiências para o desenvolvimento da oralidade e dos processos de percepção, compreensão e representação, elementos importantes para a apropriação do sistema de escrita alfabética e de outros sistemas de representação, como os signos matemáticos (Brasil, 2018, p. 58).

Na unidade temática de Álgebra, a BNCC orienta a busca do desenvolvimento do pensamento algébrico, crucial para entender, representar e analisar relações entre grandezas

e estruturas matemáticas. O “entender”, “representar” e “analisar” estão intrinsecamente associados a linguagem algébrica pois ela é um recurso fundamental para o desenvolvimento desse tipo de raciocínio, uma vez que, para resolver alguns problemas, o aluno precisa “[...] transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa” (Brasil, 2018, p. 271), ou seja, fazer a transposição entre diferentes linguagens.

Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (Brasil, 2018, p. 270).

A seguir, são apresentadas algumas habilidades constantes na BNCC que se relacionam, mesmo que implicitamente, com o desenvolvimento da linguagem algébrica. Uma habilidade que pode ser associada a linguagem algébrica, trabalhada de uma forma meio que retórica, é a EF01MA10, que aparece no primeiro ano. Já na EF02MA10, do segundo ano, a linguagem algébrica é trabalhada de forma sincopada. Em EF05MA11 (quinto ano), EF07MA15 (sétimo ano), e EF08MA06 (oitavo ano), a linguagem algébrica aparece também de forma explícita percebida pelo uso de palavras como “descrever”, “elaborar” e “expressar”. Por outro lado, em EF03MA10 (terceiro ano), EF04MA14 (quarto ano), EF06MA14 (sexto ano), e EF09MA06 (nono ano), a linguagem algébrica aparece de forma implícita mas pode ser relacionada ao uso de palavras como “identificar”, “reconhecer” e “conhecer”. No Quadro 5 abaixo, são apresentados os textos referentes as habilidades destacadas do Ensino Fundamental.

Quadro 5 – Algumas habilidades relacionadas a linguagem algébrica no Ensino Fundamental

Série	Código	Habilidade
1º ano	EF01MA10	Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras
2º ano	EF02MA10	Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos
3º ano	EF03MA10	Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes
4º ano	EF04MA14	Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos
5º ano	EF05MA11	Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido
6º ano	EF06MA14	Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas
7º ano	EF07MA15	Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas
8º ano	EF08MA06	Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações
9º ano	EF09MA06	Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis

Fonte: Adaptado de Brasil (2018).

Essas habilidades trazem algumas vezes a linguagem algébrica de forma explícita, outras vezes de forma implícita, evidenciando sua importância para que o trabalho com álgebra no Ensino Fundamental vá além da resolução de exercícios mecânicos, favorecendo a tradução de situações do cotidiano para a linguagem simbólica, o desenvolvimento de

estratégias de solução e a capacidade de argumentação matemática.

No Ensino Médio, a BNCC aprofunda esse eixo, articulando-o ao estudo de funções, sistemas, progressões e modelagem matemática. Aqui temos a necessidade de uma linguagem algébrica já desenvolvida “[...] tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas” (Brasil, 2018). Algumas habilidades que se conectam diretamente ao uso consciente da linguagem algébrica são apresentadas no Quadro 6 a seguir.

Quadro 6 – Algumas habilidades relacionadas a linguagem algébrica no Ensino Médio

Código	Habilidade
EM13MAT501	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$
EM13MAT302	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais

Fonte: Adaptado de Brasil (2018).

Nas habilidades abordadas temos a presença explícita da linguagem algébrica, perceptível em termos como “expressar algebricamente” e “construir modelos”, e sua análise mostra que a BNCC não restringe a álgebra a um conjunto de técnicas de manipulação, mas propõe seu uso como linguagem para modelagem, generalização e comunicação matemática. Isso reforça a necessidade de práticas pedagógicas que explorem a linguagem algébrica de modo explícito e contextualizado, permitindo ao estudante reconhecer seu valor como ferramenta de pensamento.

O ensino da linguagem algébrica deve favorecer a construção de significados e a articulação entre diferentes registros, garantindo que o estudante compreenda a função das expressões e equações no raciocínio matemático. Contudo, pesquisas têm mostrado que

esse objetivo ainda está longe de ser plenamente alcançado. Muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com dificuldades na interpretação e na manipulação de símbolos, o que compromete o desenvolvimento de competências previstas na BNCC. Essas dificuldades, bem como suas possíveis causas e implicações, são discutidas na seção seguinte.

3.3 Principais dificuldades na aprendizagem de álgebra

Conhecer as principais dificuldades na aprendizagem de álgebra é fundamental para compreender o porquê de tantos alunos apresentarem baixo desempenho nessa área e, conseqüentemente, desenvolverem aversão à matemática. Diversas pesquisas têm buscado mapear os erros e equívocos cometidos pelos alunos, classificá-los e propor estratégias para superá-los, destacando que o erro pode ser um importante aliado no processo de ensino e aprendizagem. Nesta seção, apresentamos as sínteses de um capítulo de livro e de trabalhos que investigam os tipos de erros mais comuns, suas causas e implicações pedagógicas.

A princípio, em Pinto (1997), o foco é o tratamento dado por professores aos erros cometidos pelos alunos em aulas de álgebra. A pesquisa observa como os professores reagem às respostas incorretas, se usam essas situações para promover reflexão ou apenas corrigem de forma direta. Conclui-se que, muitas vezes, os erros não são explorados como oportunidades didáticas, limitando o potencial de aprendizagem que poderiam proporcionar.

Já em Santos (2013) é realizada uma metanálise de dissertações e teses brasileiras que investigaram erros e dificuldades de alunos na aprendizagem da álgebra elementar. O estudo busca relacionar os tipos de erros identificados com as concepções de ensino dos professores e com as estratégias usadas para lidar com essas dificuldades. Os resultados mostram que muitos erros decorrem de um ensino excessivamente mecanizado e descontextualizado, reforçando a necessidade de abordagens que valorizem o significado dos conceitos e incentivem a investigação matemática em sala de aula.

Em Soares (2019) são analisados erros recorrentes de alunos em conteúdos de álgebra, incluindo equações do 1^o e 2^o grau, frações algébricas, produtos notáveis e sistemas de equações. O autor propõe uma classificação dos erros encontrados, evidenciando problemas de interpretação de enunciados, uso inadequado de propriedades algébricas e confusão entre operações. Além de identificar os erros, a pesquisa promoveu discussões

em sala de aula para que os próprios estudantes refletissem sobre suas dificuldades, transformando o erro em um instrumento de aprendizagem e não apenas em critério avaliativo.

Por sua vez, em Gorini (2021) é feita uma investigação sobre os erros cometidos por alunos em tarefas de álgebra, com ênfase na análise qualitativa das produções dos estudantes. A autora identifica dificuldades específicas na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e na manipulação simbólica, propondo sequências didáticas que priorizam a construção de significados e a discussão coletiva das soluções, de modo a favorecer a compreensão conceitual.

Por fim, no último capítulo do livro *Álgebra e funções na educação básica* de Gomes (2013), são discutidos os principais erros cometidos pelos estudantes no aprendizado de álgebra, com base em uma adaptação do livro *Iniciación al Álgebra* (1996) de Socas e colaboradores. A partir dos resultados de uma pesquisa realizada com alunos de 13 a 16 anos de idade, pelo grupo de álgebra do projeto *Strategies and Errors in Secondary Mathematics* (SESM), do Reino Unido, a autora destaca que tais erros se concentram, sobretudo, na transição da aritmética para o pensamento algébrico, envolvendo dificuldades no entendimento dos símbolos e letras, no significado do sinal de igualdade e na interpretação da natureza das respostas algébricas. Também são analisados erros decorrentes do uso inadequado de fórmulas e regras de procedimentos, bem como aqueles relacionados à compreensão insuficiente de conceitos aritméticos básicos, como frações e operações com números inteiros.

As investigações revelaram que independentemente da idade ou experiência escolar, os estudantes cometem erros semelhantes, revelando dificuldades sistemáticas. Muitos desses erros estão ligados à transição do pensamento aritmético para o algébrico, especialmente à falta de familiaridade com a linguagem algébrica, que provoca representações equivocadas e manipulações incorretas. Isso evidencia a necessidade de um ensino mais direcionado, se possível, explícito, da linguagem algébrica com a finalidade de minimizar os erros apresentados a seguir.

1. Erros relacionados ao significado dos símbolos e das letras:

A maior dificuldade dos alunos no início do estudo de álgebra está na interpretação e utilização correta de símbolos e letras. Muitos deles tratam as letras como números específicos, em vez de variáveis. Também são comuns erros envolvendo concatenação de números e letras. Outro ponto crítico é o conceito de igualdade

pois na aritmética ele é frequentemente entendido como um pedido de cálculo mas, em álgebra, representa uma relação de equivalência entre expressões que, além de ter sentido bidirecional, pode ser verdadeira apenas para certos valores da incógnita.

Exemplos:

- a) Soma de termos numéricos com termos que contém letras:

$$5x + 6 = 22 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2.$$

- b) Substituição de letras por valores numéricos:

$$\text{para } x = 6: \quad 4x = 46.$$

- c) Sentido bidirecional da igualdade (equivalência):

$$\frac{6}{x+1} + \frac{7}{x-1} = 5 \rightarrow 6(x-1) + 7(x+1) = 5.$$

2. Erros quanto ao objetivo da atividade algébrica:

Muitos alunos esperam sempre encontrar uma resposta numérica única, como ocorre em aritmética, e têm dificuldade em aceitar uma expressão algébrica como resultado válido. Quando uma expressão algébrica é a solução, o aluno tenta reduzir a expressão a um único termo, buscando um fechamento numérico ou simbólico.

Exemplo: (...) se ele comprou 5 pães e 2 bolos, qual a expressão que retorna o valor gasto em função do preço de cada pão (x) e cada bolo (y)?

$$5x + 2y \rightarrow 7xy.$$

3. Erros decorrentes de equívocos em aritmética:

Dificuldades não superadas em aritmética acabam acarretando erros em álgebra, afetando diretamente o desempenho. Dentre eles, cálculo incorreto de mínimo múltiplo comum ao resolver equações com frações, confusão com os sinais ao trabalhar com expressões e interpretação equivocada de potências.

Exemplos:

- a) Confusão com os sinais:

$$-(x + y) = -x + y.$$

- b) Erros em potências:

$$(-1)^4 = -4 \quad \text{ou} \quad x^2 = 2x.$$

4. Erros quanto ao uso de procedimentos:

Alguns alunos ou não sabem as regras para manipular as equações ou aplicam mecanicamente regras conhecidas, acabando utilizando-as para situações que não são adequadas. Também usam procedimentos pessoais para encontrar soluções, que funcionam em casos simples ou em determinadas situações, mas falham em problemas mais complexos.

Exemplos:

a) Distribuição incorreta:

$$3(x + y) = 3x + y.$$

b) Distribuição em produtos:

$$3(x \cdot y) = 3x \cdot 3y.$$

c) Analogia ao produto nulo:

$$(x - 1)(x + 4) = 14 \rightarrow x - 1 = 14 \quad \text{ou} \quad x + 4 = 14.$$

d) Cancelamentos:

$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{26}{76} = \frac{2}{7}, \quad \text{ou ainda,}$$

$$a(x + y) = ab \rightarrow x + y = b \quad \text{então} \quad ax + y = ab \rightarrow x + y = b.$$

O Quadro 7 a seguir, condensa os erros discutidos acima, acompanhados de um exemplo e possível causa. Essa organização permite a visualização de forma clara das dificuldades mais recorrentes no processo de aprendizagem da álgebra com base nos trabalhos citados, destacando-se que muitas delas têm origem em interpretações e uso equivocadas da linguagem algébrica ou na transferência inadequada de estratégias da aritmética para o novo contexto simbólico.

Quadro 7 – Resumo dos principais erros

Categoria de erro	Exemplo típico	Possível causa
Interpretação de símbolos e letras	$5x + 6 \rightarrow 11x$	Ideia de que pode-se somar termos com e sem letras
Busca por resultado numérico único	$2x + 7y \rightarrow 9xy$	Dificuldade em aceitar expressões abertas como solução válida
Lacunas em aritmética	$(-1)^4 = -4$ ou $x^2 = 2x$	Falta de domínio de operações com sinais, frações, potências, etc.
Uso inadequado de procedimentos	$3(x + y) = 3x + y.$	Uso mecânico de procedimento e generalizações indevidas

Fonte: Elaborado pelo autor.

A sistematização dos erros apresentados nesta seção evidencia que a aprendizagem da álgebra exige mais do que domínio mecânico de regras, requerendo uma apropriação progressiva da linguagem algébrica e de seu caráter generalizador. Ao tornar explícitas as dificuldades mais frequentes, esta análise oferece subsídios valiosos para a elaboração da sequência didática proposta neste trabalho, pois permite selecionar atividades que provoquem reflexão, explorem a interpretação de símbolos e incentivem a construção de significados.

3.4 A Resolução de Problemas - RP

Solucionar problemas é um processo utilizado na matemática desde a antiguidade, sendo, muitas vezes, citado por professores em sala de aula como uma das motivações para o desenvolvimento da matemática. Onuchic, Allevato, Noguti e Justulin (2014) destaca que resolver problemas é uma prática presente no cotidiano humano e acompanha a história da civilização desde seus primórdios, aparecendo como abordagem metodológica no início da primeira metade do século XX.

A Resolução de Problemas - RP, consolidou-se há décadas como abordagem central no ensino da Matemática, para além de mera aplicação de técnicas, é vista como perspectiva metodológica que posiciona o aluno como agente ativo na construção do conhecimento. Ademais, segundo Dante (1994), a principal finalidade da educação matemática é ensinar a resolver problemas muito embora existam outros objetivos, eles também servem, em última análise, para viabilizar essa competência essencial.

George Polya é amplamente reconhecido como um dos principais expoentes dessa metodologia por sua obra clássica *A arte de resolver problemas* (1945) e os diversos trabalhos posteriores sobre o tema (Onuchic; Allevato; Noguti; Justulin, 2014). Segundo Polya (1995), superar as dificuldades inerentes ao ensino da matemática e engajar os alunos em uma aprendizagem mais eficiente requer uma abordagem metódica. Para isso, o autor propõe um modelo composto por quatro fases inter-relacionadas, que funcionam como um guia heurístico (mapa para o pensamento) para a resolução de problemas, que são detalhadas a seguir.

1. Compreensão do Problema:

Consiste em assegurar que o estudante apreendeu claramente o que é solicitado. Isso envolve a identificação das variáveis/incógnitas, dos dados fornecidos e das condições do problema, podendo-se inclusive reformular o enunciado com as próprias palavras. É comum o professor utilizar perguntas chaves como: “O que é desconhecido? Quais são os dados?”, “Quais são as condições? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É insuficiente? Redundante?”, “É possível reescrever o enunciado com as próprias palavras?”, “É útil fazer um diagrama ou esquema para visualizar as relações?”, etc.

2. Elaboração de um Plano:

Nesta etapa o resolvidor busca conexões entre os dados e a incógnita, selecionando uma estratégia adequada. Esta etapa pode envolver a consideração de problemas auxiliares ou a recordação de um método já conhecido que seja passível de adaptação. Podem ser utilizados os seguintes questionamentos chaves: “Já vi um problema semelhante ou análogo?”, “Conheço um teorema ou método relacionado?”, “Posso decompor o problema em subproblemas mais simples?”, “E se considerar casos particulares ou modificar as condições?”, “É possível trabalhar de trás para frente (do objetivo para os dados)?”, etc.

3. Execução do Plano:

Com um plano definido, agora é o momento de colocar em prática a estratégia concebida, realizando os cálculos e etapas necessárias. O resolvidor deve executar cada etapa do plano de forma cuidadosa, verificando a correção de cada passo realizado, mantendo o registro claro e organizado do processo. Se o plano se mostrar inviável, deve retornar à fase 2 para conceber um novo plano.

4. Retrospecto ou Verificação:

Por fim, esta fase convida para uma análise crítica do processo e do resultado obtido, questionando-se se a resposta é plausível, se existem outros caminhos para a solução e de que modo aquele problema específico pode ser generalizado ou aplicado a outros contextos. Esta última etapa é fundamental para a consolidação do conhecimento e o desenvolvimento da capacidade de transferir a aprendizagem para novas situações. É possível instigar os alunos com questionamentos do tipo: “A resposta pode ser verificada? Ela é plausível?”, “É possível chegar ao mesmo resultado por um caminho diferente?”, “O método utilizado pode ser aplicado a outros problemas?”, “O que foi aprendido de essencial com este problema?”, “É possível generalizar o resultado ou o método?”, etc.

Para sintetizar e organizar visualmente esse processo metodológico, o Quadro 8 apresenta um resumo das quatro fases heurísticas propostas em Polya (1995), detalhando seus objetivos principais, as ações correspondentes e heurísticas de cada etapa. Esta representação gráfica permite assimilar de maneira esquemática a estrutura do método, servindo como referência rápida para sua implementação prática em contextos educacionais.

Quadro 8 – As quatro fases heurísticas para Resolução de Problemas segundo Polya (1995)

Fase	Objetivo principal	Exemplos de ações/questionamentos chaves	Heurística principal
1. Compreensão do problema	Assegurar uma clara apreensão do que é pedido, identificando os elementos fundamentais	Quais são os dados? Quais são as condições, elas são suficientes para determinar a incógnita? É possível reescrever o enunciado com as próprias palavras?	Parar e refletir antes de agir
2. Elaboração de um plano	Estabelecer uma conexão entre o que é conhecido e o que é desconhecido, concebendo uma estratégia de resolução	Já vi um problema semelhante ou análogo? Posso decompor o problema em subproblemas mais simples? É possível trabalhar de trás para frente?	Estabelecer conexões e buscar analogias
3. Execução do plano	Implementar a estratégia escolhida de forma metódica e verificada	Execução cuidadosa e verificada; Registro claro e organizado; Se o plano falhar, retorne à Fase 2.	Implementar com cuidado e verificação
4. Retrospecto ou verificação	Analisar criticamente o processo e o resultado, consolidando a aprendizagem	A resposta pode ser verificada? Ela é plausível? O método utilizado pode ser aplicado a outros problemas?	Aprender com o processo e generalizar

Fonte: Adaptado de Polya (1995).

No contexto específico deste trabalho, a RP assume papel de princípio orientador da sequência didática, onde as atividades são baseadas em situações desafiadoras que demandam a mobilização da linguagem algébrica como ferramenta de construção de soluções. Esta opção metodológica fundamenta-se na relação intrínseca entre a prática de resolver problemas e a origem histórica da álgebra enquanto sistema de representação, conforme destacam Kieran (1992) e Filloy e Rojano (1989). A abordagem por problemas cria o contexto ideal para que os alunos percebam a utilidade e o significado dos conceitos algébricos, transformando símbolos e expressões de objetos abstratos em instrumentos eficientes para generalização de padrões, modelagem de situações e representação de relações quantitativas.

A transição da aritmética para a álgebra, frequentemente dificultada por abordagens excessivamente mecânicas e formais, encontra na RP uma ponte mais natural. Ao assimilar a limitação dos cálculos numéricos específicos frente a problemas complexos, os alunos naturalmente percebem a necessidade de uma linguagem generalizante, compreendendo a álgebra como recurso econômico e potente para expressar regularidades e

relações. Esta trajetória espelha o desenvolvimento histórico da linguagem algébrica, onde a necessidade de resolver problemas concretos impulsionou a evolução desde as formas retóricas até a simbolização moderna.

A prática nessa perspectiva implica em uma transformação na atividade docente, requerendo do professor uma transição do modelo tradicional, mais transmissivo, para um modelo ativo, onde ele tem o papel de mediador do processo investigativo. Cabe ao educador a análise minuciosa para a escolha de problemas adequados, a saber: suficientemente desafiadores para engajar os alunos e necessariamente compreensíveis para não gerar frustração. Sendo necessário também a criação de um ambiente propício à exploração e ao debate de ideias onde o questionamento estratégico torna-se crucial, substituindo a oferta de respostas prontas por indagações que orientem a reflexão: “Quais os dados?”, “Como representar essa relação?”, “O que essa letra representa nessa situação?”, “É possível validar esta solução?”, etc.

Nesta tomada, a avaliação também se transforma. Os erros deixam de ser falhas a corrigir para converter-se em oportunidades de aprendizagem, revelando concepções equivocadas sobre a transição para a linguagem algébrica, a natureza das variáveis, o significado da igualdade algébrica ou a estrutura das expressões, enquanto a avaliação deixa de se restringir à verificação da resposta final e passa a considerar todo o processo de resolução. O registro das estratégias, a explicitação do raciocínio e a capacidade de justificar e comunicar matematicamente as soluções tornam-se elementos centrais da avaliação, que assume assim um caráter mais formativo e processual.

A utilização dessa metodologia valoriza a autonomia do estudante e o desenvolvimento de estratégias de raciocínio, elementos que dialogam diretamente com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, a qual indica a resolução de problemas como eixo estruturante do ensino de Matemática (Brasil, 2018). Ao propor que a aprendizagem se inicie e se desenvolva por meio da investigação e da busca de soluções, a BNCC reforça a relevância da abordagem de Polya, que, ainda hoje, constitui uma referência fundamental para práticas pedagógicas que visam tornar o conhecimento matemático mais significativo e contextualizado.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados o tipo de pesquisa e os passos metodológicos seguidos para a realização deste estudo, juntamente com a fundamentação que embasou tais escolhas. Descrevemos também a escola na qual a pesquisa foi desenvolvida, bem como seu contexto e o perfil dos estudantes participantes, elementos essenciais para a compreensão dos dados coletados e dos resultados obtidos. São detalhados os instrumentos utilizados e os procedimentos realizados para a coleta de dados, incluindo questionários diagnóstico e pós-intervenção. Por fim, resumimos a sequência didática aplicada, apresentando seu cronograma e sua organização didática .

4.1 Tipo de pesquisa

Este estudo adota uma pesquisa de natureza qualitativa com abordagem metodológica do tipo pesquisa-ação, entendida como uma forma de investigação que articula, de maneira indissociável, a produção de conhecimento e a intervenção em uma realidade social. Em seu livro clássico, *Metodologia da Pesquisa-Ação*, Thiollent (2011) sistematiza a metodologia da pesquisa-ação e nos ensina que pesquisar é intervir, e que a melhor intervenção é aquela que é pesquisada e validada coletivamente por aqueles que vivem o problema. Seu objetivo vai além da compreensão dos fenômenos, buscando transformá-los por meio de uma atuação reflexiva e contextualizada (Thiollent, 2011).

Nessa perspectiva, o pesquisador assume o papel de agente participante, inserindo-se ativamente no contexto investigado para promover mudanças significativas. Paralelamente, acompanha e analisa criticamente os processos desencadeados e os resultados obtidos com a intervenção.

A pesquisa-ação mostrou-se adequada a este trabalho por eu ser professor da turma e por permitir uma integração entre a fundamentação teórica e a prática pedagógica, sendo possível não apenas diagnosticar as dificuldades dos estudantes em relação à linguagem algébrica, mas também intervir de modo estruturado, por meio de uma sequência didática específica, avaliando de forma contínua e sistemática os seus impactos no processo de aprendizagem.

Segundo Thiollent (2011), a pesquisa-ação estrutura-se em ciclos sequenciais e recorrentes, que se iniciam com a identificação participativa de problemas. Nesta fase, o pesquisador, em colaboração com os atores do contexto, realiza um diagnóstico situacional

para compreender as necessidades e desafios existentes.

A etapa seguinte consiste no planejamento estratégico das ações, momento em que se elabora, de forma coletiva e fundamentada, um conjunto de intervenções destinadas a enfrentar os problemas identificados. Este planejamento deve ser flexível e adaptável, considerando a dinâmica do contexto social.

A implementação acompanhada das ações constitui o terceiro momento do ciclo. Durante esta fase, as intervenções são executadas, sendo sistematicamente observadas e documentadas para capturar seus processos, desdobramentos e efeitos imediatos.

Por fim, ocorre a avaliação reflexiva e sistematização. Aqui, os resultados e o processo como um todo são analisados criticamente pelos participantes. Esta reflexão serve tanto para avaliar a eficácia das ações realizadas quanto para gerar aprendizados e reorientar o planejamento, reiniciando o ciclo. Esta estrutura cíclica garante que a investigação seja um processo contínuo de ação, observação e reflexão.

O ciclo, ao integrar ação e reflexão de maneira dinâmica, permitiu à pesquisa, não apenas a geração de dados consistentes, mas também uma contínua adequação da intervenção às reais necessidades dos alunos. A seguir, no Quadro 9, é associada a cada etapa do ciclo uma descrição da etapa de desenvolvimento da pesquisa.

Quadro 9 – Ciclos da pesquisa-ação e descrição das etapas

Ciclo	Descrição das etapas
Diagnóstico inicial	Realização de levantamento qualitativo das dificuldades discentes mediante aplicação de questionário diagnóstico e observação sistemática em sala de aula, com ênfase na identificação de obstáculos específicos no domínio da linguagem algébrica
Planejamento interventivo	Desenvolvimento de sequência didática contextualizada, articulando fundamentação teórica com as carências identificadas, estabelecendo objetivos pedagógicos, estratégias metodológicas e recursos educacionais adequados ao contexto de aplicação
Execução e monitoramento	Aplicação das atividades planejadas em ambiente escolar, com documentação contínua através de registros, diários de campo e análise de produções discentes, permitindo acompanhamento detalhado da intervenção pedagógica
Avaliação reflexiva	Análise comparativa dos resultados mediante confrontação entre dados prévios e posteriores à intervenção, com realização de discussões coletivas com vistas ao replanejamento de ações, se necessário

Fonte: Adaptado de Thiollent (2011).

4.2 Contexto e participantes

A pesquisa foi desenvolvida na Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Filgueiras Lima. A escola possui 398 alunos, pertence a rede estadual de ensino e funciona nos turnos manhã e tarde, ofertando a modalidade de ensino integral. Possui um total de 50 funcionários, dentre estes, 29 professores sendo 16 efetivos e 13 temporários. Desenvolve projetos de protagonismo discente com grupos de dança, grêmio estudantil, grupo de teatro, time da escola, bem como possui o Conselho Escolar com representantes de toda a comunidade escolar.

A escola se localiza na rua Vereador Nelson de Sousa Alencar SN, bairro Veneza, na zona urbana do município de Iguatu. O bairro em torno da escola é quase que totalmente pavimentado, dispondo de algumas opções de lazer como praças, quadra esportiva, estádio de futebol, lanchonetes e sorveterias. Próximo a escola tem uma Unidade Básica de Saúde com agentes de saúde, enfermeira, médico e dentista, disponíveis à comunidade.

A maior parte dos familiares dos alunos são de pessoas com baixo nível de escolaridade, alguns desempregados, outros funcionários públicos e do comércio da cidade, além de trabalhadores autônomos e informais. A população é muito integrada e possui uma associação atuante que defende os interesses da comunidade com várias conquistas ao longo dos anos.

Atualmente, a escola possui onze salas de aula, três banheiros para os alunos, sendo um para PCD, vestiário, dois banheiros para funcionários, cantina, almoxarifado, sala dos professores, sala de planejamento, sala de multimeios, coordenação, secretaria, direção, laboratórios de informática, de Física e Matemática, e de Química e Biologia, pátio, quadra esportiva coberta, depósito, além de mesas e cadeiras ergonômicas para todos os alunos.

A parte administrativa da escola é formada pelo diretor geral, dois coordenadores, uma assessora financeira e uma secretária. Possui quatro vigilantes, um porteiro, duas merendeiras e três auxiliares de serviços gerais. A escola possui como documentos identitários o Plano de Desenvolvimento da Escola, o Projeto Político Pedagógico e o Regimento Escolar. A escola desenvolve projetos de reforço, oficinas de leitura, atividades artístico-culturais e um plano de ação de recuperação da aprendizagem.

O estudo foi conduzido em uma sala de primeiro ano do Ensino Médio, turma A, de 39 alunos com idades entre 15 e 16 anos, onde também sou professor. Os alunos da

turma são um recorte fiel dos demais estudantes da escola. Muitos trazem dificuldades de aprendizagem do Ensino Fundamental, a maioria são de baixa renda e filhos de pais com baixa escolaridade. O fato da turma possuir dificuldades em matemática se mostra uma oportunidade para a aplicação da pesquisa, que foi considerada.

4.3 Instrumentos para a coleta de dados

Para garantir a obtenção de dados consistentes e passíveis de análise sob múltiplas perspectivas, a pesquisa valeu-se de diferentes instrumentos de coleta, organizados de tal forma que uns complementam os outros. Essa interação metodológica visa assegurar maior confiabilidade aos resultados, permitindo cruzar informações provenientes de fontes variadas.

O questionário diagnóstico foi aplicado antes do início da intervenção, com o objetivo principal de mapear as concepções prévias e as principais dificuldades dos estudantes em relação à linguagem algébrica. Composto por problemas que exigiam a tradução da linguagem natural para expressões e equações, esse instrumento permitiu identificar obstáculos específicos, como a compreensão do significado de variáveis, a interpretação do sinal de igualdade e a estruturação de generalizações. O questionário diagnóstico está presente nos apêndices.

Durante a implementação da sequência didática, foram utilizados registros e observação em sala de aula para documentar as interações, as estratégias de resolução de problemas adotadas pelos alunos e as intervenções realizadas pelo professor-pesquisador. Esses registros e observações, fundamentais para a análise e discussão dos resultados, capturaram a dinâmica do processo de ensino e aprendizagem, incluindo manifestações de engajamento, dúvidas recorrentes e momentos de superação de desafios.

Complementarmente, produções escritas dos alunos (como a resolução de atividades, a criação de notações pessoais e a elaboração de generalizações) foram observadas e coletadas ou registradas ao longo de todas as etapas. Esses materiais constituem um acervo valioso para analisar a evolução do raciocínio algébrico e as diferentes formas de representação utilizadas pelos estudantes.

Ao final da intervenção, um questionário pós-intervenção foi aplicado, contendo problemas análogos aos do questionário diagnóstico, com a finalidade de verificar possíveis avanços na compreensão e no uso da linguagem algébrica. A comparação entre os desem-

penhos nos dois questionários fornece evidências sobre a eficácia da sequência didática. O questionário pós-intervenção também está presente nos apêndices.

A articulação desses instrumentos em momentos distintos da pesquisa (pré-intervenção, durante e pós-intervenção) permitiu capturar tanto aspectos quantitativos quanto qualitativos do processo de aprendizagem.

4.4 Organização da Sequência Didática

A sequência didática foi elaborada e aplicada com base na metodologia de Resolução de Problemas - RP, entendida aqui como uma estratégia de ensino que coloca o estudante no centro do processo de aprendizagem, convidando-o a mobilizar conhecimentos prévios, formular hipóteses, representar situações e discutir diferentes caminhos de solução. Durante a implementação, as atividades foram propostas de forma investigativa, incentivando o diálogo e a reflexão sobre o papel da linguagem algébrica na organização do pensamento e na resolução de situações matemáticas. O professor atuou nesse processo como mediador, orientando a construção coletiva do conhecimento e favorecendo a autonomia intelectual dos alunos.

A sequência foi organizada em quatro encontros sequenciais (2 aulas cada, totalizando 8 aulas), tomando como referência a evolução histórica da linguagem algébrica, conforme detalhado na Seção 2.2, do Capítulo 2 deste trabalho. Cada encontro foi cuidadosamente planejado para promover uma transição gradual do pensamento concreto em direção à abstração, utilizando a RP como eixo articulador e mantendo coerência com os objetivos gerais e específicos da pesquisa. Essa progressão didática buscou reproduzir, em escala micro, o percurso histórico de desenvolvimento da notação algébrica, permitindo aos estudantes vivenciarem as mesmas necessidades que impulsionaram a humanidade na estruturação dessa linguagem.

Cabe ressaltar que a sequência didática foi concebida como uma proposta flexível, passível de adaptação a diferentes realidades escolares. Recomenda-se fortemente que os professores ajustem, por exemplo, as atividades, contextualizando os problemas com elementos do cotidiano local de seus estudantes, de modo a tornar a linguagem algébrica mais significativa e promover maior engajamento em sala de aula.

Abaixo, apresenta-se o cronograma e a organização didática da sequência, por meio da especificação dos objetivos de aprendizagem, orientações preliminares, conteúdos,

problema motivador e reflexão de cada encontro. A sequência completa, com o passo a passo bem detalhado, se encontra em anexo a este trabalho, no Apêndice C.

Encontro	Duração	Foco Conceitual	Habilidades BNCC	Avaliação
1º	2 aulas	Equações e incógnitas	EF08MA06	Diagnóstica e formativa
2º	2 aulas	Variáveis, notação e padronização	EF05MA11	Formativa
3º	2 aulas	Funções e modelagem	EF09MA06 EM13MAT302	Formativa
4º	2 aulas	Generalização e padrões	EF07MA15 EM13MAT302	Formativa

1º Encontro

A álgebra retórica: a era das palavras

Objetivos de aprendizagem

- Compreender os conceitos de igualdade, expressão e equação algébricas;
- Diferenciar dados e incógnitas em problemas;
- Desenvolver raciocínio lógico sem apoio de símbolos;
- Vivenciar as limitações da álgebra retórica.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, pincel, papel para anotações;

Organização da sala: Duplas heterogêneas;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
4. Apresentação do contexto histórico (15 min);
5. Trabalho em duplas e intervenções (20 min);

6. Socialização das soluções e intervenções (30 min);
7. Sistematização dos conceitos (18 min).

Conteúdos

A álgebra retórica e seu contexto, igualdade, expressão e equação algébricas, dados e incógnitas.

Problema motivador

Vinícius pergunta ao seu professor de matemática por sua nota, o qual responde: “O dobro de sua nota mais nove resulta em vinte e três”. Qual a nota de Vinícius?

Para refletir

Por que é difícil resolver só com palavras?

2º Encontro

A álgebra sincopada: as primeiras abreviações

Objetivos de aprendizagem

- Compreender a necessidade de abreviações na matemática;
- Diferenciar incógnita de variável;
- Desenvolver sistemas de notação pessoal;
- Valorizar a padronização da linguagem matemática.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, pincel, papel para criação de símbolos ou materiais manipuláveis;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
5. Apresentação do contexto histórico (15 min);
6. Criação de notação pessoal, e intervenções (20 min);
7. Socialização e comparação, e intervenções (25 min);
8. Sistematização dos conceitos (18 min).

Conteúdos

A álgebra sincopada e seu contexto, notação matemática, dados, coeficientes, incógnitas e variáveis.

Problema motivador

Considere um terreno retangular em que a medida do lado maior corresponde ao triplo da medida do lado menor. Determine quais são as medidas de cada um de seus lados, sabendo que a área total desse terreno é de $300 m^2$.

Para refletir

Quais vantagens as abreviações trazem em relação à álgebra retórica? Quais limitações ainda persistem?

3º Encontro

A álgebra simbólica: a linguagem universal

Objetivos de aprendizagem

- Conhecer e utilizar a notação algébrica moderna;
- Diferenciar equação e função;
- Compreender o conceito de variável dependente e independente;
- Reconhecer as vantagens e desvantagens da linguagem simbólica.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, pincel, jogo que relacione diferentes representações algébricas;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
5. Apresentação do contexto histórico (15 min);
6. Análise coletiva do problema motivador, e intervenções (15 min);
7. Sistematização dos conceitos (18 min);
8. Resolução de novos problemas, e intervenções (30 min).

Conteúdos

A álgebra simbólica e seu contexto, função, variável dependente e independente.

Problema motivador

Uma corrida de táxi custa R\$ 8,00 fixos mais R\$ 2,50 por quilômetro rodado.

- a) Qual a função que representa o preço da corrida por km rodado?
- b) Quanto custa uma corrida de 10 km?
- c) Quantos km foram percorridos em uma corrida que custou R\$ 58,00?

Para refletir

Apenas a função, na linguagem simbólica, é suficiente para entendermos o que ela representa? O que causa o distanciamento da Matemática do nosso cotidiano?

4º Encontro

Generalização: O poder da álgebra

Objetivos de aprendizagem

- Identificar padrões em sequências numéricas;
- Generalizar relações através de fórmulas;
- Compreender o conceito de termo geral;
- Aplicar generalização em contextos variados.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, apagador, pincel e fichas numeradas ou material manipulável para representar os dias;

Organização da sala: Grupos heterogêneos;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (5 min);
5. Apresentação de conceitos essenciais (10 min);
6. Análise coletiva do problema motivador, e intervenções (20 min);
7. Resolução de novos problemas, e intervenções (30 min);

8. Fechamento (15 minutos).

Conteúdos

Generalização, sequência numérica e termo geral.

Problema motivador

Um paciente recebeu uma prescrição médica para tomar um medicamento de uso contínuo. A embalagem contém 12 comprimidos e a orientação é tomar 1 comprimido a cada 7 dias. Considerando que o primeiro comprimido foi tomado no dia 1, responda:

- a) Escreva os primeiros 4 termos da sequência dos dias em que o paciente deve tomar os comprimidos.
- b) Qual é a lei de formação (fórmula do termo geral) dessa sequência?
- c) Em que dia será tomado o décimo comprimido?
- d) Quantos dias serão necessários para terminar toda a cartela de 12 comprimidos?

Para refletir

O que muda quando passamos de resolver um problema específico para encontrar uma fórmula geral? O que fazer para que os símbolos não virem algo sem sentido?

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo dedica-se à análise dos resultados obtidos a partir da aplicação de três instrumentos aos estudantes do 1^o ano do Ensino Médio, turma A, da EEMTI Filgueiras Lima: um questionário diagnóstico, uma sequência didática e um questionário pós-intervenção. A análise teve caráter qualitativo, uma vez que o processo permitiu aos estudantes expressar seus raciocínios, estratégias de resolução e compreensões conceituais acerca da linguagem algébrica. Esse tipo de abordagem possibilita identificar não apenas acertos ou erros, mas sobretudo os modos de pensar mobilizados pelos alunos.

Para sistematizar a investigação e alinhar a análise aos objetivos da sequência didática, os dados foram examinados à luz de quatro dimensões interdependentes:

1. Tradução: Tradução de linguagem natural para representação simbólica;
2. Modelagem: Modelagem algébrica de situações-problemas;
3. Generalização: Generalização e abstração de padrões;
4. Conceitos: Apropriação de conceitos fundamentais.

Já as respostas dos estudantes foram categorizadas em:

1. Adequado: Domina todos os conceitos e relações, usa linguagem precisa e adequada, e desenvolve estratégias sofisticadas;
2. Intermediário: Compreende conceitos básicos, comunica ideias com algumas imprecisões e segue estratégias básicas;
3. Crítico: Confunde conceitos fundamentais, dificuldade em aplicar conceitos e expressar ideias matematicamente, e raciocínio desorganizado ou incompleto;
4. Em branco: Não respondida.

Para fins de análise e anonimato, os alunos foram identificados pelo código Aluno(a) X , em que X corresponde ao número de ordem do questionário diagnóstico, de acordo com a sequência de entrega.

5.1 Análise do Questionário Diagnóstico

O questionário diagnóstico foi aplicado em aula anterior ao primeiro encontro da sequência didática. Seu objetivo foi mapear as competências iniciais em linguagem algébrica, abrangendo tradução entre registros linguísticos, modelagem de situações-problema, generalização e abstração de padrões, e compreensão conceitual de elementos algébricos. Sua análise visa fornecer um panorama pré-intervenção para auxiliar a condução

da aplicação da sequência didática, bem como para futura comparação com os resultados pós-intervenção.

Foram analisadas 39 respostas onde, para cada questão, a análise segue esta sequência:

1. Reprodução da questão;
2. Identificação do conceito ou habilidade avaliada;
3. Discussão qualitativa inicial das respostas;
4. Quadro de categorias com a distribuição dos alunos e descrição dos padrões encontrados;
5. Gráfico de colunas com uma síntese visual dos dados;
6. Exemplo ilustrativo, com uma resposta representativa dos alunos, acompanhada de sua classificação.

Análise por Questão

Questão 01. “O dobro de um número somado a 6 resulta em 20”.

- (a) Qual é esse número? Use apenas texto para desenvolver a solução explicando seu raciocínio.
- (b) Agora represente esta situação com uma equação algébrica.

A Questão 01 investigou a capacidade de expressar em linguagem natural os passos da resolução e a tradução da situação expressa em linguagem natural para a linguagem algébrica, além da compreensão do conceito de incógnita.

Resultados:

No item (a), observou-se que parte dos estudantes conseguiu identificar corretamente o número solicitado mas nenhum por meio de um texto que indicasse claramente seu raciocínio. Esse comportamento indica uma compreensão intuitiva do problema, porém ainda distante da transição adequada entre os diferentes tipos de representação.

No item (b), alguns estudantes representaram corretamente a situação por meio da equação correspondente, outros utilizaram símbolos algébricos, mas cometeram erros estruturais, ou escreveram uma expressão numérica com o sete. A maior parte não conseguiu realizar a transposição da linguagem verbal para a algébrica. Esses resultados apontam para uma compreensão ainda incipiente da estrutura e das convenções da linguagem algébrica.

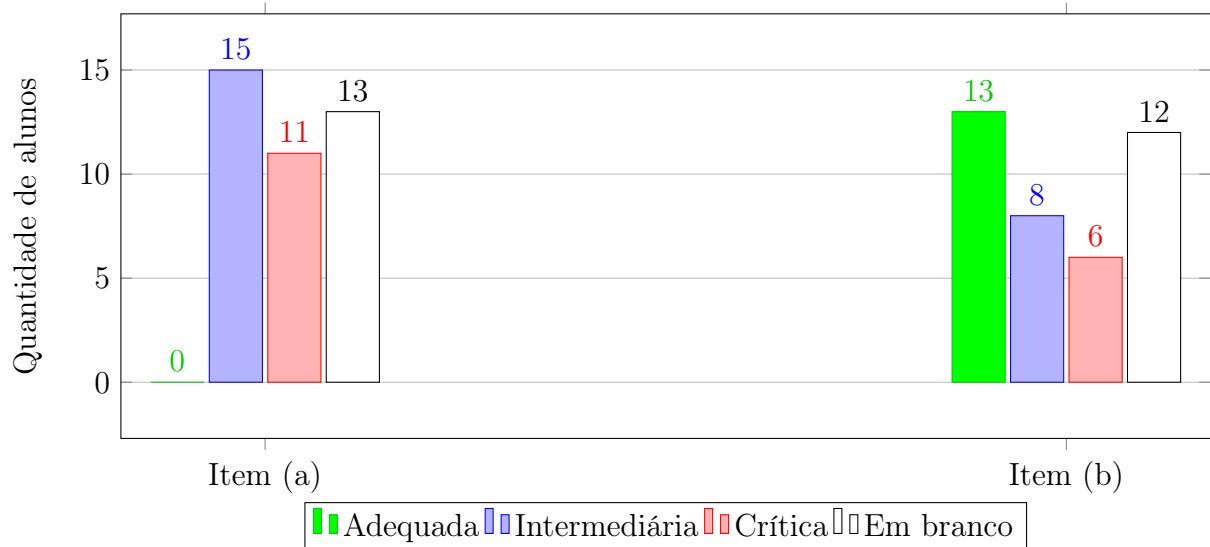
A prevalência de respostas em branco e a incapacidade de articular o raciocínio em texto seguida da baixa taxa de representação simbólica correta revelam uma deficiência estrutural na dimensão de Tradução, evidenciando uma compreensão operacional da igualdade e um domínio insuficiente da notação simbólica.

Quadro 10 – Distribuição dos alunos nas categorias e descrição dos padrões encontrados nas respostas da Questão 01

Categoria	Item (a)	Item (b)
Adequado	0 aluno (0%). Nenhum aluno conseguiu resolver com um texto coerente e claro	13 alunos (33,3%) escreveram a equação correta, equivalente a $2x + 6 = 20$
Intermediário	15 alunos (38,5%) chegaram ao resultado, mas com alguma imprecisão no texto	8 alunos (20,5%) escreveram a equação quase correta, confundindo o dobro, ou escreveram uma expressão numérica com o sete
Crítico	11 alunos (28,2%) não conseguiram encontrar o resultado nem expressar claramente suas ideias, apresentando raciocínio desorganizado ou incompleto	6 alunos (15,4%) não conseguiram representar a ideia de dobro ou o acréscimo de seis unidades, nem a estrutura da equação, esboçando-a apenas
Em branco	13 alunos (33,3%) deixaram em branco	12 alunos (30,8%) deixaram em branco

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 1 – Síntese visual dos dados Questão 01



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2 – Resposta de Aluno(a)1. O item (a) foi Intermediário enquanto o item (b) foi Adequado

Olha para a resposta e veja a substituição de 20-6 quando vi a resposta que era 14, então por isso a resposta é 7
 B) $2x + 6 = 20$

Fonte: Elaborada pelo autor.

No item (a), o estudante deveria desenvolver a solução sem o uso dos simbolismo atual, somente com palavras. O(a) Aluno(a)1 não conseguiu expressar a resposta do item (a) no estilo retórico por isso obteve a classificação Intermediário. Já no item (b), ele(a) representou corretamente a equação, obtendo classificação Adequado.

Questão 02.

- (a) Escreva a expressão algébrica correspondente a: “A diferença entre o triplo de um número e 7”.
- (b) Calcule o valor da expressão para o número 5.

A Questão 02 teve como objetivo avaliar a compreensão de expressões algébricas, a distinção entre expressão e equação, e a substituição em uma expressão algébrica.

Resultados:

No item (a), boa parte dos estudantes conseguiu escrever corretamente a expressão algébrica. Verificou-se ainda que uma parte dos estudantes até associou corretamente o termo “triplo de um número” à expressão $3x$, porém apresentou dificuldades ao interpretar a palavra “diferença”, frequentemente escrevendo expressões como $3x + 7$, em vez de $3x - 7$. Uma parte equivalente conseguiu interpretar informações importantes mas não conseguiu “montar” a expressão, enquanto uma quantidade significativa deixou o item em branco. Esses equívocos revelam limitações na interpretação e transição da linguagem algébrica.

No item (b), os estudantes que conseguiram escrever corretamente a expressão algébrica, em geral, não apresentaram dificuldades em realizar o cálculo numérico, o que indica que os obstáculos estão mais relacionados à modelagem algébrica do que às operações aritméticas.

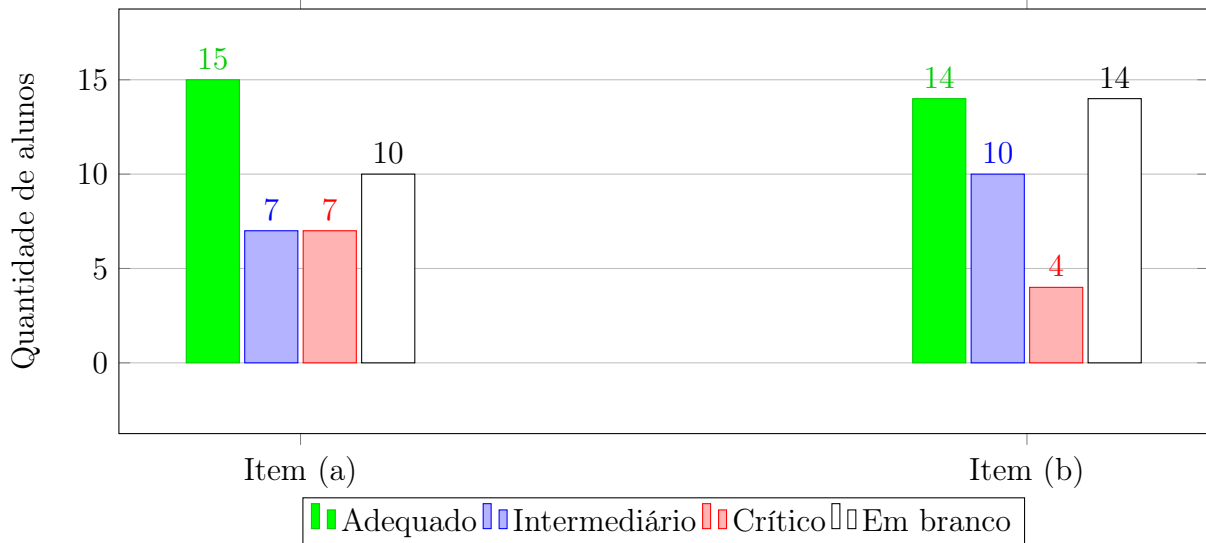
A confusão entre diferença e soma, apesar do domínio da substituição, aponta para uma lacuna específica na Tradução de termos relacionais da linguagem natural para operadores matemáticos, ainda que a mecânica aritmética esteja consolidada.

Quadro 11 – Distribuição dos alunos nas categorias e descrição dos padrões encontrados nas respostas da Questão 02

Categoria	Item (a)	Item (b)
Adequado	15 alunos (38,6%) expressaram corretamente a expressão	14 alunos (35,9%) fizeram a substituição e os cálculos corretamente
Intermediário	7 alunos (17,9%) escreveram a expressão mas com soma ao invés da subtração	10 alunos (25,6%) fizeram a substituição mas ou tinham a expressão errada ou se equivocaram na tentativa de resolução através de cálculo direto
Crítico	7 alunos (17,9%) não conseguiram escrever a expressão, apenas esboçando-a	4 alunos (10,3%) não conseguiram fazer a substituição
Em branco	10 alunos (25,6%)	11 alunos (28,2%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3 – Síntese visual dos dados Questão 02



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Resposta de Aluno(a)7, classificada como Intermediário

$$\begin{array}{l}
 A) 3x + 7 \\
 B) 3 \cdot 5 + 7 \\
 \quad 75 + 7 \\
 \quad \textcircled{22}
 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme Figura 4, o(a) Aluno(a)7 representou a expressão com uma soma ao invés de uma subtração, provavelmente por não relacionar a palavra “diferença”, citada no enunciado, a operação correta. No item (b), por ter resolvido o item (a) de forma equivocada, encontrou um resultado diferente do esperado. Por conseguir representar uma expressão e fazer a substituição de forma correta, foi classificado como Intermediário.

Questão 03. Alice foi ao supermercado e comprou 3 abacaxis e 4 maçãs, gastando vinte e três reais.

- (a) Monte a equação algébrica que relaciona os valores pagos por cada fruta com o total gasto, representando por x o valor de cada abacaxi e por y o valor de cada maçã.
- (b) Suponha que cada abacaxi custou 5 reais. Quanto custou cada maçã?

A Questão 03 explorou a modelagem de uma situação-problema envolvendo duas incógnitas, além da articulação entre representação algébrica e resolução numérica.

Resultados:

No item (a), a maior parte dos estudantes deixou em branco por não saber como representar. Alguns conseguiram montar corretamente a equação $3x + 4y = 23$, porém observou-se também a ocorrência de erros como a ausência dos coeficientes, o que evidencia dificuldades na abstração algébrica.

No item (b), a maior parte dos estudantes que compreenderam a estrutura da equação mostraram-se capazes de substituir valores e isolar a variável y . Em contrapartida, aqueles que apresentaram dificuldades no item anterior, ou resolveram através de cálculos diretos ou não conseguiram avançar na resolução.

A dificuldade em lidar com duas variáveis distintas ficou evidente. A alta taxa de respostas em branco e a omissão de coeficientes na modelagem demonstram uma dificuldade acentuada na Modelagem de situações com múltiplas variáveis, onde a abstração algébrica é substituída por tentativas de cálculo aritmético direto.

Quadro 12 – Distribuição dos alunos nas categorias e descrição dos padrões encontrados nas respostas da Questão 03

Categoria	Item (a)	Item (b)
Adequado	8 alunos (20,5%) expressaram corretamente a equação	5 alunos (12,8%) fizeram a substituição e os cálculos corretamente
Intermediário	3 alunos (7,7%) escreveram a equação mas sem a estrutura adequada	9 alunos (23,1%) utilizaram cálculos diretos para a obtenção da resposta
Crítico	12 alunos (30,8%) escreveram uma equação com equívocos, como a ausência dos coeficientes ou apenas uma variável	11 alunos (28,2%) não conseguiram encontrar a resposta, fazendo substituição equivocada ou errando nas tentativas de cálculo direto
Em branco	16 alunos (41%)	14 alunos (35,9%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 – Síntese visual dos dados Questão 03

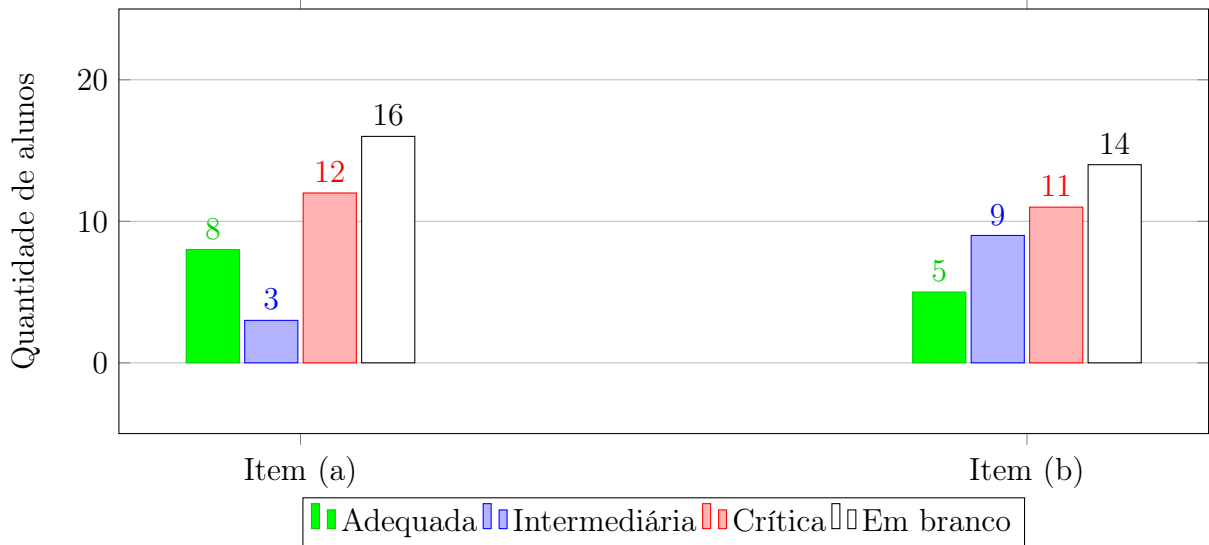


Figura 6 – Resposta de Aluno(a)11. A resposta do item (a) foi Adequada enquanto que a do item (b) foi Intermediária

$$3x + 4y = 23$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ -15 \\ \hline 084 \\ -10 \\ \hline 014 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O(a) Aluno(a)11 conseguiu expressar corretamente a equação algébrica descrita no enunciado, obtendo classificação Adequado na resposta do item (a). Entretanto, no item (b), utilizou cálculo direto ao invés de substituição na equação do item (a), sendo classificado como Intermediário.

Questão 04. Uma pizzaria cobra R\$45,00 por cada pizza e uma taxa de entrega fixa de R\$5,00.

- Represente o valor pago em função do número p de pizzas?
- Quanto será pago por 3 pizzas?
- Quantas pizzas podem ser compradas com R\$ 185,00?

A Questão 04 investigou a compreensão, modelagem e manipulação de funções afins em contexto cotidiano.

Resultados:

No item (a), observou-se que poucos alunos conseguiram expressar a relação funcional entre as variáveis. Alguns expressaram sem o coeficiente indicativo do valor de cada pizza ou sem a taxa física. Mais da metade dos alunos deixou em branco por não saber como representar. O conceito de função como modelo de dependência entre variáveis ainda é incipiente. A taxa fixa foi o componente mais negligenciado.

No item (b), muitos dos estudantes conseguiram calcular corretamente o valor para três pizzas através de cálculo direto, o que sugere que a manipulação aritmética é mais acessível do que a generalização algébrica, porém mais da metade dos estudantes esqueceu de somar a taxa fixa.

Já no item (c), mais da metade dos estudantes conseguiu calcular corretamente, novamente utilizando a manipulação aritmética. Apenas um aluno fez a substituição usando a função encontrada no item (a).

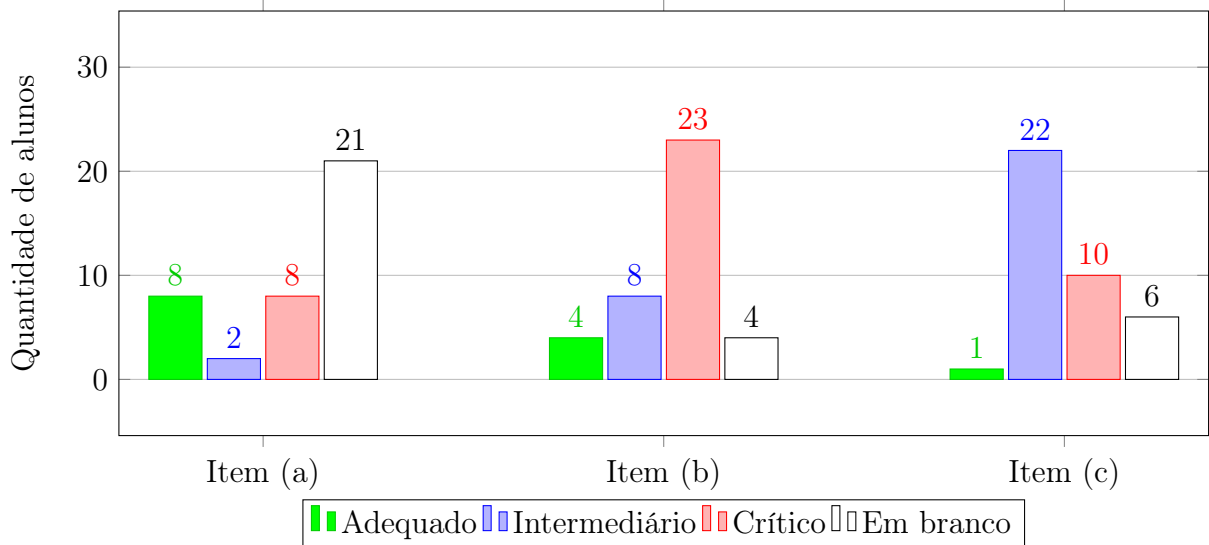
A negligência quase generalizada da taxa fixa na função evidencia uma falha conceitual na Modelagem de funções afins, onde os alunos identificam a variação (coeficiente angular), mas não integraram o termo constante (coeficiente linear) à estrutura funcional.

Quadro 13 – Distribuição dos alunos nas categorias e descrição dos padrões encontrados nas respostas da Questão 04

Categoria	Item (a)	Item (b)	Item (c)
Adequado	8 alunos (20,5%) modelaram corretamente a função	4 alunos (10,3%) fizeram a substituição e os cálculos corretamente	1 alunos (2,6%) fez a substituição e os cálculos corretamente
Intermediário	2 alunos (5,1%) escreveram apenas $45p + 5$	8 alunos (20,5%) utilizaram cálculos diretos para obterem a resposta	22 alunos (56,4%) utilizaram cálculos diretos para obterem a resposta
Crítico	8 alunos (20,5%) escreveram a função com estrutura inadequada, ou sem o coeficiente da variável p ou sem a taxa fixa	23 alunos (58,9%) utilizaram cálculos diretos mas esqueceram de somar a taxa de entrega	10 alunos (25,6%) utilizaram cálculos diretos mas não encontraram o resultado pois esqueceram de considerar a taxa de entrega
Em branco	21 alunos (53,9%)	4 alunos (10,3%)	6 alunos (15,4%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Síntese visual dos dados Questão 04



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Resposta de Aluno(a)33. O item (a) foi Adequado, o item (b) foi Crítico e o item (c) foi Intermediário

Handwritten matemáticas mostrando a resolução de três problemas (a, b, c).
 a) $f(x) = 45 \cdot p + 75$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 3 \\ \hline 135 \end{array}$$

 b)
$$\begin{array}{r} 105 \\ - 180 \\ \hline (5) \end{array}$$

 c)
$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 3 \\ \hline 135 \\ + 45 \\ \hline 180 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O(a) Aluno(a)33 conseguiu modelar corretamente a função como pedido no item (a), sendo classificado como Adequado. Por outro lado, no item (b), privilegiou cálculo direto em detrimento a substituição, esquecendo também de somar a taxa de entrega, por isso foi classificado como Crítico. Já no item (c), encontrou o resultado esperado porém obteve a resposta através de cálculo direto, por isso foi classificado como Intermediário.

Questão 05. Complete a sequência: 3, 6, 9, 12, ...

- Responda em forma de texto qual é a lei de formação.
- Escreva uma expressão algébrica para o termo geral a_n .
- Calcule o 25º termo.

A Questão 05 teve como foco a identificação de padrões, a generalização algébrica e a noção de termo geral de uma sequência.

Resultados:

No item (a), mais da metade dos estudantes deixou a resposta em branco por não saber como descrever uma sequência corretamente. Boa parte dos estudantes descreveu a regularidade da sequência em linguagem natural, alguns sem ressaltar o primeiro termo, mas poucos não conseguiram ser compreendidos.

No item (b), nenhum aluno conseguiu uma resposta satisfatória. A maioria esmagadora dos alunos deixaram em branco por não ter noção de como representar a resposta do item (a) algebricamente. Alguns ainda tentaram mas sem sucesso.

Já no item (c), uma parte dos estudantes conseguiu encontrar o 25^o termo calculando individualmente cada um, outros tentaram mas erraram no caminho, porém, a grande maioria deixou a resposta em branco.

A incapacidade total de produzir uma fórmula para o termo geral, contrastando com o reconhecimento verbal do padrão, sinaliza um obstáculo crítico na Generalização.

Quadro 14 – Distribuição dos alunos nas categorias e descrição dos padrões encontrados nas respostas da Questão 05

Categoria	Item (a)	Item (b)	Item (c)
Adequado	8 alunos (20,5%) conseguiram descrever a sequência de maneira adequada	0 aluno (0%). Nenhum aluno conseguiu encontrar a fórmula do termo geral da sequência	0 aluno (0%). Nenhum aluno conseguiu encontrar o 25 ^o termo através da fórmula do termo geral
Intermediário	7 alunos (17,9%) conseguiram descrever a sequência mas com alguma ambiguidade ou redundância	0 aluno (0%). Nenhum aluno conseguiu encontrar a fórmula do termo geral da sequência	5 alunos (12,8%) utilizaram cálculos diretos para encontrar o 25 ^o termo corretamente
Crítico	3 alunos (7,7%) descreveram a sequência com algum erro e sem ressaltar o primeiro termo	9 alunos (23,1%) tentaram esboçar a fórmula do termo geral mas sem êxito	6 alunos (15,4%) utilizaram cálculos diretos para encontrar o 25 ^o termo mas erraram os cálculos de algum termo no caminho
Em branco	21 alunos (53,9%)	30 alunos (76,9%)	28 alunos (71,8%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Síntese visual dos dados Questão 05

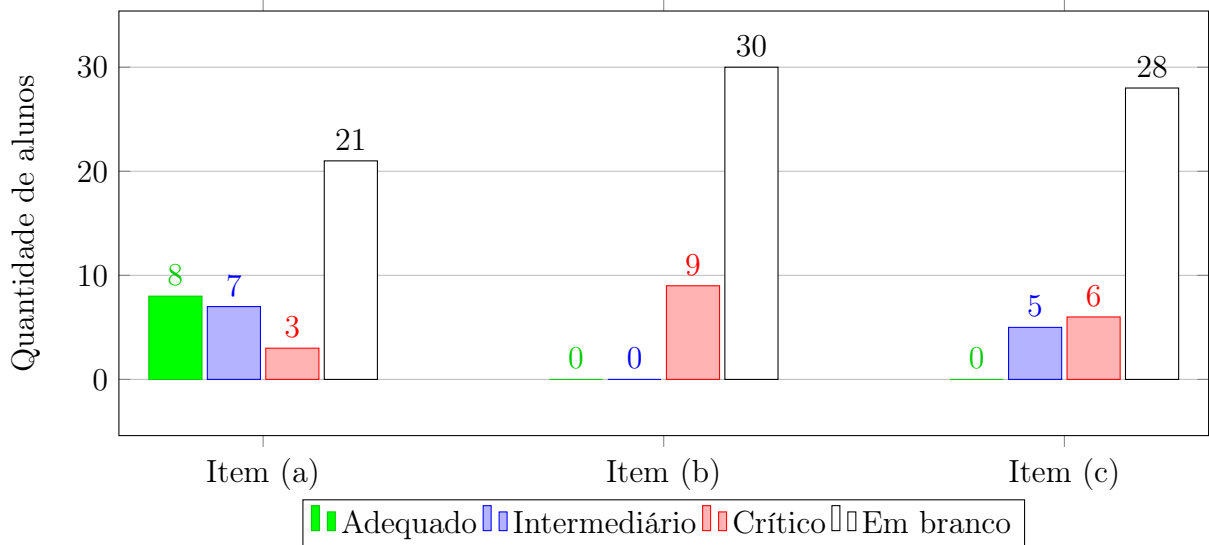


Figura 10 – Resposta de Aluno(a)15. O item (a) foi Intermediário, enquanto os itens (b) e (c) foram Críticos

a) de um numero para o outro pula três numeros
 b) $a_n + a_{n-4}$
 c) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 33, 36, 39,
 42, 45, 48, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O(a) Aluno(a)15 respondeu o item (a) corretamente quanto a razão de crescimento da sequência porém não ressaltou qual seria o primeiro termo, obtendo classificação Intermediário. No item (b), a resposta não conseguiu expressar algebricamente a sequência dada, enquanto que no item (c), embora tenha calculado termo a termo até chegar ao 25º, houve um equívoco no cálculo do 17º, fazendo com que encontrasse um valor diferente para o 25º. Por isso, ambos foram classificados como Críticos.

Questão 06.

- (a) O que significa o sinal “=” (igual) em uma equação matemática?
- (b) Em qual das questões anteriores temos uma letra representando um valor específico a ser descoberto (incógnita)? E em qual questão uma letra representa uma quantidade que pode variar (variável)?

A Questão 06 buscou avaliar a compreensão conceitual do sinal de igualdade e a distinção entre incógnita e variável. Há, introduzida na pergunta do item (b), uma breve

descrição do que seriam incógnita e variável, na tentativa de despertar algum conhecimento prévio dos alunos.

Resultados:

No item (a), somente emergiram respostas que associavam o sinal de igualdade apenas à ideia de “resultado”, revelando uma concepção operacional do símbolo. Nenhum estudante mencionou a noção de equivalência entre duas expressões.

No item (b), observou-se confusão entre os conceitos de incógnita e variável, com respostas que indicam uma compreensão ainda pouco consolidada desses papéis no contexto algébrico.

As respostas revelaram uma carência profunda na compreensão de fundamentos conceituais da álgebra. O sinal de igual é visto predominantemente como um comando para obter um resultado, não como uma relação de equivalência. Paralelamente a isso, observa-se uma dificuldade generalizada na assimilação do conceito de incógnita.

Quadro 15 – Distribuição dos alunos nas categorias e descrição dos padrões encontrados nas respostas da Questão 06

Categoria	Item (a)	Item (b)
Adequado	0 aluno (0%). Nenhum aluno mencionou a noção de equivalência entre duas expressões para a igualdade	3 alunos (7,7%) conseguiram identificar uma questão onde a letra representava uma incógnita e uma questão onde a letra representava uma variável
Intermediário	23 alunos (59%) associaram o sinal de igualdade apenas à ideia de “resultado” ou a um “pedido de cálculo”	4 alunos (10,2%) identificaram ao menos uma questão onde a letra representava uma incógnita ou variável
Crítico	9 alunos (23,1%) escreveram uma definição equivocada ou super limitada para a igualdade	21 alunos (53,9%) confundiram as questões em que apareciam incógnitas ou variáveis
Em branco	7 alunos (17,9%)	11 alunos (28,2%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Síntese visual dos dados Questão 06

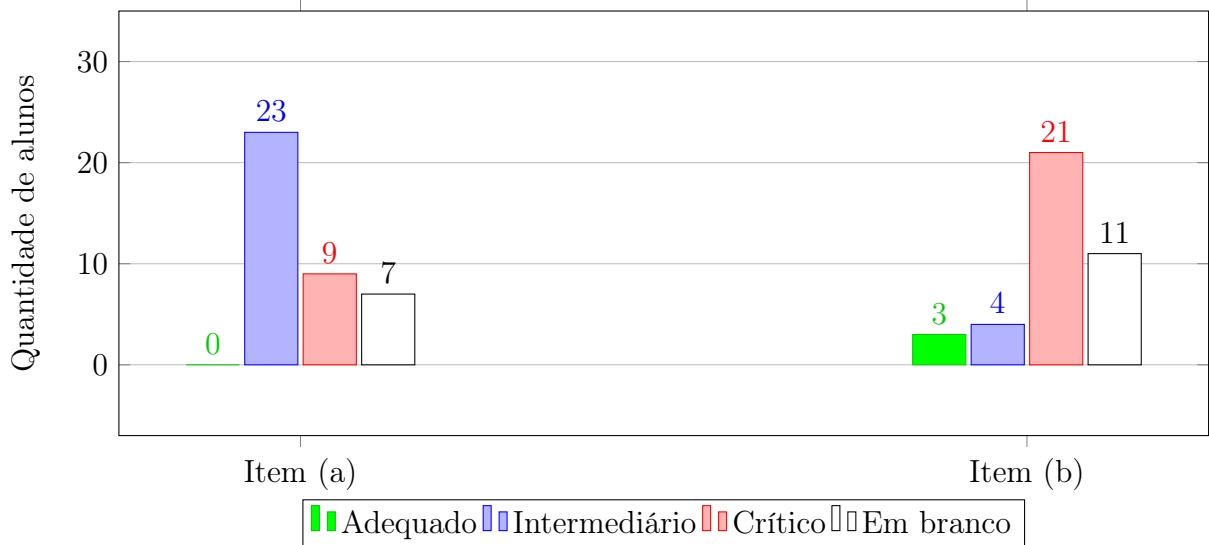


Figura 12 – Resposta de Aluno(a)39. A resposta do item (a) foi Crítica enquanto que a do item (b) foi Adequada

a) resultado daquela conta
 b) 1- incógnita
 2- incógnita
 3- variável
 4- variável

Fonte: Elaborada pelo autor.

O(a) Aluno(a)39, no item (a) limitou o significado da igualdade apenas a “resultado daquela conta”. Como o item pergunta o significado do sinal em uma equação matemática essa resposta não é satisfatória, sendo classificada como Crítico. Já no item (b), foi apresentado quatro questões com a correta indicação do papel das letras em cada uma delas, sendo considerado Adequado.

Síntese dos Resultados Diagnósticos

De modo geral, a análise dos dados indicam que os estudantes apresentam:

1. Dificuldade em converter expressões verbais (“dobro de um número”, “diferença entre”) em expressões algébricas precisas e inabilidade para lidar com situações envolvendo mais de uma quantidade desconhecida;

2. Negligência de elementos fixos em problemas (como a taxa de entrega na Questão 04), focando apenas nas partes variáveis;
3. Dificuldade em modelar funções e expressar padrões (sequências) através de uma fórmula geral. Preferência por métodos numéricos extensivos;
4. Visão operacional da igualdade (“resultado de uma conta”) em detrimento da visão relacional (“equilíbrio entre duas expressões”);
5. Notação ambígua e confusão entre incógnita (valor a ser encontrado) e variável (quantidade que varia).

O questionário diagnóstico revelou um quadro de fragilidade significativa nas dimensões em linguagem algébrica analisadas, indicando que o domínio aritmético ainda não foi adequadamente transposto para o algébrico, apresentando sérias lacunas na compreensão dos símbolos e conceitos fundamentais (igualdade, incógnita, variável, expressão) e expondo dificuldades em usar a álgebra como ferramenta para modelar situações reais simples.

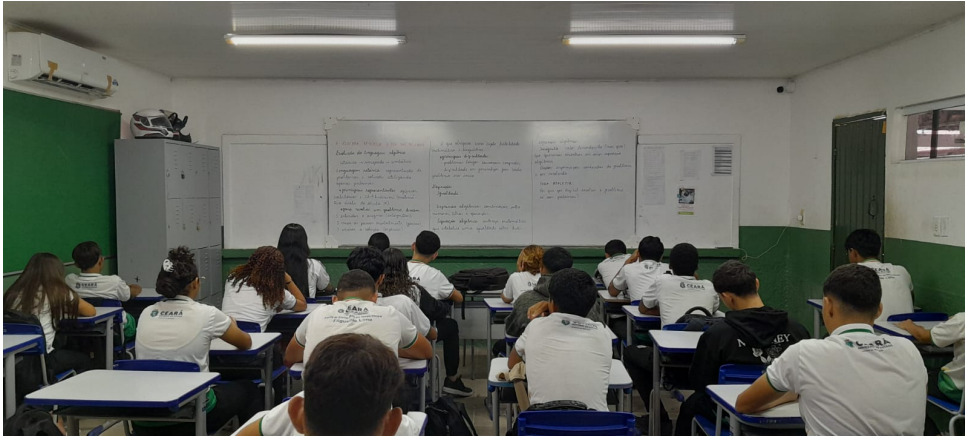
Estes resultados justificam a implementação da sequência didática proposta. A comparação com o questionário pós-intervenção permitirá verificar se as atividades propostas foram capazes de superar as dificuldades diagnosticadas, particularmente nas quatro dimensões estabelecidas.

5.2 Análise da aplicação da Sequência Didática

A sequência didática foi aplicada na turma do 1º ano A da EEMTI Filgueiras Lima em quatro encontros de duas aulas cada, totalizando 8 aulas, nos dias 25 de novembro, 02, 09 e 16 de dezembro de 2025. A metodologia central adotada foi a Resolução de Problemas - RP, sendo executado o ciclo de Polya (compreensão, planejamento, execução e revisão) em todos os encontros. A avaliação do processo teve caráter formativo, baseando-se nos registros dos estudantes e em suas interações durante as atividades.

Esta análise dedica-se a examinar o processo de implementação, observando a interação dos estudantes com as atividades, sua evolução conceitual ao longo dos encontros e a eficácia das estratégias pedagógicas empregadas, conforme as quatro dimensões de análise estabelecidas. Abaixo é apresentado um breve relato de cada encontro.

Figura 13 – Primeiro dia de aplicação da Sequência Didática



Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro Encontro

O primeiro encontro teve como foco conceitual equações e incógnitas. Seus objetivos de aprendizagem foram: compreender os conceitos de igualdade, expressão e equação algébricas; diferenciar dados e incógnitas em problemas; desenvolver o raciocínio lógico sem o apoio de símbolos; e vivenciar as limitações da álgebra retórica. O problema motivador foi o seguinte:

Vinícius pergunta ao seu professor de matemática por sua nota, o qual responde: “O dobro de sua nota mais nove resulta em vinte e três”. Qual a nota de Vinícius?

A imposição de resolver o problema utilizando exclusivamente palavras, simulando a fase retórica da álgebra, inicialmente gerou resistência. Alguns estudantes questionaram a necessidade de “voltar ao passado” quando dispunham de ferramentas simbólicas mais práticas para a solução. Após a apresentação do contexto histórico e da argumentação de que estariam revivendo os desafios enfrentados pelos primeiros matemáticos, o engajamento aumentou gradualmente. Os alunos passaram a aceitar a proposta como uma investigação sobre as origens da linguagem que utilizam.

No decorrer da atividade, os próprios estudantes verbalizaram as dificuldades inerentes ao método, com comentários como “fica muito comprido” e “dá vontade de abreviar”. Essas percepções espontâneas constituíram o primeiro e mais forte indicador de que a abordagem estava criando uma necessidade sentida pela simbolização, antecipando a motivação histórica para o desenvolvimento da linguagem algébrica.

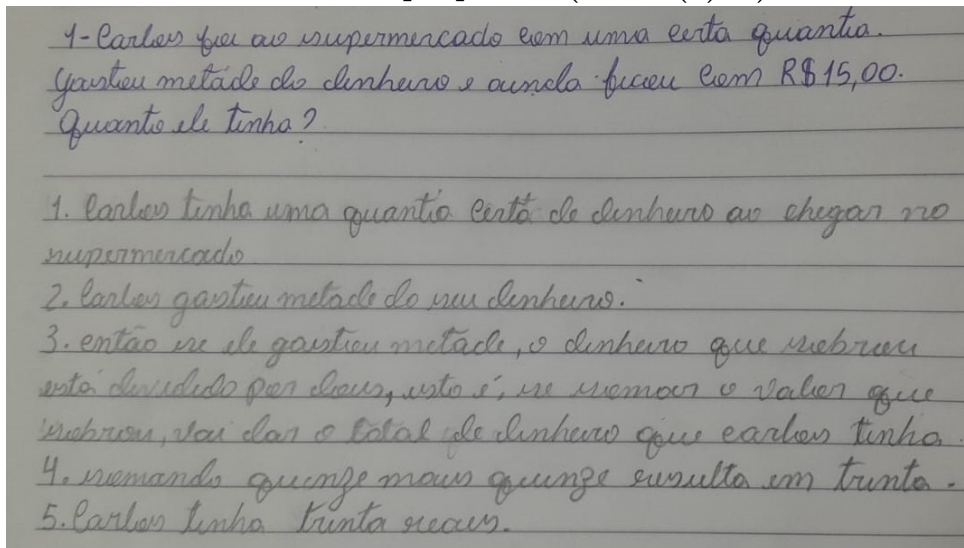
Inicialmente, poucas duplas lograram êxito. As intervenções, pautadas na RP, foram fundamentais para a superação do impasse. Estratégias como sugerir que primeiro esboçassem uma solução simbólica mentalmente para, em seguida, traduzi-la para o texto,

ou orientá-los a “desfazer” as operações descritas no enunciado, permitiram que um número maior de grupos alcançasse soluções de nível Adequado ou Intermediário.

O momento de socialização das diferentes estratégias foi crucial. Ao verem os caminhos utilizados por outros colegas, os demais grupos sentiram-se mais confiantes para tentar resolver os problemas complementares propostos, resultando em uma participação mais ativa e colaborativa no restante da aula.

Na figura abaixo, é apresentada a solução de nível Adequado de Aluno(a)17 a um dos problemas complementares propostos.

Figura 14 – Exemplo de resposta na fase retórica para um dos problemas propostos (Aluno(a)17)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao final da resolução dos problemas, procedeu-se à sistematização dos conceitos. Foram registrados e debatidos coletivamente os significados de igualdade (com a analogia da balança), expressão e equação algébrica, incógnita e dados.

A aula foi concluída com a reflexão proposta: “Por que foi difícil resolver só com palavras?”. As respostas dos alunos foram reveladoras, incluindo argumentos como a falta de familiaridade com a prática, o “vício” da praticidade dos símbolos, o desconhecimento desse capítulo da história da matemática e a confusão que inevitavelmente surge durante o processo. Essa discussão consolidou a percepção de que a notação algébrica é uma conquista funcional, nascida da necessidade de superar as limitações da comunicação puramente verbal.

Segundo Encontro

O segundo encontro concentrou-se nos conceitos de variáveis, notação e padronização, com os seguintes objetivos de aprendizagem: compreender a necessidade histórica de abreviações em matemática; diferenciar incógnita de variável; desenvolver sistemas pessoais de notação; e valorizar a importância da padronização da linguagem matemática. O problema motivador proposto foi:

Considere um terreno retangular em que a medida do lado maior corresponde ao triplo da medida do lado menor. Determine quais são as medidas de cada um de seus lados, sabendo que a área total desse terreno é de 300 m^2 .

Após a contextualização histórica da álgebra sincopada, os alunos foram orientados a criar uma notação pessoal para resolver o problema. A principal dificuldade observada foi a tendência natural de recorrer aos símbolos convencionais já internalizados, exigindo um esforço consciente de abstração para conceber novos signos.

Ao resolver o problema motivador, o(a) Aluno(a)22 demonstrou resistência em utilizar os símbolos convencionais de igualdade e multiplicação. Contudo, ao não conseguir criar símbolos alternativos eficazes, se achava desmotivado(a) a prosseguir com a resolução da atividade. Após uma intervenção pontual decidiu escrever por extenso a operação e a empregar uma seta no lugar do sinal de igual (Figura 15). Essa adaptação permitiu que expressasse corretamente o raciocínio, resultando em uma classificação como Adequado.

Figura 15 – Exemplo de resposta na fase sincopada para o problema motivador (Aluno(a)22)

$LM \rightarrow 3 Lm$
 $A \rightarrow LM \text{ (VEZES) } Lm$
 $300 \rightarrow 3 Lm \text{ (VEZES) } Lm$
 $100 \rightarrow Lm \text{ (VEZES) } Lm$
 $10 \rightarrow Lm$ L $LM \rightarrow 30$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante as intervenções, notou-se que uma parcela dos estudantes recorreu a desenhos figurativos para representar variáveis e operações. Porém, a maioria buscou criar símbolos abstratos ou abreviações que, embora pessoais, guardavam alguma proximidade com a notação algébrica moderna, um indício de que a eficiência dos símbolos convencionais já era intuitivamente reconhecida.

A atividade evidenciou de forma prática as limitações inerentes à falta de padronização. Enquanto alguns alunos criaram símbolos eficientes, outros não conseguiram

ram tal proeza tendo dificuldade em entender seus próprios símbolos. A socialização dessa experiência foi pedagógica e crucial pois indicou, pela própria experiência de falha comunicativa, a necessidade de um código comum.

Para a resolução de alguns dos problemas complementares, utilizou-se material dourado para a representação concreta de quantidades e formas geométricas para indicar operações ou variáveis. Essa estratégia facilitou a manipulação conceitual e resultou em um engajamento mais amplo, incentivando a criação de abreviações pessoais para os demais exercícios.

Ao final do encontro, procedeu-se à sistematização dos conceitos de coeficiente, incógnita e variável, registrados no quadro e debatidos coletivamente. A aula foi concluída com a reflexão proposta: “Quais vantagens as abreviações trazem em relação à álgebra retórica? Quais limitações ainda persistem?”.

As respostas dos alunos convergiram para a ideia de que a simbolização torna o raciocínio mais sintético, reduzindo a extensão do texto e a probabilidade de erros, ao passo que a falta de padronização ainda impede a compreensão mútua. Dessa forma, a reflexão consolidou a conclusão de que a eficácia plena de uma linguagem depende de sua universalidade.

Terceiro Encontro

O terceiro encontro teve como foco conceitual funções e modelagem. Seus objetivos de aprendizagem foram: conhecer e utilizar a notação algébrica moderna; diferenciar equação de função; compreender os conceitos de variável dependente e independente; e reconhecer as vantagens e desvantagens da linguagem simbólica. O problema motivador proposto foi:

Uma corrida de táxi custa R\$ 8,00 fixos mais R\$ 2,50 por quilômetro rodado.

- a) Qual a função que representa o preço da corrida por km rodado?
- b) Quanto custa uma corrida de 10 km?
- c) Quantos km foram percorridos em uma corrida que custou R\$ 58,00?

Ao iniciar a discussão do problema motivador, constatamos uma lacuna significativa na compreensão dos conceitos fundamentais relacionados a funções. Assim, logo após a contextualização histórica da linguagem simbólica, que fizemos destacando não apenas suas conquistas mas também suas possíveis dificuldades (a maioria dos estudantes tendia

a vê-la apenas como vantajosa), registramos e explicamos os conceitos essenciais para a aula, como a definição de função e a distinção entre variável dependente e independente.

Optamos por uma abordagem introdutória e acessível, evitando uma definição formal rigorosa (envolvendo domínio, contradomínio e relação). Em vez disso, utilizamos uma linguagem mais próxima dos alunos, como “valores de entrada e saída”, concentrando na ideia prática de uma grandeza que depende de outra.

Após essas e outras intervenções mais direcionadas, a maior parte dos alunos conseguiu esboçar as soluções para o problema motivador. Esse processo permitiu que percebessem a função não como uma fórmula abstrata e desconectada, mas como um “modelo” ou “fórmula-mapa” que representa uma relação do mundo real.

Concluído o ciclo da RP para essa atividade, partimos para a utilização do jogo *Algebrizando*, que exercita a transição entre representações retóricas e simbólicas de expressões matemáticas.

O jogo serviu como um catalisador de engajamento, incentivando a participação da grande maioria dos estudantes. Através de sua dinâmica lúdica, os alunos perceberam de forma natural e experiencial as vantagens de uma linguagem concisa, eficiente e padronizada para a representação matemática.

Após a atividade com o jogo, resolvemos coletivamente alguns problemas complementares. Um dos problemas descrevia um serviço de streaming que cobra uma taxa de adesão de R\$ 10,00 e uma mensalidade de R\$ 25,00. O enunciado solicitava: (a) a função $G(m)$ do gasto total após m meses; (b) o gasto após 6 meses; e (c) o número de meses para um gasto total de R\$ 185,00.

Figura 16 – Resposta de Aluno(a)8 anterior e posterior as intervenções

The figure consists of two side-by-side photographs of handwritten mathematical work on lined paper. The left photograph shows the student's initial work for problem 3. For part (a), they wrote $R = 12 \cdot 25 + 10$. For part (b), they wrote $R = 6 \cdot 25 + 10 = 150 + 10 = 160$ reais. For part (c), they used a table to find m such that $25 \cdot m + 10 = 185$, resulting in $m = 7$ meses. The right photograph shows the student's work after interventions. For part (a), they wrote the function $G(m) = 25 \cdot m + 10$. For part (b), they substituted $m = 6$ into the function to get $G(6) = 25 \cdot 6 + 10 = 150 + 10 = 160$ reais. For part (c), they set $25 \cdot m + 10 = 185$, subtracted 10 from both sides to get $25 \cdot m = 175$, and then divided by 25 to get $m = 7$ meses.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na primeira tentativa de Aluno(a)8, observou-se uma dificuldade marcante na representação funcional da situação, com uma clara predileção por métodos aritméticos diretos. Em consequência, o item (a) foi categorizado como Crítico e os itens (b) e (c) como

Intermediários. Após intervenções direcionadas que enfatizaram a tradução do contexto para a notação algébrica, o(a) estudante reformulou a solução de todos os itens, que então foram reavaliados como Adequados.

O encontro foi encerrado com a reflexão proposta: “Apenas a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$ é suficiente para entendermos o que ela representa? O que causa o distanciamento da Matemática do nosso cotidiano?”. As respostas convergiram em dois pontos importantes: vários alunos destacaram que uma representação puramente simbólica pode se referir a diversas situações, sendo fundamental um texto ou contexto que a explique; e que a ausência desse contexto pode afastar a interpretação dos símbolos matemáticos. Em síntese, a discussão indicou que os alunos assimilaram uma visão mais equilibrada, reconhecendo tanto as vantagens quanto as limitações presentes na linguagem simbólica.

Quarto Encontro

O quarto e último encontro teve como foco a generalização de padrões, em uma tentativa de consolidar o uso da notação simbólica. Seus objetivos de aprendizagem foram: identificar padrões em sequências numéricas; generalizar relações por meio de fórmulas; compreender o conceito de termo geral; e aplicar a generalização em contextos variados. O problema motivador proposto foi:

Um paciente recebeu uma prescrição médica para tomar um medicamento de uso contínuo. A embalagem contém 12 comprimidos e a orientação é tomar 1 comprimido a cada 7 dias. Considerando que o primeiro comprimido foi tomado no dia 1, responda:

- a) Escreva os primeiros 4 termos da sequência dos dias em que o paciente deve tomar os comprimidos.
- b) Qual é a lei de formação (fórmula do termo geral) dessa sequência?
- c) Em que dia será tomado o décimo comprimido?
- d) Quantos dias serão necessários para terminar toda a cartela de 12 comprimidos?

Após a leitura e uma breve discussão inicial, as lacunas conceituais evidenciadas nos alunos motivaram uma sistematização imediata. Registramos e explicamos no quadro os conceitos essenciais de generalização, sequência numérica e fórmula do termo geral, optando novamente por uma abordagem acessível e intuitiva, em detrimento de uma definição formal e rigorosa. Com esse suporte conceitual, os alunos, organizados em

grupos e utilizando fichas para representar concretamente os dias, iniciaram a resolução do problema.

A obtenção dos termos específicos da sequência (itens (a), (c) e (d)) foi alcançada com relativa facilidade pela maioria, que recorreu predominantemente à estratégia de contagem termo a termo. O grande desafio, previsível e central para os objetivos da aula, surgiu no item (b), que exigia a dedução da lei de formação. A superação dessa barreira exigiu intervenções frequentes e a sugestão de estratégias mais eficazes, focadas em relacionar a posição do termo (n) com seu valor.

O caso do(a) Aluno(a)26, ilustrado abaixo, é emblemático na consolidação da aprendizagem. Após as intervenções, observou-se um duplo avanço: a correta abstração do padrão em uma lei geral e a eficaz aplicação dessa lei para obtenção de termos específicos, justificando sua categorização como Adequado.

Figura 17 – Resposta de Aluno(a)26 após intervenções

The image shows a student's handwritten work on lined paper. It is organized into four sections, labeled a, b, c, and d. Section a lists the numbers 1, 8, 15, and 22. Section b shows the derivation of a general term formula $a_n = 7n - 6$. Section c shows the calculation of the 10th term: $a_{10} = 7 \cdot 10 - 6$, $a_{10} = 70 - 6$, and $a_{10} = 64$. Section d shows the calculation of the 12th term: $a_{12} = 7 \cdot 12 - 6$, $a_{12} = 84 - 6$, and $a_{12} = 78$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A resolução bem-sucedida do item (b) e sua subsequente aplicação para responder aos demais itens funcionou como uma demonstração prática do poder da generalização. Os alunos perceberam, de forma intuitiva e impactante, a eficiência de uma fórmula geral em substituir cálculos repetitivos, o que despertou um interesse genuíno na resolução dos problemas complementares.

A reflexão foi orientada pelas questões: “O que muda quando passamos de resolver um problema específico para encontrar uma fórmula geral?” e “O que fazer para que os símbolos não se tornem algo sem sentido?”. A discussão coletiva conduziu a duas conclusões principais. Primeiramente, de que a busca por uma fórmula geral vai além da solução pontual, capacitando os estudantes a resolverem uma classe inteira de problemas

análogos e a desenvolverem estratégias transferíveis para novas generalizações. Em segundo lugar, que a contextualização é o elemento crucial para atribuir significado a linguagem matemática, impedindo que ela se torne apenas um formalismo vazio.

Finalizamos a aula e os encontros fazendo uma reflexão geral sobre os grandes marcos históricos da linguagem algébrica trabalhados. Discutiu-se como essa jornada contribui para a consolidação não apenas da álgebra, mas de uma postura matemática mais ampla. Ao final, os alunos manifestaram satisfação, uma consciência mais aguçada sobre as diferentes representações matemáticas e disposição em buscar sentido nas notações que utilizam.

Considerações sobre o Processo de Aplicação

A progressão histórica da linguagem funcionou como um dispositivo didático eficaz. A sequência didática cumpriu seu papel de ressignificar o ponto de contato dos alunos com a álgebra. Ao reviver os problemas históricos de comunicação e eficiência que deram origem à linguagem simbólica, os estudantes construíram uma relação de elaboração e necessidade com os símbolos, em contraste com a relação de incoerência e imposição frequentemente observada.

A organização de alguns encontros em duplas e grupos heterogêneos foi importante, permitindo que alunos com diferentes níveis de compreensão (Adequado, Intermediário, Crítico) discutissem significados e estratégias. O ambiente de “investigação histórica” reduziu a aversão ao erro, transformando-o em parte do processo de descoberta.

Conclui-se que a aplicação foi bem-sucedida em estabelecer as bases para uma compreensão conceitual da linguagem algébrica. Ela não teve a pretensão de esgotar os conteúdos procedimentais, mas sim de construir os alicerces significativos sobre os quais esses procedimentos podem, posteriormente, ser desenvolvidos com maior compreensão e menos resistência. A efetividade desta fundação conceitual será mensurada de forma mais precisa na análise comparativa dos resultados do questionário pós-intervenção, que segue na próxima seção.

5.3 Análise do Questionário Pós-Intervenção

O questionário pós-intervenção foi aplicado na aula seguinte ao quarto e último encontro. Concebido para avaliar comparativamente o desenvolvimento das competências

em linguagem algébrica após a sequência didática, ele apresenta questões análogas às do questionário diagnóstico, o que permite analisar com precisão o progresso em cada uma das quatro dimensões estabelecidas, alinhando-se aos objetivos da proposta pedagógica. A análise seguirá a mesma metodologia anterior, categorizando o nível das respostas como Adequado, Intermediário, Crítico ou Em branco.

Todas as questões foram construídas como equivalentes às do diagnóstico, mantendo a mesma estrutura de objetivos e enunciados, com variações apenas nos valores numéricos e nos contextos apresentados (formando pares: Q01 com Q01, Q02 com Q02, e assim por diante). Em razão dessa correspondência direta, optou-se por não apresentar os enunciados na análise que segue.

No dia da aplicação do questionário pós-intervenção, quatro alunos estavam ausentes. Em virtude da proximidade do término do ano letivo, não foi possível realizar uma reaplicação. Dessa forma, as análises comparativas basearam-se nos percentuais de respostas dentro de cada categoria, considerando o total de questionários efetivamente respondidos.

Foram analisadas 35 respostas onde, para cada questão, a análise segue esta sequência:

1. Análise comparativa de cada item;
2. Análise geral da questão;
3. Exemplo ilustrativo, com uma resposta representativa dos alunos, acompanhada de sua classificação.

Análise Comparativa por Questão

Questão 01: Resolução retórica e representação da equação

- **Item (a) - Resolução retórica:** Observou-se uma mudança marcante. Enquanto no questionário diagnóstico 0% das respostas estavam no nível Adequado, no questionário pós-intervenção 37,1% (13 alunos) produziram textos claros. A categoria Intermediário decresceu para 17,1% (6 alunos), com textos menos estruturados, mas que chegavam ao resultado, o que pode ser explicado pelo grande aumento do Adequado. As categorias Crítico, de 28,2% para 14,3% (5 alunos), e Em branco, de 33,3% para 31,5% (11 alunos), também caíram.

- **Item (b) - Representação da equação:** O salto foi expressivo. A taxa de respostas de nível Adequado mais que dobrou, pulou de 33,3% para 74,3% (26 alunos). O índice de respostas Em branco caiu de 30,8% para 17,1% (6 alunos), o Crítico caiu de 15,4% para 8,6% (3 alunos) enquanto o Intermediário ficou zerado. Os erros estruturais graves (como a ausência do sinal de igual ou de coeficientes, ou a troca do sinal da operação) tornaram-se minoritários.

O aumento expressivo tanto na articulação retórica quanto na representação simbólica correta demonstra um avanço consolidado na Tradução, indicando que a vivência histórica conferiu significado ao ato de simbolizar.

Figura 18 – Resposta de Aluno(a)4

Se somamos oito mais vinte duas,
encontramos o quintuplo, que é trinta.
Se dividimos trinta por cinco, encontramos
o resposta, que é seis.
b) $5x - 8 = 20$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na resposta da figura acima, no item (a) o aluno deveria escrever em texto a resolução da equação, enquanto que no item (b), deveria escrever na linguagem simbólica a equação enunciada em linguagem natural. Ambas as resposta foram categorizadas como no nível Adequado.

Questão 02: Representação da expressão e substituição

- **Item (a) - Representação da expressão:** A taxa de respostas de nível Adequado aumentou de 38,6% para 80% (28 alunos). O erro que colocou um aluno como Intermediário, queda de 17,9% para 2,8%, foi a omissão da variável. O Crítico, de 17,9% para 8,6% (3 alunos), e Em Branco, de 25,6% para 8,6% (3 alunos), também caíram.
- **Item (b) - Substituição:** O sucesso no item (a) refletiu diretamente aqui. A taxa de Adequado subiu de 35,9% para 77,2% (28 alunos). A maioria dos que erraram o item (a) ainda tentou uma substituição coerente com sua expressão errada, mostrando que a mecânica da substituição é dominada. No Intermediário, houve queda de 25,6% para 2,8% (1 aluno), e no Crítico e Em branco, quedas de 10,3% para 8,6% (3 alunos) e de 28,2% para 11,4% (4 alunos), respectivamente.

No geral, os resultados mostram que a prática com o jogo “Algebrizando” e as atividades de tradução dos encontros 2 e 3 mostraram-se eficazes. A taxa de acerto elevada na construção da expressão e na substituição confirma uma superação da lacuna na Tradução de termos relacionais. A compreensão da estrutura sintática de uma expressão (coeficiente, variável, operação, constante) aprimorou-se consideravelmente.

Figura 19 – Resposta de Aluno(a)16

a) $x^2 + 9$.

b) $4^2 + 9 = 16 + 9 = 25$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Embora houve um grande avanço nos resultados dessa questão, na Figura 19 temos um exemplo onde ambas as respostas dos itens foram categorizadas no nível Crítico. A questão pedia para escrever em linguagem simbólica o quádruplo de um número mais nove (item (a)) e calcular o valor para 4 (item (b)). Certamente o(a) Aluno(a)16 não decifrou o significado de “quádruplo”, cometendo esse erro. Interessante que, coincidentemente, a resposta do item (b) resultou no valor procurado.

Questão 03: Representação de equação com duas variáveis e substituição

- **Item (a) - Representação da equação:** As respostas de nível Adequado saltaram de 20,5% para 80% (28 alunos), um claro avanço. A taxa de respostas Em branco, que era alarmante (41%), caiu para apenas 11,4% (4 alunos). Os níveis Intermediário e Crítico caíram, respectivamente, de 7,7% para 2,8% (1 aluno) e de 30,8% para 5,8% (2 alunos). Os erros comuns ainda envolvem a omissão dos coeficientes, a representação equivocada de algum dado ou a soma incorreta dos termos.
- **Item (b) - Substituição:** O progresso foi marcante como no item (a). As respostas de nível Adequado saltaram de 12,8% para 77,2% (27 alunos). No entanto, 11,4% (4 alunos) das respostas foram categorizadas como Intermediário por usar estratégia aritmética direta ao invés da substituição. No diagnóstico, esta estratégia também existia, mas agora é executada com maior clareza e taxa de sucesso. As taxas de respostas Crítico e Em branco caíram de 28,2% para 5,8% (2 alunos) e de 35,9% para 11,4% (4 alunos), respectivamente.

O salto no acerto da modelagem com duas variáveis e o uso predominante da estratégia algébrica (em vez do cálculo direto) reflete um fortalecimento significativo da Modelagem. A intervenção reduziu a paralisia perante o problema (evidenciada pela queda drástica das respostas em branco) e fortaleceu estratégias de resolução numérica lógicas, que podem servir de ponte para a formalização algébrica futura.

Figura 20 – Resposta de Aluno(a)9

$$\begin{aligned}
 01 \quad 2x + 3y &= 78 \\
 02 \quad 2x + 3y &= 78 \\
 03 \quad 2 \cdot 24 + 3y &= 78 \\
 04 \quad 24 + 3y &= 78 \\
 05 \quad 3y &= 78 - 24 \\
 06 \quad 3y &= 54 \\
 07 \quad y &= \frac{54}{3} \\
 08 \quad y &= 18
 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na resposta de Aluno(a)9, categorizada como de nível Adequado, percebemos uma escrita bem melhor, estruturando corretamente a equação e o passo a passo da substituição, em relação a escrita do questionário diagnóstico.

Questão 04: Modelagem e uso de função afim

- **Item (a) - Representação da função:** A taxa de respostas de nível Adequado saltou de 20,5% para 65,7% (23 alunos). O erro crítico de omitir o coeficiente ou a taxa fixa, que afetou no diagnóstico, foi observado em poucas respostas. A discussão sobre “o que é fixo” e “o que varia” durante as aulas internalizou-se. As respostas de níveis Intermediário e Crítico caíram de 5,1% para 2,9% (1 aluno) e de 20,5% para 20% (7 alunos), respectivamente. Outro dado importante que indica o aprendizado e o uso consciente da representação foi a grande queda das respostas Em branco, de 53,9% para apenas 11,4% (4 alunos).
- **Item (b) - Substituição:** As respostas de nível Adequado saltaram de 10,3% para 68,6% (24 alunos), todos utilizando a função. O nível Intermediário caiu de 20,5% para 14,2%. O maior avanço foi notado na queda do nível Crítico, de 58,9% para 8,6% (3 alunos). As repostas Em branco permaneceram quase constantes, 10,3% para 8,6% (3 alunos).

- **Item (c) - Resolução da equação obtida:** A taxa de sucesso foi de 57,2% (20 alunos) contra 2,6% no diagnóstico, um salto enorme. Menos alunos utilizaram somente estratégias aritméticas na resolução, fazendo o nível Intermediário cair de 56,4% para 17,1% (6 alunos). O Crítico e Em branco também caíram, de 25,6% para 17,1% (6 alunos) e de 15,4% para 8,6% (3 alunos), respectivamente.

A modelagem de funções afins em contexto cotidiano saiu de um patamar de grande dificuldade para um de domínio pela maioria. A consideração majoritária da taxa fixa e o uso consciente da função para resolver itens subsequentes evidenciam uma apropriação conceitual da Modelagem funcional, onde os componentes fixo e variável são corretamente integrados.

Figura 21 – Resposta de Aluno(a)14

$a) R: V(d) = 10 + 2d$ | $b) V(15) = 10 + 2(15)$
 $V(15) = 10 + 30 = 40$ | $c) 84 = 10 + 2d$
 \swarrow a corrida de 15 km \swarrow | $84 - 10 = 2d$
 \searrow custava 40 reais \searrow | $74 = 2d$
 $\left| \right.$ | $\frac{74}{2} = d$
 $d = 37$
 a corrida que custa 84 reais teve 37 km

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na resposta reproduzida acima, percebemos outro grande avanço após a aplicação da sequência didática. Enquanto no diagnóstico poucos alunos conseguiram representar adequadamente a função e acabaram resolvendo os outros itens de forma direta, no pós-intervenção a maioria dos alunos fizeram como na figura, modelaram corretamente a função e a usaram para responder os outros itens.

Questão 05: Generalização de padrões

- **Item (a) - Lei em linguagem natural:** Houve uma melhora significativa. O nível Adequado foi de 51,4% (18 alunos), contra 20,5% no diagnóstico. Houve um pequeno acréscimo nos níveis Intermediário e Crítico, respectivamente, de 17,9% para 20% (7 alunos) e de 7,7% para 8,6% (3 alunos). Já as respostas Em branco caíram de 53,9% para 20% (7 alunos).

- **Item (b) - Fórmula do termo geral:** Aqui reside o avanço mais crucial. Enquanto no diagnóstico nenhum dos alunos conseguiu expressar uma fórmula para o termo geral, no pós-intervenção 65,8% (23 alunos) obtiveram êxito. O nível Intermediário se manteve em 0%. Outros 20% (7 alunos) produziram fórmulas com erros, contra 23,1% no diagnóstico, classificadas no Crítico. Já as respostas Em branco caíram de 76,9% para 14,2% (5 alunos).
- **Item (c) - Cálculo de um dos termos:** A taxa de acerto via fórmula foi de 57,2% (20 alunos), um contraste radical com os 0% de Adequado no diagnóstico. Já as taxas de acerto via cálculo direto preciso, classificadas no Intermediário, e de respostas no Crítico, mantiveram-se quase constantes, foram, respectivamente, de 12,8% e 15,4% no diagnóstico para 14,3% (5 alunos) e 17,1% (6 alunos) no pós-intervenção. As respostas Em branco caíram de 71,8% para 11,4% (4 alunos).

A generalização, o ponto mais crítico do diagnóstico, registrou o progresso mais substantivo em termos percentuais. A transição de 0% para a maioria dos alunos obtendo a fórmula do termo geral representa uma grande conquista na Generalização, mostrando que a estratégia de manipulação concreta facilitou o salto para a lei geral.

Figura 22 – Resposta de Aluno(a)31

a) o primeiro termo é quatro, e aumentamos o próximo termo somando o termo passado com mais quatro.

$$a_1 = 4$$

$$a_{20} = 4 + 20$$

$$a_{20} = 24$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar de empregar alguns termos pouco usuais, a resposta do item (a), assim como as dos demais itens, foi categorizada como Adequado. Isso porque o(a) aluno(a) identificou corretamente o primeiro termo e o valor acrescido a cada termo em relação ao anterior, conforme abordado nas intervenções realizadas no 4º encontro.

Questão 06: Conceitos fundamentais

- **Item (a) - Expressão e equação:** No diagnóstico, este conceito não foi testado diretamente. No pós-intervenção, 65,8% (23 alunos) deram respostas de nível

Adequado, destacando a presença do sinal de igual e a ideia de solução na equação. Tivemos 14,2% (5 alunos) com respostas no Intermediário, 8,6% (3 alunos) no Crítico e 11,4% (4 alunos) deixaram Em branco.

- **Item (b) - Incógnita e variável:** A evolução foi marcante. A capacidade de identificar corretamente pelo menos uma questão de incógnita e uma de variável saltou de 7,7% no diagnóstico para 57,2% (20 alunos). A taxa de alunos que conseguiram identificar corretamente apenas um dos casos (nível Intermediário) caiu de 10,2% para 8,6% (3 alunos). A confusão entre os conceitos, que afetava 53,9%, caiu para 20% (7 alunos) e as respostas Em branco, de 28,2% para 14,2% (5 alunos).

Os resultados nos mostram que o uso consciente da linguagem algébrica e a apropriação de conceitos estruturantes da álgebra foi uma das grandes conquistas da sequência. A distinção clara entre incógnita e variável pela maioria dos alunos e as definições relacionais da igualdade apontam para uma transformação na apropriação de conceitos, com os símbolos ganhando significados precisos e diferenciados.

Figura 23 – Resposta de Aluno(a)14

a) expressão algébrica: combinação de números, letras e operações.
 equação algébrica: separada pela igualdade.

b) Incógnita: 1ª questão.
 variável: 5ª questão.

Fonte: Elaborada pelo autor.

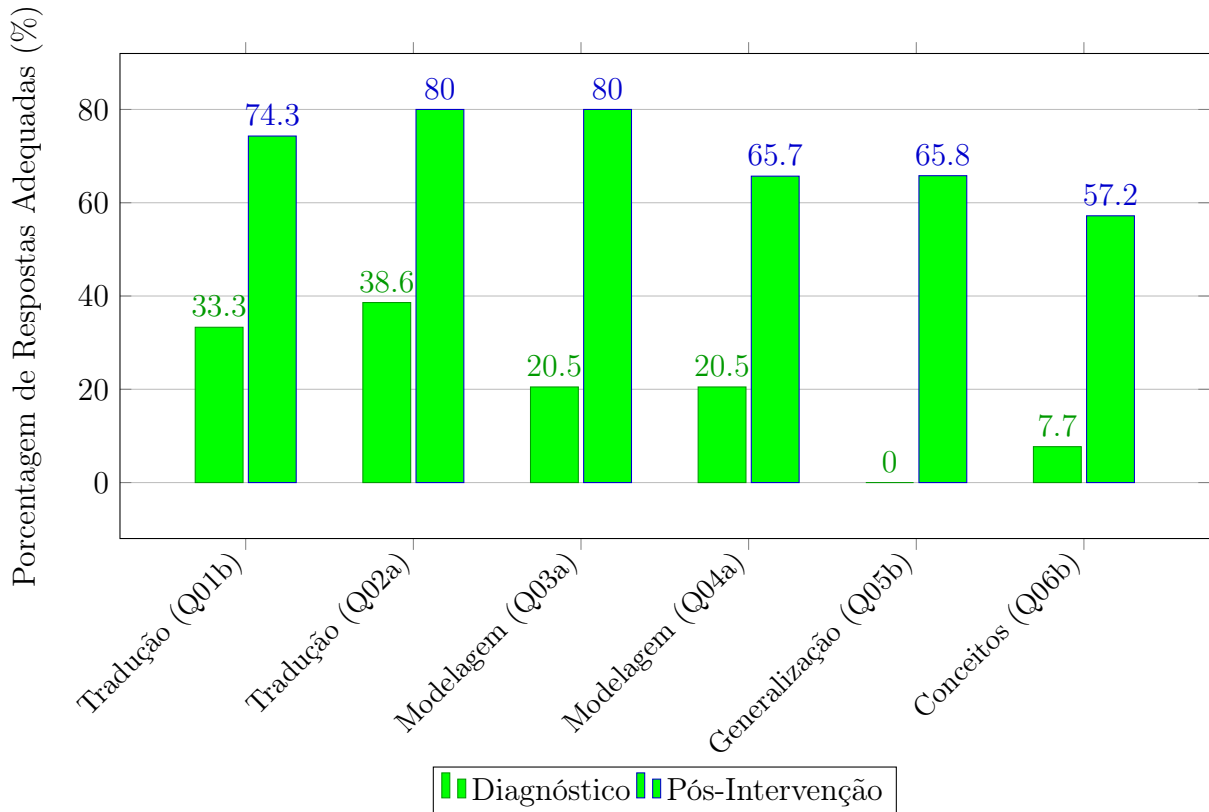
Na figura acima, são reproduzidas as respostas de Aluno(a)14. No item (a), ele deveria definir expressão e equação algébrica. Como a definição para equação algébrica ficou incompleta, apenas listando uma característica, ela foi categorizada no nível Intermediário. Já o item (b), foi Adequado pois identificou corretamente uma questão onde a letra fez papel de incógnita e outra onde a letra fez papel de variável.

Síntese dos Resultados Pós-Intervenção

A comparação direta entre os questionários diagnóstico e pós-intervenção aponta um avanço significativo e consistente em todas as dimensões avaliadas da linguagem algébrica: Tradução, Modelagem, Generalização e Conceitos.

O Gráfico 24 ilustra essa evolução, apresentando o crescimento expressivo do desempenho considerado Adequado em todas as dimensões da linguagem algébrica investigadas. Para cada uma delas, são indicados o item, a questão correspondente e o respectivo progresso observado.

Figura 24 – Evolução percentual das respostas Adequadas nas dimensões da linguagem algébrica após a intervenção

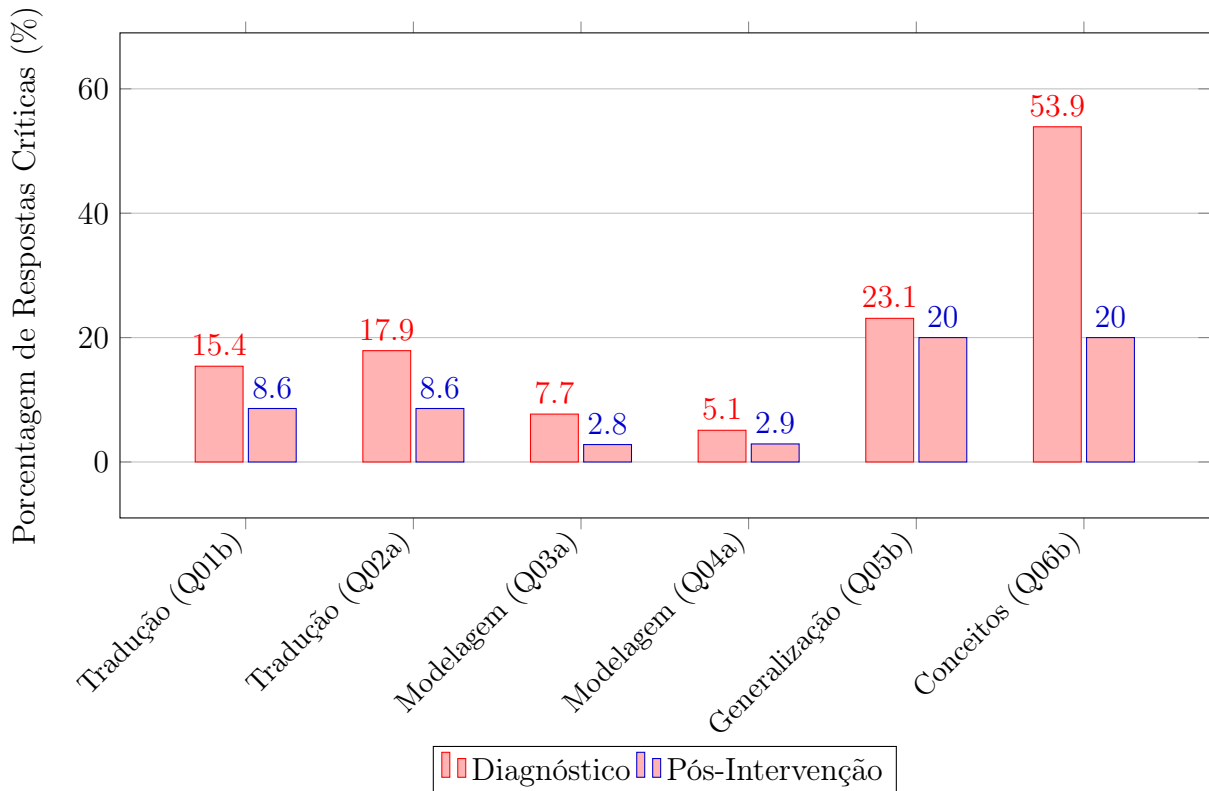


Fonte: Elaborada pelo autor.

O crescimento expressivo em todas as dimensões, especialmente na Generalização (de 0% para 65.8%), demonstra que a sequência foi capaz de construir competências onde praticamente não existiam.

O Gráfico 25 mostra a evolução das mesmas questões analisadas no gráfico anterior, porém com foco na superação das deficiências mais graves. A queda observada após a intervenção indica uma diminuição das lacunas conceituais que existiam previamente. Esse avanço é um resultado direto da sequência didática aplicada, que promoveu um uso mais consciente da linguagem algébrica, reduzindo significativamente equívocos e erros antes frequentes.

Figura 25 – Redução percentual das respostas Críticas nas dimensões da linguagem algébrica após a intervenção



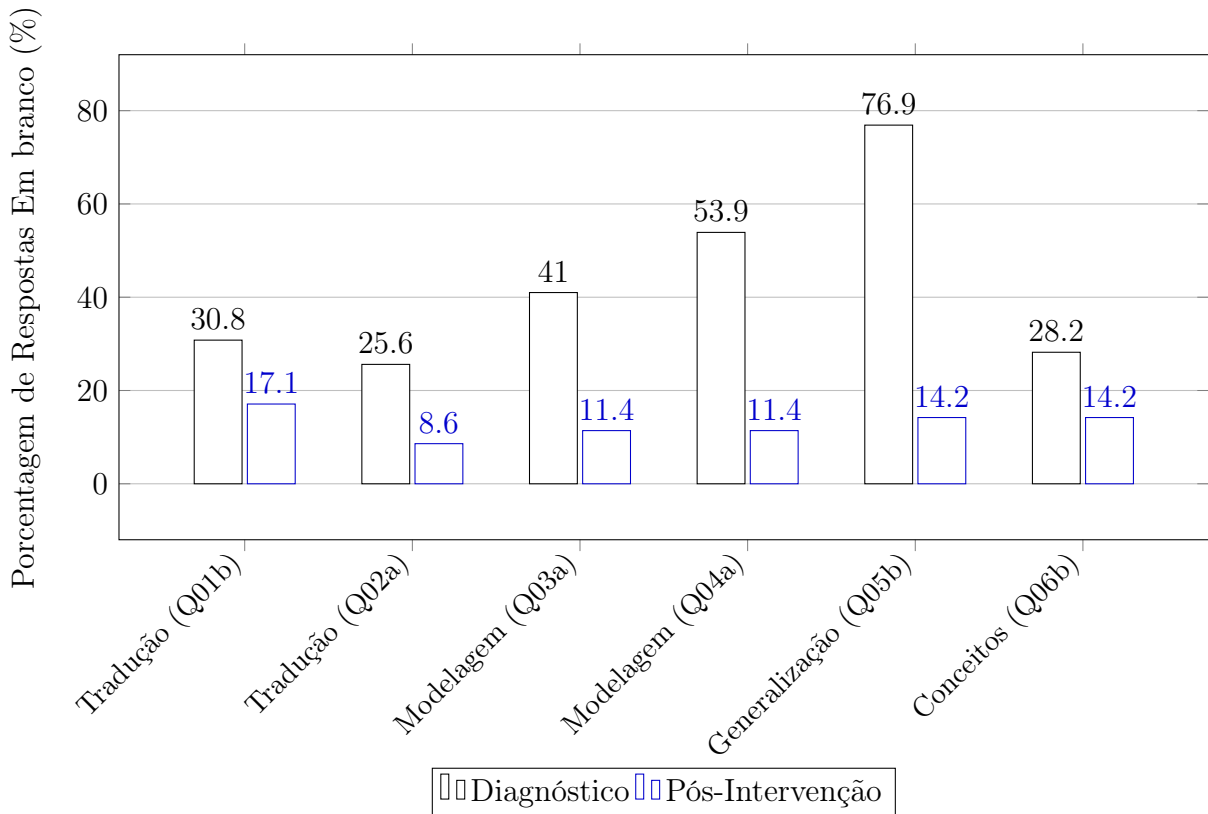
Fonte: Elaborada pelo autor.

A queda acentuada nesta categoria, sobretudo em Conceitos (de 53.9% para 20%), indica uma redução significativa das concepções equivocadas e das lacunas mais graves. A persistência relativa de respostas críticas na Generalização aponta, por outro lado, para a complexidade inerente a essa habilidade, que demanda um tempo de maturação mais longo.

Já o Gráfico 26 concentra-se na redução da categoria de respostas em branco. A queda expressiva observada reflete uma mudança na disposição para enfrentar os desafios algébricos. Onde antes havia paralisia ou desistência perante problemas de modelagem ou generalização, passou a haver tentativa e participação.

Este dado é um forte indício de que a sequência didática conseguiu criar um ambiente de confiança cognitiva, onde os alunos se sentiram instrumentalizados e encorajados a usar as ferramentas da linguagem algébrica, reduzindo a aversão frequentemente associada a esses conteúdos. Essa instrumentalização se deu oferecendo, ou mesmo lembrando, as bases conceituais necessárias para a resolução durante os encontros.

Figura 26 – Redução percentual das respostas Em branco nas dimensões da linguagem algébrica após a intervenção



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados permitem concluir que a sequência didática foi eficaz em seus objetivos:

1. **Resignificou a linguagem algébrica:** A abordagem histórica transformou os símbolos de elementos arbitrários em conquistas funcionais, reduzindo a rejeição inicial.
2. **Desenvolveu a competência de tradução:** A prática intensiva na conversão entre registros verbais e simbólicos resultou em ganhos de mais de 30 pontos percentuais.
3. **Promoveu a modelagem funcional:** A compreensão de funções afins em contextos reais foi consolidada, com a taxa fixa sendo corretamente considerada pela grande maioria.
4. **Introduziu a generalização:** Embora permaneça o desafio mais complexo, a capacidade de escrever uma fórmula para o termo geral de uma sequência saiu de zero e foi alcançada por uma parcela expressiva da turma.
5. **Consolidou conceitos fundamentais:** A apropriação dos significados de igualdade, incógnita, variável, expressão e equação representa uma mudança qualitativa profunda, essencial para aprendizagens futuras.

A análise evidencia que a sequência didática cumpriu seu papel de alicerce conceitual. Para além da melhora expressiva nos indicadores de acerto, o resultado mais substantivo foi a transformação da relação dos estudantes com a álgebra. Equipados com uma compreensão mais significativa e instrumental dos símbolos e de suas estruturas, os alunos passaram a perceber a linguagem algébrica não como um código arbitrário, mas como uma ferramenta conquistada historicamente para pensar e resolver problemas. As dificuldades residuais não invalidam esse alicerce, muito pelo contrário, sinalizam a necessidade de uma continuidade pedagógica que se apoie na base de significados agora construída.

Portanto, os resultados validam a hipótese central desta investigação: uma abordagem que integra de forma explícita a evolução histórica da linguagem à metodologia de Resolução de Problemas constitui um caminho eficaz para a construção de uma base conceitual robusta em álgebra. Essa abordagem mostrou-se capaz de superar as fragilidades cognitivas identificadas no diagnóstico, promovendo, em última instância, maior engajamento e abrindo caminho para aprendizagens subsequentes com menor resistência e aversão.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou investigar de que modo uma abordagem explícita e estruturada da linguagem algébrica, fundamentada em sua evolução histórica e integrada à metodologia de Resolução de Problemas, poderia contribuir para a compreensão e o uso consciente dessa linguagem por estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Ao final deste percurso, é possível afirmar que os objetivos propostos foram alcançados.

O objetivo geral, implementar uma sequência didática que promovesse o uso consciente da linguagem algébrica como ferramenta de resolução de problemas, mostrou-se exitoso. Os objetivos específicos também foram cumpridos. A articulação entre a dimensão histórica e a didática revelou-se um caminho fértil para dar significado aos símbolos algébricos, transformando-os de convenções arbitrárias em ferramentas conquistadas ao longo da história do pensamento humano.

Espera-se que este trabalho possa servir de inspiração e guia para professores da Educação Básica. A proposta da sequência didática, disponível nos anexos, é flexível e adaptável a diferentes realidades escolares. A experiência aqui relatada demonstra que conectar o ensino da álgebra à sua história não é um mero acréscimo cultural, mas uma estratégia pedagógica poderosa para construir significados, reduzir a aversão à disciplina e desenvolver o pensamento algébrico de forma mais profunda. A abordagem por Resolução de Problemas, por sua vez, manteve os alunos como agentes ativos da construção do conhecimento, validando a álgebra como linguagem útil e necessária.

Além disso, esta dissertação pretende servir de base para publicações e aprofundamentos futuros. O estudo abre espaço para investigações que repliquem a proposta em outros contextos, com outros níveis de ensino (como os anos finais do Ensino Fundamental) ou que explorem o uso de tecnologias digitais como apoio à modelagem e à generalização.

É importante, contudo, reconhecer as limitações inerentes a este estudo. A pesquisa foi desenvolvida em uma única escola pública, com uma turma específica de 39 alunos, o que limita a generalização dos resultados. A realidade socioeconômica e as carências de aprendizagem prévia dos participantes certamente influenciaram o processo, e a aplicação em contextos mais favorecidos ou com perfis diferentes de estudantes poderia gerar outros desdobramentos. O curto período de intervenção (oito aulas) também impõe limites, pois a consolidação plena de conceitos tão complexos como a generalização requer tempo e prática continuada.

Apesar dessas limitações, os resultados são promissores e indicam a viabilidade e a eficácia da proposta. Conclui-se que a jornada histórica da linguagem algébrica, quando trazida para a sala de aula de forma intencional e conectada à resolução de problemas, pode desfazer a ideia de que a álgebra é um conjunto de regras misteriosas. Em seu lugar, constrói-se a compreensão de que se trata de uma linguagem viva, criada para superar desafios concretos de comunicação e abstração que, dominada, empodera o estudante para pensar, modelar e resolver os problemas matemáticos que encontrarão em sua escada de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de padrões e pensamento algébrico. *Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education (Projeto Padrões)*, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, p. 59–68, 2009.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base*. 4. ed. Brasília: MEC, 2018. Ministério da Educação. Disponível em: <<https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 07 set. 2025.
- DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 1994.
- ESTEVÃO, E. J. d. O.; MOURA, R. S. Dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de álgebra:: qual é o “x” da questão? *Reema - Revista de Educação Matemática da UEG*, v. 2, n. 1, p. 76–97, 2021. Disponível em: <<https://www.revista.ueg.br/index.php/reema/article/view/12416>>. Acesso em: 07 set. 2025.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2011.
- FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, FLM Publishing Association, v. 9, n. 2, p. 19–25, 1989. ISSN 02280671. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/40247950>>. Acesso em: 07 set. 2025.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. *Pro-posições*, v. 4, n. 1, p. 78–91, 1993. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/download/8644384/11808/17334>>. Acesso em: 06 ago. 2025.
- GOMES, M. L. M. *Álgebra e funções na educação básica*. Belo Horizonte, MG: CAED-UFMG, 2013.
- GORINI, K. C. M. *A álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental: erros que alunos mais cometem*. 73 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021. Disponível em: <https://sappg.ufes.br/tese_drupal/tese_16264_Disserta%E7%E3o%20K%EDssylla.pdf>. Acesso em: 07 set. 2025.
- KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 390–419.
- LIMA, G. L. d.; BIANCHINI, B. L. Reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de álgebra a partir das produções do gt04 da sbem. *Educação em Revista*, v. 38, 2022. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/0102-469824723>>. Acesso em: 07 set. 2025.
- MAIA, E. da C.; NETO, L. D. de A.; VAZ, M. A. B.; MENEZES, C. C. de O.; SOUZA, M. d. R. de. Concepções epistemológicas sobre o processo de ensino e aprendizagem da

álgebra. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 5, p. 29681–29695, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.34117/bjdv6n5-428>>. Acesso em: 07 set. 2025.

MARTINS, A. C. d. J. *Ensino–Aprendizagem–Avaliação de álgebra no sétimo ano do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: um caminho didático-pedagógico em uma escola pública estadual do Maranhão*. 148 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luiz, 2024. Disponível em: <<https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/5717>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. *Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. E-book. Recurso digital. Formato: ePub. Requisitos do sistema: Multiplataforma. ISBN 978-85-462-1755-7.

PINTO, R. A. *Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras de 7^a série em aula*. 110 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.1997.121170>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; RODRIGUES, C.; MENEZES, L. Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In: MARTINHO, M. H.; FERREIRA, R. A. T.; BOAVIDA, A. M.; MENEZES, L. (Ed.). *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM, 2014. p. 65–78. Organizado por APM. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/10400.19/2068>>. Acesso em: 26 nov. 2025.

PONTE, J. P. da. A aprendizagem da álgebra: resultados de estudos portugueses. *Educação e Matemática*, n. 144 e 145, p. 27–32, 2017. Disponível em: <<https://em.apm.pt/index.php/em/article/download/2451/2495>>. Acesso em: 26 nov. 2025.

PUIG, L. Componentes de una historia del álgebra. *El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Departament de Didáctica de la matemática*, p. 109–131, 1998. Disponível em: <<https://www.uv.es/puigl/mexico96revisado03.pdf>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

SALVATIERRA, L. Reflexão discente: uma abordagem das significações do termo. *Educação em Revista*, v. 24, p. e023014, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.36311/2236-5192.2023.v24.e023014>>. Acesso em: 26 nov. 2025.

SANTOS, S. dos P. *Erros e dificuldades de alunos em álgebra elementar: uma metanálise qualitativa de dissertações brasileiras de mestrado*. 164 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2013.917510>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

SILVA, E. N.; LIMA, A. C. de S.; OLIVEIRA, T. S. P. de. Estudo da álgebra: O desenvolvimento histórico da formalização simbólica. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 7, n. 20, p. 347–356, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.30938/bocehm.v7i20.2851>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

SILVA, J. P. da; MOREIRA, P. C. Produto educacional sobre educação algébrica escolar: pensamento algébrico, linguagem, generalização. *Boletim Online de Educação Matemática*, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06102018255>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

SOARES, J. F. de C. *Erros comuns dos estudantes em álgebra*. 83 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019. Disponível em: <<http://www.bdtd.uerj.br/handle/1/18390>>. Acesso em: 06 ago. 2025.

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

WALLE, J. A. Van de. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6. ed. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário Diagnóstico

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI - URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ALUNO: _____ 1ª SERIE “A”

Questionário Diagnóstico

Este instrumento de coleta de dados foi elaborado com o propósito de diagnosticar as competências iniciais em linguagem algébrica entre estudantes do 1º ano do Ensino Médio. A aplicação pré-intervenção visa mapear o domínio de habilidades fundamentais, incluindo a tradução entre registros de linguagem, a modelagem de situações-problema e a compreensão conceitual de elementos algébricos essenciais. As respostas obtidas junto com a observação durante a implementação constituirão a base para a avaliação da eficácia e eficiência da sequência didática.

Questão 01. “O dobro de um número somado a 6 resulta em 20”.

- (a) Qual é esse número? Use apenas texto para desenvolver a solução explicando seu raciocínio.
- (b) Agora represente esta situação com uma equação algébrica.

Questão 02.

- (a) Escreva a expressão algébrica correspondente a: “A diferença entre o triplo de um número e 7”.
- (b) Calcule o valor da expressão para o número 5.

Questão 03. Alice foi ao supermercado e comprou 3 abacaxis e 4 maçãs, gastando vinte e três reais.

- (a) Monte a equação algébrica que relaciona os valores pagos por cada fruta com o total gasto, representando por x o valor de cada abacaxi e por y o valor de cada maçã.
- (b) Suponha que cada abacaxi custou 5 reais. Quanto custou cada maçã?

Questão 04. Uma pizzaria cobra R\$45,00 por cada pizza e uma taxa de entrega fixa de R\$5,00.

- (a) Represente o valor pago em função do número p de pizzas?
- (b) Quanto será pago por 3 pizzas?
- (c) Quantas pizzas podem ser compradas com R\$ 185,00?

Questão 05. Complete a sequência: 3, 6, 9, 12, ...

- (a) Responda em forma de texto qual é a lei de formação.
- (b) Excreva uma expressão algébrica para o termo geral a_n .
- (c) Calcule o 25^o termo.

Questão 06.

- (a) O que significa o sinal “=” (igual) em uma equação matemática?
- (b) Em qual das questões anteriores temos uma letra representando um valor específico a ser descoberto (incógnita)? E em qual questão uma letra representa uma quantidade que pode variar (variável)?

APÊNDICE B – Questionário Pós-Intervenção

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI - URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ALUNO: _____ 1ª SERIE “A”

Questionário Pós-Intervenção

Este questionário pós-intervenção foi elaborado como parte integrante do ciclo avaliativo da pesquisa-ação, visando capturar as transformações no pensamento algébrico dos estudantes após a vivência da sequência didática. Foi idealizado para aferir não apenas a aquisição de habilidades procedimentais, mas principalmente a consolidação de compreensões conceituais sobre a natureza e funções da linguagem algébrica. A análise das respostas permitirá identificar em que medida os estudantes apropriaram-se desta linguagem como ferramenta eficaz para a generalização e resolução de problemas.

Questão 01. “O triplo de um número diminuído de 8 resulta em 19”.

- (a) Qual é esse número? Use apenas texto para desenvolver a solução explicando seu raciocínio.
- (b) Agore represente esta situação com uma equação algébrica.

Questão 02.

- (a) Escreva a expressão algébrica correspondente a: “A soma do quádruplo de um número com 9”.
- (b) Calcule o valor da expressão para o número 4.

Questão 03. João comprou 2 cadernos e 3 livros, gastando ao todo setenta e oito reais.

- (a) Monte a equação que relaciona os valores pagos por cada material com o total gasto.
- (b) Suponha que cada caderno custou 12 reais. Quanto custou cada livro?

Questão 04. Uma corrida em um certo aplicativo custa R\$10,00 de taxa inicial mais R\$2,00 por quilômetro rodado.

- (a) Represente o valor pago em função da distância d (em km).
- (b) Quanto custará uma corrida de 15 km?
- (c) Quantos quilômetros teve uma corrida que custou R\$ 84,00?

Questão 05. Complete a sequência: 5, 9, 13, 17, ...

- (a) Responda em forma de texto qual é a lei de formação.
- (b) Escreva uma expressão algébrica para o termo geral a_n .
- (c) Calcule o 20^o termo.

Questão 06.

- (a) Qual a diferença entre uma expressão algébrica e uma equação algébrica?
- (b) Em qual das questões anteriores temos uma letra representando uma incógnita? E em qual questão uma letra representa uma variável?

APÊNDICE C – Sequência Didática

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

A LINGUAGEM ALGÉBRICA COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

APOSTILA DO PROFESSOR

Encontrar um número
que, somado a 8,
resulte em 15

$\sigma.\Delta\Psi_{quad} 10 p 35_{solid}$
 $K\Psi = quad 5$
 $3a - 4n \cdot 10$
(x.a.q.35 R.q.)

Linguagem Retórica

Linguagem Sincopada

Linguagem Universal

SILAS MICAEL DO NASCIMENTO GOMES

Sumário

Introdução	3
Sequência Didática	5
2.1 A álgebra retórica: A era das palavras	7
2.2 A álgebra sincopada: As primeiras abreviações	13
2.3 A álgebra simbólica: A linguagem universal	19
2.4 Generalização: O Poder da Álgebra	26
Considerações Finais	33
Referências Bibliográficas	34
Apêndice - Jogo Algebrizando	37

Introdução

Esta sequência didática foi elaborada como produto educacional vinculado à dissertação de mestrado intitulada “A Linguagem algébrica como ferramenta de Resolução de Problemas: proposta de sequência didática para o Ensino Médio”, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Ela resulta de uma investigação que partiu de uma problemática recorrente no ensino da Matemática: as persistentes dificuldades dos estudantes em compreender e utilizar a linguagem algébrica de forma significativa, isto é, não apenas como um conjunto de regras para manipulação de símbolos, mas como um instrumento para generalizar padrões, modelar situações e resolver problemas.

A motivação para esta pesquisa surgiu da observação, tanto na graduação, em estágios supervisionados, quanto na atuação posterior como professor de Matemática e Física, de que a deficiência na compreensão da álgebra como linguagem constitui um “degrau” fragilizado na escada do conhecimento matemático. Essa fragilidade impede que os alunos avancem de forma satisfatória para conteúdos subsequentes, como funções, progressões e geometria analítica, além de limitar sua capacidade de raciocínio lógico e abstração. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, reforça a centralidade do pensamento algébrico, destacando a necessidade de os estudantes desenvolverem a capacidade de traduzir situações-problema da linguagem natural para a linguagem simbólica (Brasil, 2018) porém, a prática escolar frequentemente privilegia a repetição de procedimentos em detrimento de uma compreensão conceitual mais profunda (Maia et al., 2020).

Diante desse cenário, a presente sequência didática foi concebida como uma intervenção pedagógica estruturada, cujo objetivo principal é promover o uso consciente da linguagem algébrica como ferramenta de resolução de problemas. Fundamentada na metodologia de Resolução de Problemas - RP (Polya, 1995), e organizada de forma a conectar explicitamente a dimensão histórica da álgebra com sua sintaxe, a sequência visa a superar a visão da álgebra como um conteúdo meramente formal e desconectado da realidade do aluno, sendo composta por um conjunto de atividades progressivas, que buscam:

- a) Contextualizar historicamente o surgimento e a evolução dos símbolos algébricos, demonstrando que as dificuldades atuais dos alunos espelham desafios que a humanidade levou séculos para superar;

- b) Trabalhar a tradução entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, por meio de problemas que exigem a interpretação de enunciados e a construção de expressões e equações;
- c) Explorar a modelagem algébrica em situações contextualizadas, incentivando os alunos a “pensar com a álgebra” para resolver problemas; e
- d) Promover a análise de erros, entendendo-os como oportunidades valiosas de aprendizagem e discussão em sala de aula.

Ao disponibilizar este material no formato de apostila, espera-se que ele sirva como um recurso prático e acessível para outros professores de Matemática da Educação Básica. O objetivo é que ele possa ser adaptado e aplicado em diferentes realidades escolares, contribuindo para um ensino de álgebra mais significativo, que efetivamente empodere os alunos a utilizar a linguagem algébrica com compreensão, confiança e criatividade.

É importante ressaltar que esta sequência didática foi originalmente planejada e aplicada em um contexto educacional específico, servindo como um modelo ou ponto de partida, e não como um roteiro rígido e imutável. A eficácia de uma intervenção pedagógica está intrinsecamente ligada à sua adequação à realidade local pois, conforme Dowbor (2007), é fundamental que, ao longo de seus anos escolares, o estudante perceba que a escola está realmente o ajudando a compreender o mundo ao seu redor e a se tornar parte ativa da realidade em que vive.

Cada professor deve se sentir encorajado a adaptar, modificar e recriar as atividades aqui propostas, customizando problemas, substituindo enunciados e inserindo elementos do cotidiano e da cultura local de seus estudantes. Tal flexibilidade não apenas potencializa o engajamento das turmas, como também enriquece o processo de aprendizagem, tornando a linguagem algébrica verdadeiramente significativa para cada realidade singular.

Sequência Didática

Esta sequência didática não visa o ensino de procedimentos algébricos, mas o desenvolvimento do pensamento matemático através da compreensão histórica e conceitual da linguagem algébrica. Valorize cada etapa do processo e celebre as conquistas dos alunos nesta jornada que reproduz, em pequena escala, uma das maiores aventuras intelectuais da humanidade: a conquista de uma linguagem matemática moderna, sólida e eficaz.

Plano Geral

Inicialmente, esta sequência didática foi aplicada em quatro encontros de duas aulas cada, totalizando 8 aulas, seguindo o cronograma abaixo. Diante de cada realidade, o professor deve adaptar as sugestões presentes nesta apostila ao tempo disponível, podendo abreviar ou expandir os conteúdos de cada aula.

Encontro	Duração	Foco Conceitual	Habilidades BNCC	Avaliação
1º	2 aulas	Equações e incógnitas	EF08MA06	Diagnóstica e formativa
2º	2 aulas	Variáveis, notação e padronização	EF05MA11	Formativa
3º	2 aulas	Funções e modelagem	EF09MA06 EM13MAT302	Formativa
4º	2 aulas	Generalização e padrões	EF07MA15 EM13MAT302	Formativa

Nas seções a seguir são apresentadas detalhadamente as sugestões para cada encontro. Cada um é iniciado com um momento intencional de acolhida e preparação, fundamental para a transição do universo externo ao ambiente focado de aprendizagem, chamado **organização do ambiente de aprendizagem**. Este procedimento inicial que inclui o recebimento dos alunos, a realização da frequência e/ou outros procedimentos burocráticos, e o arranjo físico da sala, é mais que uma mera rotina administrativa. É a primeira ação pedagógica, que estabelece o tom da aula, promove a segurança emocional e organiza o espaço para que a interação e a

concentração possam fluir.

Ao acalmar a agitação natural do início do período e garantir que todos se sintam presentes e pertencentes, criamos as condições mínimas necessárias para que a atenção seja direcionada ao desafio intelectual que se seguirá. Um ambiente fisicamente organizado e emocionalmente acolhedor é imprescindível pois pode influenciar positivamente tanto a eficiência quanto a eficácia do processo de aprendizagem (Seabra et al., 2019).

Logo após a organização do ambiente de aprendizagem, dá-se início a outro momento estratégico, o **gancho introdutório**: uma ponte deliberada entre o cotidiano dos alunos e o universo da aula. Trata-se de uma provocação intelectual breve e instigante, que atua como um “spoiler” do tema, indicando os objetivos da aula e/ou desafiando a turma com uma situação-problema curiosa. Esse recurso tem como objetivo principal motivar e engajar, criando uma necessidade cognitiva de entender/resolver a questão proposta. Esse momento chama os alunos à questão central da aula e os convida a embarcarem juntos nessa jornada.

Em cada encontro é sugerido um problema motivador, relacionado ao que será abordado mas, caso o nível de aprendizagem da turma seja mais avançado, o problema inicial pode ser substituído por outro de maior complexidade, de modo a manter o desafio intelectual adequado porém, deve-se garantir sempre que a tarefa proposta seja acessível à maioria dos alunos. Em sua grande maioria, os problemas motivadores e propostos foram adaptados de Oliveira e Pinheiro (2009), Dante (2016) e Iezzi e Machado (2022).

Os momentos subsequentes que compõem o núcleo da aprendizagem são cuidadosamente planejados e variam conforme os objetivos específicos de cada encontro. Essas etapas são detalhadas no desenvolvimento próprio de cada encontro, com descrições das estratégias, dos recursos necessários e das intervenções sugeridas. Tal especificidade garante que o professor tenha um roteiro flexível, porém sólido, para conduzir a construção progressiva do conhecimento algébrico, adaptando-se ao ritmo e às respostas da turma, enquanto assegura uma linha coerente de progressão conceitual ao longo de toda a unidade de ensino.

Nas sugestões de registros no quadro aparece trechos entre parênteses que o professor deve decidir de copia ou apenas faz a ressalva verbalmente. Os registros dos conceitos foram adaptados dos livros citados acima, já os registros históricos, foram construídos a partir das obras de Boyer (1996), Eves (2011) e Roque e Carvalho (2012).

As sugestões para os quatro encontros estão detalhadas nas seções a seguir.

2.1 A álgebra retórica: A era das palavras

1º Encontro

Objetivos de aprendizagem

- Compreender os conceitos de igualdade, expressão e equação algébricas;
- Diferenciar dados e incógnitas em problemas;
- Desenvolver raciocínio lógico sem apoio de símbolos;
- Vivenciar as limitações da álgebra retórica.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, pincel, papel para anotações;

Organização da sala: Duplas heterogêneas;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
4. Apresentação do contexto histórico (15 min);
5. Trabalho em duplas e intervenções (20 min);
6. Socialização das soluções e intervenções (30 min);
7. Sistematização dos conceitos (18 min).

Após a organização do ambiente de aprendizagem e feito o gancho introdutório, registre no quadro, leia e discuta brevemente sobre o seguinte problema motivador, que foi adaptado de uma questão do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará - SISEDUC (Ceará, 2025):

Vinícius pergunta ao seu professor de matemática por sua nota, o qual responde: “O dobro de sua nota mais nove resulta em vinte e três”. Qual a nota de Vinícius?

Em seguida, apresente brevemente o contexto histórico da evolução da linguagem algébrica focando na dificuldade encontrada na resolução de problemas como esse (e até mesmo outros bem mais complexos) que inicialmente era feita apenas através da linguagem algébrica retórica. Sugestão de registro no quadro:

Evolução da linguagem algébrica:

Linguagem retórica \rightarrow Linguagem sincopada \rightarrow Linguagem simbólica

Linguagem retórica: Representação de problemas e soluções utilizando apenas palavras.

- Principais representantes: Egípcios, babilônios e Al-Khwarizmi (matemático árabe do século IX).
- Para resolver um problema, deviam:
 - Entender o enigma (interpretar);
 - Criar os passos mentalmente (pensar);
 - Escrever a solução como uma narração (explicar).

O que obrigava uma dupla habilidade: em matemática e em linguística.

- Principais dificuldades:
 - Problemas longos causavam confusão;
 - Dificuldade em generalizar pois cada problema era único.

É recomendável que os alunos resolvam o problema proposto em duplas, utilizando exclusivamente a linguagem natural, ou seja, descrevendo com palavras todo o raciocínio e os passos realizados, sem recorrer a notações ou símbolos matemáticos. Essa abordagem reforça a compreensão conceitual e a capacidade de argumentação. Distribua os papéis as duplas orientando a realização da atividade.

Dificuldades esperadas

- Dificuldade em identificar a operação matemática em “o dobro de sua nota”;
- Dificuldade em entender o “resulta em”;
- Dificuldade em organizar o pensamento apenas com palavras;
- Tentativa de usar símbolos, mesmo com a proibição, ou o método “tentativa e erro” para solucionar o problema.

Intervenções sugeridas

Durante a realização das atividades em duplas e, posteriormente, no momento de socialização das soluções, o professor deve implementar intervenções pedagógicas fundamentadas na metodologia de Resolução de Problemas - RP. Essa

mediação tem como objetivos guiar a interpretação do enunciado, estimular a formulação de estratégias diversas, validar os diferentes raciocínios apresentados e conduzir a turma, de forma reflexiva, para a construção da solução em linguagem natural. Dessa maneira, cada etapa da RP é acompanhada de suportes específicos que garantem que a construção do conhecimento algébrico seja acessível, significativa e progressiva para todos os alunos.

Para garantir a compreensão do problema, fase um da RP, é fundamental que os alunos dominem o vocabulário matemático presente nos enunciados. Caso o professor identifique dificuldades com expressões como “dobro”, “triplo”, “diferença”, “produto”, “quociente” ou equivalentes, deve-se explicitar o significado desses termos, preferencialmente com exemplos numéricos simples. Se necessário, recomenda-se fazer um registro claro e objetivo no quadro, organizando esses termos e suas respectivas operações matemáticas (por exemplo: “dobro de um número \rightarrow duas vezes o número”, “diferença entre dois números \rightarrow subtração entre tais números”), para que os alunos possam consultar durante as atividades.

Nas fases de elaboração e execução do plano de resolução, o professor deve atuar como mediador, conduzindo os alunos de forma reflexiva e estruturada. Para isso, recomenda-se:

- Observação ativa: Circular pela sala, acompanhando as estratégias utilizadas pelas duplas ou grupos, identificando tanto avanços quanto possíveis entraves conceituais;
- Questionamento guiado: Promover a interpretação do problema com perguntas direcionadas, como:
 - O problema fala sobre o quê? O que é dado e o que é desconhecido (incógnita)?
 - O que significa “dobro de sua nota” e “resulta em”?
 - Sem usar letras, como descreveríamos com palavras o passo a passo?
 - Para descobrir a nota, por onde podemos começar a “desfazer” as contas?
- Valorização de estratégias diversas: Incentivar e validar as diferentes formas de raciocínio apresentadas pelos alunos, reforçando que não há apenas um caminho para chegar à solução.

Na fase final de retrospecto e verificação, o professor deve conduzir uma avaliação coletiva das soluções apresentadas, com o objetivo de consolidar o raciocínio desenvolvido.

- Sistematização das respostas: Registrar no quadro algumas das diferentes estratégias em linguagem natural utilizadas pelos alunos, de modo a tornar explícita a linha de pensamento adotada. Essa organização visual não apenas valida os percursos diversos, mas também prepara o terreno para a transição à representação simbólica.

A intervenção não tem como objetivo forçar os alunos a buscar a solução por um caminho ou através da estratégia “corretos”, seu intuito é despertar nos alunos a compreensão do problema e diferentes formas de “desfazer” as operações da forma mais lúcida para cada um, bem como deixar claro a dificuldade da solução através da álgebra retórica. Assim, a necessidade por uma linguagem mais enxuta e prática para representar os problemas e suas soluções é sentida naturalmente.

Resposta esperada

Algo do tipo:

1. A nota de Vinícius é um número que não sabemos;
2. O dobro desse número, somado com nove, dá vinte e três;
3. Então, o dobro da nota, sozinho, é vinte e três menos nove, ou seja, quatorze;
4. Se o dobro da nota é quatorze, a nota é a metade de quatorze, isto é, sete;
5. A nota de Vinícius é sete.

Ampliando a prática

Ao final do ciclo da RP com o problema motivador inicial, recomenda-se estender a prática com a aplicação de novos exercícios. Esses problemas podem ser criados pelo professor (eventualmente com a participação dos alunos, para reforçar a autoria e o engajamento) ou selecionados dentre sugestões previamente elaboradas, como as apresentadas a seguir:

- Carlos foi ao mercado com uma certa quantia. Gastou metade do dinheiro e ainda ficou com R\$ 15,00. Quanto ele tinha inicialmente?
- Maria perguntou à sua mãe: – Mamãe, quantos anos você tem?
Sua mãe respondeu: – Se você multiplicar minha idade por três e subtrair doze, o resultado é cinquenta e quatro!
Quantos anos tem a mãe de Maria?
- O lado maior de um retângulo é o dobro do menor. Sendo a área do retângulo $50 m^2$, determine suas dimensões.
- O lado de um quadrado aumentado em $3 m$ gera outro quadrado de área 100

m^2 . Qual era a medida do lado original?

Avaliação

Nesse primeiro encontro deve ser feito uma avaliação diagnóstica observando, durante a aula, quais os conhecimentos prévios que os alunos dispõem e como utilizá-los para atingir o objetivo geral da sequência. Isso sem prejuízo da avaliação da aprendizagem, que deve ser construída durante todo o processo, observando se os alunos:

- Entendem e identificam claramente as condições do problema;
- Desenvolvem uma estratégia sistemática;
- Comunicam o raciocínio de forma clara;
- Percebem as limitações do método verbal.

Sistematização de conceitos

Para garantir uma compreensão mais profunda e a retenção dos conceitos trabalhados, é fundamental promover uma sistematização clara e estruturada. Isso se concretiza por meio do registro organizado no quadro, no qual o professor resume as ideias-chave, os termos matemáticos e as representações discutidas durante a resolução. Esse registro serve como um mapa visual do percurso de aprendizagem.

A partir dele, conduz-se uma discussão coletiva e reflexiva, na qual os alunos são convidados a relacionar as novas informações com seus conhecimentos prévios, estabelecendo conexões e esclarecendo dúvidas remanescentes. Dessa forma, a sistematização deixa de ser uma simples transcrição e transforma-se em um momento ativo de construção e apropriação do saber, respeitando o ponto de partida intelectual de cada estudante e consolidando a base necessária para os próximos desafios.

Sugestão de registros adicionais no quadro:

Igualdade: Sinal (=) que representa equilíbrio entre o que vem antes e o que vem depois dele (pode-se fazer analogia a uma balança de pratos).

Expressão algébrica: Frase matemática “incompleta” que combina números, letras e operações matemática.

Exemplo: $3x - 7$ (a diferença entre o triplo de um número e sete).

Equação algébrica: Frase matemática “completa” que estabelece uma igualdade entre duas expressões. Contém sempre o sinal de igualdade.

Exemplo: $3x - 7 = 2x + 4$ (o triplo de um número menos sete é igual ao dobro desse mesmo número mais quatro).

Incógnita: Valor desconhecido que queremos encontrar em uma equação algébrica.

Exemplo: O x em $3x - 7 = 2x + 4$.

Dados: Informações conhecidas do problema a ser resolvido.

Exemplo: **O triplo de** e **54** em “O triplo de minha idade é 54” (**minha idade**, nesse caso, é uma incógnita).

Para refletir: Por que foi difícil resolver só com palavras?

2.2 A álgebra sincopada: As primeiras abreviações

2º Encontro

Objetivos de aprendizagem

- Compreender a necessidade de abreviações na matemática;
- Diferenciar incógnita de variável;
- Desenvolver sistemas de notação pessoal;
- Valorizar a padronização da linguagem matemática.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, pincel, papel para criação de símbolos ou materiais manipuláveis;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
5. Apresentação do contexto histórico (15 min);
6. Criação de notação pessoal, e intervenções (20 min);
7. Socialização e comparação, e intervenções (25 min);
8. Sistematização dos conceitos (18 min).

Após a organização do ambiente de aprendizagem e a apresentação do gancho introdutório, recomenda-se realizar um breve resgate dos conceitos trabalhados na aula anterior, relacionando-os diretamente ao que foi apresentado no gancho introdutório. Esse momento de retomada tem como objetivo ativar o conhecimento prévio dos alunos, reforçar a continuidade do aprendizado e promover uma reflexão comparativa: como as estratégias de representação que serão construídas nessa aula dialoga com as usadas na fase retórica?

A intenção é conduzir a turma a perceber, de forma intuitiva, que a resolução de problemas pode tornar-se mais ágil e clara quando empregamos formas de

representação mais eficientes, preparando o terreno naturalmente para a introdução da ideia de abreviação e simbolização próprias da álgebra sincopada. Registre no quadro o seguinte problema motivador ou outro mais adequado ao nível de aprendizagem da turma:

Considere um terreno retangular em que a medida do lado maior corresponde ao triplo da medida do lado menor. Determine quais são as medidas de cada um de seus lados, sabendo que a área total desse terreno é de $300 m^2$.

Após o registro, leitura e breve discussão sobre o problema motivador, apresente brevemente o contexto histórico da linguagem algébrica sincopada relacionando-o, sempre que possível, ao problema motivador. Sugestão de registro no quadro:

Linguagem sincopada: Representação de problemas e soluções utilizando algumas abreviações, mas ainda sem um padrão dominante.

- Principal representante: Diofanto de Alexandria (matemático grego do século III d. C.);
- Algumas abreviações especiais:
 - ς (sigma final) para representar uma incógnita;
 - Δ^Υ (primeira letra de dynamis) para representar o quadrado da incógnita;
 - K^Υ (primeira letra de kybos) para representar o cubo da incógnita.
- Principais dificuldades:
 - Cada matemático utilizava seu próprio código (falta de padronização);
 - Dificuldade na comunicação e aprendizado.

Após realizar o registro explicativo no quadro, oriente os alunos a resolverem o problema motivador da aula utilizando uma abordagem sincopada, preferencialmente sem a utilização dos símbolos algébricos modernos.

Nesse momento, incentive-os a substituir os termos extensos por abreviações ou símbolos simples, tentando seguir o modelo histórico de Diofanto, mas com uma linguagem acessível. Essa prática permite que vivenciem, de forma concreta, a transição da álgebra retórica para uma representação mais econômica e estruturada.

Dificuldades esperadas

- Confusão entre símbolo e desenho ilustrativo;
- Dificuldade de abstração e/ou bloqueio criativo;
- Escolha de símbolos muito complexos ou pouco práticos;
- Dificuldade em entender símbolos criados por outros;
- Frustração ao comparar símbolos.

Intervenções sugeridas

As atividades com linguagem sincopada são intencionalmente desafiadoras, pois replicam o problema histórico da falta de padronização. O papel do professor é mediar essa experiência, transformando as dificuldades em oportunidades de aprendizado.

Para garantir que os alunos compreendam integralmente a situação proposta, o professor deve, em um primeiro momento, assegurar o domínio dos conceitos envolvidos na contextualização do problema. Isso pode incluir, por exemplo, revisar a definição e as características de um terreno “retangular”, bem como a fórmula para o cálculo de sua área em função das medidas dos lados. Esta etapa preparatória é essencial para que todos tenham clareza e consigam cumprir a fase um da RP.

Uma vez consolidada a compreensão inicial, o professor deve atuar para favorecer a elaboração e a execução de um plano de resolução. A utilização de recursos manipuláveis (como o material dourado ou blocos lógicos) durante essas fases para a representação de quantidades e operações, quando disponíveis, é altamente recomendável para favorecer a compreensão dos alunos.

A manipulação concreta desses materiais auxilia na visualização de relações quantitativas e na construção de significados para as operações e conceitos abstratos, tornando a aprendizagem mais acessível e significativa. Além disso, torna o aprendizado de Matemática mais compreensível, pois permite ao aluno visualizar e manipular conceitos abstratos em situações reais (Silva et al., 2016).

A seguir, são sugeridas algumas intervenções estruturadas de modo a guiar os alunos na tradução do problema para uma representação matemática, incentivando o uso de uma linguagem intermediária (notação sincopada própria) e a organização do raciocínio. Essas estratégias são planejadas em consonância com o nível e o tipo de problemas propostos nesta aula.

- Observação ativa: Circular pela sala durante a criação dos símbolos. Seu objetivo é identificar como cada aluno está interpretando a tarefa.

- Estão desenhando objetos (ex.: uma maçã para “quantidade de maçãs”) ou criando signos abstratos (ex.: um Δ para “número qualquer”)?
- Os símbolos são simples e rápidos de reproduzir, ou são complexos dificultando o uso?
- Há indícios de bloqueio (“não sei como fazer”) ou de frustração (“o do colega é melhor”)?
- Questionamento guiado: Usar perguntas abertas para direcionar o raciocínio sem dar a resposta. Adapte-as à dificuldade observada.
 - Para confusão entre símbolo e desenho: Se o problema fosse sobre laranjas em vez de maçãs, você usaria o mesmo símbolo/desenho? Como poderíamos criar um símbolo que serve para qualquer fruta (ou para qualquer coisa)?
 - O que representar: Esse desenho representa o objeto ou a quantidade dele?
 - Para símbolos complexos ou pouco práticos: Imagine que você tenha que escrever esse símbolo dez vezes seguidas na solução de um problema. Ele é prático para isso? Como poderíamos simplificar esse símbolo mantendo a ideia?
- Valorização das diferentes estratégias: Criar um clima onde todas as tentativas são válidas como parte do processo de investigação destacando a diversidade e legitimando a criação do símbolo menos eficiente como parte do aprendizado (a história da matemática é cheia de símbolos que foram criados, usados e depois abandonados porque não eram práticos).

Na última fase, o professor deve conduzir uma socialização de algumas das soluções com as abreviações criadas, enfatizando que não existe símbolo ‘certo’ ou ‘errado’ aqui. Existem símbolos mais ou menos eficientes para comunicar uma ideia que podem ser melhorados.

- Sistematização das respostas: Este é o momento crucial para fechar a primeira atividade com uma sistematização das respostas e fazer a ponte para os problemas sugeridos a seguir. Registrar no quadro alguns dos símbolos criados pelos alunos para a mesma ideia promovendo uma discussão comparativa. Conduzir à conclusão chave de que se cada um de nós usar um símbolo diferente certamente não seremos compreendidos.

A intervenção não deve buscar a “correção” dos símbolos criados, mas sim explorar as consequências dessa criação. O objetivo final é que o aluno, por

experiência própria, chegue à conclusão de que uma linguagem padronizada é útil e necessária. Dessa forma, a notação algébrica deixa de ser uma imposição arbitrária e se torna uma ferramenta cujo valor eles próprios descobriram.

Resposta esperada

Uma resposta na forma sincopada deve abreviar os objetos e/ou as operações, mas ainda manter a estrutura narrativa do raciocínio, de preferência sem o uso de símbolos algébricos modernos. A resposta sincopada não precisa usar letras, mas pode usar siglas ou símbolos simples criados pelo aluno. O essencial é que o raciocínio seja organizado e as operações estejam explicitadas, mostrando a transição entre a frase do problema e a equação matemática.

Ampliando a prática

Ao concluir a resolução do problema motivador e, conseqüentemente, o ciclo da RP, é recomendável dar continuidade ao aprendizado por meio da prática com outras situações-problema. Tais exercícios adicionais podem ser formulados pelo educador ou escolhidos dentre os exemplos que serão apresentados em seguida.

Para garantir a compreensão integral do problema proposto, o professor deve, inicialmente, verificar se os alunos dominam os conceitos e relações matemáticas essenciais envolvidos na situação. Caso identifique lacunas ou necessidade de revisão, é fundamental retomar tais elementos (como a definição de figuras geométricas, fórmulas de área ou perímetro) de forma clara. Essa etapa de nivelamento conceitual assegura que todos tenham as ferramentas necessárias para engajar-se na resolução, sem que a dificuldade esteja na interpretação dos conceitos, mas sim na aplicação e no raciocínio algébrico.

- Um pacote com maçãs pesa 5 *kg*. A embalagem pesa 200 *g*, e o resto são maçãs, cada uma pesando 120 *g*. Quantas maçãs há no pacote?
- Um retângulo tem comprimento igual ao dobro da largura. Se seu perímetro é 48 *m*, quais são suas dimensões?
- A idade de um pai é o quádruplo da idade do filho. Se a soma das idades é 50 anos, quantos anos tem cada um?
- Num estacionamento há carros e motos, totalizando 30 veículos e 100 rodas. Quantos são carros e quantos são motos? (Considere carro com 4 rodas e moto com 2 rodas).
- Dois números inteiros consecutivos somam 73. Quais são esses números?

Avaliação

A avaliação da aprendizagem, construída durante toda a aula, deve observar se os alunos:

- Compreendem o problema;
- Traduzem corretamente as relações verbais para relações matemáticas e usam conscientemente as abreviações;
- Fazem uma sequência lógica de passos, mostrando as substituições e as operações;
- Percebem as vantagens sobre a linguagem retórica;
- Percebem as limitações da linguagem sincopada.

Sistematização de conceitos

Para facilitar o alcance dos objetivos de aprendizagem e oferecer aos alunos um material de consulta claro e acessível, recomenda-se que o professor sistematize, em momento oportuno durante a aula, os conceitos a seguir por meio de um registro organizado no quadro. Este registro pode, conforme a necessidade, incluir outros conceitos que se demonstrarem relevantes ao longo da explanação ou da resolução de problemas.

Incógnita: Valor específico desconhecido que queremos encontrar.

Exemplo: O x em $2x + 5 = 13$.

Variável: Símbolo que pode representar diferentes valores.

Exemplo: O x e o y em $4x + 2y = 100$ (quando introduzimos outra condição, como no problema sugerido: $x + y = 30$, ou definimos um valor para x ou y , eles deixam de ser variáveis).

Coefficiente: Número que multiplica uma variável ou incógnita em um termo algébrico.

Exemplo: O 2 em $2x + 5 = 13$.

Para refletir: Quais vantagens as abreviações trazem em relação à álgebra retórica? Quais limitações ainda persistem?

2.3 A álgebra simbólica: A linguagem universal

3º Encontro

Objetivos de Aprendizagem

- Conhecer e utilizar a notação algébrica moderna;
- Diferenciar equação e função;
- Compreender o conceito de variável dependente e independente;
- Reconhecer as vantagens e desvantagens da linguagem simbólica.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, pincel, jogo que relacione diferentes representações algébricas;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
5. Apresentação do contexto histórico (15 min);
6. Análise coletiva do problema motivador, e intervenções (15 min);
7. Sistematização dos conceitos (18 min);
8. Resolução de novos problemas, e intervenções (30 min).

Após a preparação do ambiente e a apresentação do gancho inicial, é pertinente retomar, de forma sucinta, os principais conceitos abordados no encontro anterior, lembrando tanto os benefícios quanto as limitações do uso da linguagem sincopada. No próprio momento do gancho, o professor pode sinalizar, de maneira intencional, as vantagens da notação algébrica contemporânea em comparação com as fases anteriores (retórica e sincopada).

Em seguida, realize o registro no quadro do seguinte problema motivador:

Uma corrida de táxi custa R\$ 8,00 fixos mais R\$ 2,50 por quilômetro rodado.

- a) Qual a função que representa o preço da corrida por km rodado?
- b) Quanto custa uma corrida de 10 km?
- c) Quantos km foram percorridos em uma corrida que custou R\$ 58,00?

Após o registro, a leitura e uma breve discussão coletiva sobre o problema motivador, é importante situá-lo dentro de uma linha do tempo histórica. Apresente de maneira objetiva seguindo, por exemplo, as indicações abaixo, a trajetória de evolução da linguagem algébrica simbólica.

Destaque os elementos centrais que impulsionaram essa evolução, tais como a busca crescente por generalização, a exigência de uma comunicação mais precisa entre estudiosos e a superação progressiva das restrições próprias das notações retórica e sincopada. Esses fatores foram decisivos para que a linguagem se refinasse até chegar ao sistema unificado e eficiente que adotamos hoje.

É importante ressaltar que a linguagem simbólica atual não se limita a expressar problemas e soluções pontuais. Na verdade, seu principal valor está em representar relações gerais, padrões, leis e estruturas matemáticas, constituindo-se como a base que permite à matemática dialogar com diversas áreas do conhecimento.

Linguagem simbólica: Sistema de representação matemática que utiliza símbolos padronizados, universais e eficientes.

- Principal representante:
 - François Viète (matemático francês do século XVI): propôs usar consoantes para representar quantidades conhecidas (constantes) e vogais para quantidades desconhecidas (variáveis).
- Outros símbolos introduzidos:
 - ∞ para o infinito, por Wallis (1616–1703);
 - dx no cálculo diferencial, por Leibniz (1646–1716);
 - x, y, z para incógnitas e a, b, c para constantes, por René Descartes (1596–1650).
- Principais dificuldades:
 - Perda do significado;
 - Abstração elevada;
 - Ocultação da jornada histórica.

Após o registro acima e as devidas explicações, o professor deve orientar a resolução do problema motivador relebrando, se necessário, os conceitos essenciais e a forma de representação de uma função. Uma sugestão de registro no quadro da sistematização desses conceitos está no final dessa seção.

Dificuldades esperadas

- Dificuldade na tradução do enunciado para a notação de função;
- Dificuldade em distinguir entre o custo fixo e o custo variável;
- Incompreensão da diferença entre calcular o valor do preço de uma corrida, dado a quantidade de quilômetros, e determinar a quantidade de quilômetros a partir do preço da corrida;
- Dúvidas nas resoluções e interpretações das respostas de cada item;
- Confusão conceitual entre a função e a equação obtida no item (c).

Intervenções sugeridas

A transição para a linguagem simbólica, embora mais eficiente, também apresenta desafios cognitivos, como a abstração de relações e a manipulação formal de símbolos. O papel do professor é mediar essa transição, garantindo que a notação não se torne um obstáculo, mas sim uma ferramenta poderosa no registro do pensamento matemático e dos passos necessários para a solução.

Para isso, é fundamental assegurar a compreensão dos conceitos contextuais do problema, podendo ser necessário revisitar alguns deles. Esta etapa é essencial para que os alunos consigam cumprir a primeira fase da RP: a compreensão da situação.

Uma vez consolidado o entendimento do contexto, o professor deve atuar para favorecer o cumprimento das próximas fases da RP: a elaboração e a execução de um plano de resolução. A conexão entre a situação concreta (a corrida de táxi) e sua representação abstrata (a função) pode ser facilitada por representações visuais como, por exemplo, o uso de uma tabela simples no quadro relacionando quilômetros e preço, o que ajuda a visualizar o padrão antes de pular para a formalização simbólica. Essa abordagem auxilia na construção do significado por trás das letras e das operações, tornando a abstração mais acessível.

A seguir, são sugeridas intervenções estruturadas para guiar os alunos na modelagem do problema e na manipulação da linguagem simbólica, planejadas em consonância com os objetivos desta aula.

- Observação ativa e diagnóstico inicial: Circular pela sala durante a tentativa de resolução. O objetivo é identificar onde reside as principais dificuldades.
 - Os alunos identificam corretamente o custo fixo (bandeirada) e o custo variável (por km)?
 - Tentam organizar as informações em uma tabela ou pulam diretamente

para uma tentativa de formalização simbólica?

- Há confusão na hora de montar a expressão algébrica (ex.: escrevem $8 + 2,5$ sem a variável)?
 - Na parte (c), tentam resolver a equação por tentativa e erro ou buscam um método sistemático?
- Questionamento guiado: Utilizar perguntas estratégicas para conduzir o raciocínio sem fornecer a resposta pronta.
 - Para a construção da função (item a): Se o táxi andar 1 km, quanto se paga? E se andar 2 km? E 3 km? Podemos perceber um padrão? Se chamarmos o número de quilômetros de x , como escrevemos a expressão para o preço total?
 - Para a distinção conceitual entre função e equação: No item (b), qual é o dado? A função serve para calcular o quê? No item (c), qual é o dado? A função vira uma ferramenta para descobrir o quê?
 - Valorização das diferentes estratégias: Criar um ambiente onde diferentes caminhos para a solução são reconhecidos e discutidos. Validar a estratégia de tentativa e erro como um ponto de partida legítimo e comparar essa estratégia com a solução algébrica.

Na fase final da RP, o professor deve ir além da simples verificação e resposta numérica. Este é um momento crucial para consolidar a aprendizagem.

- Sistematização das respostas: Registrar no quadro a função e as soluções dos itens promovendo uma discussão que conduza à conclusão chave: a grande vantagem de escrever a situação como uma função é que essa mesma “fórmula” resolve qualquer pergunta sobre essa corrida de táxi, seja qual for a distância ou o preço (esse é o poder da generalização da linguagem simbólica).

A intervenção deve focar em fazer os alunos perceberem a utilidade e importância da notação simbólica. O objetivo não é apenas que resolvam o problema, mas que compreendam como a álgebra transforma uma descrição verbal em uma ferramenta poderosa e geral para resolver uma classe inteira de problemas semelhantes. Dessa forma, a abstração deixa de ser um fim em si mesma e se torna um meio eficaz para pensar e resolver.

Resposta esperada

No item (a) é esperado que o aluno consiga perceber qual dos valores representa um custo fixo (R\$ 8,00) e qual representa um custo variável (R\$ 2,50 por

quilômetro). Também deve reconhecer qual a variável independente (quantidade de quilômetros, representada por x , k ou q , por exemplo) e qual a variável dependente (preço da corrida, representada por y , $f(x)$ ou P , por exemplo), resultando em algo do tipo:

$$P(x) = 2,5x + 8.$$

No item (b) é esperado que o aluno associe a quantidade de quilômetros ($10km$) a letra que o representa na função, faça a substituição e os cálculos necessários encontrando o preço de R\$ 33,00 para a corrida de $10km$.

Já no item (c), é esperado que o aluno associe o preço da corrida (R\$ 58,00) a variável independente e faça a substituição obtendo a equação abaixo (ou equivalente)

$$2,5x + 8 = 58,$$

que, solucionada, resulta na quantidade de $20km$ percorridos.

Ampliando a prática

Ao final do ciclo da RP com o problema motivador o professor deve utilizar o jogo *Algebrizando*, contido em anexo nessa apostila, para praticar a transição de setenças algébricas da linguagem natural para a simbólica. Sua utilização é importante pois o uso de jogos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem contribui para aulas mais dinâmicas, favorecendo a obtenção de melhores resultados por parte dos alunos (Bianchini, Gerhardt e Dullius, 2011).

Se faz necessário também a ampliação da prática com novos problemas que tenham o foco na tradução de uma situação descrita em palavras para uma equação ou função, que podem ser criados pelo próprio professor (com ou sem ajuda dos alunos), retirado de material didático ou dentre os sugeridos abaixo. A criação de um problema em sala de aula pode melhorar a participação do aluno por se sentir representado no processo e/ou perceber traços de seu cotidiano na contextualização.

É imprescindível que os alunos entendam e saibam como representar as informações contidas nos enunciados dos problemas, pode ser necessário, por exemplo, apresentar formas de escrever números consecutivos. O importante é que os problemas sejam acessíveis à turma promovendo a maior interação possível.

- A soma de três números inteiros consecutivos é 57. Qual é o maior desses números?
- Carlos comprou um livro e uma caneta. O livro custou R\$ 18,00 a mais que a caneta. Se ele gastou um total de R\$ 32,00, qual foi o preço da caneta?
- A conta de luz de uma casa tem uma taxa fixa de R\$ 30,00 mais R\$ 0,75 por

quilowatt-hora (kWh) consumido.

- a) Escreva a função $C(x)$ que dá o custo total para x kWh consumidos.
 - b) Qual o valor da conta para um consumo de 120 kWh?
 - c) Se uma conta veio no valor de R\$ 142,50, qual foi o consumo em kWh?
- Um serviço de streaming cobra uma taxa de adesão de R\$ 10,00 e depois uma mensalidade de R\$ 25,00.
 - a) Escreva a função $G(m)$ que dá o gasto total após m meses de assinatura.
 - b) Quanto alguém gastará após 6 meses?
 - c) Após quantos meses o gasto total será R\$ 185,00?
 - Uma locadora cobra R\$ 80,00 por dia de aluguel de um carro, mais uma taxa de R\$ 0,15 por quilômetro rodado.
 - a) Escreva a função que representa o total a pagar por d dias e k quilômetros.
 - b) Quanto se paga pelo uso do carro por 2 dias e 100 quilômetros rodados?

Avaliação

A avaliação da aprendizagem, construída de forma contínua durante a aula, deve observar se os alunos:

- Compreendem o contexto do problema e identificam corretamente as grandezas fixas e variáveis;
- Traduzem a situação descrita em linguagem natural para a notação simbólica apropriada;
- Diferenciam claramente o uso de uma função para expressar uma relação geral do uso de uma equação para resolver um caso específico;
- Interpretam os resultados numéricos no contexto original do problema, atribuindo significado às respostas;
- Reconhecem, através da comparação com as fases históricas anteriores, as vantagens da linguagem simbólica.

Sistematização de conceitos

Ao longo da aula, em um momento estrategicamente escolhido, o professor deve realizar o registro no quadro dos conceitos essenciais para a compreensão e resolução dos problemas propostos, bem como para a assimilação dos conteúdos trabalhados. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de sistematização para esse registro, a qual deve ser adaptada conforme as necessidades específicas identificadas na turma.

Equação: Sentença matemática que contém o sinal de igualdade (=) e pelo menos uma incógnita (geralmente representada por uma letra).

Exemplo: $x + 7 = 34$ (é como se essa equação perguntasse: qual valor para x torna essa igualdade verdadeira?).

Função: Regra que relaciona duas grandezas de modo que, para cada valor de entrada (variável independente) existe um único valor de saída (variável dependente).

Exemplo: $f(x) = 5x + 1$ (os valores atribuídos a x são os de entrada enquanto os resultados, $f(x)$, são os de saída).

Variável independente: É a grandeza que varia livremente na situação.

Em uma função, é o valor de entrada, geralmente representado por x .

Exemplo: No problema do táxi, temos a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$, onde d é a variável independente.

Variável dependente: É a grandeza que depende da variável independente. Em uma função, é o valor de saída, geralmente representado por y ou pela notação $f(x)$.

Exemplo: No problema do táxi, temos a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$, onde $P(d)$ é a variável dependente (perceba que ela tem uma notação especial não sendo representada por apenas uma letra).

Para refletir: Apenas a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$ é suficiente para entendermos o que ela representa? O que causa o distanciamento da Matemática do nosso cotidiano?

2.4 Generalização: O Poder da Álgebra

4º Encontro

Objetivos de aprendizagem

- Identificar padrões em sequências numéricas;
- Generalizar relações através de fórmulas;
- Compreender o conceito de termo geral;
- Aplicar generalização em contextos variados.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;

Materiais: Quadro, apagador, pincel e fichas numeradas ou material manipulável para representar os dias;

Organização da sala: Grupos heterogêneos;

Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 min);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (5 min);
5. Apresentação de conceitos essenciais (10 min);
6. Análise coletiva do problema motivador, e intervenções (20 min);
7. Resolução de novos problemas, e intervenções (30 min);
8. Fechamento (15 minutos).

Após organizar o ambiente de aprendizagem, durante o gancho introdutório, pode-se fazer uma pergunta conectada com o problema motivador, como, por exemplo, “Quantos de vocês já precisaram tomar um remédio por vários dias seguidos ou em intervalos regulares? Como vocês organizam essa rotina?”, e explicar a importância de se identificar padrões em sequências numéricas e de generalizá-los por meio de uma lei ou fórmula, mostrando que esses padrões e sequências estão presentes em nosso dia a dia.

Já na retomada da aula anterior, pode-se comparar os conceitos de

sequência e função, esclarecendo que, enquanto uma função pode ter entradas variadas, os termos de uma sequência são sempre indexados por números naturais.

Levando em conta que no primeiro ano do Ensino Médio os alunos ainda não têm familiaridade formal com sequências, as atividades sugeridas concentram-se principalmente em Progressões Aritméticas - PA, um tipo de sequência que surge naturalmente em contextos do cotidiano. Essa escolha permite trabalhar o raciocínio sequencial e a generalização algébrica de modo intuitivo, sem exigir a formalização prévia. Segue o problema motivador proposto:

Um paciente recebeu uma prescrição médica para tomar um medicamento de uso contínuo. A embalagem contém 12 comprimidos e a orientação é tomar 1 comprimido a cada 7 dias. Considerando que o primeiro comprimido foi tomado no dia 1, responda:

- Escreva os primeiros 4 termos da sequência dos dias em que o paciente deve tomar os comprimidos.
- Qual é a lei de formação (fórmula do termo geral) dessa sequência?
- Em que dia será tomado o décimo comprimido?
- Quantos dias serão necessários para terminar toda a cartela de 12 comprimidos?

Apresentação de conceitos essenciais

Após registrar, ler e discutir brevemente o problema motivador, é importante sistematizar no quadro os conceitos essenciais para sua resolução. A seguir, são sugeridos alguns registros conceituais, que podem ser complementados conforme as necessidades observadas na turma ou as demandas específicas do problema apresentado.

Sequência numérica: Lista ordenada de números que seguem uma regra.
Exemplo: 7, 12, 17, 22, ... (sequência em que o primeiro termos é 7 e sempre encontramos o termo seguinte somando 5).

Termo geral: Fórmula que permite calcular qualquer termo da sequência a partir de sua posição.

Exemplo: $a_n = 5n + 2$ para a sequência 7, 12, 17, 22, ...

onde o n indica a posição e o a_n é o termo da posição n (na primeira posição temos $a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$, na segunda, $a_2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$, e assim sucessivamente).

Generalização: Processo de extrair uma regra ou padrão que se aplica a todos os casos de um mesmo tipo.

Após a apresentação dos conceitos essenciais, os alunos, organizados em grupos, devem receber a orientação para resolver o problema motivador. Para facilitar a visualização e a manipulação concreta da sequência, sugere-se o uso de fichas numeradas, que representarão os dias. Esse recurso auxilia na compreensão do padrão e na organização do raciocínio, especialmente para os estudantes que se beneficiam de uma abordagem mais tangível antes de partir para a abstração algébrica.

Dificuldades esperadas

- Dificuldade em identificar a regularidade e construir a sequência;
- Confusão entre a posição do termo e seu valor;
- Dificuldade em expressar a relação de forma algébrica;
- Resistência em abandonar a contagem manual para adotar uma fórmula geral.

Intervenções sugeridas

Durante a resolução do problema em grupos, o professor deve observar ativamente se os alunos conseguem compreender a situação proposta e extrair do enunciado as informações essenciais, primeira etapa da RP. Caso identifique dificuldades, o professor deve intervir com questionamentos ou explicações pontuais para garantir que todos tenham clareza sobre o que está sendo perguntado e quais dados estão disponíveis.

Nas etapas de elaboração e execução do plano de resolução, é importante conferir autonomia aos estudantes, permitindo que explorem diferentes estratégias e incentivando a utilização das fichas para uma melhor visualização porém, o professor deve permanecer atento e intervir sempre que necessário, por meio de:

- Observação ativa: Circular pela sala durante a resolução, identificando se os alunos percebem a regularidade e conseguem representar os termos da sequência.
- Questionamento guiado: Promover o entendimento do problema e auxiliar na elaboração e execução do plano com questionamentos direcionados.
 - Quais fichas devemos destacar? Quais os quatro primeiros termos?
 - De quanto em quanto a sequência está aumentando?
 - A partir do primeiro termos, como chegamos ao segundo? E ao terceiro?
 - Como podemos relacionar a posição do termo (1° , 2° , 3°) com seu valor?
 - Se chamarmos a posição de n , como escreveríamos o termo da posição n ?

- Valorização de estratégias diversas: Aceitar tanto a contagem manual quanto tentativas de generalização, incentivando a comparação entre os métodos ressaltando a eficiência da última.

No decorrer da resolução e intervenções o professor deve enfatizar a notação que usamos para sequências numéricas, passando da representação através de fichas para a linguagem simbólica, e apresentar uma estratégia de generalização na qual, para implementá-la, o aluno deve perceber primeiramente se o valor que é adicionado a cada termo para encontrar o seguinte (razão) é maior, menor ou igual ao primeiro termo.

Quando a razão é maior ou igual, basta fazer a diferença entre a razão e o primeiro termo, e a fórmula do termo geral será a razão vezes a posição, MENOS a diferença encontrada. No problema motivador temos que a diferença entre a razão e o primeiro termo é $7 - 1 = 6$, logo, a fórmula do termo geral será $a_n = 7n - 6$.

Em uma sequência onde a razão é menor, determinamos a diferença entre o primeiro termo e a razão, e a fórmula do termo geral será a razão vezes a posição MAIS a diferença encontrada. Por exemplo, na seqência $(8, 11, 14, \dots)$, temos que a diferença entre o primeiro termo e a razão é $8 - 3 = 5$, logo, a fórmula do termo geral será $a_n = 3n + 5$.

Já na sequência onde a razão coincide com o primeiro termo, encontramos a fórmula do termo geral por qualquer um dos métodos, visto que a diferença entre a razão e o primeiro termo é zero. Sendo assim, a fórmula do termo geral é dada apenas pelo produto entre a razão e a posição do termo: $a_n = r \cdot n$ (r a razão da sequência).

Os conceitos apresentados, problemas e estratégias de resolução podem ser adaptados conforme o nível da turma e o tempo disponível. Se adequado, o professor pode optar por apresentar formalmente o conteúdo de PA ou mesmo introduzir outros tipos de sequências, como Progressões Geométricas -PG, ou sequências com padrões geométricos, ampliando assim o repertório dos estudantes.

Na etapa final, o professor deve promover uma discussão coletiva entre os grupos, incentivando a socialização das estratégias utilizadas e a comparação das respostas obtidas verificando se fazem sentido no contexto do problema. Esse momento é fundamental para consolidar a aprendizagem, validar diferentes percursos de raciocínio e destacar a importância da generalização.

- Sistematização das respostas: Registrar no quadro as respostas do problemas motivador mostrando as semelhanças com as respostas dos alunos, e destacando a relação $a_n = 7n - 6$, explicando como ela permite calcular qualquer termo sem ter que contar um por um.

Mesmo que o conteúdo de sequências numéricas ainda não tenha sido formalmente abordado, durante toda a intervenção o professor deve orientar a turma na escolha de estratégias que priorizem a construção e utilização da fórmula do termo geral. Embora a contagem manual seja um ponto de partida válido e deva ser reconhecida, é essencial conduzir os alunos progressivamente em direção ao uso da generalização algébrica, evidenciando sua eficiência e poder de aplicação em comparação com métodos puramente repetitivos.

Resposta esperada

No item (a) é esperado que o grupo consiga encontrar os primeiros quatro termos da sequência $(1, 8, 15, 22, \dots)$, seja através das fichas ou da representação simbólica, entendendo que deve considerar que o primeiro comprimido é tomado no dia 1 e que cada novo comprimido é tomado a cada 7 dias:

- 1º comprimido: dia 1;
- 2º comprimido: dia $8 = 1 + 7$;
- 3º comprimido: dia $15 = 8 + 7$;
- 4º comprimido: dia $22 = 15 + 7$.

No item (b), espera-se que o grupo, a partir de uma estratégia própria ou mesmo da discussão mediada pelo professor, deduza e registre a fórmula do termo geral $a_n = 7n - 6$.

No item (c) o aluno deve clacular o dia do décimo comprimido a partir da fórmula do termo geral obtida no item anterior, encontrando $a_{10} = 7 \cdot 10 - 6 = 64$.

Já no item (d), o aluno deve assimilar que o paciente termina a cartela no dia do último comprimido, ou seja, no dia que toma o comprimido 12, e encontrar $a_{12} = 7 \cdot 12 - 6 = 78$.

Ampliando a prática

Para garantir uma aprendizagem eficaz é fundamental que, após concluir as etapas da RP com o problema motivador, a prática seja ampliada e consolidada por meio de novos problemas. Essas atividades adicionais podem ser selecionadas pelo professor com base nas necessidades e no nível da turma ou escolhidas dentre as sugestões propostas a seguir.

- Encontre a fórmula do termo geral da sequência: $2, 6, 10, 14, \dots$
- Qual é o 20º termo da sequência: $7, 12, 17, 22, \dots$?
- Em uma festa, cada pessoa cumprimenta as outras com um aperto de mão. Se

há n pessoas, o número total de apertos é dado por $A_n = \frac{n(n-1)}{2}$. Quantos apertos haverá com 10 pessoas?

- Um encanador cobra R\$ 50,00 de visita mais R\$ 30,00 por hora de serviço. Sabendo que ele sempre cobra a hora fechada, escreva uma lei de formação para o preço em função das horas e calcule quanto custa um serviço que durou 6 horas.
- Observe a sequência de números 5, 8, 11, 14, ...
 - a) Qual o próximo termo e como encontramos os termos dessa sequência?
 - b) Qual a fórmula do termos geral e qual o décimo quinto termo?
- Maria decidiu poupar dinheiro semanalmente. Na primeira semana, ela guardou R\$ 20,00. A cada semana seguinte, ela aumenta o valor guardado em R\$ 5,00 em relação à semana anterior.
 - a) Qual é o termo geral dessa sequência?
 - b) Quanto ela terá guardado na 12^a semana?

Durante o tempo reservado para a resolução dos novos problemas, o professor deve promover uma reflexão guiada que conduza os alunos a perceber não apenas os procedimentos matemáticos envolvidos, mas também o valor prático e intelectual da generalização em situações cotidianas. Essa reflexão pode ser orientada por questões como:

Para refletir: O que muda quando passamos de resolver um problema específico para encontrar uma fórmula geral? O que fazer para que os símbolos não virem algo sem sentido?

Esses questionamentos buscam estimular a consciência sobre a utilidade da álgebra e a importância da construção de sentido na linguagem matemática.

Avaliação

A avaliação da aprendizagem, construída de forma contínua, deve observar se os alunos:

- Identificam padrões em sequências numéricas;
- Traduzem padrões para fórmulas gerais;
- Aplicam fórmulas gerais para resolver problemas em contextos variados;
- Compreendem o poder da generalização como ferramenta que simplifica o raciocínio e otimiza a resolução de problemas.

Fechamento

O professor deve fazer um fechamento da sequência didática como um todo, deixando claro que a sequência não foi sobre “aprender fórmulas ou procedimentos”, mas sobre “construir significado”. A linguagem algébrica deve ser vista como uma conquista humana, uma ferramenta viva e uma habilidade de pensamento que nos capacita a enfrentar problemas com mais confiança e criatividade.

Se possível, deve ser feito um resgate sintetizando os grandes marcos da linguagem algébrica trabalhados, propondo uma reflexão final, ligando os quatro encontros, como no texto sugerido abaixo:

Ao longo dessas quatro aulas, revivemos uma aventura intelectual que a humanidade levou séculos para percorrer: a conquista de uma linguagem poderosa para pensar o mundo.

Começamos com palavras, passamos para símbolos pessoais, depois para símbolos universais e, hoje, usamos esses símbolos para criar “fórmulas-mapa” que descrevem caminhos inteiros.

A pergunta que fica é: essa linguagem nos afasta ou nos aproxima da realidade? Os símbolos x , $f(x)$ ou a_n são códigos vazios ou são ferramentas que nos dão clareza, previsibilidade e poder para resolver problemas reais?

A resposta está no uso que fazemos dela. Quando compreendemos seu sentido, a álgebra deixa de ser um obstáculo e se torna uma aliada. Vocês não estão apenas aprendendo matemática, estão aprendendo uma nova forma de ver e organizar o mundo.

Considerações Finais

Ao chegar ao final deste material, você percorreu um caminho que procura ressignificar o ensino inicial da álgebra. Mais do que um conjunto de planos de aula, esta sequência é um convite a uma mudança de perspectiva: enxergar a álgebra não como um conteúdo a ser transmitido, mas como uma linguagem a ser descoberta pelos alunos.

O que você encontrará ao aplicar esta sequência...

Potenciais ganhos:

- **Engajamento contextualizado:** Os problemas propostos, ancorados no cotidiano e na história, costumam gerar maior interesse e demonstram o “porquê” dos símbolos.
- **Desmistificação da abstração:** Ao reproduzir a jornada histórica, os alunos veem que a notação moderna é uma solução (não um dogma), o que reduz a ansiedade e a sensação de que “não são bons em matemática”.
- **Desenvolvimento do raciocínio:** O foco na Resolução de Problemas e nas intervenções dialógicas fortalece habilidades como interpretação, argumentação e generalização, que vão além da álgebra.

Possíveis desafios:

- **Tempo:** A abordagem é mais densa que a mera aplicação de exercícios repetitivos. Se o tempo for curto, priorize a profundidade sobre a cobertura extensiva.
- **Resistência inicial:** Alguns alunos, acostumados a receber fórmulas prontas, podem estranhar a demanda por criatividade e justificativa. Seja paciente e valorize publicamente cada pequeno avanço no raciocínio.
- **Gestão da discussão:** O momento de socialização é rico, mas pode ser caótico. Utilize registros no quadro para organizar as diferentes estratégias e conduza a discussão com perguntas focadas.

Sugestões para ir além...

Esta sequência é uma base. A partir dela, você pode expandir e adaptar:

- **Aprofundando a modelagem:** Crie problemas com dados reais da comunidade escolar (orçamento da festa, consumo de água da escola, crescimento de uma planta na horta).
- **Conexões interdisciplinares:** Explore a notação algébrica em contextos de Física (leis do movimento), Química (balanceamento de equações) ou Geografia (análise de gráficos e tendências).
- **Tecnologia:** Use planilhas eletrônicas ou o GeoGebra para testar conjecturas sobre padrões e visualizar funções. Isso torna a generalização mais concreta.
- **Invertendo a lógica:** Em vez de dar a situação e pedir a equação, forneça uma função misteriosa e desafie os alunos a criarem uma história do cotidiano que ela poderia representar.

A eficácia deste material não está na fidelidade ao roteiro, mas na sua capacidade de adaptação à sua realidade. Troque o problema do táxi por um do transporte local, use o exemplo do remédio para discutir um tratamento real. Quanto mais a álgebra falar a língua e tocar a vida dos seus alunos, mais ela fará sentido.

Você é o especialista da sua sala de aula. Use esta sequência como um mapa, mas sinta-se livre para desbravar atalhos, explorar novos caminhos e, principalmente, celebrar com seus alunos cada descoberta nesta aventura de aprender a pensar com a álgebra.

Bom trabalho!

Referências Bibliográficas

BIANCHINI, G.; GERHARDT, T.; DULLIUS, M. M. Jogos no ensino de matemática “quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática?”. **Revista Destaques Acadêmicos**, v. 2, n. 4, 2011. Disponível em: <<https://www.univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/83>>. Acesso em: 26 out. 2025.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base**. 4. ed. Brasília: MEC, 2018. Ministério da Educação. Disponível em: <<https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 07 set. 2025.

CEARÁ. **Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional (SISEDU)**. Fortaleza: SEDUC/CE, 2025. Secretaria de Educação do Estado do Ceará. Disponível em: <<https://sisedu.seduc.ce.gov.br/>>. Acesso em: 15 nov. 2025.

DANTE, L. R. **Matemática : contexto & aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOWBOR, L. Educação e apropriação da realidade local. **Estudos avançados**, SciELO Brasil, v. 21, p. 75–90, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S0103-40142007000200006/>>. Acesso em: 26 out. 2025.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

IEZZI, O. D. G.; MACHADO, A. **Matemática e realidade: 9º ano**. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

MAIA, E. da C. et al. Concepções epistemológicas sobre o processo de ensino e aprendizagem da álgebra. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 5, p. 29681–29695, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.34117/bjdv6n5-428>>. Acesso em: 07 set. 2025.

OLIVEIRA, M. R. de; PINHEIRO, M. R. da R. **Coleção elementos da matemática 1: conjuntos, funções, aritmética**. 2. ed. Belém: GTR, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

SEABRA, J. d. A. et al. Layout em ambiente pedagógico / layout in pedagogical environment. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 10, p. 20421–20431, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.34117/bjdv5n10-230>>. Acesso em: 26 out. 2025.

SILVA, F. M. da et al. O uso do material concreto no ensino da matemática. In: **Anais do VIII Forum Internacional de Pedagogia**. [S.l.: s.n.], 2016. Disponível em: <https://https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/fiped/2013/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito_947_7fc2304382477fcd9bed7819c1fb39e8.pdf>. Acesso em: 26 out. 2025.

Apêndice - Jogo Algebrizando

O jogo

O jogo *Algebrizando* foi desenvolvido como um recurso didático com o objetivo de auxiliar os estudantes no processo de transposição da linguagem natural para a linguagem algébrica simbólica, etapa fundamental para a compreensão da Álgebra. Observa-se, com frequência, que os alunos apresentam dificuldades em interpretar expressões escritas em linguagem cotidiana e representá-las simbolicamente, o que pode comprometer o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Nesse contexto, o jogo propõe uma abordagem lúdica e investigativa, na qual os estudantes são convidados a associar frases em linguagem natural às suas correspondentes expressões algébricas. A manipulação das cartas favorece a reflexão sobre o significado das operações matemáticas, o uso de variáveis e a organização das expressões simbólicas, contribuindo para a construção de sentido da linguagem algébrica.

Principais objetivos

1. Promover a compreensão da linguagem algébrica a partir da linguagem natural;
2. Desenvolver a habilidade de conversão entre diferentes registros de representação matemática;
3. Estimular o raciocínio lógico e a argumentação matemática;
4. Favorecer a cooperação em grupo e a aprendizagem, por meio de material manipulável;
5. Possibilitar ao professor a realização de avaliações diagnósticas e formativas.

Contém

1. 28 cartas contendo frases em linguagem natural;
2. 28 cartas contendo expressões em linguagem algébrica simbólica.

Regra básica de uso

Inicialmente, as cartas são embaralhadas e dispostas sobre uma superfície. O objetivo dos jogadores é formar pares corretos, associando cada carta em linguagem natural à sua respectiva expressão algébrica. Um par só é considerado válido quando o jogador ou grupo consegue justificar verbalmente a associação realizada. O jogo é encerrado quando todos os pares forem corretamente formados.

Modos de jogo quanto aos participantes

1. Modo individual

Nesse modo, o estudante realiza as associações de forma autônoma, no seu próprio ritmo. Esse formato é indicado para atividades de reforço, recuperação ou avaliação diagnóstica, permitindo ao professor observar as estratégias utilizadas e as principais dificuldades apresentadas.

2. Modo em duplas

Os alunos trabalham em pares, discutindo cada associação antes de formar os pares. Esse modo favorece a argumentação matemática e a verbalização do raciocínio algébrico, promovendo a aprendizagem por meio da interação.

3. Modo em pequenos grupos

As cartas são distribuídas entre grupos de três a cinco alunos. Vence o grupo que formar corretamente todos os pares em menor tempo, desde que consiga justificar suas escolhas. Esse modo estimula o trabalho colaborativo e a tomada de decisões coletivas.

Modos de jogo quanto ao objetivo

1. Modo memória

Todas as cartas são dispostas com a face voltada para baixo. Em cada jogada, o participante, ou grupo, escolhe e vira duas cartas. Caso forme um par correto, permanece com a carta e repete a jogada; caso contrário, as cartas retornam à posição inicial e passa-se a vez. O vencedor é aquele que formar o maior número de pares corretos.

2. Modo desafio simbólico

Apenas as cartas em linguagem natural são apresentadas aos alunos. Cada participante ou grupo deve escrever, em folha ou no quadro, a expressão algébrica correspondente. Em seguida, as cartas simbólicas são reveladas para conferência e discussão.

3. Modo erro produtivo

O professor monta propositalmente algumas associações incorretas entre as cartas. Os alunos devem identificar os erros, explicar por que as associações não são válidas e apresentar a correção adequada, promovendo a aprendizagem a partir do erro.

4. Modo progressivo

O jogo é organizado em níveis de dificuldade. Inicialmente, utilizam-se apenas cartas com expressões simples. À medida que os alunos avançam, são introduzidas cartas com estruturas algébricas mais complexas, como expressões com parênteses ou potências.

5. Modo explicativo

Após formar cada par, o jogador ou grupo deve explicar, em linguagem natural, o significado da expressão algébrica correspondente. O par só é validado após a justificativa, incentivando a clareza conceitual e o uso correto da linguagem matemática.

Adapte o jogo a sua realidade...

O jogo *Algebrizando* configura-se como uma estratégia pedagógica flexível, passível de adaptação a diferentes níveis de ensino e perfis de alunos. Ao articular linguagem, simbolismo e interação, o jogo contribui para a construção de um pensamento algébrico significativo, favorecendo a compreensão dos conceitos fundamentais da Álgebra de forma gradual e contextualizada.

A seguir apresentamos sugestões de 28 cartas azuis com a descrição em linguagem natural, 28 cartas verdes com as expressões em linguagem simbólica, e 14 cartas amarelas que podem ser impressas como os versos das cartas azuis e verdes. Se preferir, você pode editar as cartas através do link:

<<https://acesse.one/FqaNi>>.

Bom jogo!

CARTAS - FRENTE

Um número qualquer

O dobro do produto
entre dois números

A soma
entre dois números

A diferença
entre dois números

O produto
entre dois números

O dobro de um número

O triplo de um número

A metade de um número

O quadrado
de um número

O cubo de um número

O sucessor
de um número

O antecessor
de um número

A soma de um número
com seu sucessor

A soma de um número
com seu antecessor

CARTAS - FRENTE

O dobro da soma
de dois números

A soma do dobro
de dois números

O triplo da diferença
de dois números

A diferença entre
o dobro de um número
e cinco

A soma
de um número
com três unidades

O produto
de um número
por sua metade

O quadrado da
soma de dois números

A soma dos quadrados
de dois números

O dobro do quadrado
de um número

A metade do triplo
de um número

O quadrado
do triplo de um número

O produto entre um
número e seu sucessor

A soma entre
o quadrado de um
número e seu triplo

A diferença entre
o cubo de um número
e seu dobro

CARTAS - FRENTE

$$x$$

$$2xy$$

$$x + y$$

$$x - y$$

$$x \cdot y$$

$$2x$$

$$3x$$

$$\frac{x}{2}$$

$$x^2$$

$$x^3$$

$$x + 1$$

$$x - 1$$

$$x + x + 1$$

$$x + x - 1$$

CARTAS - FRENTE

$$2(x + y)$$

$$2x + 2y$$

$$3(x - y)$$

$$2x - 5$$

$$x + 3$$

$$x \cdot \frac{x}{2}$$

$$(x + y)^2$$

$$x^2 + y^2$$

$$2x^2$$

$$\frac{3x}{2}$$

$$(3x)^2$$

$$x(x + 1)$$

$$x^2 + 3x$$

$$x^3 - 2x$$

CARTAS - VERSO

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

Algebrizando

