UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICALICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

A LINGUAGEM ALGÉBRICA COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

APOSTILA DO PROFESSOR

SILAS MICAEL DO NASCIMENTO GOMES

Sumário

Introdução

Esta sequência didática foi elaborada como produto educacional vinculado à dissertação de mestrado intitulada "A Linguagem algébrica como ferramenta de Resolução de Problemas: proposta de sequência didática para o Ensino Médio", desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Ela resulta de uma investigação que partiu de uma problemática recorrente no ensino da Matemática: as persistentes dificuldades dos estudantes em compreender e utilizar a linguagem algébrica de forma significativa, isto é, não apenas como um conjunto de regras para manipulação de símbolos, mas como um instrumento para generalizar padrões, modelar situações e resolver problemas.

A motivação para esta pesquisa surgiu da observação, tanto na graduação, em estágios supervisionados, quanto na atuação posterior como professor de Matemática e Física, de que a deficiência na compreensão da álgebra como linguagem constitui um "degrau" fragilizado na escada do conhecimento matemático. Essa fragilidade impede que os alunos avancem de forma satisfatória para conteúdos subsequentes, como funções, progressões e geometria analítica, além de limitar sua capacidade de raciocínio lógico e abstração. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, reforça a centralidade do pensamento algébrico, destacando a necessidade de os estudantes desenvolverem a capacidade de traduzir situações-problema da linguagem natural para a linguagem simbólica (Brasil, 2018) porém, a prática escolar frequentemente privilegia a repetição de procedimentos em detrimento de uma compreensão conceitual mais profunda (Maia et al., 2020).

Diante desse cenário, a presente sequência didática foi concebida como uma intervenção pedagógica estruturada, cujo objetivo principal é promover o uso consciente da linguagem algébrica como ferramenta de resolução de problemas. Fundamentada na metodologia de Resolução de Problemas - RP (Polya, 1995), e organizada de forma a conectar explicitamente a dimensão histórica da álgebra com sua sintaxe, a sequência visa a superar a visão da álgebra como um conteúdo meramente formal e desconectado da realidade do aluno, sendo composta por um conjunto de atividades progressivas, que buscam:

a) Contextualizar historicamente o surgimento e a evolução dos símbolos algébricos, demonstrando que as dificuldades atuais dos alunos espelham desafios que a humanidade levou séculos para superar;

b) Trabalhar a tradução entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, por meio de problemas que exigem a interpretação de enunciados e a construção de expressões e equações;

c) Explorar a modelagem algébrica em situações contextualizadas, incentivando os alunos a "pensar com a álgebra" para resolver problemas; e

d) Promover a análise de erros, entendendo-os como oportunidades valiosas de aprendizagem e discussão em sala de aula.

Ao disponibilizar este material no formato de apostila, espera-se que ele sirva como um recurso prático e acessível para outros professores de Matemática da Educação Básica. O objetivo é que ele possa ser adaptado e aplicado em diferentes realidades escolares, contribuindo para um ensino de álgebra mais significativo, que efetivamente empodere os alunos a utilizar a linguagem algébrica com compreensão, confiança e criatividade.

É importante ressaltar que esta sequência didática foi originalmente planejada e aplicada em um contexto educacional específico, servindo como um modelo ou ponto de partida, e não como um roteiro rígido e imutável. A eficácia de uma intervenção pedagógica está intrinsecamente ligada à sua adequação à realidade local pois, conforme Dowbor (2007), é fundamental que, ao longo de seus anos escolares, o estudante perceba que a escola está realmente o ajudando a compreender o mundo ao seu redor e a se tornar parte ativa da realidade em que vive.

Cada professor deve se sentir encorajado a adaptar, modificar e recriar as atividades aqui propostas, customizando problemas, substituindo enunciados e inserindo elementos do cotidiano e da cultura local de seus estudantes. Tal flexibilidade não apenas potencializa o engajamento das turmas, como também enriquece o processo de aprendizagem, tornando a linguagem algébrica verdadeiramente significativa para cada realidade singular.

Sequência Didática

Esta sequência didática não visa o ensino de procedimentos algébricos, mas o desenvolvimento do pensamento matemático através da compreensão histórica e conceitual da linguagem algébrica. Valorize cada etapa do processo e celebre as conquistas dos alunos nesta jornada que reproduz, em pequena escala, uma das maiores aventuras intelectuais da humanidade: a conquista de uma linguagem matemática moderna, sólida e eficaz.

Plano Geral

Inicialmente, esta sequência didática foi aplicada em quatro encontros de duas aulas cada, totalizando 8 aulas, seguindo o cronograma abaixo. Diante de cada realidade, o professor deve adaptar as sugestões presentes nesta apostila ao tempo disponível, podendo abreviar ou expandir os conteúdos de cada aula.

Encontro	**Duração**	**Foco Conceitual**	**Habilidades BNCC**	**Avaliação**
1º	2 aulas	Equações e incógnitas	EF08MA06	Diagnóstica e formativa
2º	2 aulas	Variáveis, notação e padronização	EF05MA11	Formativa
3º	2 aulas	Funções e modelagem	EF09MA06 EM13MAT302	Formativa
4º	2 aulas	Generalização e padrões	EF07MA15 EM13MAT302	Formativa

Nas seções a seguir são apresentadas detalhadamente as sugestões para cada encontro. Cada um é iniciado com um momento intencional de acolhida e preparação, fundamental para a transição do universo externo ao ambiente focado de aprendizagem, chamado **organização do ambiente de aprendizagem**. Este procedimento inicial que inclui o recebimento dos alunos, a realização da frequência e/ou outros procedimentos burocráticos, e o arranjo físico da sala, é mais que uma mera rotina administrativa. É a primeira ação pedagógica, que estabelece o tom da aula, promove a segurança emocional e organiza o espaço para que a interação e a concentração possam fluir.

Ao acalmar a agitação natural do início do período e garantir que todos se sintam presentes e pertencentes, criamos as condições mínimas necessárias para que a atenção seja direcionada ao desafio intelectual que se seguirá. Um ambiente fisicamente organizado e emocionalmente acolhedor é imprescindível pois pode influenciar positivamente tanto a eficiência quanto a eficácia do processo de aprendizagem (Seabra et al., 2019).

Logo após a organização do ambiente de aprendizagem, dá-se início a outro momento estratégico, o **gancho introdutório**: uma ponte deliberada entre o cotidiano dos alunos e o universo da aula. Trata-se de uma provocação intelectual breve e instigante, que atua como um "spoiler" do tema, indicando os objetivos da aula e/ou desafiando a turma com uma situação-problema curiosa. Esse recurso tem como objetivo principal motivar e engajar, criando uma necessidade cognitiva de entender/resolver a questão proposta. Esse momento chama os alunos à questão central da aula e os convida a embarcarem juntos nessa jornada.

Em cada encontro é sugerido um problema motivador, relacionado ao que será abordado mas, caso o nível de aprendizagem da turma seja mais avançado, o problema inicial pode ser substituído por outro de maior complexidade, de modo a manter o desafio intelectual adequado porém, deve-se garantir sempre que a tarefa proposta seja acessível à maioria dos alunos. Em sua grande maioria, os problemas motivadores e propostos foram adaptados de Oliveira e Pinheiro (2009), Dante (2016) e Iezzi e Machado (2022).

Os momentos subsequentes que compõem o núcleo da aprendizagem são cuidadosamente planejados e variam conforme os objetivos específicos de cada encontro. Essas etapas são detalhadas no desenvolvimento próprio de cada encontro, com descrições das estratégias, dos recursos necessários e das intervenções sugeridas. Tal especificidade garante que o professor tenha um roteiro flexível, porém sólido, para conduzir a construção progressiva do conhecimento algébrico, adaptando-se ao ritmo e às respostas da turma, enquanto assegura uma linha coerente de progressão conceitual ao longo de toda a unidade de ensino.

Nas sugestões de registros no quadro aparece trechos entre parênteses que o professor deve decidir de copia ou apenas faz a ressalva verbalmente. Os registros dos conceitos foram adaptados dos livros citados acima, já os registros históricos, foram construídos a partir das obras de Boyer (1996), Eves (2011) e Roque e Carvalho (2012).

As sugestões para os quatro encontros estão detalhadas nas seções a seguir.

2.1 A álgebra retórica: A era das palavras

1º Encontro

Objetivos de aprendizagem

- Compreender os conceitos de igualdade, expressão e equação algébricas;
- Diferenciar dados e incógnitas em problemas;
- Desenvolver raciocínio lógico sem apoio de símbolos;
- Vivenciar as limitações da álgebra retórica.

Orientações preliminares
Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;
Materiais: Quadro, pincel, papel para anotações;
Organização da sala: Duplas heterogêneas;
Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 mim);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
4. Apresentação do contexto histórico (15 min);
5. Trabalho em duplas e intervenções (20 min);
6. Socialização das soluções e intervenções (30 min);
7. Sistematização dos conceitos (18 min).

Após a organização do ambiente de aprendizagem e feito o gancho introdutório, registre no quadro, leia e discuta brevemente sobre o seguinte problema motivador, que foi adaptado de uma questão do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará - SISEDU (Ceará, 2025):

Vinícius pergunta ao seu professor de matemática por sua nota, o qual responde: “O dobro de sua nota mais nove resulta em vinte e três”. Qual a nota de Vinícius?

Em seguida, apresente brevemente o contexto histórico da evolução da linguagem algébrica focando na dificuldade encontrada na resolução de problemas como esse (e até mesmo outros bem mais complexos) que inicialmente era feita apenas através da linguagem algébrica retórica. Sugestão de registro no quadro:

Evolução da linguagem algébrica:

Linguagem retórica $\longrightarrow$ Linguagem sincopada $\longrightarrow$ Linguagem simbólica

Linguagem retórica: Representação de problemas e soluções utilizando apenas palavras.

- Principais representantes: Egípcios, babilônios e Al-Khwarizmi (matemático árebe do século IX).
- Para resolver um problema, deviam:
  - Entender o enigma (interpretar);
  - Criar os passos mentalmente (pensar);
  - Escrever a solução como uma narração (explicar).

  O que obrigava uma dupla habilidade: em matemática e em linguística.
- Principais dificuldades:
  - Problemas longos causavam confusão;
  - Dificuldade em generalizar pois cada problema era único.

É recomendável que os alunos resolvam o problema proposto em duplas, utilizando exclusivamente a linguagem natural, ou seja, descrevendo com palavras todo o raciocínio e os passos realizados, sem recorrer a notações ou símbolos matemáticos. Essa abordagem reforça a compreensão conceitual e a capacidade de argumentação. Distribua os papéis as duplas orientando a realização da atividade.

Dificuldades esperadas

- Dificuldade em identificar a operação matemática em "o dobro de sua nota";
- Dificuldade em entender o "resulta em";
- Dificuldade em organizar o pensamento apenas com palavras;
- Tentativa de usar símbolos, mesmo com a proibição, ou o método "tentativa e erro" para solucionar o problema.

Intervenções sugeridas

Durante a realização das atividades em duplas e, posteriormente, no momento de socialização das soluções, o professor deve implementar intervenções pedagógicas fundamentadas na metodologia de Resolução de Problemas - RP. Essa mediação tem como objetivos guiar a interpretação do enunciado, estimular a formulação de estratégias diversas, validar os diferentes raciocínios apresentados e conduzir a turma, de forma reflexiva, para a construção da solução em linguagem natural. Dessa maneira, cada etapa da RP é acompanhada de suportes específicos que garantem que a construção do conhecimento algébrico seja acessível, significativa e progressiva para todos os alunos.

Para garantir a compreensão do problema, fase um da RP, é fundamental que os alunos dominem o vocabulário matemático presente nos enunciados. Caso o professor identifique dificuldades com expressões como "dobro", "triplo", "diferença", "produto", "quociente" ou equivalentes, deve-se explicitar o significado desses termos, preferencialmente com exemplos numéricos simples. Se necessário, recomenda-se fazer um registro claro e objetivo no quadro, organizando esses termos e suas respectivas operações matemáticas (por exemplo: "dobro de um número $\rightarrow$ duas vezes o número", "diferença entre dois números $\rightarrow$ subtração entre tais números"), para que os alunos possam consultar durante as atividades.

Nas fases de elaboração e execução do plano de resolução, o professor deve atuar como mediador, conduzindo os alunos de forma reflexiva e estruturada. Para isso, recomenda-se:

- Observação ativa: Circular pela sala, acompanhando as estratégias utilizadas pelas duplas ou grupos, identificando tanto avanços quanto possíveis entraves conceituais;
- Questionamento guiado: Promover a interpretação do problema com perguntas direcionadas, como:
  - O problema fala sobre o quê? O que é dado e o que é desconhecido (incógnita)?
  - O que significa "dobro de sua nota" e "resulta em"?
  - Sem usar letras, como descreveríamos com palavras o passo a passo?
  - Para descobrir a nota, por onde podemos começar a "desfazer" as contas?
- Valorização de estratégias diversas: Incentivar e validar as diferentes formas de raciocínio apresentadas pelos alunos, reforçando que não há apenas um caminho para chegar à solução.

Na fase final de retrospecto e verificação, o professor deve conduzir uma avaliação coletiva das soluções apresentadas, com o objetivo de consolidar o raciocínio desenvolvido.

- Sistematização das respostas: Registrar no quadro algumas das diferentes estratégias em linguagem natural utilizadas pelos alunos, de modo a tornar explícita a linha de pensamento adotada. Essa organização visual não apenas valida os percursos diversos, mas também prepara o terreno para a transição à representação simbólica.

A intervenção não tem como objetivo forçar os alunos a buscar a solução por um caminho ou através da estratégia “corretos”, seu intuito é despertar nos alunos a compreensão do problema e diferentes formas de “desfazer” as operações da forma mais lúcida para cada um, bem como deixar claro a dificuldade da solução através da álgebra retórica. Assim, a necessidade por uma linguagem mais enxuta e prática para representar os problemas e suas soluções é sentida naturalmente.

Resposta esperada

Algo do tipo:

1. A nota de Vinícius é um número que não sabemos;
2. O dobro desse número, somado com nove, dá vinte e três;
3. Então, o dobro da nota, sozinho, é vinte e três menos nove, ou seja, quatorze;
4. Se o dobro da nota é quatorze, a nota é a metade de quatorze, isto é, sete;
5. A nota de Vinícius é sete.

Ampliando a prática

Ao final do ciclo da RP com o problema motivador inicial, recomenda-se estender a prática com a aplicação de novos exercícios. Esses problemas podem ser criados pelo professor (eventualmente com a participação dos alunos, para reforçar a autoria e o engajamento) ou selecionados dentre sugestões previamente elaboradas, como as apresentadas a seguir:

- Carlos foi ao mercado com uma certa quantia. Gastou metade do dinheiro e ainda ficou com R$ 15,00. Quanto ele tinha inicialmente?
- Maria perguntou à sua mãe: – Mamãe, quantos anos você tem?
  Sua mãe respondeu: – Se você multiplicar minha idade por três e subtrair doze, o resultado é ciquenta e quatro!
  Quantos anos tem a mãe de Maria?
- O lado maior de um retângulo é o dobro do menor. Sendo a área do retângulo 50 m^2, determine suas dimensões.
- O lado de um quadrado aumentado em 3 m gera outro quadrado de área 100

m^2. Qual era a medida do lado original?

Avaliação

Nesse primeiro encontro deve ser feito uma avaliação diagnóstica observando, durante a aula, quais os conhecimentos prévios que os alunos dispõem e como utilizá-los para atingir o objetivo geral da sequência. Isso sem prejuízo da avaliação da aprendizagem, que deve ser construída durante toto o processo, observando se os alunos:

- Entendem e identificam claramente as condições do problema;
- Desenvolvem uma estratégia sistemática;
- Comunicam o raciocínio de forma clara;
- Percebem as limitações do método verbal.

Sistematização de conceitos

Para garantir uma compreensão mais profunda e a retenção dos conceitos trabalhados, é fundamental promover uma sistematização clara e estruturada. Isso se concretiza por meio do registro organizado no quadro, no qual o professor resume as ideias-chave, os termos matemáticos e as representações discutidas durante a resolução. Esse registro serve como um mapa visual do percurso de aprendizagem.

A partir dele, conduz-se uma discussão coletiva e reflexiva, na qual os alunos são convidados a relacionar as novas informações com seus conhecimentos prévios, estabelecendo conexões e esclarecendo dúvidas remanescentes. Dessa forma, a sistematização deixa de ser uma simples transcrição e transforma-se em um momento ativo de construção e apropriação do saber, respeitando o ponto de partida intelectual de cada estudante e consolidando a base necessária para os próximos desafios.

Sugestão de registros adicionais no quadro:

Igualdade: Sinal (=) que representa equilíbrio entre o que vem antes e o que vem depois dele (pode-se fazer analogia a uma balança de pratos).

Expressão algébrica: Frase matemática "incompleta" que combina números, letras e operações matemática.
Exemplo: $3x - 7$ (a diferença entre o triplo de um número e sete).

Equação algébrica: Frase matemática "completa" que estabelece uma igualdade entre duas expressões. Contém sempre o sinal de igualdade.
Exemplo: $3x - 7 = 2x + 4$ (o triplo de um número menos sete é igual ao dobro desse mesmo número mais quatro).

Incógnita: Valor desconhecido que queremos encontrar em uma equação algébrica.
Exemplo: O x em $3x - 7 = 2x + 4$.

Dados: Informações conhecidas do problema a ser resolvido.
Exemplo: **O triplo de** e **54** em "O triplo de minha idade é 54" (**minha idade**, nesse caso, é uma incógnita).

Para refletir: Por que foi difícil resolver só com palavras?

2.2 A álgebra sincopada: As primeiras abreviações

2º Encontro

Objetivos de aprendizagem

- Compreender a necessidade de abreviações na matemática;
- Diferenciar incógnita de variável;
- Desenvolver sistemas de notação pessoal;
- Valorizar a padronização da linguagem matemática.

Orientações preliminares
Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;
Materiais: Quadro, pincel, papel para criação de símbolos ou materiais manipuláveis;
Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 mim);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
5. Apresentação do contexto histórico (15 min);
6. Criação de notação pessoal, e intervenções (20 min);
7. Socialização e comparação, e intervenções (25 min);
8. Sistematização dos conceitos (18 min).

Após a organização do ambiente de aprendizagem e a apresentação do gancho introdutório, recomenda-se realizar um breve resgate dos conceitos trabalhados na aula anterior, relacionando-os diretamente ao que foi apresentado no gancho introdutório. Esse momento de retomada tem como objetivo ativar o conhecimento prévio dos alunos, reforçar a continuidade do aprendizado e promover uma reflexão comparativa: como as estratégias de representação que serão construídas nessa aula dialoga com as usadas na fase retórica?

A intenção é conduzir a turma a perceber, de forma intuitiva, que a resolução de problemas pode tornar-se mais ágil e clara quando empregamos formas de representação mais eficientes, preparando o terreno naturalmente para a introdução da ideia de abreviação e simbolização próprias da álgebra sincopada. Registre no quadro o seguinte problema motivador ou outro mais adequado ao nível de aprendizagem da turma:

> Considere um terreno retangular em que a medida do lado maior corresponde ao triplo da medida do lado menor. Determine quais são as medidas de cada um de seus lados, sabendo que a área total desse terreno é de 300 m^2.

Após o registro, leitura e breve discussão sobre o problema motivador, apresente brevemente o contexto histórico da linguagem algébrica sincopada relacionando-o, sempre que possível, ao problema motivador. Sugestão de registro no quadro:

> **Linguagem sincopada:** Representação de problemas e soluções utilizando algumas abreviações, mas ainda sem um padrão dominante.
>
> - Principal representante: Diofanto de Alexandria (matemático grego do século III d. C.);
> - Algumas abreviações especiais:
>   - ς (sigma final) para representar uma incógnita;
>   - Δ^{Υ} (primeira letra de dynamis) para representar o quadrado da incógnita;
>   - K^{Υ} (primeira letra de kybos) para representar o cubo da incógnita.
> - Principais dificuldades:
>   - Cada matemático utilizava seu próprio código (falta de padronização);
>   - Dificuldade na comunicação e aprendizado.

Após realizar o registro explicativo no quadro, oriente os alunos a resolverem o problema motivador da aula utilizando uma abordagem sincopada, preferencialmente sem a utilização dos símbolos algébricos modernos.

Nesse momento, incentive-os a substituir os termos extensos por abreviações ou símbolos simples, tentando seguir o modelo histórico de Diofanto, mas com uma linguagem acessível. Essa prática permite que vivenciem, de forma concreta, a transição da álgebra retórica para uma representação mais econômica e estruturada.

Dificuldades esperadas

- Confusão entre símbolo e desenho ilustrativo;
- Dificuldade de abstração e/ou bloqueio criativo;
- Escolha de símbolos muito complexos ou pouco práticos;
- Dificuldade em entender símbolos criados por outros;
- Frustração ao comparar símbolos.

Intervenções sugeridas

As atividades com linguagem sincopada são intencionalmente desafiadoras, pois replicam o problema histórico da falta de padronização. O papel do professor é mediar essa experiência, transformando as dificuldades em oportunidades de aprendizado.

Para garantir que os alunos compreendam integralmente a situação proposta, o professor deve, em um primeiro momento, assegurar o domínio dos conceitos envolvidos na contextualização do problema. Isso pode incluir, por exemplo, revisitar a definição e as características de um terreno "retangular", bem como a fórmula para o cálculo de sua área em função das medidas dos lados. Esta etapa preparatória é essencial para que todos tenham clareza e consigam cumprir a fase um da RP.

Uma vez consolidada a compreensão inicial, o professor deve atuar para favorecer a elaboração e a execução de um plano de resolução. A utilização de recursos manipuláveis (como o material dourado ou blocos lógicos) durante essas fases para a representação de quantidades e operações, quando disponíveis, é altamente recomendável para favorecer a compreensão dos alunos.

A manipulação concreta desses materiais auxilia na visualização de relações quantitativas e na construção de significados para as operações e conceitos abstratos, tornando a aprendizagem mais acessível e significativa. Além disso, torna o aprendizado de Matemática mais compreensível, pois permite ao aluno visualizar e manipular conceitos abstratos em situações reais (Silva et al., 2016).

A seguir, são sugeridas algumas intervenções estruturadas de modo a guiar os alunos na tradução do problema para uma representação matemática, incentivando o uso de uma linguagem intermediária (notação sincopada própria) e a organização do raciocínio. Essas estratégias são planejadas em consonância com o nível e o tipo de problemas propostos nesta aula.

- Observação ativa: Circular pela sala durante a criação dos símbolos. Seu objetivo é identificar como cada aluno está interpretando a tarefa.

  - Estão desenhando objetos (ex.: uma maçã para "quantidade de maçãs") ou criando signos abstratos (ex.: um $\triangle$ para "número qualquer")?
  - Os símbolos são simples e rápidos de reproduzir, ou são complexos dificultando o uso?
  - Há indícios de bloqueio ("não sei como fazer") ou de frustração ("o do colega é melhor")?

- Questionamento guiado: Usar perguntas abertas para direcionar o raciocínio sem dar a resposta. Adapte-as à dificuldade observada.
  - Para confusão entre símbolo e desenho: Se o problema fosse sobre laranjas em vez de maçãs, você usaria o mesmo símbolo/desenho? Como poderíamos criar um símbolo que serve para qualquer fruta (ou para qualquer coisa)?
  - O que representar: Esse desenho representa o objeto ou a quantidade dele?
  - Para símbolos complexos ou pouco práticos: Imagine que você tenha que escrever esse símbolo dez vezes seguidas na solução de um problema. Ele é prático para isso? Como poderíamos simplificar esse símbolo mantendo a ideia?
- Valorização das diferentes estratégias: Criar um clima onde todas as tentativas são válidas como parte do processo de investigação destacando a diversidade e legitimando a criação do símbolo menos eficiente como parte do aprendizado (a história da matemática é cheia de símbolos que foram criados, usados e depois abandonados porque não eram práticos).

Na última fase, o professor deve conduzir uma socialização de algumas das soluções com as abreviações criadas, enfatizando que não existe símbolo 'certo' ou 'errado' aqui. Existem símbolos mais ou menos eficientes para comunicar uma ideia que podem ser melhorados.

- Sistematização das respostas: Este é o momento crucial para fechar a primeira atividade com uma sistematização das respostas e fazer a ponte para os problemas sugeridos a seguir. Registrar no quadro alguns dos símbolos criados pelos alunos para a mesma ideia promovendo uma discussão comparativa. Conduzir à conclusão chave de que se cada um de nós usar um símbolo diferente certamente não seremos compreendidos.

A intervenção não deve buscar a "correção" dos símbolos criados, mas sim explorar as consequências dessa criação. O objetivo final é que o aluno, por experiência própria, chegue à conclusão de que uma linguagem padronizada é útil e necessária. Dessa forma, a notação algébrica deixa de ser uma imposição arbitrária e se torna uma ferramenta cujo valor eles próprios descobriram.

Resposta esperada

Uma resposta na forma sincopada deve abreviar os objetos e/ou as operações, mas ainda manter a estrutura narrativa do raciocínio, de preferência sem o uso de símbolos algébricos modernos. A resposta sincopada não precisa usar letras, mas pode usar siglas ou símbolos simples criados pelo aluno. O essencial é que o raciocínio seja organizado e as operações estejam explicitadas, mostrando a transição entre a frase do problema e a equação matemática.

Ampliando a prática

Ao concluir a resolução do problema motivador e, consequentemente, o ciclo da RP, é recomendável dar continuidade ao aprendizado por meio da prática com outras situações-problema. Tais exercícios adicionais podem ser formulados pelo educador ou escolhidos dentre os exemplos que serão apresentados em seguida.

Para garantir a compreensão integral do problema proposto, o professor deve, inicialmente, verificar se os alunos dominam os conceitos e relações matemáticas essenciais envolvidos na situação. Caso identifique lacunas ou necessidade de revisão, é fundamental retomar tais elementos (como a definição de figuras geométricas, fórmulas de área ou perímetro) de forma clara. Essa etapa de nivelamento conceitual assegura que todos tenham as ferramentas necessárias para engajar-se na resolução, sem que a dificuldade esteja na interpretação dos conceitos, mas sim na aplicação e no raciocínio algébrico.

- Um pacote com maçãs pesa 5 kg. A embalagem pesa 200 g, e o resto são maçãs, cada uma pesando 120 g. Quantas maçãs há no pacote?
- Um retângulo tem comprimento igual ao dobro da largura. Se seu perímetro é 48 m, quais são suas dimensões?
- A idade de um pai é o quádruplo da idade do filho. Se a soma das idades é 50 anos, quantos anos tem cada um?
- Num estacionamento há carros e motos, totalizando 30 veículos e 100 rodas. Quantos são carros e quantos são motos? (Considere carro com 4 rodas e moto com 2 rodas).
- Dois números inteiros consecutivos somam 73. Quais são esses números?

Avaliação

A avaliação da aprendizagem, construída durante toda a aula, deve observar se os alunos:

- Compreendem o problema;
- Traduzem corretamente as relações verbais para relações matemáticas e usam conscientemente as abreviações;
- Fazem uma sequência lógica de passos, mostrando as substituições e as operações;
- Percebem as vantagens sobre a linguagem retórica;
- Percebem as limitações da linguagem sincopada.

Sistematização de conceitos

Para facilitar o alcance dos objetivos de aprendizagem e oferecer aos alunos um material de consulta claro e acessível, recomenda-se que o professor sistematize, em momento oportuno durante a aula, os conceitos a seguir por meio de um registro organizado no quadro. Este registro pode, conforme a necessidade, incluir outros conceitos que se demonstrarem relevantes ao longo da explanação ou da resolução de problemas.

Incógnita: Valor específico desconhecido que queremos encontrar.
Exemplo: O x em $2x + 5 = 13$.

Variável: Símbolo que pode representar diferentes valores.
Exemplo: O x e o y em $4x+2y = 100$ (quando introduzimos outra condição, como no problema sugerido: $x + y = 30$, ou definimos um valor para x ou y, eles deixam de ser variáveis).

Coeficiente: Número que multiplica uma variável ou incógnita em um termo algébrico.
Exemplo: O 2 em $2x + 5 = 13$.

Para refletir: Quais vantagens as abreviações trazem em relação à álgebra retórica? Quais limitações ainda persistem?

2.3 A álgebra simbólica: A linguagem universal

3º Encontro

Objetivos de Aprendizagem

- Conhecer e utilizar a notação algébrica moderna;
- Diferenciar equação e função;
- Compreender o conceito de variável dependente e independente;
- Reconhecer as vantagens e desvantagens da linguagem simbólica.

Orientações preliminares

Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;
Materiais: Quadro, pincel, jogo que relacione diferentes representações algébricas;
Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 mim);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (2 min);
5. Apresentação do contexto histórico (15 min);
6. Análise coletiva do problema motivador, e intervenções (15 min);
7. Sistematização dos conceitos (18 min);
8. Resolução de novos problemas, e intervenções (30 min).

Após a preparação do ambiente e a apresentação do gancho inicial, é pertinente retomar, de forma sucinta, os principais conceitos abordados no encontro anterior, relembrando tanto os benefícios quanto as limitações do uso da linguagem sincopada. No próprio momento do gancho, o professor pode sinalizar, de maneira intencional, as vantagens da notação algébrica contemporânea em comparação com as fases anteriores (retórica e sincopada).

Em seguida, realize o registro no quadro do seguinte problema motivador:

> Uma corrida de táxi custa R$ $8,00$ fixos mais R$ $2,50$ por quilômetro rodado.
> a) Qual a função que representa o preço da corrida por km rodado?
> b) Quanto custa uma corrida de 10 km?
> c) Quantos km foram percorridos em uma corrida que custou R$ 58,00?

Após o registro, a leitura e uma breve discussão coletiva sobre o problema motivador, é importante situá-lo dentro de uma linha do tempo histórica. Apresente de maneira objetiva seguindo, por exemplo, as indicações abaixo, a trajetória de evolução da linguagem algébrica simbólica.

Destaque os elementos centrais que impulsionaram essa evolução, tais como a busca crescente por generalização, a exigência de uma comunicação mais precisa entre estudiosos e a superação progressiva das restrições próprias das notações retórica e sincopada. Esses fatores foram decisivos para que a linguagem se refinasse até chegar ao sistema unificado e eficiente que adotamos hoje.

É importante ressaltar que a linguagem simbólica atual não se limita a expressar problemas e soluções pontuais. Na verdade, seu principal valor está em representar relações gerais, padrões, leis e estruturas matemáticas, constituindo-se como a base que permite à matemática dialogar com diversas áreas do conhecimento.

Linguagem simbólica: Sistema de representação matemática que utiliza símbolos padronizados, universais e eficientes.

- Principal representante:
  - François Viète (matemático francês do século XVI): propôs usar consoantes para representar quantidades conhecidas (constantes) e vogais para quantidades desconhecidas (variáveis).
- Outros símbolos introduzidos:
  - ∞ para o infinito, por Wallis (1616–1703);
  - dx no cálculo diferencial, por Leibniz (1646–1716);
  - x, y, z para incógnitas e a, b, c para constantes, por René Descartes (1596–1650).
- Principais dificuldades:
  - Perda do significado;
  - Abstração elevada;
  - Ocultação da jornada histórica.

Após o registro acima e as devidas explicações, o professor deve orientar a resolução do problema motivador relebrando, se necessário, os conceitos essenciais e a forma de representação de uma função. Uma sugestão de registro no quadro da sistematização desses conceitos está no final dessa seção.

Dificuldades esperadas

- Dificuldade na tradução do enunciado para a notação de função;
- Dificuldade em distinguir entre o custo fixo e o custo variável;
- Incompreensão da diferença entre calcular o valor do preço de uma corrida, dado a quantidade de quilômetros, e determinar a quantidade de quilômetros a partir do preço da corrida;
- Dúvidas nas resoluções e interpretações das respostas de cada item;
- Confusão conceitual entre a função e a equação obtida no item (c).

Intervenções sugeridas

A transição para a linguagem simbólica, embora mais eficiente, também apresenta desafios cognitivos, como a abstração de relações e a manipulação formal de símbolos. O papel do professor é mediar essa transição, garantindo que a notação não se torne um obstáculo, mas sim uma ferramenta poderosa no registro do pensamento matemático e dos passos necessários para a solução.

Para isso, é fundamental assegurar a compreensão dos conceitos contextuais do problema, podendo ser necessário revisitar alguns deles. Esta etapa é essencial para que os alunos consigam cumprir a primeira fase da RP: a compreensão da situação.

Uma vez consolidado o entendimento do contexto, o professor deve atuar para favorecer o cumprimento das próximas fases da RP: a elaboração e a execução de um plano de resolução. A conexão entre a situação concreta (a corrida de táxi) e sua representação abstrata (a função) pode ser facilitada por representações visuais como, por exemplo, o uso de uma tabela simples no quadro relacionando quilômetros epreço, o que ajuda a visualizar o padrão antes de pular para a formalização simbólica. Essa abordagem auxilia na construção do significado por trás das letras e das operações, tornando a abstração mais acessível.

A seguir, são sugeridas intervenções estruturadas para guiar os alunos na modelagem do problema e na manipulação da linguagem simbólica, planejadas em consonância com os objetivos desta aula.

- Observação ativa e diagnóstico inicial: Circular pela sala durante a tentativa de resolução. O objetivo é identificar onde reside as principais dificuldades.
  - Os alunos identificam corretamente o custo fixo (bandeirada) e o custo variável (por km)?
  - Tentam organizar as informações em uma tabela ou pulam diretamente

para uma tentativa de formalização simbólica?

- Há confusão na hora de montar a expressão algébrica (ex.: escrevem $8 + 2,5$ sem a variável)?
- Na parte (c), tentam resolver a equação por tentativa e erro ou buscam um método sistemático?

- Questionamento guiado: Utilizar perguntas estratégicas para conduzir o raciocínio sem fornecer a resposta pronta.
  - Para a construção da função (item a): Se o táxi andar 1 km, quanto se paga? E se andar 2 km? E 3 km? Podemos perceber um padrão? Se chamarmos o número de quilômetros de x, como escrevemos a expressão para o preço total?
  - Para a distinção conceitual entre função e equação: No item (b), qual é o dado? A função serve para calcular o quê? No item (c), qual é o dado? A função vira uma ferramenta para descobrir o quê?
- Valorização das diferentes estratégias: Criar um ambiente onde diferentes caminhos para a solução são reconhecidos e discutidos. Validar a estratégia de tentativa e erro como um ponto de partida legítimo e comparar essa estratégia com a solução algébrica.

Na fase final da RP, o professor deve ir além da simples verificação e resposta numérica. Este é um momento crucial para consolidar a aprendizagem.

- Sistematização das respostas: Registrar no quadro a função e as soluções dos itens promovendo uma discussão que conduza à conclusão chave: a grande vantagem de escrever a situação como uma função é que essa mesma "fórmula" resolve qualquer pergunta sobre essa corrida de táxi, seja qual for a distância ou o preço (esse é o poder da generalização da linguagem simbólica).

A intervenção deve focar em fazer os alunos perceberem a utilidade e importância da notação simbólica. O objetivo não é apenas que resolvam o problema, mas que compreendam como a álgebra transforma uma descrição verbal em uma ferramenta poderosa e geral para resolver uma classe inteira de problemas semelhantes. Dessa forma, a abstração deixa de ser um fim em si mesma e se torna um meio eficaz para pensar e resolver.

Resposta esperada

No item (a) é esperado que o aluno consiga perceber qual dos valores representa um custo fixo (R\$ $8,00$) e qual representa um custo variável (R\$ $2,50$ por quilômetro). Também deve reconhecer qual a variável indepedente (quantidade de quilômetros, representada por x, k ou q, por exemplo) e qual a variável dependente (preço da corrida, representada por y, $f(x)$ ou P, por exemplo), resultando em algo do tipo:

$$P(x) = 2,5x + 8.$$

No item (b) é esperado que o aluno associe a quantidade de quilômetros ($10km$) a letra que o representa na função, faça a substituição e os cálculos necessários encontrando o preço de R\$ $33,00$ para a corrida de $10km$.

Já no item (c), é esperado que o aluno associe o preço da corrida (R\$ $58,00$) a variável independente e faça a substituição obtendo a equação abaixo (ou equivalente)

$$2,5x + 8 = 58,$$

que, solucionada, resulta na quantidade de $20km$ percorridos.

Ampliando a prática

Ao final do ciclo da RP com o problema motivador o professor deve utilizar o jogo *Algebrizando*, contindo em anexo nessa apostila, para praticar a transição de setenças algébricas da linguagem natural para a simbólica. Sua utilização é importante pois o uso de jogos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem contribui para aulas mais dinâmicas, favorecendo a obtenção de melhores resultados por parte dos alunos (Bianchini, Gerhardt e Dullius, 2011).

Se faz necessário também a ampliação da prática com novos problemas que tenham o foco na tradução de uma situação descrita em palavras para uma equação ou função, que podem ser criados pelo próprio professor (com ou sem ajuda dos alunos), retirado de material didático ou dentre os sugeridos abaixo. A criação de um problema em sala de aula pode melhorar a participação do aluno por se sentir representado no processo e/ou perceber traços de seu cotidiano na contextualização.

É imprecindível que os alunos entendam e saibam como representar as informações contidas nos enunciados dos problemas, pode ser necessário, por exemplo, apresentar formas de escrever números consecutivos. O importante é que os problemas sejam acessíveis à turma promovendo a maior interação possível.

- A soma de três números inteiros consecutivos é 57. Qual é o maior desses números?
- Carlos comprou um livro e uma caneta. O livro custou R\$ $18,00$ a mais que a caneta. Se ele gastou um total de R\$ $32,00$, qual foi o preço da caneta?
- A conta de luz de uma casa tem uma taxa fixa de R\$ $30,00$ mais R\$ $0,75$ por

quilowatt-hora (kWh) consumido.
a) Escreva a função $C(x)$ que dá o custo total para x kWh consumidos.
b) Qual o valor da conta para um consumo de 120 kWh?
c) Se uma conta veio no valor de R\$ $142,50$, qual foi o consumo em kWh?

- Um serviço de streaming cobra uma taxa de adesão de R\$ $10,00$ e depois uma mensalidade de R\$ $25,00$.
  a) Escreva a função $G(m)$ que dá o gasto total após m meses de assinatura.
  b) Quanto alguém gastará após 6 meses?
  c) Após quantos meses o gasto total será R\$ $185,00$?
- Uma locadora cobra R\$ $80,00$ por dia de aluguel de um carro, mais uma taxa de R\$ $0,15$ por quilômetro rodado.
  a) Escreva a função que representa o total a pagar por d dias e k quilômetros.
  b) Quanto se paga pelo uso do carro por 2 dias e 100 quilômetros rodados?

Avaliação

A avaliação da aprendizagem, construída de forma contínua durante a aula, deve observar se os alunos:

- Compreendem o contexto do problema e identificam corretamente as grandezas fixas e variáveis;
- Traduzem a situação descrita em linguagem natural para a notação simbólica apropriada;
- Diferenciam claramente o uso de uma função para expressar uma relação geral do uso de uma equação para resolver um caso específico;
- Interpretam os resultados numéricos no contexto original do problema, atribuindo significado às respostas;
- Reconhecem, através da comparação com as fases históricas anteriores, as vantagens da linguagem simbólica.

Sistematização de conceitos

Ao longo da aula, em um momento estrategicamente escolhido, o professor deve realizar o registro no quadro dos conceitos essenciais para a compreensão e resolução dos problemas propostos, bem como para a assimilação dos conteúdos trabalhados. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de sistematização para esse registro, a qual deve ser adaptada conforme as necessidades específicas identificadas na turma.

Equação: Sentença matemática que contém o sinal de igualdade (=) e pelo menos uma incógnita (geralmente representada por uma letra).
Exemplo: $x + 7 = 34$ (é como se essa equação perguntasse: qual valor para x torna essa igualdade verdadeira?).

Função: Regra que relaciona duas grandezas de modo que, para cada valor de entrada (variável independente) existe um único valor de saída (variável dependente).
Exemplo: $f(x) = 5x + 1$ (os valores atribuídos a x são os de entrada enquanto os resultados, $f(x)$, são os de saída.

Variável independente: É a grandeza que varia livremente na situação. Em uma função, é o valor de entrada, geralmente representado por x.
Exemplo: No problema do táxi, temos a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$, onde d é a variável independente.

Variável dependente: É a grandeza que depende da variável independente. Em uma função, é o valor de saída, geralmente representado por y ou pela notação $f(x)$.
Exemplo: No problema do táxi, temos a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$, onde $P(d)$ é a variável dependente (perceba que ela tem uma notação especial não sendo representada por apenas uma letra).

Para refletir: Apenas a função $P(d) = 8 + 2,5 \cdot d$ é suficiente para entendermos o que ela representa? O que causa o distaciamento da Matemática do nosso cotidiano?

2.4 Generalização: O Poder da Álgebra

4º Encontro

Objetivos de aprendizagem

- Identificar padrões em sequências numéricas;
- Generalizar relações através de fórmulas;
- Compreender o conceito de termo geral;
- Aplicar generalização em contextos variados.

Orientações preliminares
Tempo estimado: 1 hora e 40 minutos;
Materiais: Quadro, apagador, pincel e fichas numeradas ou material manipulável para representar os dias;
Organização da sala: Grupos heterogêneos;
Encaminhamentos:

1. Organização do ambiente de aprendizagem (10 mim);
2. Gancho introdutório (5 min);
3. Retomada da aula anterior (5 min);
4. Registro e leitura do problema motivador (5 min);
5. Apresentação de conceitos essenciais (10 min);
6. Análise coletiva do problema motivador, e intervenções (20 min);
7. Resolução de novos problemas, e intervenções (30 min);
8. Fechamento (15 minutos).

Após organizar o ambiente de aprendizagem, durante o gancho introdutório, pode-se fazer uma pergunta conectada com o problema motivador, como, por exemplo, "Quantos de vocês já precisaram tomar um remédio por vários dias seguidos ou em intervalos regulares? Como vocês organizam essa rotina?", e explicar a importância de se identificar padrões em sequências numéricas e de generalizá-los por meio de uma lei ou fórmula, mostrando que esses padrões e sequências estão presentes em nosso dia a dia.

Já na retomada da aula anterior, pode-se comparar os conceitos de sequência e função, esclarecendo que, enquanto uma função pode ter entradas variadas, os termos de uma sequência são sempre indexados por números naturais.

Levando em conta que no primeiro ano do Ensino Médio os alunos ainda não têm familiaridade formal com sequências, as atividades sugeridas concentram-se principalmente em Progressões Aritméticas - PA, um tipo de sequência que surge naturalmente em contextos do cotidiano. Essa escolha permite trabalhar o raciocínio sequencial e a generalização algébrica de modo intuitivo, sem exigir a formalização prévia. Segue o problema motivador proposto:

Um paciente recebeu uma prescrição médica para tomar um medicamento de uso contínuo. A embalagem contém 12 comprimidos e a orientação é tomar 1 comprimido a cada 7 dias. Considerando que o primeiro comprimido foi tomado no dia 1, responda:
a) Escreva os primeiros 4 termos da sequência dos dias em que o paciente deve tomar os comprimidos.
b) Qual é a lei de formação (fórmula do termo geral) dessa sequência?
c) Em que dia será tomado o décimo comprimido?
d) Quantos dias serão necessários para terminar toda a cartela de 12 comprimidos?

Apresentação de conceitos essenciais

Após registrar, ler e discutir brevemente o problema motivador, é importante sistematizar no quadro os conceitos essenciais para sua resolução. A seguir, são sugeridos alguns registros conceituais, que podem ser complementados conforme as necessidades observadas na turma ou as demandas específicas do problema apresentado.

Sequência numérica: Lista ordenada de números que seguem uma regra. Exemplo: $7, 12, 17, 22, \ldots$ (sequência em que o primeiro termos é 7 e sempre encontramos o termo seguinte somando 5).

Termo geral: Fórmula que permite calcular qualquer termo da sequência a partir de sua posição.
Exemplo: $a_n = 5n + 2$ para a sequência $7, 12, 17, 22, \ldots$
onde o n indica a posição e o a_n é o termo da posição n (na primeira posição temos $a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$, na segunda, $a_2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$, e assim sucessivamente).

Generalização: Processo de extrair uma regra ou padrão que se aplica a todos os casos de um mesmo tipo.

Após a apresentação dos conceitos essenciais, os alunos, organizados em grupos, devem receber a orientação para resolver o problema motivador. Para facilitar a visualização e a manipulação concreta da sequência, sugere-se o uso de fichas numeradas, que representarão os dias. Esse recurso auxilia na compreensão do padrão e na organização do raciocínio, especialmente para os estudantes que se beneficiam de uma abordagem mais tangível antes de partir para a abstração algébrica.

Dificuldades esperadas

- Dificuldade em identificar a regularidade e construir a sequência;
- Confusão entre a posição do termo e seu valor;
- Dificuldade em expressar a relação de forma algébrica;
- Resistência em abandonar a contagem manual para adotar uma fórmula geral.

Intervenções sugeridas

Durante a resolução do problema em grupos, o professor deve observar ativamente se os alunos conseguem compreender a situação proposta e extrair do enunciado as informações essenciais, primeira etapa da RP. Caso identifique dificuldades, o professor deve intervir com questionamentos ou explicações pontuais para garantir que todos tenham clareza sobre o que está sendo perguntado e quais dados estão disponíveis.

Nas etapas de elaboração e execução do plano de resolução, é importante conferir autonomia aos estudantes, permitindo que explorem diferentes estratégias e incentivando a utilização das fichas para uma melhor visualização porém, o professor deve permanecer atento e intervir sempre que necessário, por meio de:

- Observação ativa: Circular pela sala durante a resolução, identificando se os alunos percebem a regularidade e conseguem representar os termos da sequência.
- Questionamento guiado: Promover o entendimento do problema e auxiliar na elaboração e execução do plano com questionamentos direcionados.
  - Quais fichas devemos destacar? Quais os quatro primeiros termos?
  - De quanto em quanto a sequência está aumentando?
  - A partir do primeiro termos, como chegamos ao segundo? E ao terceiro?
  - Como podemos relacionar a posição do termo ($1^{\underline{o}}$, $2^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$) com seu valor?
  - Se chamarmos a posição de n, como escreveríamos o termo da posição n?

- Valorização de estratégias diversas: Aceitar tanto a contagem manual quanto tentativas de generalização, incentivando a comparação entre os métodos ressaltando a eficiência da última.

No decorrer da resolução e intervenções o professor deve enfatizar a notação que usamos para sequências numéricas, passando da representação através de fichas para a linguagem simbólica, e apresentar uma estratégia de generalização na qual, para implementá-la, o aluno deve perceber primeiramente se o valor que é adicionado a cada termo para encontrar o seguinte (razão) é maior, menor ou igual ao primeiro termo.

Quando a razão é maior ou igual, basta fazer a diferença entre a razão e o primeiro termo, e a fórmula do termo geral será a razão vezes a posição, MENOS a diferença encontrada. No problema motivador temos que a diferença entre a razão e o primeiro termo é $7 - 1 = 6$, logo, a fórmula do termo geral será $a_n = 7n - 6$.

Em uma sequência onde a razão é menor, determinamos a diferença entre o primeiro termo e a razão, e a fórmula do termo geral será a razão vezes a posição MAIS a diferença encontrada. Por exemplo, na seqência $(8, 11, 14, \dots)$, temos que a diferença entre o primeiro termo e a razão é $8 - 3 = 5$, logo, a fórmula do termo geral será $a_n = 3n + 5$.

Já na sequência onde a razão coincide com o primeiro termo, encontramos a fórmula do termo geral por qualquer um dos métodos, visto que a diferença entre a razão e o primeiro termo é zero. Sendo assim, a fórmula do termo geral é dada apenas pelo produto entra a razão e a posição do termo: $a_n = r \cdot n$ (r a razão da sequência).

Os conceitos apresentados, problemas e estratégias de resolução podem ser adaptados conforme o nível da turma e o tempo disponível. Se adequado, o professor pode optar por apresentar formalmente o conteúdo de PA ou mesmo introduzir outros tipos de sequências, como Progressões Geométricas -PG, ou sequências com padrões geométricos, ampliando assim o repertório dos estudantes.

Na etapa final, o professor deve promover uma discussão coletiva entre os grupos, incentivando a socialização das estratégias utilizadas e a comparação das respostas obtidas verificando se fazem sentido no contexto do problema. Esse momento é fundamental para consolidar a aprendizagem, validar diferentes percursos de raciocínio e destacar a importância da generalização.

- Sistematização das respostas: Registrar no quadro as respostas do problemas motivador mostrando as semelhanças com as respostas dos alunos, e destacando a relação $a_n = 7n - 6$, explicando como ela permite calcular qualquer termo sem ter que contar um por um.

Mesmo que o conteúdo de sequências numéricas ainda não tenha sido formalmente abordado, durante toda a intervenção o professor deve orientar a turma na escolha de estratégias que priorizem a construção e utilização da fórmula do termo geral. Embora a contagem manual seja um ponto de partida válido e deva ser reconhecida, é essencial conduzir os alunos progressivamente em direção ao uso da generalização algébrica, evidenciando sua eficiência e poder de aplicação em comparação com métodos puramente repetitivos.

Resposta esperada

No item (a) é esperado que o grupo consiga encontrar os primeiros quatro termos da sequência $(1, 8, 15, 22, \dots)$, seja através das fichas ou da representação simbólica, entendendo que deve considerar que o primeiro comprimido é tomado no dia 1 e que cada novo comprimido é tomado a cada 7 dias:

- 1º comprimido: dia 1;
- 2º comprimido: dia $8 = 1 + 7$;
- 3º comprimido: dia $15 = 8 + 7$;
- 4º comprimido: dia $22 = 15 + 7$.

No item (b), espera-se que o grupo, a partir de uma estratégia própria ou mesmo da discussão mediada pelo professor, deduza e registre a fórmula do termo geral $a_n = 7n - 6$.

No item (c) o aluno deve clacular o dia do décimo comprimido a partir da fórmula do termo geral obtida no item anterior, encontrando $a_{10} = 7 \cdot 10 - 6 = 64$.

Já no item (d), o aluno deve assimilar que o paciente termina a cartela no dia do último comprimido, ou seja, no dia que toma o comprimido 12, e encontrar $a_{12} = 7 \cdot 12 - 6 = 78$.

Ampliando a prática

Para garantir uma aprendizagem eficaz é fundamental que, após concluir as etapas da RP com o problema motivador, a prática seja ampliada e consolidada por meio de novos problemas. Essas atividades adicionais podem ser selecionadas pelo professor com base nas necessidades e no nível da turma ou escolhidas dentre as sugestões propostas a seguir.

- Encontre a fórmula do termo geral da sequência: $2, 6, 10, 14, \dots$
- Qual é o 20º termo da sequência: $7, 12, 17, 22, \dots$?
- Em uma festa, cada pessoa cumprimenta as outras com um aperto de mão. Se

há n pessoas, o número total de apertos é dado por $A_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Quantos apertos haverá com 10 pessoas?

- Um encanador cobra R$ 50,00 de visita mais R$ 30,00 por hora de serviço. Sabendo que ele sempre cobra a hora fechada, escreva uma lei de formação para o preço em função das horas e calcule quanto custa um serviço que durou 6 horas.
- Observe a sequência de números $5, 8, 11, 14, \ldots$
  a) Qual o próximo termo e como encontramos os termos dessa sequência?
  b) Qual a fórmula do termos geral e qual o décimo quinto termo?
- Maria decidiu poupar dinheiro semanalmente. Na primeira semana, ela guardou R$ 20,00. A cada semana seguinte, ela aumenta o valor guardado em R$ 5,00 em relação à semana anterior.
  a) Qual é o termo geral dessa sequência?
  b) Quanto ela terá guardado na 12ª semana?

Durante o tempo reservado para a resolução dos novos problemas, o professor deve promover uma reflexão guiada que conduza os alunos a perceber não apenas os procedimentos matemáticos envolvidos, mas também o valor prático e intelectual da generalização em situações cotidianas. Essa reflexão pode ser orientada por questões como:

Para refletir: O que muda quando passamos de resolver um problema específico para encontrar uma fórmula geral? O que fazer para que os símbolos não virem algo sem sentido?

Esses questionamentos buscam estimular a consciência sobre a utilidade da álgebra e a importância da construção de sentido na linguagem matemática.

Avaliação

A avaliação da aprendizagem, construída de forma contínua, deve observar se os alunos:

- Identificam padrões em sequências numéricas;
- Traduzem padrões para fórmulas gerais;
- Aplicam fórmulas gerais para resolver problemas em contextos variados;
- Compreendem o poder da generalização como ferramenta que simplifica o raciocínio e otimiza a resolução de problemas.

Fechamento

O professor deve fazer um fechamento da sequência didática como um todo, deixando claro que a sequência não foi sobre "aprender fórmulas ou procedimentos", mas sobre "construir significado". A linguagem algébrica deve ser vista como uma conquista humana, uma ferramenta viva e uma habilidade de pensamento que nos capacita a enfrentar problemas com mais confiança e criatividade.

Se possível, deve ser feito um resgate sintetizando os grandes marcos da linguagem algébrica trabalhados, propondo uma reflexão final, ligando os quatro encontros, como no texto sugerido abaixo:

Ao longo dessas quatro aulas, revivemos uma aventura intelectual que a humanidade levou séculos para percorrer: a conquista de uma linguagem poderosa para pensar o mundo.

Começamos com palavras, passamos para símbolos pessoais, depois para símbolos universais e, hoje, usamos esses símbolos para criar "fórmulas-mapa" que descrevem caminhos inteiros.

A pergunta que fica é: essa linguagem nos afasta ou nos aproxima da realidade? Os símbolos x, $f(x)$ ou a_n são códigos vazios ou são ferramentas que nos dão clareza, previsibilidade e poder para resolver problemas reais?

A resposta está no uso que fazemos dela. Quando compreendemos seu sentido, a álgebra deixa de ser um obstáculo e se torna uma aliada. Vocês não estão apenas aprendendo matemática, estão aprendendo uma nova forma de ver e organizar o mundo.

Considerações Finais

Ao chegar ao final deste material, você percorreu um caminho que procura ressignificar o ensino inicial da álgebra. Mais do que um conjunto de planos de aula, esta sequência é um convite a uma mudança de perspectiva: enxergar a álgebra não como um conteúdo a ser transmitido, mas como uma linguagem a ser descoberta pelos alunos.

O que você encontrará ao aplicar esta sequência...

Potenciais ganhos:

- **Engajamento contextualizado:** Os problemas propostos, ancorados no cotidiano e na história, costumam gerar maior interesse e demonstram o "porquê" dos símbolos.
- **Desmistificação da abstração:** Ao reproduzir a jornada histórica, os alunos veem que a notação moderna é uma solução (não um dogma), o que reduz a ansiedade e a sensação de que "não são bons em matemática".
- **Desenvolvimento do raciocínio:** O foco na Resolução de Problemas e nas intervenções dialógicas fortalece habilidades como interpretação, argumentação e generalização, que vão além da álgebra.

Possíveis desafios:

- **Tempo:** A abordagem é mais densa que a mera aplicação de exercícios repetitivos. Se o tempo for curto, priorize a profundidade sobre a cobertura extensiva.
- **Resistência inicial:** Alguns alunos, acostumados a receber fórmulas prontas, podem estranhar a demanda por criatividade e justificativa. Seja paciente e valorize publicamente cada pequeno avanço no raciocínio.
- **Gestão da discussão:** O momento de socialização é rico, mas pode ser caótico. Utilize registros no quadro para organizar as diferentes estratégias e conduza a discussão com perguntas focadas.

Sugestões para ir além...

Esta sequência é uma base. A partir dela, você pode expandir e adaptar:

- **Aprofundando a modelagem:** Crie problemas com dados reais da comunidade escolar (orçamento da festa, consumo de água da escola, crescimento de uma planta na horta).
- **Conexões interdisciplinares:** Explore a notação algébrica em contextos de Física (leis do movimento), Química (balanceamento de equações) ou Geografia (análise de gráficos e tendências).
- **Tecnologia:** Use planilhas eletrônicas ou o GeoGebra para testar conjecturas sobre padrões e visualizar funções. Isso torna a generalização mais concreta.
- **Invertendo a lógica:** Em vez de dar a situação e pedir a equação, forneça uma função misteriosa e desafie os alunos a criarem uma história do cotidiano que ela poderia representar.

A eficácia deste material não está na fidelidade ao roteiro, mas na sua capacidade de adaptação à sua realidade. Troque o problema do táxi por um do transporte local, use o exemplo do remédio para discutir um tratamento real. Quanto mais a álgebra falar a língua e tocar a vida dos seus alunos, mais ela fará sentido.

Você é o especialista da sua sala de aula. Use esta sequência como um mapa, mas sinta-se livre para desbravar atalhos, explorar novos caminhos e, principalmente, celebrar com seus alunos cada descoberta nesta aventura de aprender a pensar com a álgebra.

Bom trabalho!

Referências Bibliográficas

BIANCHINI, G.; GERHARDT, T.; DULLIUS, M. M. Jogos no ensino de matemática “quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática?”. **Revista Destaques Acadêmicos**, v. 2, n. 4, 2011. Disponível em: <https://www.univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/83>. Acesso em: 26 out. 2025.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base**. 4. ed. Brasília: MEC, 2018. Ministério da Educação. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 07 set. 2025.

CEARÁ. **Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional (SISEDU)**. Fortaleza: SEDUC/CE, 2025. Secretaria de Educação do Estado do Ceará. Disponível em: <https://sisedu.seduc.ce.gov.br/>. Acesso em: 15 nov. 2025.

DANTE, L. R. **Matemática : contexto & aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOWBOR, L. Educação e apropriação da realidade local. **Estudos avançados**, SciELO Brasil, v. 21, p. 75–90, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-40142007000200006/>. Acesso em: 26 out. 2025.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

IEZZI, O. D. G.; MACHADO, A. **Matemática e realidade: 9º ano**. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

MAIA, E. da C. et al. Concepções epistemológicas sobre o processo de ensino e aprendizagem da álgebra. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 5, p. 29681–29695, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.34117/bjdv6n5-428>. Acesso em: 07 set. 2025.

OLIVEIRA, M. R. de; PINHEIRO, M. R. da R. **Coleção elementos da matemática 1: conjuntos, funções, aritmética**. 2. ed. Belém: GTR, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

SEABRA, J. d. A. et al. Layout em ambiente pedagógico / layout in pedagogical environment. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 10, p. 20421–20431, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.34117/bjdv5n10-230>. Acesso em: 26 out. 2025.

SILVA, F. M. da et al. O uso do material concreto no ensino da matemática. In: **Anais do VIII Forum Internacional de Pedagogia**. [S.l.: s.n.], 2016. Disponível em: <https://https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/fiped/2013/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito_947_7fc2304382477fcd9bed7819c1fb39e8.pdf>. Acesso em: 26 out. 2025.

Apêndice - Jogo Algebrizando

O jogo

O jogo *Algebrizando* foi desenvolvido como um recurso didático com o objetivo de auxiliar os estudantes no processo de transposição da linguagem natural para a linguagem algébrica simbólica, etapa fundamental para a compreensão da Álgebra. Observa-se, com frequência, que os alunos apresentam dificuldades em interpretar expressões escritas em linguagem cotidiana e representá-las simbolicamente, o que pode comprometer o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Nesse contexto, o jogo propõe uma abordagem lúdica e investigativa, na qual os estudantes são convidados a associar frases em linguagem natural às suas correspondentes expressões algébricas. A manipulação das cartas favorece a reflexão sobre o significado das operações matemáticas, o uso de variáveis e a organização das expressões simbólicas, contribuindo para a construção de sentido da linguagem algébrica.

Principais objetivos

1. Promover a compreensão da linguagem algébrica a partir da linguagem natural;
2. Desenvolver a habilidade de conversão entre diferentes registros de representação matemática;
3. Estimular o raciocínio lógico e a argumentação matemática;
4. Favorecer a cooperação em grupo e a aprendizagem, por meio de material manipulável;
5. Possibilitar ao professor a realização de avaliações diagnósticas e formativas.

Contém

1. 28 cartas contendo frases em linguagem natural;
2. 28 cartas contendo expressões em linguagem algébrica simbólica.

Regra básica de uso

Inicialmente, as cartas são embaralhadas e dispostas sobre uma superfície. O objetivo dos jogadores é formar pares corretos, associando cada carta em linguagem natural à sua respectiva expressão algébrica. Um par só é considerado válido quando o jogador ou grupo consegue justificar verbalmente a associação realizada. O jogo é encerrado quando todos os pares forem corretamente formados.

Modos de jogo quanto aos participantes

1. Modo individual

Nesse modo, o estudante realiza as associações de forma autônoma, no seu próprio ritmo. Esse formato é indicado para atividades de reforço, recuperação ou avaliação diagnóstica, permitindo ao professor observar as estratégias utilizadas e as principais dificuldades apresentadas.

2. Modo em duplas

Os alunos trabalham em pares, discutindo cada associação antes de formar os pares. Esse modo favorece a argumentação matemática e a verbalização do raciocínio algébrico, promovendo a aprendizagem por meio da interação.

3. Modo em pequenos grupos

As cartas são distribuídas entre grupos de três a cinco alunos. Vence o grupo que formar corretamente todos os pares em menor tempo, desde que consiga justificar suas escolhas. Esse modo estimula o trabalho colaborativo e a tomada de decisões coletivas.

Modos de jogo quanto ao objetivo

1. Modo memória

Todas as cartas são dispostas com a face voltada para baixo. Em cada jogada, o participante, ou grupo, escolhe e vira duas cartas. Caso forme um par correto, permanece com a carta e repete a jogada; caso contrário, as cartas retornam à posição inicial e passa-se a vez. O vencedor é aquele que formar o maior número de pares corretos.

2. Modo desafio simbólico

Apenas as cartas em linguagem natural são apresentadas aos alunos. Cada participante ou grupo deve escrever, em folha ou no quadro, a expressão algébrica correspondente. Em seguida, as cartas simbólicas são reveladas para conferência e discussão.

3. Modo erro produtivo

O professor monta propositalmente algumas associações incorretas entre as cartas. Os alunos devem identificar os erros, explicar por que as associações não são válidas e apresentar a correção adequada, promovendo a aprendizagem a partir do erro.

4. Modo progressivo

O jogo é organizado em níveis de dificuldade. Inicialmente, utilizam-se apenas cartas com expressões simples. À medida que os alunos avançam, são introduzidas cartas com estruturas algébricas mais complexas, como expressões com parênteses ou potências.

5. Modo explicativo

Após formar cada par, o jogador ou grupo deve explicar, em linguagem natural, o significado da expressão algébrica correspondente. O par só é validado após a justificativa, incentivando a clareza conceitual e o uso correto da linguagem matemática.

Adapte o jogo a sua realidade...

O jogo *Algebrizando* configura-se como uma estratégia pedagógica flexível, passível de adaptação a diferentes níveis de ensino e perfis de alunos. Ao articular linguagem, simbolismo e interação, o jogo contribui para a construção de um pensamento algébrico significativo, favorecendo a compreensão dos conceitos fundamentais da Álgebra de forma gradual e contextualizada.

A seguir apresentamos sugestões de 28 cartas azuis com a descrição em linguagem natural, 28 cartas verdes com as expressões em linguagem simbólica, e 14 cartas amarelas que podem ser impressas como os versos das cartas azuis e verdes. Se preferir, você pode editar as cartas através do link:

<https://acesse.one/FqaNi>.

Bom jogo!

CARTAS - FRENTE

Um número qualquer	O dobro do produto entre dois números
A soma entre dois números	A diferença entre dois números
O produto entre dois números	O dobro de um número
O triplo de um número	A metade de um número
O quadrado de um número	O cubo de um número
O sucessor de um número	O antecessor de um número
A soma de um número com seu sucessor	A soma de um número com seu antecessor

CARTAS - FRENTE

O dobro da soma
de dois números

A soma do dobro
de dois números

O triplo da diferença
de dois números

A diferença entre
o dobro de um número
e cinco

A soma
de um número
com três unidades

O produto
de um número
por sua metade

O quadrado da
soma de dois números

A soma dos quadrados
de dois números

O dobro do quadrado
de um número

A metade do triplo
de um número

O quadrado
do triplo de um número

O produto entre um
número e seu sucessor

A soma entre
o quadrado de um
número e seu triplo

A diferença entre
o cubo de um número
e seu dobro

CARTAS - FRENTE

x	$2xy$
$x + y$	$x - y$
$x \cdot y$	$2x$
$3x$	$\frac{x}{2}$
x^2	x^3
$x + 1$	$x - 1$
$x + x + 1$	$x + x - 1$

CARTAS - FRENTE

$2(x + y)$	$2x + 2y$
$3(x - y)$	$2x - 5$
$x + 3$	$x \cdot \frac{x}{2}$
$(x + y)^2$	$x^2 + y^2$
$2x^2$	$\frac{3x}{2}$
$(3x)^2$	$x(x + 1)$
$x^2 + 3x$	$x^3 - 2x$

CARTAS - VERSO

Algebrizando	Algebrizando
Algebrizando	Algebrizando
Algebrizando	Algebrizando
Algebrizando	Algebrizando
Algebrizando	Algebrizando
Algebrizando	Algebrizando
Algebrizando	Algebrizando