



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Alex Victor Bispo

**Paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e
popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos
Finais**

RECIFE
2026



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Alex Victor Bispo

**Paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e
popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos
Finais**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos

RECIFE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

B621p Bispo, Alex Victor.

Paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e popularização da matemática no ensino fundamental - anos finais / Alex Victor Bispo. - Recife, 2026.

88 f.; il.

Orientador(a): Marcelo Pedro dos Santos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2026.

Inclui referências.

1. Zenão, |de Eleia.. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Ensino Fundamental - Anos Finais (EFAF). 4. Base Nacional Comum Curricular (BNCC) I. Santos, Marcelo Pedro dos, orient. II. Título

CDD 510

ALEX VICTOR BISPO DA SILVA

"Paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais"

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 24/04/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Orientador) – UFRPE

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão- UFPE

Prof. Dr. Clessius Silva – PROFMAT/UFRPE

*Ao Senhor, pelas chuvas de bênçãos mandadas dos céus.
Tantas eu já recebi, outras rogo a Deus!*

Agradecimentos

Muitas coisas aconteceram na minha vida pessoal, acadêmica e profissional nestes dois anos de curso. Algumas delas foram mudanças e momentos alegres e de comemoração; outras, momentos de muita pressão e angústia. Porém, em todo o tempo, Deus colocou pessoas para caminhar comigo, de modo que pude tanto compartilhar as alegrias que tive quanto desabafar e pedir (e ouvir) conselhos.

Agradeço, então, primeiramente, a Deus, Senhor de todas as coisas e Rochedo da minha salvação, por ter colocado essas pessoas na minha vida e por tê-las utilizado, muitas vezes, para me dar paz, consolo, amor, alegria e sabedoria.

Agradeço aos meus pais, Adriano e Verônica, pelo esforço e incentivo para que todos os seus quatro filhos se dedicassem aos estudos desde cedo. Creio que hoje eles já podem ver os frutos do que vêm plantando há mais de vinte anos.

Agradeço às minhas irmãs, Adriana e Adrienne, e ao meu irmão, Vinícius, pela amizade, amor, paciência e orações.

Agradeço à minha amada Maria Fernanda pela paciência e pelo carinho incondicional, mesmo quando eu estava chato; pelas palavras de encorajamento quando eu estava cansado; e por sempre ser positiva e dizer que “vai dar certo” nas várias vezes em que estive angustiado.

Agradeço a todos os meus amigos da Igreja Presbiteriana do Brasil e irmãos em Cristo Jesus pela comunhão e pelas orações que me deram força e paz nesses anos. Que Deus continue abençoando ricamente a vida de todos vocês.

Agradeço aos meus colegas e amigos da EREF Professora Olindina Alves Semente pelas brincadeiras e conversas que muitas vezes aliviaram o cotidiano pesado do trabalho. Agradeço especialmente àqueles que sempre torceram por mim e me aconselharam.

Agradeço aos meus colegas e amigos do Profmat pelas sextas-feiras alegres e tranquilas que tivemos no curso. Com certeza, essa foi a turma mais unida, animada e solícita da qual fiz parte em minha vida. Que vocês possam ser inspiração para os seus alunos.

Agradeço ao meu orientador e professor, Dr. Marcelo Pedro dos Santos, pelas orientações e correções deste trabalho.

Agradeço a todos os professores e à Coordenação do Profmat pelo empenho em suas funções e, em especial, aos professores Fabiano e Tarciana por toda a ajuda e dedicação para resolver situações burocráticas e pedagógicas minhas e de toda a turma.

Por fim, agradeço pelo apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

*“Conta as bênçãos, dize quantas são,
Recebidas da divina mão!
Vem dizê-las, todas de uma vez,
E verás, surpreso, quanto Deus já fez!”*
(As Muitas Bênçãos, HNC)

Resumo

Este estudo investiga quais e como paradoxos matemáticos podem ser utilizados como estratégia de ensino e popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF), tendo, então, a finalidade de apresentar alguns paradoxos matemáticos e suas associações com competências gerais da Educação Básica e competências específicas e habilidades de Matemática do EFAF, aprofundando-se em dois deles: Paradoxo da Dicotomia e Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, ambos atribuídos ao filósofo grego Zenão de Eleia (490 a. C. – 430 a. C.). A metodologia valeu-se tanto da pesquisa documental (BNCC, currículo de Matemática de Pernambuco para o EFAF, livros didáticos e livros paradidáticos) quanto da pesquisa bibliográfica (dissertações do Proformat, artigos, sites, etc), além da investigação matemática dos dois paradoxos supracitados por meio de problemas cujos assuntos estão abrangidos explícita ou implicitamente pela BNCC na etapa final do Ensino Fundamental, desenvolvendo-se por meio das etapas: revisão bibliográfica quanto aos conceitos, classificação e utilização na sala de aula de paradoxos matemáticos; definição da metodologia de investigação e apresentação dos paradoxos; pesquisa sobre os paradoxos em diferentes meios de comunicação; associação dos paradoxos pesquisados a objetos de conhecimento e habilidades do EFAF da BNCC; e investigação histórica, filosófica e matemática dos paradoxos. O trabalho teve três resultados principais: um quadro com a associação de vinte paradoxos com habilidades da BNCC do 6º ao 9º ano do EFAF; análises e sugestões de como os paradoxos de Zenão podem ser trabalhados em sala de aula; e uma sequência didática, utilizando o Paradoxo da Dicotomia, para o ensino da construção e investigação das mediatrizes e bissetrizes, além do desenvolvimento das habilidades argumentativas e do raciocínio hipotético-dedutivo dos discentes.

Palavras-chave: Paradoxos de Zenão. Popularização da Matemática. EFAF. BNCC.

Abstract

This study investigates which and how mathematical paradoxes can be used as strategy for teaching and popularizing Mathematics in Middle School (EFAF in Portuguese). It aims to present some mathematical paradoxes and their associations with the general competencies of Basic Education and the specific competencies and skills of Mathematics for EFAF, placing particular emphasis on two examples: the Dichotomy Paradox and the Achilles and the Tortoise Paradox, both attributed to the Greek philosopher Zeno of Elea (490 BC – 430 BC). The methodology employed comprised both documentary research (examining the BNCC, the Pernambuco Mathematics curriculum for EFAF, and various textbooks) and bibliographic research (PROFMAT dissertations, articles, websites, etc). Furthermore, it involved a mathematical investigation of the two aforementioned paradoxes through problems addressing topics explicitly or implicitly covered by the BNCC for EFAF. The study proceeded through the following stages: a literature review regarding the concepts, classification, and classroom application of mathematical paradoxes; the definition of the investigative methodology and presentation of the paradoxes; research on paradoxes across different media; the association of the researched paradoxes with specific knowledge objects and skills within the BNCC for EFAF; and a historical, philosophical, and mathematical investigation of the selected paradoxes. The research yielded three main results: a chart associating twenty paradoxes with BNCC skills for the 6th through 9th grades of EFAF; analyses and suggestions on how Zeno's paradoxes can be addressed in the classroom; and a didactic sequence using the Dichotomy Paradox to teach the construction and investigation of perpendicular bisectors and angle bisectors, while also fostering the students' argumentative skills and hypothetical-deductive reasoning.

Keywords: Zeno's Paradoxes. Popularization of Mathematics. EFAF. BNCC.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Quando $r < \frac{\overline{AB}}{2}$, as circunferências $\Gamma(A; r)$ e $\Gamma(B; r)$ não se intersectam.	22
Figura 2	– Quando $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, as circunferências $\Gamma(A; r)$ e $\Gamma(B; r)$ cruzam-se unicamente no ponto médio de \overline{AB} .	23
Figura 3	– Quando $r > \frac{\overline{AB}}{2}$, ABP é um triângulo e vale $APM \equiv BPM$ por LLL.	23
Figura 4	– $APM \equiv BPM$ por LAL.	24
Figura 5	– O ponto O é a interseção de r , s e t .	25
Figura 6	– O triângulo ABC é inscrito na circunferência Λ e seu circuncentro é O .	26
Figura 7	– Os triângulos OAM e OBM são congruentes por LAL.	27
Figura 8	– As bissetrizes interna e externa de todo ângulo são perpendiculares.	28
Figura 9	– As bissetrizes definidas por duas retas concorrentes é o lugar geométrico dos pontos que equidistam a essas mesmas retas.	29
Figura 10	– Paradoxo da Dicotomia.	35
Figura 11	– Barra de área igual a 1.	36
Figura 12	– Dicotomias sucessivas da barra.	37
Figura 13	– Fluxograma referente ao Problema 2.4 definindo a sequência recursivamente.	45
Figura 14	– Fluxograma referente ao Problema 2.4 definindo a sequência de forma não recursiva.	46
Figura 15	– Interpretação gráfica do Problema 2.5.	50
Figura 16	– Gráficos de S e s quando $k = 9$ e $d = 75$.	51
Figura 17	– Gráficos de S e s quando $k = 9$ e $d = 82$.	51
Figura 18	– Gráficos de S e s quando $k = 2$ e $d = 50$.	52
Figura 19	– Gráficos de S e s quando $k = 1$ e $d = 50$.	53
Figura 20	– Gráficos de S e s quando $k = 0, 5$ e $d = 10$.	54

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EFAF	Ensino Fundamental – Anos Finais

Sumário

	Introdução	14
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
1.1	Competências da BNCC desenvolvidas por meio de paradoxos	16
1.2	Revisão bibliográfica	19
1.3	Classificação dos paradoxos	20
1.4	Fundamentação matemática	20
1.4.1	Desigualdade de Bernoulli	20
1.4.2	Fundamentação matemática para a sequência didática	21
1.4.2.1	Mediatriz e circuncentro	22
1.4.2.2	Bissetriz e incentro	26
2	RESULTADOS E ANÁLISE	31
2.1	Associações entre paradoxos e habilidades da BNCC	31
2.2	Paradoxos de Zenão	34
2.2.1	Paradoxo da Dicotomia	34
2.2.2	Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga	42
3	CONSTRUÇÃO E INVESTIGAÇÃO DE MEDIATRIZES E BISSETRIZES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁ- TICA PARA O 8º ANO	56
	Construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes: uma proposta de sequência didática para o 8º ano	57
	Avaliação diagnóstica: congruência de triângulos	63
	Atividade 1 – Paradoxo da Dicotomia	65
	Atividade 2 – Rodovias que se cruzam	69
	Atividade 3 – “Ponto médio” das três igrejas	71
	Atividade 4 – Dicotomia do ângulo	75
	Atividade 5 – Vendedores de sorvete	79
	Atividade 6 – Construindo um chafariz	81

Conclusão	83
Referências	85

Introdução

Logo no prefácio do livro *As Maravilhas da Matemática*, uma das obras mais conhecidas de Malba Tahan — pseudônimo do escritor Júlio César de Melo e Sousa, provavelmente o brasileiro mais importante na popularização da Matemática, sendo a data de seu nascimento, 6 de maio, celebrada como o Dia Nacional da Matemática —, diz: “deve o professor de Matemática conhecer as recreações numéricas, os paradoxos curiosos e os episódios pitorescos relacionados com a Ciência” (TAHAN, 1973, p. 9).

Este trabalho se propõe a fazer conhecidos alguns desses curiosos paradoxos, uns mais famosos que outros, a fim de auxiliar professores de Matemática da Educação Básica a tornar as suas aulas mais atraentes, lúdicas e significativas. Esses paradoxos poderão ser utilizados como estratégia de ensino — potencializando-se por meio de metodologias ativas como a História da Matemática, a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática — e de popularização da Matemática — por suas características contraintuitivas, quando trazem conclusões surpreendentes e estranhas à primeira vista; desafiantes, quando se tenta investigar os seus conceitos, argumentos ou falácias; criativas, quando puramente abstratos ou situações inusitadas; e ousadas, quando envolvem conteúdos não abordados ou pelo menos não muito explorados na Educação Básica (infinito, supertarefas, probabilidade condicional, bijetividade, entre outros).

Sobre o corpo do trabalho, na primeira seção do primeiro capítulo, justifica-se o uso de paradoxos em sala de aula pelo reconhecimento do potencial em desenvolver as competências gerais 2, 4 e 5 da Educação Básica e das competências específicas 1, 2, 3, 6 e 8 de Matemática do EFAB. Na segunda, faz-se uma revisão bibliográfica dentro do âmbito do Profmat sobre o tema paradoxo. Já na terceira seção, apresenta-se uma conceituação e classificação dos paradoxos dada por QUINE (1976) e condizente com o entendimento de BARKER (1969). Finalmente, na quarta e última seção desse capítulo, enuncia-se e demonstra-se a Desigualdade de Bernoulli, que é utilizada na solução de dois problemas do segundo capítulo, e sistematiza os conteúdos relacionados a mediatrizes e bissetrizes (propriedades, aplicações e construção geométrica com régua e compasso) que são trabalhados na sequência didática do Capítulo 3.

No segundo capítulo, Resultados e análise, apresenta-se, primeiramente, por meio de um grande quadro, as associações percebidas entre os paradoxos pesquisados e as habilidades da BNCC. Além das associações, também classifica-se cada um dos paradoxos segundo as classes de QUINE (1976) e identifica os temas abordados pelo paradoxo. Depois disso, investiga-se histórico, filosófico e, sobretudo, matematicamente o Paradoxo da Dicotomia e o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga por meio de alguns problemas

matemáticos ao nível e abrangendo conteúdos do EFAF. Alguns desses problemas são resolvidos utilizando diferentes conceitos e procedimentos a fim de mostrar o potencial em utilizar os paradoxos para tratar sobre diferentes objetos de estudo.

Para além de dentro da sala de aula, espera-se também que os paradoxos a serem apresentados possam ser aplicados em ambientes extraclasse e em vivências extracurriculares, como Feiras de Matemática, Feiras de Ciências, leituras puramente lúdicas, Trabalhos de Conclusão do Ensino Fundamental (TCFs), entre outras situações que promovam o estudo da Matemática.

Por fim, apesar do público-alvo principal ser professores de Matemática, deseja-se que outros profissionais da educação, estudantes e quaisquer outros curiosos leiam este trabalho para conhecer, se desafiar e, essencialmente, se divertir com os paradoxos.

1 Fundamentação Teórica

1.1 Competências da BNCC desenvolvidas por meio de paradoxos

Paradoxos matemáticos têm o potencial de despertar a curiosidade do aluno e o interesse dele para solucionar as aparentes contradições que enfrenta, fazendo-o refletir sobre aquilo que conhece, ou que acha que conhece, além de fazê-lo investigar as causas, os argumentos e as falácias presentes ou não no paradoxo.

Ainda, por alguns dos paradoxos serem situações além do mundo real, como paradoxos do infinito — embora de forma alguma menos notáveis, sendo significativos para o entendimento de características e do avanço da Teoria de Conjuntos, por exemplo —, a imaginação e a criatividade, tão pertinentes no estudo da Matemática, são desenvolvidas.

Tudo isso, com o adequado intermédio do professor, guiando os alunos por meio dos conceitos e procedimentos próprios da Matemática — ou mesmo das outras áreas do conhecimento — se vincula diretamente à competência geral 2 da Educação Básica da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

Essa competência geral — na medida em que os alunos, depois da surpresa inicial com os paradoxos, passam a analisá-los criticamente por meio de diversos tipos de registro, a investigá-los quanto a presença ou não de falácias, a relacioná-los a conceitos e procedimentos anteriormente aprendidos por eles, construindo novos conhecimentos significativos, e a reconhecer a veracidade, a falsidade ou a contradição desses paradoxos mediante argumentos convincentes — ramifica-se nas competências específicas 2 e 6 de Matemática:

Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

[...]

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário,

expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

Como este trabalho se propõe a mostrar, há paradoxos que lidam com habilidades de diferentes unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística), articulando-se por meio das ideias fundamentais: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação (BRASIL, 2018, p. 268). Por causa de sua característica desafiadora e divergente do senso comum e, ainda, dos problemas e exercícios rotineiros, um paradoxo pode despertar no aluno não somente a curiosidade e o interesse nele e na Matemática como um todo, mas também a coragem em tentar entendê-lo melhor, elaborar, testar e confirmar hipóteses que possam explicar a sua conclusão contraintuitiva e descrevê-lo com suas próprias palavras, seja para si ou para outrem.

Alcançando-se essas habilidades, o aprendiz goza da satisfação de resolver um desafio intrigante e lúdico, tornando-se — espera-se — desejoso de conhecer novos paradoxos ou mesmo outros tipos de desafios matemáticos, como enigmas, problemas olímpicos, etc. Na verdade, mesmo enfrentando dificuldades maiores para entender plenamente o paradoxo, é ainda possível, principalmente com o incentivo e o auxílio do docente, que o discente regozije-se e usufrua do processo de tentativa e erro. Desta forma, estará o aprendiz fortalecendo a terceira competência específica:

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (BRASIL, 2018, p. 267).

Considerando que “para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 299) e que, na origem de algumas teorias importantes da Matemática, como a Teoria dos Números, Teoria dos Conjuntos, a Teoria das Probabilidades e a Teoria dos Fractais — essas três primeiras abrangendo diretamente objetos de conhecimento do currículo básico —, estão paradoxos que levaram matemáticos antigos e contemporâneos à reflexão, à criação ou à reestruturação da Matemática, desde a sua base axiomática; entende-se que a apresentação de paradoxos matemáticos historicamente contextualizados é uma prática bem-vinda do docente.

Claramente, essa prática abrange a competência específica 1:

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 267).

Ainda, enquanto os alunos conhecem e apropriam-se dos paradoxos, fazendo conexões com seus saberes prévios, o professor, como já dito, deve guiar os alunos por meio dos conceitos e procedimentos próprios da disciplina a fim de que os alunos possam compreendê-los plenamente e descrevê-los com suas próprias palavras, porém, estas enriquecidas pelas linguagens próprias da Matemática (algébrica, geométrica, lógica, figural, etc). A isso se refere a competência geral 4:

Utilizar diferentes linguagens — verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital —, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo (BRASIL, 2018, p. 9).

Ademais, a utilização de ferramentas digitais para a resolução ou a análise de alguns paradoxos está à disponibilidade do docente e é enriquecedora para o esclarecimento do que se pede ou do que parece estar omitido na situação paradoxal por meio de manipulações de variáveis ou da realização de testes de hipóteses em *softwares* de geometria dinâmica ou em planilhas eletrônicas. Abarca isso a competência geral 5:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Por fim, quando o professor incita a turma à discussão e à análise coletiva dos paradoxos, oportuniza o compartilhamento e a escuta de diferentes ideias, opiniões e argumentos dos alunos, fomentando o espírito dialogal e colaborativo, além da defesa de seus pontos de vista por meio de argumentos e conceitos de forma clara, fundamentada, lógica, empática e respeitosa. Assim, desenvolve-se a competência específica 8.

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 267).

1.2 Revisão bibliográfica

Há pelo menos nove dissertações publicadas até o mês de outubro de 2025 no âmbito do Profmat com paradoxos como tema principal ou secundário. Três deles abordam paradoxos probabilísticos (VIANA, 2013; SALOMÃO, 2014; YAMAMOTO, 2020); quatro, paradoxos geométricos (DORTA, 2013; CAMPOS, 2016; SENTONE, 2017; NASCIMENTO, 2025); um aplica o paradoxo de Galileu ao estudo de frações contínuas (OLIVEIRA, 2014); e o outro aborda paradoxos presentes em operações numéricas: divisão por zero, regras de sinais, raízes quadradas de números negativos e operações com logaritmos (SILVA, 2022).

Tanto SALOMÃO (2014) como YAMAMOTO (2020) focam no paradoxo de Monty Hall, um dos mais conhecidos da Teoria das Probabilidades, estudando, inclusive, modificações e generalizações dele. Já VIANA (2013) aborda o tema probabilidade geométrica e apresenta alguns paradoxos probabilísticos.

Antes de iniciar o tema principal, DORTA (2013) comenta algumas definições para o termo paradoxo e discorre sobre possíveis classes de paradoxos. Ele aborda paradoxos relacionados ao princípio da distribuição oculta, embora não explicitamente, o que só é feito por SENTONE (2017). Já CAMPOS (2016) aplica alguns paradoxos apresentados por DORTA (2013) à Educação de Jovens e Adultos. Por fim, NASCIMENTO (2025) investiga a equidecomposição de figuras planas e espaciais e suas aplicações no ensino de geometria, analisando, entre outras coisas, o Paradoxo de Banach-Tarski.

Quase nenhum dos trabalhos publicados antes do início da implementação da BNCC associam a utilização de paradoxos matemáticos em sala de aula com habilidades ou competências de currículos de redes de ensino ou documentos norteadores. Apenas DORTA (2013) faz isso, justificando a utilização de paradoxos de distribuição oculta em sala de aula, mostrando que eles podem ajudar a desenvolver algumas habilidades geométricas e trigonométricas presentes no currículo de Matemática do Estado de São Paulo vigente na época (SEE/SP, 2010).

Dos trabalhos publicados após o início da implementação da BNCC, apenas NASCIMENTO (2025) sistematiza e analisa as habilidades da BNCC que podem ser desenvolvidas por meio da utilização de paradoxos. As habilidades analisadas por ele são as das unidades temáticas de Geometria e de Grandezas e Medidas, desde a etapa do Ensino Fundamental – Anos Iniciais até a etapa do Ensino Médio. O foco dele são as habilidades relacionadas ao ensino de áreas de figuras planas.

Portanto, com exceção desta última, nenhuma das dissertações citadas nesta seção traz uma associação explícita entre os paradoxos e as habilidades e competências da BNCC, mostrando como estas podem ser desenvolvidas. Além disso, nenhuma das nove investigam especificamente e profundamente os paradoxos de Zenão. Tudo isso é feito nesta dissertação.

1.3 Classificação dos paradoxos

Quanto a conceituação e classificação de paradoxos, adotar-se-ão as nomenclaturas dadas por QUINE (1976), que condizem com o entendimento de BARKER (1969), separando em três classes: verídicos, falsídicos e antinomias.

Paradoxos verídicos são aqueles com conclusões surpreendentes e contraintuitivas, porém, depois de investigados, percebe-se que realmente são verdadeiros. Paradoxos falsídicos trazem argumentos aparentemente válidos levando, porém, a conclusões absurdas. Esses paradoxos diferem das falácias, pois estas podem levar a conclusões verdadeiras ou não surpreendentes ou ambas, embora que sempre há uma falácia na argumentação do paradoxo (QUINE, 1976).

Já as antinomias ocorrem “quando se está na situação de mostrar, por meio de raciocínio perfeitamente lícito, na aparência que algo deve ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo” (BARKER, 1969, p. 111). Segundo QUINE (1976), antinomias produzem proposições autocontraditórias — a falsidade de uma, implica na veracidade de outra, sendo que esta implica na veracidade da primeira, e vice-versa — aceitando-se como verdadeiras uma forma de pensamento. “Ela estabelece que algum padrão de raciocínio tácito e confiável deve ser explicitado e, doravante, evitado e revisado” (QUINE, 1976, p. 5).

1.4 Fundamentação matemática

Nesta seção são feitas algumas demonstrações de proposições úteis tanto para a análise dos paradoxos como para as atividades propostas na sequência didática.

1.4.1 Desigualdade de Bernoulli

A seguinte desigualdade será útil para resolver o Problema 2.1 e o Problema 2.4.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Bernoulli). *Sejam $n \in \mathbb{Z}_+$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -1$. Então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Solução. A prova será feita por indução, sendo o caso base válido, pois, $\forall x > -1, 1 + x \neq 0$ e, portanto, $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

Suponha agora que vale $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$ e $x > -1$ real. Quer-se provar que $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$. Com efeito, segue que

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + (1 + n)x + nx^2.$$

Como $nx^2 \geq 0$, $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$.

Portanto, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo inteiro n não negativo e todo real $x > -1$. \square

1.4.2 Fundamentação matemática para a sequência didática

No Capítulo 3, o Paradoxo da Dicotomia foi aplicado como estratégia de ensino numa sequência didática sobre a construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes. Para o estudo das mediatrizes, foi-se utilizado a versão clássica do Paradoxo da Dicotomia com o enunciado alternativo, já para o estudo das bissetrizes, foi-se utilizado o Paradoxo da Dicotomia de Rotação.

Nessa sequência didática, foram apresentadas, como atividades, proposições a serem demonstradas pelos próprios alunos, desenvolvendo, assim, a competência geral 2 da BNCC, pois eles recorrerão à abordagem própria da Matemática, a saber, demonstração, para investigar as propriedades das mediatrizes e bissetrizes; refletir sobre os novos conceitos aprendidos, sobretudo os relacionados ao infinito, fazendo novas conexões com os seus conhecimentos prévios e reorganizando-os, isto é, à luz da aprendizagem significativa, aprendendo; e imaginar, criar e testar hipóteses na medida em que tentam demonstrar as proposições utilizando a construção geométrica com régua e compasso e aplicando os casos de congruência de triângulos. Ainda referente a essa competência, no que tange a “exercitar a curiosidade intelectual”, a demonstração responde a seguinte pergunta que o aluno deve se fazer quando estiver diante de uma informação nova: “por que é assim?”.

De forma ainda mais específica, a BNCC diz que os conceitos de congruência e semelhança

devem ter destaque nessa fase [final] do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo (BRASIL, 2018, p. 272).

Ora, são justamente essas “demonstrações simples” — aplicações da congruência de triângulos — que estão propostas na sequência didática e que, a fim de auxiliar e orientar o professor que venha a utilizar este trabalho em suas aulas, estão presentes nesta seção. Essas demonstrações, além da aplicação dos casos de congruência de triângulos, valem-se também da Desigualdade Triangular como critério de existência de um triângulo, enunciada conforme abaixo.

Proposição 1.2 (Desigualdade Triangular). Sejam A , B e C pontos distintos quaisquer no plano. Então

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC},$$

valendo a igualdade apenas quando $B \in AC$.

Esses dois conceitos são conteúdos trabalhados nos 7º e 8º anos. Ainda, outras aplicações utilizadas são as seguintes:

- duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas; e
- dados um ponto no plano e uma reta qualquer, existe uma única reta perpendicular a primeira e que passa pelo ponto dado.

As demonstrações destas duas proposições, assim como as dos casos de congruência de triângulos e da Desigualdade Triangular, podem ser vistas em (SANTOS; VIGLIONI, 2011).

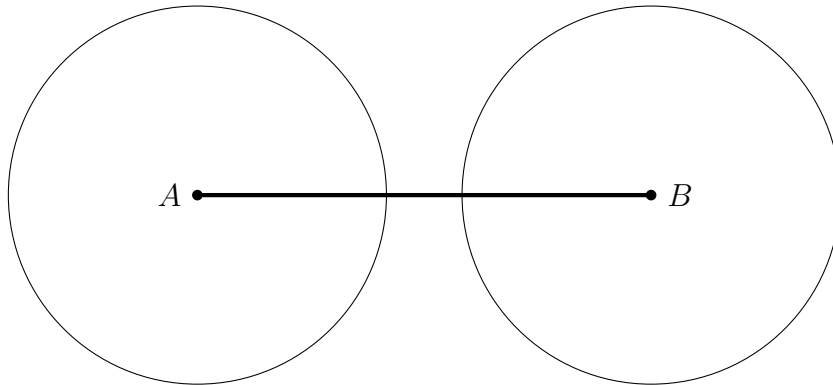
1.4.2.1 Mediatriz e circuncentro

Doravante, $\Gamma(O; r)$ denota a circunferência centrada em O e de raio r .

Proposição 1.3. *Sejam A e B pontos distintos do plano e $\mathcal{L} = \{P \text{ ponto} | P \in \Gamma(A; r) \cap \Gamma(B; r), \forall r > 0\}$. Então \mathcal{L} é a reta s perpendicular ao segmento AB e que o corta na metade, ou seja, passa pelo seu ponto médio.*

Demonstração. Primeiramente, tome $P \in \mathcal{L}$. Logo, $\exists r > 0$ tal que $P \in \Gamma(A; r) \cap \Gamma(B; r)$. Se $r < \frac{\overline{AB}}{2}$ (Figura 1), então $\overline{AP} + \overline{BP} = r + r < \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AB}$, o que contradiz com a Desigualdade Triangular. Dessa forma, se $r < \frac{\overline{AB}}{2}$, então $\Gamma(A; r) \cap \Gamma(B; r) = \emptyset$.

Figura 1 – Quando $r < \frac{\overline{AB}}{2}$, as circunferências $\Gamma(A; r)$ e $\Gamma(B; r)$ não se intersectam.

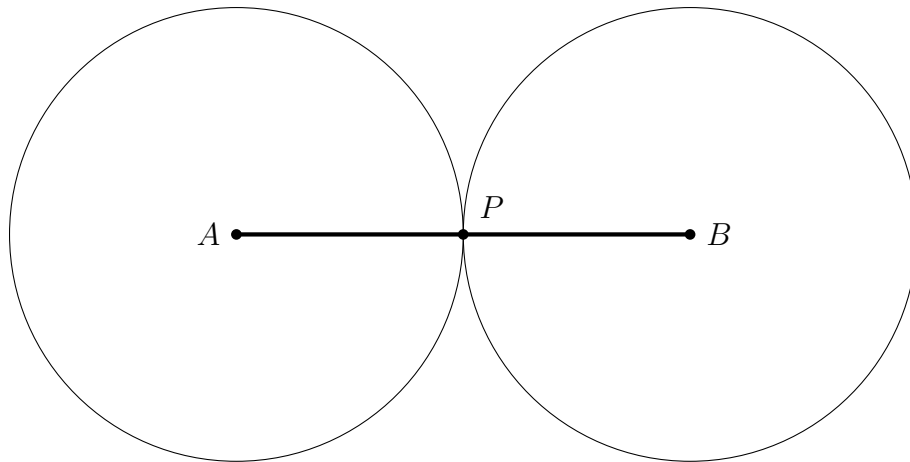


Fonte: o autor

Se $r = \frac{\overline{AB}}{2}$ (Figura 2), então, pela Desigualdade Triangular, P está entre A e B e, como $\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\overline{AB}}{2}$, P é o ponto médio de AB .

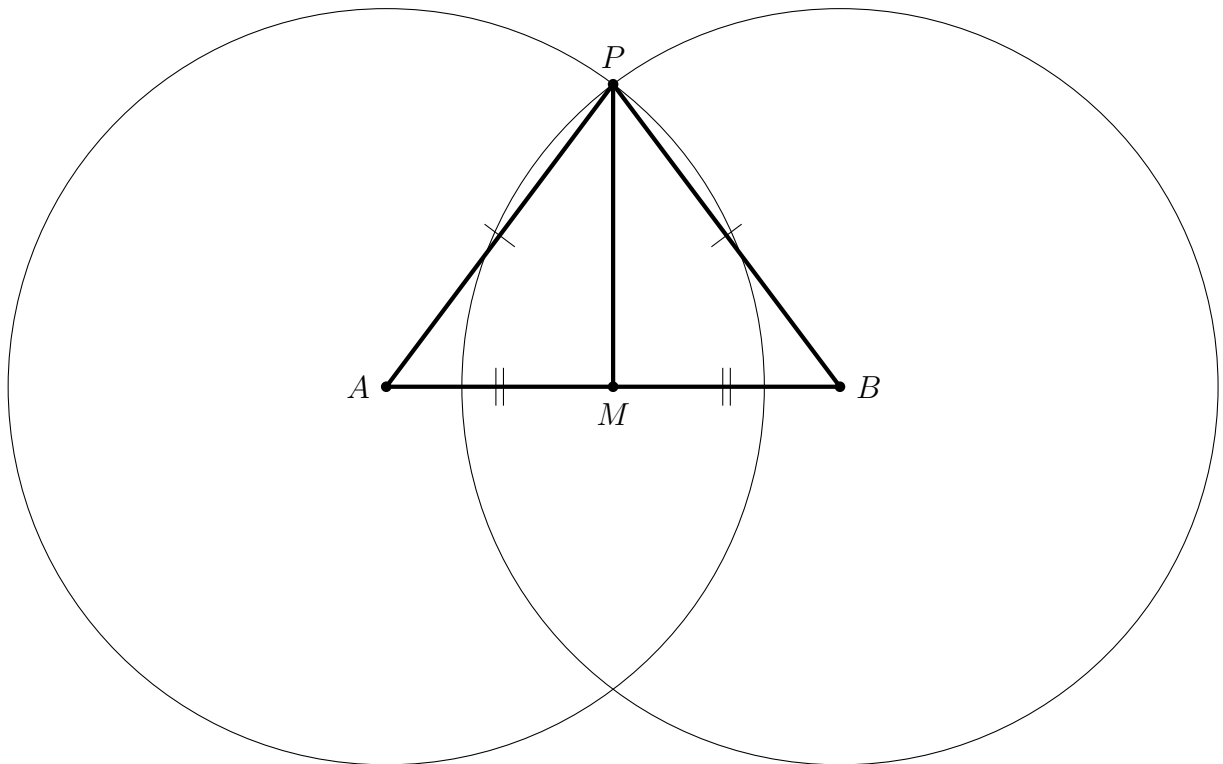
Se $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ (Figura 3), então, novamente pela Desigualdade Triangular, ABP é um triângulo. Seja M o ponto médio de \overline{AB} . Como $\overline{AP} = \overline{BP} = r$ e $\overline{AM} = \overline{BM}$, segue, pelo caso LLL, que $APM \cong BPM$. Em particular, $\widehat{AMP} = \widehat{BMP}$ e, como $\widehat{AMP} + \widehat{BMP} = \widehat{AMB} = 180^\circ$, segue que $\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ$. Logo, $P \in s$.

Figura 2 – Quando $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, as circunferências $\Gamma(A; r)$ e $\Gamma(B; r)$ cruzam-se unicamente no ponto médio de \overline{AB}



Fonte: o autor

Figura 3 – Quando $r > \frac{\overline{AB}}{2}$, ABP é um triângulo e vale $APM \equiv BPM$ por LLL.



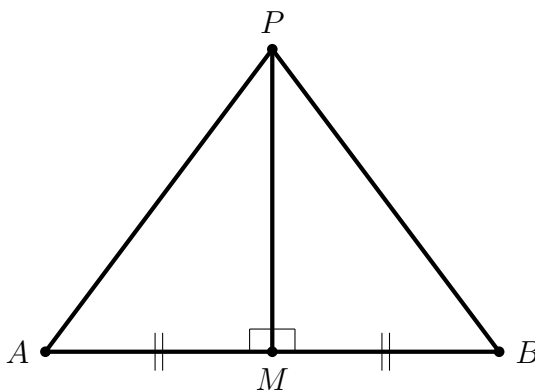
Fonte: o autor

Portanto, pela arbitrariedade de r e, por conseguinte, de $P \in \mathcal{L}$, segue que $\mathcal{L} \subset s$.

Provar-se-á agora que $s \subset \mathcal{L}$. Para isso, tome $P \in s$ qualquer. Obviamente, se $P \in AB$, ele é o seu ponto médio e, como já visto, pertence a \mathcal{L} quando $r = \frac{\overline{AB}}{2}$. Suponha, então, que $P \notin AB$. Logo, A , B e P formam um triângulo. Assim, note que, sendo M o ponto médio de AB , $\overline{AM} = \overline{BM}$ e $\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ$. Logo, pelo caso LAL (Figura

4), $AMP \equiv BMP$ e, em particular, $\overline{AP} = \overline{BP}$. Logo, $P \in \mathcal{L}$ e, pela arbitrariedade de P , $s \subset \mathcal{L}$.

Figura 4 – $APM \equiv BPM$ por LAL.



Fonte: o autor

Portanto, $\mathcal{L} = s$. □

Essa proposição prova duas coisas: (1) é possível localizar o ponto médio de um segmento utilizando apenas régua e compasso e (2) isso independe do raio do arco, desde que ele seja maior que ou igual à metade do segmento. Isto é, quaisquer que sejam os dois pontos de interseção dos arcos de mesmo raio e centrados nos extremos do segmento, eles sempre definem uma mesma reta. Essas duas coisas são aproveitadas na atividade 1 da sequência didática do Capítulo 3.

Ainda considerando a Proposição 1.3, observe que \mathcal{L} pode ser visto como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B . De fato, $\forall P \in \mathcal{L}, \exists r > 0$ tal que $P \in \Gamma(A; r) \cap \Gamma(B; r)$, implicando em $\overline{AP} = r = \overline{BP}$. Reciprocamente, se P é um ponto tal que $\overline{AP} = \overline{BP} = r$, para um certo $r > 0$, tem-se $P \in \Gamma(A; r) \cap \Gamma(B; r) \subset \mathcal{L}$. Assim, faz sentido definir essa reta perpendicular como segue abaixo.

Definição 1.4. Sejam A e B dois pontos distintos no plano. A **mediatriz** do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B .

Essa definição e a Proposição 1.3 são aproveitadas na atividade 2 da sequência didática do Capítulo 3.

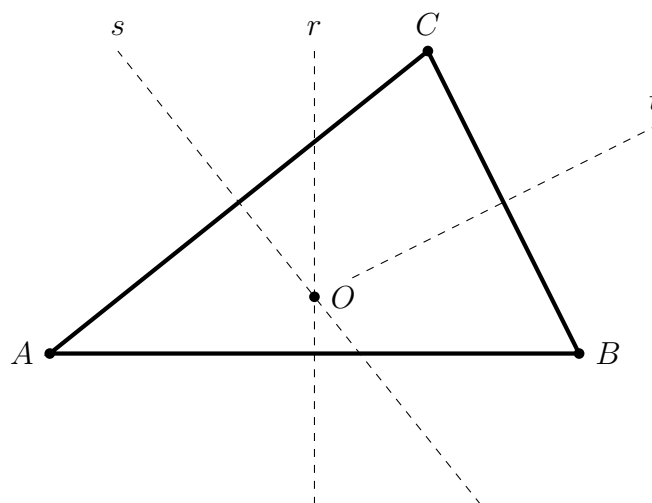
Proposição 1.5. As mediatrizes dos três lados de um triângulo intersectam-se em um único ponto.

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer e r , s e t as mediatrizes de AB , AC e BC , respectivamente. Como A , B e C não são colineares, r , s e t não são paralelas entre si e, por conseguinte, intersectam-se duas a duas. Seja O o ponto de interseção de r e s , como mostra a Figura 5. Como r é a mediatriz de AB e s é a mediatriz de AC , segue

que $\overline{AO} = \overline{BO}$ e $\overline{AO} = \overline{CO}$. Logo, $\overline{BO} = \overline{CO}$, implicando em, por definição de mediatriz, $O \in t$.

Portanto, as mediatrizes dos três lados de todo triângulo intersectam-se num mesmo ponto.

Figura 5 – O ponto O é a interseção de r , s e t .



Fonte: o autor

□

Corolário 1.6. *Três pontos não colineares no plano definem uma circunferência.*

Demonstração. Sejam A , B e C pontos quaisquer não colineares no plano e O o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo ABC . Quer-se provar a existência e a unicidade da circunferência Λ tal que $A, B, C \in \Lambda$.

Pela Proposição 1.5, segue que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ e, portanto, $\Gamma(O; \overline{AO}) = \Gamma(O; \overline{BO}) = \Gamma(O; \overline{CO})$. Isso prova a existência de Λ .

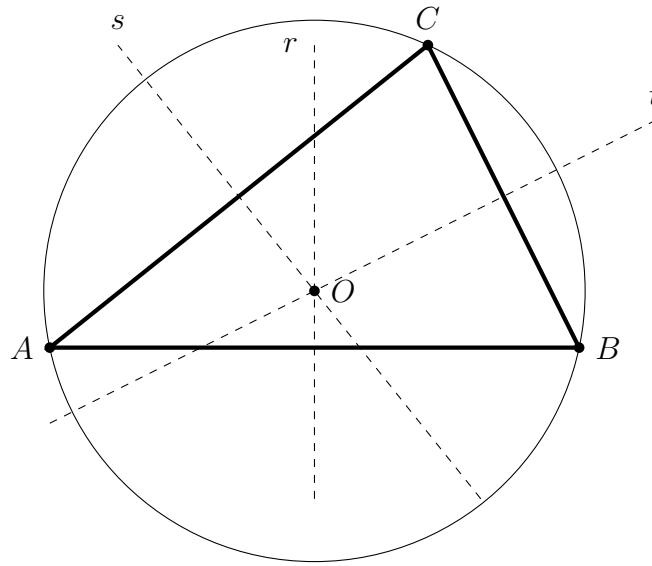
Para provar a sua unicidade, considere Λ' uma circunferência com centro O' e que passa pelos pontos A , B e C . Logo, $\overline{AO'} = \overline{BO'} = \overline{CO'}$. Cada uma dessas equações implica em O' pertencer as mediatrizes dos lados de ABC , implicando em, pela Proposição 1.5, $O' = O$. Portanto, $\Lambda' = \Lambda$. □

Diz-se que a circunferência que passa pelos três vértices de um triângulo é circunscrita a ele ou que ele é inscrito nela. Assim, faz sentido a seguinte definição.

Definição 1.7. O **circuncentro** de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita a ele.

Essa definição, a Proposição 1.5 e o Corolário 1.6 são aproveitados na atividade 3 da sequência didática do Capítulo 3.

Figura 6 – O triângulo ABC é inscrito na circunferência Λ e seu circuncentro é O .



Fonte: o autor

1.4.2.2 Bissetriz e incentro

Proposição 1.8. *Sejam r e s semirretas com origem em O e que formam um ângulo $\alpha > 0$, e \mathcal{L} a mediatriz do segmento AB tal que $A \in r$, $B \in s$ e $\overline{OA} = \overline{OB} > 0$. Então \mathcal{L} é a reta que passa por O e divide α na metade.*

Demonstração. Sejam $A \in r$ e $B \in s$ tais que $\overline{OA} = \overline{OB} > 0$. Provar-se-á, primeiramente, que a mediatriz de AB passa por O e divide α na metade.

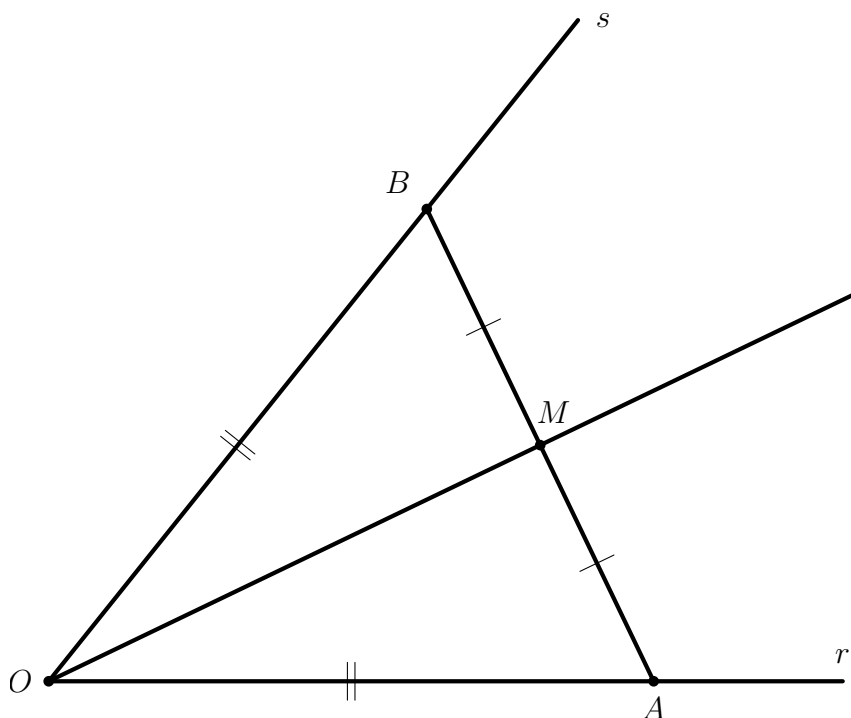
Para isso, seja M o ponto médio de AB . Basta provar, então, que $AB \perp OM$. De fato, como OAB é um triângulo isósceles de base AB , segue que $\widehat{OAM} = \widehat{OBM}$. Isso junto com $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{MA} = \overline{MB}$ implica na congruência entre os triângulos OAM e OBM (ver Figura 7) e, em particular, $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{\alpha}{2}$ e $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$. Como $\widehat{OMA} + \widehat{OMB} = 180^\circ$, segue que $\widehat{OMA} = \widehat{OMB} = 90^\circ$.

Para provar que essa reta sempre é a mesma independentemente do comprimento de OA e OB , tome $A' \in r$ e $B' \in s$ tais que $\overline{OA'} = \overline{OB'} > 0$ e M' o seu ponto médio. Pelo que foi provado acima, a mediatriz de $\overline{A'B'}$ passa por O e divide α na metade, ou seja, $\widehat{A'OM'} = \widehat{AOM'} = \frac{\alpha}{2} = \widehat{AOM}$. Logo, $\widehat{OM'} = \widehat{OM}$.

Portanto, \mathcal{L} é a reta que passa por O e divide α na metade. □

Definição 1.9. A **bissetriz interna** de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que divide o seu ângulo na metade, ou seja, em dois ângulos congruentes.

A Proposição 1.8 prova que é possível construir a bissetriz interna de um ângulo qualquer não nulo apenas com régua e compasso e mostra como fazer isso, além de provar

Figura 7 – Os triângulos OAM e OBM são congruentes por LAL.

Fonte: o autor

que isso independe do tamanho da abertura do compasso. Isso, juntamente com a definição de bissetriz interna, é aproveitado na atividade 4 da sequência didática do Capítulo 3, em especial no seu primeiro momento de exercícios.

Às vezes, a bissetriz interna de um ângulo é entendida como toda a reta e não apenas a semirreta que o divide na metade. Essa definição mais ampla de bissetriz livra a seguinte definição de ambiguidades.

Definição 1.10. A **bissetriz externa** de um ângulo convexo é a bissetriz interna do seu ângulo externo.

Ora, um ângulo tem dois ângulos externos, um no sentido horário e o outro no sentido anti-horário, deixando ambíguo, pelo entendimento mais restrito de bissetriz interna, a qual ângulo externo a definição acima se refere. Entendendo a bissetriz interna como reta, essa ambiguidade desaparece, pois, pela congruência dos ângulos opostos pelo vértice, as bissetrizes internas de ambos os ângulos externos coincidem.

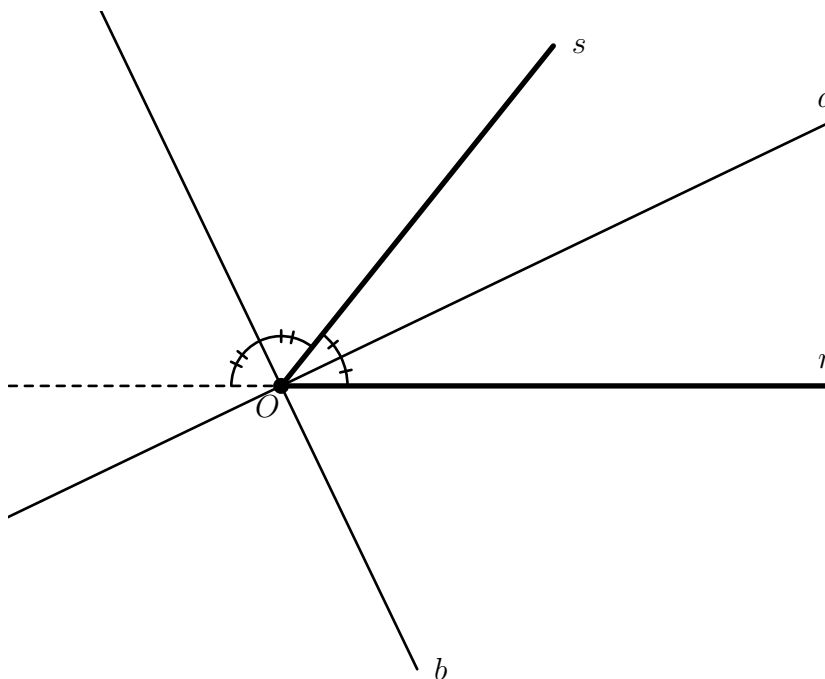
Com esse entendimento sobre bissetrizes interna e externa de um ângulo, verifica-se a seguinte proposição.

Proposição 1.11. *As bissetrizes interna e externa de todo ângulo são perpendiculares.*

Demonstração. Sejam α um ângulo qualquer com vértice em O e as semirretas r e s como seus lados, a sendo a sua bissetriz interna e b , a sua bissetriz externa. Assim,

$$\angle(r, a) = \angle(s, a) = \frac{\alpha}{2} \text{ e } \angle(s, b) = \angle(r, b) = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

Figura 8 – As bissetrizes interna e externa de todo ângulo são perpendiculares



Fonte: o autor

$$\text{Logo, } \angle(a, b) = \angle(s, a) + \angle(s, b) = \frac{\alpha}{2} + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ. \quad \square$$

Com o auxílio da Figura 8, percebe-se que, dados duas retas concorrentes quaisquer, qualquer um dos quatro ângulos que elas formam geram as mesmas bissetrizes.

Esta última proposição, juntamente com a definição de bissetriz externa, são aproveitadas no segundo momento de exercícios da atividade 4 da sequência didática do Capítulo 3.

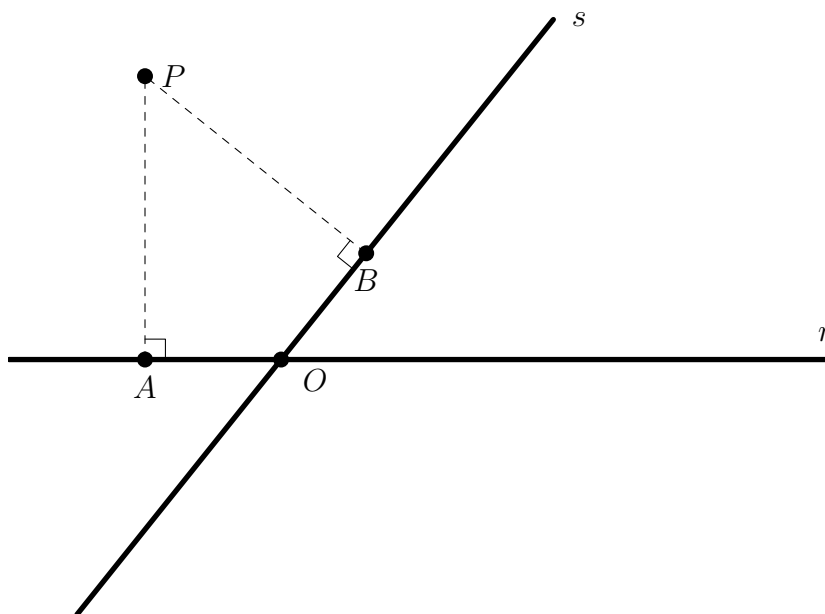
Proposição 1.12. *Sejam r e s duas retas concorrentes e \mathcal{L} o lugar geométrico dos pontos que equidistam de r e s . Então \mathcal{L} é as bissetrizes de r e s .*

Demonstração. Sejam P um ponto no plano, O o ponto de interseção de r e s , e A e B os pés das perpendiculares a r e s , respectivamente, que passam por P (ver Figura 9). Suponha, primeiramente, que $P \in \mathcal{L}$. Logo, $\overline{PA} = \overline{PB}$ e, como $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\hat{A} = \hat{B}$, segue da congruência de triângulos retângulos que $OAP \equiv OBP$. Em particular, $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$ e, portanto, P pertence a uma das bissetrizes formadas por r e s .

Agora, suponha que P pertence a uma das bissetrizes de r e s . Assim, $\hat{A} = \hat{B}$ e $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$, implicando, por LAA_O, em $OAP \equiv OBP$. Em particular, $\overline{PA} = \overline{PB}$ e, portanto, $P \in \mathcal{L}$.

Portanto, \mathcal{L} é as bissetrizes de r e s . □

Figura 9 – As bissetrizes definidas por duas retas concorrentes é o lugar geométrico dos pontos que equidistam a essas mesmas retas



Fonte: o autor

Corolário 1.13. *As bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo encontram-se todas num mesmo ponto.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer no plano, as semirretas r , s e t as bissetrizes internas dos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e I o ponto de interseção de r e s . Pela Proposição 1.12, como $I \in r$ e $I \in s$, segue que I equidista de \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} e também equidista de \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{BC} . Por transitividade, I equidista de AB e BC e, novamente pela Proposição 1.12, $I \in t$. Logo, r , s e t intersectam-se todas num mesmo ponto. \square

Corolário 1.14. *Num triângulo qualquer no plano existe uma, e somente uma, circunferência tangente aos três lados do triângulo.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.13, as três bissetrizes do triângulo intersectam-se num mesmo ponto I . Pela Proposição 1.12, a distância de I a qualquer um dos lados do triângulo é a mesma. Assim, os pés das perpendiculares a cada um dos lados do triângulo e que passam por I define uma circunferência tangente aos três lados do triângulo.

Agora, tome uma circunferência qualquer tangente aos três lados do triângulo. Logo, o centro dessa circunferência é equidistante aos seus três lados. Novamente pela Proposição 1.12, o centro da circunferência pertence a cada uma das três bissetrizes e, pelo Corolário 1.13, é igual a I . Portanto, existe somente uma circunferência tangente aos três lados do triângulo. \square

Diz-se que a circunferência que tange os três lados de um triângulo é inscrita nele. Assim, faz sentido a seguinte definição.

Definição 1.15. O **incentro** de um triângulo qualquer é o centro da circunferência inscrita nele.

Por fim, a Proposição 1.12 é aproveitada, especificamente, na atividade 5 da sequência didática do Capítulo 3 enquanto que os seus dois corolários são aproveitados na sexta e última atividade dessa mesma sequência.

2 Resultados e análise

2.1 Associações entre paradoxos e habilidades da BNCC

A pesquisa sobre os paradoxos matemáticos que poderiam ser utilizados como estratégia de ensino e popularização da Matemática no EFAF e as associações entre eles e habilidades da BNCC resultou em um quadro que foi apresentado no III Workshop Online do Profmat, ocorrido nos dias 29 a 31 de agosto de 2025, por meio de uma comunicação oral sobre resultados parciais desta dissertação (BISPO, 2025). Durante a apresentação, houve interesse por parte dos ouvintes da disponibilização do quadro. Apresenta-se, então, nesta seção, a versão atualizada e completa dele.

Quadro 1 – Associação entre paradoxos e habilidades da BNCC

Paradoxos	Cl.	Temas abordados	Habilidades
Paradoxo da Dicotomia	F	Fração	EF06MA07, EF06MA10, EF07MA08 e EF07MA10
		Sequências numéricas	EF07MA14, EF07MA15, EF08MA10 e EF08MA11
		Representação gráfica de uma equação linear com duas incógnitas	EF08MA07
		Sistema de equações polinomiais de 1º grau	EF08MA08
		Ponto médio, mediatrizes e bissetrizes	EF08MA15 e EF08MA17
		Função	EF09MA06
		Razão entre grandezas	EF09MA07
		Fatoração algébrica, produtos notáveis e equações polinomiais de 2º grau	EF09MA09
		Ponto médio no plano cartesiano	EF09MA16
Continua na próxima página			

Continuação			
Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga	F	Fração Dízima periódica Representação gráficas de uma equação linear com duas incógnitas Sistema de equações polinomiais do 1º grau Sequências numéricas Função	EF06MA07, EF06MA10, EF07MA08 e EF07MA10 EF08MA05 EF08MA07 EF08MA08 EF07MA14, EF07MA15, EF08MA10 e EF08MA11 EF09MA06
Paradoxo da Amizade	V	Médias Teorema de Pitágoras	EF09MA22 e EF09MA23 EF09MA14
Paradoxo da Batata	V	Porcentagens Grandezas proporcionais	EF07MA02 EF07MA17
Paradoxo da Bela Adormecida	V	Frequência e probabilidade	EF07MA34
Paradoxo da Linha Costeira	V	Unidade de medida	EF09MA18
Paradoxo da Roda de Aristóteles	F	Simetria Comprimento de uma circunferência	EF07MA21 e EF08MA18 EF07MA33
Paradoxo da Rotação da Moeda	V	Comprimento de uma circunferência Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal Arcos e ângulos de circunferências	EF07MA33 EF07MA23 e EF09MA10 EF09MA11
Paradoxo de Braess	V	Sistema de equações polinomiais do 1º grau	EF08MA08
Paradoxo de Galileu	V	Quadrados perfeitos	EF06MA03 e EF08MA02
Paradoxo de Hyperwebster	V	Princípio multiplicativo	EF08MA03
Continua na próxima página			

Continuação			
Paradoxo de Ross-Littlewood	V	Números naturais Sequências numéricas	EF06MA01 EF07MA15, EF07MA16, EF08MA10 e EF08MA11
Paradoxo do Anel	V	Teorema de Pitágoras Volume de corpos redondos	EF09MA14 EF09MA19
Paradoxo do Aniversário	V	Probabilidade	EF08MA22 e EF09MA20
Paradoxo do Bolo de Gabriel	V	Sequências numéricas Volume de cilindros Volume e área de blocos retangulares	EF07MA14, EF07MA15, EF08MA10, EF08MA11 EF09MA19 EF08MA19 e EF08MA21
Paradoxo do Hotel Infinito	V	Números naturais: múltiplos, primos e potências	EF06MA03, EF06MA05 e EF06MA06
Paradoxo do Monty Hall	V	Probabilidade	EF09MA20
Paradoxo do Quadrado Perdido	F	Semelhança de triângulos	EF09MA12 e EF09MA14
Paradoxo dos Três Dados	V	Probabilidade	EF07MA34
Paradoxo Geométrico $64=65$	F	Semelhança de triângulos	EF09MA12 e EF09MA14

Fonte: o autor

De todos os paradoxos apresentados no Quadro 1, investigou-se, de maneira mais profunda, dois deles: o Paradoxo da Dicotomia e o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga. Para ver uma apresentação e análise dos demais, recomenda-se ao leitor ver as dissertações do Profmat citadas na Seção 1.2 ou os vídeos do canal [Tem Ciência](#) — canal do YouTube de popularização da Matemática e da Ciência no geral — do doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) [Daniel da Silva Nunes](#).

Note que os Paradoxos da Dicotomia e de Aquiles e a Tartaruga possuem uma quantidade maior de associações percebidas comparados aos demais. Isso se deve ao fato de que ambos foram investigados mais profundamente neste trabalho, percebendo-se mais associações na medida que a investigação matemática avançava. Assim, presume-se que

outras associações entre os outros paradoxos e habilidades da BNCC podem ser percebidas por meio de investigações análogas dos outros paradoxos. Espera-se, então, que o Quadro 1 possa auxiliar futuras pesquisas nessa temática e, como resultado delas, ser expandido.

2.2 Paradoxos de Zenão

Nesta seção são apresentados e investigados matematicamente dois paradoxos: o Paradoxo da Dicotomia e o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, ambos de Zenão de Eleia. As investigações dar-se-ão por demonstrações matemáticas e resoluções de problemas elaborados pelo próprio autor deste trabalho utilizando técnicas básicas — indução, contradição, desigualdades, entre outras — presentes em treinamentos olímpicos, embora, talvez, pouco aproveitadas em salas de aula regulares. Recomenda-se, então, ao leitor que leia e releia com atenção o enunciado de cada paradoxo a fim de entender plenamente as suas (aparentes) contradições, além de tentarem resolver os problemas propostos antes de ver as suas soluções.

Zenão de Eleia (490 a. C. – 430 a. C.) foi um filósofo grego, amigo e discípulo de Parmênides, que, assim como o seu mestre, opunha-se às ideias de Heráclito, afirmando que a mudança e o movimento eram impossíveis, meramente ilusões dos sentidos. Opunha-se também à ideia dos pitagóricos de divisibilidade do espaço e do tempo.

Ele foi um dos primeiros a usar e organizar os argumentos e conclusões de suas ideias em prosa, diferentemente dos seus contemporâneos e antecessores, que afirmavam os seus pensamentos filosóficos através de poesias sem apresentar argumentos convincentes (DOWDEN, [s. d.]). Além disso, foi pioneiro na utilização de algumas técnicas de argumentação e persuasão, como *reductio ad absurdum* — na qual assume-se que a proposição que se quer provar ser verdadeira é falsa e chega-se em um absurdo, concluindo, então, que a proposição é de fato verdadeira — e *modus tollens* — na qual prova-se que uma proposição implica em outra e depois prova-se que a segunda é falsa, concluindo-se, então, que a primeira também deve ser falsa (KATZ, 2009).

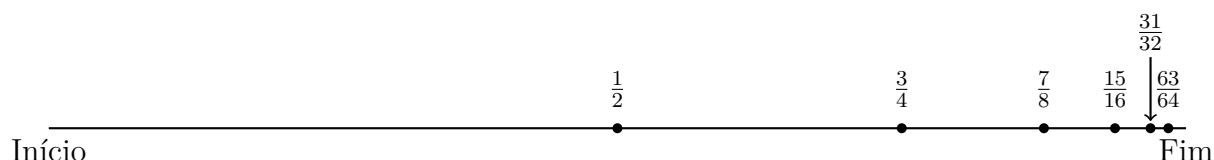
Segundo Proclo (DOWDEN, [s. d.]), Zenão enunciou pelo menos quarenta paradoxos em seus livros, muitos não chegando a esta era, utilizando neles as técnicas supracitadas. Abaixo enunciar-se-ão e investigar-se-ão os dois mais famosos desses paradoxos.

2.2.1 Paradoxo da Dicotomia

Paradoxo da Dicotomia. Um corredor pretende percorrer certo trajeto finito em linha reta. Ora, antes que ele alcance o final desse trajeto, deve percorrer $\frac{1}{2}$ dele. Depois disso, ele deverá percorrer a metade do trecho restante, ou seja $\frac{1}{4}$ do trajeto total. Ainda, ele deverá percorrer a metade do quarto que falta, ou seja, $\frac{1}{8}$. Analogamente, ele percorrerá

mais $1/16$, $1/32$, $1/64$ e assim *ad infinitum* do trajeto, de sorte que o corredor precisará percorrer infinitos trechos antes de chegar no fim do trajeto. Logo, é impossível que o corredor alcance o final do trajeto.

Figura 10 – Paradoxo da Dicotomia



Fonte: o autor

Esse paradoxo por vezes é enunciado regressivamente, isto é, antes de dar o primeiro passo, o corredor precisaria passar pelo ponto referente a $1/2$ do passo, mas, antes disto, deveria passar pelo ponto referente a $1/4$ do passo, e assim regressivamente *ad infinitum*, de modo que o corredor nem mesmo conseguiria dar o primeiro passo, sendo impossível que se mova. Neste trabalho, será utilizada a versão progressiva do paradoxo, doravante chamada de versão clássica.

Há pelo menos três premissas que possam ter levado Zenão a concluir que o corredor nunca alcançaria o final do trajeto, embora não se saiba certamente quais foram as que ele considerou. São elas:

- (i) A soma dos infinitos deslocamentos é infinita;
- (ii) O tempo que levaria para o corredor completar o trajeto é infinito; e
- (iii) Há infinitas etapas a serem finalizadas antes de se chegar ao final do trajeto, sendo isto, então, impossível.

Vale salientar que os gregos antigos não concebiam somas de infinitos termos, sendo possível que Zenão simplesmente tivesse assumido que a soma de infinitos deslocamentos ou dos infinitos intervalos de tempo fosse infinita.

Intuitivamente, a primeira premissa parece ser a mais fraca, pois cada trecho é uma parte disjunta do trajeto, com exceção de suas extremidades, de modo que, somando-se (juntando-se) cada deslocamento, o resultado deveria ser menor que ou igual ao comprimento total do trajeto original, sendo, por este o ser, finito — note que, *a priori*, é possível que o resultado seja menor que o trajeto, pois não se sabe se todos os pontos do trajeto estão contidos em algumas de suas frações —, mas isso é uma intuição, carecendo de uma demonstração matemática rigorosa. Para isso, considerar-se-á, sem perda de generalidade, que o trajeto tem comprimento igual a uma unidade, simplificando o problema da soma dos infinitos deslocamentos ser igual ao comprimento do trajeto todo ao seguinte problema.

Problema 2.1. Prove que o resultado da soma infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

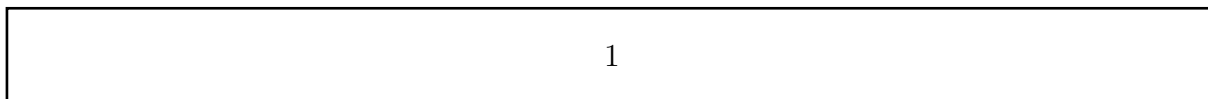
é igual a 1.

Doravante, por vezes, essa soma infinita denotar-se-á por S_∞ . Claramente, S_∞ é uma série como se entende em (MUNIZ, 2022) e (STEWART, 2015), denotando por S_n as somas parciais dos n primeiros deslocamentos. Embora o termo soma infinita seja, provavelmente, mais significativo para o aluno do que série, referir-se a S_n como soma parcial, além de usar e explicar, julgando o docente oportuno e a depender do nível da turma, outros termos próprios do Cálculo e da Análise, como limite, convergência e divergência, desenvolve, entre outras coisas, as competências gerais 2 e 4 da BNCC.

Serão apresentadas três soluções para o problema. A primeira solução utiliza a ideia de fração como parte de um inteiro, que está diretamente associada à habilidade EF06MA07. As outras duas utilizam equações e inequações, entendendo-se que estas “devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos” (BRASIL, 2018, p. 271), além de operações entre frações, desenvolvendo habilidades associadas a elas.

Solução 1. Considere a barra de área igual a 1 abaixo.

Figura 11 – Barra de área igual a 1



Fonte: o autor

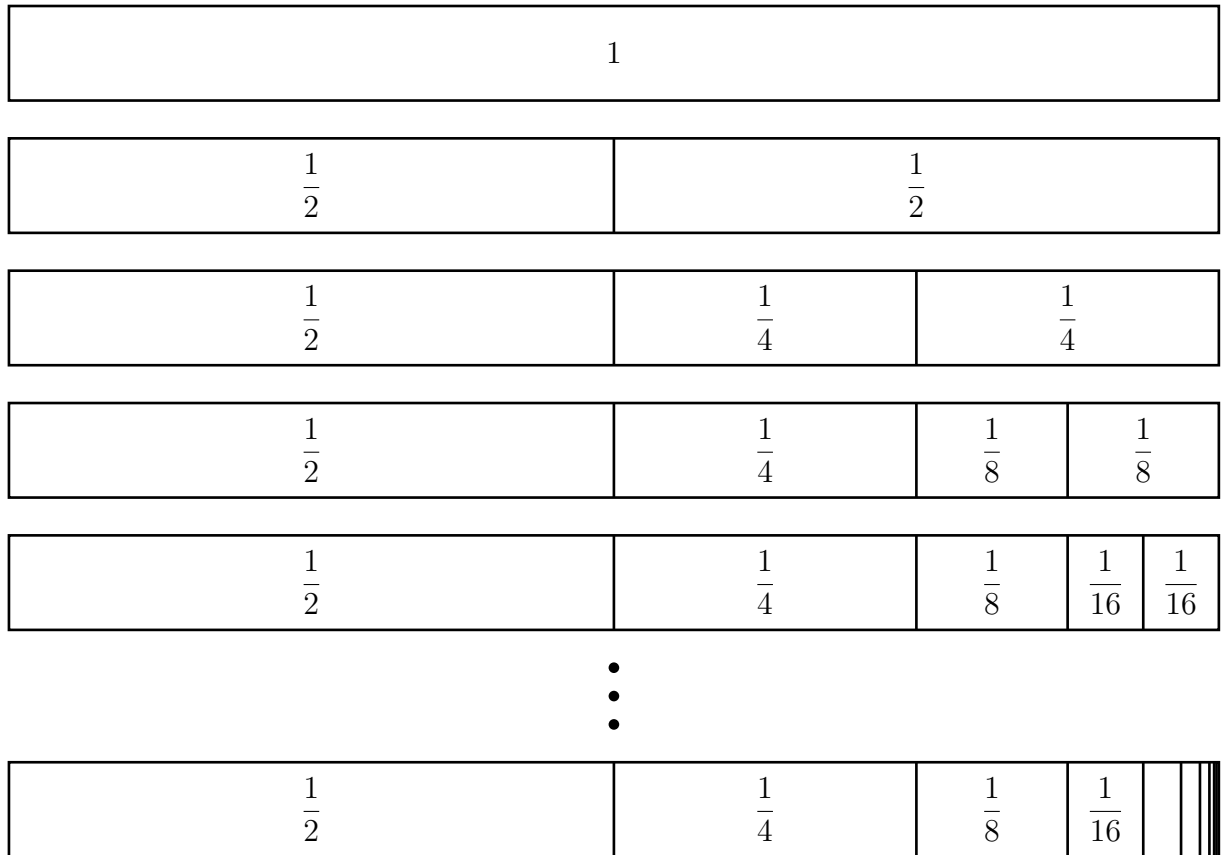
Dividindo-a na metade, formam-se dois retângulos congruentes com áreas iguais a $\frac{1}{2}$. Dividindo o retângulo resultante à direita na metade, formam-se dois novos retângulos congruentes, mas, agora, com áreas iguais a $\frac{1}{4}$. Dividindo o retângulo resultante à direita na metade, formam-se dois outros retângulos congruentes cujas áreas são iguais a $\frac{1}{8}$. Seguindo assim em diante sem parar, como mostra a Figura 12, percebe-se que a área de cada um dos retângulos resultantes corresponde a uma das parcelas da soma infinita e vice-versa. Com efeito, por construção, a área de cada um dos retângulos resultantes é uma potência de $\frac{1}{2}$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, constrói-se o retângulo de área igual $\frac{1}{2^n}$ na n -ésima dicotomia.

Como, novamente por construção, a soma das áreas dos infinitos retângulos é igual a área da barra original, segue-se que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$$

□

Figura 12 – Dicotomias sucessivas da barra



Fonte: o autor

A segunda solução vale-se da identificação de regularidades e padrões de sequências numéricas, habilidade necessária na Educação Básica para

o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento — pensamento algébrico — que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2018, p. 270).

Solução 2. Observe o seguinte padrão na soma dos primeiros deslocamentos do trajeto:

$$\frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2^2 - 1}{2^2};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \frac{2^3 - 1}{2^3};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = \frac{2^4 - 1}{2^4};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} + \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = \frac{2^5 - 1}{2^5}.$$

Indutivamente, espera-se que a soma dos primeiros seis deslocamentos seja $\frac{63}{64} = \frac{2^6 - 1}{2^6}$. De forma mais geral, espera-se que S_n seja igual a $\frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Para provar isso, note que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ 2 \cdot S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ 2 \cdot S_n - S_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ S_n &= 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Agora, observe o seguinte:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} = 0,5; & \frac{1}{16} = 0,0625; & \frac{1}{128} = 0,0078125; \\ \frac{1}{4} = 0,25; & \frac{1}{32} = 0,03125; & \frac{1}{256} = 0,00390625; \\ \frac{1}{8} = 0,125; & \frac{1}{64} = 0,015625; & \frac{1}{512} = 0,001953125. \end{array}$$

Ou seja, na medida que n cresce, $\frac{1}{2^n}$ aproxima-se de 0 e, conseqüentemente, S_n se aproxima de 1.

De forma mais rigorosa, para todo número $L > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{L} - 1$. Pela Desigualdade de Bernoulli,

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n > 1 + \left(\frac{1}{L} - 1\right) = \frac{1}{L}.$$

Logo, $\frac{1}{2^n} < L$. Ou seja, para qualquer número positivo, sempre existe um n suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2^{n+2}} > \frac{1}{2^{n+3}} > \dots$ são todos menores que esse número. Assim,

para n suficientemente grande, sempre existe S_n tão próximo de 1 quanto se queira, de sorte que $S_\infty = 1$.

□

A terceira solução vale-se, além de outros, do conceito de dízimas periódicas, entendendo-a como a soma de infinitos termos.

Solução 3. Primeiramente, prove-se que S_∞ é um número. Como S_∞ é a soma de números positivos, basta provar que ele é limitado superiormente (completude de \mathbb{R}), ou seja, que $\exists L \in \mathbb{R} : S_\infty < L$. Dessa forma, note que

$$\begin{aligned} S_\infty &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &= \frac{15}{16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{16^2} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{16^3} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{16^4} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{16^5} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{16^6} \cdot \frac{15}{16} + \dots \\ &< 1 + \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{1}{1.000} \cdot 1 + \frac{1}{10.000} \cdot 1 + \frac{1}{100.000} \cdot 1 + \frac{1}{1.000.000} \cdot 1 + \dots \\ &< 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + 0,00001 + 0,000001 + \dots = 1,11111\dots = 1, \bar{1}. \end{aligned}$$

Logo, S_∞ é de fato limitado superiormente e, conseqüentemente, um número real.

Agora, provar-se-á que $S_\infty = 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) \\ S_\infty &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S_\infty \\ \frac{1}{2} \cdot S_\infty &= \frac{1}{2} \\ S_\infty &= 1 \end{aligned}$$

□

Orientar os alunos por meio da segunda solução é levá-los a perceberem que a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realmente se aproxima de 1 na medida que n tende ao infinito. Isso os expõe previamente às noções básicas do Cálculo, preparando-os para estudos futuros mais avançados. Já a terceira solução pode ser aproveitada como uma aplicação ao final de uma sequência didática sobre dízimas periódicas e representação de números cuja parte decimal é infinita como a soma infinita na qual os termos são a razão entre seus algarismos e potências de 10 com expoentes cada vez menores. Nos dois casos, ambas são úteis para exercitar as habilidades referentes às operações entre frações e às equações e inequações.

A segunda premissa é refutada pelos mesmos argumentos da primeira quando se entende que o tempo que o corredor leva para percorrer um dos trechos é proporcional a esse mesmo trecho, isso supondo que o corredor percorre o trajeto a uma velocidade constante. De fato, isso se resume no seguinte problema.

Problema 2.2. Suponha que o corredor do Paradoxo da Dicotomia percorra o trajeto sempre a uma velocidade constante v . Prove que ele termina a corrida em um intervalo de tempo finito e encontre o valor de t_∞ em função de v e S_∞ .

Solução. Já se viu que, quanto ao comprimento do trajeto, seria possível que o corredor terminasse a corrida. O que se quer provar agora é que ele terminaria esse percurso finito em um intervalo de tempo também finito.

Sejam t_∞ o instante em que o corredor completa o trajeto e Δt_n o intervalo de tempo em que ele leva percorrendo o n -ésimo trecho do trajeto, ou seja, percorrer uma distância de $\frac{1}{2^n}$. Logo, $\Delta t_n = \frac{1}{2^n \cdot v}$ e, como $t_\infty = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots$, tem-se

$$t_\infty = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \right) = \frac{1}{v} \cdot S_\infty.$$

Portanto, t_∞ é um número real, ou seja, o corredor percorrerá todos os trechos em um intervalo de tempo finito. \square

Agora, supondo-se que o corredor, com velocidade inicial nula, move-se com uma aceleração constante, tem-se o seguinte problema.

Problema 2.3. Suponha que o corredor do Paradoxo da Dicotomia percorra o trajeto variando a sua velocidade, que inicialmente (em t_0) é nula, a uma aceleração constante a . Logo $S(t) = \frac{1}{2}at^2$, sendo $S(t)$ a posição do corredor no instante t contado a partir do início do percurso. Prove que ele termina a corrida em um intervalo de tempo t_∞ finito, ou seja, que $S_\infty = S(t_\infty) = \frac{1}{2}at_\infty^2$, e encontre o valor de t_∞ em função de a e S_∞ .

Solução. Sejam t_n , $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ e $\Delta S_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2^n}$ o instante em que o corredor completa o n -ésimo trecho, o intervalo de tempo que ele leva percorrendo-o e o comprimento dele, respectivamente.

Dessa forma, $S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n$, $t_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_n$ e $S_n = S(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $t_n = \sqrt{\frac{2S_n}{a}}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} \\ &= \sqrt{\frac{2S_n}{a}} - \sqrt{\frac{2S_{n-1}}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \left(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \left(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \end{aligned}$$

Ora, $\forall n > 1$, $\sqrt{S_n} > \sqrt{S_1} = \sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$, implicando em $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} > 1$ e, consequentemente, $\Delta t_n < \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \Delta S_n$.

Logo,

$$t_\infty < \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \left(\sqrt{\Delta S_1} + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 + \dots \right) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \left(S_\infty - \Delta S_1 + \sqrt{\Delta S_1} \right)$$

e, portanto, finito.

Sendo assim, de $S_\infty = \frac{1}{2}at_\infty^2$ segue que $t_\infty = \sqrt{\frac{2S_\infty}{a}}$. □

Quanto às habilidades da BNCC, os dois últimos problemas acima estão associados, principalmente, a EF09MA06, EF09MA07 e EF09MA09.

Para se entender a terceira premissa, vale enunciar o Paradoxo da Dicotomia numa maneira alternativa.

Paradoxo da Dicotomia (enunciado alternativo). Um corredor pretende percorrer certo trajeto em linha reta. Ora, antes que ele alcance o final desse trajeto, deve passar pelo seu ponto médio. Depois disso, ele deverá passar pelo ponto médio do trecho restante, e depois pelo ponto médio da segunda metade desse restante, e depois pelo ponto médio da segunda metade da segunda metade desse restante, e assim *ad infinitum*, de sorte que sempre haverá um novo ponto médio para ser ultrapassado pelo corredor, ou seja, o corredor deverá ultrapassar infinitos pontos para chegar ao final do trajeto. Porém o infinito é algo que não tem fim, logo é impossível que o corredor finalize essa corrida.

O que o corredor deve então resolver é uma supertarefa — uma sequência contável de tarefas (primeira tarefa, segunda tarefa, assim por diante) que devem ser realizadas dentro de um intervalo finito de tempo —, sendo a n -ésima tarefa chegar no n -ésimo ponto médio. Ora, os problemas referentes às premissas anteriores resolvem essa questão. Supondo que a velocidade do corredor é constante e igual a S_∞ /minuto, segue que o corredor completa a primeira tarefa, chegar no primeiro ponto médio, em 30 segundos; a segunda, em 15 segundos; a terceira, em 7,5 segundos e assim por diante, de sorte que ele completará a n -ésima tarefa depois de terem passado $t_n = \frac{1}{2^n}$ minutos, completando a supertarefa ao final de $t_\infty = 1$ minuto. A conclusão seria a mesma considerando que o corredor está na situação do Problema 2.3.

Por fim, enuncia-se uma versão do Paradoxo da Dicotomia para o movimento de rotação. Enquanto que a versão clássica é aproveitada, especialmente, nas três primeiras atividades da sequência didática do Capítulo 3, o Paradoxo da Dicotomia de Rotação é aproveitado nas três últimas.

Paradoxo da Dicotomia de Rotação. Uma bailarina pretende fazer um movimento de giro de uma volta completa em relação ao seu próprio eixo. Entretanto, para completar uma volta, antes ela terá que completar meia volta. Porém, antes disso, ela terá que completar um quarto de volta. Mas, ainda, antes disso, ela terá que completar um oitavo de volta. Ora, semelhantemente, ela precisará completar 16 avos de volta, 32 avos de volta, 64 avos de volta e assim por diante, de sorte que ela precisará completar infinitas frações de volta até, finalmente, completar o movimento. Portanto, é impossível que a bailarina realize o movimento de giro completo.

2.2.2 Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

Mais uma vez, o que se sabe sobre os argumentos de Zenão são a partir dos escritos de seus oponentes, como Aristóteles, e de comentadores, como Simplicio da Cilícia (490 d. C – 560 d. C.). No seu enunciado do paradoxo, Aristóteles não se referiu a uma tartaruga, mas simplesmente a um corredor que competia com Aquiles, tendo essa sido adicionada por Simplicio. Pelo reconhecimento, pela ludicidade e para enfatizar ainda mais a absurdez do paradoxo, optou-se em enunciar a versão de Simplicio.

Paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Aquiles, um dos mais famosos heróis gregos e o mais veloz deles, apostou corrida com uma lenta tartaruga. Para ser mais justo, ele lhe deu certa vantagem à frente dele. Dada a largada, Aquiles começou a correr em alta velocidade e logo chegou ao ponto onde a tartaruga iniciara, porém esta já havia lentamente caminhado para outro ponto mais à frente. Aquiles logo chegou também a esse ponto, porém mais uma vez a tartaruga, em seus lentos passos, já havia caminhado um pouco mais. Semelhantemente, toda vez que Aquiles chegava em algum ponto anteriormente ocupado pela tartaruga, esta já prosseguira a outro mais à frente, de sorte que Aquiles nunca conseguiu alcançar a tartaruga, perdendo a disputa.

Note que o argumento não depende dos comprimentos do trajeto ou da vantagem dada à tartaruga, pois se supõe que Aquiles sempre alcança com brevidade qualquer ponto onde a tartaruga estivera. O argumento de Zenão ataca novamente a ideia de que o tempo e o espaço podem ser divididos infinitamente, mostrando que isso implicaria em Aquiles, não importando o quanto avançasse, nunca alcançar a tartaruga, pois ela sempre estará à frente dele, precisando ele ultrapassar infinitos pontos antes de finalmente ultrapassá-la, sendo assim, impossível de vencê-la. Em outras palavras, Aquiles precisa completar uma supertarefa.

Investigar-se-á abaixo este paradoxo por meio de alguns problemas solucionáveis por meio de conteúdos do EFAF, a saber: sequências numéricas, dízimas periódicas equações, inequações e funções. $S(t)$ e $s(t)$ denotarão as posições, em metros, de Aquiles e da tartaruga, respectivamente, no instante t avaliado em segundos.

O primeiro deles é referente aos conteúdos de seqüências numéricas recursivas EF08MA11 e dízimas periódicas abordados, normalmente, no 8º ano.

Problema 2.4. Suponha que Aquiles e uma tartaruga vão disputar uma corrida de 100 metros a velocidades constantes de 20 m/s e 2 m/s, respectivamente. Como a tartaruga é mais lenta, Aquiles iniciará a corrida na linha de largada, representada por $s_0 = 0$, e a tartaruga, no ponto $s_1 = 80$ m.

- Quando Aquiles chegar na posição inicial da tartaruga, ela já terá andado para uma posição s_2 . Quantos metros ela terá andado até s_2 ?
- Quando Aquiles chegar na posição s_2 , a tartaruga já estará numa posição s_3 . Quantos metros ela terá andado de s_2 para s_3 ?
- Semelhantemente, sendo s_n a posição em que a tartaruga estará quando Aquiles alcançar a posição s_{n-1} , quantos metros a tartaruga terá andado de s_3 a s_4 , de s_4 a s_5 e de s_5 a s_6 ?
- Determine os sete primeiros termos da seqüência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Considerando a seqüência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, explique porque, apesar de precisar ultrapassar infinitos pontos num intervalo de tempo finito antes de alcançar a tartaruga, Aquiles consegue ultrapassá-la.

Solução.

- Aquiles demorará $\frac{s_1 - s_0}{20} = \frac{80 - 0}{20} = 4$ segundos para chegar em s_0 . Logo, a tartaruga terá andado $4 \cdot 2 = 8$ metros até s_2 .
- Pelo item anterior, Aquiles terá que andar 8 metros de s_1 a s_2 , fazendo isso em $\frac{8}{20} = 0,4$ segundos. Logo, a tartaruga terá andado $0,4 \cdot 2 = 0,8$ metros de s_2 a s_3 .
- Seguindo de forma análoga aos itens anteriores:
 - $\frac{0,8}{20} = 0,04$ segundos $\Rightarrow 0,04 \cdot 2 = 0,08$ metros;
 - $\frac{0,08}{20} = 0,004$ segundos $\Rightarrow 0,004 \cdot 2 = 0,008$ metros; e
 - $\frac{0,008}{20} = 0,0004$ segundos $\Rightarrow 0,0004 \cdot 2 = 0,0008$ metros.

Portanto, a tartaruga terá andado 0,08 metros, 0,008 metros e 0,0008 metros de s_3 a s_4 , de s_4 a s_5 e de s_5 a s_6 , respectivamente.

- Utilizando os resultados dos itens anteriores, tem-se

- $s_1 = 80$ metros;
- $s_2 = s_0 + 8 = 88$ metros;
- $s_3 = s_1 + 0,8 = 88,8$ metros;
- $s_4 = s_2 + 0,08 = 88,88$ metros;
- $s_5 = s_3 + 0,008 = 88,888$ metros;
- $s_6 = s_4 + 0,0008 = 88,8888$ metros; e
- $s_7 = s_5 + 0,00008 = 88,88888$ metros.

(e) Note que os termos da sequência se aproximam (convergem) cada vez mais da dízima periódica $88,\bar{8}$. De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= s_n + \frac{s_n - s_{n-1}}{20} \cdot 2 \\
 s_{n+1} - s_n &= \frac{s_n - s_{n-1}}{10} \\
 s_{n+1} - s_n &= \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{10^2} \\
 s_{n+1} - s_n &= \frac{s_{n-2} - s_{n-3}}{10^3} \\
 &\vdots \\
 s_{n+1} - s_n &= \frac{s_1 - s_0}{10^n} = \frac{80}{10^n} = \frac{8}{10^{n-1}}
 \end{aligned}$$

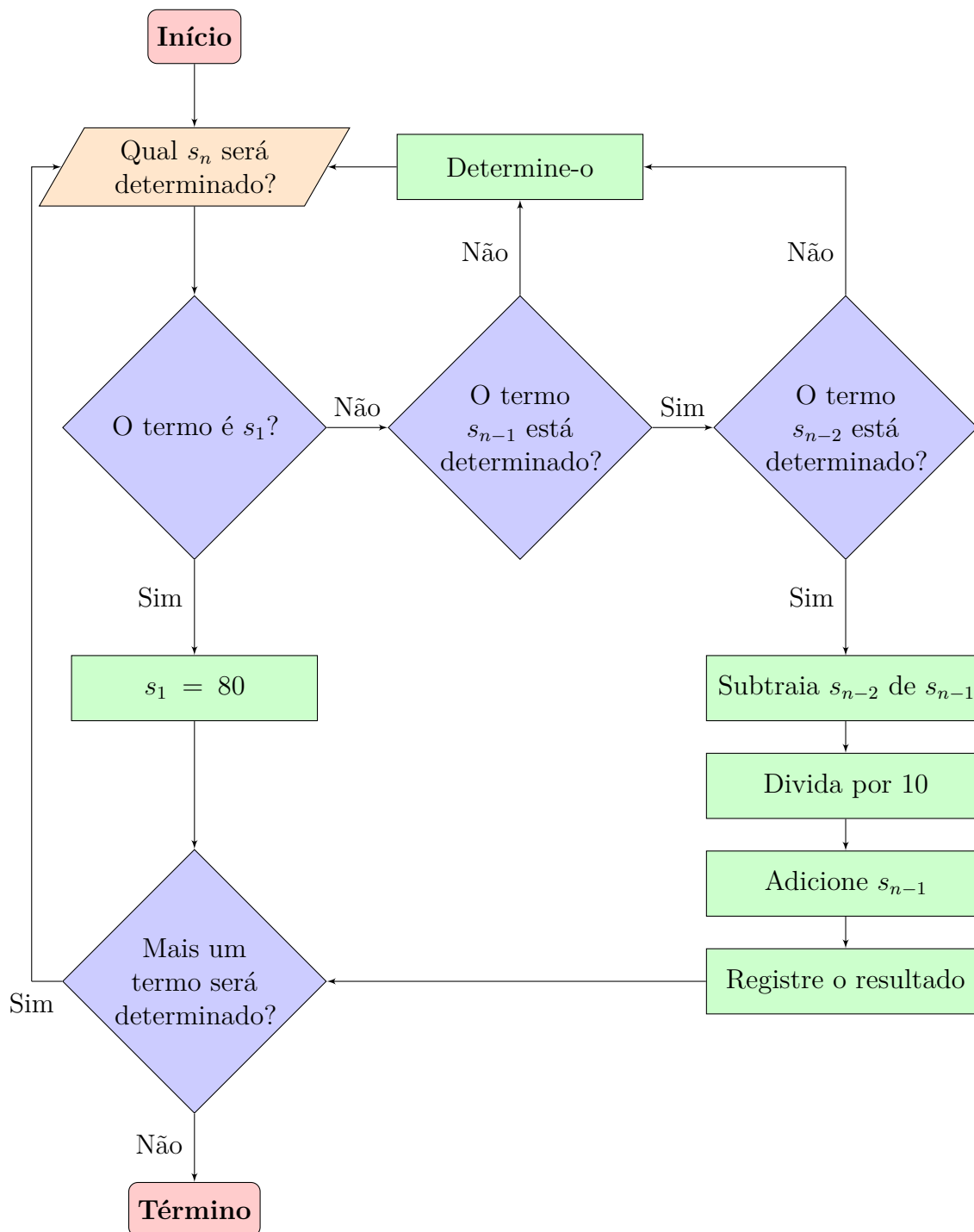
Logo,

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= s_n + \frac{s_n - s_{n-1}}{10} \\
 &= s_{n-1} + \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{10} + \frac{s_n - s_{n-1}}{10} \\
 &= s_{n-2} + \frac{s_{n-2} - s_{n-3}}{10} + \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{10} + \frac{s_n - s_{n-1}}{10} \\
 &\vdots \\
 &= s_1 + \frac{s_1 - s_0}{10} + \frac{s_2 - s_1}{10} + \dots + \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{10} + \frac{s_n - s_{n-1}}{10} \\
 &= 80 + \frac{8}{10^0} + \frac{8}{10^1} + \dots + \frac{8}{10^{n-2}} + \frac{8}{10^{n-1}} \\
 &= \underbrace{88,8\dots8}_{n+1 \text{ oitos}}
 \end{aligned}$$

Como Aquiles está na posição s_n quando a tartaruga está em s_{n+1} , ele também se aproxima cada vez mais de $88,\bar{8}$ metros, estando a uma distância cada vez mais curta da tartaruga. Mais precisamente, distando $s_{n+1} - s_n = \frac{8}{10^{n-1}}$ dela quando esta estiver em s_{n+1} . Assim, depois de Aquiles percorrer $88,\bar{8}$ metros, ele alcança a tartaruga e a ultrapassa.

Desenvolvendo ainda a habilidade EF08MA11, além da competência geral 4 e a competência específica 6, o professor pode pedir para que os alunos construam um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes. Um exemplo de fluxograma possível para o problema é o da Figura 13.

Figura 13 – Fluxograma referente ao Problema 2.4 definindo a sequência recursivamente



Fonte: o autor

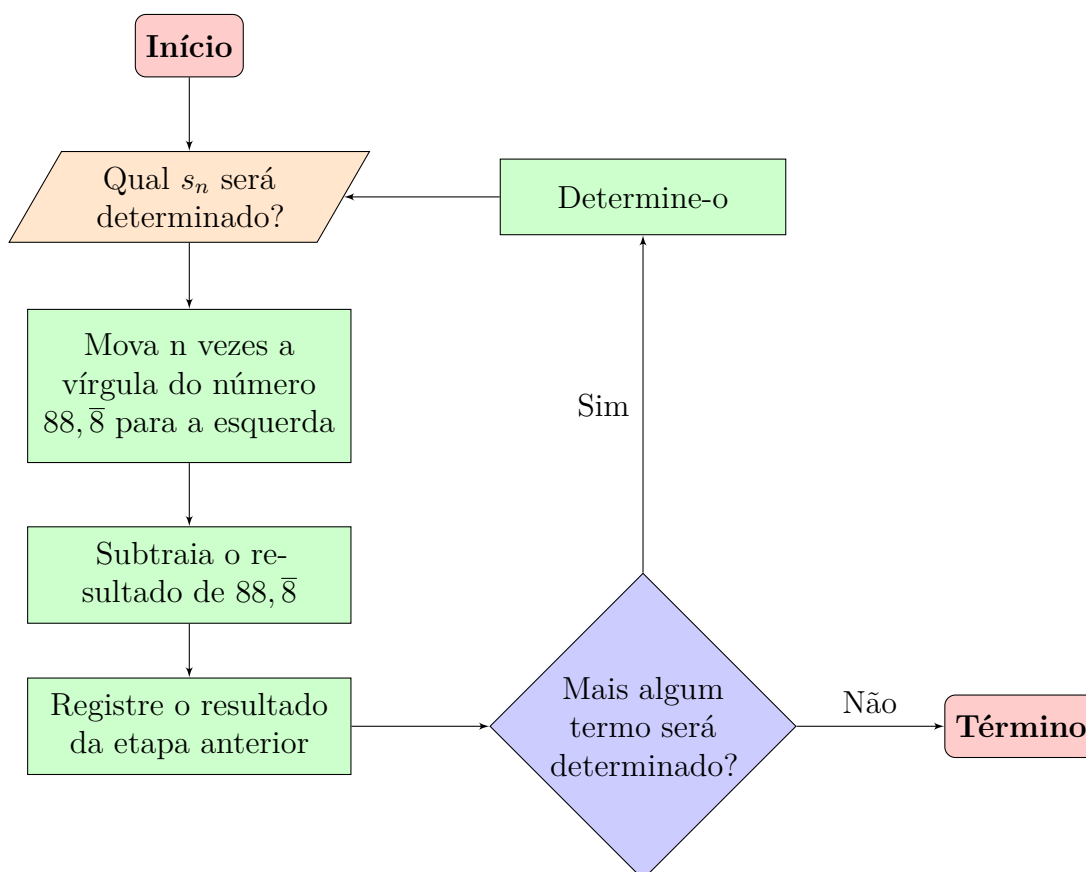
Ainda, observe que a sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ do Problema 2.4 pode ser definida, também, ainda utilizando o conceito de dízima periódica, de forma não recursiva. De fato, pela

solução do problema,

$$s_n = \frac{8}{10^{-1}} + \frac{8}{10^0} + \frac{8}{10^1} + \dots + \frac{8}{10^{n-3}} + \frac{8}{10^{n-2}} = 88,\bar{8} - 88,\bar{8} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Novamente, pode-se construir um algoritmo por meio de um fluxograma como o da Figura 14 para indicar os números seguintes.

Figura 14 – Fluxograma referente ao Problema 2.4 definindo a sequência de forma não recursiva



Fonte: o autor

Agora, note que a conclusão do Problema 2.4 depende de perceber que a sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $88,\bar{8}$. Essa intuição foi facilitada pelo fato de Aquiles ser dez vezes mais rápido que a tartaruga e que a vantagem dada a esta é representada por um número no qual somente um de seus algarismos é distinto de zero. Não obstante, é possível provar, $\forall k, d \in \mathbb{Q}_+^*$, que se Aquiles é $k > 1$ vezes mais rápido que a tartaruga e deu a esta vantagem igual a d , ele sempre alcançará a tartaruga depois de percorrer um trajeto de comprimento racional, seja inteiro ou não, seja de representação finita ou não. Porém, perceber isso em alguns casos pode ser mais difícil para o aluno e, seguindo exatamente os mesmos passos da solução dada ao problema, impraticável, pois pode-se obter um número com período muito grande, como é o caso para $k = 20$ e $d = 80$ que resultam numa dízima periódica cujo período possui dezoito algarismos. Ainda, mesmo conseguindo resolver esses

casos, fica faltando um método para os casos em que pelo menos uma das condições seja numericamente irracional.

Assim, de forma mais geral, sejam $k, v, d \in \mathbb{R}_+^*$, com $k > 1$, e $s_0 = 0$, $s_1 = d$ e

$$s_{n+1} = s_n + v \cdot \frac{s_n - s_{n-1}}{kv} = s_n + \frac{s_n - s_{n-1}}{k}.$$

Seguindo de forma análoga ao que foi feito na solução do Problema 2.4, tem-se $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{d}{k^{i-1}}$.

Assim, $s_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{k^{i-1}}$ representa o deslocamento de Aquiles até o ponto em que alcança a tartaruga. Note que isto efetivamente acontece se, e somente se, s_∞ é um número (não é infinito). Logo, deve-se provar que o resultado da soma infinita

$$d + \frac{d}{k} + \frac{d}{k^2} + \frac{d}{k^3} + \dots$$

é finito. Com efeito, pela Desigualdade de Bernoulli, para $n \geq \frac{9}{k-1}$ natural, $k^n = [1 + (k-1)]^n \geq 1 + n(k-1) \geq 1 + \frac{9}{k-1} \cdot (k-1) = 10$. Logo, $\frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{10}$ e

$$\begin{aligned} s_\infty &= d + \frac{d}{k} + \frac{d}{k^2} + \dots + \frac{d}{k^{n-1}} + \frac{d}{k^n} + \frac{d}{k^{n+1}} + \dots \\ &= d \left[1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} + \frac{1}{k^n} + \frac{1}{k^{n+1}} + \dots \right] \\ &= d \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \cdot \frac{1}{k^{in}} \\ &\leq d \sum_{i=0}^{\infty} (1 + 1 + \dots + 1) \cdot \frac{1}{k^{in}} \\ &\leq dn \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k^{in}} \\ &\leq dn \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) \\ &\leq 1, \bar{1}dn \end{aligned}$$

Portanto, s_∞ é um número real e, para determinar o seu valor, faz-se

$$\begin{aligned} s_\infty &= d + \frac{d}{k} + \frac{d}{k^2} + \frac{d}{k^3} + \dots \\ s_\infty &= d + \frac{1}{k} \left[d + \frac{d}{k} + \frac{d}{k^2} + \frac{d}{k^3} + \dots \right] \\ s_\infty &= d + \frac{1}{k} \cdot s_\infty \\ \frac{k-1}{k} s_\infty &= d \\ s_\infty &= \frac{kd}{k-1} \end{aligned}$$

Note que essa análise foi análoga à terceira solução do Problema 2.1. De fato, o Paradoxo da Dicotomia é equivalente à situação em que Aquiles tem o dobro da velocidade da tartaruga e deixa esta começar a corrida no ponto médio do trajeto.

Agora, os seguintes problemas analisam o paradoxo por meio de funções afins e quadráticas, desenvolvendo, principalmente, a habilidade EF09MA06.

Problema 2.5. Suponha que Aquiles competisse contra uma tartaruga numa prova de 90 metros rasos, dando a esta uma vantagem de 50 metros. Se ele correr a uma velocidade constante de 9 metros por segundo e a tartaruga, a uma velocidade constante de 1 metro por segundo, ele vencerá a tartaruga? Se sim, quando e em quantos metros ele a ultrapassará?

Solução. Note que $S(t) = 9t$ e $s(t) = t + 50$. Assim, Aquiles terminará esta prova em $\frac{S(t)}{9} = \frac{90}{9} = 10$ segundos, enquanto a tartaruga terminará em $\frac{s(t) - 50}{1} = \frac{90 - 50}{1} = 40$ segundos. Portanto, Aquiles vencerá a disputa.

Para saber o momento em que ultrapassará a tartaruga, deve-se resolver a inequação $S(t) \geq s(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} 9t &\geq t + 50 \\ 8t &\geq 50 \\ t &\geq \frac{50}{8} = 6,25 \end{aligned}$$

Portanto, Aquiles ultrapassará a tartaruga depois de 6,25 segundos e depois de ter percorrido $S(6,25) = 9 \cdot 6,25 = 56,25$ metros.

O seguinte problema é uma generalização do problema anterior.

Problema 2.6. Considere no Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga que ambos têm velocidades constantes, que Aquiles é $k > 1$ vezes mais rápido que o seu oponente, que ele deu a este uma vantagem de d metros e que o trajeto tem D metros de comprimento. Sendo v a velocidade da tartaruga em metros por segundo, descubra em quais condições Aquiles vence a tartaruga e, fazendo isso, depois de quanto tempo e de ter percorrido quantos metros ele a ultrapassa.

Solução. Note que $S(t) = kvt$ e $s(t) = vt + d$. Claramente, para que Aquiles vença a tartaruga, deve terminar a corrida num intervalo de tempo menor que ela. Assim,

$$\begin{array}{l|l} S(t) = D & s(t) = D \\ kvt = D & vt + d = D \\ t = \frac{D}{kv} & t = \frac{D - d}{v} \end{array}$$

Logo, Aquiles vencerá a tartaruga se $\frac{D}{kv} < \frac{D-d}{v}$. Desenvolvendo-se essa inequação e fixada a vantagem dada à tartaruga, a velocidade de Aquiles deve ser maior que $\frac{D}{D-d}$ vezes que a da tartaruga. Agora, fixada a velocidade de Aquiles em relação a da tartaruga, a vantagem que ele pode dar à tartaruga para vencê-la deve ser menor que $\frac{(k-1)}{k} \cdot D$ metros.

Para descobrir depois de quanto tempo Aquiles ultrapassará a tartaruga, deve-se resolver a inequação $S(t) \geq s(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}kvt &\geq vt + d \\(k-1)vt &\geq d \\t &\geq \frac{d}{(k-1)v}.\end{aligned}$$

Portanto, Aquiles ultrapassa a tartaruga depois de $\frac{d}{(k-1)v}$ segundos.

Por fim, quando Aquiles ultrapassar a tartaruga, ele terá percorrido, em metros,

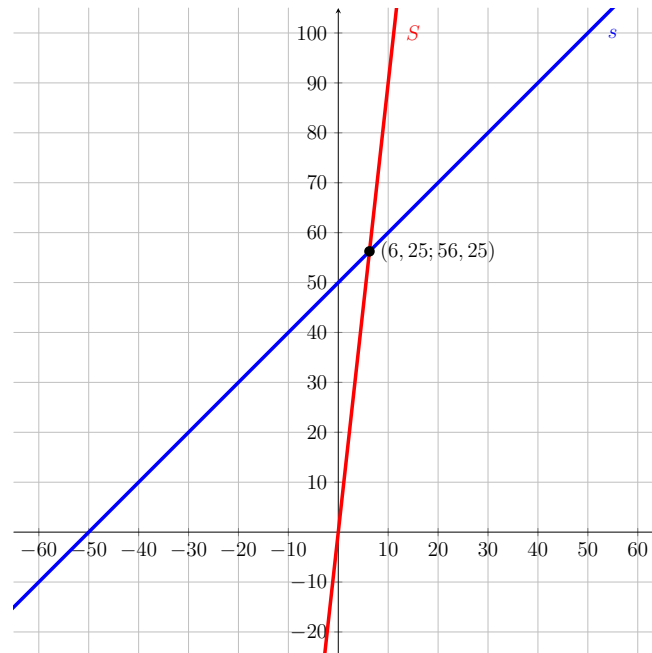
$$S\left(\frac{d}{(k-1)v}\right) = kv \cdot \frac{d}{(k-1)v} = \frac{kd}{k-1}.$$

Utilizando os resultados do Problema 2.6 para analisar o Problema 2.5, conclui-se que, mantendo-se a vantagem de 50 metros dada à tartaruga, seria suficiente que a velocidade de Aquiles fosse $\frac{90}{90-50} = 2,25$ vezes maior que a de seu oponente. Conclui-se também que, mantendo-se a mesma razão entre a velocidade de Aquiles e a velocidade da tartaruga, a vantagem que Aquiles pode dar ao seu oponente deve ser menor que $\frac{(9-1)}{9} \cdot 90 = 80$ metros.

Analisando graficamente o Problema 2.5, sendo o tempo, em segundos, representado pelo eixo das abscissas e a posição, em metros, de cada um dos oponentes representado pelo eixo das ordenadas, as funções que representam as posições de Aquiles e a tartaruga podem ser interpretadas por duas retas no plano cartesiano que se encontram no ponto $(6,25; 56,25)$ — de forma mais geral, $\left(\frac{d}{(k-1)v}, \frac{dk}{k-1}\right)$ —, como mostra a Figura 15. Essa interpretação desenvolve as habilidades EF09MA06 e, quando $S(t) = kvt$ e $s(t) = vt + d$ são vistas como equações polinomiais do 1º grau ($y = kvx$ e $y = vx + d$), EF08MA08.

Utilizando um *software* de geometria dinâmica é possível ter um entendimento ainda melhor como as condições da corrida influenciam o resultado da disputa. Por exemplo, pelo Geogebra é possível manipular a razão entre as velocidades dos oponentes, a vantagem dada à tartaruga e a sua velocidade por meio de controles deslizantes — variáveis livres dentro de intervalos pré-determinados (GEOGEBRA, [s. d.]). Essas três variáveis são chamadas de objetos livres. Na medida em que elas são manipuladas dentro de seus

Figura 15 – Interpretação gráfica do Problema 2.5

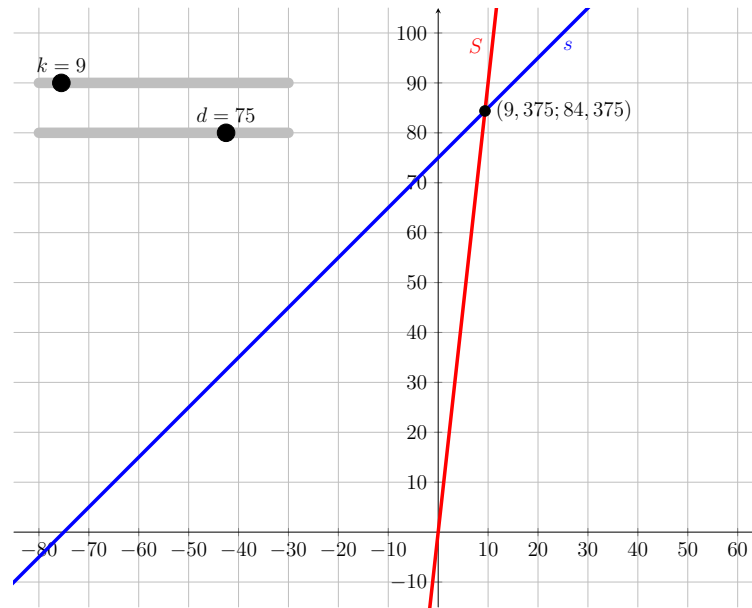


Fonte: o autor

intervalos, elas alteram os gráficos de $S(t) = kvt$ e $s(t) = vt + d$ e seu ponto de interseção, chamados de objetos dependentes. As seguintes figuras mostram alguns resultados para valores diferentes de k e d (como as velocidades de Aquiles e a tartaruga são proporcionais, fixou-se $v = 1$ m/s).

Na Figura 16, note que, para $k = 9$ e $d = 75$, os gráficos de S e s intersectam-se no ponto $(9, 375; 84, 375)$. Ou seja, mesmo Aquiles dando uma vantagem de 75 metros à tartaruga, se ele ainda for nove vezes mais veloz que ela, ainda vencê-la-á, alcançando-a depois de 9,375 segundos e 84,375 metros.

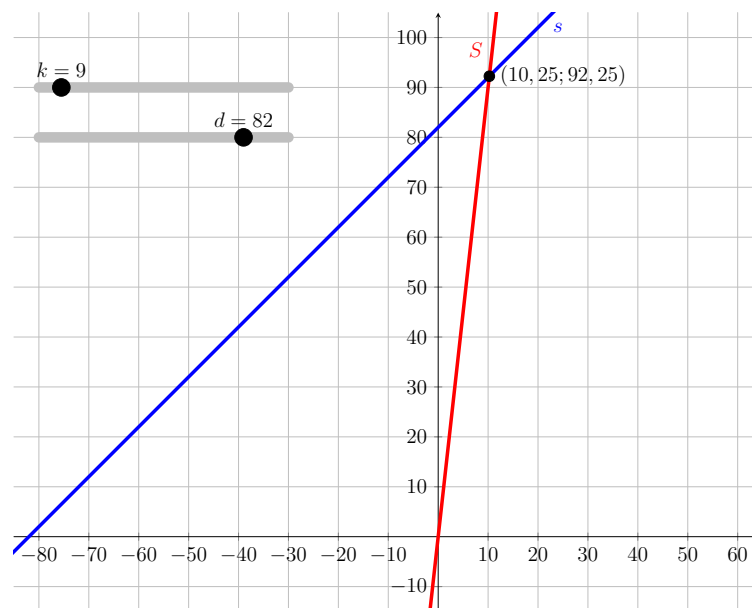
Figura 16 – Gráficos de S e s quando $k = 9$ e $d = 75$



Fonte: o autor

Já a Figura 17 interpreta graficamente a situação em que Aquiles, ainda nove vezes mais rápido que a tartaruga, dá-lhe a vantagem de 82 metros. Como descoberto no Problema 2.5, nessas condições Aquiles perde a disputa. De fato, note que o ponto de interseção dos gráficos de S e s tem ordenada maior que 90, então Aquiles só alcançaria a tartaruga depois da linha de chegada.

Figura 17 – Gráficos de S e s quando $k = 9$ e $d = 82$

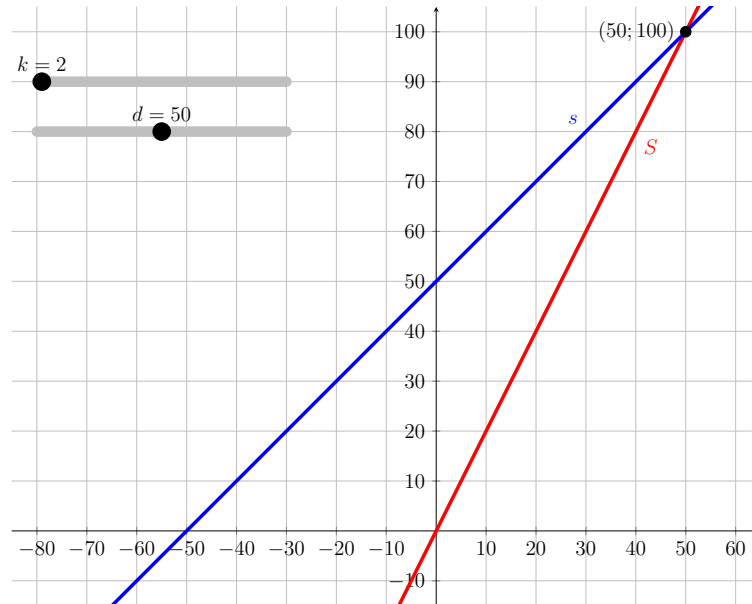


Fonte: o autor

Semelhantemente, supondo que Aquiles fosse apenas duas vezes mais rápido que a tartaruga, ele também só a alcançaria depois da linha de chegada, mais uma vez perdendo

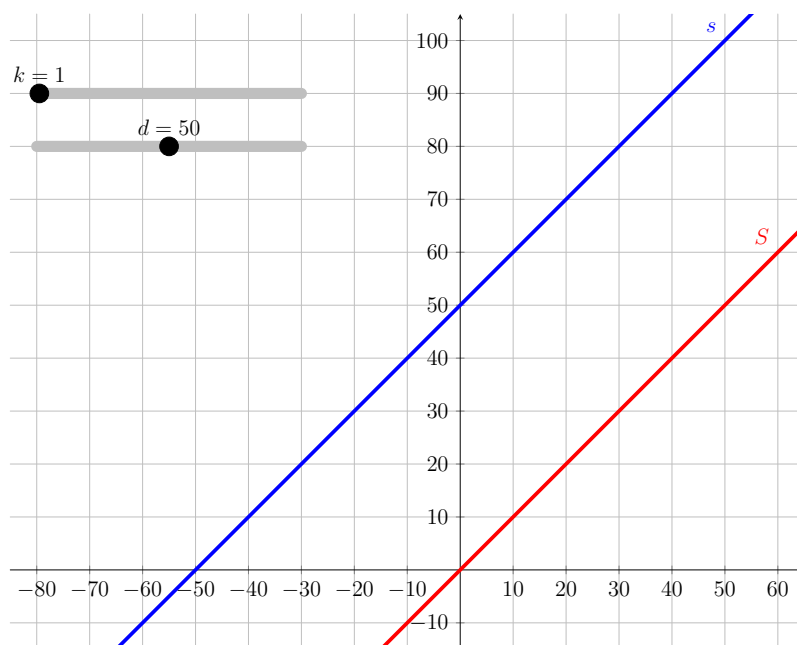
a disputa, como mostra a Figura 18 na qual o ponto de interseção dos gráficos de S e s tem ordenada maior que 90.

Figura 18 – Gráficos de S e s quando $k = 2$ e $d = 50$



Fonte: o autor

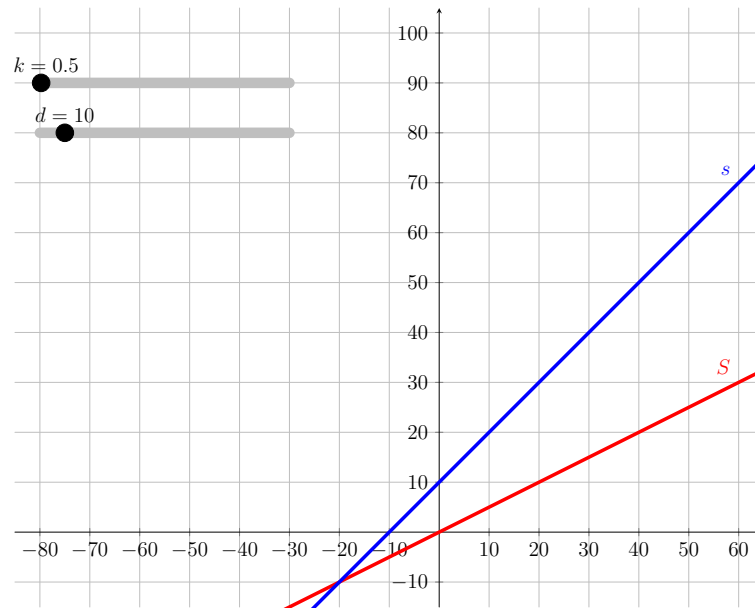
Agora, note que se Aquiles e a tartaruga tiverem uma mesma velocidade ($k = 1$), Aquiles nunca alcançará a tartaruga caso dê alguma vantagem a esta. Na verdade, ele sempre estaria a uma mesma distância atrás dela, perdendo a disputa. Isso é interpretado graficamente como duas retas paralelas como mostra a Figura 19. A falta de ponto de interseção mostra, graficamente, que os dois oponentes nunca estarão numa mesma posição em um mesmo instante, ou seja, nunca haverá uma ultrapassagem.

Figura 19 – Gráficos de S e s quando $k = 1$ e $d = 50$ 

Fonte: o autor

Por fim, a Figura 20 ilustra o caso em que Aquiles tem velocidade duas vezes menor que a da tartaruga. Nesse caso, percebe-se que a tartaruga está sempre a frente de seu oponente e a sua distância em relação a ele está constantemente aumentando. Note, porém, que há um ponto de interseção dos gráficos de S e s , mas ele tem abscissa negativa e, como o tempo não pode assumir valores negativos, não há ultrapassagens nessas condições e Aquiles perde a disputa.

O professor pode apresentar estes e outros exemplos para os seus alunos e permitir que manipulem livremente as condições do Problema 2.5 (inclusive o comprimento total D do trajeto e a velocidade v da tartaruga) utilizando controles deslizantes para explorar os resultados em cada caso e o modo como cada variável influencia o gráfico das funções. Essa prática desenvolve as competências gerais 2 e 5 e as competências específicas 3 e 6.

Figura 20 – Gráficos de S e s quando $k = 0,5$ e $d = 10$ 

Fonte: o autor

Por fim, analisa-se uma situação do paradoxo em que as velocidades dos dois corredores podem ser representadas por funções quadráticas.

Problema 2.7. Considere no Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga que as velocidades de ambos variam a acelerações constantes, que a aceleração de Aquiles é $k > 1$ vezes maior que a do seu oponente, que o trajeto tem D metros de comprimento e que a velocidade no ponto de largada de ambos é nula. Descubra em quais condições Aquiles vence a tartaruga e, fazendo isso, depois de quanto tempo ele a ultrapassa, dando-lhe uma vantagem de

- (a) d metros.
- (b) T segundos.

Solução.

- (a) Note que $S(t) = \frac{1}{2}kat^2$ e $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + d$. Logo, o tempo para Aquiles terminar a corrida é de $\sqrt{\frac{2D}{ka}}$ segundos e o da tartaruga, $\sqrt{\frac{2(D-d)}{a}}$ segundos. Logo, para Aquiles ganhar essa disputa, deve a inequação $\sqrt{\frac{2D}{ka}} < \sqrt{\frac{2(D-d)}{a}}$ ser satisfeita. Portanto, $k > \frac{D}{D-d}$ e $d < \frac{k-1}{k} \cdot D$ — mesmas condições do Problema 2.5.

Ainda,

$$\begin{aligned} S(t) &\geq s(t) \\ \frac{1}{2}kat^2 &\geq \frac{1}{2}at^2 + d \\ (k-1) \cdot \frac{1}{2}at^2 &\geq d \\ t &\geq \sqrt{\frac{2d}{a(k-1)}}. \end{aligned}$$

Portanto, Aquiles ultrapassará a tartaruga depois de $\sqrt{\frac{2d}{a(k-1)}}$.

- (b) Nestas condições, note que $S(t) = \frac{1}{2}kat^2$ e $s(t) = \frac{1}{2}a(t+T)^2$, e que a tartaruga terminará a corrida em $\sqrt{\frac{2D}{a}} - T$. Logo, fixado k , o tempo máximo de vantagem que Aquiles pode dar à tartaruga é de $\sqrt{\frac{2D}{a}} - \sqrt{\frac{2D}{ka}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2D}{ka}} &< \sqrt{\frac{2D}{a}} - T \\ \frac{ka}{2D} &> \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2D}{a}} - T\right)^2} \\ k &> \frac{2D}{a\left(\sqrt{\frac{2D}{a}} - T\right)^2} \end{aligned}$$

Assim, querendo Aquiles dar à tartaruga uma vantagem de T segundos, a sua aceleração deve ser $\frac{2D}{a\left(\sqrt{\frac{2D}{a}} - T\right)^2}$ vezes maior que a da tartaruga.

Ainda, para saber o momento em que Aquiles ultrapassa a tartaruga, faz-se

$$\begin{aligned} S(t) = \frac{1}{2}kat^2 &\geq s(t) = \frac{1}{2}a(t+T)^2 \\ \sqrt{k} \cdot t &\geq t+T \\ t &\geq \frac{T}{\sqrt{k}-1}. \end{aligned}$$

Portanto, Aquiles ultrapassará a tartaruga depois de $\frac{T}{\sqrt{k}-1}$ segundos.

3 Construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes: uma proposta de sequência didática para o 8^o ano

Construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes: uma proposta de sequência didática para o 8º ano

Alex Victor Bispo

Dados de Identificação

Disciplina: Matemática

Série: 8º ano

Número de aulas: 15

Conteúdos abordados

- Ponto médio e construção de mediatriz
- Mediatriz como um lugar geométrico
- Circuncentro
- Construção de bissetrizes interna e externa
- Bissetriz como um lugar geométrico.
- Incentro

Tema

Construção de mediatrizes e bissetrizes e aplicações.

Justificativa

A construção é, segundo a BNCC, uma das principais ideias matemáticas fundamentais associadas à Geometria. Ela desenvolve o pensamento geométrico dos estudantes, pois permite que eles compreendam e explorem propriedades relacionadas à simetria, à congruência e aos lugares geométricos. A prática com régua e compasso, além de fortalecer

a habilidade motora e o raciocínio espacial, contribui para a valorização da Matemática como ciência que nasce de problemas práticos e se organiza de forma lógica e rigorosa. Além disso, o ensino da construção de mediatrizes e bissetrizes e suas propriedades é uma oportunidade para que os alunos apliquem os seus conhecimentos sobre congruência de triângulos, inclusive para realizarem demonstrações simples, contribuindo para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo, como também preconiza a BNCC.

Nesta sequência didática, à luz das metodologias de Resolução de Problemas e História da Matemática, utiliza-se o Paradoxo da Dicotomia como problema motivador a fim de tornar as aulas mais interessantes e contextualizadas. Por causa de suas características contraintuitiva, desafiante, criativa e ousada, paradoxos têm o potencial em despertar a curiosidade do aluno e, assim, o seu interesse em compreender melhor os conceitos apresentados. Esse interesse é fundamental para que haja a efetiva aprendizagem dos conteúdos, entendendo-se que o aluno só aprende se tiver interesse em aprender.

Competências

Competências gerais

- **Competência geral 2:** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Competências específicas

- **Competência específica 1:** Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- **Competência específica 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- **Competência específica 3:** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança

quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

- **Competência específica 6:** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- **Competência específica 8:** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Habilidades

- **(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.
- **(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Objetivos

Objetivo Geral

- Construir mediatrizes e bissetrizes, reconhecendo as suas propriedades, e aplicá-las na resolução de problemas.

Objetivos específicos

- Conhecer o Paradoxo da Dicotomia, reconhecendo o seu contexto histórico e filosófico, inclusive compreendendo os seus argumentos e falácias e classificando-o como um paradoxo do tipo falsídico.
- Autoestimar-se quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimento de forma colaborativa.

- Perseverar na busca de soluções para problemas e também de um melhor entendimento de conceitos e procedimentos.
- Defender o seu ponto de vista por meio de argumentos e conceitos de forma clara, fundamentada, lógica, empática e respeitosa.
- Reconhecer que há problemas impossíveis fisicamente, mas possíveis matematicamente.
- Demonstrar, com o rigor matemático, propriedades geométricas.
- Aplicar os casos de congruência de triângulos para resolver problemas e compreender as propriedades de mediatrizes e bissetrizes.
- Dividir um segmento pela metade utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Construir a mediatriz de um segmento utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Reconhecer a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados.
- Reconhecer que as mediatrizes dos lados de um triângulo intersectam-se no seu circuncentro.
- Dividir um ângulo pela metade utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Reconhecer e demonstrar geometricamente que a bissetriz de um ângulo não nulo e menor que 360° como a mediatriz de qualquer segmento cujos extremos são os pontos de interseção de um arco centrado no vértice do ângulo.
- Reconhecer a bissetriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados de um ângulo.
- Reconhecer que as bissetrizes internas de um triângulo intersectam-se no seu incentro.
- Construir as bissetrizes internas e externas de um ângulo utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Medir ângulos com um transferidor.

Público-alvo

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Perfil das turmas

Turma com 30 a 40 alunos. Como pré-requisito, a turma já deverá ter estudado sobre os casos de congruência de triângulos, inclusive ter realizado construções de triângulos congruentes com régua e compasso.

Recursos

- Régua
- Compasso
- Transferidor
- Quadro branco
- Marcadores e apagador de quadro branco

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua, participativa e cumulativa, avaliando-se diagnosticamente os conhecimentos prévios dos alunos sobre os casos de congruência de triângulos e as suas habilidades para construir triângulos congruentes e formativamente a construção dos conhecimentos e o desenvolvimento das habilidades e atitudes seguintes:

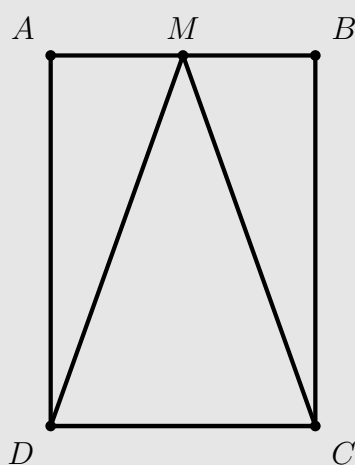
- a compreensão dos paradoxos;
- a compreensão dos conceitos e propriedades apresentados;
- a capacidade argumentativa;
- a colaboração e participação nas discussões em grupo e no debate com toda a turma, fazendo isso de maneira respeitosa
- a aplicação, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e as propriedades aprendidas das mediatrizes e bissetrizes, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral para resolver os problemas propostos;
- a realização das construções geométricas necessárias e as suas aplicações para investigar as propriedades das mediatrizes e bissetrizes e resolver os problemas propostos;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e

- a resolução das atividades motivadoras e dos exercícios de fixação.

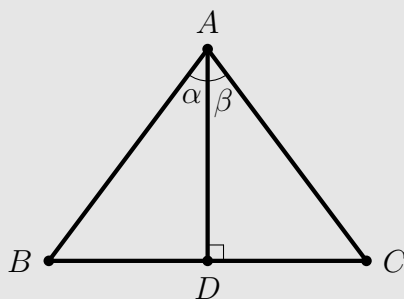
Ainda, para a avaliação somativa, poderá ser utilizado os exercícios de fixação propostos ou outros instrumentos avaliativos a critério do professor.

Avaliação diagnóstica: congruência de triângulos

1. Desenhe em seu caderno um segmento horizontal AB qualquer.
 - (a) Construa um triângulo isósceles qualquer cuja base é o segmento AB .
 - (b) É possível construir um triângulo congruente e distinto ao do item (a) com base também em AB ? Se sim, construa-o.
2. A figura mostra um retângulo, no qual M é o ponto médio do lado AB . Prove que o triângulo DMC é isósceles.

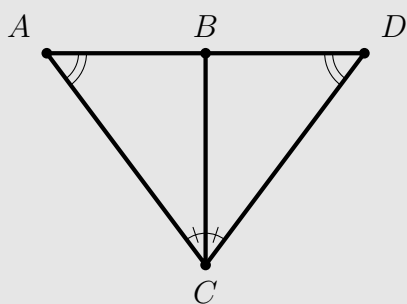


3. No triângulo ABC , $\overline{BD} = \overline{CD}$.



Nessas condições, mostre que

- (a) $\overline{AB} = \overline{AC}$
 - (b) $\alpha = \beta$
 - (c) $\hat{B} = \hat{C}$
4. Os triângulos ABC e DBC da figura apresentam os ângulos congruentes assinalados com marcas iguais.



Nessas condições, mostre que os triângulos ABC e DBC são congruentes. Justifique por escrito cada etapa da resolução.

Atividade 1 – Paradoxo da Dicotomia

- **Conteúdos abordados:** ponto médio e mediatriz.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 4 aulas de 50 minutos cada.

Considere a ilustração abaixo de um caminho em linha reta a ser percorrido por um corredor.

- Apenas com o auxílio de um compasso e uma régua, porém não fazendo nenhum tipo de medição com ela, divida esse caminho em duas partes iguais localizando o seu ponto médio.
- Na mesma ilustração, divida a segunda metade do caminho na metade.
- Divida o último segmento resultante do item anterior também na metade. Realize esse mesmo processo mais cinco vezes.
- O que você percebe sobre o comportamento dos sucessivos pontos médios localizados?
- Converse com um colega e discutam se seria possível fazer mais cinquenta divisões similares às dos itens anteriores.



Início

Fim

Apresentação da atividade

Para esta atividade, que inicia esta sequência didática, é necessário que os alunos já tenham estudado os casos de congruência de triângulo. Achando preciso, o docente pode fazer uma revisão sobre o assunto com a classe antes de propor a atividade.

Buscando soluções

Neste momento, as ferramentas de desenho necessárias são somente a régua e o compasso, e deve o professor ressaltar aos alunos para não medirem os segmentos com a régua. O professor pode organizar os alunos em duplas ou trios para resolver a atividade, embora, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a habilidade EF08MA15, entregará uma ficha da atividade para todos e pedirá que cada um resolva e faça as construções geométricas em sua própria ficha.

Aqui o professor será apenas um mediador, agindo apenas quando necessário para orientar os alunos sobre o uso correto das ferramentas de desenho, tirar dúvidas, levar os alunos a lembrar dos casos de congruência de triângulos e a pensar em como poderiam aplicá-los para a resolução da atividade.

Apresentação do paradoxo e discussão

Este momento será iniciado com a apresentação do Paradoxo da Dicotomia, usando a terminologia de pontos médios, contextualizando histórico e filosoficamente tanto o paradoxo como o seu criador. Aqui, dever-se-á perguntar aos alunos sobre o que eles entendem por paradoxo e explicar o significado de dicotomia. Ainda, incitar-se-á a turma à discussão e à análise dos argumentos e da conclusão absurda, questionando os alunos sobre a divisibilidade do espaço e tempo — se é infinita ou finita, se tem comprimento mínimo ou não —, sobre a soma dos infinitos deslocamentos ou dos infinitos intervalos de tempo para concluir cada trecho — se seria infinita ou finita, e o porquê — e sobre a possibilidade de realizar infinitas tarefas em um intervalo de tempo finito. Continuando a discussão, o professor pedirá para que cada dupla ou trio compartilhe com toda a turma as suas respostas aos itens (d) e (e), justificando-as.

Explicação dos conceitos e algoritmos

Depois da discussão, o professor mostrará para e com toda a turma — seguindo o mesmo espírito dialogal e colaborativo — como dividir um segmento apenas com régua e compasso, explicando que a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos arcos de mesmo raio e centrados, cada um, numa das extremidades do segmento divide-o na

metade e é perpendicular a ele, demonstrando isso de forma matematicamente rigorosa e por meio dos casos de congruência de triângulos, e denotando-a por mediatriz.

Exercitação

1. Trace segmentos com as seguintes medidas e divida-os em partes como indicado em cada item.
 - (a) 8 cm e em 4 partes.
 - (b) 10 cm e em 8 partes.
 - (c) 12 cm e em 16 partes.
2. É possível, com o auxílio apenas de mediatrizes, dividir um segmento em seis partes congruentes? Justifique.
3. Considerando o Paradoxo da Dicotomia, trace um segmento de 12 cm em cada item abaixo representando o trajeto a ser percorrido e localize nele o ponto até onde o corredor chegou sabendo que ele percorreu
 - (a) $\frac{3}{4}$ do caminho.
 - (b) $\frac{3}{8}$ do caminho.
 - (c) $\frac{5}{8}$ do caminho.
 - (d) $\frac{7}{16}$ do caminho.
 - (e) $\frac{11}{16}$ do caminho.
 - (f) $\frac{9}{32}$ do caminho.
 - (g) $\frac{21}{48}$ do caminho.
 - (h) $\frac{125}{400}$ do caminho.
4. Certo corredor já completou $\frac{3}{7}$ de um caminho que ele quer percorrer. É possível representar isso num segmento apenas com o auxílio de mediatrizes? Justifique.
5. As obras de Zenão se perderam com o tempo e não chegaram a esta era, de sorte que o que se sabe dele são citações, em maior parte indiretas, de outros filósofos e comentadores, como Platão, Aristóteles, Proclo e Simplicio. Segundo Proclo, Zenão enunciou pelo menos quarenta paradoxos em seus livros, porém somente alguns poucos deles sobreviveram e são conhecidos hoje pela humanidade. Pesquise outros paradoxos de Zenão e analise-os respondendo as seguintes perguntas.
 - (a) Eles são todos falsídicos?
 - (b) Quais são os argumentos e, se houver, as falácias por trás deles?

- (c) O que Zenão queria provar ao enunciar cada um deles?
- (d) Você consegue ver semelhanças desses paradoxos com o Paradoxo da Dicotomia?
Se sim, quais?

Avaliação

Avaliar-se-á:

- a compreensão do paradoxo, inclusive seus argumentos, falácias e classificação, por meio da colaboração e participação na discussão e na análise coletiva;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese, fazendo isso de maneira ética, respeitando o direito de fala e de opinião dos colegas;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral, para a localização do ponto médio de um segmento e para a construção e compreensão das propriedades da mediatriz;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação, além da realização da pesquisa solicitada.

Atividade 2 – Rodovias que se cruzam

- **Conteúdos abordados:** mediatriz como um lugar geométrico.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 3 aulas de 50 minutos cada.

Paulo está dirigindo por uma extensa avenida que corta, na metade e perpendicularmente, uma estrada que conecta os municípios de Ararinha e Boitató. Ambas as rodovias seguem em linha reta, não possuindo nenhum tipo de curva.

- Prove que a distância de Paulo a Ararinha é igual à distância dele a Boitató. Despreze a largura da avenida.
- Prove que qualquer pessoa que esteja equidistante a ambas as cidades está na avenida (ou no seu prolongamento).
- Existe uma outra estrada perpendicular a avenida. Desprezando as larguras de cada rodovia, é possível que esta estrada cruze com a estrada de Ararinha e Boitató? Justifique a sua resposta.

Apresentação da atividade

Para iniciar a aula o professor pode separar os alunos em duplas ou trios para que possam resolver a atividade de forma colaborativa.

Buscando soluções

Espera-se aqui que os alunos logo reconheçam que a avenida é a mediatriz da estrada e utilizem esse conhecimento, junto com a aplicação da congruência de triângulos, para resolver os itens (a) e (b) da atividade.

Para o item (c), os alunos precisarão reconhecer que duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta são paralelas, aplicando o conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é sempre 180° .

Explicação dos conceitos e procedimentos

Neste momento, o docente resolve coletivamente a atividade, formalizando o conceito de mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades do segmento, explicando que isso prova que a mediatriz de um segmento sempre é a mesma independentemente do comprimento do raio dos arcos necessários para construí-la.

Generalização

No item (c), o docente generaliza o problema a demonstrar que se duas retas distintas são perpendiculares a uma mesma reta, então elas são paralelas. Ele pode fazer isso por meio do *reductio ad absurdum*, supondo que as duas retas não são paralelas, ou seja, supondo que elas se cruzam, e aplicando o fato de que a soma interna dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° .

Exercitação

1. Sejam r uma reta e P um ponto no plano. Construa uma reta perpendicular a r e que passe por P considerando que:
 - (a) $p \in r$; e
 - (b) $p \notin r$.
2. Considerando o exercício anterior, prove que só existe uma reta perpendicular.
Dica: em ambos os casos, suponha que existam duas e considere os ângulos formados por elas.
3. Sejam r uma reta e P ponto fora de r . Construa, com régua e compasso, a reta paralela a r e que passa pelo ponto P .

Avaliação

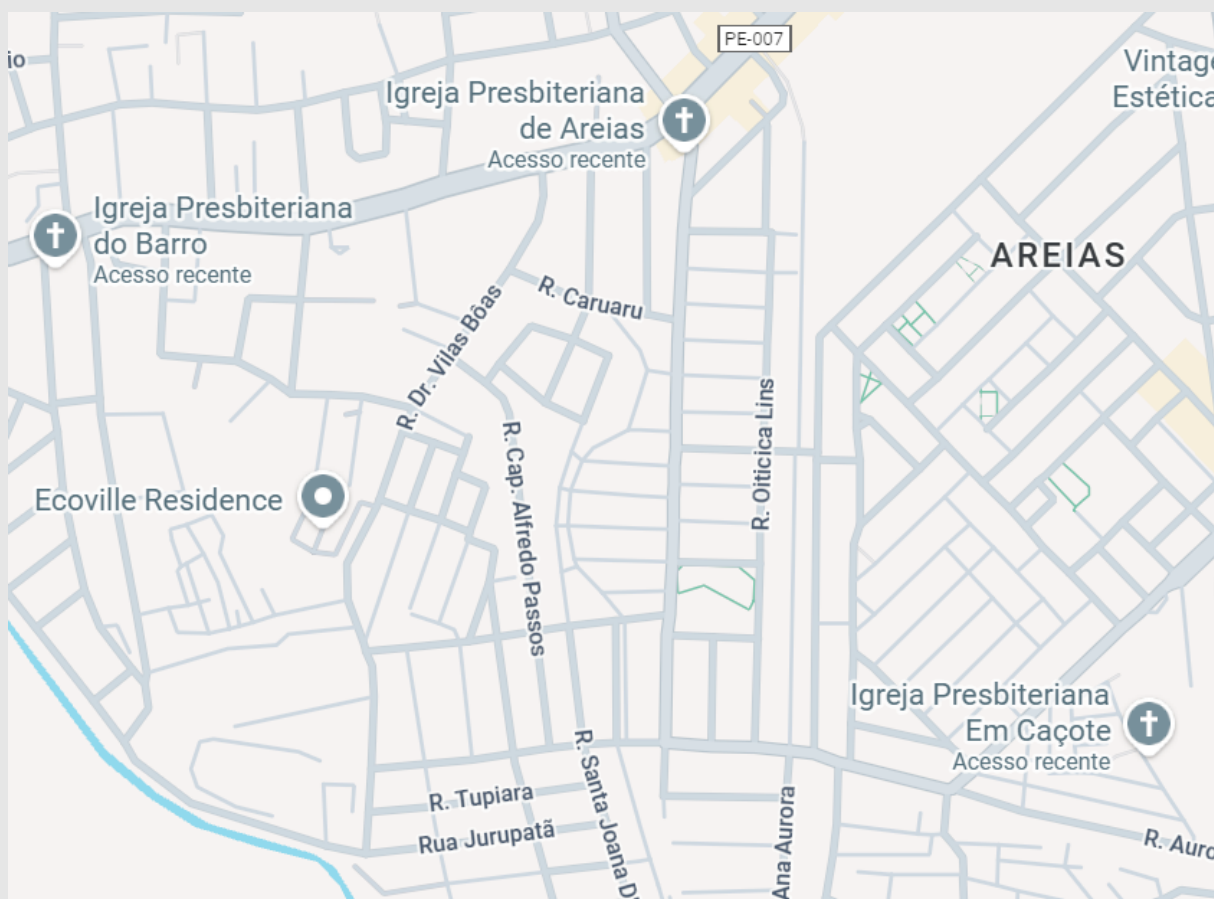
Avaliar-se-á:

- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e soma dos ângulos internos de um triângulo, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral, para resolver a atividade e os exercícios, além de compreender as propriedades da mediatriz;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

Atividade 3 – “Ponto médio” das três igrejas

- **Conteúdos abordados:** circuncentro.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 2 aulas de 50 minutos cada.

A Igreja Presbiteriana do Brasil é uma federação de Igrejas locais organizadas em concílios que guardam gradação entre si. Um desses concílios é o Presbitério que exerce jurisdição sobre Igrejas locais de uma certa região (IGREJA PRESBITERIANA DO BRASIL, 2023). Na cidade do Recife, as Igrejas Presbiterianas de Areias, Barro e Caçote pertencem a um mesmo presbitério e pretendem fazer um trabalho social que atenda aos três bairros. Juntas decidiram começar esse trabalho num ponto que esteja igualmente distante de cada uma das sedes.



- Localize no mapa acima o ponto em que as igrejas devem começar o trabalho.
- Existe algum outro ponto em que elas poderiam começar o trabalho? Justifique.
- Explique porque não seria possível localizar um ponto equidistante das três igrejas caso elas fossem colineares. Existe algum outro caso em que também seria impossível localizar tal ponto?

Apresentação da atividade

Para iniciar a aula, o professor pode separar os alunos em duplas ou trios para que possam resolver a atividade de forma colaborativa.

Buscando soluções

O objetivo dessa atividade é que os alunos consigam interpretar esse problema real para um problema geométrico, tomando cada Igreja local como um ponto no plano e localizar o ponto que esteja equidistante aos outros três.

Caso os alunos não entendam isso de forma independente, pode o professor guiá-los a essa descoberta e questioná-los sobre como eles poderiam aplicar os conceitos geométricos estudados na aula anterior para encontrar esse ponto.

Explicação dos conceitos e algoritmos

Neste momento, o professor demonstra com os alunos que as mediatrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectam num mesmo ponto.

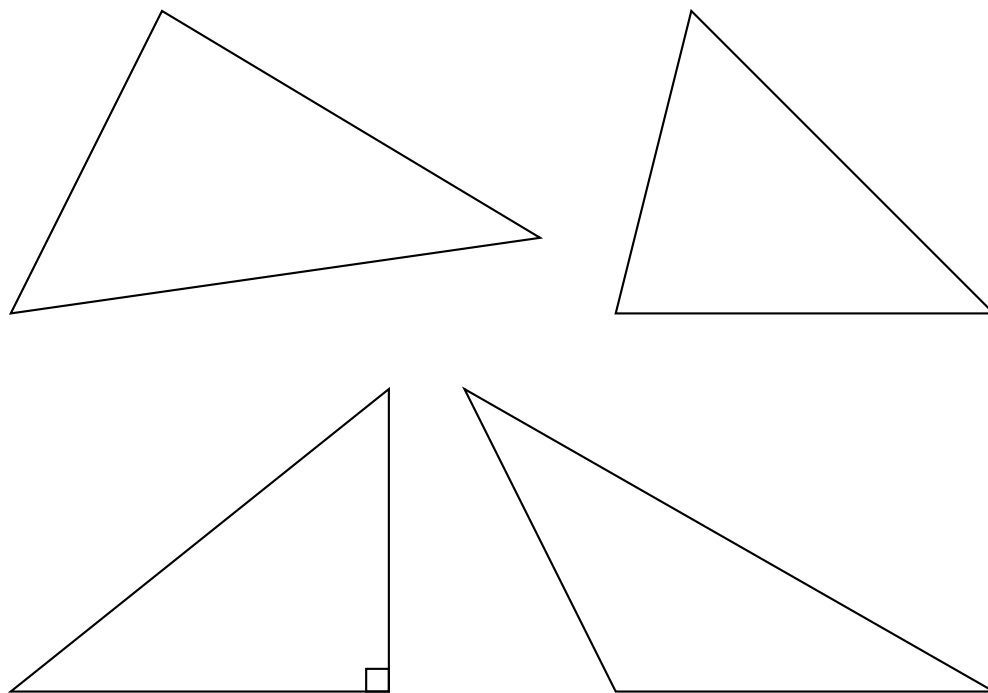
Generalização

Depois de resolver a atividade com a turma, o professor observará que o ponto encontrado é o centro da circunferência que passa pelas três igrejas, generalizando isso para quaisquer três pontos no plano. Explicará também que essa circunferência **circunscribe** o triângulo definido pelos três pontos — isto é, passa pelos seus três vértices e a sua região delimitada contém o triângulo — e, sendo assim, o seu centro é chamado de **circuncentro**. Ou seja, as mediatrizes de um triângulo intersectam-se todas no circuncentro desse triângulo.

Exercitação

Construa, com régua e compasso, os seguintes lugares geométricos.

- (a) As mediatrizes dos lados dos triângulos abaixo.



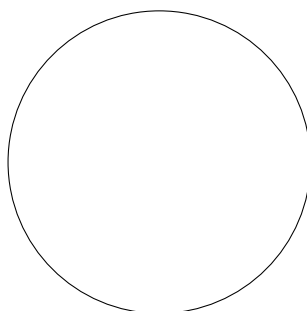
(b) A circunferência que passa pelos três pontos abaixo.



- (c) A circunferência que passa pelos dois pontos abaixo e cujo centro está na reta r .



- (d) O centro da circunferência abaixo.



Avaliação

Avaliar-se-á:

- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, o conceito de mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos dados para resolver problemas;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

Atividade 4 – Dicotomia do ângulo

- **Conteúdos abordados:** construção de bissetrizes interna e externa.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 3 aulas de 50 minutos cada.

Considere o ângulo raso abaixo com vértice em O . Com o auxílio apenas de régua e compasso, faça e responda o que se pede abaixo. Utilize o transferidor apenas para verificar se a sua construção está correta.

- Divida o ângulo \widehat{AOB} na metade traçando uma semirreta com origem em O .
- Analogamente ao item anterior, divida um dos ângulos resultantes do item anterior na metade.
- Divida na metade o ângulo resultante do item anterior no qual um dos lados é a semirreta \overrightarrow{OA} ou \overrightarrow{OB} e repita esse processo sucessivo de dicotomias mais duas vezes.
- Note que cada vez mais a medida dos ângulos resultantes diminui. Em algum momento, depois de um número extremamente grande de dicotomias sucessivas, é possível que a medida dos ângulos resultantes seja igual a 0° ? Justifique.



Apresentação da atividade

Antes de apresentar a atividade para os alunos, o docente enunciará o Paradoxo da Dicotomia de Rotação e iniciará uma breve discussão para que os alunos identifiquem as semelhanças e diferenças entre os argumentos e falácias.

Buscando soluções

Neste momento, as ferramentas de desenho necessárias são a régua, o compasso e o transferidor, sendo este apenas utilizado para verificação das construções, devendo o professor ressaltar aos alunos para não medirem os segmentos com a régua. O professor pode organizar os alunos em duplas ou trios para resolver a atividade, embora, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a habilidade EF08MA15, entregará uma ficha da atividade para todos e pedirá que cada um resolva e faça as construções geométricas em sua própria ficha.

Aqui o professor será apenas um mediador, agindo apenas quando necessário para orientar os alunos sobre o uso correto das ferramentas de desenho, tirar dúvidas, levar os alunos a lembrar dos casos de congruência de triângulos e a pensar em como poderiam aplicá-los para a resolução da atividade.

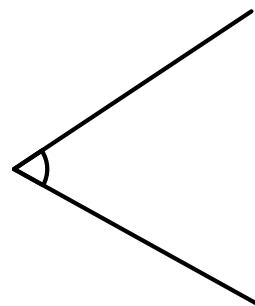
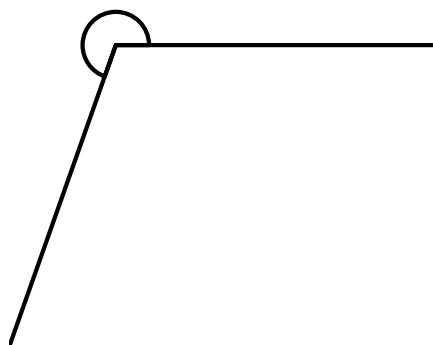
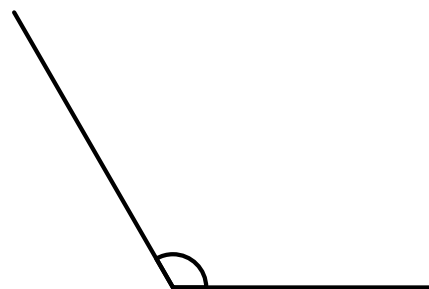
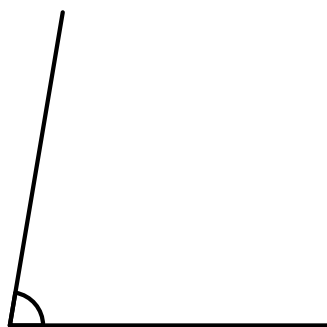
Explicação dos conceitos e algoritmos (momento 1)

Neste momento, o professor explicará que a semirreta ou a reta que divide um ângulo na metade é chamada de **bissetriz interna** — ou apenas de bissetriz — desse ângulo.

A partir da aplicação dos casos de congruência de triângulo, mostrará, junto com a turma e por meio do rigor matemático, que a bissetriz de um ângulo não nulo e menor que uma volta completa é a mediatriz dos segmentos cujos extremos equidistam do vértice desse ângulo.

Exercitação (momento 1)

1. Trace as bissetrizes internas dos seguintes ângulos.
 - a) 60°
 - b) 30°
 - c) 100°
 - d) 120°
 - e) 270°
 - f) 320°
2. Divida os seguintes ângulos em quatro partes.



Explicação dos conceitos e algoritmos (momento 2)

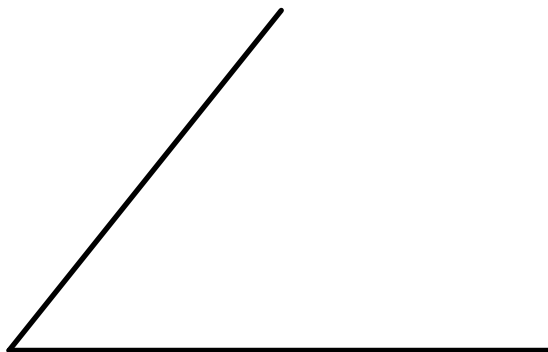
Aqui o professor dá uma breve pausa na exercitação para apresentar a bissetriz externa de um ângulo menor que 180° como a bissetriz interna do ângulo externo a esse ângulo. Logo, a bissetriz externa de um ângulo divide o seu ângulo externo na metade.

Exercitação (momento 2)

1. Trace a bissetriz externa de cada um dos seguintes ângulos abaixo e depois verifique com um transferidor se você os traçou corretamente
 - (a) 30°
 - (b) 45°
 - (c) 60°
 - (d) 90°
 - (e) 100°
 - (f) 120°
 - (g) 135°

(h) 150°

2. Considere o ângulo abaixo.



- Trace as duas bissetrizes, a interna e a externa, desse ângulo.
- Qual é a medida do ângulo entre as duas bissetrizes? Verifique a sua resposta medindo o ângulo com um transferidor.
- Converse com um colega e descubram se a medida do ângulo entre as bissetrizes internas e externas é sempre a mesma independentemente da medida desse ângulo. Justifiquem as suas respostas com argumentos geométricos gerais.

Avaliação

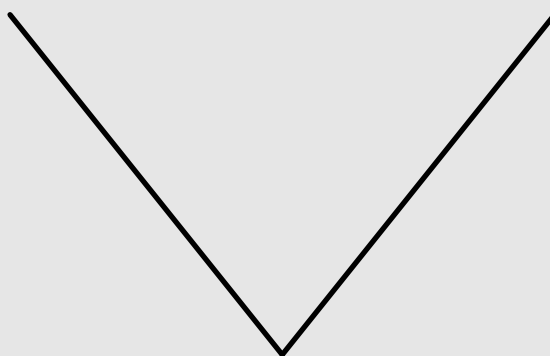
Avaliar-se-á:

- a compreensão do paradoxo por meio da colaboração e participação na discussão e na análise coletiva;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese, fazendo isso de maneira ética, respeitando o direito de fala e de opinião dos colegas;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e o conceito de mediatrizes para dividir um ângulo pela metade e para a construção e compreensão das propriedades das bissetrizes interna e externa de um ângulo;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

Atividade 5 – Vendedores de sorvete

- **Conteúdos abordados:** bissetriz como um lugar geométrico.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 1 aula de 50 minutos.

Numa praia peninsular triangular, as pessoas costumam ficar sentadas em tendas fixas distribuídas por toda a praia enquanto os vendedores vão oferecendo os seus produtos de tenda em tenda. André e Bruno são vendedores ambulantes de sorvete nessa praia e sempre entram em conflito por causa da disputa pela clientela. Um dia, para acabar com os conflitos, decidiram dividir a península em dois territórios e cada um teria a exclusividade de venda sobre um dos territórios. Eles dividiram assim: a tenda que estivesse mais próxima da margem leste seria atendida por André e as tendas mais próximas da margem oeste, por Bruno. Para que eles pudessem identificar com facilidade se certa tenda estava dentro de seu território ou não e para que nenhum cliente ficasse exatamente a mesma distância de ambas as margens, eles decidiram também marcar na areia para delimitar os territórios. Qual é o lugar geométrico que faz essa delimitação? Justifique geometricamente a sua resposta.



Apresentação da atividade

O professor pode organizar a turma em dupla ou trio e, achando oportuno, lembrar que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular a reta, com um extremo no ponto e o outro extremo na reta.

Buscando soluções

Tendo em vista que nas aulas anteriores já foi-se investigado o conceito de mediatriz como lugar geométrico, espera-se que os alunos consigam resolver esta atividade de maneira análoga.

Explicação dos conceitos e algoritmos

Neste momento, o docente resolve coletivamente a atividade, demonstrando que, se um ponto interno de um ângulo está na bissetriz interna desse ângulo, então ele equidista dos lados deste, explicando que isso prova que a bissetriz interna de um ângulo é única independentemente do comprimento do raio dos arcos necessários para construí-la.

Generalização

O professor apresenta uma definição mais ampla de bissetriz, a de lugar geométrico de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo, considerando aqui, também, o prolongamento desses lados. Assim, a bissetriz de um ângulo qualquer, não somente de um ângulo convexo, são duas retas perpendiculares, sendo que uma delas divide o ângulo na metade.

Avaliação

Avaliar-se-á:

- a capacidade argumentativa e de aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e os conceitos já aprendidos sobre bissetrizes para resolver o problema motivador; e
- a utilização adequada das ferramentas de desenho.

Atividade 6 – Construindo um chafariz

- **Conteúdos abordados:** incentro.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 2 aulas de 50 minutos cada.

Quer-se construir um novo chafariz circular na Praça Parque Amorim, no bairro da Boa Vista, Recife. O atual chafariz está localizado dentro da área de um gramado com formato triangular e pretende-se construir um novo de modo que ele toque os três lados do gramado em um único ponto cada um. Para isso, os responsáveis pela obra decidiram encontrar primeiro o centro do chafariz para, a partir dele, demarcar os seus limites para a sua construção.



- Mostre que o centro do chafariz, se realmente existir, dista igualmente dos três lados do gramado.
- Construa o chafariz, utilizando apenas régua e compasso.
- Mostre que sempre é possível encontrar o centro do chafariz independentemente do formato do gramado triangular e, ainda, que ele é único, explicando como encontrá-lo somente com régua e compasso.

Buscando soluções

Espera-se que os alunos sigam de maneira análoga ao que foi feito na Atividade 3 para aplicar as bissetrizes para localizar o centro do chafariz.

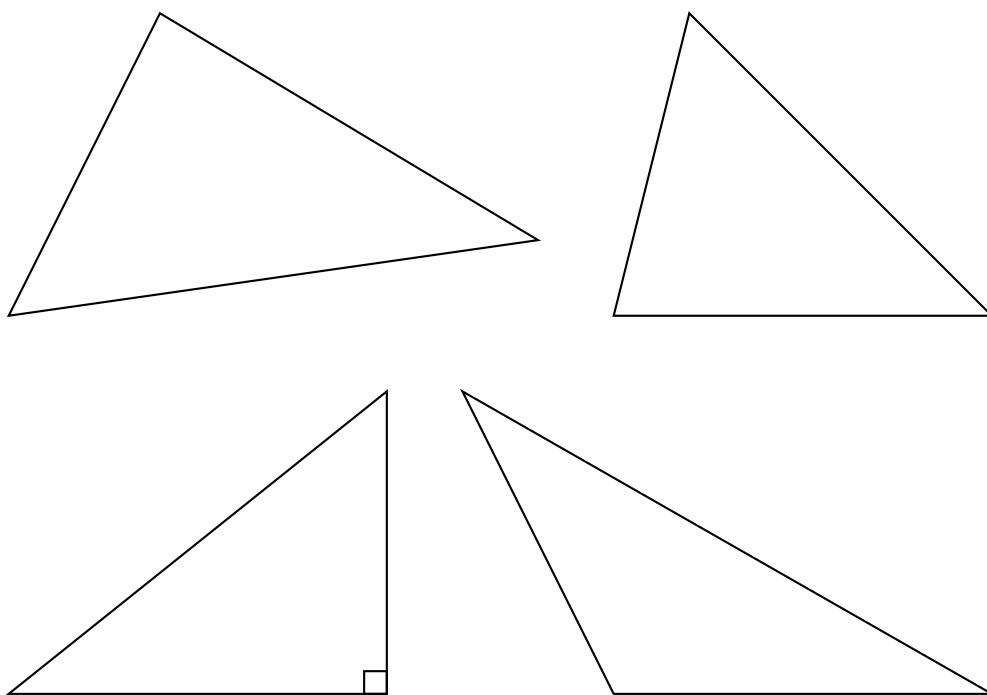
Explicação dos conceitos e algoritmos

Neste momento, o professor demonstra com os alunos que as bissetrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectam num mesmo ponto, chamado de incentro, e mostra

como construir a circunferência inscrita no triângulo.

Exercitação

Construa, com régua e compasso a circunferência inscrita em cada um dos triângulos abaixo.



Avaliação

Avaliar-se-á:

- a capacidade argumentativa e de aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e os conceitos já aprendidos sobre bissetrizes resolver o problema motivador e os exercícios de fixação;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico.

Conclusão

Como visto neste trabalho, é possível e recomendável utilizar paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e popularização da Matemática no EFAF, pois, além de tornar as aulas mais interessantes, lúdicas e significativas para o alunado, desenvolve competências gerais e específicas da Matemática, como as relacionadas à curiosidade intelectual, ao raciocínio hipotético-dedutivo, à argumentação, à imaginação, à abstração, à investigação, à reflexão, à representação por meio de diferentes registros, à associação entre diferentes conceitos matemáticos, ao diálogo ético e democrático com seus pares, ao reconhecimento da Matemática como uma construção de toda a humanidade ao longo da história, à perseverança e à confiança em si próprio para resolver situações-problema desafiantes, entre outras.

Além disso, como foi apresentado no Quadro 1, é possível trabalhar muitas das habilidades previstas na BNCC por meio de paradoxos matemáticos. Recorda-se aqui o que já foi dito no segundo capítulo: outras associações entre paradoxos matemáticos e habilidades da BNCC podem ser percebidas por meio de novas investigações análogas às que foram realizadas neste trabalho. Assim, espera-se que os resultados e análises apresentados possam ser expandidos ou inspirar e auxiliar trabalhos futuros dentro desta temática, sobretudo os relacionados a paradoxos ainda não ou pouco abordados dentro e fora do âmbito do Profmat, como, por exemplo, o Paradoxo da Bela Adormecida, o Paradoxo do Anel, o Paradoxo da Rotação da Moeda e o Paradoxo de Braess.

Ademais, muitos dos problemas e as suas soluções foram tratados de forma próxima ao rigor matemático, porém sempre buscando recorrer ao currículo básico e ao nível do EFAF, visando a formação do raciocínio hipotético-dedutivo, como preconiza a própria BNCC para esta etapa. Dessa forma, muitas vezes, as resoluções das equações e inequações se deram de forma geral e literal, porém pode e deve o professor leitor deste trabalho aplicar esses problemas na sua sala de aula de maneira mais contextualizada. Na verdade, não somente os problemas, mas também os próprios paradoxos devem ser contextualizados, apresentando-os por meio de diversas e oportunas maneiras (contação de história, exposição de vídeos ou ilustrações, debate, peça teatral, entre outras).

Ainda sobre a contextualização dos problemas apresentados, é importante que o aluno reflita e se questione sobre quais são os resultados possíveis se algum dado ou condição for alterado. Por isso, deve-se lhe dar a oportunidade para elaborar e propor para si ou para os colegas problemas em diferentes contextos. Assim, estará o aluno desenvolvendo a capacidade essencial de abstrair um conceito de um contexto e aplicá-lo em outro.

Por fim, mais uma vez, é importante que os alunos não fiquem passando de um problema para o outro sem antes refletirem e investigarem-no de forma mais profunda. Como foi mostrado no trabalho, um mesmo problema pode ser resolvido por mais de uma maneira pelo aluno, utilizando ou não o mesmo conceito ou procedimento. Questionar e incentivar os alunos para que formulem diferentes soluções para um mesmo problema condiz com a tendência de Resolução de Problemas e desenvolve, entre outras coisas, o pensamento crítico e criativo, além de um entendimento mais amplo das várias relações que existem entre conceitos e procedimentos em diferentes ramos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, etc).

Referências

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. [S.l.]: Zahar, 1969.

BISPO, A. V. Paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais. In: *Workshop Nacional Online do Profmat*, 3., 2025, online. Anais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2025. p. 281–284. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1qyL3l2DaBQ5qBDXMntUix1gJdB3fv4kt/view>>. Acesso em 8 de jan. de 2026.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em 8 de jan. de 2026.

CAMPOS, R. N. R. *Uma proposta de ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos utilizando três paradoxos*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal do Vale São Francisco, Juazeiro, 2016. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=95204&id1=2917>. 8 de jan. de 2026.

DORTA, F. *Os paradoxos e as aulas de matemática: algumas reflexões e sugestões*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=46305&id1=596>. Acesso em 8 de jan. de 2026.

DOWDEN, B. *Zeno's Paradoxes*. [s. d.]. Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <<https://iep.utm.edu/zenos-paradoxes/#SH1a>> Acesso em 8 de jan. de 2026.

GEOGEBRA. *Geogebra Manual*. [s. d.]. Geogebra. Disponível em: <<https://geogebra.github.io/docs/manual/en/tools/Slider/?redirect=pt>> Acesso em 8 de jan. de 2026.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *A conquista matemática: 6º ano, Ensino Fundamental – Anos Finais*. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *A conquista matemática: 7º ano, Ensino Fundamental – Anos Finais*. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *A conquista matemática: 8º ano, Ensino Fundamental – Anos Finais*. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *A conquista matemática: 9º ano, Ensino Fundamental – Anos Finais*. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2022.

IGREJA PRESBITERIANA DO BRASIL. *Manual presbiteriano*. 2ª. ed. São Paulo: Cultura Cristã, 2023.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. 3ª. ed. Boston: Pearson, 2009.

- MUNIZ, A. C. *Fundamentos de cálculo*. 2^a. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.
- NASCIMENTO, J. P. d. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, *Equidecomposição no plano e no espaço: do Teorema de Wallace–Bolyai–Gerwien ao Paradoxo de Banach–Tarski – uma abordagem histórica, conceitual e didática*. Fortaleza: [s.n.], 2025. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171059939&id1=8302>. Acesso em 8 de jan. de 2026.
- OLIVEIRA, E. R. de. *O uso de frações contínuas e do paradoxo de Galileu: aplicações na resolução de problemas físicos na educação básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=508&id1=1503>. Acesso em 8 de jan. de 2026.
- PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. *Organizador curricular trimestral: Matemática: Ensino Fundamental – Anos Finais*. Recife: Secretaria de Educação, [2024]. Disponível em: <<https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2025/02/MATEMATICA.pdf>>. Acesso em 8 de jan. de 2026.
- QUINE, W. V. O. *The Ways of Paradox, and Other Essays*. Cambridge: Harvard University Press, 1976.
- SALOMÃO, M. S. *Estudo e generalizações do paradoxo de Monty Hall na Educação Básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=1063&id1=1325>. Acesso em 8 de jan. de 2026.
- SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. B. *Geometria Euclidiana Plana*. São Cristóvão: Editora UFS, 2011.
- SEE/SP. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e sua tecnologia*. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado – São Paulo: SEE, 2010.
- SENTONE, F. G. *Paradoxos geométricos em sala de aula*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=94543&id1=3125>. Acesso em 8 de jan. de 2026.
- SILVA, R. H. G. *Paradoxos matemáticos que ocorrem na Educação Básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, 2022. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171054214&id1=6531>. Acesso em 8 de jan. de 2026.
- STEWART, J. *Calculus: Early Transcendentals*. 8^a. ed. [s. l.]: Cengage Learning, 2015.
- TAHAN, M. *As maravilhas da matemática*. 2^a. ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973.

VIANA, F. C. d. A. *Estudo e aplicações de probabilidade geométrica e paradoxos*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=36803&id1=27>. Acesso em 8 de jan. de 2026.

YAMAMOTO, T. A. S. U. *Atividades criativas para o ensino de probabilidade e geometria: o paradoxo de Monty Hall, o problema do macarrão e suas aplicações*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=170600356&id1=5833>. Acesso em 8 de jan. de 2026.