



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
PROFMAT

MISSANDRA PIRES DA SILVA NUNES

METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: contribuições dos  
materiais manipuláveis para o Princípio Fundamental da Contagem

ABAETETUBA

2025

MISSANDRA PIRES DA SILVA NUNES

METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: contribuições dos  
materiais manipuláveis para o Princípio Fundamental da Contagem

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado  
Profissional em Matemática - PROFMAT do  
Programa de Pós-Graduação em Matemática do  
Centro de Ciências da Universidade Federal de  
Abaetetuba-PA, como requisito parcial à  
obtenção do título de mestre em Matemática.  
Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva  
Costa

ABAETETUBA

2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

N972m Nunes, Missandra Pires da Silva.  
Metodologia Ativa no Ensino de Matemática :  
METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE Contribuições dos  
materiais manipuláveis para o Princípio Fundamental da Contagem  
/ Missandra Pires da Silva Nunes. — 2025.  
86 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação  
em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2025.

1. Princípio Fundamental da Contagem. 2. Análise  
Combinatória. 3. Materiais Manipuláveis. 4. Metodologia  
Ativa. 5. Educação Básica. I. Título.

CDD 510

---

MISSANDRA PIRES DA SILVA NUNES

METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: contribuições dos  
materiais manipuláveis para o Princípio Fundamental da Contagem

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado  
Profissional em Matemática - PROFMAT do  
Programa de Pós-Graduação em Matemática do  
Centro de Ciências da Universidade Federal de  
Abaetetuba-PA, como requisito parcial à  
obtenção do título de mestre em Matemática.  
Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva  
Costa

Aprovada em: 19/09/2025.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa (Orientador)  
Universidade Federal de Abaetetuba-PA (UFPA)

---

Prof. Dr. Antônio Maia de Jesus Chaves Neto  
Membro Externo-ICEN-UFPA

---

Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa  
Membro Interno-PROFMAT

---

Prof. Dr. Gênivaldo dos Passos Corrêa  
Membro Interno-UFPA

---

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro  
Membro interno-PROFMAT

---

Prof. Dr. Wilson Rodrigues Oliveira  
Membro Interno-UFPA

Dedico este trabalho aos meus pais Manoel e Ana Selma, pelo apoio incondicional; e ao meu filho Mathias Nunes, minha fonte de força, motivação e inspiração constante.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me sustentado em cada etapa desta caminhada, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Ao meu filho Mathias Nunes, minha maior motivação para seguir em frente com fé e coragem.

Ao meu esposo Adriel Nunes, pela paciência, compreensão, apoio e incentivo.

Aos meus pais Manoel da Silva e Ana Selma da Silva, pelo amor incondicional, pela força que sempre me transmitiram e pelas orações que me sustentaram ao longo de toda esta jornada.

Aos meus irmãos e demais familiares, em especial a minha irmã Mirlene Silva, que sempre me apoiou e incentivou.

Aos professores que compõem o curso de mestrado PROFMAT em Abaetetuba obrigado por inspirarem e guiarem nossos caminhos, em especial ao meu orientador Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa, por compartilhar sua sabedoria com paciência e dedicação.

Aos amigos que sempre me incentivaram a persistir na jornada.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, pela parceria, amizade e trocas de saberes que tornaram a caminhada mais leve e significativa.

A direção e colegas de profissão da escola EEEFM Padre José Delgardes, pela compreensão para que pudesse frequentar as aulas do curso.

A escola EEEFM São Miguel de Beja na qual a pesquisa foi desenvolvida, aos alunos, colegas de profissão, direção e coordenação pelo apoio e compreensão.

A todos que, de forma direta ou indireta contribuíram durante essa jornada.

## RESUMO

A presente dissertação analisa o ensino do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) no 8º ano do Ensino Fundamental, destacando sua relevância como base para a compreensão da Análise Combinatória. A pesquisa partiu, primeiramente, de um resgate histórico dos métodos de contagem, relacionando sua evolução com os documentos oficiais de orientação curricular, a saber, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento Curricular do Estado do Pará, que reafirmam a relevância dessa temática no processo formativo. O objetivo geral consistiu investigar o ensino da Matemática com a utilização do Princípio Fundamental da Contagem visando a aplicação de metodologia ativa com uso de recursos manipuláveis em comparação ao ensino tradicional. Adotou-se uma abordagem quali-quantitativa, desenvolvida em duas turmas A e B do 8º ano, com atividades aplicadas em contexto escolar. Os instrumentos utilizados incluíram exercícios adaptados com cinco atividades, avaliações finais, questionários e a observação direta das interações em sala. Os resultados demonstraram que os discentes que tiveram acesso aos recursos manipuláveis apresentaram melhor desempenho e maior engajamento em relação aos que participaram apenas de aulas expositivas, evidenciando que o contato com materiais concretos favorece a compreensão de conceitos abstratos e estimula o raciocínio lógico a partir da metodologia ativa inserida nesse processo de ensino. Além disso, verificou-se que a contextualização dos problemas aproximou o ensino da Matemática da realidade dos discentes, ampliando o interesse e a participação nas atividades concernente com o cotidiano. Conclui-se com a pesquisa que a metodologia ativa com materiais manipuláveis em relação a metodologia teórica, constitui num caminho promissor para o ensino do PFC, que fortalece a aprendizagem significativa e se alinham às diretrizes dos documentos oficiais da Educação Básica.

**Palavras-chave:** Princípio Fundamental da Contagem. Análise Combinatória. Materiais Manipuláveis. Metodologia Ativa. Educação Básica.

## ABSTRACT

This dissertation analyzes the teaching of the Fundamental Counting Principle (PFC) in the 8th grade of elementary school, highlighting its relevance as a foundation for understanding Combinatorial Analysis. The research began with a historical review of counting methods, relating their evolution to official curricular guidance documents, namely the National Curricular Parameters (PCN), the National Common Curricular Base (BNCC), and the Curricular Document of the State of Pará, which reaffirm the relevance of this topic in the formative process. The general objective was to investigate mathematics teaching using the Fundamental Counting Principle, aiming at the application of an active methodology using manipulative resources in comparison to traditional teaching. A qualitative and quantitative approach was adopted, developed in two 8th-grade classes, A and B, with activities implemented in a school context. The instruments used included adapted exercises with five activities, final assessments, questionnaires, and direct observation of classroom interactions. The results demonstrated that students who had access to manipulative materials performed better and were more engaged than those who participated only in lectures, demonstrating that contact with concrete materials fosters the understanding of abstract concepts and stimulates logical reasoning through the active methodology incorporated into this teaching process. Furthermore, it was found that contextualizing the problems brought mathematics teaching closer to the students' realities, increasing their interest and participation in everyday activities. The research concludes that the active methodology with manipulative materials, in comparison with theoretical methodology, constitutes a promising path for teaching PFC, strengthening meaningful learning and aligning with the guidelines of official Basic Education documents.

**Keywords:** Fundamental Principle of Counting. Combinatorial Analysis. Manipulatives. Active Methodology. Basic Education.

## **ABREVIATURAS**

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

DCEPA – Documento Curricular do Estado do Pará

MD – Material Didático

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PFC – Princípio Fundamental da Contagem

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Representação do Stomachion. ....	20
Figura 2- Representação do Lo-Shun. ....	21
Figura 3- Representação do quadrado mágico. ....	22
Figura 4- Representação mística do Lo- Shu.....	22
Figura 5- Representação genérica do quadrado mágico. ....	23
Figura 6- Representação do quadrado mágico em função das variáveis a e b. ....	24
Figura 7- Formas de organizar três pessoas em círculo.....	38
Figura 8- Tabela de combinações de massa e molho.....	43
Figura 9- Árvore de possibilidades do exemplo 2.....	43
Figura 10- Aplicação do princípio fundamental da contagem.....	44
Figura 11- Anagramas da palavra MEU. ....	44
Figura 12- Utilização do Princípio Fundamental da Contagem. ....	44
Figura 13- Duplas formadas. ....	45
Figura 14- Solução usando o Princípio Multiplicativo.....	45
Figura 15- Anagramas considerando as letras A's diferentes.....	46
Figura 16- Anagramas considerando as letras A's iguais. ....	46
Figura 17- Solução do exemplo 7.....	47
Figura 18- Solução do exemplo 8.....	48
Figura 19- Solução exemplo 9.....	49
Figura 20- Fluxograma metodológico sobre o ensino do PFC nas turmas A e B.....	52
Figura 21- Localização da EEFM São Miguel de Beja. ....	53
Figura 22- Materiais manipuláveis. ....	55
Figura 23- Atividade 1 da avaliação final.....	57
Figura 24- Aplicação do PFC com materiais manipuláveis na turma A.....	59
Figura 25- Aplicação na turma B.....	60

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Autores e temas históricos relevantes para o surgimento da Análise Combinatória. .....	26
Quadro 2- Cronograma de realização das atividades desenvolvidas.....	54
Quadro 3- Cardápio. ....	57
Quadro 4- Quadro de análise das questões da avaliação final.....	58

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Comparação dos resultados das atividades. ....	61
Gráfico 2- Resultados comparativos da atividade 1. ....	62
Gráfico 3- Resultados comparativos da atividade 2. ....	63
Gráfico 4- Resultados comparativos da atividade 3. ....	64
Gráfico 5- Resultados comparativos da atividade 4. ....	65
Gráfico 6- Resultados comparativos da atividade 5. ....	66
Gráfico 7- Resultados comparativos da pergunta 1. ....	68
Gráfico 8- Resultados Comparativos da pergunta 2. ....	69
Gráfico 9- Resultados comparativos da pergunta 3. ....	70
Gráfico 10- Resultados comparativos da pergunta 4. ....	70

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>CAPÍTULO 2: HISTÓRIA DOS MÉTODOS DE CONTAGEM, ANÁLISE COMBINATÓRIA, DOCUMENTOS OFICIAIS E METODOLOGIA DOCENTE</b> .....	19
<b>2.1 Abordagem histórica dos métodos de contagem</b> .....	19
<b>2.2 O nascimento da análise combinatória</b> .....	20
<b>2.3 Os métodos de contagem segundo os PCNs, BNCC e DCEPA</b> .....	26
<b>2.4 A metodologia docente</b> .....	29
2.4.1 O Método Tradicional .....	30
2.4.2 Metodologias Ativas .....	31
2.4.3 O uso de materiais manipuláveis na aprendizagem.....	31
<b>CAPÍTULO 3: OS CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO DO PFC PARA A COMPREENSÃO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM E ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS</b> .....	34
<b>3.1 Princípios básicos de contagem: aditivo e multiplicativo</b> .....	34
<b>3.2 Fatorial de um número natural e permutação simples</b> .....	36
<b>3.3 Permutação com repetição</b> .....	37
<b>3.5 Arranjo simples</b> .....	39
<b>3.6 Combinação simples</b> .....	40
<b>3.7 O PFC em livros didáticos do 8º ano</b> .....	42
3.7.1 Araribá conecta matemática .....	42
3.7.2 Geração Alpha Matemática .....	47
3.7.3 Matemática e Realidade .....	48
<b>CAPÍTULO 4: METODOLOGIA QUALIQUANTITATIVA COM USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL</b> .....	51
<b>4.1 Tipo de metodologia aplicada</b> .....	51
<b>4.3 Local da pesquisa e Público-alvo</b> .....	53
<b>4.4 Tempo da pesquisa</b> .....	54
<b>4.5 Materiais manipuláveis utilizados</b> .....	55
<b>4.6 Atividades da avaliação final</b> .....	56
<b>4.7 Relato das aulas e aplicação da avaliação final</b> .....	58
4.7.1 Turma A .....	58

4.7.2 Turma B .....	59
<b>4.8 Resultado e análise das metodologias aplicadas .....</b>	<b>60</b>
4.8.1 Análise dos acertos em cada atividade .....	62
<b>4.9 Aplicação dos questionários .....</b>	<b>67</b>
4.9.1 Análise das respostas do questionário 1 .....	67
4.9.1 Análise das respostas do questionário 2 .....	71
<b>4.10 Discussão .....</b>	<b>72</b>
<b>CAPITULO 5 .....</b>	<b>75</b>
<b>5.1 CONCLUSÃO .....</b>	<b>75</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>79</b>
<b>APÊNDICE A - Avaliação final .....</b>	<b>82</b>
<b>APÊNDICE B - Questionário 1 .....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE C- Questionário 2 .....</b>	<b>84</b>
<b>APÊNDICE D- Termo de consentimento .....</b>	<b>85</b>

## CAPÍTULO 1

### 1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática tem grande importância na história da humanidade. Estando presente em inúmeras atividades do cotidiano, como ao ir às compras e contar o tempo no relógio e o seu ensino deve proporcionar ao aluno o pensar, desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar na sociedade (Brasil, 2017, p. 267).

No entanto, esse componente curricular não tem uma boa receptividade, chegando a ser a disciplina de menos interesse nas escolas em certas metodologias não causam motivação e interesse pelo ensino da Matemática (Prediger; Berwandere; Mors, 2009). Uma das causas pode ser porque para a maioria dos professores “a atividade de ensinar é vista como transmissão da matéria aos alunos, realização de exercícios repetitivos, memorização de definições e fórmulas” com base na metodologia tradicional (Libâneo, 1990, p. 78).

Diante desse cenário é fundamental a busca de “alternativas para que os alunos tenham uma aprendizagem significativa e se sintam mais motivados a participar das aulas e assim, aprendam os conteúdos trabalhados de maneira leve” (Osório, 2019, p. 19). Desta forma, o professor deve incentivar o aluno a raciocinar, a problematizar tendo ele como sujeito ativo e participante do processo de ensino e aprendizagem atuando com a experiência e prática necessárias para promover com motivação, interesse e metodologias que melhorem o ensino da Matemática.

Nessa perspectiva, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) um dos objetos de conhecimento da Matemática que conforme destacam documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento Curricular do Estado do Pará (DCEPA), devem ser abordados na Educação Básica inclusive com metodologias que tornem esse conteúdo satisfatório ao aluno. No ensino fundamental, o PFC representa uma fase importante para formação do pensamento lógico-matemático dos alunos e as aprendizagens adquiridas nesta etapa de ensino são essenciais para garantir um bom desempenho no Ensino Médio, pois, problemas de Análise Combinatória<sup>1</sup> abordados nesta etapa de ensino, que por vezes são taxados como difíceis por alguns alunos e até mesmo professores, tem como base o chamado PFC (Linhares, Silva, 2020).

---

<sup>1</sup> Área da matemática que estuda os problemas de contagem.

Com base no contexto anterior, enfatiza-se como metodologia, pesquisas bibliográficas em sites, teses, monografia e livros. Além da pesquisa bibliográfica, realizou-se a Pesquisa de Campo em duas turmas do 8º ano do ensino fundamental com observações a partir de duas diferentes metodologias. Em uma das turmas, a aula foi desenvolvida com o uso de materiais manipuláveis e na outra, o conteúdo foi exposto de forma tradicional, com explicação oral e resolução de exercícios no quadro e em ambas as turmas, aplicou-se a mesma avaliação final.

A abordagem da pesquisa é a qualiquantitativa, pois se utiliza da análise de dados numéricos para mensurar, descrever e interpretar os resultados obtidos em relação as atividades propostas aos alunos, e também considera os aspectos subjetivos dos alunos no desenvolvimento das atividades.

Em relação ao Problema da Pesquisa, pode ser formulado da seguinte maneira: De que maneira o uso de materiais manipuláveis influencia a aprendizagem do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), em comparação ao ensino tradicional expositivo, entre alunos do 8º ano do Ensino Fundamental nas turmas A e B? Essa questão emana da constatação de que, apesar de o PFC ser um conteúdo estruturador da Análise Combinatória e estar previsto nos documentos oficiais (PCN, BNCC, DCEPA), muitos alunos apresentam dificuldades em compreendê-lo quando as abordagens são desenvolvidas a partir da metodologia tradicional ou quando ensinado apenas de forma abstrata e teórica. Com base nesse entrave a ideia partir da certeza de identificar a necessidade de investigar metodologias que tornem o conteúdo mais acessível, significativo e contextualizado para os estudantes.

A resolução desse problema foi buscada por meio da aplicação de uma metodologia qualiquantitativa apresentada no capítulo 4, combinando dados objetivos (taxas de acerto nas atividades) e observações qualitativas (comportamento, participação, engajamento e relação dos alunos com a Matemática). A intervenção com materiais manipuláveis mostrou-se eficaz, pois permitiu que os estudantes visualisassem e experimentassem concretamente os conceitos de contagem, resultando em maior desempenho em comparação ao ensino tradicional.

A pesquisa, portanto, aponta que a solução passa pela integração de metodologias ativas ao ensino da Matemática ligada ao PFC e em especial aquelas que utilizam recursos concretos ( turma A apresentado no capítulo 4), contextualização de problemas e participação ativa dos alunos, o que não apenas resolve a dificuldade de abstração, mas também contribui para aprendizagens mais significativas e duradouras ao ponto de constatar e mostrar qualiquantitativamente a eficácia da metodologia ativa realizada.

Em relação a Hipóteses da Pesquisa, adere-se os seguintes levantamentos para serem contatadas: (i) O uso de materiais manipuláveis no ensino do PFC contribui para a melhoria do desempenho dos alunos, favorecendo a compreensão dos conceitos de contagem em comparação ao ensino tradicional.; (ii) Alunos que utilizam materiais concretos apresentam maior engajamento e motivação na resolução das atividades, o que se reflete em melhores resultados nos testes aplicados; (iii) A associação entre práticas pedagógicas ativas e contextualização dos problemas torna o conteúdo mais significativo, reduzindo as dificuldades de abstração e ampliando a capacidade de aplicação dos conceitos matemáticos em situações cotidianas; (iv) A metodologia qualiquantitativa permite não apenas medir o desempenho quantitativo dos alunos, mas também compreender aspectos qualitativos da aprendizagem, como estratégias de raciocínio, interação e evolução no processo formativo.

Justifica-se a pesquisa pela necessidade de contribuir para a melhoria do ensino de Matemática, fornecendo contribuições teóricas e práticas que ajudem educadores a adotar estratégias eficazes. Ausubel (1978, apud, Moreira, 2006) enfatiza a importância da aprendizagem significativa, em que novos conhecimentos são adquiridos a partir de estruturas cognitivas pré-existentes. Nesse contexto, os materiais manipuláveis, apresentam-se como ferramentas didáticas valiosas, por permitirem a concretização de conceitos abstratos (Lorenzato, 2012). Em contraste, o método tradicional ainda é amplamente utilizado, baseado na transmissão de conhecimento pelo professor, com foco na memorização do objeto de conhecimento.

Comparar essas duas abordagens permite avaliar qual delas possui uma maior contribuição e eficácia à compreensão e aplicação do PFC. Além disso, possibilita a reflexão sobre como diferentes metodologias podem influenciar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

Portanto, com base nesta pesquisa, o trabalho apresenta como objetivo geral investigar o ensino da Matemática com a utilização do Princípio Fundamental da Contagem visando a aplicação de metodologia ativa com uso de recursos manipuláveis em comparação ao ensino tradicional. Quanto aos objetivos específicos são:

- ✓ Resgatar a abordagem histórica dos métodos de contagem e da Análise Combinatória, destacando sua relevância no desenvolvimento do pensamento matemático.

- ✓ Analisar os documentos oficiais de orientação curricular (PCN, BNCC e Documento Curricular do Estado do Pará), verificando como o Princípio Fundamental da Contagem é contemplado no ensino.
- ✓ Aplicar uma metodologia qualiquantitativa com uso de materiais manipuláveis, comparando seus efeitos com o ensino tradicional em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental.
- ✓ Avaliar e discutir os resultados obtidos, verificando em que medida a metodologia aplicada contribuiu para uma aprendizagem mais significativa da Matemática.

Para melhor realizar a abordagem e sua importância, considera-se dividido em 5 capítulos, a saber:

O capítulo 1, aborda informações sobre o tema proposto, ao apresentar problema, procedimentos metodológicos, justificativa e objetivos.

No capítulo 2, inicia-se pela abordagem histórica dos métodos de contagem, destacando o percurso evolutivo dessas técnicas ao longo do tempo. Em seguida, analisa-se o nascimento da análise combinatória, situando sua consolidação como campo específico da Matemática. Posteriormente, são discutidos os métodos de contagem sob a ótica dos documentos normativos nacionais, como os PCNs, a BNCC e o DCEPA, evidenciando as orientações curriculares para o ensino desse conteúdo. Na sequência, examina-se a metodologia docente, inicialmente pelo viés do método tradicional, baseado na exposição e na resolução formal de exercícios, também se comenta sobre metodologias ativas e, por fim, pelo enfoque no uso de materiais manipuláveis na aprendizagem, como estratégia de ensino que favorece a compreensão dos conceitos combinatórios de forma concreta e significativa.

No capítulo 3, serão discutidos os principais conceitos que estruturam a Análise Combinatória e que servem de base para o ensino do PFC. Inicialmente, apresentam-se os princípios básicos de contagem: aditivo e multiplicativo, seguidos pelo estudo do fatorial de um número natural e da permutação simples, elementos centrais para a compreensão da combinatória. Em sequência, são abordadas as permutações com repetição e a permutação circular, que ampliam as possibilidades de aplicação dos métodos de contagem. Posteriormente, exploram-se o arranjo simples e a combinação simples, que completam o conjunto de técnicas fundamentais para o raciocínio combinatório. Por fim, dedica-se um espaço à análise do tratamento do PFC em livros didáticos do 8º ano, com destaque para três coleções amplamente utilizadas: Araribá Conecta Matemática, Geração Alpha Matemática e Matemática e Realidade,

evidenciando como essas obras apresentam o conteúdo e de que forma contribuem para o processo de ensino-aprendizagem.

O Capítulo 4, Metodologia Quali-quantitativa com Material Manipulável descreve em detalhe os procedimentos adotados na pesquisa. Inicia-se com a explicitação do tipo de metodologia aplicada seguida pela descrição dos procedimentos metodológicos que orientaram a investigação. Na sequência, apresentam-se o local da pesquisa e o público-alvo, bem como a definição do tempo destinado à coleta de dados. Também se destacam os materiais manipuláveis utilizados e as atividades propostas na avaliação final. O capítulo avança com o relato das aulas e da aplicação da avaliação final, diferenciando a experiência vivenciada pela turma A e pela turma B. Posteriormente, são discutidos os resultados obtidos e a análise das metodologias aplicadas, com uma ênfase na análise dos acertos em cada atividade, além disso faz-se a análise do questionário 1 aplicado nas duas turmas, sobre a relação dos alunos com a Matemática do questionário 2 sobre a percepção dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis, o qual foi feito apenas na turma A. Por fim, apresenta-se a discussão, que problematiza e interpreta os achados da pesquisa à luz do referencial teórico e dos objetivos propostos.

Em seguida, o capítulo 5 com a conclusão sintetiza os principais resultados da investigação, destacando as contribuições do uso de materiais manipuláveis para a aprendizagem do PFC, bem como as implicações pedagógicas observadas para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental. Finalmente, são listadas as Referências, que reúnem todas as obras, documentos oficiais e materiais didáticos utilizados ao longo do estudo, assegurando a fundamentação científica da pesquisa e a conformidade com as normas acadêmicas.

## **CAPÍTULO 2: HISTÓRIA DOS MÉTODOS DE CONTAGEM, ANÁLISE COMBINATÓRIA, DOCUMENTOS OFICIAIS E METODOLOGIA DOCENTE.**

O presente capítulo, dedica-se a situar o estudo dos métodos de contagem em uma perspectiva ampla, articulando sua evolução histórica, sua institucionalização como parte da Análise Combinatória e sua presença nos documentos normativos nacionais que orientam o ensino de Matemática. A exposição inicia-se pela retomada do percurso histórico dessas técnicas, evidenciando como o pensamento combinatório foi se estruturando ao longo do tempo, até alcançar maior rigor e autonomia como objeto de conhecimento do componente curricular.

Em seguida, examina-se a inserção desse conteúdo nas diretrizes curriculares brasileiras como os PCNs, a BNCC e as DCEPA, ressaltando a relevância atribuída à aprendizagem dos métodos de contagem no desenvolvimento das competências matemáticas. Por fim, o capítulo discute a prática docente, contrapondo o modelo tradicional, baseado na exposição formal e resolução de exercícios, com abordagens que valorizam o uso de materiais manipuláveis, os quais tornam os conceitos mais acessíveis e significativos para os estudantes, favorecendo sua compreensão e aplicação em contextos diversos.

### **2.1 Abordagem histórica dos métodos de contagem**

A necessidade de contar está presente desde os primórdios da humanidade, estando diretamente ligada à organização social e a sobrevivência, pois de acordo com Eves (2011), os métodos de contagem surgiram muito antes da escrita ou mesmo da civilização, embora existam poucos registros específicos para análise. Esses processos, entretanto, são a base para o desenvolvimento de métodos matemáticos complexos e sua compreensão é de fundamental importância para a história da matemática.

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram e largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. (Eves, 2011, p. 25).

De acordo como o mencionado pode-se considerar que o conceito de número surgiu como um processo gradual, de acordo com as necessidades práticas do cotidiano, como a coleta, a caça e a troca de objetos.

Segundo Eves (2011), o processo de contar possivelmente tem seu início, por meio do método de correspondência biunívoca, esse processo teve início quando o ser humano passou a comparar e relacionar diferentes conjuntos de objetos, criando correspondências entre eles. Para isso, utilizava partes do corpo, como os dedos das mãos e dos pés que eram os métodos mais naturais de contagem. Além dessas, também fazia uso de elementos do ambiente como pedras, conchas, grãos, ou até marcas feitas no solo, na areia, em ossos ou madeira, para medir e estabelecer relações.

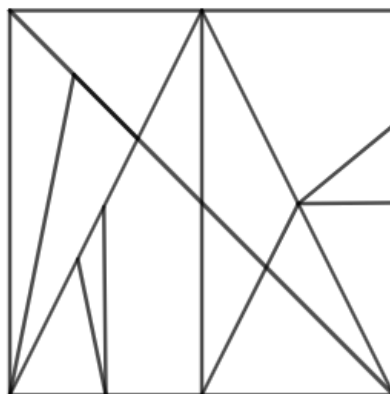
Ao abordar seu desenvolvimento, Eves (2011) aponta que o pensamento numérico acompanhou a evolução da sociedade ao longo do tempo. Como exemplo, ele menciona que os indivíduos realizavam trocas e registravam a parte da caça destinada a cada família, atividades que naturalmente exigiam o uso da contagem. À medida que a vida em sociedade foi se tornando mais complexa, surgiu a necessidade de raciocínio numérico mais aprimorado.

## 2.2 O nascimento da análise combinatória

Deve-se considerar o surgimento da Análise Combinatória ao abordar os aspectos históricos da contagem. No entanto, não se sabe ao certo qual foi o primeiro problema que levou ao surgimento da Análise Combinatória.

Segundo Tavares (2005), o estudo da combinatória remonta ao tempo de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), pois entre os trabalhos publicados por ele, o *Stomachion* sempre aguçou a curiosidade de historiadores e matemáticos. O *Stomachion* é aparentemente um jogo, semelhante ao Tangram<sup>2</sup>, constituído de quatorze peças planas que devem encaixar para formar um quadrado, como representado na figura 1.

Figura 1- Representação do *Stomachion*.



Fonte: Própria da autora.

---

<sup>2</sup> O tangram é um quebra cabeça geométrico chinês formado por 7 peças.

Em dezembro de 2003, o jornal americano *The New York Times* publicou um artigo intitulado *In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment*, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que o *Stomachion* não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

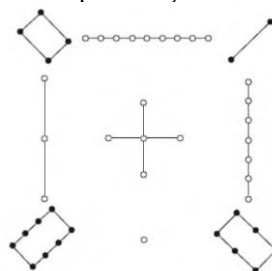
De modo específico, a conclusão de Netz é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado. Sem considerar as posições simétricas, chegou-se a 268 possibilidades.

De acordo com Tavares (2005), a resposta para essa questão pode ser 17.152 ou, desconsiderando as soluções simétricas, 268. Comenta também que não está claro se Arquimedes obteve essa resposta.

No entanto o desenvolvimento do binômio  $(1 + x)^n$  é apontado por Morgado et al (2016) como um dos primeiros problemas estudados ligados ao estudo de combinatória. Menciona haver registro nos *Elementos de Euclides*<sup>3</sup>, em torno de 300 a.C. O binômio que era conhecido por Shih-Chieh, na China (em torno de 1300) e antes disso pelos hindus e árabes possui relação direta com o Triângulo de Pascal. Assegura também que o matemático hindu Bhaskara (1114 - 1185) conseguia calcular o número de permutações, combinações e de arranjos de  $n$  objetos.

Ainda, segundo Eves (2011), um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o *I-King* ou *Livro das Permutações*. Nele aparece um diagrama numérico conhecido como *Lo-Shu*. É um exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico que segundo a lenda o primeiro a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu as margens do rio Amarelo. Como mostra a figura (Figura 2), é um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números ímpares.

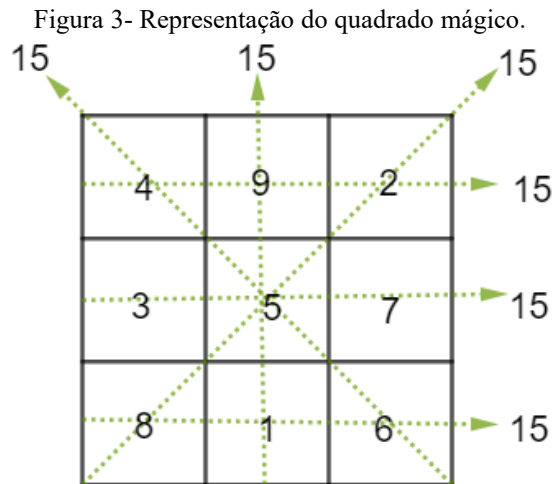
Figura 2- Representação do Lo-Shun.



Fonte: Eves (2011, p. 269).

<sup>3</sup> *Elementos de Euclides*: Obra de Euclides composta por 13 livros, escritos por volta de 300 a.C.

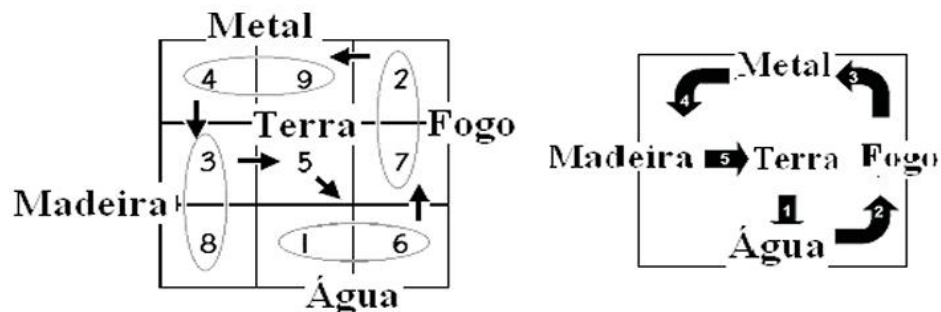
Um quadrado mágico é um grupo ordenado de números  $1, 2, 3, \dots, n^2$ , distintos, dispostos de forma que cada coluna, linha ou diagonal deste quadrado possua a mesma soma, chamada constante mágica do quadrado, conforme mostra a figura (Figura 3). O quadrado mágico se diz normal se os  $n^2$  números que o formam são os  $n^2$  primeiros números inteiros positivos.



Fonte: Própria da autora.

Segundo Santinho e Machado (2006), os chineses acreditavam que os quadrados mágicos possuísem atributos místicos e que simbolizavam os princípios básicos que formavam universo. O número 5 representava a Terra e ao seu redor estão distribuídos os quatro elementos principais, a água 1 e 6, o fogo 2 e 7, a madeira 3 e 8 e os metais 4 e 9, conforme representação da figura 4.

Figura 4- Representação mística do Lo- Shu.



Fonte: Santinho e Machado, 2006, p. 02.

Santinho e Machado também mencionam que, além do lado místico, os quadrados mágicos despertaram também interesse em alguns matemáticos, como: Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude- Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783) pelos problemas difíceis que originavam.

Andrade (1999), demonstra uma expressão para a soma dos números de qualquer linha, coluna ou qualquer diagonal do quadrado), representado por  $M$ , a qual chamou de constante mágica. Assim, basta observar que a soma das  $n$  linhas da matriz é igual a:

$$M + M + \dots + M = nM \quad (1)$$

Reescrevendo (1) da seguinte maneira:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2} \quad (2)$$

Assim para a soma de todas as  $n$  linhas, tem-se:

$$nM = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2} \quad (3)$$

Portanto:

$$M = \frac{n(n^2 + 1)}{2} \quad (4)$$

Foi construído por Andrade (1999) um quadrado conforme figura (Figura 5), para descobrir a forma geral de um quadrado.

Figura 5- Representação genérica do quadrado mágico.

<b>a</b>	<b>b</b>	<b>C</b>
<b>d</b>	<b>e</b>	<b>F</b>
<b>g</b>	<b>h</b>	<b>I</b>

Fonte: Própria da autora.

Resolvendo o sistema linear formado pelas igualdades das somas de linhas, colunas e diagonais, e escolhendo  $a$  e  $b$  como variáveis livres, obtém-se um quadrado mágico de terceira ordem como mostra a figura (figura 6):

Figura 6- Representação do quadrado mágico em função das variáveis  $a$  e  $b$ .

$a$	$b$	$15 - a - b$
$20 - b - 2a$	5	$b - 10 + 2a$
$-5 + a + b$	$10 - b$	$10 - a$

Fonte: Própria da autora.

Pode-se ter a impressão de que há uma infinidade de quadrados mágicos de terceira ordem, bastando atribuir valores inteiros às variáveis  $a$  e  $b$ , mas isso deve levar em consideração que o valor obtido deve ser um número inteiro que não se repita no intervalo  $[1, n^2]$ . Logo  $(a, b)$ , só podem assumir os valores:  $(2,7)$ ,  $(2,9)$ ,  $(4,3)$ ,  $(4,9)$ ,  $(6,1)$ ,  $(6,7)$ ,  $(8,1)$  e  $(8,3)$ , gerando oito quadrados, que pode ser obtido de qualquer outro por troca de linha, troca de coluna ou transposição de matriz. Nesse caso, diz-se que esses quadrados são iguais e que existe apenas um quadrado mágico de ordem 3.

De acordo com Vaquez e Noguti (2004), alguns quadrados maiores que o Lo-Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido com os Ikhwan-al-Safa, que representaram os quadrados de ordem 4, 5, 6 e afirmaram existir o de 7, 8 e 9. Sabe-se apenas a quantidade de quadros mágicos de ordem 3, 4 e 5, que são respectivamente 1, 880 e 275.305.224.

Junto a esses, outros problemas históricos contribuíram para o desenvolvimento da Análise Combinatória, vejamos a seguir. Leonardo Euler, propôs e provou o problema a seguir: encontrar um caminho que passasse por cada uma das sete pontes da cidade Königsberg apenas uma vez e retornasse ao ponto inicial. Euler provou que tal caminho não existia. Segundo Stewart (2009), levou a criação da Teoria dos Grafos.

Francis Guthrie em 1852, também, propôs o Teorema das quatro cores, o qual afirma que qualquer mapa dividido em regiões, pode ser colorido com, no máximo, quatro cores, de forma que nenhuma região adjacente tenha a mesma cor.

Sampaio (2004), relata que Francis Guthrie colorindo um mapa dos condados da Inglaterra, tomava o cuidado de não colorir com a mesma cor países vizinhos que tivessem alguma linha de fronteira em comum. Notou que para colorir o mapa bastavam quatro cores.

Experimentalmente, conseguiu colorir vários outros mapas, fazendo uso de apenas quatro cores. Porém não conseguiu demonstrar, que quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa. Repassou então o problema a seu irmão, Frederick Guthrie, então, estudante de matemática da mesma faculdade. O qual, formulou o problema a seu professor, o grande Augustus De Morgan. De Morgan passou o problema a seus estudantes e a outros matemáticos. Dentre esses matemáticos, estava Sir William Hamilton, criador dos quatérnios.

Em 1878, 26 anos depois de Guthrie tê-lo formulado, o problema foi divulgado pela London Mathematical Society, através de seu presidente, Arthur Cayley., conquistando o interesse da comunidade matemática britânica.

Em 1879, um ano depois da divulgação do problema por Arthur Cayley, Alfred Bray Kempe publicou um artigo onde supostamente dava uma demonstração de que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa. Porém, em 1890, onze anos após a publicação de Kempe, Percy John Heawood, através de um contraexemplo, apontou um erro sutil e irreparável na demonstração de Kempe. Heawood, no entanto, salvou parte da demonstração de Kempe e demonstrou que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa.

Segundo Pimenta (2014, apud Nahum, 2021), durante 124 anos, par desenvolver métodos capazes de resolver o problema foram várias tentativas, sendo apresentada somente uma demonstração do Teorema Quatro Cores, em 1976, com a ajuda de um IBM10 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Quando a notícia se espalhou, houve um enorme entusiasmo. Mas quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade a euforia esfriou. A demonstração era exorbitantemente longa para ser verificada sem o uso dos computadores e ainda havia a possibilidade de os computadores terem cometido alguma falha. Stewart (2009), afirma que atualmente, com computadores mais rápidos, pode-se repetir o processo em cerca de uma hora.

Segundo Nahum (2021) para a Teoria dos Grafos, fundada por Euler, Gustav Robert. Kirchhoff (1824-1887) e Arthur Cayley (1821-1895). Em 1834, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) formulou o princípio das gavetas. Esse princípio, apesar de parecer simples, é bastante utilizado na resolução de problemas de combinatória."

Segundo Morgado et al (2016), outro fato que contribuíram para o desenvolvimento da Análise Combinatória, foram os problemas originados nos jogos de azar. Jogadores buscavam maneiras seguras de ganhar em jogo de cartas, dados ou moedas. Entre eles o cavalheiro De Meré, o qual discutia com Pascal problemas referentes a probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas e dados.

Como foi citado, alguns matemáticos e temas históricos deram importantes contribuições de acordo como mostra o quadro (quadro 1).

Quadro 1- Autores e temas históricos relevantes para o surgimento da Análise Combinatória.

Época	Autor/origem	Contribuição
287 a.C. – 212 a.C.	Arquimedes	Stomachion: trabalho envolvendo contagens geométricas
2200 a.C.	Lo-shu (Quadrado Mágico)	Arranjo numéricos com somas constantes base para ideia de permutações
300 a.C.	Desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$	Apontado como um dos primeiros problemas estudados ligados ao estudo de combinatória
Século XVIII	Leonardo Euler	Problema das Pontes Königsberg- origem das teorias dos grafos, que tem como base a combinatória
Século XIX	Teorema das quatro cores	Problema de coloração em mapas, que levou ao desenvolvimento da combinatória em grafos.
Século XII	Pascal	Estudo dos jogos de azar levou ao surgimento da teoria combinatória e probabilidades

Fonte: Própria da autora.

O quadro mostra que a Análise Combinatória não surgiu de forma isolada, mas evoluiu a partir de necessidades da resolução de problemas, ou seja, surgindo de problemas reais e da curiosidade humana em atender padrões, possibilidades e estruturas. Ainda assim, é possível que essa abordagem não inclua contribuições de diversos matemáticos que, ao longo da história, dedicaram-se ao estudo e à evolução da combinatória.

### 2.3 Os métodos de contagem segundo os PCNs, BNCC e DCEPA

Desde 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), expõem a importância dos Métodos de Contagem e indicam a necessidade de sua abordagem desde o ensino fundamental. Neste documento são apresentados os objetivos gerais do ensino de Matemática e a proposta de divisão dos conteúdos matemáticos em quatro grupos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. No bloco de conteúdos matemáticos referente ao Tratamento da Informação, terceiro e quarto ciclos (anos finais do ensino fundamental), propõe-se estudos dos problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo. E orienta que:

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo, para a aplicação no cálculo de probabilidade. (BRASIL, 1998, p. 52).

Destaca-se que o aluno deve compreender os fundamentos lógicos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, enfatizando a importância de explorar vários contextos capazes de auxiliar o aluno a visualizar diferentes possibilidades de organização de elementos. Ainda neste bloco os PCNs sugerem a seguinte abordagem: “Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.” (BRASIL, 1998, p. 74). A representação e a contagem de casos possíveis em situações combinatórias são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático.

Em 2017, foi divulgada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo que norteia os currículos da Educação básica das instituições de ensino públicas e privadas do país.

A BNCC dos anos finais do Ensino Fundamental é organizada em áreas do conhecimento, cada uma composta por componentes curriculares específicos, no caso da área de Matemática há um único componente curricular: Matemática. Cada componente curricular é detalhado em unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. O estudo dos métodos de contagem está inserido mais especificamente nas Unidades Temáticas: Números e Probabilidade e Estatística.

De acordo com a BNCC (2017) o estudo dos métodos de contagem deve ser durante a educação básica, para complementar e aprofundar os conceitos matemáticos envolvidos. Quanto esse estudo no ensino fundamental pode-se observar:

Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àquele cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (Brasil, 2017, p. 275).

A citação enfatiza que o desenvolvimento do raciocínio matemático ocorre de forma gradual, começando por problemas de contagem simples, o que favorece a visualização e a compreensão; após essa etapa, introduzem-se os princípios multiplicativo e aditivo, que permitem calcular o total de possibilidades de forma mais eficiente, trabalhando com problemas mais complexos o que enfatiza a importância para uma abordagem eficaz durante o ensino fundamental.

O estudo dos métodos de contagem no 8º ano é citado diretamente em duas habilidades, mencionadas a seguir:

- (EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (Brasil, 2017, p. 313).
- (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1 (Brasil, 2017, p. 315).

As habilidades destacam o papel fundamental do PFC tanto na resolução de problemas de contagem quanto na compreensão da probabilidade.

O Documento Curricular do Estado do Pará (DCEPA, 2019), que determina orientações direcionadas a todas as escolas públicas desse estado, divide as habilidades entre quatro eixos estruturantes: Espaço/Tempo e suas Transformações, Linguagem e suas Formas Comunicativas, Valores à Vida Social, Cultura e Identidade.

Sobre o estudo dos métodos de contagem durante o 8º ano, no Documento Curricular do Estado do Pará constam as habilidades da BNCC (EF08MA03 e EF08MA22), mencionadas anteriormente. Tais habilidades estão inseridas nos eixos Espaço/Tempo e suas Transformações e Linguagem e suas Formas Comunicativas. De acordo com DCEPA.

O desenvolvimento das habilidades, expostas na BNCC e neste documento Curricular, exige que o aluno assuma um papel de sujeito ativo na sua aprendizagem e isso pode ser realizado por meio de atividades que privilegie o ensino de matemática por resolução de problemas e por investigação, nesta perspectiva os alunos são livres para escolher as estratégias de resolução e investigar a construção dos conceitos e procedimentos que se deseja que eles aprendam. (Pará, 2019, p. 295)

Segundo a DCEPA que instrui ao aluno adquirir habilidades e competências na construção da autonomia nas soluções de problemas de contagem que segundo a BNCC devem estar presente ao longo do Ensino Fundamental, para que o aluno compreenda e possa fazer uso de suas representações (diagramas de árvore, tabelas, entre outros) como artifícios de resolução. Além disso, desenvolver esse raciocínio servirá como suporte futuro ao estudo da Análise Combinatória.

## 2.4 A metodologia docente

A metodologia docente é fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pois organiza as ações do professor em relação aos objetivos educacionais. Segundo Libâneo (1990) é o conjunto de procedimentos organizados de forma sistemática pelo professor para orientar a aprendizagem dos alunos, com base em objetivos definidos, conteúdos específicos e formas de avaliações adequadas. Afirmar ainda que

O trabalho docente consiste no exercício profissional do professor e este é seu primeiro compromisso com a sociedade. Sua responsabilidade é preparar os alunos para se tornarem cidadãos ativos e participantes, na família, no trabalho, nas associações de classe, na vida cultural e política. (Libâneo, 1990, p. 47)

Do mencionado, a prática docente envolve a criação de estratégias de ensino e que deve acompanhar o processo de aprendizagem com adaptação de métodos na promoção e formação integral dos alunos. O docente como agente transmissor do conhecimento não se inerciar na sua prática. Deve avançar em formação continuada, aprimorar-se cada vez mais em sua prática e com novas formas de metodologias dinâmicas no sentido de melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Sobre os conteúdos de ensino Libâneo (1990) afirma que:

[...] conteúdos de ensino são o conjunto de conhecimentos, habilidades, hábitos, modos valorativos e atitudinais de atuação social, organizados pedagógica e didaticamente, tendo em vista a assimilação ativa e aplicação pelos alunos na sua vida prática. Englobam, portanto: conceitos, ideias, fatos, processos, princípios, leis científicas, regras; habilidades cognitivas, modos de atividade, métodos de compreensão e aplicação, hábitos de estudos, de trabalho e de convivência social; valores convicções, atitudes. São expressos nos programas oficiais, nos livros didáticos, nos planos de ensino e de aula, nas atitudes e convicções do professor, nos exercícios nos métodos e forma de organização do ensino. Podemos dizer que os conteúdos retratam a experiência social da humanidade no que se refere a conhecimentos e modos de ação, transformando-se em instrumentos pelos quais os alunos assimilam, compreendem e enfrentam as exigências teóricas e práticas da vida social. Constituem o objeto de mediação escolar no processo de ensino, no sentido de que a assimilação e compreensão dos conhecimentos e modos de ação se convertem em ideias sobre as propriedades e relações fundamentais da natureza e da sociedade, formando convicções e critérios de orientação das opções dos alunos frente às atividades teóricas e práticas postas pela vida social. (Libâneo, 1990, p. 128-129).

A extensa citação declara que o professor precisa conhecer os conteúdos para produzir e elaborar os processos de aprendizagem, verificando a forma conveniente de uma metodologia que seja eficaz e promissora ao ponto de ir além da simples transmissão de informações, mas que envolva uma construção lógica e ampla de saberes que articulam conhecimentos conceituais, habilidades práticas, atitudes sociais e valores. Neste contexto a escolha do método

é essencial, pois “são as ações do professor pelas quais se organizam as atividades de ensino e dos alunos para atingir objetivos de trabalhos docente em relação a um conteúdo específico” (Libâneo, 1990, p. 52). Assim, com base nessa pesquisa será discorrido sobre o Método de Ensino Tradicional, Metodologia Ativa e o uso de materiais manipuláveis na aprendizagem.

#### 2.4.1 O Método Tradicional

O ensino tradicional ou propriamente o tecnicista, representa uma abordagem pedagógica que influencia a educação há décadas. Caracterizado pela centralização do professor no processo de ensino e aprendizagem, o aluno assume uma posição passiva, ouvindo, anotando e reproduzindo os conteúdos apresentados. Esse modelo prioriza a memorização, a disciplina, a obediência e o domínio de conteúdo. As aulas são expositivas, com foco na repetição e em avaliações padronizadas.

No entanto o método tradicional vem sendo repensado. Para Ausubel (1978, apud, Moreira, 2006), a aprendizagem só se torna realmente significativa quando o aluno consegue relacionar os conteúdos novos com conhecimentos prévios, o que exige participação ativa e contextualização. Da mesma forma Paulo Freire (1987) critica esse modelo, chamando-o de “educação bancária”, em que o aluno é tratado como um depósito vazio a ser preenchido, o que limita sua autonomia, criticidade e criatividade.

Contudo, apesar das críticas, o método tradicional ainda é bastante utilizado e representa uma importante etapa histórica da educação e até mesmo para o próprio ensino da matemática. Mesmo com algumas limitações diante das necessidades educacionais, os princípios dessa abordagem ainda são importantes e podem ajudar na prática de ensino. Entretanto, vem sendo repensados e proposto abordagens mais interativas e centradas no aluno.

A integração de abordagens tradicionais com metodologias ativas e centradas no aluno é um caminho possível para uma prática pedagógica inovadora. Cabe aos educadores promover essa transição de acordo com as necessidades dos alunos. No entanto ao se referir a esse método do ensino, deve-se considerar que o rigor matemático descrito pelo formalismo que englobam teoremas, axiomas, propriedades são importantes na área da Matemática e, portanto, relacionar a teoria com a prática auxilia o aluno a uma maior compreensão no processo de ensino e aprendizagem.

#### 2.4.2 Metodologias Ativas

De acordo com Bacich e Moran (2018), “Metodologias Ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada e híbrida”. Nesse contexto, essa abordagem propõe uma aprendizagem mais dinâmica, colaborativa e personalizada.

As metodologias ativas colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, promovendo sua participação ativa na construção do conhecimento. Diferente do modelo tradicional, em que o professor é o principal transmissor de conteúdo, a metodologia ativa estimula o aluno a investigar, experimentar, discutir e resolver problemas reais ou simulados. Essa prática favorece o desenvolvimento de habilidades como pensamento crítico, colaboração, autonomia e criatividade.

Entre as estratégias utilizadas na metodologia ativa estão o ensino baseado em projetos, o uso de estudos de caso, as dinâmicas em grupo e a aprendizagem baseada em problemas. A metodologia ativa enfatizada nesta pesquisa é a Aprendizagem Baseada em Problemas, nessa abordagem, os estudantes são desafiados a resolver problemas reais ou simulados, que exigem investigação, análise crítica e tomada de decisões. O objetivo não é apenas encontrar uma solução, mas desenvolver competências como autonomia, trabalho em equipe, comunicação e pensamento crítico. O papel do professor, nesse contexto é o de mediador, orientando e incentivando os alunos a explorarem diferentes caminhos para alcançar o conhecimento (Moran, 2015).

Os materiais manipuláveis são recursos valiosos dentro da metodologia ativa, eles permitem que os alunos aprendam por meio da experimentação concreta, tocando, movendo e interagindo com objetos físicos.

#### 2.4.3 O uso de materiais manipuláveis na aprendizagem

A BNCC (2017) sugere que recursos didáticos e tecnológicos sejam selecionados, produzidos, aplicados e avaliados. Diante desse contexto os materiais manipuláveis surgem como um importante material didático (MD).

Material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino - aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, em livro, um quebra cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência entre outros. (Lorenzato, 2012, p. 18)

O entendimento sobre MD é ampliado, destacando-se que ele não se limita a recursos formais ou tecnológicos. A concepção apresentada valoriza a funcionalidade do objeto no

processo de ensino-aprendizagem, tornando MD qualquer instrumento desde os mais simples como o giz, até os mais elaborados como um jogo, desde que contribua para a construção do conhecimento.

Lorenzato (2012) enfatiza ainda que existe vários MD manipulável, entre eles alguns possibilitam modificações, outros permitem maior participação do aluno e existe ainda aqueles dinâmicos. Assim material manipulável é qualquer objeto que possa ser manipulado pelos alunos.

Em Matemática, onde há vários conceitos abstratos, o uso do material manipulável é uma alternativa, “uma vez que facilita o trabalho em sala de aula e o uso destes incorre em uma diminuição na quantidade de abstrações, com as quais boa parte dos estudantes têm dificuldades” (Osório, 2019, p. 26).

O uso de materiais manipuláveis, como blocos, cubos ou outros recursos visuais pode colaborar bastante, tornando os conteúdos muito mais concretos, permitindo que os alunos toquem e visualizem, o que facilita o aprendizado, tornando a aula cada vez mais dinâmica e acessível. Porém para que a abstração ocorra, a pessoa deve conhecer mesmo que de maneira rasa, determinado tema. Segundo Lorenzato (2012):

Provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, flui em suas mentes a ideia correspondente ao objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. (Lorenzato, 2012, p. 22).

Nesse sentido o uso de materiais manipuláveis favorece a construção do conhecimento ao permitir que o aluno interaja com o objeto de estudo. Alinhando-se a essa ideia Ausubel (1978):

Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, eu diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Descubra isso e o ensine-o de acordo. (Ausubel, 1978, apud, Moreira, 2006).

Dessa forma enfatiza-se que a assimilação de novos conteúdos só ocorre de maneira significativa, quando esses conhecimentos podem ser relacionados com estruturas mentais já existentes no aluno. Em vez de simplesmente memoriar informações isolados o aluno passa atribuir sentido ao que aprende.

Lorenzato (2012), também comenta que para que o aluno aprenda significativamente o professor deve saber utilizar corretamente o MD “como outros instrumentos, tais como o

pincel, o revólver, a enxada, a bola, o automóvel, o bisturi, o quadro-negro, o batom, o sino, exigem conhecimentos específicos de quem os utiliza” (Lorenzato, 2012, p. 24). Dessa forma, a aprendizagem não ocorre apenas pela exposição a matérias manipuláveis, mas o professor precisa compreender a função pedagógica dos materiais, integrando-os ao processo de ensino de maneira estratégica, para favorecer a construção do conhecimento.

Ou seja, ele assume um papel importante na escolha e aplicação dos materiais didáticos em sala de aula. Além de conhecer o componente curricular, é necessário que selecione os MD de acordo com os objetivos de aprendizagem. Isso implica compreender a função pedagógica dos materiais e como podem estimular o raciocínio e favorecer a construção significativa do conhecimento, transformando o material didático de um simples instrumento em um mediador do processo de ensino aprendizagem.

### **CAPÍTULO 3: OS CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO DO PFC PARA A COMPREENSÃO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM E ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS**

O presente capítulo tem como propósito apresentar os conceitos da Análise Combinatória que sustentam o ensino do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), estabelecendo uma base conceitual sólida para a compreensão dos métodos de contagem. A discussão inicia-se com a exposição dos princípios aditivo e multiplicativo, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, avançando para o estudo do fatorial e da permutação simples, que constituem elementos estruturantes da área.

Em seguida, são aprofundadas as permutações com repetição e a permutação circular, que ampliam as possibilidades de resolução de problemas práticos. A sequência contempla o arranjo simples e a combinação simples, completando o conjunto das técnicas centrais. Por fim, o capítulo dedica atenção ao exame do PFC nos livros didáticos do 8º ano, com foco em três coleções amplamente adotadas: Araribá Conecta Matemática, Geração Alpha Matemática e Matemática e Realidade, buscando evidenciar como tais obras apresentam o conteúdo e de que maneira contribuem para a construção do conhecimento dos alunos.

#### **3.1 Princípios básicos de contagem: aditivo e multiplicativo**

Os princípios básicos de contagem (aditivo e multiplicativo) fundamentam-se nas operações aritméticas de adição e multiplicação e auxiliam na solução de vários problemas.

O princípio aditivo da contagem garante que dados dois conjuntos finitos que não tem elementos em comum, o número de elementos da união é exatamente a soma do número de elementos de cada um, ou seja, se  $A_1$  e  $A_2$  são disjuntos (isto é,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ), então

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|. \quad (5)$$

A extensão deste princípio para um número finito qualquer de conjuntos.

Princípio Aditivo da Contagem: Dados os conjuntos finitos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dois a dois disjuntos (isto é,  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ), tem-se

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|. \quad (6)$$

Tem-se como exemplo o problema 1 proposto por Fernández e Oliveira (2010).

### Problema 1.

Em Maceió entraram em cartaz 4 filmes distintos e duas peças de teatro. Se Pedro Vitor só tem dinheiro para assistir a um filme ou a uma peça de teatro, diga quantos são os possíveis programas de Pedro Vitor?

Solução:

Denota-se por  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  os quatros filmes que estão de cartaz e por  $t_1$  e  $t_2$ , as duas peças de teatro. Agora representemos pelo par  $(i, j)$ , com  $0 \leq i \leq 4$  e  $0 \leq j \leq 2$ , o programa que consiste em assistir ao filme  $f_i$  e a peça  $t_j$  ( caso  $i = 0$  e  $j = 0$  isso significa que não será assistido a nenhum filme ou nenhuma peça respectivamente).

Temos que Pedro Vitor, só pode escolher um programa dentro dos seguintes conjuntos disjuntos:

$$A_1 = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\} \text{ e } A_2 = \{(0,1), (0,2)\}$$

Logo, pelo princípio aditivo  $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 6$  programas distintos.

Entre os quais Pedro Vitor terá que escolher.

Para o caso do princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC), considera-se o problema 2 adaptado de Fernández e Oliveira (2010), o qual se segue enunciado e resolvido.

### Problema 2.

Se numa loja de doces existem três tipos distintos de balas e quatro tipos distintos de chiclete, diga quantas escolhas podemos fazer para comprar somente uma bala e um chiclete.

Solução:

Seja o conjunto: Balas:  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  e chiclete:  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ .

Para a escolha, deve-se escolher um elemento em  $X$  e posteriormente, um elemento em  $Y$ , ou seja, um elemento do produto cartesiano:

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}.$$

O número de escolhas possíveis será dado pela cardinalidade do produto cartesiano:

$$X \times Y = 3 \cdot 4 = 12 .$$

Existem 12 combinações possíveis, neste caso sem grandes dificuldades descrevemos os pares bala /chicletes. Por se tratar de um problema com poucos elementos, pode parecer desnecessário o uso de técnicas mais específicas de contagem, porém à medida que o número de elementos se torna maior, o trabalho para contá-los um a um torna-se difícil e em alguns

casos, praticamente, impossível. O PFC, possibilita a solução de muitos problemas de contagem, sem, no entanto, a necessidade de descrever todos os casos possíveis.

De acordo com Fernández e Oliveira (2010), se um evento  $X$  pode ocorrer de  $m$  maneiras distintas e, se para cada uma dessas  $m$  maneiras possíveis de  $X$  ocorrer, um outro evento  $Y$  pode ocorrer de  $n$  maneiras distintas, então o número de maneiras de ocorrerem sucessivamente os eventos  $X$  e  $Y$  é  $m \cdot n$ .

Ainda segundo Fernández e Oliveira (2010), uma extensão deste princípio para um número finito qualquer de conjuntos é a seguinte:

Dados os conjuntos  $A_1, A_1, \dots, A_n$ , temos que

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_n|. \quad (7)$$

### 3.2 Fatorial de um número natural e permutação simples

No estudo de Análise Combinatória, é comum a multiplicação de números naturais consecutivos, sendo que algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Conforme o problema a seguir:

#### Problema 3.

De quantos modos diferentes 5 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução:

Para organizar a fila, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila, assim deve-se decidir quem será a primeira, a segunda, a terceira, a quarta, e a quinta pessoa. A primeira deve ser qualquer uma das cinco, a segunda deve ser diferente da primeira, a terceira diferente das duas primeiras, a quarta diferente das três primeiras e a quinta estará determinada pelas escolhas anteriores.

Tabela 1- Possibilidades de organização de cinco pessoas em uma fila.

Ordem das pessoas na fila	Possibilidade de escolha
1º	5
2º	4
3º	3
4º	2
5º	1

Fonte: Própria da autora.

Pelo PFC, tem-se que,

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, o número de maneiras distintas de 5 pessoas ficarem em fila é 120.

Carvalho (2015) afirma que de um modo geral, o número de modos de ordenar  $n$  objetos é igual a  $n \times (n - 1) \times \dots \times 1$ , que é representado por  $n!$  (lê-se:  $n$  fatorial). Dessa forma a definição de fatorial é utilizada em Análise Combinatória a fim de simplificar cálculos.

Sabendo-se o conceito de fatorial, iremos introduzir a definição de permutação simples. Em combinatória, uma permutação simples de  $n$  objetos distintos e qualquer agrupamento ordenado desses  $n$  objetos. Denota-se por  $P_n$ , o número de todas as permutações simples de  $n$  objetos dados.

Fernández e Oliveira (2010), definem o número total de permutação simples de  $n$  objetos dados por

$$P_n = n!. \quad (8)$$

Tem-se como exemplo de permutação simples o problema 4.

**Problema 4.**

Quais as permutações dos 3 elementos do conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ .

Solução:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Portanto, são 6 permutações.

**3.3 Permutação com repetição**

A definição de permutação com repetição, será apresentada a partir do problema 5.

**Problema 5.**

Anagramas são palavras formadas a partir de outra através da troca de posição de suas letras. Quantos são os anagramas da palavra ANA?

Ao considerar o primeiro A sendo  $A_1$  e o segundo  $A_2$ , temos:

$$A_1NA_2, A_2NA_1, NA_1A_2, NA_2A_1, A_1A_2N, A_2A_1N$$

Porém, nota-se que a primeira e a segunda, a terceira e a quarta, a quinta e a sexta permutações são iguais entre si, ou seja, quando permutamos os dois A's não existe um novo anagrama. Se todos os elementos fossem diferentes, teríamos 6 permutações. Mas temos elementos iguais, dos quais mudando a ordem dos elementos de um mesmo tipo não temos novas permutações, daí podemos de início considerar que os elementos são todos de tipos diferentes e depois retirarmos as repetições, fazendo a divisão pela quantidade de vezes que a letra se repetiu:

$$\frac{3!}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 3$$

Dessa forma temos 3 anagramas.

Em geral, se forem  $n$  elementos, dos quais  $k_1$  do tipo 1,  $k_2$  do tipo 2, ...,  $k_j$  do tipo  $j$  com

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_j$$

então podemos formar

$$\frac{n!}{k_1 \cdot k_2 \cdot k_j'} \quad (9)$$

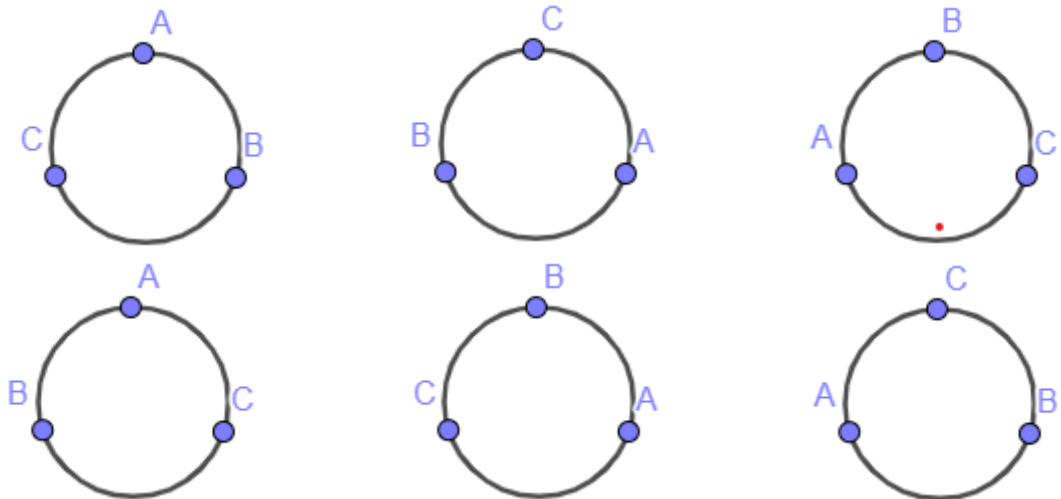
permutações com repetição.

### 3.4 Permutação circular

No estudo de problemas que consistem em determinar o número de modos que  $n$  objetos distintos podem ser colocados em  $n$  lugares em torno de um círculo, considerando-se equivalente as disposições que coincidam por uma rotação. Neste caso, é necessário o estudo de um método específico, o qual denomina-se permutação circular.

Por exemplo, o número de maneiras de arrumar 3 pessoas em uma fila acontece de 6 maneiras diferentes, pois basta calcular  $3!$ . Agora, considere a situação em que se deseja determinar o número de maneiras destas pessoas formarem um círculo. Denominam-se as pessoas de A, B e C (figura 7). As possíveis configurações seriam:

Figura 7- Formas de organizar três pessoas em círculo.



Fonte: Própria da autora.

A figura anterior mostrou que as três primeiras disposições coincidem entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas (basta girar no sentido horário). Portanto, há apenas duas maneiras distintas de dispor os três elementos em um círculo. Ou seja, cada

permutação é contada 3 vezes. Daí, o total de modos de dispor 3 pessoas em um círculo é dado por:

$$\frac{3!}{3} = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2$$

Adotando esse mesmo raciocínio, temos que o total de modos de se organizar  $n$  objetos em círculo é:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)! \quad (10)$$

### 3.5 Arranjo simples

Considera-se os objetos  $o_1, o_2$  e  $o_3$ , todos os arranjos possíveis de classe 2 são:  $A_1 = (o_1, o_2), A_2 = (o_2, o_1), A_3 = (o_1, o_3), A_4 = (o_3, o_1), A_5 = (o_2, o_3)$  e  $A_6 = (o_3, o_2)$ .

Percebe-se que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos que o compõem.

Seja  $n$  objetos e  $p$  um inteiro positivo tal que  $0 < p \leq n$ . Um arranjo simples de classe  $p$  dos  $n$  objetos dados é uma seleção de  $p$  objetos distintos dentre estes que diferem entre si pela ordem de colocação ou pela natureza de cada um, isto é o que importa é quem participa ou o lugar que ocupa. Denota-se  $A_n^p$  o número de arranjos simples de classe  $p$  de  $n$  objetos.

Nota-se que um arranjo simples de classe  $n$  de  $n$  objetos dados não é mais que uma permutação desses  $n$  objetos. Assim,

$$P_n = A_n^n = n! \quad (11)$$

Fernández e Oliveira (2010), apresentam e demonstram a fórmula de arranjo simples.

Seja  $n \geq 1$ . O número total de arranjos simples de classe  $p$  de  $n$  objetos  $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$  é dado por

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (12)$$

#### Demonstração:

Para  $n = 1$ , tem-se  $A_1^p = \frac{1!}{(1-p)!} = 1$ , a fórmula é válida.

Primeiramente prova-se que para  $n \geq 2$ , vale a seguinte igualdade:

$$A_n^p = nA_{n-1}^{p-1} \quad (13)$$

Seja  $A_i$  como sendo os arranjos simples de classe  $p-1$  dos  $n-1$  objetos  $\{o_1, \dots, o_{i-1}, o_{i+1}, \dots, o_n\}$ . Nota-se  $|A_i| = A_{n-1}^{p-1}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, para se obter um arranjo simples de classe  $p$  dos  $n$  objetos é suficiente que o objeto inicial  $o_i$  e se tenha um

elemento do conjunto  $A_i$ , que é um arranjo de classe  $p - 1$  dos  $n - 1$  objetos restantes. Pelo princípio aditivo, verifica-se que:

$$A_n^p = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = nA_{n-1}^{p-1} \quad (14)$$

Como a equação (13) é válida para todo  $n \geq 2$ , podemos aplicá-la para  $n - 1$ , obtendo:

$$A_{n-1}^{p-1} = (n - 1)A_{n-2}^{p-2}. \quad (15)$$

Assim de (14) e (15), tem-se

$$A_n^p = n(n - 1)A_{n-2}^{p-2}. \quad (16)$$

Repetindo este argumento sucessivamente, obtêm-se

$$\begin{aligned} A_n^p &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (p - 2))A_{n-(p-1)}^{p-(p-1)} \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 2)A_{n-p-1}^1. \end{aligned} \quad (17)$$

Nota-se que  $A_{n-p-1}^1 = n - p + 1$ , substituindo em (17) segue-se

$$\begin{aligned} A_n^p &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 2)(n - p + 1) \end{aligned} \quad (18)$$

Multiplica-se (18) por  $\frac{(n-p) \dots 1}{(n-p) \dots 1}$

$$A_n^p = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 2)(n - p + 1) \times (n - p) \dots 1}{(n - p) \dots 1} \quad (19)$$

De onde obtêm-se que

$$A_n^p = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Como tinha sido considerado pela expressão (12).

### 3.6 Combinação simples

O conceito de combinação simples surge naturalmente quando tentamos responder à seguinte pergunta: de quantas formas diferentes podemos selecionar  $p$  objetos dentro de  $n$  objetos dados (Fernández e Oliveira, 2010, p. 89). Toma-se como modelo de aplicação o problema 6.

#### Problema 6.

Quantas sucos com 2 frutas podemos formar, se dispomos de 5 frutas diferentes.

Solução:

A primeira fruta pode ser escolhida de 5 maneiras, para a segunda restam 4 possibilidades. Pelo PFC, o total de escolhas é:

$$5 \cdot 4 = 20$$

Representaremos por  $a, b, c, d$  e  $e$ , as frutas, assim, deve-se escolher duas frutas, não importando a ordem, ou seja,  $\{a, b\}$  e  $\{b, a\}$ , são indiferentes. Desta forma, do resultado (20), cada dupla foi contada duas vezes, então o total de escolhas é:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Podemos representar os diferentes tipos de suco da seguinte maneira:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$$

A definição de combinação simples surge através da aplicação da ideia utilizada nesta situação.

Considera-se  $n$  objetos e  $p$  um inteiro positivo tal que  $0 < p \leq n$ . Uma combinação simples de classe  $p$  dos  $n$  objetos dados é uma seleção de  $p$  objetos distintos entre estes que diferem entre si apenas pela natureza de cada um, isto é, o que importa é simplesmente quem participa do grupo selecionado. Denotaremos por  $\binom{n}{p}$  o número de combinações simples de classe  $p$  de  $n$  objetos.

Fernández e Oliveira (2010), apresentam e demonstram a fórmula de Combinações simples:

Seja  $n \geq 1$ . O número total de combinações simples ( $C_n^p$ ) de classe  $p$  de  $n$  objetos  $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$  é dada por

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (20)$$

### **Demonstração:**

Ver-se a seguir que arranjos simples e combinações simples de classe  $p$  estão estreitamente relacionadas.

Com efeito, para cada combinação simples formada por  $p$  objetos distintos de  $O$  podemos gerar todos os arranjos simples de classe  $p$  formados por estes  $p$  objetos. Basta fazer todas as permutações possíveis. Obtém-se assim  $p!$  arranjos simples diferentes com esses  $p$  objetos, ou seja, para cada combinação simples de classe  $p$  formada com  $p$  objetos diferentes de  $O$  podemos fazer  $p!$  arranjos simples diferentes de classe  $p$  com estes mesmo objetos; logo, no total, teremos a seguinte relação:

$$p! C_n^p = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (21)$$

de onde segue-se (20)

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

### 3.7 O PFC em livros didáticos do 8º ano

O livro é um recurso didático importante para o processo de ensino e aprendizagem, pois auxilia o aluno no estudo de conteúdos matemáticos e funciona como um instrumento de apoio para o planejamento de suas aulas. Neste tópico será feita a análise do componente curricular PFC em livros didáticos do 8º ano do Ensino Fundamental. Assim, foram analisados os livros:

- **Araribá conecta matemática:** 8º ano: ensino fundamental anos finais. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2022.
- OLIVEIRA, Carlos. N.C. FUGITA, Felipe. **Geração Alpha Matemática:** 8º ano: ensino fundamental anos finais. 4 ed. São Paulo: Edições SM, 2022.
- IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade,** 8º ano: ensino fundamental, anos finais. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

#### 3.7.1 Araribá conecta matemática

No livro do 8º ano, desta coleção, capítulo 8 intitulado como problemas de contagem no tópico “Contagem” os autores, expõem situações do dia a dia que podem ser contadas um a um, como a quantidade de alunos que usam óculos na classe do estudante. Por conseguinte, é apresentado a seguinte exemplo:

#### **Exemplo 1:**

Imagine, por exemplo, que uma turma de formandos de um colégio resolveu fazer uma rifa para levantar fundos para a festa de formatura. Cada bilhete será formado com duas letras, entre as cinco primeiras do nosso alfabeto, seguidas de dois algarismos.

Quantos são os bilhetes dessa rifa?

O autor comenta que nesta situação é possível realizar a conta um a um, porém é muito trabalhoso e há um procedimento que pode contar de forma indireta, o qual será apresentado nos próximos problemas do livro.

No tópico 2, intitulado “Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem”, no primeiro problema apresentado os autores exploram a tabela como forma de listagem de possibilidades e posteriormente utilizam como mecanismo de solução a árvore de possibilidades, Por conseguinte, comentam que havendo muitas possibilidades deve-se aplicar o princípio fundamental da contagem, o qual é definido e exemplificado, também exploram

exemplos de arranjos e combinações, onde o princípio fundamental da contagem passa a ser usado como principal ferramenta de solução, ainda que os autores utilizem a árvore de possibilidades como forma de compreensão. Como nos exemplos a seguir.

**Exemplo 2:**

Clara está em um restaurante italiano e não sabe que combinação de massa e molho escolher. Ela tem à disposição 4 tipos diferentes de massa – espaguete, talharim, parafuso e nhoque – e 3 tipos de molho – de tomate, pesto e branco. De quantas maneiras diferentes Clara pode combinar uma massa com um molho?

Solução:

Observe as combinações que podem ser feitas com um tipo de massa e um tipo de molho.

Figura 8- Tabela de combinações de massa e molho.

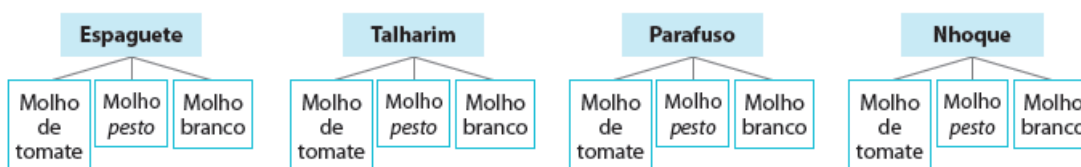
	molho de tomate	molho pesto	molho branco
espaguete			
talharim			
parafuso			
nhoque			

Fonte: Araribá conecta matemática, p. 213.

De acordo com esse quadro, há 12 maneiras diferentes de combinar uma massa com um molho.

Pode-se, também, representar essas possibilidades por meio de um esquema chamado árvore de possibilidades. Observe.

Figura 9- Árvore de possibilidades do exemplo 2.

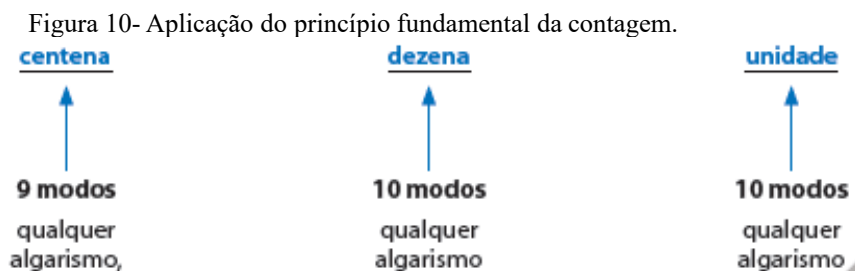


Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 214.

### Exemplo 3:

Quantos números de três algarismos podem ser formados?

Solução:



Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 215.

### Exemplo 4:

Chamamos de anagramas as diferentes maneiras de ordenar as letras de uma palavra para formar outra palavra, com sentido ou não. Quantos são os anagramas da palavra MEU?

Solução:

Para responder a essa pergunta, podemos listar todos os anagramas e depois contá-los:

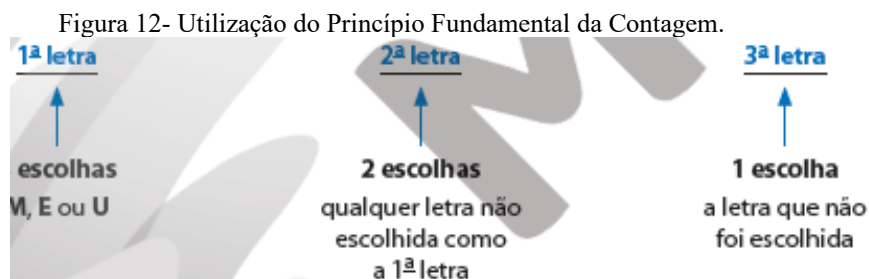
Figura 11- Anagramas da palavra MEU.

MEU EMU UME  
MUE EUM UEM

Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 217.

Portanto, existem 6 anagramas da palavra MEU.

Também podemos aplicar o princípio fundamental da contagem. Os anagramas da palavra MEU têm 3 letras. Para a primeira letra, temos 3 escolhas; para a segunda, 2 escolhas; e, para a terceira, somente 1 escolha.



Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 217.

Assim, o número de anagramas da palavra MEU é 6, pois  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ .

### Exemplo 5:

Jorge, Lucas e Iara se candidataram ao cargo de monitor da classe. Sabendo que 2 deles serão escolhidos, quantas duplas diferentes de monitores podem ser formadas?

Solução:

Para resolver esse problema, vamos imaginar as duplas que podem ser formadas.

Figura 13- Duplas formadas.

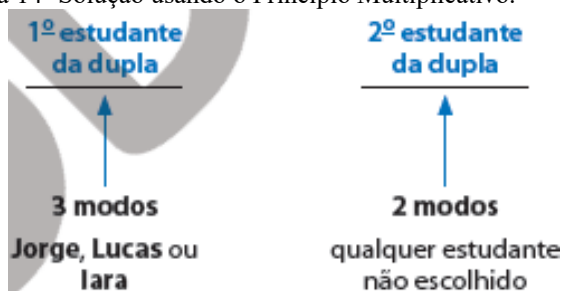


Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 218.

Note que há duplas formadas pelos mesmos integrantes, portanto são iguais. Por exemplo, a dupla Jorge e Lucas é igual à dupla Lucas e Jorge. Assim, observando novamente as imagens acima, podemos concluir que existem 3 duplas diferentes.

Também podemos usar o princípio multiplicativo para resolver esse problema. O primeiro estudante da dupla pode ser escolhido de 3 modos, e o segundo, de 2 modos, o que totalizaria 6 duplas, pois  $3 \cdot 2 = 6$ .

Figura 14- Solução usando o Princípio Multiplicativo.



Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 218.

No entanto, da mesma forma, cada dupla foi contada 2 vezes. Então, é necessário dividir o total 6 por 2 para eliminar as repetições.

Portanto, podem ser formadas 3 duplas diferentes, pois  $6 : 2 = 3$ .

**Exemplo 6:**

Quantos são os anagramas da palavra CARA?

Solução:

Vamos listar todos os anagramas da palavra CARA, supondo que as letras A sejam “diferentes”. Para isso, destaca-se cada letra A com uma cor.

Figura 15- Anagramas considerando as letras A's diferentes.

CARA	CARA	CAAR	CAAR	CRAA	CRAA
RACA	RACA	RAAC	RAAC	RCAA	RCAA
ACRA	ACAR	AACR	AARC	ARCA	ARAC
ACRA	ACAR	AACR	AARC	ARCA	ARAC

Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 219.

Dessa forma, listamos 24 anagramas. No entanto, como as letras A não são diferentes, os pares de anagramas destacados a seguir são iguais.

Figura 16- Anagramas considerando as letras A's iguais.

CARA	CARA	CAAR	CAAR	CRAA	CRAA
RACA	RACA	RAAC	RAAC	RCAA	RCAA
ACRA	ACAR	AACR	AARC	ARCA	ARAC
ACRA	ACAR	AACR	AARC	ARCA	ARAC

Fonte: Araribá conecta matemática, 2022, p. 219

Note que metade dos anagramas acima é igual. Portanto, a palavra CARA tem, na verdade, 12 anagramas.

Nesse caso, também pode-se aplicar o princípio fundamental da contagem. Se todas as letras fossem diferentes, teríamos 4 escolhas para a primeira letra, 3 para a segunda, 2 para a terceira e somente 1 para a quarta. Isso daria 24 anagramas, pois  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . No entanto, como cada anagrama foi contado 2 vezes, devemos dividir 24 por 2 para eliminar as repetições.

Portanto, a palavra CARA tem 12 anagramas, pois  $24 : 2 = 12$ .

Neste livro, o Princípio fundamental da contagem é abordado, apresentando problemas do dia a dia e explorando diferentes estratégias de resolução. Os autores não definem os conceitos de Análise Combinatória, porém são explorados problemas envolvendo permutação, arranjo e combinação.

### 3.7.2 Geração Alpha Matemática

A unidade sete do livro tem como título Probabilidade e Estatística, no capítulo 1, o objeto do conhecimento é Probabilidade, no qual inicialmente aborda a ideia de contagem que é introduzido através de dois problemas de contagem: um sobre o número de seções exibidas no Planetário Aristóteles Orsine de acordo com dias e horários disponível e o outro sobre todas as possibilidades de formar uma senha usando apenas as letras A e L, esses problemas exploram a árvore de possibilidades ( ou diagrama da árvore) como ferramenta de resolução. Por conseguinte, cita-se que será estudado “a árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem- um método para se obter a quantidade de possibilidades sem contar os elementos um a um” (Oliveira e Fugita, 2022, p. 187).

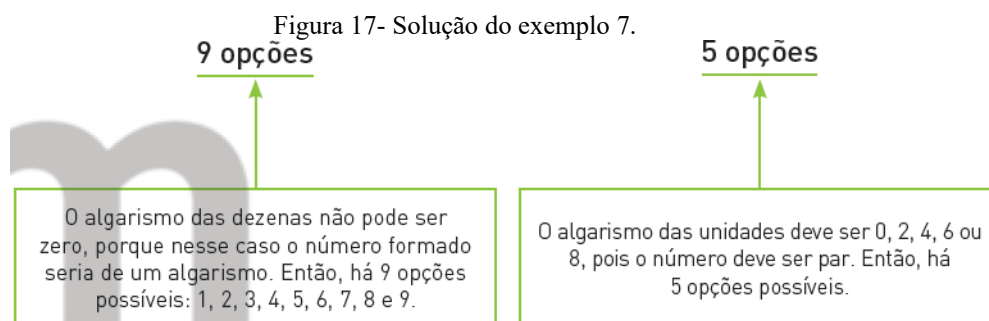
Em seguida é feita uma abordagem sobre o princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo, exemplificando com dois exemplos, conforme apresentado nas figuras a seguir:

#### Exemplo 7:

Quantos números naturais pares de dois algarismos existem.

Solução:

Considerando as condições, tem-se:



O total de possibilidades é dado por:  $9 \cdot 5 = 45$ .

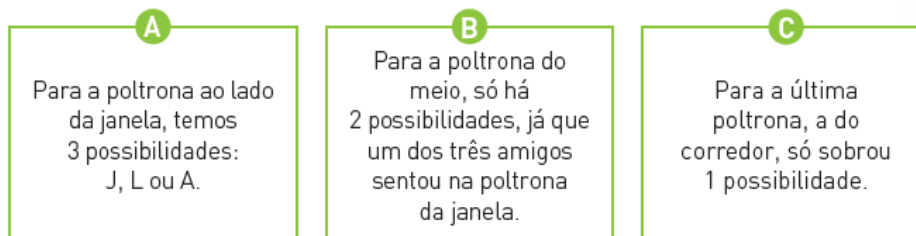
Fonte: Oliveira e Fugita, 2002, p. 188.

### Exemplo 8:

De quantas maneiras diferentes os amigos João (J) Lucas (L) e Antônio (A) podem sentar em uma fileira de avião com três poltronas.

Solução:

Figura 18- Solução do exemplo 8.



Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ou seja, há 6 maneiras diferentes de os três amigos ocuparem essas poltronas.

Fonte: Oliveira e Fugita, 2002, p. 189.

Por conseguinte, o livro apresenta uma lista de atividades, onde estão implícitas as ideias de produto cartesiano, arranjo e permutação.

Neste livro, o Princípio fundamental da contagem é abordado apresentando problemas do dia a dia, porém a abordagem é de forma sucinta.

### 3.7.3 Matemática e Realidade

O componente curricular é abordado no capítulo 19 do livro, o qual tem como tema “Contagem e Probabilidade”, e inicia com o tópico “Princípio fundamental da contagem”. No referido tópico são apresentadas duas situações problemas, as quais são solucionadas com a utilização da árvore de possibilidades e do princípio fundamental da contagem, conforme os exemplos a seguir.

### Exemplo 9:

A sorveteria Olímpia está divulgando uma promoção: o cliente paga um preço fixo e pode escolher, para o sorvete, os sabores de coco, creme, morango e limão e, para a cobertura, os de chocolate e caramelo. Para a promoção, cada cliente pode escolher apenas 1 sabor de sorvete e 1 de cobertura por taça. Vamos analisar de quantos modos é possível compor um pedido válido para essa promoção.

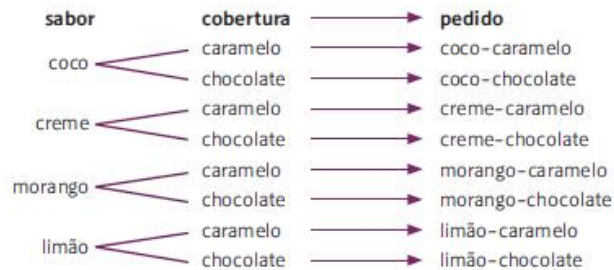
Note este esquema:

Figura 19- Solução exemplo 9.



Temos 4 possibilidades para a escolha do sabor do sorvete. Para cada uma delas, temos 2 possibilidades para a escolha do sabor da cobertura. No total, temos  $4 \cdot 2$  possibilidades para montar uma taça de sorvete com cobertura. Logo, há 8 modos diferentes de compor um pedido.

Esse tipo de situação é usualmente apresentado conforme o esquema a seguir, denominado **árvore de possibilidades**.



Fonte: Iezzi, Dolce, 2002, p. 256.

### Exemplo 10:

Se, no problema proposto, a promoção dessa sorveteria permitisse a escolha entre 12 sabores de sorvete e entre 4 sabores de cobertura, de quantos modos seria possível compor um pedido?

Nesse caso, teríamos 12 possibilidades para a escolha do sabor do sorvete e, para cada uma, 4 possibilidades para o da cobertura. Logo, teríamos  $12 \cdot 4$  maneiras de montar uma taça de sorvete com cobertura, portanto, 48 modos diferentes de compor um pedido.

Neste livro, as possibilidades de escolha são inicialmente apresentadas por meio do diagrama da árvore, uma ferramenta visual que permite organizar e representar de forma clara as diferentes combinações possíveis em situações de contagem. Essa abordagem facilita a compreensão dos caminhos que podem ser seguidos em uma sequência de decisões, tornando o raciocínio mais compreensível. Em seguida, o texto introduz o princípio multiplicativo como

uma aplicação direta dessa representação, evidenciando como a contagem pode ser sistematizada por meio da multiplicação do número de opções em cada etapa.

Apesar da clareza na apresentação do princípio fundamental da contagem, o livro limita-se a enunciar o conceito e propor uma lista de atividades, sem explorar outras formas de representação que poderiam enriquecer o entendimento do tema.

## **CAPÍTULO 4: METODOLOGIA QUALIQUANTITATIVA COM USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL**

O presente capítulo aborda a Metodologia Quali quantitativa com Material Manipulável, apresenta a organização e o percurso metodológico da pesquisa, detalhando os passos que orientaram sua execução. Inicialmente, define-se o tipo de metodologia aplicada, que estruturara a coleta e a análise dos dados. Em seguida, descrevem-se o local da investigação e o público-alvo participante, bem como o período destinado à realização do estudo.

Evidenciam-se os materiais manipuláveis selecionados para o ensino do PFC e as atividades propostas na avaliação final, elaboradas para verificar a aprendizagem dos alunos. Na sequência, apresenta-se o relato das aulas e da aplicação da avaliação, diferenciando as experiências vivenciadas pela turma A e pela turma B, também apresenta as respostas do questionário aplicado nas turmas sobre a preferências dos alunos em matemática e sobre o uso dos materiais manipuláveis. Posteriormente, são discutidos os resultados alcançados e a análise das metodologias aplicadas, com destaque para o desempenho em cada atividade. O capítulo é concluído com a discussão, que interpreta os dados obtidos à luz da fundamentação teórica e dos objetivos estabelecidos, oferecendo subsídios para a reflexão sobre a eficácia do uso de materiais manipuláveis no ensino do PFC.

### **4.1 Tipo de metodologia aplicada**

O desenvolvimento da metodologia, fundamenta-se em duas etapas principais: a bibliográfica e a de campo. De acordo com Marconi e Lakatos (2023), a Pesquisa Bibliográfica envolve diversas publicações relacionadas ao tema pesquisado, entre elas monografias, livros, teses, jornais, entre outros. Nesse sentido, fez-se o levantamento e análise de dissertações, artigos científicos, livros didáticos e documentos oficiais, como os PCNs, a BNCC e a DCEPA.

Quanto à Pesquisa de Campo, que é “aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou ainda descobrir novos fenômenos ou relações entre eles” (Marconi; Lakatos, 2003, p.186), ocorreu tendo como participantes alunos matriculados em duas turmas do 8º ano do ensino fundamental.

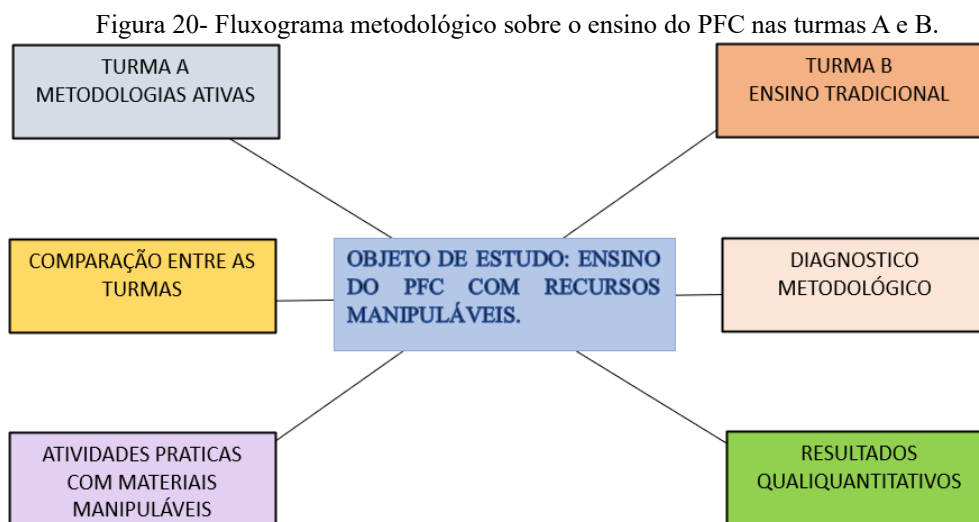
Os recursos concretos foram planejados de maneira a tornar compreensível o ensino de combinatória do PFC, permitindo que os alunos manipulassem elementos, construíssem possibilidades de arranjos e entendesse intuitivamente o raciocínio envolvido por meio dos materiais concretos. Ao enfatizar o uso de metodologias ativas, a pesquisa reconhece que o

ensino ou a aprendizagem em Matemática não se resume à memorização de fórmulas, mas requer a construção de significados, fazendo um diagnóstico significativo sobre a prática.

O recurso com materiais manipulável representa uma excelente estratégia metodológica ativa, pois envolve o aluno num processo investigativo da própria aprendizagem, pois ele passa a compreender com contato direto ao ponde ser capaz de transformar conceitos abstratos em experiências que pode presenciar no cotidiano o que faz aguçar a mente e o estimular para as curiosidades, o pensamento crítico e a autonomia.

Com base no contexto anterior, o ensino do PFC com a prática, permite que o estudante visualize, teste e valide os princípios combinatórios, fortalecendo a compreensão conceitual que servirá de base para conteúdos mais complexos da Análise Combinatória, conduzindo o aluno para um patamar em que a teoria se completa com a pratica com a utilização de recursos manipuláveis.

Assim sendo, a metodologia aplicada, adotou um delineamento de natureza qualiquantitativa. Do ponto de vista qualitativo, foram observadas e analisadas as interações dos estudantes, suas estratégias de resolução e percepções diante das atividades propostas teoricamente e os questionários. Do ponto de vista quantitativo, compararam-se os resultados obtidos pelas duas turmas do 8º A e B em atividades avaliativas, traçando a forma como seria o desenvolvimento da metodologia a ser aplicada teoricamente e prática (figura 20).



Fonte: Própria da autora

Com base na figura 20, observa-se como pode ser efetuado o desenvolvimento metodológico permitindo uma análise comparativa entre o ensino e a aprendizagem das turmas A e B, além de verificar qual o ensino é mais significativo, unindo dados, objetivos de

desempenho e a compreensão subjetiva das experiências de aprendizagem, garantindo maior consistência e profundidade sobre o PFC.

### 4.3 Local da pesquisa e Público-alvo

A pesquisa foi realizada na Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Miguel de Beja, localizada na Rodovia Francisco Azevedo Monteiro, Distrito da Vila de Beja na cidade de Abaetetuba no Estado do Pará. Oficialmente a escola foi fundada em junho de 1948, porém em 2017 através de lutas comunitárias a escola foi interditada pelo Centro de Perícias Científicas Renato Chaves por possuir rachaduras e passou a funcionar em um espaço alugado, o Instituto Maria Soares. No dia 06 de junho de 2021 foi inaugurada as novas instalações da escola conforme figura (figura 21).

Figura 21- Localização da EEFM São Miguel de Beja.



Fonte: Própria da autora.

Os alunos atendidos são provenientes de comunidades da região localizadas no Distrito de Beja, na PA-409 e comunidades adjacentes, entre elas: Cujari, Maúba, Arienga Centro, Itacupé, Tauerá de Beja e Ramal Maranhão.

Em relação ao público-alvo, a pesquisa foi desenvolvida em duas turmas A e B do 8º ano do ensino fundamental regular, que funcionam no turno da manhã, ambas com 23 alunos. A escolha das turmas se deve ao fato de ambas possuírem a mesma quantidade de alunos.

A direção autorizou o uso de quatro aulas em cada turma, e os pais também autorizaram a participação dos alunos no estudo, as aulas tiveram duração de quarenta e cinco minutos cada, pois a redução do horário de 50 minutos para 45 minutos, se deve ao fato da escola ser localizada e atender alunos de comunidades rurais que necessitam de transporte escolar, pois os mesmos ônibus que transportam os alunos do turno da manhã ao deixá-los já trazem os alunos do turno da tarde, o mesmo ocorre entre os turnos tarde e noite, dessa forma foi necessária essa adaptação para garantir a organização do tempo de aula. Os 5 minutos de cada aulas são compensados com atividades extraclasse.

#### 4.4 Tempo da pesquisa

O cronograma estabelecido para a realização da pesquisa foi organizado de modo a garantir a coerência entre as etapas planejadas e a execução prática para execução das atividades teórica/prática que envolveram os meses de abril e maio de 2025. Esse momento teve papel fundamental, permitindo o levantamento a organização do planejamento das atividades a serem aplicadas nas turmas do 8º ano A e B. Esse processo serviu como base para alinhar a proposta pedagógica à fundamentação científica necessária sendo construídas e traçada para exceção de acordo com o quadro (quadro 2).

Quadro 2- Cronograma de realização das atividades desenvolvidas.

<b>ETAPA</b>	<b>DATA/PERÍODO</b>	<b>DESCRIÇÃO</b>
Pesquisa Bibliográfica	Abril e Maio/2025	Levantamento de referências, leituras e planejamento das atividades desenvolvidas.
Autorização da escola e entrega do Termo de Consentimento	22 de Maio de 2025	Autorização formal da direção e entrega dos termos para ambas as turmas.
Recebimento dos termos de consentimento das turmas.	23 a 27 de Maio	Recebimento dos termos de consentimento.
Aplicação da turma na turma A	27 de Maio de 2025	Aulas com atividades práticas com materiais manipuláveis (2 aulas) e aplicação da avaliação final (1 aula)
Aplicação na turma B	04 de Junho de 2025	Aulas expositivas (2 aulas) e aplicação da avaliação final (1 aula)
Aplicação dos questionários	05 de Agosto de 2025	Aplicação do questionário 1 nas turmas A e B e do questionário 2 na turma A (1 aula).

Fonte: Própria da autora.

No dia 22 de maio de 2025, ocorreu uma etapa com a autorização da escola para a realização da pesquisa e a entrega do Termo de Consentimento às turmas participantes. Esse passo foi imprescindível para assegurar a legalidade e o respeito aos direitos dos alunos e de seus responsáveis, estabelecendo uma relação de confiança entre pesquisador, pesquisados, instituição e as turmas do 8º ano A e B. Entre os dias 23 e 27 de maio, realizou-se a coleta dos termos de consentimento devidamente assinados, confirmando a adesão dos participantes e permitindo a continuidade do estudo com as atividades a serem realizadas nas duas turmas.

A partir desse ponto, iniciaram-se as atividades em sala de aula. No dia 27 de maio de 2025, foi aplicada a proposta didática na turma que utilizou materiais manipuláveis como desenvolvimento de atividades práticas. Nessa etapa, os alunos participaram de duas aulas práticas, seguidas da aplicação de um teste avaliativo como método avaliador do processo de

ensino e aprendizagem. No dia 4 de junho de 2025, as atividades foram dirigidas para a turma que trabalhou com o método tradicional, recebendo duas aulas expositivas e, em seguida, também com a realização do teste. Por fim, no dia 05 de agosto fez-se a aplicação do questionário 1 que investiga a relação dos alunos com a Matemática (apêndice B) e do questionário 2 (apêndice C).

Esse cuidado em dividir as etapas e organizar os prazos demonstra a importância de um planejamento rigoroso, que assegura a comparação justa entre os dois métodos de ensino. Dessa forma, o tempo da pesquisa não foi apenas uma questão de datas, mas representou a estruturação responsável e ética do processo investigativo. O cronograma garantiu que cada fase fosse cumprida em sua integralidade, respeitando tanto os aspectos teóricos quanto os práticos, assegurando que os resultados obtidos refletissem, de maneira fiel, os efeitos das diferentes abordagens pedagógicas testadas.

#### 4.5 Materiais manipuláveis utilizados

Para a escolha dos materiais pensou-se em situações do cotidiano, assim, a partir da situação problema que tinha como opção dois tipos de sanduíches, três tipos de suco e duas opções de sobremesa, utilizou-se imagens de diferentes sanduíches colados no papel cartão, copos descartáveis com um pedaço papel com diferentes cores, para representar os sucos e para a sobremesa (bala e bombom de chocolate). Outro problema apresentado foi as maneiras de vestir-se, então usou-se peças de roupas confeccionadas com papel cartão. Assim foram escolhidas quatro blusas (verde, vermelha, laranja e amarela) e três saias (azul, preta e cinza). Também foram usados diferentes números impressos e as cadeiras da sala de aula (figura 21).

Figura 22- Materiais manipuláveis.



Fonte: Própria da autora.

Observa-se na figura 20 foram confeccionados materiais manipuláveis com papel cartão, além do uso de objetos simples como os copos descartáveis e bombons, a escolha destes materiais se deu pela intenção de aproximar o conteúdo matemático do cotidiano.

Também decidiu-se usar algumas cadeiras da sala de aula, para simular arranjos, com o objetivo de despertar o interesse dos estudantes por meio de movimentação e participação ativa.

#### **4.6 Atividades da avaliação final**

A avaliação final foi realizada com cinco atividades teóricas como são descritas a seguir. A atividade 1 que se refere as escolhas sucessivas e independentes, onde os alunos são levados a perceber que, quando realizamos duas ou mais escolhas independentes, o total de possibilidades é dado pelo produto dessas escolhas. O objetivo é que entendam, de maneira simples e prática, como o PFC funciona em situações de escolhas no cotidiano.

Na atividade 2 que irá tratar do Arranjos simples, os estudantes trabalham situações em que a ordem faz diferença. Ou seja, nessa atividade a ordem importante e que não é suficiente apenas escolher elementos. Por exemplo: a ordem em que três amigos podem se sentar em quatro cadeiras ou a sequência de letras que podem formar uma senha. Essa atividade reforça a ideia de que a contagem precisa levar em conta a organização dos elementos.

A atividade 3 aplica-se o PFC em contextos cotidianos. O foco é trazer o PFC para situações próximas da realidade dos alunos, como combinações de cardápio, escolha de roupas ou diferentes rotas para chegar à escola. Ao resolver esses problemas, os estudantes não apenas praticam cálculos, mas também desenvolvem o raciocínio lógico, percebendo a utilidade prática da Matemática em suas vidas.

A atividade 4 que se refere a permutações simples. Nesta atividade, os alunos aprendem a organizar todos os elementos de um conjunto em diferentes ordens possíveis. A atividade ajuda a compreender que a ordem altera o resultado e que existem técnicas para calcular essas possibilidades.

A atividade 5 que corresponde a permutações em situações competitivas. Os alunos trabalham problemas ligados a competições, como corridas ou torneios, onde a ordem de chegada ou a posição no ranking importa. A ideia é mostrar como a Matemática ajuda a calcular o número de classificações ou de formas diferentes de organizar os participantes, fortalecendo a compreensão da permutação e sua aplicação em contextos reais e motivadores.

Esse conjunto de atividades foi pensado de forma progressiva: inicia com situações simples de escolhas (Atividade 1), passa por arranjos (Atividade 2), aplica o PFC em vivências

cotidianas (Atividade 3) e, em seguida, introduz as permutações (Atividades 4 e 5), preparando os alunos para conteúdos mais complexos da Análise Combinatória no Ensino Médio.

As atividades foram retiradas dos livros didáticos analisados neste trabalho, algumas foram adaptadas, por gerar um número grande de possibilidades, houve a necessidade de reescrevê-las para adequar ao tempo de realização da avaliação e outras foram adaptadas para aproximar o tema a realidade dos alunos. Dessa forma, segue-se a descrição de cada atividade.

Atividade 1- Mário tem 3 camisas de cores diferentes: vermelha, amarela e azul. Ele tem também duas calças de cores: azul e preta. De quantas maneira Mário pode se vestir?

Figura 23- Atividade 1 da avaliação final.



a) 3

b) 6

c) 5

d) 4

Fonte: Goolge Imagens

**Atividade 2** - De quantos modos 3 pessoas podem-se sentar-se em 4 cadeiras em fila?

a) 24

b) 50

c) 12

d) 5

**Atividade 3**- O quadro a seguir representa parte de um cardápio de um restaurante situado na praia de Beja, no município de Abaetetuba-PA.

Quadro 3- Cardápio.

Refeições	Bebidas
Peixe frito	Refrigerante
Carne na chapa	
Frango	Água
Chapa mista (carne, frango e peixe)	

Fonte: Própria da autora.

Quantos pedidos distintos podem ser formados por uma refeição e uma bebida?

a) 10

b) 32

c) 8

d) 16

**Atividade 4-** Quantos são os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 2,6 e 9?

- a) 3                                      b) 27                                      c) 9                                      d) 6

**Atividade 5-** Cinco alunos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades para os três primeiros lugares?

- a) 3                                      b) 27                                      c) 9                                      d) 60

A seguir, apresenta-se um quadro de análise das questões que compõem a avaliação aplicada. Essa análise contribui para compreender o desenvolvimento dos alunos.

Quadro 4- Quadro de análise das questões da avaliação final.

ATIVIDADES	CONHECIMENTO AVALIADO
1	Compreender escolhas sucessivas e independentes, aplicando o PFC.
2	Trabalhar arranjos simples, reforçando o conceito de que a ordem influencia na contagem, usando PFC.
3	Aplicar o PFC em contextos cotidianos, desenvolvendo o raciocínio lógico dos alunos
4	Explorar permutações simples e o papel da ordem na formação de números.
5	Trabalhar permutação de elementos para compreender classificação e ranking em situações competitivas.

Fonte: Própria da autora.

#### **4.7 Relato das aulas e aplicação da avaliação final**

Após as pesquisas bibliográficas, a escolha e confecções dos materiais a serem utilizados, a autorização da escola e dos responsáveis dos alunos, foi feita a aplicação. As turmas serão identificadas como turma A e B. Na turma A aplicou-se metodologia ativa com auxílio dos materiais manipuláveis, enquanto na turma B aplicou-se apenas o ensino tradicional.

##### **4.7.1 Turma A**

A turma A é composta por 23 alunos, porém no dia da aplicação faltou um aluno. Inicialmente foram propostas duas situações problemas, as quais tinham como contexto: opções para montar um lanche e diferentes maneiras de se vestir. O objetivo era diagnosticar os conhecimentos prévios acerca do PFC, alguns alunos, conseguiram resolver as questões, porém

houve os quais não conseguiram, não tentaram ou relataram que não saberiam por não ter estudado o conteúdo.

Por conseguinte, os alunos foram organizados em cinco grupos, três com quatro e dois com cinco alunos e participaram de atividades práticas, usando materiais manipuláveis que simularam situações de contagem, as atividades foram as duas situações problemas apresentadas inicialmente para o diagnóstico dos conhecimentos prévios e mais dois exemplos de formação de números e forma de organizar pessoas em uma fila conforme figura (figura 24).

Figura 24- Aplicação do PFC com materiais manipuláveis na turma A.



Fonte: Própria da autora.

A figura 24 mostra momentos da aplicação prática com o uso de materiais manipuláveis, essa abordagem favoreceu a visualização do processo de contagem. As respostas encontradas pelo grupo eram socializadas e discutidas com todos. Nos momentos que surgiam divergências, havia intervenção para manter a discussão e ajudar os alunos entenderem juntos a resposta certa.

Os alunos foram bem participativos nas atividades. Ainda se fez a explicação do objeto de conhecimento e apresentou-se diferentes estratégias de soluções como: diagrama da árvore e aplicação direta do princípio multiplicativo. Por fim aplicou-se o teste.

#### 4.7.2 Turma B

A turma B é formada por 23 alunos, porém neste dia faltaram três alunos. Os exemplos e conceitos foram os mesmos da turma A, porém a metodologia utilizada na turma foi a tradicional, com apresentação do conteúdo e demonstração de exemplos no quadro.

Inicialmente foram propostos as duas situações problemas, objetivo era diagnosticar os conhecimentos prévios, as quais alguns alunos conseguiram chegar a resposta correta, outros tentaram e houve aqueles que não tentado.

Por conseguinte, fez-se a explicação do componente curricular exemplificado com as soluções dos problemas apresentados inicialmente e mais dois exemplos, também se apresentou diferentes estratégias de soluções como: diagrama da árvore e aplicação direta do princípio multiplicativo. Por fim aplicou-se a avaliação final (figura 25).

Figura 25- Aplicação na turma B.



Fonte: Própria da autora.

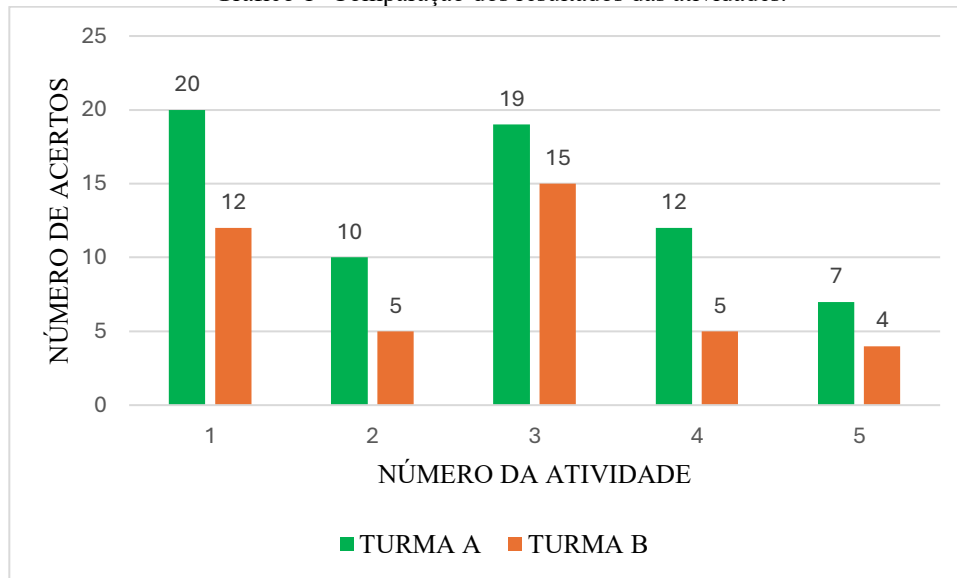
A compreensão foi satisfatória entre os alunos que já possuíam um bom raciocínio lógico e abstrato, mas alguns demonstraram dificuldade em assimilar o conceito sem o apoio visual ou concreto. A participação, nesse caso, foi mais limitada.

#### **4.8 Resultado e análise das metodologias aplicadas**

Participaram da avaliação final 42 alunos, sendo 22 da turma A e 20 da turma B. Em ambas as turmas os alunos que possuíam um bom raciocínio lógico e abstrato demonstraram maior familiaridade com os conceitos abordados, o que refletiu em uma abordagem mais segura e estruturada na resolução das atividades, já outros demonstraram dificuldade em assimilar o conceito, na turma A o uso de materiais manipuláveis aliado a metodologia ativa facilitou a visualização dos conceitos em alguns casos.

A avaliação final contou com a participação de 42 alunos, distribuídos entre 22 da turma A e 20 da turma B. A análise dos resultados foi realizada comparando o número de acertos em cada atividade e seus respectivos itens. A comparação entre os resultados obtidos na avaliação das turmas está representada no gráfico (gráfico 1).

Gráfico 1- Comparação dos resultados das atividades.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa

A análise dos resultados evidencia que, em ambas as turmas, os alunos que apresentaram maior capacidade de raciocínio lógico e abstrato alcançaram um desempenho superior. Por outro lado, observou-se um grupo de alunos que apresentou dificuldades em assimilar plenamente os conteúdos, especialmente quando a abstração exigida demandava maior capacidade de generalização e formalização matemática.

A intervenção pedagógica diferenciada entre as duas turmas possibilitou observar contrastes importantes. Na turma A, em que foram utilizados materiais manipuláveis aliado a metodologia ativa, os dados sugerem que esses recursos desempenharam um papel relevante na facilitação do processo de ensino-aprendizagem. O manuseio de objetos concretos auxiliou alguns estudantes a visualizar de forma mais clara os conceitos matemáticos, favorecendo a compreensão e a internalização dos conteúdos. Embora não tenha eliminado totalmente as dificuldades encontradas, essa estratégia promoveu um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e inclusivo, sobretudo para aqueles com menor domínio de abstração.

Na turma B, que foi submetida ao método tradicional baseado em explicações expositivas e resolução de exercícios no quadro, os resultados demonstraram uma abordagem mais restrita, centrada na memorização e na repetição de procedimentos. Embora alguns alunos tenham se destacado pela habilidade individual de abstração, a ausência de recursos manipulativos limitou as possibilidades de exploração prática dos conceitos, o que pode ter contribuído para uma maior discrepância entre os desempenhos.

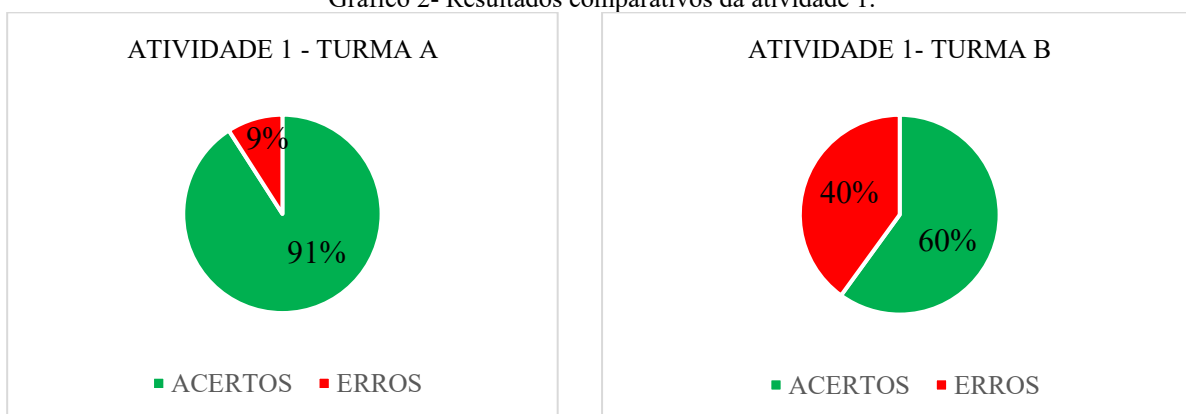
A análise comparativa, representada no Gráfico 1, reforça a constatação de que a adoção de metodologias ativas, especialmente com o uso de materiais manipuláveis, constitui uma alternativa pedagógica eficaz para o ensino da Matemática. Os resultados demonstram que a utilização desses recursos não apenas potencializa a compreensão conceitual, mas também contribui para reduzir desigualdades no processo de aprendizagem, oferecendo aos alunos condições mais equitativas de acesso ao conhecimento. Assim, a pesquisa evidencia a relevância de práticas didáticas diversificadas que dialoguem com as diferentes formas de aprender, confirmando que a combinação entre teoria e prática resulta em maior engajamento e melhores resultados.

#### 4.8.1 Análise dos acertos em cada atividade

A aplicação das cinco atividades possui a possibilidade de avaliar o desempenho das turmas A e B na compreensão do PFC e de conceitos relacionados da Análise Combinatória, como arranjos e permutações simples. A análise dos gráficos evidencia diferenças consistentes entre as turmas, especialmente no que se refere ao impacto do uso de materiais manipuláveis no processo de aprendizagem.

Os gráficos a seguir ilustram os resultados obtidos com a aplicação das atividades. No gráfico 2 observa-se que a turma A, que participou de uma intervenção com materiais manipuláveis, obteve um índice de acerto de 91%, demonstrando que o uso de recursos concretos favoreceu a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Os materiais permitiram aos alunos visualizarem e experimentar as possibilidades de combinação, tornando o conteúdo mais acessível e estimulando o raciocínio lógico de forma prática e interativa.

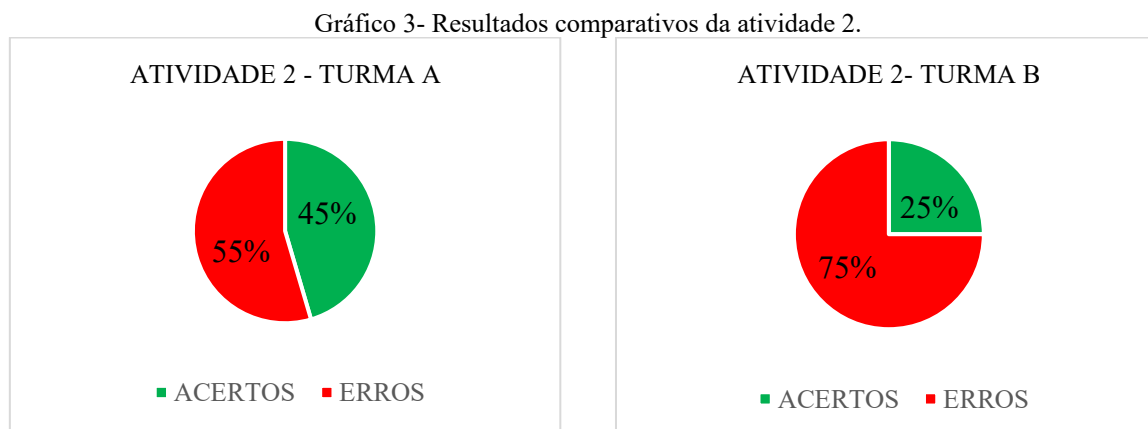
Gráfico 2- Resultados comparativos da atividade 1.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Por outro lado, a Turma B, que teve acesso apenas ao método tradicional de ensino, alcançou 60% de acerto, evidenciando uma menor assimilação do conteúdo. Essa diferença de

desempenho sugere que a abordagem tradicional, centrada na exposição teórica, pode não ser suficiente para garantir o entendimento pleno de conceitos abstratos como os de contagem e combinação. Por conseguinte, tem-se o desempenho dos alunos na atividade 2 demonstrado no gráfico 3.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

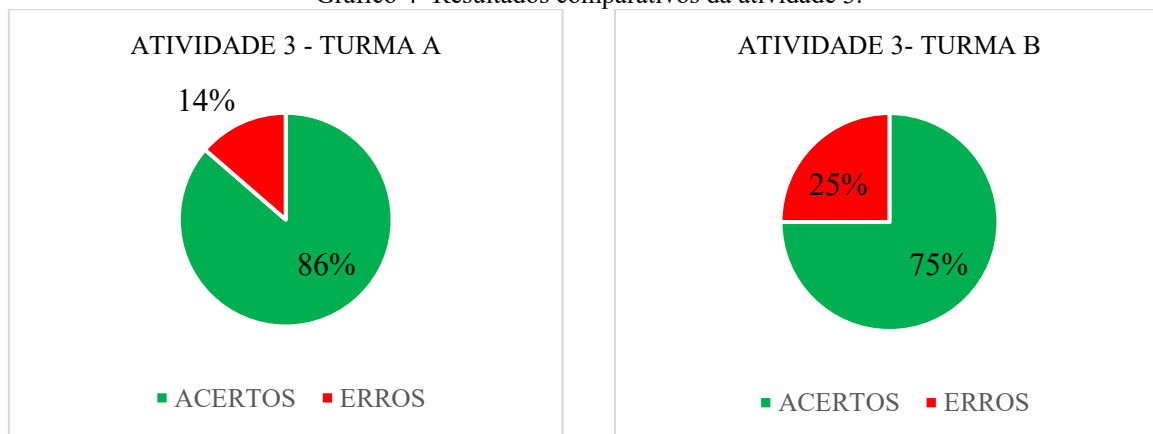
Na Atividade 2, os alunos foram desafiados a resolver situações envolvendo arranjos simples, em que a ordem dos elementos influencia no resultado. O Gráfico 3 demonstra o desempenho comparativo entre a Turma A e a Turma B. Os resultados revelam que, mais uma vez, a Turma A apresentou desempenho superior. O uso dos materiais concretos contribuiu para que os alunos compreendessem a diferença entre simplesmente escolher elementos e organizá-los em ordem. Esse recurso favoreceu a visualização das possibilidades, permitindo que os estudantes percebessem, de forma prática, como a variação da ordem altera os resultados possíveis.

A Turma B mostrou maior dificuldade em identificar a importância da ordem nas situações propostas do ponto de vista teórico. Essa dificuldade se traduziu em menor número de acertos, o que evidencia que a abstração exigida pelo conceito de arranjo pode se tornar mais complexa quando não há apoio em recursos didáticos que facilitem a compreensão.

Dessa forma a análise do gráfico 3 permite concluir que a estratégia diferenciada aplicada na Turma A foi determinante para ampliar a assimilação do conteúdo. Isso sugere que metodologias ativas são especialmente eficazes em tópicos que envolvem raciocínio lógico mais elaborado, como é o caso dos arranjos, fortalecendo o entendimento gradual da Análise Combinatória e preparando os alunos para conteúdos mais complexos com avanço para o ensino médio.

Na atividade 3, o problema foi contextualizado com base em um cardápio local, tornando-o mais próximo da realidade dos alunos, essa abordagem parece ter contribuído positivamente para o desempenho das turmas, conforme mostrado no gráfico 4.

Gráfico 4- Resultados comparativos da atividade 3.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

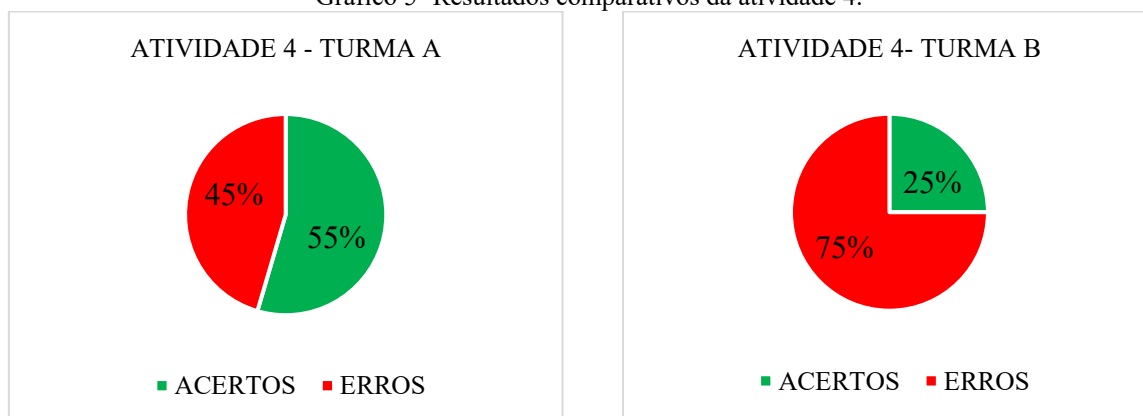
O Gráfico 4 evidencia que, nessa atividade, ambas as turmas apresentaram melhora no desempenho em comparação às atividades anteriores, embora a Turma A tenha, novamente, obtido resultados melhores. A diferença de acertos entre as turmas diminuiu, o que sugere que a contextualização contribuiu para facilitar a compreensão do PFC, mesmo para aqueles que trabalharam sem materiais manipuláveis.

Esse resultado demonstra a relevância de contextualizar os conteúdos matemáticos com exemplos próximos ao universo dos alunos, pois o reconhecimento de situações familiares desperta maior interesse, engajamento e confiança na resolução dos problemas.

Dessa maneira, a análise reforça que a associação entre teoria e prática cotidiana amplia o significado da aprendizagem, favorecendo a compreensão e estimulando o raciocínio lógico, o que pode ser considerado um avanço pedagógico importante para o processo de ensino e aprendizagem.

Enquanto na Turma A a visualização prática proporcionada pelos materiais concretos continuou a garantir um desempenho mais elevado, na Turma B a contextualização foi um fator significativo para reduzir as dificuldades observadas anteriormente. No entanto, a ausência de materiais manipuláveis pode ter limitado a exploração mais profunda do problema. A atividade 4 reforça essa ideia como mostra no gráfico 5.

Gráfico 5- Resultados comparativos da atividade 4.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Na Atividade 4, observou-se uma diferença marcante no desempenho entre as turmas A e B. Apesar de o desempenho da Turma A não ter sido tão alto quanto em outras atividades, o uso de recursos concretos ainda demonstrou ser um fator positivo na assimilação dos conceitos matemáticos. A Turma B, por sua vez, apresentou um desempenho bastante limitado, o que pode indicar que a abordagem exclusivamente teórica não foi suficiente para garantir a compreensão da atividade. Essa atividade evidencia que, mesmo em questões mais complexas, o uso de materiais manipuláveis pode contribuir significativamente para a construção do conhecimento matemático.

Em uma análise mais detalhada, a Atividade 4 buscou explorar as permutações simples, em que todos os elementos de um conjunto são organizados em diferentes ordens possíveis. Esse tipo de problema exige maior abstração e raciocínio lógico, pois os alunos precisam compreender não apenas o princípio das escolhas sucessivas, mas também a ideia de que a ordem é determinante no resultado.

De acordo com o Gráfico 5, verificou-se uma diferença marcante entre as turmas A e B. A Turma A, mesmo apresentando desempenho inferior em comparação às atividades anteriores, manteve resultados mais satisfatórios do que a Turma B. O uso de recursos concretos contribuiu para que os alunos conseguissem visualizar melhor a formação de diferentes sequências, auxiliando-os a organizar o raciocínio e a estruturar as respostas.

A Turma B apresentou maior dificuldade. Sem o apoio de materiais manipuláveis, muitos estudantes demonstraram confusão quanto à aplicação das regras de permutação, apresentando erros frequentes ao tentar organizar os elementos e calcular o número total de possibilidades. Isso mostra que a transição de situações mais simples (atividades 1, 2 e 3) para problemas mais abstratos exigiu um suporte metodológico adicional que, no caso da Turma B, não foi suficiente.

A análise dos resultados confirma que, mesmo em conteúdos de maior complexidade, o uso de estratégias práticas e visuais desempenha um papel relevante na aprendizagem. Embora o desempenho da Turma A tenha sido um pouco mais baixo do que em outras atividades, a diferença positiva em relação à Turma B evidencia que o recurso didático concretizou conceitos que, de outra forma, poderiam permanecer apenas em nível abstrato e de difícil assimilação para alunos do 8º ano.

Na Atividade 5, os alunos foram desafiados a resolver uma questão envolvendo permutação simples, a turma A novamente obteve melhor desempenho em relação a turma B (gráfico 6).

Gráfico 6- Resultados comparativos da atividade 5.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Na Atividade 5, os alunos foram desafiados a aplicar o conceito de permutação simples em um contexto de situação competitiva, como a definição de classificações ou rankings. Esse tipo de problema exigiu que os estudantes compreendessem, de forma clara, que a ordem dos elementos altera o resultado, sendo necessário calcular todas as possibilidades de organização.

De acordo com o Gráfico 6, a Turma A novamente apresentou desempenho superior em comparação à Turma B. O uso de materiais manipuláveis contribuiu para que os alunos conseguissem visualizar melhor a formação das diferentes ordens possíveis, o que facilitou o entendimento da lógica por trás da permutação. Ainda que o nível de dificuldade fosse elevado, essa estratégia didática mostrou-se eficaz para apoiar o raciocínio.

Na Turma B, por outro lado, observou-se maior índice de erros e incompreensão das regras que regem as permutações. Muitos estudantes tiveram dificuldades em diferenciar situações em que a ordem não influencia (como combinações) daquelas em que a ordem é determinante (como nas classificações). Esse aspecto reforça o desafio que conteúdos abstratos apresentam quando trabalhados de forma exclusivamente expositiva.

Portanto, os resultados da Atividade 5 confirmam a tendência observada ao longo das análises anteriores: metodologias ativas que envolvem materiais manipuláveis. No caso específico da permutação em contextos competitivos, essa abordagem foi decisiva para que a Turma A conseguisse superar as dificuldades, consolidando melhor o aprendizado em comparação à Turma B.

#### **4.9 Aplicação dos questionários**

Após a análise dos resultados quantitativos obtidos por meio da avaliação final, bem como da comparação entre as metodologias aplicadas nas duas turmas, foi realizada uma avaliação mais aprofundada do perfil dos estudantes em relação ao componente curricular de Matemática.

As turmas A e B responderam ao questionário 1 (apêndice B), composto por cinco questões, sendo quatro de múltipla escolha com opção de justificativa e uma pergunta subjetiva. Este questionário tem como objetivo entender a relação dos alunos com a Matemática, explorando sentimentos, percepções e dificuldades.

Também houve aplicação do questionário 2, porém apenas para a turma A, pois tem como objetivo avaliar a percepção dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis como recurso didático durante as aulas, possibilitando uma análise qualitativa do impacto dessa metodologia no processo de ensino-aprendizagem.

##### **4.9.1 Análise das respostas do questionário 1**

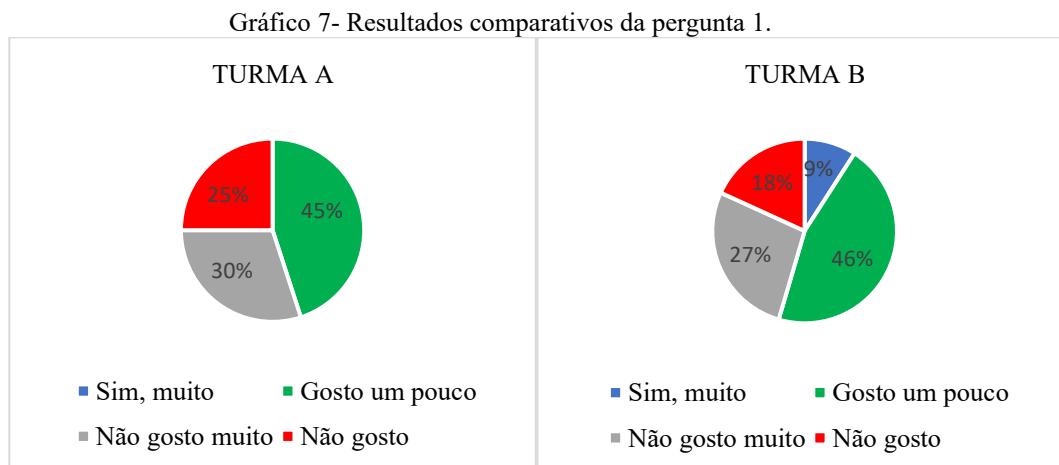
Na aplicação do questionário 1 em ambas as turmas, explicou-se previamente aos alunos o propósito da atividade e solicitou que todos respondessem com sinceridade. Por se tratar de perguntas de cunho pessoal, relacionadas à percepção individual sobre o componente curricular de Matemática, alguns estudantes demonstraram certa apreensão ao iniciar suas respostas. Diante disso, entrevistou-se, reforçando que não havia respostas certas ou erradas, e que o objetivo era compreender melhor o ponto de vista de cada aluno.

A aplicação teve duração de uma aula, permitindo que os alunos respondessem com tranquilidade. Observou-se que alguns estudantes concluíram rapidamente, enquanto outros levaram mais tempo para refletir e elaborar suas justificativas. Essa variação no tempo de resposta foi respeitada, garantindo que todos tivessem a oportunidade de se expressar de forma autêntica.

Responderam ao questionário 42 alunos, sendo 20 da turma A e 22 da turma B, em ambas as turmas, a maioria dos alunos não justificaram suas respostas, deixando em branco ou declarando que não sabiam responder. Segue abaixo análise das respostas.

O gráfico 7 apresenta os resultados da primeira pergunta da pesquisa, que investigou se os alunos das turmas A e B gostam de estudar matemática. A visualização permite comparar diretamente as respostas entre os dois grupos.

Pergunta 1: Você gosta de estudar Matemática?



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

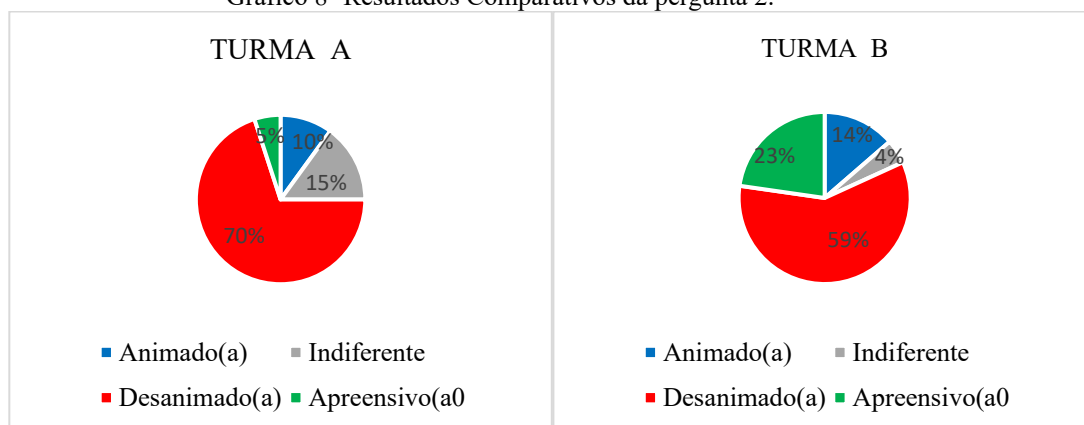
A diferença percentual nas respostas entre as turmas foi pequena, vale destacar que as duas turmas estavam bem equilibradas em termos de perfil e condições, o que torna a comparação entre os resultados ainda mais válida e significativa.

Por outro lado, o resultado na avaliação final mostra que a Turma A teve desempenho superior, o que reforça a eficácia dos materiais manipuláveis no processo de aprendizagem. Mesmo que o gosto pela matemática não tenha sido significativamente maior nessa turma, o uso de recursos concretos pode ter facilitado a compreensão dos conteúdos e promovido uma aprendizagem mais significativa.

O gráfico 8 apresenta as respostas dos alunos sobre como eles se sentem durante as aulas de matemática.

Pergunta 2: Quando tem aula de Matemática, como você se sente?

Gráfico 8- Resultados Comparativos da pergunta 2.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Na Turma A, observou-se que a grande maioria dos alunos, declarou sentir-se desanimada em relação às aulas. Além disso, 15% afirmaram ser indiferentes, enquanto apenas 10% relataram estar animados. Um número ainda menor, 5%, indicou sentir-se apreensivo. Esses dados revelam um cenário de forte desmotivação e baixo engajamento por parte da maioria dos alunos dessa turma, com pequena representatividade de percepções positivas.

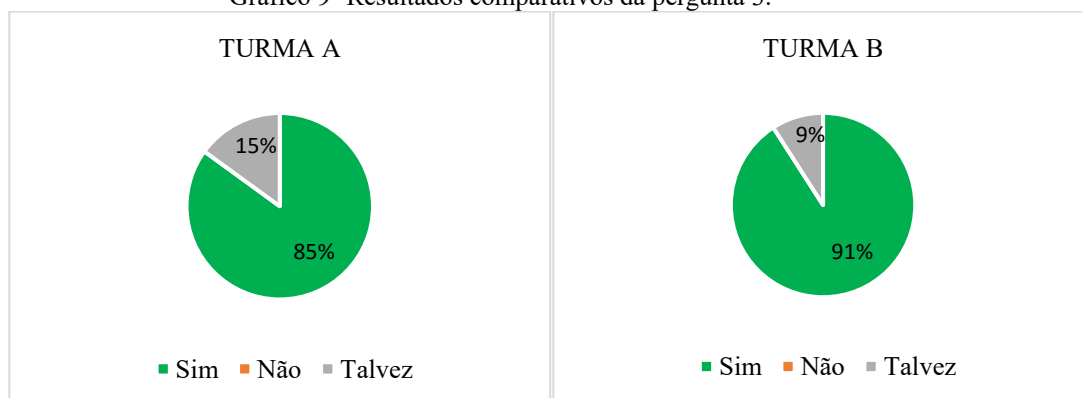
Na Turma B, apesar de também apresentar um índice elevado de alunos desanimados, os resultados se distribuíram de maneira mais heterogênea. Nesse grupo, 22% dos alunos declararam-se apreensivos, 14% disseram sentir-se animados e 4% mostraram-se indiferentes. Nota-se, portanto, que embora o desânimo ainda predomine, há uma maior diversidade de percepções, o que pode indicar diferentes níveis de envolvimento e expectativas em relação ao componente curricular.

Verifica-se que tanto a Turma A quanto a Turma B apresentam índices preocupantes de desmotivação, sendo este mais acentuado na Turma A. Esses resultados reforçam a necessidade de adoção de estratégias metodológicas capazes de tornar as aulas de Matemática mais atrativas e significativas para motivação dos alunos.

O Gráfico 9 apresenta os resultados da pesquisa se os alunos consideram a matemática importante para sua vida futura.

Pergunta 3: Você considera a Matemática uma disciplina importante para o seu futuro?

Gráfico 9- Resultados comparativos da pergunta 3.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

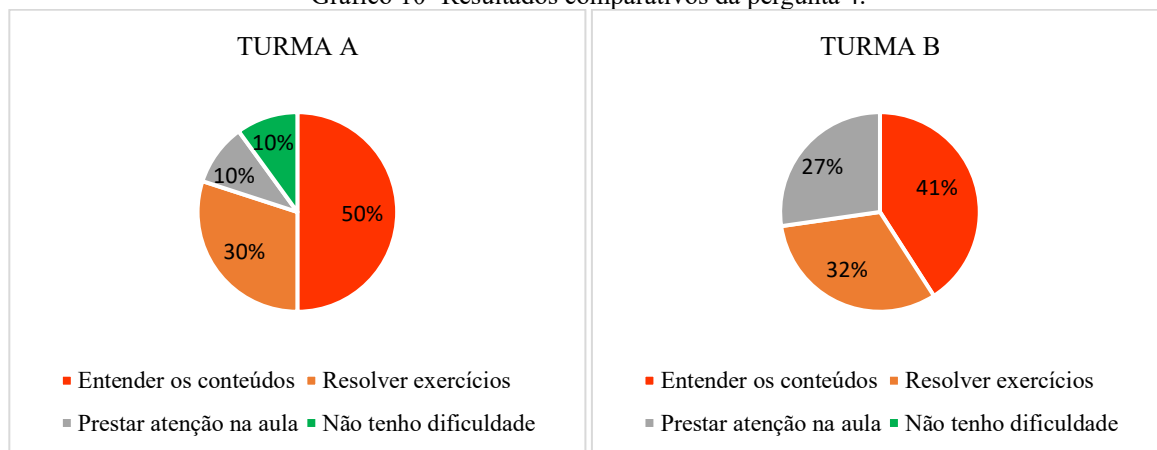
A pesquisa revelou que, em ambas as turmas a maior parte dos alunos considera a disciplina de matemática importante para o futuro. Esse resultado demonstra uma consciência coletiva sobre o papel da matemática na vida acadêmica, profissional e cotidiana, independentemente do método de ensino utilizado. É interessante observar que nenhum aluno respondeu que a disciplina não é importante, o que reforça o valor atribuído à matemática como ferramenta essencial para o desenvolvimento pessoal e social.

Embora alguns alunos tenham indicado “talvez” quanto à importância da matemática, essa resposta foi minoritária, mas possivelmente uma dúvida sobre como ela se aplicará diretamente em suas trajetórias futuras.

O gráfico 8 apresenta análise comparativa dos resultados da pergunta 4.

Pergunta 4: Qual é a maior dificuldade que você encontra na Matemática?

Gráfico 10- Resultados comparativos da pergunta 4.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

A análise das respostas evidencia que em ambas as turmas, a principal dificuldade é compreender o objeto de conhecimento trabalhado em sala de aula. Na turma A que 10% dos

alunos afirmaram não ter dificuldades, diferente da turma B que todos declararam ter dificuldades.

Quando questionados sobre o que poderia motivá-los a gostar mais de matemática, a maioria dos alunos das duas turmas afirmou não saber como responder. No entanto, alguns estudantes destacaram o desejo por aulas mais práticas, métodos de ensino diferentes e formas mais divertidas de aprender. Assim torna-se evidente a importância de repensar estratégias de ensino.

#### 4.9.1 Análise das respostas do questionário 2

Responderam ao questionário 2, 19 alunos da turma A, pois apesar da aplicação ter sido no mesmo dia do questionário 1, por motivos pessoais um aluno precisou ausentar-se, dessa forma respondeu apenas o questionário 1, a aplicação teve duração de uma aula, permitindo que os alunos respondessem com calma e refletissem sobre suas respostas.

Através de cinco perguntas, busca-se compreender se essas atividades facilitaram o aprendizado, despertaram interesse e contribuíram para a fixação dos conteúdos de forma mais eficaz, quatro perguntas serão mencionadas a seguir.

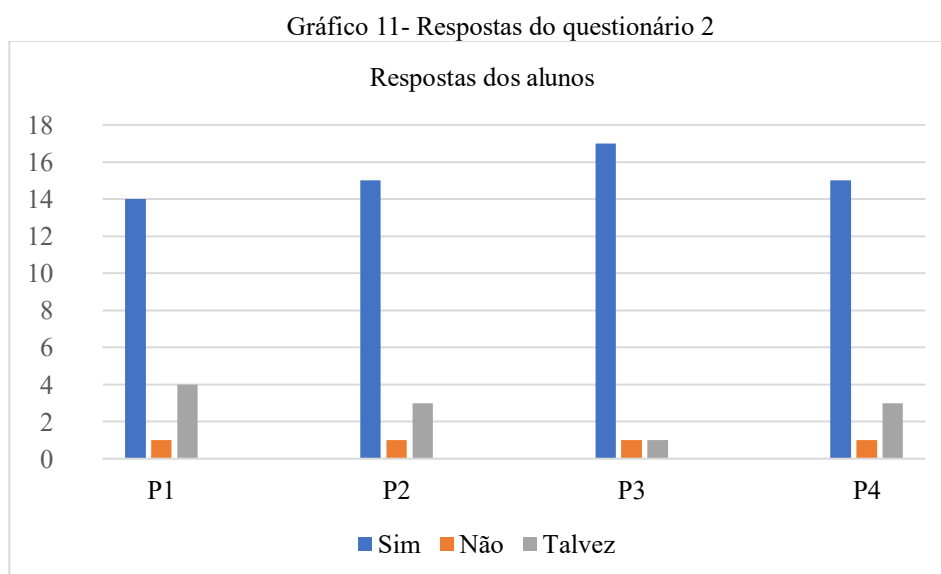
1 Você achou que as atividades com os materiais manipuláveis facilitaram seu aprendizado?

2 Gostou de aprender usando os materiais manipuláveis?

3 Você acha que esse tipo de atividade ajuda a lembrar melhor do conteúdo estudado?

4 Preferiria ter mais aulas com o uso de materiais manipuláveis no futuro?

Dispostas no gráfico 11, as respostas indicam que a maioria dos alunos tiveram uma experiência positiva com as aulas.



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

A análise gráfica das respostas revelou uma predominância de avaliações positivas por parte dos alunos. A maioria indicou que as atividades facilitaram a compreensão do objeto de conhecimento. Os dados também apontaram interesse na continuidade desse tipo de metodologia em aulas futuras.

Quando perguntados sobre o que mais chamou sua atenção durante as atividades, alguns registros foram:

Aluno 1: "Porque foi divertido e também facilitou o aprendizado".

Aluno 2: "A facilidade de resolver após a aula".

Aluno 3: "As figuras e os cálculos".

Aluno 4: "A facilidade".

Aluno 5: "Tudo o que fizemos".

Observa-se que os alunos destacaram aspectos positivos da atividade com materiais manipuláveis. As respostas indicaram que a experiência foi considerada divertida e despertou o interesse dos alunos. Os materiais utilizados foram bem recebidos, sendo apontados como facilitadores do processo de aprendizagem.

#### **4.10 Discussão**

A pesquisa foi aplicada nas turmas identificadas como turma A e B com duas metodologias de ensino diferentes, na primeira foi realizado aulas com metodologia ativa com auxílio de materiais manipuláveis, enquanto na segunda utilizou-se o método tradicional. Em ambas as turmas o objetivo foi verificar o aprendizado em relação ao estudo do PFC na realização de uma avaliação. No final da intervenção, os acertos foram analisados estatisticamente, por meio do Excel, que mostrou que os alunos aprenderam com as duas metodologias, porém observa-se que a turma A, a qual teve o apoio do material manipulável inseridos na prática de metodologia ativa, obteve melhor rendimento na avaliação final, comprovando que o uso desse material didático contribui na aprendizagem dos alunos.

Ao manusear os materiais e visualizar as possibilidades de escolha e combinação, os alunos conseguiram internalizar o conceito de multiplicação de possibilidades, base do PFC. Além disso, os momentos de socialização e discussão durante a manipulação dos materiais favoreceram a aprendizagem colaborativa, o que também foi um diferencial observado.

É importante destacar que, os alunos se mostraram mais motivados e envolvidos durante as aulas, fazendo perguntas, discutindo estratégias e demonstrando curiosidade. Essa mudança de postura, por si só, já representa um avanço importante no processo de ensino-aprendizagem.

Outro ponto relevante é que os materiais utilizados foram acessíveis e de baixo custo e pode ser usado em qualquer escola, independentemente de sua estrutura, demonstrando que a adoção de práticas pedagógicas mais dinâmicas e participativas não depende necessariamente de grandes recursos financeiros, mas sim de intencionalidade pedagógica. A escolha de objetos do cotidiano como copos e bombons contribuiu para aproximar o conteúdo da realidade dos alunos, promovendo maior sentido e aplicabilidade à matemática.

No entanto, é válido reconhecer que nem todos os alunos se adaptaram de forma imediata ao uso dos materiais. Alguns demonstraram certa resistência no início da proposta, provavelmente devido à falta de familiaridade com esse tipo de abordagem. Ainda assim, ao longo das aulas, foi possível notar maior engajamento por parte desses estudantes, indicando que a continuidade dessa prática, pode favorecer uma mudança de postura frente à disciplina.

Por outro lado, os professores podem usar os resultados da pesquisa para planejar aulas que incluam atividades baseadas no recurso didático materiais manipuláveis, criando um ambiente de aprendizado mais interativo e envolvente. Para isso, desenvolver programas de formação continuada para professores, focados em como utilizar materiais manipuláveis em sala de aula é essencial para uso desse recurso didático. É importante que os educadores estejam sempre preparados e atualizados.

Do ponto de vista para contribuição do conhecimento, a pesquisa apresentar evidências empíricas de que o uso de metodologias ativas com auxílio de materiais manipuláveis pode potencializar a compreensão e o desempenho dos estudantes em matemática.

Porém, é importante ressaltar que embora os materiais manipuláveis tragam diversos benefícios para o ensino, sobretudo na área da Matemática, seu uso também apresenta algumas limitações que devem ser consideradas, como, em turmas muito grandes, o controle e o acompanhamento do uso adequado dos materiais se tornam mais difíceis, e há também o risco de que os alunos os utilizem de forma inadequada, como brinquedos; a preparação e a execução das atividades com esses materiais demandam tempo, o que pode ser um desafio diante da carga horária. Também há necessidade de uma formação adequada do professor, pois o uso eficiente desses recursos demanda planejamento e conhecimento pedagógico. Por fim, pode haver resistência por parte de gestores, colegas ou famílias, principalmente em contextos onde o método tradicional ainda é muito valorizado.

De modo geral, os resultados permitem concluir que: i ) A metodologia ativa com o uso de materiais manipuláveis favoreceu significativamente a aprendizagem em todas as etapas, promovendo maior interação, participação e compreensão lógica dos conceitos; (ii) A

contextualização dos problemas, especialmente quando vinculada à realidade dos alunos, mostrou-se igualmente relevante para reduzir as dificuldades e aumentar o engajamento; (iii) Os conteúdos de maior abstração, como permutações, exigiram maior esforço didático, confirmando a importância de estratégias ativas que aproximem teoria e prática. Essas evidências corroboram estudos pedagógicos que apontam a eficácia de metodologias ativas no ensino da Matemática como (Paes; Rodrigues; Moreira 2023), indicando que a aprendizagem é mais efetiva quando o aluno participa ativamente do processo, visualiza os conceitos de forma concreta e os reconhece em situações cotidianas.

## **CAPITULO 5**

Este capítulo sintetiza os principais resultados da investigação, destacando as contribuições da metodologia ativa aliada ao uso de materiais manipuláveis para a aprendizagem do PFC, bem como as implicações pedagógicas observadas para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental.

### **5.1 CONCLUSÃO**

O percurso desenvolvido no segundo capítulo evidenciou que a compreensão histórica dos métodos de contagem e da análise combinatória não se limita a um resgate erudito, mas constitui um recurso pedagógico fundamental para aproximar os estudantes da lógica matemática a partir de compreender o processo evolutivo ao longo da história. Os registros antigos, como os quadrados mágicos e os sistemas de enumeração clássicos, até a consolidação dos princípios modernos, observou-se que a evolução conceitual da combinatória estava diretamente vinculada às necessidades humanas de organização, previsão e cálculo de possibilidades e ainda na ordem da contagem dos objetos.

A perspectiva histórica, articulada ao estudo dos documentos oficiais como os PCN, a BNCC e o DCEPA, revela-se na relevância como eixo estruturador para aprendizagens futuras em matemática e intrínseca a essa meta que se destacou na importância da metodologia docente e ao mesmo tempo como mediadora do conhecimento.

Outra questão sobre essa ótica é que o exame das práticas pedagógicas reforça que a transposição didática deve estar ancorada em estratégias que valorizem a contextualização, o uso de recursos, concretos e a participação ativa dos alunos, buscando não apenas a memorização de fórmulas, mas a construção de significados com base em atividades que aproxime o aluno da prática em que aflore a análise a interpretação de um determinado problema matemático.

Desse modo, o Capítulo 2 conclui que a integração entre história, documentos normativos e metodologias de ensino constitui um alicerce crucial para consolidar a análise combinatória na formação matemática dos estudantes, preparando-os para enfrentar desafios mais complexos no decorrer da trajetória escolar e com maior significado unindo teoria e prática na construção de um conhecimento matemático mais significativo

O estudo desenvolvido no Capítulo 3 permitiu compreender que o PFC é um instrumento de raciocínio lógico que orienta a resolução de problemas em contextos variados. A análise dos exemplos e das aplicações mostrou que a utilização desse princípio está presente em situações cotidianas, nas quais a combinação de escolhas sucessivas precisa ser organizada

e quantificada sob certos critérios lógicos. Essa constatação reforça que a aprendizagem do PFC transcende a abstração algébrica, articulando-se em problemas contextualizado, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de planejar, sistematizar e generalizar procedimentos, competências cruciais para o avanço em conteúdos posteriores, como arranjos, combinações e probabilidade e com aplicações com maior número de possibilidades seguindo formulações matemáticas que auxiliam na compreensão dos métodos de análise combinatória.

Outro critério de interesse e de importância condiz com a metodologias que torne esse princípio acessível e significativo para os alunos, em especial no Ensino Fundamental. Ao relacionar a teoria com exemplos práticos, como os materiais manipuláveis, verificou-se que o ensino do PFC pode ser transformado em uma experiência mais dinâmica e atrativa, favorecendo a construção de significados e ligado com o cotidiano. Desse modo, o capítulo 3 reafirma o papel do PFC como eixo central da Análise Combinatória e, ao mesmo tempo, evidencia a necessidade de estratégias pedagógicas que aproximem o conteúdo da realidade do aluno, garantindo maior compreensão, motivação e aplicabilidade do conhecimento para o ensino matemático.

Capítulo 4 evidenciou que a aplicação de uma metodologia ativa, aliada ao uso de materiais manipuláveis, possibilitou um processo de ensino-aprendizagem mais efetivo e contextualizado no estudo do PFC. A análise das atividades para a turma A, demonstrou que, quando o aluno tem acesso a recursos concretos, a abstração matemática se torna mais acessível, permitindo a visualização e a experimentação prática dos conceitos. Essa estratégia não apenas potencializou o desempenho dos alunos, mas também favoreceu o engajamento e a autonomia no processo de resolução de problemas, confirmando a relevância de metodologias ativas para a consolidação do conhecimento matemático, trazendo um melhor significado no ensino do PFC.

A abordagem quali quantitativa aplicada permitiu uma leitura mais abrangente dos resultados, unindo dados estatísticos às observações qualitativas sobre o comportamento, participação dos alunos e percepção da matemática, possibilitando avaliar o nível da aprendizagem pelo percentual entre as duas turmas A e B; possibilitando compreender não apenas os índices de acerto, mas também as dificuldades, estratégias de raciocínio e avanços individuais com maior engajamento dos alunos. A análise sobre o uso dos materiais manipuláveis na turma A ajudou na percepção de que esse recurso contribuiu significativamente para a compreensão e participação ativa dos alunos.

Dessa maneira, o uso de materiais manipuláveis, associado a uma metodologia que valoriza tanto os números quanto a experiência vivida em sala, constitui um caminho promissor para o ensino de Matemática, promovendo aprendizagens significativas e alinhadas às orientações dos documentos oficiais da educação básica.

Tendo em vista essa viagem pelos capítulos, constatou-se que a análise realizada ao longo da pesquisa, confirma que os objetivos gerais e específicos, inicialmente propostos foram alcançados de forma consistente, pois conseguiu alcançar o que propôs no texto introdutório.

De modo geral, os resultados mostraram que a utilização de metodologias diferenciadas promoveu avanços significativos na assimilação dos conteúdos, especialmente quando comparados ao ensino tradicional. As evidências indicam que a integração entre teoria e prática, somada ao suporte concreto dos materiais, favoreceu a construção de significados, confirmando a eficácia da proposta, considerando sobretudo que o conhecimento caminha junto com a teoria e a prática, sendo indissociável. Portanto, a pesquisa atingiu seus objetivos tanto em nível teórico, ao reafirmar a relevância do PFC e da Análise Combinatória para a formação matemática, quanto em nível prático, ao comprovar que metodologias ativas constituem um caminho viável e promissor para o ensino de Matemática para os alunos do Ensino Fundamental.

## **5.2 Propostas futuras**

A partir dos resultados obtidos, recomenda-se que futuras pesquisas aprofundem a investigação do uso de materiais manipuláveis em outros conteúdos da Matemática, como arranjos, combinações e probabilidade, de modo a verificar se os ganhos identificados no ensino do PFC se repetem em áreas de maior complexidade, estendendo-se para o ensino médio e até mesmo ao nível superior, ampliando a amostra envolvendo turmas de diferentes séries e contextos escolares, para identificar possíveis variações de desempenho relacionadas ao perfil sociocultural dos alunos, pois metodologias tecnicistas independentes da contextualização torna o ensino incompleto.

Outra proposta consiste em explorar metodologias híbridas, integrando materiais concretos e recursos digitais interativos, que podem potencializar ainda mais a visualização e a compreensão dos conceitos combinatórios, isso não significa considerar que o formalismo matemático esteja em segundo plano, pois teoria e prática devem estar juntas para que o conhecimento seja completo.

Além disso, sugere-se o acompanhamento longitudinal dos alunos, para avaliar se os conhecimentos adquiridos com o uso de estratégias ativas se consolidam ao longo do tempo e

contribuem para o desempenho em etapas posteriores da Educação Básica. Destaca-se a importância de investir em formação docente contínua, para que professores possam recorrer a novas metodologias de ensino, melhorando cada vez a prática e aplicar com segurança os conteúdos de Matemática e de acordo com a realidade dos alunos.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, Lenimar Nunes. Revista do Professor de Matemática Vol. 41: Mais sobre quadrados mágicos. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

**Araribá conecta matemática: 8º ano: ensino fundamental anos finais.** 1 ed. São Paulo: Moderna, 2022.

AQUINO, Claudivania de Alencar. **Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental:** uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT)- Universidade Federal do vale de São Francisco- UNIFASF, Juazeiro, 2013.

BACICH, Lilian. (org); MORAN, José.(org). **Metodologias Ativas para uma educação inovadora:** uma abordagem teórica- prática

BARROS, Edgar Pereira. **Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Fundamental:** Uma abordagem partindo do concreto para o abstrato. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT)- Universidade Federal de Alagoas- UFAL, Maceió, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Fundamental. Brasília, 2017. Disponível em: [https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518versaofinal.pdf](https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518versaofinal.pdf). Acesso em: 25 abr.2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília, 2018. Disponível em: [https://www.gov.br/mec/pt-br/cne/bncc\\_ensino\\_medio.pdf](https://www.gov.br/mec/pt-br/cne/bncc_ensino_medio.pdf). Acesso em: 25 abr.2025.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacional:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, Matemática. Brasília: MEC/SEF,1997. Disponível em: <https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 25 abr.2025.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacional:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais, ensino quinta a oitava séries. Brasília. MEC, 1998. Disponível em: <https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 25 abr.2025.

CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática** – Tradução: Hygino H. Domingues 5ª ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FERNANDEZ, Jose Corcho; OLIVEIRA, Kreley Irrael Martins. **Iniciação a Matemática: um curso de problemas e soluções.** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campina, São Paulo: Autores Associados, 2006.

FIorentini, Dario; Miorim, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM- São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17º ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar Vol 5: Combinatória e Probabilidade**. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**, 8º ano: ensino fundamental, anos finais.10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

MARCONI, Maria de Andressa; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo, SP: Atlas 2003.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. Coleção magistério. Série formação de professores. São Paulo: Cortez, 1990.

LINHARES, Idaiane Silva; SILVA, Jairo Santos. **Princípio Fundamental da Contagem: Uma introdução aos problemas de contagem**. v. 4 n. 5 (2020): EDIÇÃO ESPECIAL: Formação de Educadores Matemática. Disponível em: <https://revista.faculdadeitop.edu.br/index.php/revista/issue/view/12>. Acesso em: 29 de maio. 2025.

LORENZATO, Sergio. (org). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3 ed.Campinas: Autores associados, 2012.

MAIA, Ana Cláudia. B. **Questionário e entrevista na pesquisa qualitativa: elaboração, aplicação e análise de conteúdo** – Manual Didático. São Carlos: Pedro & João Editores, 2020. 52p.

Moran, J. M. (2015). **Metodologias ativas para uma aprendizagem significativa**. In: Boletim Técnico do Senac, v. 41, n. 3, p. 1–12.

MOREIRA. Marco Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora: Universidade de Brasília, 2006.

MORGADO, Augusto César. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2016.

NAHUM, Nélio Santos. **Métodos de Contagem: uma proposta de ensino com a utilização de problemas para o ensino médio**. Dissertação – PROFMAT, Universidade Federal do Pará-UFPA, Abaetetuba, 2021.

OLIVEIRA, Carlos ; N.C. FUGITA, Felipe. **Geração Alpha Matemática: 8º ano: ensino fundamental anos finais**. 4 ed. São Paulo: Edições SM, 2022.

OSORIO, Gerciane das Neves. **O uso de material manipulável no ensino de princípio multiplicativo e na construção de gráficos de barras e de setores no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT)- Universidade Federal do vale de São Francisco- UNIFASF, Juazeiro, 2019.

PAES, Hudson.L (org); RODRIGUES, Lorrena Bárbara.S.(org); MOREIRA, Ivanete Maria.(org). **Metodologias ativas no ensino da Matemática**: um olhar bibliográfico: Revista Foco. Disponível em: <https://doi.org/10.54751/revistafoco.v17n1-134>. Acesso em: 12 Ago. 2025.

PARÁ. **Documento Curricular do Estado do Pará - Educação Infantil e Ensino Fundamental**. 2ª Ed. Belém: Comissão ProBNCC Pará, 2019.

PREDIGER, Juliane; BERWANGER, Luana; MÖRS, Marlete Finke. **Relação entre aluno e matemática**: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. Revista Destaques Acadêmicos, [S. l.], v. 1, n. 4, 2013. Disponível em: <https://www.univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/39>. Acesso em: 12 jun. 2025.

SAMPAIO, João Carlos.V. Quatro Cores e Matemática. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Bahia, 2004.

SANTINHO, Miriam Sampieri; MACHADO, Rosa Maria. **Os Fascinantes Quadrados Mágicos** - III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Goiás: Anais, 2006.

SOUSA, José Claudimar. **A importância do ensino do princípio multiplicativo na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ- UFC, Sobral, 2023.

STEWART, Ian. **Almanaque das Curiosidades Matemáticas** – Tradução: Diego Alfaró. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

TAVARES, C.; BRITO, F.R.M: Revista do Professor de Matemática Vol. 57: Contando a História da Contagem. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

VAZQUES, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner. **Análise Combinatória**: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, VIII. Recife: Anais, 2004.

## APÊNDICE A - Avaliação final

Aluno(a): \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### AVALIAÇÃO FINAL

**Atividade 1-** Mário tem 3 camisas de cores diferentes: vermelha, amarela e azul. Ele tem também duas calças de cores: azul e preta. De quantas maneira Mário pode se vestir?



a) 3

b) 6

c) 5

d) 4

**Atividade 2 -** De quantos modos 3 pessoas podem-se sentar-se em 4 cadeiras em fila?

a) 24

b) 50

c) 12

d) 5

**Atividade 3-** O quadro a seguir representa parte de um cardápio de um restaurante situado na praia de Beja, no município de Abaetetuba-PA.

Refeições	Bebidas
Peixe frito	Refrigerante
Carne na chapa	
Frango	Água
Chapa mista (carne, frango e peixe)	

Quantos pedidos distintos podem ser formados por uma refeição e uma bebida?

a) 10

b) 32

c) 8

d) 16

**Atividade 4-** Quantos são os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 2,6 e 9?

a) 3

b) 27

c) 9

d) 6

**Atividade 5-** Cinco alunos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades para os três primeiros lugares?

a) 3

b) 27

c) 9

d) 60



## APÊNDICE C- Questionário 2

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### Questionário 2

1. Você achou que as atividades com os materiais manipuláveis facilitaram seu aprendizado?

( ) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Justifique sua resposta.

---

---

---

2. Gostou de aprender usando os materiais manipuláveis?

( ) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Justifique sua resposta.

---

---

---

3. O que mais chamou sua atenção durante a atividade?

---

---

---

4. Você acha que esse tipo de atividade ajuda a lembrar melhor do conteúdo estudado?

---

---

---

5. Preferiria ter mais aulas com o uso de materiais manipuláveis no futuro?

---

---

---

## APÊNDICE D- Termo de consentimento

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO- PAIS E/OU RESPONSÁVEL LEGAL

O adolescente, sob sua responsabilidade, está sendo convidada (o), a participar de uma pesquisa sobre o ensino e aprendizagem do Princípio Fundamental da Contagem no 8º ano.

A proposta deste termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) é explicar tudo sobre o estudo e solicitar a sua permissão para participar do mesmo.

O objetivo desta pesquisa é analisar e comparar os efeitos de metodologias ativas com o uso de materiais manipuláveis em relação ao ensino tradicional na aprendizagem do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

A participação de seu representado na pesquisa será responder questões de PFC após a participação de aulas sobre o referido objeto de conhecimento.

Fica informada que da pesquisa a se realizar, é possível esperar benefícios, tais como melhora no desempenho matemático. Contudo, fica informado sobre possíveis desconfortos decorrentes do estudo, tais como o desconforto de responder questões matemáticas.

Não terá nenhum tipo de pagamento pela participação na pesquisa e em nenhum momento o participante da pesquisa será identificado.

Caso haja alguma dúvida poderá entrar em contato com a pesquisadora responsável, Missandra Pires da Silva Nunes, pelo telefone (91) 985179228.

Eu, \_\_\_\_\_ li esse Termo de Consentimento e compreendi a natureza e objetivo do estudo para o qual autorizo a participação do(a)

\_\_\_\_\_.

Abaetetuba-PA, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ 2025

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Pai ou Responsável Legal

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Pesquisador Responsável