



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Kevin Marçal Carvalho Val

O problema de inscrição e circunscrição entre polígonos

Teresina - 2026



Kevin Marçal Carvalho Val

Dissertação de Mestrado:

O problema de inscrição e circunscrição entre polígonos.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:

Prof. Dr. Newton Luis Santos.

Coorientadora:

Prof^a. Dr^a. Aurineide Castro Fonseca

Teresina - 2026

Copyright © 2026 by Kevin Marçal Carvalho Val.

Direitos reservados, 2026 por Kevin Marçal Carvalho Val.

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

Nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a expressa autorização do autor.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBI/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

V135p Val, Kevin Marçal Carvalho.

O problema de inscrição e circunscrição entre polígonos /
Kevin Marçal Carvalho Val. -- 2026.
109 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do
Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-
Graduação em Matemática, Teresina, 2026.

“Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos. Coorientadora:
Profa. Dra. Aurineide Fonseca ”

1. Geometria Euclidiana. 2. Triângulo. 3. Software
GeoGebra. 4. Ensino Médio. I. Santos, Newton Luís. II.
Fonseca, Aurineide Castro. III. Título.

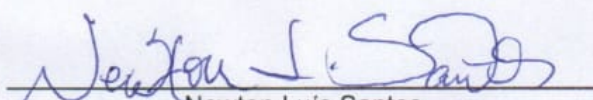
CDD 512.5

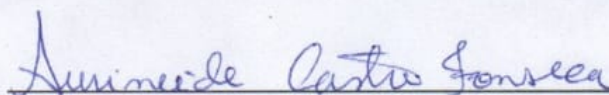
Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

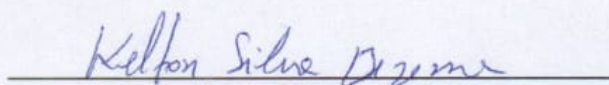


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

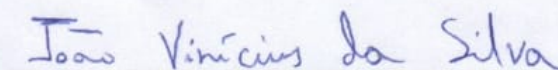
Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***O problema de inscrição e circunscrição entre polígonos***, defendida pelo mestrando Kevin Marçal Carvalho Val, em 21 de maio de 2026 e aprovada pela banca constituída pelos professores:


Newton Luís Santos
Presidente da Banca examinadora


Aurineide Castro Fonseca
Co-orientadora


Kelton Silva Bezerra
Examinador Interno


Ruan Diego da Silva Paiva
Examinador Externo ao Programa


João Vinícius da Silva
Examinador Externo à Instituição

Dedico esta dissertação primeiramente a Deus, pela força e sabedoria, à minha esposa, familiares e amigos, que estiveram ao meu lado em todos os momentos desta jornada, oferecendo apoio, incentivo e carinho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por me conceder força, sabedoria e perseverança ao longo de toda esta caminhada. Sem Sua presença e cuidado, nada disso seria possível.

À minha esposa, o amor da minha vida, Aline Almeida, pelo amor, paciência, compreensão e apoio incondicional em todos os momentos. Sua parceria foi essencial para que eu seguisse com serenidade e confiança até a conclusão deste mestrado.

À minha família: minha mãe Maria do Socorro, meu pai Marçal, meu irmão Jim Max, minha irmã Rossana, meu sobrinho Henri, minha sogra Maria do Socorro, meu sogro Fernando, minha cunhada Amanda e todos outros familiares por todo incentivo, carinho e dedicação, e por sempre acreditarem em mim, mesmo nos momentos mais difíceis. Cada palavra de apoio e cada gesto de confiança foram fundamentais para a realização desta conquista.

Aos meus amigos: Alexandre, Roniere, Higor, Marcus, Mikaely, Junior, Danilo, Danrley, Edilson, Erisvaldo, Hotavio, João, Juliano, Melqui, Osvaldo, Vitor, Ruan, Sillas, Wesley, Edivan, Paulo, Lukas, Djinansley e todos outros amigos pela amizade sincera, pelas palavras de motivação e pelos momentos de descontração que tornaram essa jornada mais leve e agradável.

Aos professores Newton e Aurineide, pela orientação, pelos ensinamentos e pela paciência durante todo o desenvolvimento desta dissertação. Suas contribuições foram indispensáveis para meu crescimento acadêmico e pessoal.

A todos que, de alguma forma, colaboraram para a concretização deste trabalho, deixo registrado meu sincero agradecimento.

*"A educação é a arma mais poderosa que
você pode usar para mudar o mundo ".*

Nelson Mandela.

Resumo

Esta dissertação investiga condições geométricas para a existência de inscrições e circunscrições entre polígonos, com foco especial em triângulos equiláteros inscritos em triângulos arbitrários e em quadrados inscritos em triângulos arbitrários. A pesquisa parte de referências clássicas da geometria euclidiana e de trabalhos recentes sobre o tema. No caso dos triângulos equiláteros inscritos, são estudados dois métodos de construção, uma abordagem algébrica e outra geométrica, além de propriedades notáveis relacionadas aos pontos e círculos de Apolônio, aos triângulos pedais e à reta de Euler. No caso dos quadrados inscritos, são discutidas condições de existência para triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos, bem como a determinação do maior quadrado que cabe em cada configuração. As construções são validadas por meio do software GeoGebra, que permite visualizar dinamicamente os resultados teóricos e explorar novas conjecturas. Por fim, o trabalho apresenta possibilidades de aplicação didática desses conteúdos no Ensino Médio, propondo atividades investigativas com potencial para ampliar a compreensão de geometria plana em sala de aula.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana; Triângulo; Quadrado; Inscrição; Circunscrição; GeoGebra; Ensino Médio.

Abstract

This dissertation investigates geometric conditions for the existence of inscriptions and circumscriptions among polygons, with particular focus on equilateral triangles inscribed in arbitrary triangles and squares inscribed in arbitrary triangles. The research is based on classical references in Euclidean geometry and recent works on the subject. In the case of inscribed equilateral triangles, two construction methods are studied, one algebraic and one geometric, along with notable properties related to Apollonius points and circles, pedal triangles, and the Euler line. In the case of inscribed squares, existence conditions are discussed for acute, right, and obtuse triangles, as well as the determination of the largest square that fits in each configuration. The constructions are validated using GeoGebra software, which makes it possible to dynamically visualize the theoretical results and explore new conjectures. Finally, the work presents possibilities for didactic application of these topics in high school, proposing investigative activities with the potential to broaden the understanding of plane geometry in the classroom.

Keywords: Euclidean Geometry; Triangle; Square; Inscription; Circumscription; GeoGebra; Secondary Education.

Lista de Figuras

1	Aproximação de Arquimedes	2
2	Exemplo de curva fechada simples	4
3	Semelhança espiral	6
1.1	Triângulo genérico	8
1.2	Raio do círculo que circunscreve o triângulo $\triangle ABC$	10
1.3	Pontos inversos com relação a um círculo	16
1.4	Triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OB'A'$	17
1.5	Segmento RA bissetriz do ângulo $\hat{PAQ}$	17
1.6	Círculo de Apolônio do segmento AB	18
1.7	Pontos de Apolônio do $\triangle ABC$	18
1.8	Triângulo pedal do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$: D , E e F pertencem aos lados de $\triangle ABC$	19
1.9	Triângulo pedal do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$: D , E e F pertencem aos prolongamentos dos lados de $\triangle ABC$	19
1.10	Triângulos pedais dos pontos de Apolônio	20
1.11	Semelhança espiral no triângulo pedal dos pontos de Apolônio	21
1.12	Reta dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos ao $\triangle ABC$	22
1.13	Simedianas do triângulo $\triangle ABC$	22
1.14	Diâmetro de Brocard de $\triangle ABC$	23
1.15	Vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$	24
1.16	Vetores $\overrightarrow{OM_a}$, $\overrightarrow{OM_b}$ e $\overrightarrow{OM_c}$	24
1.17	$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{OM_b} + \overrightarrow{OM_c}$	25
2.1	$\triangle ABC$ com $\hat{ABC} > 90^\circ$	27

2.2	$\square DEFG$ com lado contido em BC e inscrito à $\triangle ABC$	29
2.3	Alturas relativas aos lados BC e AC	30
2.4	Quadrados Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4	31
2.5	Triângulo obtusângulo	31
2.6	Exemplo de triângulo para dentro	33
2.7	Exemplo de triângulo para fora	34
2.8	Exemplo de triângulo para dentro e para fora	34
2.9	$B\hat{G}A$	34
2.10	s_a	35
2.11	Regiões	36
2.12	$\triangle ABC$	36
2.13	Esboço da cubica (2.8)	38
2.14	Região I	39
2.15	Região II	39
2.16	Região III	40
2.17	Triângulo de Calabi	40
2.18	Resolução gráfica	42
3.1	Pontos B e C	44
3.2	Região b	44
3.3	$\theta_A = B\hat{A}C, \theta_B = A\hat{B}C$ e $\theta_C = A\hat{C}B$.	45
3.4	Triângulo $\triangle ABC$	45
3.5	Raio da circunferência circunscrita	46
3.6	Ponto M	47
3.7	$\triangle MNP$	47
3.8	$\triangle ABC$	48
3.9	Pontos D, E e G	49
3.10	Círculo de Apolônio associado ao lado BC	49
3.11	Pontos de Apolônio do triângulo $\triangle ABC$	50
3.12	Pontos A_1, B_1 e C_1	50
3.13	Pontos A_2, B_2 e C_2	51

3.14	Triângulos pedais dos pontos de Apolônio P_1 e P_2	51
3.15	Rotação do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$	52
3.16	Semelhança espiral no $\triangle A_1B_1C_1$	52
3.17	Rotação do triângulo $\triangle A_2B_2C_2$	53
3.18	Semelhança espiral no $\triangle A_2B_2C_2$	53
3.19	Baricentros dos triângulos $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A'_1B'_1C'_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ e $\triangle A'_2B'_2C'_2$. .	54
3.20	Lugar geométrico dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos em $\triangle ABC$	54
3.21	Relação entre as retas	55
3.22	Circuncentro e ortocentro do triângulo $\triangle ABC$	55
3.23	Reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$	56
3.24	Relação entre as retas e a reta de Euler	56
3.25	Pontos A , B e C	57
3.26	Triângulos $\triangle ABC$ e h_a	58
3.27	Reta paralela a BC	58
3.28	Pontos E e F	59
3.29	Pontos G e H	59
3.30	Quadrado inscrito ao triângulo $\triangle ABC$ com um lado contido em BC . . .	60
3.31	Maior quadrado inscrito ao triângulo acutângulo $\triangle ABC$	60
3.32	Maior quadrado inscrito ao triângulo retângulo $\triangle ABC$	61
3.33	Regiões II e III	62
3.34	Triângulo $\triangle ABC$	62
3.35	Ponto D	63
3.36	Quadrado de lado AD	63
3.37	Quadrado de lado AE	64
3.38	Quadrado inscrito ao triângulo $\triangle ABC$	64
3.39	$A \in II$	65
3.40	$A \in III$	65
3.41	triângulo de Calabi	66

Lista de Tabelas

1.1	Exemplos de triângulos $\triangle ABC$	16
-----	--	----

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	x
Introdução	2
1 Triângulos equiláteros inscritos em triângulos arbitrários	7
1.1 Método algébrico	7
1.2 Método geométrico	16
2 Quadrados e Triângulos	27
2.1 Quadrados inscritos em triângulos	27
2.2 O caso de triângulos obtusângulos	31
3 Aplicações e construções no GeoGebra	43
3.1 Construção dos triângulos equiláteros inscritos – método algébrico	43
3.2 Construção dos triângulos equiláteros inscritos – método geométrico	48
3.3 Construções para quadrados inscritos em triângulos - caso acutângulo ou retângulo	57
3.4 Construções para quadrados inscritos em triângulos - caso obtusângulo	61
4 Perspectivas de aplicação no Ensino Médio	67
4.1 A geometria dinâmica como ambiente de investigação	68
4.2 Explorações com triângulos equiláteros inscritos em triângulos arbitrários	69
4.3 Explorações com quadrados inscritos em triângulos arbitrários	71

4.4 Sequências didáticas	72
5 Considerações finais	73
Referências	75
Apêndice A	78
Apêndice B	88

Introdução

A geometria é uma área da matemática que possui diversos problemas com enunciados simples e soluções não triviais, como por exemplo os problemas clássicos da Grécia antiga: a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo e a quadratura do círculo. Apesar de serem de fácil entendimento possuem soluções densas que necessitaram de técnicas de álgebra moderna para serem resolvidos. Esses problemas clássicos podem ser observados no livro de Gonçalves (2017).

Problemas que envolvem inscrição e circunscrição são importantes na geometria euclidiana, visto que tais ideias foram utilizadas por *Arquimedes* de Siracusa para desenvolver uma aproximação para o π mais precisa que as existentes até então.

Boyer (1974) explica que, Arquimedes demonstrou grande habilidade de cálculo ao partir de um hexágono regular inscrito e, dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a 96 lados, por meio de um processo iterativo hoje associado ao chamado algoritmo de Arquimedes, obtendo assim a aproximação $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$, mais precisa que as empregadas por egípcios e babilônios.

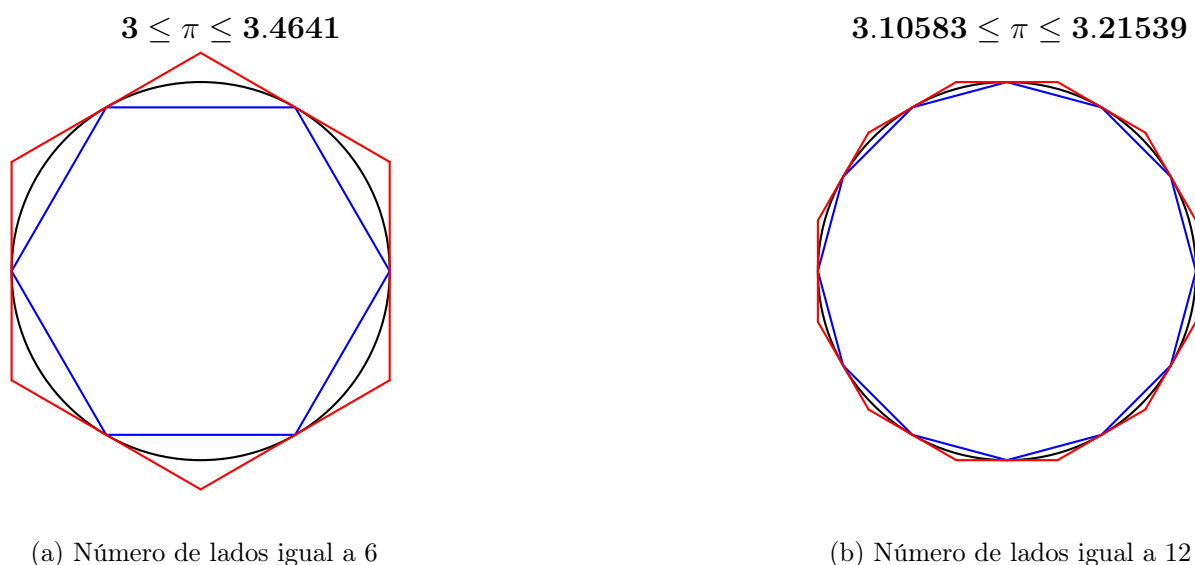


Figura 1: Aproximação de Arquimedes

Fonte: Autor (2026).

Nesse mesmo contexto, dois teoremas notáveis são o *Teorema de Ptolomeu* e o

Teorema de Pitot, ambos demonstrados no livro *Geometria* de Muniz Neto (2022).

Teorema 0.1 (Teorema de Ptolomeu). Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD , então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

Teorema 0.2 (Teorema de Pitot). Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA , é circunscritível se, e só se,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

As definições de inscrição e circunscrição apresentadas nos *Elementos de Euclides* (2009) não se limitam ao caso polígonos-círculos. Contudo, atualmente, essas noções são trabalhadas em diversas bibliografias associadas somente a círculos, como nos livros *Fundamentos de Matemática Elementar* de Dolce e Pompeo (2013), *Geometria* de Muniz Neto (2022) e *Geometria Euclidiana Plana* de Barbosa (1997).

As definições clássicas que são encontradas nos textos de geometria euclidiana são dadas como no livro *Geometria Euclidiana Plana*.

Definição 0.1 (Polígono inscrito a um Círculo). Um polígono está inscrito num círculo se seus vértices pertencem ao círculo.

Definição 0.2 (Polígono circunscrito a um Círculo). Um círculo está inscrito em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes ao círculo. Quando tal ocorre diz-se que o polígono circunscribe o círculo.

Embora não sejam muito conhecidas, Euclides (2009) apresenta a definição para inscrição entre polígonos e, a partir dela, defini a circunscrição entre polígonos.

Definição 0.3 (Polígono inscrito a um polígono). Um polígono P_1 é dito estar inscrito a um polígono P_2 , quando cada um dos vértices do polígono P_1 toca um dos lados do polígono P_2 .

Definição 0.4 (Polígono circunscrito a um polígono). Um polígono P_1 é dito estar circunscrito a um polígono P_2 , quando P_2 está inscrito a P_1 .

Como foi observado, os textos tradicionais de geometria euclidiana referem-se a problemas de inscrição ou circunscrição de polígonos a circunferências, sendo estes presentes desde o ensino fundamental. No entanto, não se observa a mesma frequência em relação a polígonos inscritos ou circunscritos a outros polígonos, sendo escassos os estudos relacionados a essa temática, que pode levar ao questionamento: *quando e como pode-se construir um polígono inscrito ou circunscrito a outro polígono?*

Para responder essa questão, o presente trabalho propõe o estudo de propriedades e construções de triângulos equiláteros inscritos ou circunscritos a outros polígonos, e tem

como objetivo geral investigar as condições geométricas necessárias para a existência das configurações.

Além disso, temos como objetivos específicos exibir e explorar diferentes métodos de construção que foram publicados em trabalho recentes e apresentá-los de forma dinâmica no software *GeoGebra*. Assim, espera-se que os resultados obtidos não apenas respondam à questão principal proposta, mas também ampliem a compreensão sobre a estrutura das configurações geométricas estudadas e motivem o leitor a desenvolver um olhar dinâmico sobre a geometria.

Embora tais questões não sejam abordadas em detalhe neste trabalho, trata-se de um campo amplo, no qual se inserem, por exemplo, os estudos de Meyerson (1980), Nielsen (1992) e Gupta e Rubinstein-Salzedo (2021), que estabelecem, entre outros, os seguintes resultados:

- De acordo com Meyerson (1980) toda curva fechada simples no plano contém os vértices de um triângulo equilátero.
- Nielsen (1992) diz que, se $J \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada simples e T é um triângulo qualquer, então J admite infinitos triângulos inscritos semelhantes a T .
- Em seu artigo Gupta e Rubinstein-Salzedo (2021) mostram os resultados de (Meyerson, 1980) e (Nielsen, 1992) para $J \subset \mathbb{R}^n$.

Estes resultados não são triviais pois curvas fechadas podem ter uma geometria muito complicada.

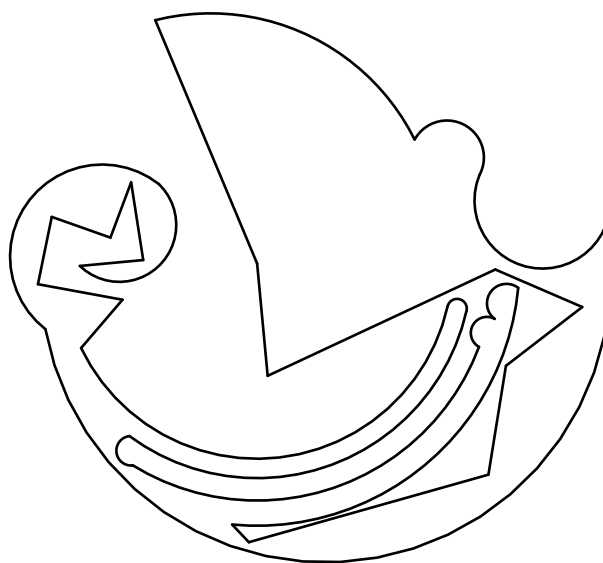


Figura 2: Exemplo de curva fechada simples

Fonte: Autor (2026).

Este trabalho baseia-se principalmente no estudo dos artigos de Andrica, Bagdasar e Marinescu (2024), Russell (2015) e Wetzel (2002) que tratam de problemas de inscrição e circunscrição envolvendo não apenas os casos entre círculos e polígonos. São feitos usos de técnicas que iremos explorar nesta dissertação e cuja dinâmica permite perceber tópicos da geometria Euclidiana sob uma perspectiva não estática como é usualmente apresentado nos textos clássicos de geometria Euclidiana.

No artigo de Andrica, Bagdasar e Marinescu (2024), os autores investigam as diferentes configurações possíveis de um triângulo equilátero $\triangle MNP$ inscrito em um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, onde $M \in BC$, $N \in CA$ e $P \in AB$. A pesquisa aborda razões entre comprimentos nos lados e propriedades extremas dessas figuras. Dois resultados importantes que devem ser destacados são:

- O comprimento do lado l do triângulo $\triangle MNP$ inscrito no triângulo $\triangle ABC$, onde $\alpha = \angle CMN$ e r é a medida do raio do círculo que circunscreve o triângulo $\triangle ABC$:

$$l = \frac{2r \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{C} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ - \hat{B}) + \sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C})}.$$

- O valor α^* onde a área do triângulo $\triangle MNP$ é mínima:

$$\alpha^* = \arctan \frac{\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{1}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C}}.$$

De maneira distinta, Russell (2015) demonstra, a partir das definições de círculo de Apolônio, pontos de Apolônio e semelhança espiral, que é possível inscrever triângulos equiláteros em um triângulo qualquer, de modo que cada vértice do triângulo equilátero pertença a um lado (ou sua extensão) do triângulo original. Nessa construção, mostra-se que os baricentros desses triângulos equiláteros se distribuem ao longo de apenas duas retas, cada uma perpendicular à reta de Euler do triângulo original, o que revela uma estrutura geométrica altamente organizada, mesmo em configurações aparentemente assimétricas.

As definições de semelhança espiral e de reta de Euler são apresentadas a seguir.

Definição 0.5 (Semelhança espiral). (Yaglom, 1968) Uma *semelhança espiral* é a aplicação obtida pela composição de uma homotetia de centro O e coeficiente k com uma rotação de centro O e ângulo α . Em particular, na Figura 3, para cada ponto $A \in F$, o ponto imagem $A_1 \in F_1$ (onde A_1 pertence a semirreta $\overrightarrow{OA}$) é obtido a partir de OA por uma dilatação de razão k , isto é, $\overline{OA_1} = k \cdot \overline{OA}$ e $A' \in F'$ é obtido de A_1 após uma rotação de centro O e ângulo α .

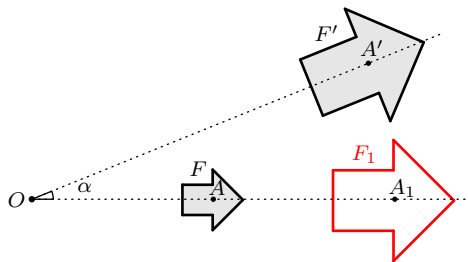


Figura 3: Semelhança espiral

Fonte: Autor (2026).

Definição 0.6 (Reta de Euler). A reta que contém o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo é chamada de reta de Euler do triângulo.

Lembre-se de que o circuncentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas mediatrizes, o ortocentro é o ponto de encontro de suas alturas e o baricentro é o ponto de interseção de suas medianas.

O estudo Wetzel (2002) preencheu uma lacuna existente no caso do quadrado inscrito a um triângulo obtusângulo. Em sua pesquisa observa que os casos para triângulos acutângulos e retângulos já estavam consolidados na literatura, vinculados a resultados clássicos da década de 1830 (Teorema 2.1), em seu trabalho aborda o caso obtusângulo que até então não havia sido considerado.

Com o objetivo de sistematizar a investigação teórica e garantir o alcance integral das metas propostas nesta pesquisa, o trabalho foi estruturado em quatro capítulos.

No primeiro capítulo serão analisados os diferentes métodos abordados nos trabalhos de Andrica, Bagdasar e Marinescu (2024) e Russell (2015) conduzindo a resultados semelhantes, onde um triângulo equilátero está inscrito a outro triângulo arbitrário. A análise demonstrará que essas diferentes metodologias, apesar de suas distintas fundamentações teóricas, convergem para as mesmas configurações geométricas.

O objetivo do segundo capítulo será investigar o maior quadrado que *cabe* em um triângulo arbitrário a partir dos resultados de Wetzel (2002).

O terceiro capítulo da pesquisa consistirá na validação de todas as construções por meio do software de geometria dinâmica *GeoGebra*.

No quarto capítulo serão discutidas as possibilidades de aplicação desses conteúdos no Ensino Médio, por meio da proposição de sequências didáticas destinadas à sua implementação em sala de aula.

Capítulo 1

Triângulos equiláteros inscritos em triângulos arbitrários

Neste capítulo, analisa-se a configuração geométrica em que cada vértice de um triângulo equilátero toca um lado distinto de um triângulo genérico. A revisão da literatura permitiu identificar duas abordagens metodológicas distintas que convergem para o mesmo resultado: (Andrica; Bagdasar; Marinescu, 2024) emprega estratégias algébricas, enquanto (Russell, 2015) fundamenta sua análise em princípios geométricos clássicos. A diferença metodológica entre os autores evidencia a riqueza de perspectivas para a resolução do problema.

1.1 Método algébrico

Nesta seção vamos desenvolver a abordagem estabelecida por Andrica, Bagdasar e Marinescu (2024). Na Figura 1.1 temos um triângulo genérico, designado por $\triangle ABC$, com seus ângulos internos nos vértices A, B e C que são denotados respectivamente, por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Adota-se, como premissa inicial e sem perda de generalidade, a relação de ordem $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$ entre as magnitudes angulares.

No interior do $\triangle ABC$, encontra-se inserido um triângulo equilátero inscrito, referido como $\triangle MNP$. A construção geométrica apresentada visa estabelecer uma relação específica entre os dois triângulos, partindo de uma configuração inicial particular.

Adicionalmente, na Figura 1.1, encontram-se destacados um conjunto de ângulos auxiliares. Tais ângulos são definidos estrategicamente e desempenham um papel fundamental na aplicação subsequente do método proposto, servindo como elementos-chave para o desenvolvimento da demonstração. A saber $\alpha_1 = \angle CMN$, $\alpha_2 = \angle PMB$, $\beta_1 = \angle ANP$, $\beta_2 = \angle MNC$, $\gamma_1 = \angle BPM$ e $\gamma_2 = \angle NPA$.

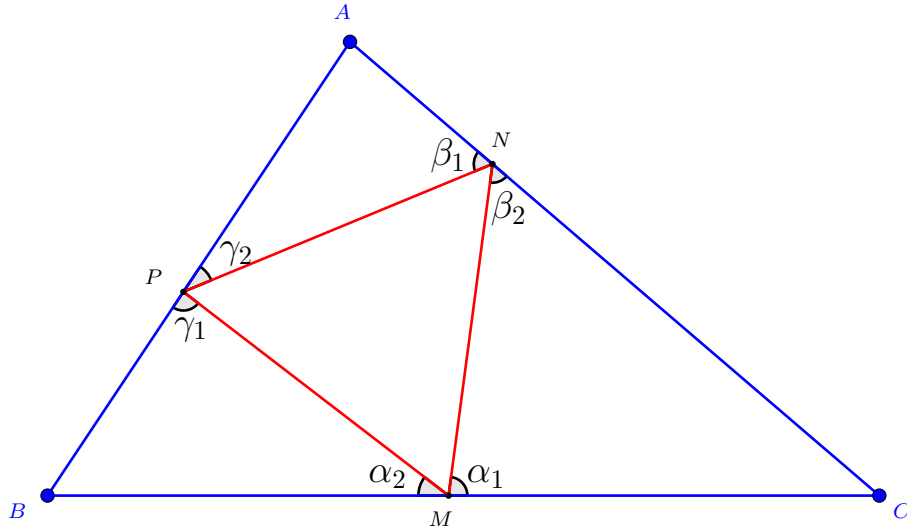


Figura 1.1: Triângulo genérico

Fonte: Autor (2026).

Assim é possível elaborar o sistema linear abaixo,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ \\ \beta_1 + \beta_2 = 120^\circ \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 120^\circ \\ \beta_1 + \gamma_2 = 180^\circ - \hat{A} \\ \gamma_1 + \alpha_2 = 180^\circ - \hat{B} \\ \alpha_1 + \beta_2 = 180^\circ - \hat{C} \end{cases} \quad (1.1)$$

Pode-se, expressar as medidas α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 e γ_2 em função de um único parâmetro e dos ângulos internos do $\triangle ABC$. Opta-se, sem perda de generalidade, por utilizar α_1 como variável independente, denominada simplesmente α .

Inicia-se o processo utilizando a primeira equação do sistema (1.1), que fornece diretamente:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ \implies \alpha_2 = 120^\circ - \alpha \quad (1.2)$$

Em seguida, combina-se a quinta equação de (1.1) com a igualdade (1.2) para isolar γ_1 :

$$\gamma_1 + \alpha_2 = 180^\circ - \hat{B} \implies \gamma_1 = \alpha + 60^\circ - \hat{B} \quad (1.3)$$

A terceira equação de (1.1) é então aplicada em conjunto com (1.3) para determinar γ_2 :

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 120^\circ \implies \gamma_2 = 60^\circ + \hat{B} - \alpha \quad (1.4)$$

Para encontrar a medida de β_2 , emprega-se a sexta equação de (1.1):

$$\alpha_1 + \beta_2 = 180^\circ - \hat{C} \implies \beta_2 = 180^\circ - \hat{C} - \alpha \quad (1.5)$$

Por fim, a segunda equação do sistema (1.1) é utilizada com (1.5) para obter β_1 :

$$\beta_1 + \beta_2 = 120^\circ \implies \beta_1 = \alpha + \hat{C} - 60^\circ \quad (1.6)$$

Dessa forma, assumindo $\alpha_1 = \alpha$ como parâmetro livre, obtém-se o seguinte sistema de relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = 120^\circ - \alpha \\ \beta_1 = \alpha + \hat{C} - 60^\circ \\ \beta_2 = 180^\circ - (\alpha + \hat{C}) \\ \gamma_1 = \alpha + 60^\circ - \hat{B} \\ \gamma_2 = 60^\circ + \hat{B} - \alpha \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Como os ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ e γ_2 pertencem ao intervalo $[0^\circ, 120^\circ]$, pode-se restringir o valor de α e estudar as configurações que ocorrem quando esses ângulos assumem seus valores máximo ou mínimo, utilizando as relações apresentadas em (1.7).

$$0^\circ \leq \beta_1 \leq 120^\circ \implies 0^\circ \leq \alpha + \hat{C} - 60^\circ \leq 120^\circ \implies 60^\circ - \hat{C} \leq \alpha \leq 180^\circ - \hat{C}$$

Do mesmo modo,

$$0^\circ \leq \gamma_1 \leq 120^\circ \implies 0^\circ \leq \alpha + 60^\circ - \hat{B} \leq 120^\circ \implies -60^\circ + \hat{B} \leq \alpha \leq 60^\circ + \hat{B}$$

Daí, o valor de α fica definido da seguinte maneira,

$$\alpha_{min} = 60^\circ - \hat{C} \leq \alpha \leq \min\{60^\circ + \hat{B}, 120^\circ\} = \alpha_{max}$$

Se $\alpha_1 = \alpha = 0^\circ$, então $\alpha_2 = 120^\circ$ e $\beta_1 = \alpha + \hat{C} - 60^\circ = \hat{C} - 60^\circ$, de onde se obtém $\hat{C} \geq 60^\circ$. Como, por hipótese, $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$, segue que $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C} \geq 60^\circ$ e, portanto, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$, isto é, $\triangle ABC$ é equilátero.

Se $\alpha_1 = \alpha = 120^\circ$, então $\alpha_2 = 0^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ + \hat{B} - \alpha = \hat{B} - 60^\circ$ e $\beta_1 = \alpha + \hat{C} - 60^\circ = \hat{C} + 60^\circ$, de modo que $\hat{B} \geq 60^\circ$ e $\hat{C} \leq 60^\circ$.

Se $\beta_1 = 0^\circ$, então $\beta_2 = 120^\circ$ e $\alpha + \hat{C} - 60^\circ = 0^\circ$, isto é, $\alpha + \hat{C} = 60^\circ$, o que implica $\hat{C} \leq 60^\circ$.

Se $\beta_1 = 120^\circ$, então $\beta_2 = 0^\circ$ e $\alpha + \hat{C} - 60^\circ = 120^\circ$, de onde se obtém $\alpha + \hat{C} = 180^\circ$,

como $\alpha \leq 120^\circ$ tem-se $180^\circ = \alpha + \hat{C} \leq 120^\circ + \hat{C}$, logo $\hat{C} \geq 60^\circ$, concluindo que $\alpha = 120^\circ$ e $\hat{C} = 60^\circ$, de modo que $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C} \geq 60^\circ$ e, portanto, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$, isto é, $\triangle ABC$ é equilátero.

Se $\gamma_1 = 0^\circ$, então $\gamma_2 = 120^\circ$ e $\alpha + 60^\circ - \hat{B} = 0^\circ$, de onde se obtém $\alpha = \hat{B} - 60^\circ$. Assim tem-se $\hat{B} \geq 60^\circ$ e $\beta_1 = \hat{B} + \hat{C} - 120^\circ$, o que implica $\hat{B} + \hat{C} \geq 120^\circ$. Como $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$ e $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ segue que $\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$ e, portanto $\hat{A} = 60^\circ$, resultando $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$, logo $\triangle ABC$ é equilátero.

Se $\gamma_1 = 120^\circ$, então $\gamma_2 = 0^\circ$ e $\alpha + 60^\circ - \hat{B} = 120^\circ$, de onde se obtém $\alpha = 60^\circ + \hat{B}$, como $\alpha \leq 120^\circ$, conclui-se que $\hat{B} \leq 60^\circ$ e consequentemente $\hat{C} \leq 60^\circ$.

A determinação das posições exatas dos pontos M , N e P requer a aplicação da lei dos senos. Essa abordagem é fundamental para relacionar os comprimentos dos lados do triângulo formado pela construção.

Consequentemente, as relações angulares previamente estabelecidas no sistema (1.7) constituem a base para essa aplicação. A integração dessas expressões com a lei dos senos permitirá encontrar as coordenadas que definem a localização precisa dos referidos pontos.

A aplicação da Lei dos Senos no triângulo $\triangle ABC$ resulta nas seguintes igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \hat{C}} = \frac{\overline{BC}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{CA}}{\sin \hat{B}} = 2r \quad (1.8)$$

onde r representa a medida do raio do círculo que circunscreve o triângulo $\triangle ABC$ e $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ representam os comprimentos dos lados AB , BC e CA respectivamente.

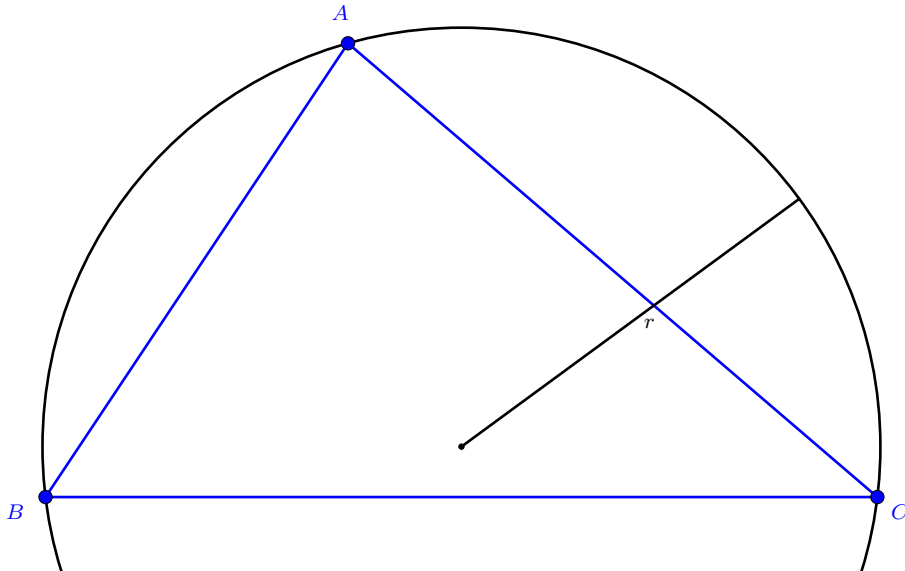


Figura 1.2: Raio do círculo que circunscreve o triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Posteriormente, aplica-se o mesmo princípio aos triângulos $\triangle MNC$, $\triangle BPM$ e $\triangle PAN$. Considerando a condição do $\triangle MNP$ ser equilátero, $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PM} = l$,

obtém-se as relações:

$$\text{Para o } \triangle MNC \quad \frac{l}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{\overline{CN}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{CM}}{\text{sen } \beta_2}; \quad (1.9)$$

$$\text{com } \triangle BPM \quad \frac{l}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{\overline{BM}}{\text{sen } \gamma_1}; \quad (1.10)$$

$$\text{e com } \triangle PAN \quad \frac{l}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \beta_1} = \frac{\overline{AN}}{\text{sen } \gamma_2}. \quad (1.11)$$

Da substituição das expressões definidas em (1.7) nas equações (1.9), (1.10) e (1.11) obtém-se o seguinte sistema de equações, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{l}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{\overline{CN}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{CM}}{\text{sen } (\alpha + \hat{C})} \\ \frac{l}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen } (\alpha + 60^\circ)} = \frac{\overline{BM}}{\text{sen } (\alpha + 60^\circ - \hat{B})} \\ \frac{l}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)} = \frac{\overline{AN}}{\text{sen } (60^\circ + \hat{B} - \alpha)} \end{cases} \quad (1.12)$$

Daí determinam-se as seguintes igualdades,

$$\frac{l}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{BM}}{\text{sen } (\alpha + 60^\circ - \hat{B})} \iff \overline{BM} = \frac{\text{sen } (\alpha + 60^\circ - \hat{B})}{\text{sen } \hat{B}} \cdot l \quad (1.13)$$

$$\frac{l}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{\overline{CM}}{\text{sen } (\alpha + \hat{C})} \iff \overline{CM} = \frac{\text{sen } (\alpha + \hat{C})}{\text{sen } \hat{C}} \cdot l \quad (1.14)$$

$$\frac{l}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{\overline{CN}}{\text{sen } \alpha} \iff \overline{CN} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \hat{C}} \cdot l \quad (1.15)$$

$$\frac{l}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AN}}{\text{sen } (60^\circ + \hat{B} - \alpha)} \iff \overline{AN} = \frac{\text{sen } (60^\circ + \hat{B} - \alpha)}{\text{sen } \hat{A}} \cdot l \quad (1.16)$$

$$\frac{l}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)} \iff \overline{AP} = \frac{\text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)}{\text{sen } \hat{A}} \cdot l \quad (1.17)$$

$$\frac{l}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen } (\alpha + 60^\circ)} \iff \overline{BP} = \frac{\text{sen } (\alpha + 60^\circ)}{\text{sen } \hat{B}} \cdot l \quad (1.18)$$

Por meio de manipulações algébricas das igualdades encontradas, obtém-se a formulação explícita para o lado l do triângulo $\triangle MNP$ equilátero inscrito e para os comprimentos

dos segmentos BM , CN e AP . Tais fórmulas são expressas em função do parâmetro angular α , dos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo $\triangle ABC$, e do raio r . Tais manipulações serão detalhadas a seguir.

Primeiramente, calculam-se as razões $\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$, $\frac{\overline{CN}}{\overline{CA}}$ e $\frac{\overline{AP}}{\overline{BA}}$ com o objetivo de eliminar o parâmetro l , utilizando as relações $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{BC}$, $\overline{CN} + \overline{AN} = \overline{AC}$ e $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{BA}$.

Para determinar a razão $\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$, procede-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} &= \frac{\overline{BM}}{\overline{BM}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} \\ &= 1 + \frac{\frac{\sin(\alpha + \hat{C})}{\sin \hat{C}} \cdot l}{\frac{\sin(\alpha + 60^\circ - \hat{B})}{\sin \hat{B}} \cdot l} = 1 + \frac{\sin \hat{B} \cdot \sin(\alpha + \hat{C})}{\sin \hat{C} \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \hat{B})} \\ &= \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \hat{B}) + \sin \hat{B} \cdot \sin(\alpha + \hat{C})}{\sin \hat{C} \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \hat{B})} \end{aligned}$$

Invertendo a fração, obtém-se:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \hat{B})}{\sin \hat{C} \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \hat{B}) + \sin \hat{B} \cdot \sin(\alpha + \hat{C})} \quad (1.19)$$

De modo análogo, para determinar $\frac{\overline{CN}}{\overline{CA}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} &= \frac{\overline{CN} + \overline{AN}}{\overline{CN}} \\ &= 1 + \frac{\overline{AN}}{\overline{CN}} \\ &= 1 + \frac{\frac{\sin(60^\circ + \hat{B} - \alpha)}{\sin \hat{A}} \cdot l}{\frac{\sin \alpha}{\sin \hat{C}} \cdot l} \\ &= 1 + \frac{\sin(60^\circ + \hat{B} - \alpha) \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \alpha + \sin(60^\circ + \hat{B} - \alpha) \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \cdot \sin \alpha} \end{aligned}$$

Invertendo a fração, obtém-se:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CA}} = \frac{\text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } \alpha + \text{sen } (60^\circ + \hat{B} - \alpha) \cdot \text{sen } \hat{C}} \quad (1.20)$$

Por fim, para determinar $\frac{\overline{AP}}{\overline{BA}}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BA}}{\overline{AP}} &= \frac{\overline{AP} + \overline{BP}}{\overline{AP}} \\ &= 1 + \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \\ &= 1 + \frac{\frac{\text{sen } (\alpha + 60^\circ)}{\text{sen } \hat{B}} \cdot l}{\frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)} \cdot l} \\ &= 1 + \frac{\text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } (\alpha + 60^\circ)}{\text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)} \implies \\ &= \frac{\text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } (\alpha + 60^\circ)}{\text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)} \end{aligned}$$

Invertendo a fração, obtém-se:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BA}} = \frac{\text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)}{\text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } (\alpha + 60^\circ)} \quad (1.21)$$

Note que a partir de (1.8),

$$\begin{cases} \frac{\overline{BC}}{\text{sen } \hat{A}} = 2r \implies BC = 2r \cdot \text{sen } \hat{A} \\ \frac{\overline{CA}}{\text{sen } \hat{B}} = 2r \implies CA = 2r \cdot \text{sen } \hat{B} \\ \frac{\overline{BA}}{\text{sen } \hat{C}} = 2r \implies BA = 2r \cdot \text{sen } \hat{C} \end{cases} \quad (1.22)$$

Daí, por (1.19), (1.20), (1.21) e (1.22), obtém-se as medidas de $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ e $\overline{AP}$,

$$\overline{BM} = 2r \cdot \frac{\text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } \hat{C} \cdot \text{sen } (\alpha + 60^\circ - B)}{\text{sen } \hat{C} \cdot \text{sen } (\alpha + 60^\circ - B) + \text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } (\alpha + \hat{C})} \quad (1.23)$$

$$\overline{CN} = 2r \cdot \frac{\sin \hat{B} \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \alpha}{\sin \hat{A} \cdot \sin \alpha + \sin (60^\circ + \hat{B} - \alpha) \cdot \sin \hat{C}} \quad (1.24)$$

$$\overline{AP} = 2r \cdot \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)}{\sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \sin \hat{A} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ)} \quad (1.25)$$

Assim, pode-se encontrar a medida l do lado do triângulo $\triangle MNP$, em função de α , $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e r , substituindo (1.23), (1.24) e (1.25) em (1.13), (1.15) e (1.17) respectivamente,

$$l = \frac{\overline{BM} \cdot \sin \hat{B}}{\sin (\alpha + 60^\circ - \hat{B})} \implies l(\alpha) = \frac{2r \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{C} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ - \hat{B}) + \sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C})} \quad (1.26)$$

$$l = \frac{\overline{CN} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \alpha} \implies l(\alpha) = \frac{2r \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \cdot \sin \alpha + \sin (60^\circ + \hat{B} - \alpha) \cdot \sin \hat{C}} \quad (1.27)$$

$$l = \frac{\overline{AP} \cdot \sin \hat{A}}{\sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ)} \implies l(\alpha) = \frac{2r \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \sin \hat{A} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ)} \quad (1.28)$$

De posse destes resultados, uma pergunta natural refere-se aos valores extremais de $l(\alpha)$. A seguir, estuda-se o comportamento dessa função para determinar seus valores extremos, identificando em particular o valor de α que minimiza $l(\alpha)$ e o correspondente menor triângulo equilátero inscrito em $\triangle ABC$. Como na função $l(\alpha)$ o numerador é constante, basta então estudar os valores extremos da função $f(\alpha)$,

$$f(\alpha) = \sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \sin \hat{A} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ) \quad (1.29)$$

$$= \sin \hat{A} \cdot \sin \alpha + \sin (60^\circ + \hat{B} - \alpha) \cdot \sin \hat{C} \quad (1.30)$$

$$= \sin \hat{C} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ - \hat{B}) + \sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C}) \quad (1.31)$$

quando f é máxima (ou mínima), o triângulo inscrito tem lado mínimo (ou máximo).

Como, $\sin \hat{A} \geq 0$, $\sin \hat{B} \geq 0$, $\sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) \geq 0$ e $\sin (\alpha + 60^\circ) \geq 0$, a função f é sempre positiva quando $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, note que,

$$f'(\alpha) = \sin \hat{B} \cdot \cos (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \sin \hat{A} \cdot \cos (\alpha + 60^\circ)$$

$$f''(\alpha) = -\sin \hat{B} \cdot \sin (\alpha + \hat{C} - 60^\circ) - \sin \hat{A} \cdot \sin (\alpha + 60^\circ) = -f(\alpha) < 0$$

A partir dessas constatações, conclui-se que, a função f é estritamente côncava quando $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, tendo assim um único máximo local. Então se existir $\alpha^* \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ com $f'(\alpha^*) = 0$, então $f(\alpha^*)$ é o valor máximo. Caso contrário f é estritamente monótona

no intervalo e assume os valores máximo e mínimo nas extremidades (o que não ocorre, como é mostrado abaixo). Portanto, se f é concava e $f(x) > 0$ então a função $\frac{1}{f(x)}$ é convexa. Logo $l(\alpha)$ é convexa, assumindo seu valor mínimo em $l(\alpha^*)$.

Substituindo $\hat{A} = \sin(180^\circ - \hat{A}) = \sin(\hat{B} + \hat{C})$ em (1.29) e realizando a expansão da expressão tem-se,

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \sin \hat{B} \sin(\alpha + \hat{C} - 60^\circ) + \sin(\hat{B} + \hat{C}) \sin(\alpha + 60^\circ) \\
 &= \sin \hat{B} (\sin \alpha \cos(\hat{C} - 60^\circ) + \sin(\hat{C} - 60^\circ) \cos \alpha) \\
 &\quad + (\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cos \hat{B}) (\sin \alpha \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos \alpha) \\
 &= \sin \hat{B} (\sin \alpha (\cos \hat{C} \cos 60^\circ + \sin \hat{C} \sin 60^\circ) + \cos \alpha (\sin \hat{C} \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cos \hat{C})) \\
 &\quad + \sin \alpha \sin \hat{B} \cos \hat{C} \cos 60^\circ + \cos \alpha \sin \hat{B} \cos \hat{C} \sin 60^\circ + \sin \alpha \cos \hat{B} \sin \hat{C} \cos 60^\circ \\
 &\quad + \cos \alpha \cos \hat{B} \sin \hat{C} \sin 60^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \sin \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \hat{B} \sin \hat{C} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \sin \hat{B} \cos \hat{C} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \cos \hat{B} \sin \hat{C} \\
 &= \sin \alpha (\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{1}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C}) \\
 &\quad + \cos \alpha (\frac{1}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C})
 \end{aligned}$$

Derivando obtém-se,

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \cos \alpha (\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{1}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C}) \\
 &\quad - \sin \alpha (\frac{1}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C})
 \end{aligned}$$

Logo, o ponto critico α^* é dado por,

$$\alpha^* = \arctan \frac{\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \frac{1}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{C} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{C}} \quad (1.32)$$

Note na equação (1.32) que, se $\hat{B} = \hat{C}$, então,

$$\begin{aligned}
 \alpha^* &= \arctan \frac{\sin \hat{B} \cos \hat{B} + \frac{1}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{B}}{\frac{1}{2} \sin \hat{B} \sin \hat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{B}} = \arctan \frac{\frac{3}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \hat{B}^2}{\frac{1}{2} \sin \hat{B}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{B}} \\
 &= \arctan \frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{B} + \frac{1}{2} \sin \hat{B}^2 \right)}{\frac{1}{2} \sin \hat{B}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{B} \sin \hat{B}} = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ
 \end{aligned}$$

Além disso, os autores (Andrica; Bagdasar; Marinescu, 2024), conjecturam que $\alpha^* \in [60^\circ, 90^\circ]$. Na tabela 1.1 são exibidos alguns exemplos que fortalecem a conjectura.

$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	α^*
177°	2°	1°	76.76°
119.5°	60°	0.5°	89.51°
119°	60°	1°	89.02°
118.5°	60°	1.5°	88.55°
120°	45°	15°	75°
90.5°	89°	0.5°	89.75°
90°	60°	30°	70.89°
90°	55°	35°	67.29°
80°	70°	30°	73.66°
72°	72°	36°	73.45°
70°	60°	50°	63.36°

Tabela 1.1: Exemplos de triângulos $\triangle ABC$

1.2 Método geométrico

A abordagem desenvolvida por Russell (2015) tem com base os conceitos de círculo de Apolônio e pontos de Apolônio. O seu método consiste na utilização desses conceitos combinados a outras definições e com a transformação geométrica *Semelhança espiral*, onde a integração desses elementos constitui o procedimento geométrico proposto.

Definição 1.1 (Pontos inversos com relação a um círculo). (Akopyan; Zaslavsky, 2007) Os pontos P e Q são inversos com relação a um círculo ω de centro O e raio r quando o ponto Q está situado em $\overrightarrow{OP}$ e é tal que $\overline{OQ} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$.

Note que os pontos pertencentes a um círculo ω de centro O são inversos deles mesmo.

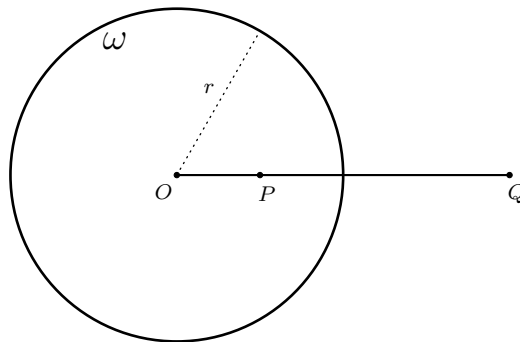
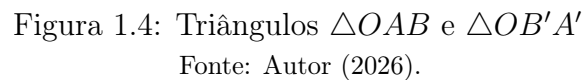


Figura 1.3: Pontos inversos com relação a um círculo

Fonte: Autor (2026).



Portanto os lados OA e OB são proporcionais, respectivamente, a OB' e OA' . Além disso, $\hat{BOA} \equiv \hat{A'OB'}$. Logo, pelo critério lado-ângulo-lado (LAL), os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OB'A'$ são semelhantes. $\square$

Demonstração. Como P e Q são inversos um do outro em relação ao círculo ω e A é inverso dele mesmo então os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OQA$ são semelhantes pelo Lema 1.1, e em particular, $O\hat{Q}A = O\hat{A}P$. Como O é o centro de ω , o triângulo $\triangle AOR$ é isósceles e,

portanto, $O\hat{A}R = O\hat{R}A$. Portanto tem-se que, $P\hat{A}R = O\hat{A}R - O\hat{A}P = O\hat{R}A - O\hat{Q}A = R\hat{A}Q$, como desejado. $\square$

A partir do Lema 1.2 define-se.

Definição 1.2 (Círculo de Apolônio do segmento AB). (Akopyan; Zaslavsky, 2007) O lugar geométrico ω constituído por todos os pontos P que mantêm uma razão constante (diferente de 1) entre as distâncias aos pontos A e B , $\frac{PA}{PB} = k \neq 1$, é chamado de círculo de Apolônio do segmento AB na razão k .

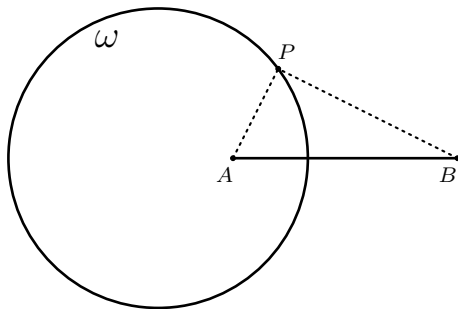


Figura 1.6: Círculo de Apolônio do segmento AB

Fonte: Autor (2026).

Num triângulo $\triangle ABC$, o conjunto dos pontos P que satisfazem $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC}$ formam o círculo de Apolônio do lado AB . De acordo com Akopyan e Zaslavsky (2007) o círculo de Apolônio do lado AB passa pelos pés das bissetrizes interna e externa do ângulo $\hat{C}$, que aparecem como extremidades opostas de um diâmetro.

A partir do círculo de Apolônio obtém-se a seguinte definição,

Definição 1.3 (Pontos de Apolônio). (Akopyan; Zaslavsky, 2007) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e C_1 , C_2 e C_3 os círculos de Apolônio dos segmentos AB , BC e CA , respectivamente. Os pontos P_1 e P_2 dados pela interseção entre pelo menos dois desses círculos, são denominados de pontos de Apolônio do triângulo $\triangle ABC$.

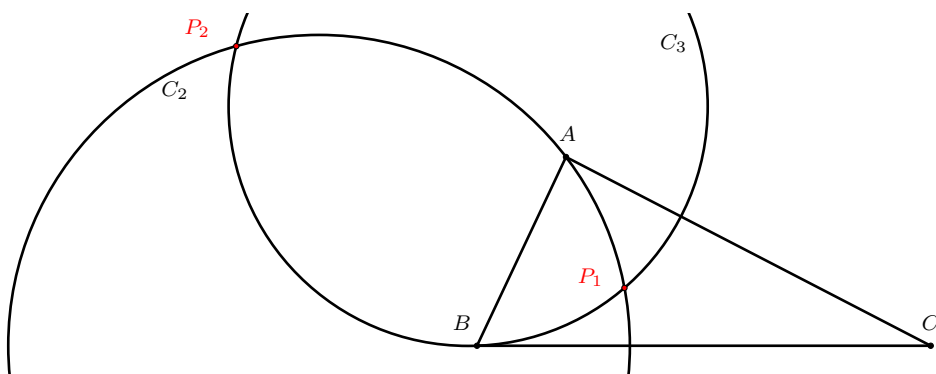


Figura 1.7: Pontos de Apolônio do $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

É possível mostrar que esses pontos satisfazem $\overline{P_iA} \cdot \overline{BC} = \overline{P_iB} \cdot \overline{AC} = \overline{P_iC} \cdot \overline{AB}$, para $i = 1, 2$.

Definição 1.4 (Triângulo pedal). (Akopyan; Zaslavsky, 2007) Dados um triângulo $\triangle ABC$ e P um ponto qualquer, denominamos de triângulo pedal do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$, o triângulo $\triangle DEF$, no qual D , E e F são os pés das perpendiculares de P até os lados BC , CA e AB ou seus prolongamentos, respectivamente.

D , E e F são chamados de projeções de P sobre os lados BC , CA e AB ou seus prolongamentos, respectivamente.

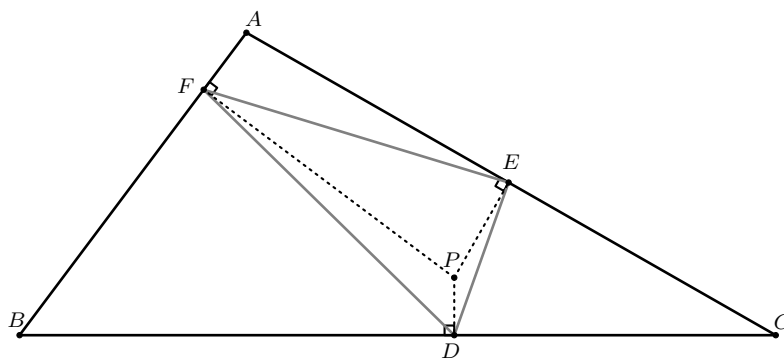


Figura 1.8: Triângulo pedal do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$: D , E e F pertencem aos lados de $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

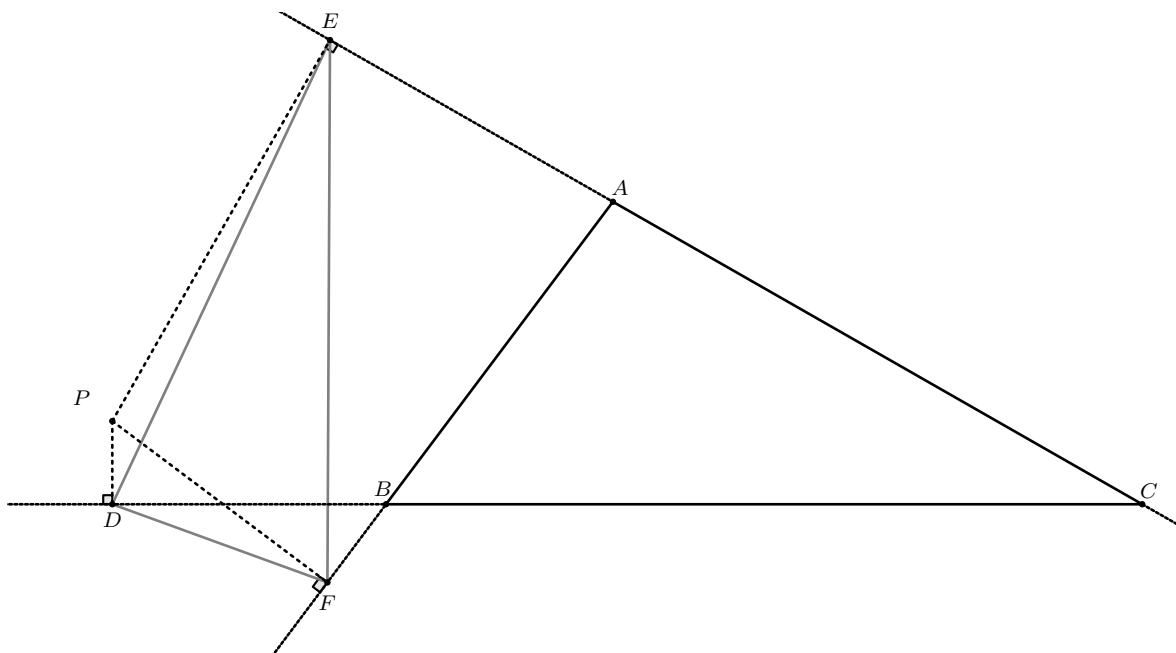


Figura 1.9: Triângulo pedal do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$: D , E e F pertencem aos prolongamentos dos lados de $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Proposição 1.1. (Akopyan; Zaslavsky, 2007) Os triângulos pedais dos pontos de Apolônio de um triângulo $\triangle ABC$ são equiláteros.

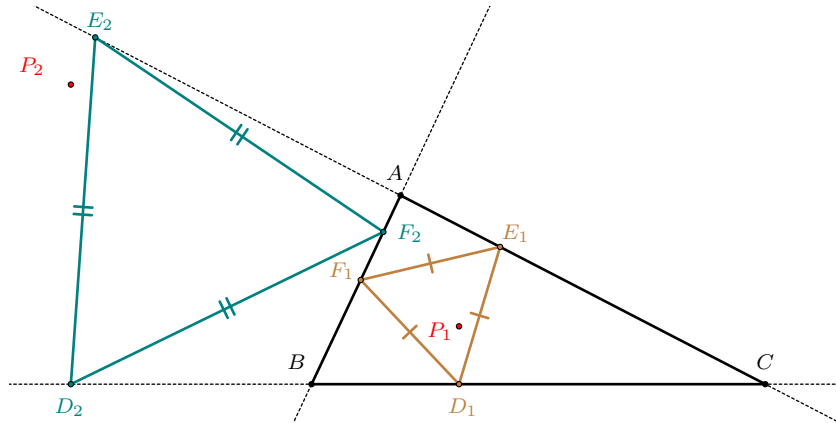


Figura 1.10: Triângulos pedais dos pontos de Apolônio

Fonte: Autor (2026).

Demonstração. Sejam P_i os pontos de Apolônio do triângulo $\triangle ABC$, D_i , E_i e F_i as projeções de P_i em BC , CA e AB ou seus prolongamentos, respectivamente, para $i = 1, 2$.

Na Figura 1.10, observe que o quadrilátero $CD_iP_iE_i$ é cíclico, inscrito na circunferência de diâmetro P_iC , pois $P_i\hat{D}_iC = P_i\hat{E}_iC = 90^\circ$. Assim o comprimento da corda D_iE_i é dado por duas vezes o raio dessa circunferência, $\frac{\overline{P_iC}}{2}$, multiplicado pelo seno do ângulo inscrito $\hat{C}$, obtendo-se,

$$\overline{D_iE_i} = 2 \cdot \frac{\overline{P_iC}}{2} \cdot \sin \hat{C} = \overline{P_iC} \cdot \sin \hat{C} \quad (1.33)$$

Pela lei dos senos no triângulo $\triangle ABC$,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \hat{C}} = 2r \implies \sin \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{2r} \quad (1.34)$$

onde r é o raio da circunferência circunscrita do triângulo $\triangle ABC$.

Assim substituindo (1.34) em (1.33) tem-se,

$$\overline{D_iE_i} = \overline{P_iC} \cdot \sin \hat{C} = \frac{\overline{P_iC} \cdot \overline{AB}}{2r}$$

Analogamente pode-se encontrar,

$$\overline{D_iF_i} = \overline{P_iB} \cdot \sin \hat{B} = \frac{\overline{P_iB} \cdot \overline{AC}}{2r} \quad \text{e} \quad \overline{E_iF_i} = \overline{P_iA} \cdot \sin \hat{A} = \frac{\overline{P_iA} \cdot \overline{BC}}{2r}$$

Como P_i são pontos de Apolônio, $\overline{P_iA} \cdot \overline{BC} = \overline{P_iB} \cdot \overline{AC} = \overline{P_iC} \cdot \overline{AB}$, para $i = 1, 2$,

ou seja, tem-se que $\overline{D_i E_i} = \overline{D_i F_i} = \overline{E_i F_i}$. Logo, isso implica que os triângulo pedais são equiláteros. $\square$

Utilizando a semelhança espiral (Definição 0.5) aplicada aos vértices D_i , E_i e F_i , pode-se demonstrar que os pontos obtidos, D'_i , E'_i e F'_i , estão situados sobre os lados BC , AC e AB (ou seus prolongamentos) do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. Consequentemente, o $\triangle D'_i E'_i F'_i$ mantém a propriedade de ser equilátero e simultaneamente inscrito em $\triangle ABC$. Também, é possível mostrar que, os baricentros desses triângulos pertencem a uma reta perpendicular à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$ (Definição 0.6).

Proposição 1.2. (Russell, 2015) Sejam um triângulo $\triangle ABC$, P_i os pontos de Apolônio de $\triangle ABC$ e D_i , E_i e F_i os vértices do triângulo pedal de P_i no $\triangle ABC$, para $i = 1, 2$. Se D'_i , E'_i e F'_i são obtidos por uma semelhança espiral de centro P_i , coeficiente $k = \sec \theta$ e ângulo θ aplicada aos vértices D_i , E_i e F_i , então D'_i , E'_i e F'_i pertencem aos lados BC , AC e AB ou seus prolongamentos, respectivamente.

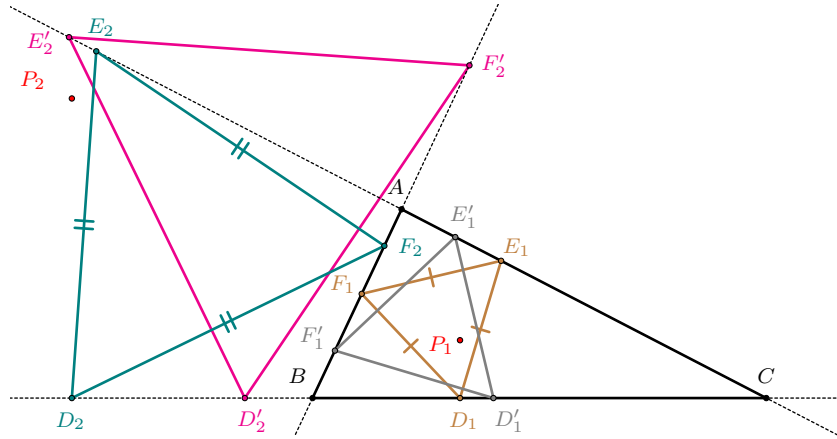


Figura 1.11: Semelhança espiral no triângulo pedal dos pontos de Apolônio
Fonte: Autor (2026).

Demonstração. Sabendo que $E_i \hat{P}_i E'_i = \theta$ e $\frac{P_i E'_i}{P_i E_i} = \sec \theta$, tem-se que $\frac{P_i E_i}{P_i E'_i} = \cos \theta$ e consequentemente $E'_i \hat{E}_i P_i = 90^\circ$. Portanto, E'_i está no lado AC (ou seu prolongamento), pois por $\overrightarrow{AE'_i}$ ser uma reta perpendicular à reta $\overrightarrow{P_i E_i}$ e $E'_i \hat{E}_i P_i = 90^\circ$ tem-se que $E'_i \in \overrightarrow{AE'_i}$ caso contrário existiram duas retas perpendiculares à $\overrightarrow{P_i E_i}$ passando por E_i , um absurdo. De maneira semelhante obtêm-se que, F_i e D_i estão respectivamente nos lados AB e BC (ou seus prolongamentos). $\square$

Lema 1.3. (Russell, 2015) Sejam D_i , E_i e F_i os vértices do triângulo pedal do ponto de Apolônio P_i de um triângulo $\triangle ABC$ e T_i o baricentro do triângulo $\triangle D_i E_i F_i$, para $i = 1, 2$. Então, o baricentro T'_i do triângulo $\triangle D'_i E'_i F'_i$ (onde os vértices D'_i , E'_i e F'_i são obtidos por uma semelhança espiral de centro P_i , coeficiente $k = \sec \theta$ e ângulo θ aplicada aos vértices D_i , E_i e F_i) está em uma reta que passa por T_i e é ortogonal a $P_i T_i$, para $i = 1, 2$.

Utilizando o mesmo argumento da Proposição 1.2 o Lema 1.3 pode ser provado sem problemas.

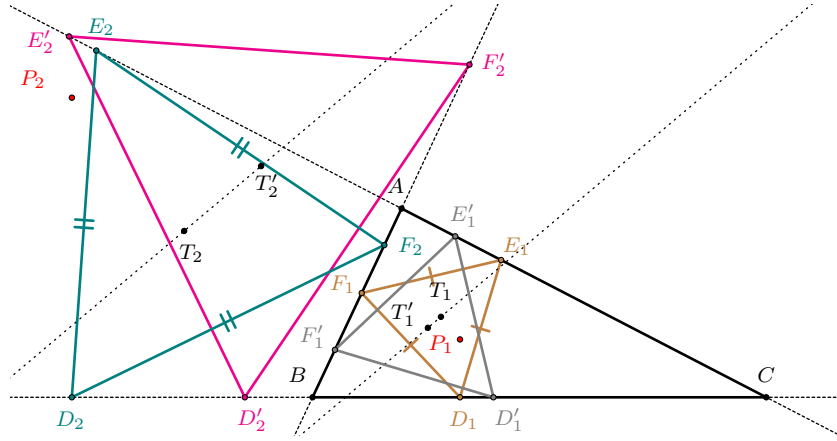


Figura 1.12: Reta dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos ao $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Note que $\frac{\overline{D'_i E'_i}}{\overline{P_i T'_i}} = \frac{\overline{D_i E_i}}{\overline{P_i T_i}}$, pois estão ligados por uma semelhança espiral. Logo, o menor triângulo equilátero inscrito é obtido quando $\overline{P_i T'_i}$ é mínimo, ou seja, quando é ortogonal à reta dos baricentros dos triângulos equiláteros. Portanto, T_i é o baricentro do menor triângulo equilátero inscrito, que é o triângulo pedal de P_i , para $i = 1, 2$.

Foi mostrado que os baricentros T_i e T'_i estão sobre uma reta ortogonal a $\overrightarrow{P_i T_i}$, para $i = 1, 2$. Agora é preciso mostrar que essa reta é ortogonal à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$, ou seja, mostrar que $\overrightarrow{P_i T_i}$, para $i = 1, 2$, é paralelo à reta de Euler. Para isso, primeiramente é preciso definir Simediana, ponto de Lemoine e diâmetro de Brocard.

Definição 1.5 (Simediana). (Altshiller-Court, 2007) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo, AM_A , BM_B e CM_C as medianas de $\triangle ABC$ e AB_A , BB_B e CB_C as bissetrizes internas de $\triangle ABC$. Diz-se que a ceviana AS_A é a simediana relativa ao vértice A se, AB_A bissecta o ângulo $S_A \hat{A} M_A$. De modo análogo, definem-se BS_B e CS_C como as simedianas relativas aos vértices B e C , respectivamente. Todo triângulo possui três simedianas.

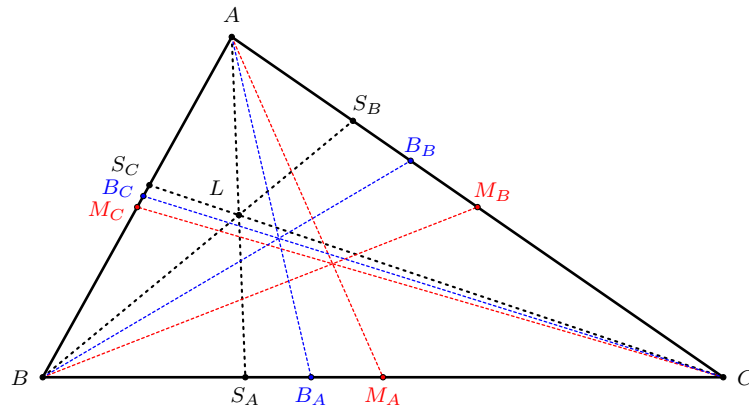


Figura 1.13: Simedianas do triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Definição 1.6 (Ponto de Lemoine). (Altshiller-Court, 2007) O ponto comum às três simedianas de um triângulo é chamado de ponto simediano, ou ponto de Lemoine L , do triângulo. (Ver Figura 1.13).

Definição 1.7 (Diâmetro de Brocard). (Altshiller-Court, 2007) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo, O o seu circuncentro e L o seu ponto de Lemoine. Denomina-se diâmetro de Brocard de $\triangle ABC$ o segmento DE , que é o diâmetro da circunferência circunscrita de $\triangle ABC$ que passa por L .

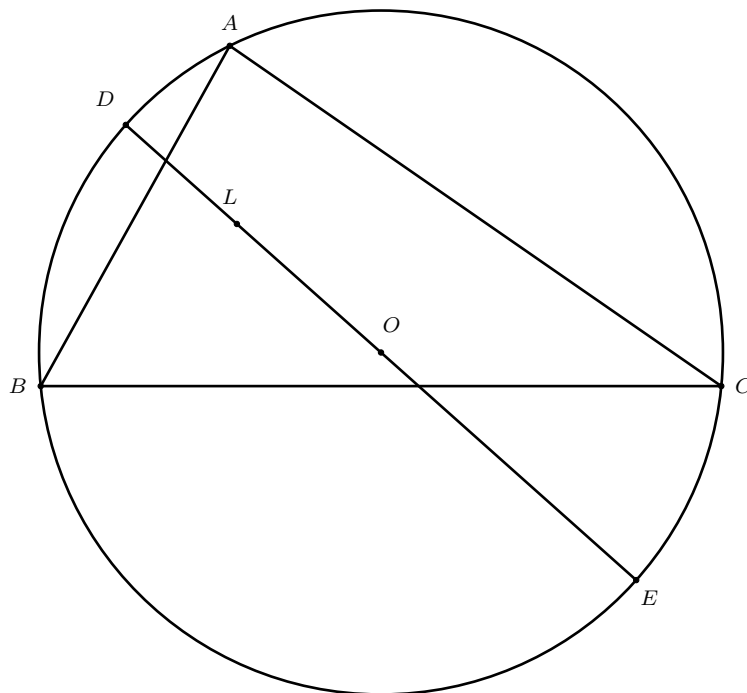


Figura 1.14: Diâmetro de Brocard de $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Os pontos Apolônio de um triângulo estão localizados no diâmetro de Brocard do triângulo, uma demonstração foi feita por Altshiller-Court (2007). Assim, tem-se que o circuncentro, os pontos de Apolônio e o ponto Lemoine de um triângulo $\triangle ABC$ são colineares.

Honsberger (1995) demonstra que as distâncias do ponto Lemoine de um triângulo $\triangle ABC$ aos seus lados são proporcionais aos próprios lados do triângulo. Mais precisamente, sejam $\triangle ABC$ um triângulo, L o ponto de Lemoine do triângulo $\triangle ABC$ e L_A , L_B e L_C os vértices do triângulo pedal de L . As distâncias de L aos lados do triângulo são proporcionais aos respectivos lados, e L é o único ponto, dentro do triângulo, que possui essa propriedade. Denotando $\overrightarrow{LL_A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{LL_B} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{LL_C} = \vec{c}$ obtêm-se,

$$\frac{||\vec{a}||}{BC} = \frac{||\vec{b}||}{CA} = \frac{||\vec{c}||}{AB}$$

onde $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ e $\|\vec{c}\|$ são os comprimentos dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ respectivamente. (Ver Figura 1.15)

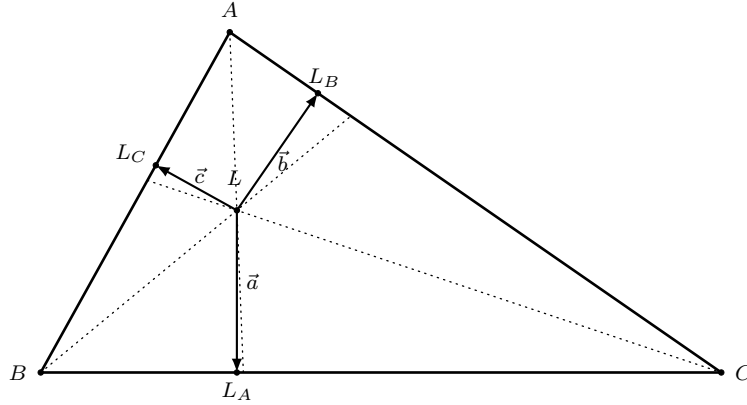


Figura 1.15: Vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

Fonte: Autor (2026).

Como $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ e $\|\vec{c}\|$ são proporcionais aos comprimentos dos lados BC , AC e AB respectivamente, a soma vetorial $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ é igual a zero.

Agora deseja-se saber qual seria a soma vetorial similar para o circuncentro de $\triangle ABC$. Veja na figura 1.16 os vetores $\overrightarrow{OM_a}$, $\overrightarrow{OM_b}$ e $\overrightarrow{OM_c}$, onde O é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$ e M_a , M_b e M_c são os vértices do triângulo pedal de O nos lados AC , BC e AB respectivamente.

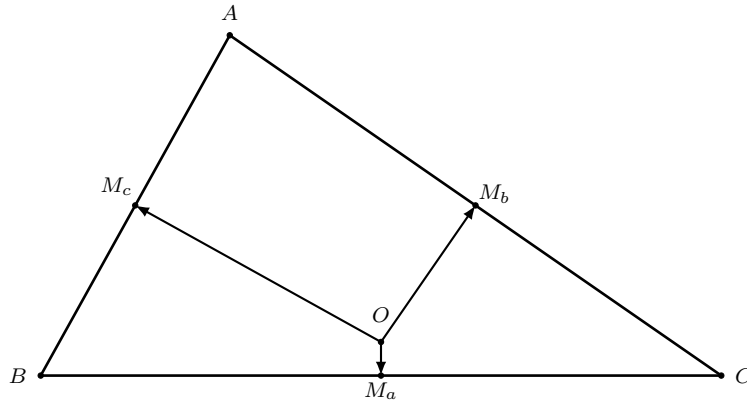


Figura 1.16: Vetores $\overrightarrow{OM_a}$, $\overrightarrow{OM_b}$ e $\overrightarrow{OM_c}$

Fonte: Autor (2026).

Como M_a é o ponto médio de BC , tem-se $\overrightarrow{BM_a} = \overrightarrow{M_aC}$. Escrevendo esses vetores em função da relação com O obtêm-se,

$$\overrightarrow{BM_a} = \overrightarrow{OM_a} - \overrightarrow{OB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{M_aC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_a}.$$

Igualando,

$$\overrightarrow{OM_a} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_a} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM_a},$$

isto é,

$$\overrightarrow{OM_a} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}.$$

De modo análogo, como M_b e M_c são pontos médios de AC e AB , obtêm-se

$$\overrightarrow{OM_b} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OM_c} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Na Figura 1.17 sendo O , G e H o circuncentro, o baricentro e o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, quer-se mostrar que, $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{OM_b} + \overrightarrow{OM_c}$.

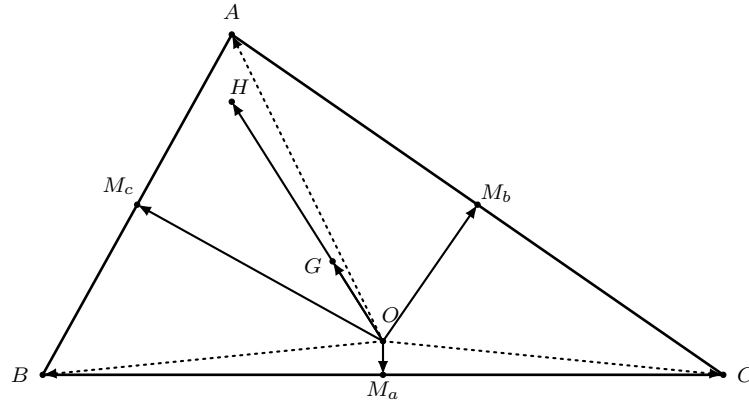


Figura 1.17: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{OM_b} + \overrightarrow{OM_c}$

Fonte: Autor (2026).

Fazendo a soma dos vetores $\overrightarrow{OM_a}$, $\overrightarrow{OM_b}$ e $\overrightarrow{OM_c}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{OM_b} + \overrightarrow{OM_c} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \\ &= \frac{2 \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{2} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

Sendo G o baricentro do triângulo $\triangle ABC$, então por Gómez, Frensel e Santos Crissaff (2017),

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{\overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{OM_b} + \overrightarrow{OM_c}}{3}.$$

Sabendo que O , G e H estão na reta de Euler, e que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ tem-se, $\overrightarrow{OH} =$

$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{OM_b} + \overrightarrow{OM_c}$, logo a soma dos vetores aponta para o ortocentro, ou seja para a reta de Euler.

Sabe-se agora que a soma dos vetores que ligam o ponto simediano aos vértices de seu triângulo pedal é nula e por outro lado, a soma dos vetores que ligam o circuncentro aos vértices do respectivo triângulo pedal coincide com o vetor que une o circuncentro ao ortocentro, isto é, um vetor paralelo à reta de Euler, na qual ambos os pontos estão contidos. Assim concluiu-se, que para qualquer outro ponto X que esteja na reta $\overleftrightarrow{OL}$, a soma dos vetores que ligam o ponto X aos vértices de seu triângulo pedal é um múltiplo de um vetor fixo na direção da reta de Euler.

Agora considere um triângulo $\triangle ABC$, P_i os pontos de Apolônio de $\triangle ABC$ e D_i , E_i e F_i os vértices do triângulo pedal de P_i no $\triangle ABC$, para $i = 1, 2$. Como os pontos P_i pertencem a $\overleftrightarrow{OL}$, ao somar os três vetores de P_i aos vértices de seu triângulo pedal o resultante está na direção da reta de Euler.

Para cada ponto P_i considere seu triângulo pedal, com vértices D_i, E_i, F_i e baricentro T_i , para $i = 1, 2$. Em termos vetoriais, tem-se

$$\overrightarrow{P_i D_i} + \overrightarrow{P_i E_i} + \overrightarrow{P_i F_i} = 3 \overrightarrow{P_i T_i},$$

isto é, a soma dos vetores que ligam P_i aos vértices do triângulo equilátero aponta na direção do vetor $\overrightarrow{P_i T_i}$, para $i = 1, 2$. Por outro lado, pelas propriedades estabelecidas anteriormente para pontos pertencentes à reta $\overleftrightarrow{OL}$, essa mesma soma deve ser paralela à reta de Euler de $\triangle ABC$. Conclui-se, portanto, que $\overrightarrow{P_i T_i}$ é paralelo à reta de Euler, de modo que a reta $\overleftrightarrow{P_i T_i}$ é paralela à reta de Euler, para $i = 1, 2$. Portanto, as retas que contêm os baricentros dos triângulos equiláteros inscritos são ortogonais à reta de Euler.

Capítulo 2

Quadrados e Triângulos

Neste capítulo, é apresentada a seguinte definição, segundo Bailey e Detemple (1998).

Definição 2.1. um quadrado é inscrito em um triângulo qualquer, quando um lado do quadrado está contido em um lado do triângulo e os outros dois vértices do quadrado pertencem aos outros dois lados do triângulo.

2.1 Quadrados inscritos em triângulos

Inicia-se o estudo da inscrição de quadrados em triângulos com uma condição de existência para essa definição, como é apresentada na proposição a seguir.

Proposição 2.1. Seja um triângulo $\triangle ABC$. Se existe um quadrado $\square DEFG$ inscrito em $\triangle ABC$ tal que $FG \subset BC$, $D \in AC$ e $E \in AB$, então nenhum dos ângulos do lado BC , isto é, $\hat{A}BC$ e $\hat{A}CB$, é obtuso.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\hat{A}BC > 90^\circ$. Na figura 2.1 sejam r a reta suporte de BC e s a reta perpendicular a r que passa por B .

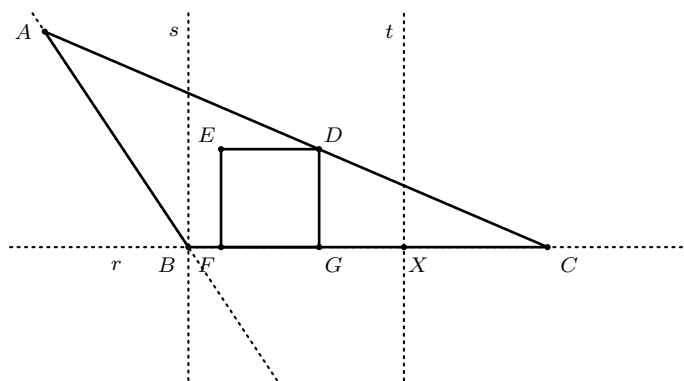


Figura 2.1: $\triangle ABC$ com $\hat{A}BC > 90^\circ$

Fonte: Autor (2026).

Como $\hat{A}BC$ é obtuso, o lado AB está contido no semiplano determinado por s que não contém o ponto C ; em particular, AB se inclina para fora do interior do triângulo em relação à perpendicular erguida em B .

Considere agora um ponto X qualquer no segmento aberto BC . A reta t , perpendicular a BC que passa por X , é paralela a s , de modo que a interseção de t com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ ocorre sempre no mesmo semiplano que contém A em relação a s . Pela posição de AB , essa interseção situa-se no prolongamento de AB além de B , isto é, não pertence ao segmento AB propriamente dito.

No quadrado inscrito $\square DEFG$, o lado FG está contido em BC , e os lados EF e DG são perpendiculares a BC . Logo, o vértice E é a interseção de uma reta perpendicular a BC que passa por um ponto $F \in BC$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Pelo parágrafo anterior, tal interseção só pode ocorrer no prolongamento de AB além de B , o que contradiz a hipótese $E \in AB$.

Portanto, $\hat{A}BC$ não pode ser obtuso. Um argumento análogo, trocando os papéis de B e C , mostra que $\hat{A}CB$ também não pode ser obtuso. Logo, se existe um quadrado $\square DEFG$ inscrito em $\triangle ABC$ com $FG \subset BC$, $D \in AC$ e $E \in AB$, então ambos os ângulos da base são não obtusos. $\square$

Como consequência direta da proposição 2.1, obtêm-se:

Corolário 2.1. Seja T um triângulo:

- (a) Se T é um triângulo acutângulo, então ele possui três quadrados inscritos, cada quadrado com um lado contido em um lado distinto do triângulo;
- (b) Se T é um triângulo retângulo, então ele possui dois quadrados inscritos, um quadrado com dois lados contidos pelos catetos e outro com um lado contido pela hipotenusa;
- (c) Se T é um triângulo obtusângulo, então ele possui apenas um quadrado inscrito com lado contido no lado oposto ao ângulo obtuso.

A fórmula para o lado do quadrado inscrito aparece na literatura ao longo dos anos, sendo mencionada em forma mais geral por McDowell (1863), e em referências mais recentes como Reich (1970), Bailey e Detemple (1998) e Wetzel (2002).

Lema 2.1 (Fórmula clássica para quadrado inscrito). (Wetzel, 2002) Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ não obtusos e área igual a Δ . O quadrado $\square DEFG$ com lado contido em BC e inscrito à $\triangle ABC$ tem medida de lado:

$$s_a = \frac{2\Delta}{a + h_a} \quad (2.1)$$

onde h_a é a medida da altura de $\triangle ABC$ relativa ao lado BC .

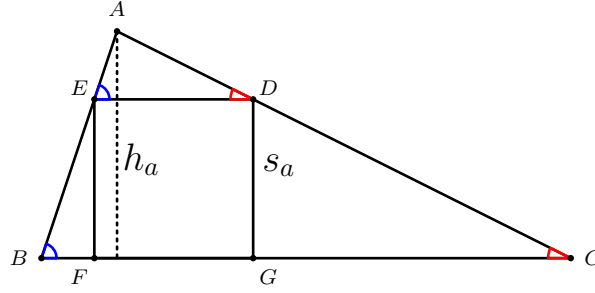


Figura 2.2: $\square DEFG$ com lado contido em BC e inscrito à $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Demonstração. Na Figura 2.2 note que, o triângulo $\triangle AED$ sobre o quadrado $\square DEFG$ é semelhante ao triângulo $\triangle ABC$. Isso ocorre pois, pelo teorema de Tales, os ângulos da base desses triângulos são congruentes, o que garante a semelhança pelo critério ângulo-ângulo (AA).

Por semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AED$ satisfazem:

$$\begin{aligned} \frac{h_a - s_a}{h_a} &= \frac{s_a}{a} \\ h_a - s_a &= \frac{h_a \cdot s_a}{a} \\ h_a &= s_a + \frac{h_a \cdot s_a}{a} \\ h_a &= s_a \cdot \left(1 + \frac{h_a}{a}\right) \\ h_a &= s_a \cdot \left(\frac{a + h_a}{a}\right) \\ s_a &= \frac{a \cdot h_a}{a + h_a} \end{aligned}$$

Como $2\Delta = a \cdot h_a$, temos:

$$s_a = \frac{2\Delta}{a + h_a}$$

□

Em 1836, Brune (1836) investigou a questão de encontrar o maior quadrado inscrito em um triângulo dado.

Teorema 2.1 (Teorema de Brune). Dado um triângulo T :

- (a) Se T é acutângulo, então o quadrado inscrito de maior lado tem um lado contido no menor lado de T ;
- (b) Se T é retângulo, então o quadrado inscrito que tem lados contidos nos catetos tem lado maior que o quadrado com um lado sobre a hipotenusa;
- (c) Se T é obtusângulo, existe apenas um quadrado inscrito, que é o de maior lado.

Demonstração. O item (c) é trivial pela proposição 2.1. Para os itens (a) e (b), considere T como o triângulo $\triangle ABC$, Figura 2.3, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e h_a , h_b são as alturas de $\triangle ABC$ relativas aos lados BC e AC respectivamente e suponha que T é um triângulo acutângulo ou retângulo.

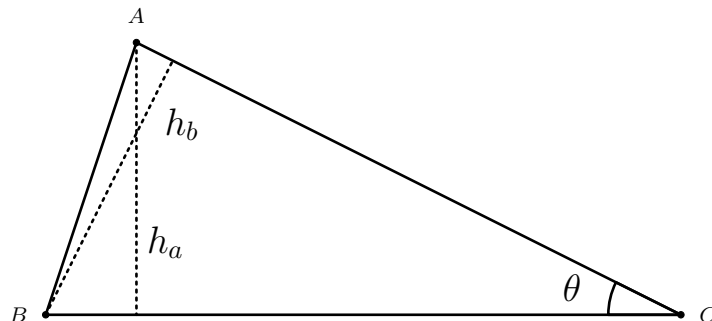


Figura 2.3: Alturas relativas aos lados BC e AC

Fonte: Autor (2026).

Para determinar qual quadrado inscrito em T é o maior, deve-se analisar como a medida do lado do quadrado inscrito depende da medida do lado onde ele está contido, observando assim o denominador da equação (2.1).

Se $a > b$, e θ é o ângulo entre os lados de medida a e b , então:

$$\begin{aligned} (a + h_a) - (b + h_b) &= (a + b \cdot \sen \theta) - (b + a \cdot \sen \theta) \\ &= a - b + b \cdot \sen \theta - a \cdot \sen \theta \\ &= (a - b) - \sen \theta (a - b) \\ &= (a - b) (1 - \sen \theta) \geq 0 \end{aligned}$$

Pela equação (2.1) tem-se que, quanto menor o denominador, maior é lado do quadrado inscrito. Portanto, o quadrado inscrito com maior lado tem um lado contido no menor lado de T . $\square$

Para abordar os casos onde o triângulo é obtusângulo, é preciso definir quando um quadrado *cabe* em um triângulo. Essa é uma definição mais geral que a de inscrição de um quadrado em um triângulo.

Definição 2.2. Dizemos que um quadrado de lado s *cabe* em um triângulo T se existe uma cópia desse quadrado, obtida por uma isometria do plano (translação, rotação e/ou reflexão), inteiramente contida em T , isto é, com todos os seus pontos pertencentes ao interior ou à fronteira de T .

Na imagem 2.4 é possível ver que os quadrados Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 cabem no triângulo $\triangle ABC$.

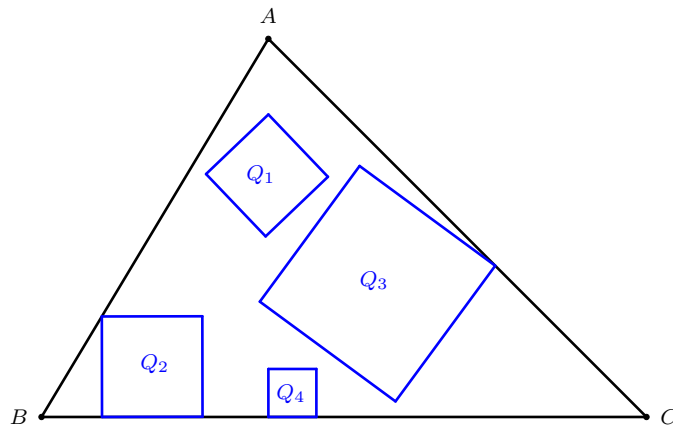


Figura 2.4: Quadrados Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4

Fonte: Autor (2026).

Corolário 2.2. (Wetzel, 2002) Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo ou retângulo, de lados com tamanhos a , b e c onde c é o tamanho do menor lado e Δ é sua área. Então, um quadrado de lado s cabe em T se, e somente se, $s \leq s_c = \frac{2 \cdot c \cdot \Delta}{c^2 + 2\Delta}$.

2.2 O caso de triângulos obtusângulos

Wetzel (2002) observou que o caso para o triângulo obtusângulo foi pouco explorado na literatura. Seu trabalho preencheu uma lacuna existente, sobre qual é o maior quadrado que cabe em um triângulo qualquer, completando a análise para todos os tipos de triângulos.

Para isso, seja $\triangle ABC$ um triângulo obtusângulo de tal forma que os lados obedecem a relação $\overline{BC} = a > \overline{AC} = b \geq \overline{AB} = c$ e sejam $\square AHGD$, $\square AEFI$ os maiores quadrados que cabem no $\triangle ABC$ que tem um lado contido nos lados AC e AB , respectivamente. Sendo s_b e s_c as medidas dos lados dos quadrados $\square AHGD$ e $\square AEFI$ respectivamente.

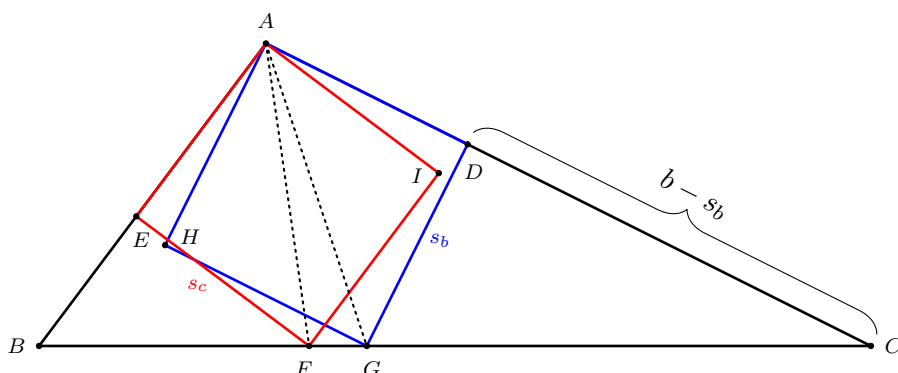


Figura 2.5: Triângulo obtusângulo

Fonte: Autor (2026).

Observe na Figura 2.5 o triângulo $\triangle CDG$,

$$\begin{aligned}
 \tan \hat{C} = \frac{s_b}{b - s_b} &\implies b \cdot \tan \hat{C} - s_b \cdot \tan \hat{C} = s_b \implies b \cdot \tan \hat{C} = s_b + s_b \cdot \tan \hat{C} \implies \\
 &\implies b \cdot \tan \hat{C} = s_b \cdot (1 + \tan \hat{C}) \implies s_b = \frac{b \cdot \tan \hat{C}}{(1 + \tan \hat{C})} \implies \\
 &\implies s_b = \frac{b \cdot \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}}{\left(1 + \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}\right)} = \frac{\frac{b \cdot \sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}}{\frac{\cos \hat{C} + \sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$s_b = \frac{b \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{C} + \cos \hat{C}} = \frac{h_a}{\sin \hat{C} + \cos \hat{C}} \quad (2.2)$$

e de forma semelhante,

$$s_c = \frac{c \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{B} + \cos \hat{B}} = \frac{h_a}{\sin \hat{B} + \cos \hat{B}} \quad (2.3)$$

onde h_a é a altura relativa ao lado a .

O lado de medida s_a do maior quadrado que *cabe* no $\triangle ABC$ e esta sobre o lado BC é dado pelo Lema 2.1.

Veja na Figura 2.5 que,

$$\begin{cases} \hat{B} \geq \hat{C} \\ B\hat{G}A = \hat{C} + 45^\circ \\ C\hat{F}A = \hat{B} + 45^\circ \end{cases} \implies \begin{cases} C\hat{F}A \geq B\hat{G}A \end{cases}$$

Daí pelo $\triangle AFG$, $\overline{AG} \geq \overline{AF}$ implicando que, $s_b \geq s_c$ pois $\overline{AG} = s_b \cdot \sqrt{2}$ e $\overline{AF} = s_c \cdot \sqrt{2}$.

Além disso, pode-se obter uma classificação para os triângulos obtusângulos. Encontrando assim uma relação entre os lados dos maiores quadrados que *cabem* no triângulo $\triangle ABC$ e que tem um lado contido em um lado do triângulo. Distinguindo em dois tipos: aqueles em que $s_b \geq s_a$ e aqueles em que $s_a \geq s_b$. Sendo s_a e s_b os lados dos maiores quadrados que *cabem* no triângulo $\triangle ABC$ e que tem um lado contido nos lados BC e AC respectivamente.

Definição 2.3 (Triângulos para fora e para dentro). (Wetzel, 2002) Seja $\triangle ABC$ um triângulo obtusângulo, cujos lados BC , AC e AB tem comprimentos a , b e c respectivamente, com $a > b \geq c$. O triângulo $\triangle ABC$ é chamado de triângulo para fora (outwards) se $h_a \geq a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1)$ e triângulo para dentro (inwards) se a desigualdade contrária é verdadeira, onde h_a é a altura relativa ao vértice A .

Usando a definição 2.3 obtêm-se que, se $\triangle ABC$ é para fora então,

$$\begin{aligned} h_a &\geq a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1) \\ h_a + a &\geq a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C}) \\ \frac{h_a + a}{a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C})} &\geq 1 \end{aligned}$$

e se $\triangle ABC$ é para dentro,

$$\begin{aligned} h_a &\leq a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1) \\ \frac{h_a + a}{a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C})} &\leq 1 \end{aligned}$$

A partir do Lema 2.1 e da equação (2.2) pode-se comparar s_a e s_b ,

$$\frac{s_b}{s_a} = \frac{\frac{h_a}{\sin \hat{C} + \cos \hat{C}}}{\frac{a \cdot h_a}{h_a + a}} = \frac{h_a + a}{a \cdot (\sin \hat{C} + \cos \hat{C})}. \quad (2.4)$$

Portanto, se $\triangle ABC$ é para fora,

$$\frac{s_b}{s_a} = \frac{h_a + a}{a \cdot (\sin \hat{C} + \cos \hat{C})} \geq 1 \implies s_b \geq s_a.$$

Caso contrário,

$$\frac{s_b}{s_a} = \frac{h_a + a}{a \cdot (\sin \hat{C} + \cos \hat{C})} \leq 1 \implies s_a \geq s_b.$$

As Figuras 2.6, 2.7 e 2.8 ilustram as três configurações possíveis para um triângulo obtusângulo $\triangle ABC$: o triângulo pode ser para dentro, para fora ou simultaneamente para dentro e para fora.

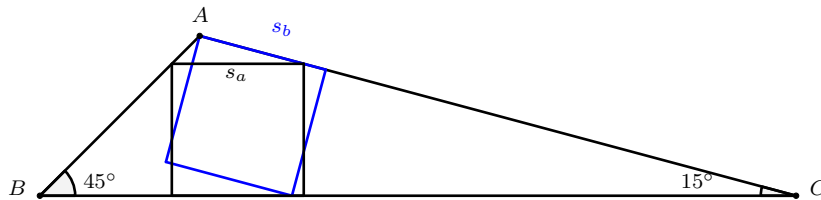


Figura 2.6: Exemplo de triângulo para dentro

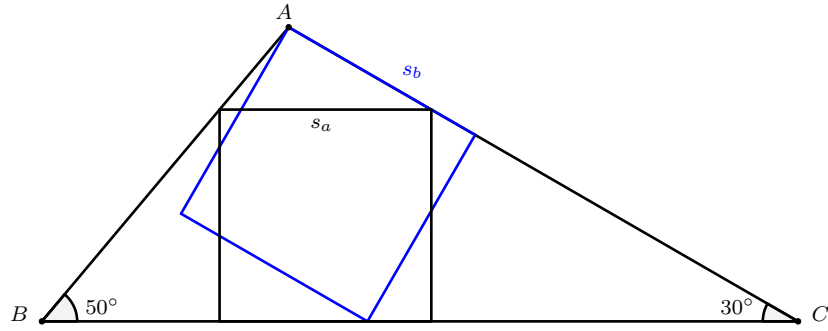


Figura 2.7: Exemplo de triângulo para fora

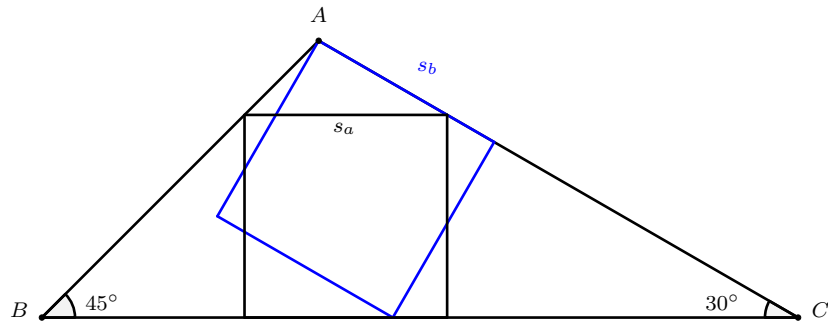


Figura 2.8: Exemplo de triângulo para dentro e para fora

Teorema 2.2. (Wetzel, 2002) Seja $\triangle ABC$ um triângulo obtusângulo, cujos lados BC , AC e AB tem comprimentos a , b e c respectivamente, com $a > b \geq c$. Se $\triangle ABC$ é um triângulo para fora, então um quadrado de lado s cabe nele quando, $s \leq s_b = \frac{\sqrt{2}\Delta}{a \sin(\hat{C} + 45^\circ)}$ e se $\triangle ABC$ for para dentro, $s \leq s_a = \frac{2 \cdot a \cdot \Delta}{a^2 + 2\Delta}$, onde Δ é a área do $\triangle ABC$. Sendo s_a e s_b os lados dos maiores quadrados que *cabem* no triângulo $\triangle ABC$ e que tem um lado contido nos lados BC e AC respectivamente.

Demonstração. Se $\triangle ABC$ for para fora s_b é a medida do maior quadrado que cabe nele, logo qualquer quadrado de lado s que cabe em $\triangle ABC$ tem $s \leq s_b$.

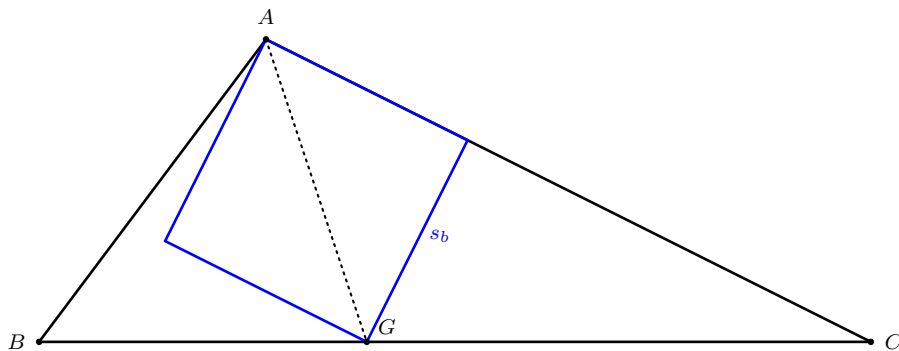


Figura 2.9: $B\hat{G}A$
Fonte: Autor (2026).

Na Figura 2.9 note que, $B\hat{G}A = \hat{C} + 45^\circ$ então,

$$\text{sen}(\hat{C} + 45^\circ) = \frac{h_a}{AG} = \frac{h_a}{s_b \cdot \sqrt{2}} = \frac{h_a}{\frac{h_a}{\text{sen } \hat{C} + \cos \hat{C}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\text{sen } \hat{C} + \cos \hat{C}}{\sqrt{2}}.$$

onde h_a é a altura relativa ao lado a .

Logo,

$$\text{sen } \hat{C} + \cos \hat{C} = \text{sen}(\hat{C} + 45^\circ) \cdot \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$s \leq s_b = \frac{h_a}{\text{sen } \hat{C} + \cos \hat{C}} = \frac{2\Delta}{a(\text{sen } \hat{C} + \cos \hat{C})} = \frac{2\Delta}{a\sqrt{2} \text{sen}(\hat{C} + 45^\circ)} = \frac{\sqrt{2}\Delta}{a \cdot \text{sen}(\hat{C} + 45^\circ)}.$$

Se $\triangle ABC$ for para dentro s_a é a medida do maior quadrado que cabe nele, logo qualquer quadrado de lado s deve ser menor que s_a .

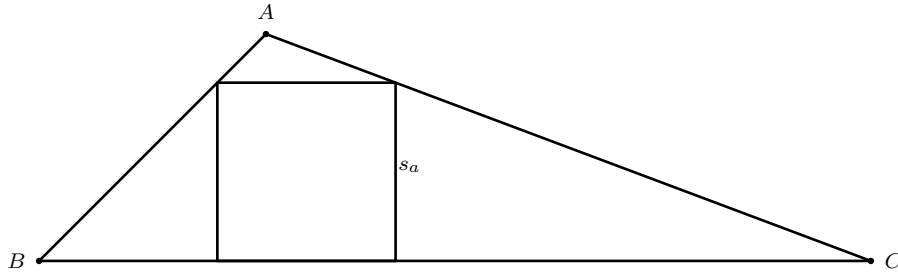


Figura 2.10: s_a

Fonte: Autor (2026).

$$\text{Assim, } s \leq s_a = \frac{2\Delta}{a + h_a} = \frac{2\Delta}{a + \frac{2\Delta}{a}} = \frac{2\Delta}{\frac{a^2 + 2\Delta}{a}} \implies s \leq s_a = \frac{2a\Delta}{a^2 + 2\Delta}. \quad \square$$

A Figura 2.11 resume graficamente o artigo de Wetzel (2002), delimitando três regiões para o vértice A do $\triangle ABC$. Em cada região, pode-se determinar o maior quadrado que cabe no triângulo.

Na Figura 2.11 tem-se os pontos B e C , m a mediatriz de BC e as curvas Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 . Γ_1 é um arco de centro C e raio BC e se $A \in \Gamma_1$, então o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base AB , que reflete $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$ quando A está abaixo de Γ_1 . Γ_2 é um arco de diâmetro BC , assim se $A \in \Gamma_2$ o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A e então Γ_2 divide os triângulos acutângulos (A acima de Γ_2) dos obtusângulos (A abaixo de Γ_2). A curva Γ_3 divide os triângulos obtusângulos em para fora e para dentro, se $A \in \Gamma_3$, então o triângulo $\triangle ABC$ e para fora e para dentro ao menos tempo.

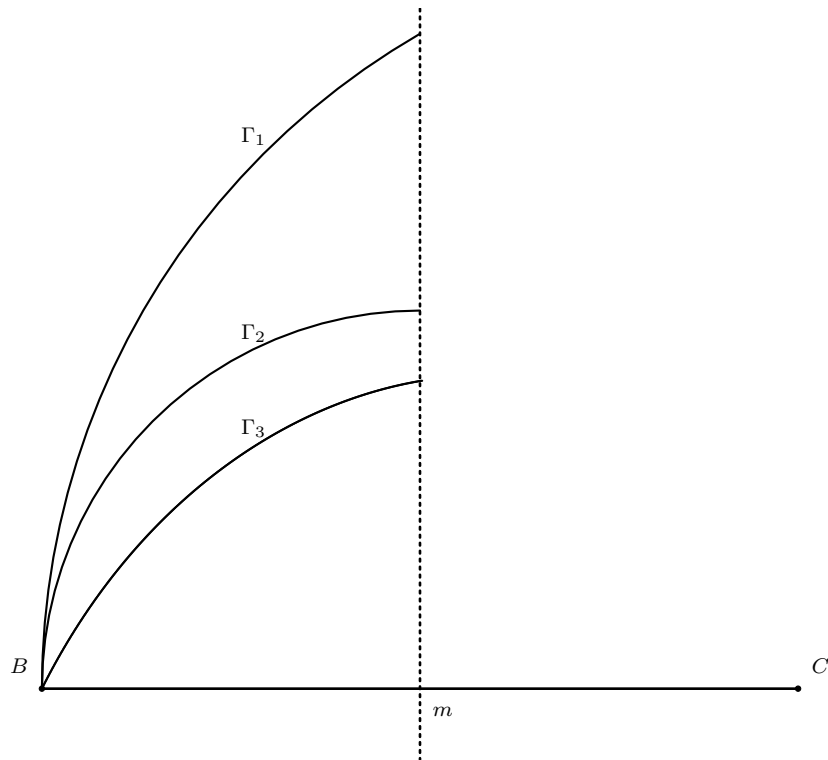


Figura 2.11: Regiões

Fonte: Autor (2026).

Para estudar Γ_3 deve-se saber quais pontos estão sobre Γ_3 . Seja $\triangle ABC$ onde pontos são fixados em $B = (-a, 0)$ e $C = (0, 0)$ e $A = (x, y) \in \Gamma_3$, $x < 0$ e $y > 0$. Como $A = (x, y) \in \Gamma_3$ tem-se que, a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao vértice A é $h_a = y \geq a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1)$ e $h_a = y \leq a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1)$ logo, $h_a = y = a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1)$.

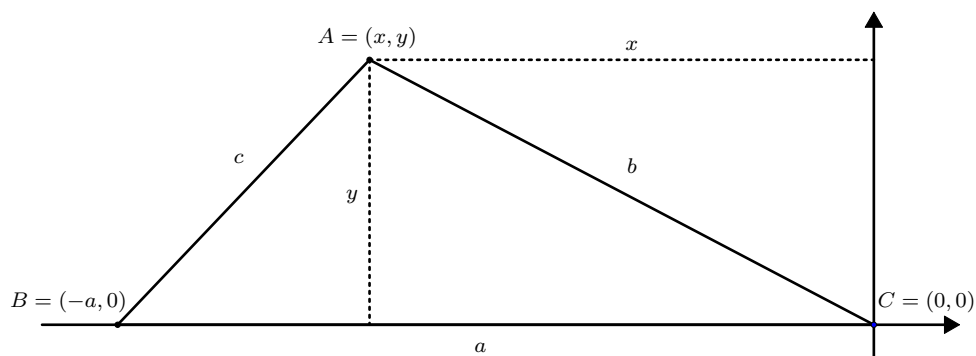


Figura 2.12: $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Note na Figura 2.12 que,

$$\overline{AC}^2 = b^2 = x^2 + y^2 \quad (2.5)$$

e

$$\overline{AB}^2 = c^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad (2.6)$$

Pela lei dos cossenos no triângulo $\triangle ABC$ tem-se que,

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (2.7)$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.7) obtêm-se,

$$\begin{aligned} \cos \hat{C} &= \frac{a^2 + x^2 + y^2 - ((a-x)^2 + y^2)}{2a\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{a^2 + x^2 + y^2 - a^2 + 2ax - x^2 - y^2}{2a\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{2ax}{2a\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

e a partir da relação fundamental da trigonometria,

$$\begin{aligned} \sin^2 \hat{C} &= 1 - \cos^2 \hat{C} \\ \sin^2 \hat{C} &= 1 - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \\ \sin^2 \hat{C} &= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \\ \sin^2 \hat{C} &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} \\ \sin \hat{C} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\sin \hat{C}$ e $\cos \hat{C}$ na fórmula de h_a ,

$$\begin{aligned} h_a &= y = a(\sin \hat{C} + \cos \hat{C} - 1) \\ y &= a \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \\ y &= a \left(\frac{y + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \\ y + a &= \frac{a(y + x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ (y + a)^2 &= \frac{a^2(y + x)^2}{x^2 + y^2} \\ (x^2 + y^2)(y^2 + 2ay + a^2) &= a^2(y^2 + 2xy + x^2) \\ y^3 + x^2y + 2ax^2 + 2ay^2 - 2a^2x &= 0 \end{aligned}$$

para $x < 0$ e $y > 0$. Se $-x > 0$ e $y > 0$, ou seja $x > 0$ e $y > 0$, então,

$$y^3 + x^2y + 2ax^2 + 2ay^2 + 2a^2x = 0 \quad (2.8)$$

logo, se $A = (x, y) \in \Gamma_3$, então x e y são solução da cúbica (2.8).

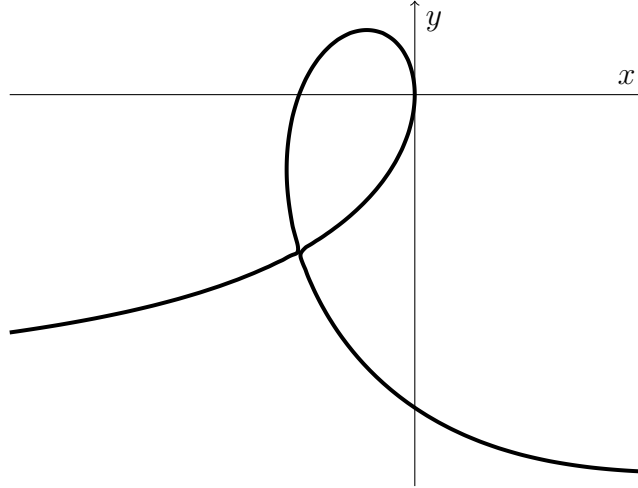


Figura 2.13: Esboço da cúbica (2.8)

Fonte: Autor (2026).

Assim a classificação de Wetzel (2002) divide o plano em três regiões distintas para a posição do vértice A , determinando o tipo do $\triangle ABC$ é o maior quadrado que cabe nele.

Quando A está na região I (Figura 2.14) delimitada pelas curvas Γ_1 , Γ_2 e mediatriz m , o triângulo resultante é acutângulo, sendo o quadrado de lado s_c , inscrito sobre o lado AB , o de maior dimensão possível.

Para A na região II (Figura 2.15) limitada por Γ_2 , Γ_3 e m , obtém-se um triângulo obtusângulo para fora, cujo maior quadrado está sobre AC e apresenta lado de medida s_b . Finalmente, se A está na região III (Figura 2.16) limitada por Γ_3 , m e o eixo AB , forma-se um triângulo obtusângulo para dentro, com o quadrado de lado s_a sobre BC , o maior.

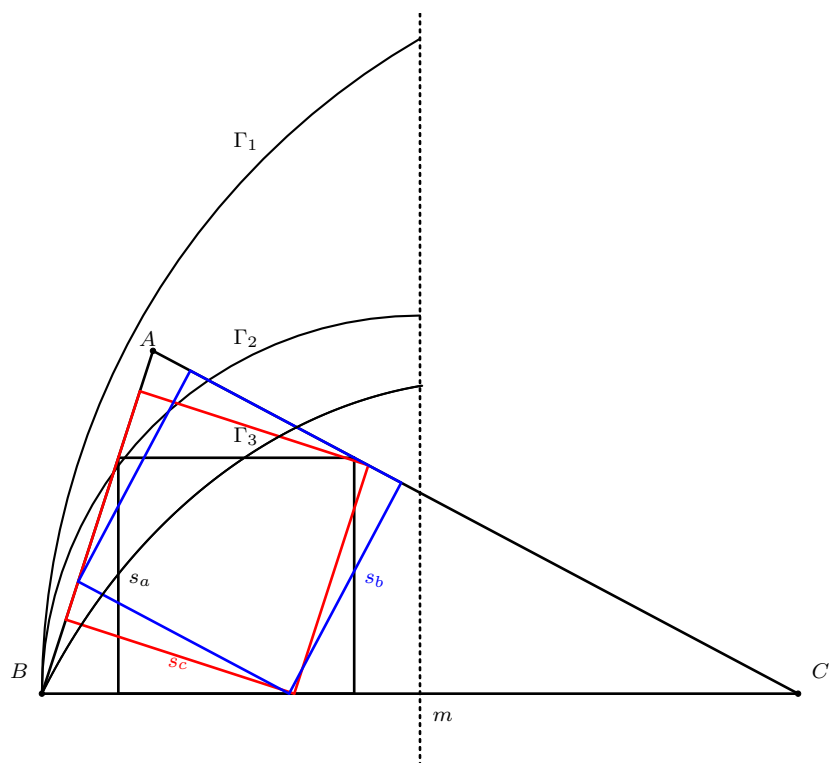


Figura 2.14: Região *I*
 Fonte: Autor (2026).

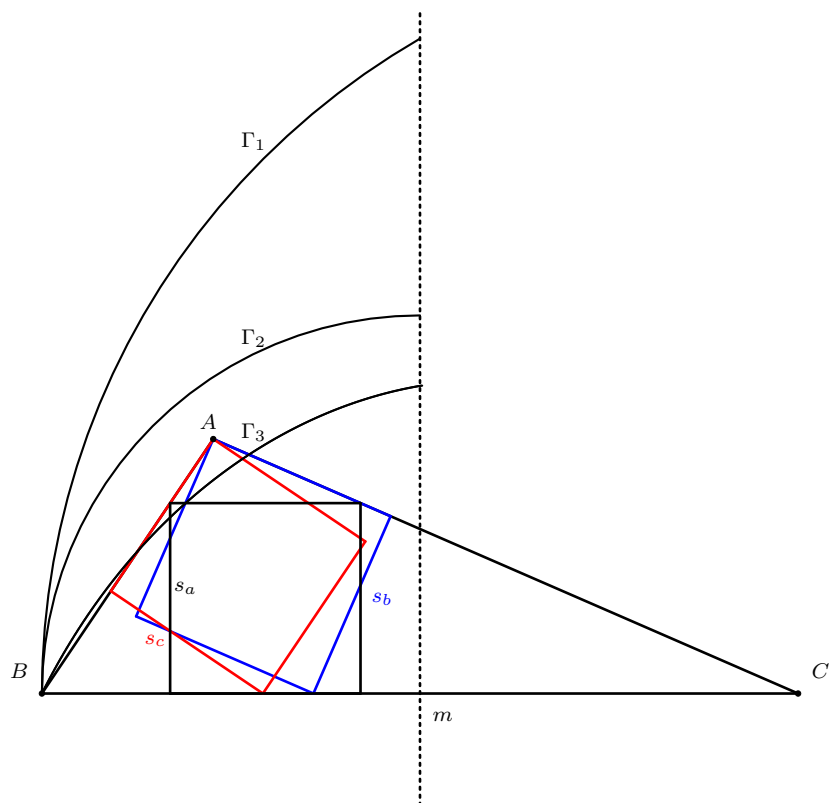


Figura 2.15: Região *II*
 Fonte: Autor (2026).

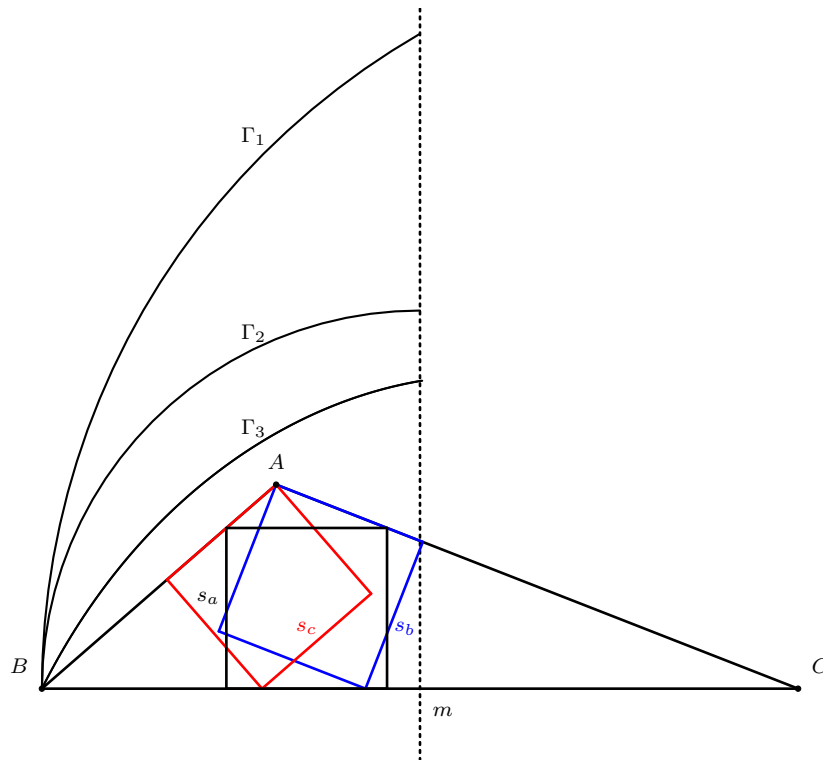


Figura 2.16: Região III

Fonte: Autor (2026).

Outro resultado que pode-se encontrar é o triângulo de Calabi, ver mais em (Conway; Guy, 1996), que é o único triângulo não-equilátero para o qual os três maiores quadrados têm tamanhos iguais. Veja que, se $A \in \Gamma_3$, o triângulo $\triangle ABC$ é para dentro e para fora ao mesmo tempo, então $s_b \geq s_a$ e $s_a \geq s_b$ ou seja, $s_a = s_b$. Logo, se $A \in \Gamma_3 \cap m$, $s_a = s_b = s_c$, pois o triângulo será isósceles.

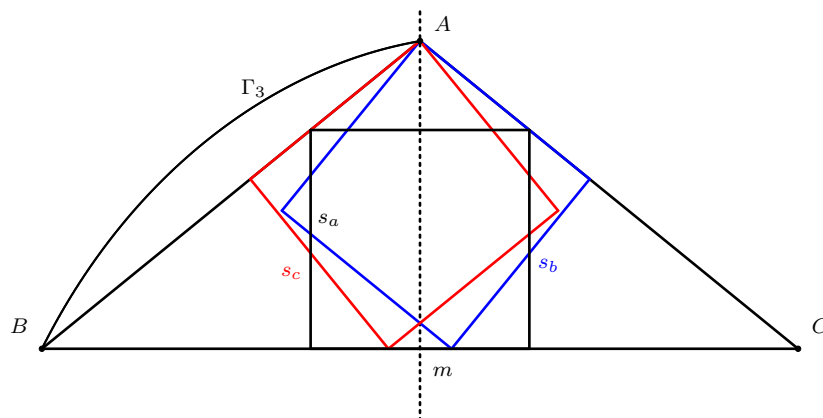


Figura 2.17: Triângulo de Calabi

Fonte: Autor (2026).

O ângulo da base $\gamma_0 = \hat{ABC} = \hat{BCA}$, que caracteriza o triângulo de Calabi, é determinado impondo-se a igualdade entre os lados dos três maiores quadrados que cabem em $\triangle ABC$, isto é, $s_a = s_b = s_c$ (equações (2.1), (2.2) e (2.3)).

A partir dessa condição, após sucessivas simplificações, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 s_a = s_b &= \frac{h_a}{\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0} = \frac{2\Delta}{a + h_a} = s_a \\
 \frac{h_a}{\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0} &= \frac{ah_a}{a + h_a} \\
 \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0} &= \frac{a}{a + h_a} \\
 a + h_a &= a(\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0) \\
 h_a &= a(\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0 - 1) \\
 b \operatorname{sen} \gamma_0 &= a(\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0 - 1) \\
 \frac{a}{2 \cos \gamma_0} \operatorname{sen} \gamma_0 &= a(\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0 - 1) \\
 \operatorname{sen} \gamma_0 &= 2 \cos \gamma_0 (\operatorname{sen} \gamma_0 + \cos \gamma_0 - 1) \\
 \operatorname{sen} \gamma_0 &= 2 \cos \gamma_0 \operatorname{sen} \gamma_0 + 2 \cos^2 \gamma_0 - 2 \cos \gamma_0 \\
 \operatorname{sen} \gamma_0 - 2 \cos \gamma_0 \operatorname{sen} \gamma_0 &= 2 \cos^2 \gamma_0 - 2 \cos \gamma_0 \\
 \operatorname{sen} \gamma_0 (1 - 2 \cos \gamma_0) &= 2 \cos^2 \gamma_0 - 2 \cos \gamma_0 \\
 \operatorname{sen} \gamma_0 &= \frac{2 \cos^2 \gamma_0 - 2 \cos \gamma_0}{1 - 2 \cos \gamma_0}
 \end{aligned}$$

Introduzindo a variável $u = \cos \gamma_0$ e usando $\operatorname{sen} \gamma_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_0}$, essa equação transcendental se reduz uma equação polinomial:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_0} &= \frac{2 \cos^2 \gamma_0 - 2 \cos \gamma_0}{1 - 2 \cos \gamma_0} \\
 \sqrt{1 - u^2} &= \frac{2u^2 - 2u}{1 - 2u} \\
 (\sqrt{1 - u^2})^2 &= \frac{(2u^2 - 2u)^2}{(1 - 2u)^2} \\
 1 - u^2 &= \frac{4u^2 - 8u^3 + 4u^2}{1 - 4u + 4u^2} \\
 (1 - u^2)(1 - 4u + 4u^2) &= 4u^2 - 8u^3 + 4u^2 \\
 1 - 4u + 3u^2 + 4u^3 - 4u^4 &= 4u^2 - 8u^3 + 4u^2 \\
 8u^4 - 12u^3 + u^2 + 4u &= 1
 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação, obtém-se quatro valores reais para u , $u \approx -0.56229$, $u \approx 0.28659$, $u \approx 0.77569$ e $u = 1$. A análise das raízes reais da equação mostra que, sob as restrições geométricas do triângulo isósceles obtusângulo ($0 \leq \gamma_0 < 45^\circ$, logo $0.70711 \leq u = \cos \gamma_0 < 1$), a única solução admissível é $\cos \gamma_0 = u \approx 0.77569$. Portanto, $\gamma_0 \approx 39.132^\circ$.

Uma maneira de resolver a equação polinomial é de forma gráfica, consideram-se as

funções

$$f(u) = 8u^4 - 12u^3 + u^2 + 4u \quad \text{e} \quad g(u) = 1,$$

cujos gráficos são traçados no mesmo sistema de eixos. Os pontos de interseção A , B , C e D entre os gráficos de f e g determinam exatamente os valores de u que satisfazem a equação

$$8u^4 - 12u^3 + u^2 + 4u - 1 = 0.$$

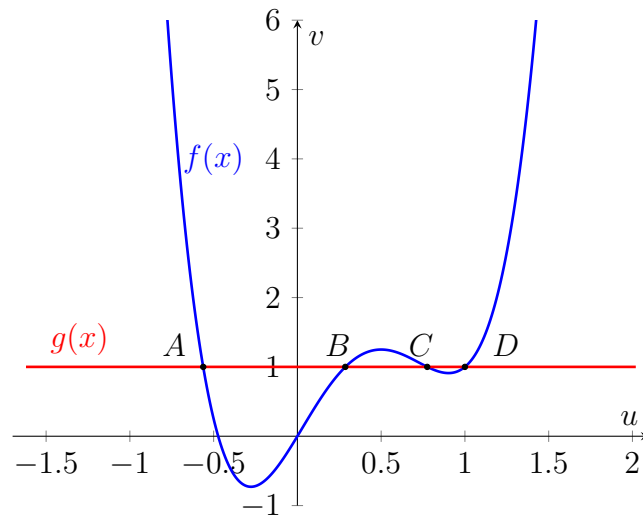


Figura 2.18: Resolução gráfica

Fonte: Autor (2026).

Capítulo 3

Aplicações e construções no GeoGebra

Nesse capítulo apresenta-se a validação das construções desenvolvidas nos capítulos anteriores por meio do software de geometria dinâmica GeoGebra, evidenciando a aplicabilidade prática dos resultados teóricos. As construções são implementadas no ambiente computacional para verificar a consistência dos procedimentos, testar hipóteses e estabelecer conjecturas.

O GeoGebra é um software livre de matemática dinâmica que integra geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo. Sua interface permite a construção interativa de figuras geométricas, possibilitando a visualização dinâmica das propriedades estudadas. Nesse contexto, de acordo com Sousa *et al.* (2022), o programa é empregado tanto como ferramenta de verificação quanto como apoio visual à interpretação dos resultados, sendo considerado um recurso que facilita o ensino e a aprendizagem da geometria plana de maneira mais dinâmica e produtiva.

3.1 Construção dos triângulos equiláteros inscritos — método algébrico

A construção a seguir, baseada no método de (Andrica; Bagdasar; Marinescu, 2024), descreve como obter um triângulo equilátero inscrito em um triângulo $\triangle ABC$ utilizando um ambiente de geometria dinâmica.

Para simplificar a construção, adota-se um sistema de coordenadas cartesianas em que o vértice B é fixado na origem, de modo que $B = (0, 0)$. Com essa escolha, a base do triângulo pode ser tomada ao longo do eixo das abscissas, o que facilita tanto a notação quanto os cálculos envolvidos.

Em seguida, introduz-se um parâmetro $a \in [0, 10]$, controlado por meio de um deslizante no ambiente do GeoGebra, e define-se o vértice C pelas coordenadas $C =$

$(a, 0)$. Dessa forma, o segmento BC coincide com o intervalo $[0, a]$ no eixo horizontal, permanecendo livre apenas a posição do vértice A , como pode ser visto na Figura 3.1.

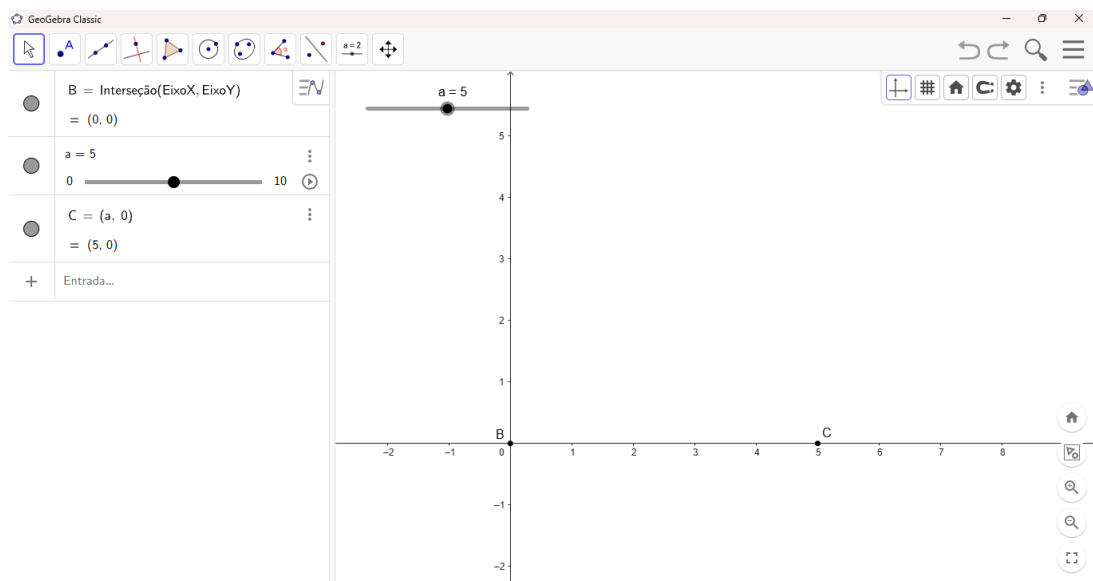


Figura 3.1: Pontos B e C

Fonte: Autor (2026).

Em seguida, na Figura 3.2, define-se a região

$$b : y \leq \left\{ \sqrt{a^2 - (x - a)^2} \right\} \cap \{y \geq 0\} \cap \left\{ x \leq \frac{a}{2} \right\}$$

e escolhe-se um ponto $A \in b$, o que garante que o vértice permaneça em posição compatível com a configuração desejada do triângulo ($B\hat{A}C \geq A\hat{B}C \geq A\hat{C}B$).

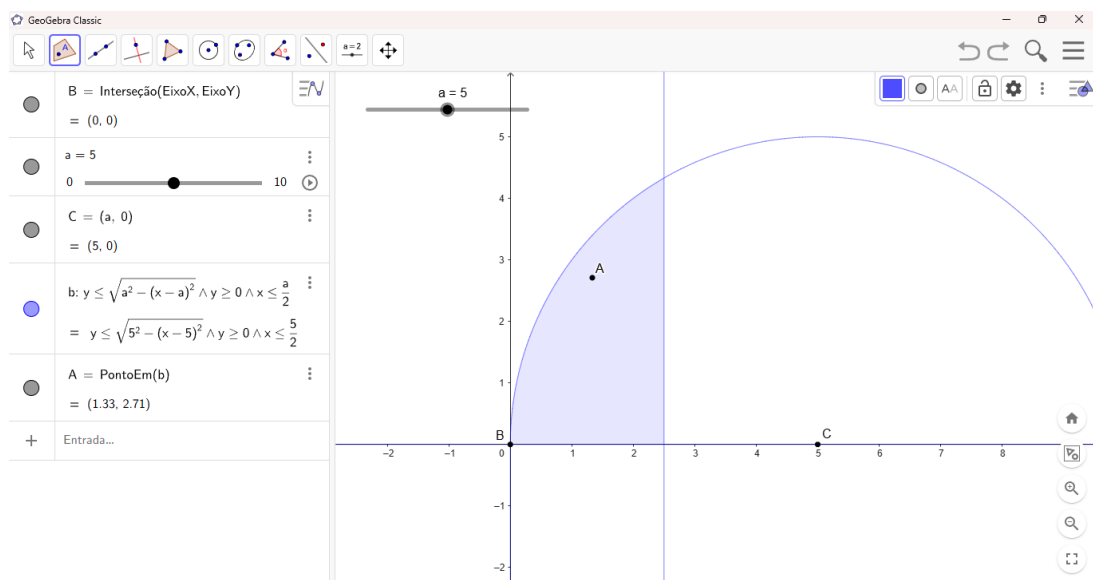


Figura 3.2: Região b

Fonte: Autor (2026).

Na Figura 3.3, define-se os ângulos do triângulo por $\theta_A = \hat{BAC}$, $\theta_B = \hat{ABC}$ e $\theta_C = \hat{ACB}$, possibilitando o acesso direto às amplitudes angulares necessárias nos cálculos subsequentes da construção.

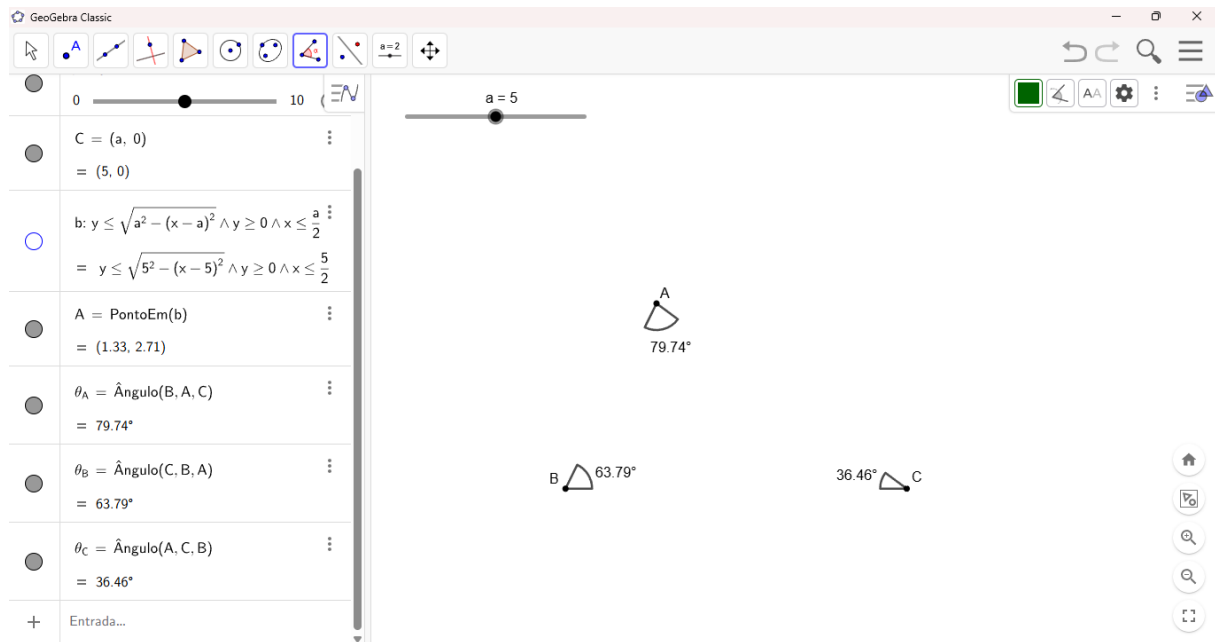


Figura 3.3: $\theta_A = \hat{BAC}$, $\theta_B = \hat{ABC}$ e $\theta_C = \hat{ACB}$.
Fonte: Autor (2026).

Com os três vértices definidos, na Figura 3.4, constrói-se o triângulo $\triangle ABC$, completando assim a configuração inicial necessária para aplicação das fórmulas algébricas.

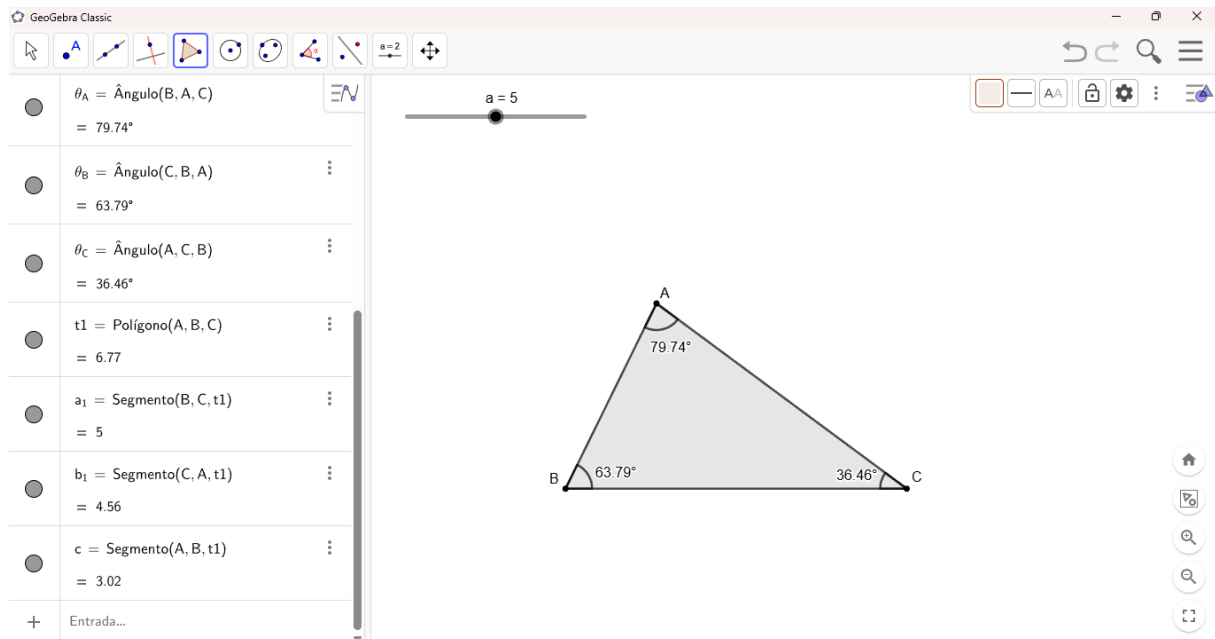


Figura 3.4: Triângulo $\triangle ABC$
Triângulo $\triangle ABC$ Fonte: Autor (2026).

Constrói-se, na Figura 3.5, a circunferência d passando pelos vértices A , B e C ,

denotando-se por D seu centro e por $r = \overline{AD}$ o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$, elemento fundamental nas expressões algébricas subsequentes.

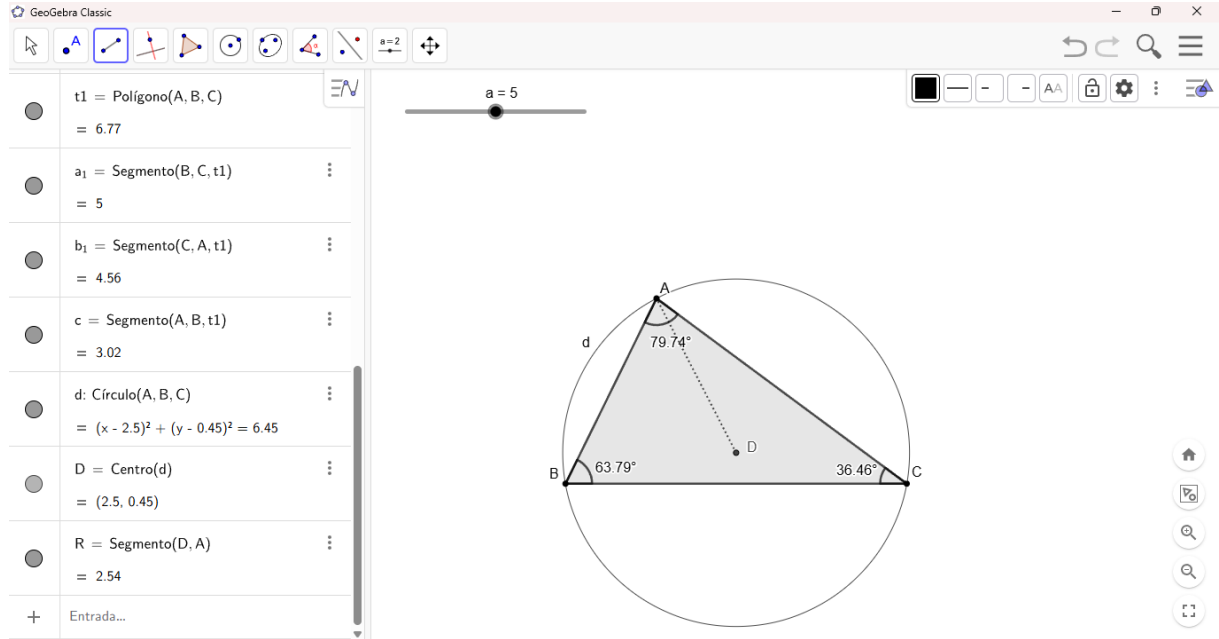


Figura 3.5: Raio da circunferência circunscrita

Fonte: Autor (2026).

Introduz-se, na Figura 3.6, um controle deslizante para o parâmetro de rotação $\alpha \in [60^\circ - \theta_C, \min\{60^\circ + \theta_B, 120^\circ\}]$. Em seguida, define-se o comprimento BM por,

$$\overline{BM} = 2r \cdot \frac{\sin \theta_A \cdot \sin \theta_C \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \theta_B)}{\sin \theta_C \cdot \sin(\alpha + 60^\circ - \theta_B) + \sin \theta_B \cdot \sin(\alpha + \theta_C)},$$

e constrói-se a circunferência e de centro B e raio $\overline{BM}$, onde é definido o ponto $M \in e \cap BC$.

Analogamente, define-se o comprimento CN por,

$$\overline{CN} = 2r \cdot \frac{\sin \theta_B \cdot \sin \theta_A \cdot \sin \alpha}{\sin \theta_A \cdot \sin \alpha + \sin(60^\circ + \theta_B - \alpha) \cdot \sin \theta_C},$$

e constrói-se, então, a circunferência f de centro C e raio $\overline{CN}$, tomando-se N como o ponto de interseção entre f e o lado AC .

Do mesmo modo, define-se o comprimento AP por,

$$\overline{AP} = 2r \cdot \frac{\sin \theta_C \cdot \sin \theta_B \cdot \sin(\alpha + \theta_C - 60^\circ)}{\sin \theta_B \cdot \sin(\alpha + \theta_C - 60^\circ) + \sin \theta_A \cdot \sin(\alpha + 60^\circ)},$$

e constrói-se a circunferência g de centro A e raio $\overline{AP}$, tomando-se P como o ponto de interseção entre g e o lado AB .

Por fim, na Figura 3.7, constrói-se o triângulo $\triangle MNP$, obtendo-se assim um triângulo equilátero inscrito nas laterais de $\triangle ABC$.

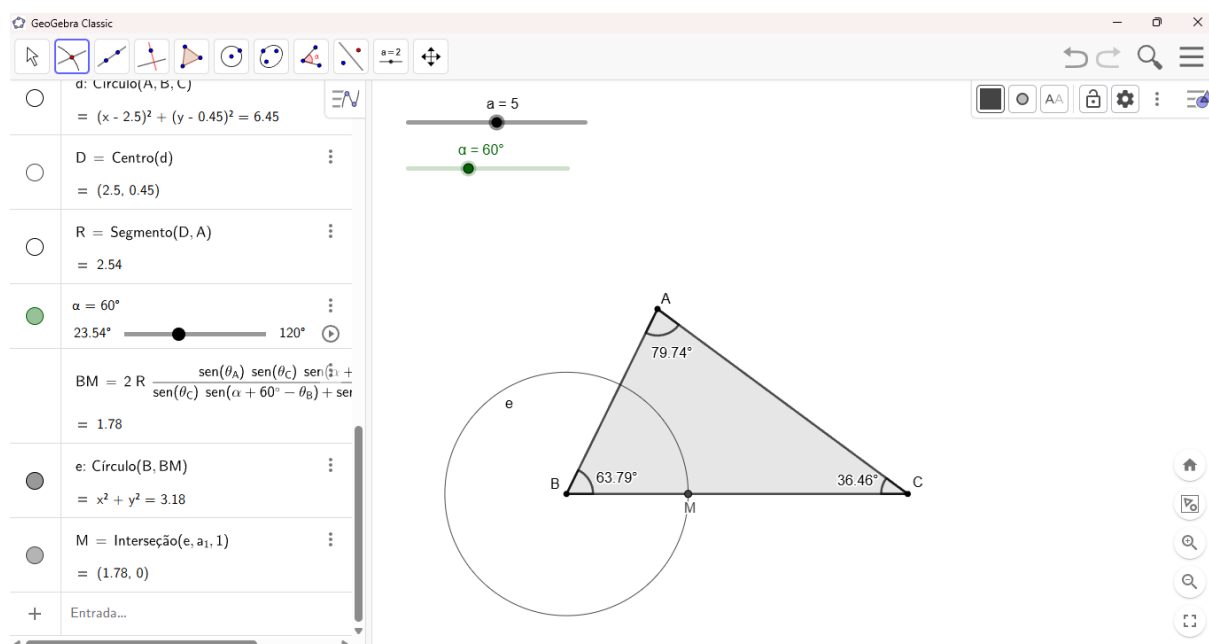


Figura 3.6: Ponto M

Fonte: Autor (2026).

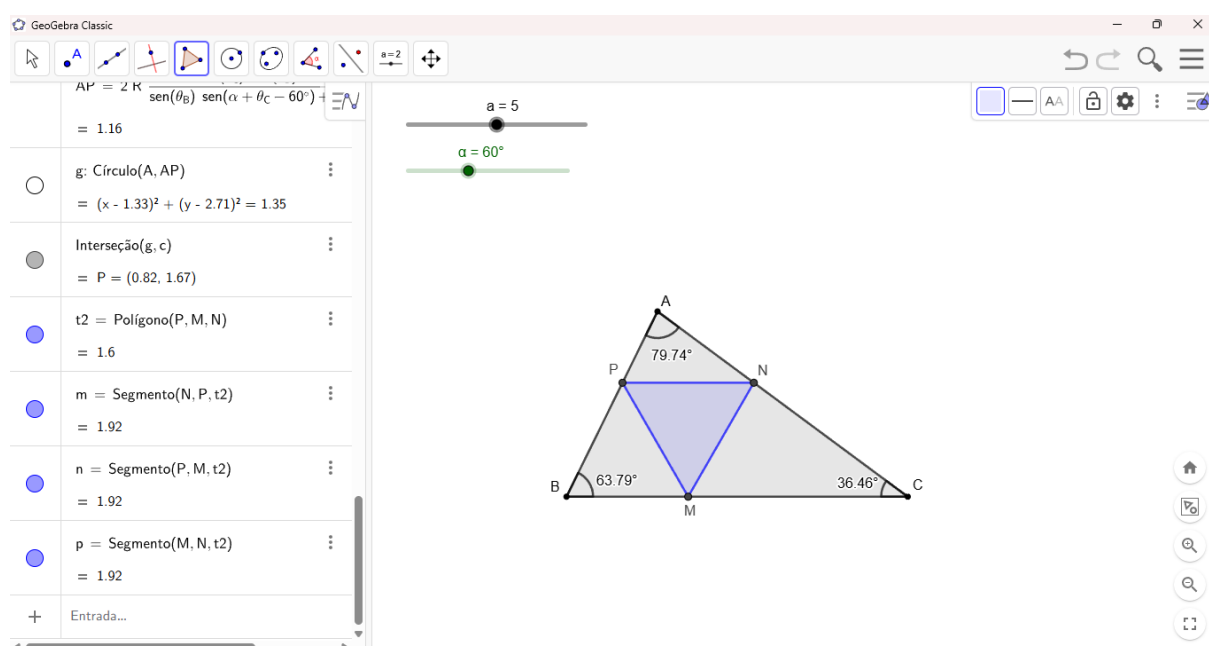


Figura 3.7: $\triangle MNP$

Fonte: Autor (2026).

Ao manipular o controle deslizante α dentro do intervalo especificado, obtém-se dinamicamente a família completa de todos os triângulos equiláteros que podem ser inscritos nas laterais do triângulo $\triangle ABC$. Essa variação contínua permite visualizar como os vértices M , N e P percorrem as respectivas laterais BC , AC e AB , mantendo o triângulo $\triangle MNP$ equilátero. Construção disponível em Construção método algébrico.

3.2 Construção dos triângulos equiláteros inscritos – método geométrico

Para validar, os resultados obtidos em (Russell, 2015), desenvolve-se uma construção em etapas, cada uma fundamentada em propriedades clássicas da geometria euclidiana. Inicialmente, constrói-se o círculo de Apolônio de um lado do triângulo $\triangle ABC$, o que permite determinar, em seguida, os pontos de Apolônio de $\triangle ABC$. A partir desses pontos, são obtidos os respectivos triângulos pedais, cujos vértices resultam da projeção ortogonal sobre os lados (ou prolongamentos) de $\triangle ABC$, estabelecendo assim a base para a construção.

Na sequência, aplica-se uma rotação espiral apropriada aos triângulos pedais dos pontos de Apolônio, de modo a produzir triângulos equiláteros inscritos nas laterais (ou prolongamentos) do triângulo $\triangle ABC$. Os baricentros desses triângulos equiláteros são então determinados e alinhados, permitindo conexão entre tais retas e a reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$.

Inicia-se com a construção do triângulo $\triangle ABC$ e das retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, na Figura 3.8. Esses elementos fundamentais delimitarão as regiões nas quais os vértices do triângulo equilátero inscrito serão localizados.

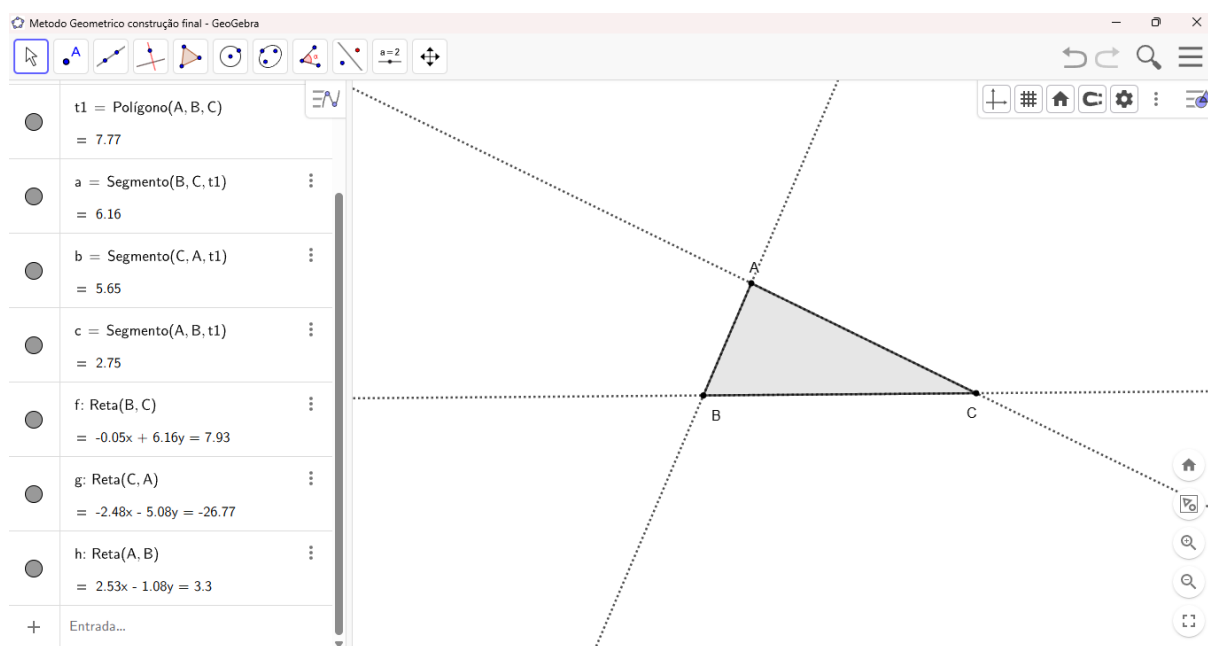


Figura 3.8: $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Em seguida, na Figura 3.9, constroem-se as bissetrizes do ângulo $\hat{BAC}$ e marcam-se os pontos D e E como as interseções dessas bissetrizes com a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e G como o ponto médio do segmento ED .

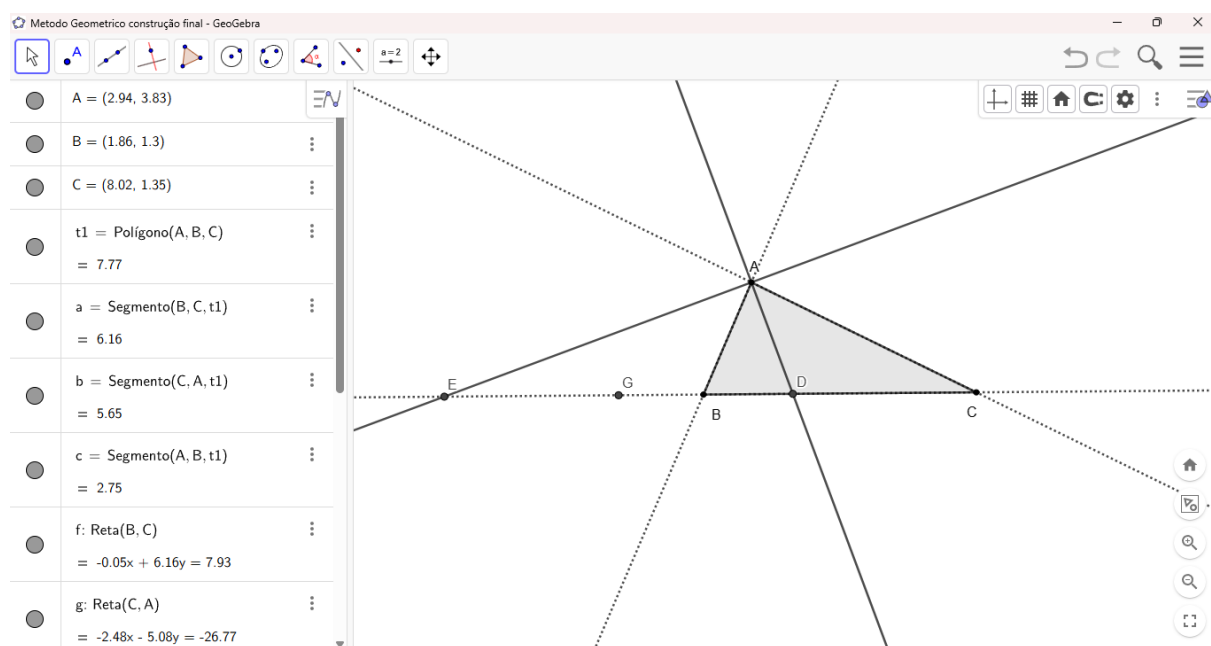


Figura 3.9: Pontos D , E e G

Fonte: Autor (2026).

Prossegue-se, na Figura 3.10, a construção traçando o círculo d com centro em G e raio igual a GD . Esse é o círculo de Apolônio associado ao lado BC .

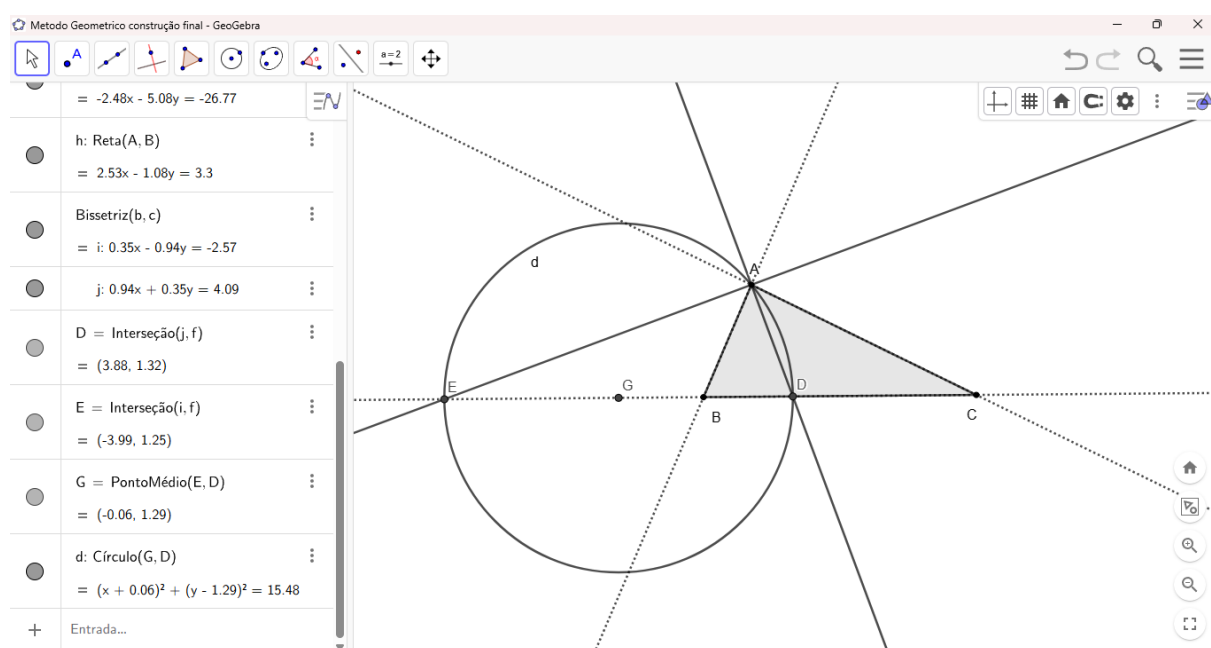


Figura 3.10: Círculo de Apolônio associado ao lado BC

Fonte: Autor (2026).

Avança-se, na Figura 3.11, com a construção do círculo de Apolônio do lado AC , análogo ao círculo d previamente estabelecido para BC . Marcam-se P_1 e P_2 como as interseções entre os círculos de Apolônio de BC e AC , esses pontos constituem os pontos de Apolônio do triângulo $\triangle ABC$.

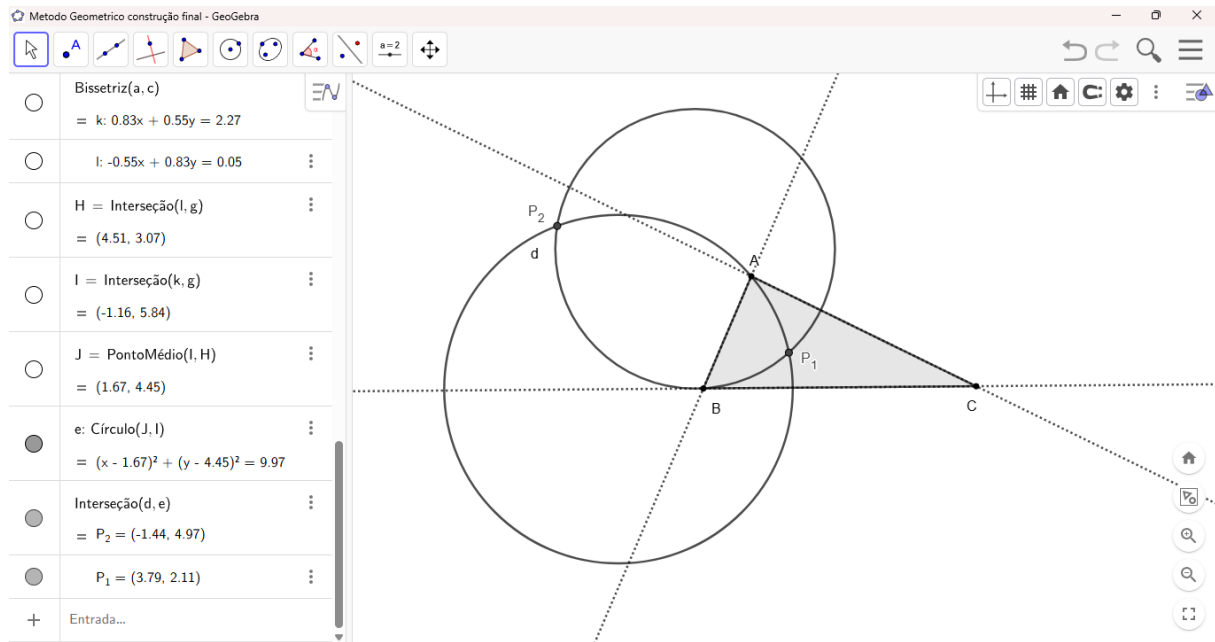


Figura 3.11: Pontos de Apolônio do triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Para a construção dos triângulos pedais dos pontos de Apolônio, na Figura 3.12, traçam-se as retas r_1 , s_1 e t_1 , perpendiculares respectivamente às retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P_1 . Marcam-se os pontos $A_1 = r_1 \cap \overleftrightarrow{BC}$, $B_1 = s_1 \cap \overleftrightarrow{AC}$ e $C_1 = t_1 \cap \overleftrightarrow{AB}$.

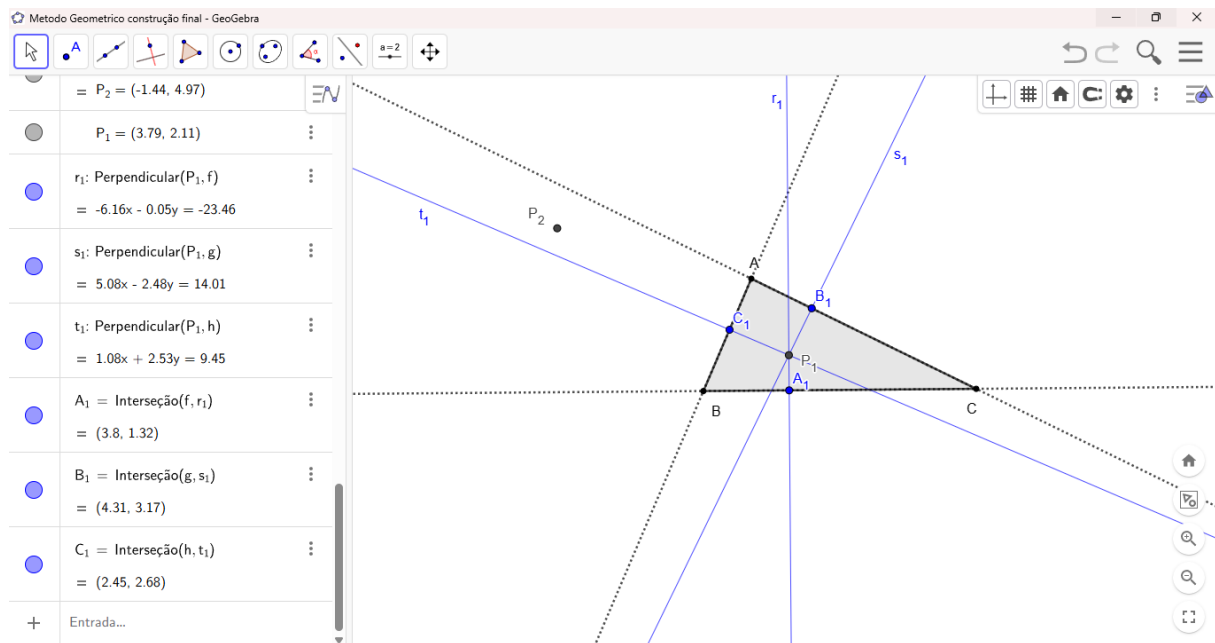


Figura 3.12: Pontos A_1 , B_1 e C_1

Fonte: Autor (2026).

Prossegue-se a construção, na Figura 3.13, traçando as retas r_2 , s_2 e t_2 , perpendiculares respectivamente às retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P_2 . Marcam-se os pontos $A_2 = r_2 \cap \overleftrightarrow{BC}$, $B_2 = s_2 \cap \overleftrightarrow{AC}$ e $C_2 = t_2 \cap \overleftrightarrow{AB}$.

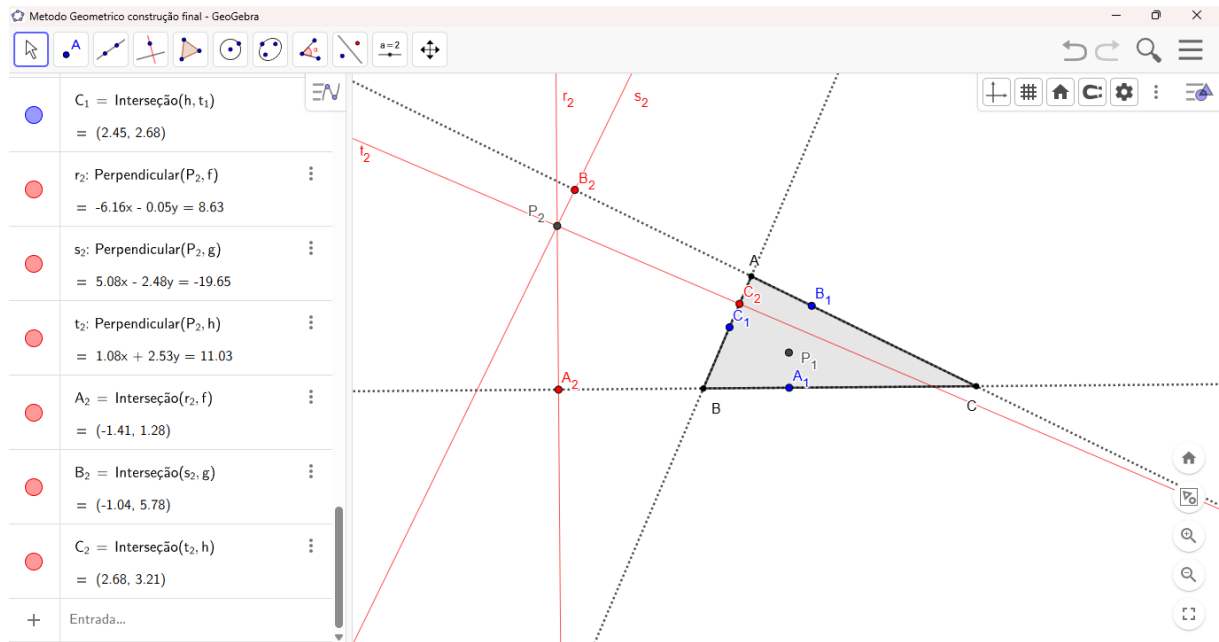


Figura 3.13: Pontos A_2 , B_2 e C_2

Fonte: Autor (2026).

Completam-se os triângulos pedais dos pontos de Apolônio P_1 e P_2 , na Figura 3.14. Esses triângulos pedais servem de base para a construção dos vértices dos triângulos equiláteros inscritos no $\triangle ABC$.

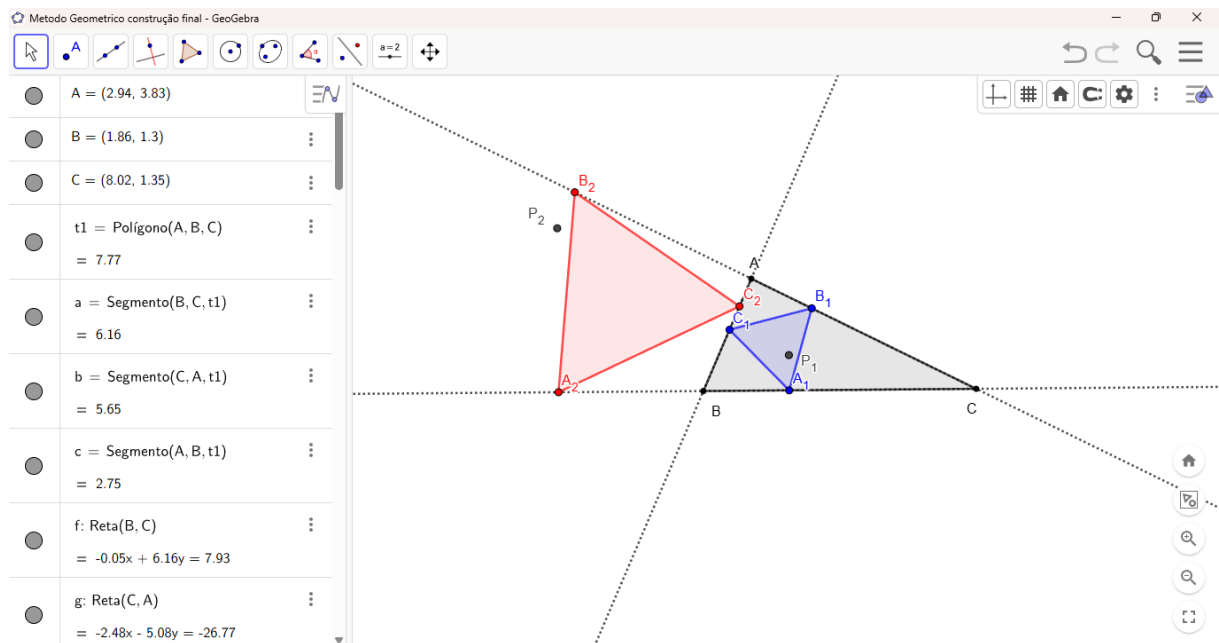


Figura 3.14: Triângulos pedais dos pontos de Apolônio P_1 e P_2

Fonte: Autor (2026).

Inicia-se a etapa de rotação espiral dos triângulos pedais dos pontos de Apolônio do $\triangle ABC$, na Figura 3.15, introduzindo controles deslizantes $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ e $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ para modular os ângulos de rotação. Gira-se o triângulo pedal $\triangle A_1B_1C_1$ em torno do

ponto de Apolônio P_1 pelo ângulo α , obtendo suas imagens rotacionadas.

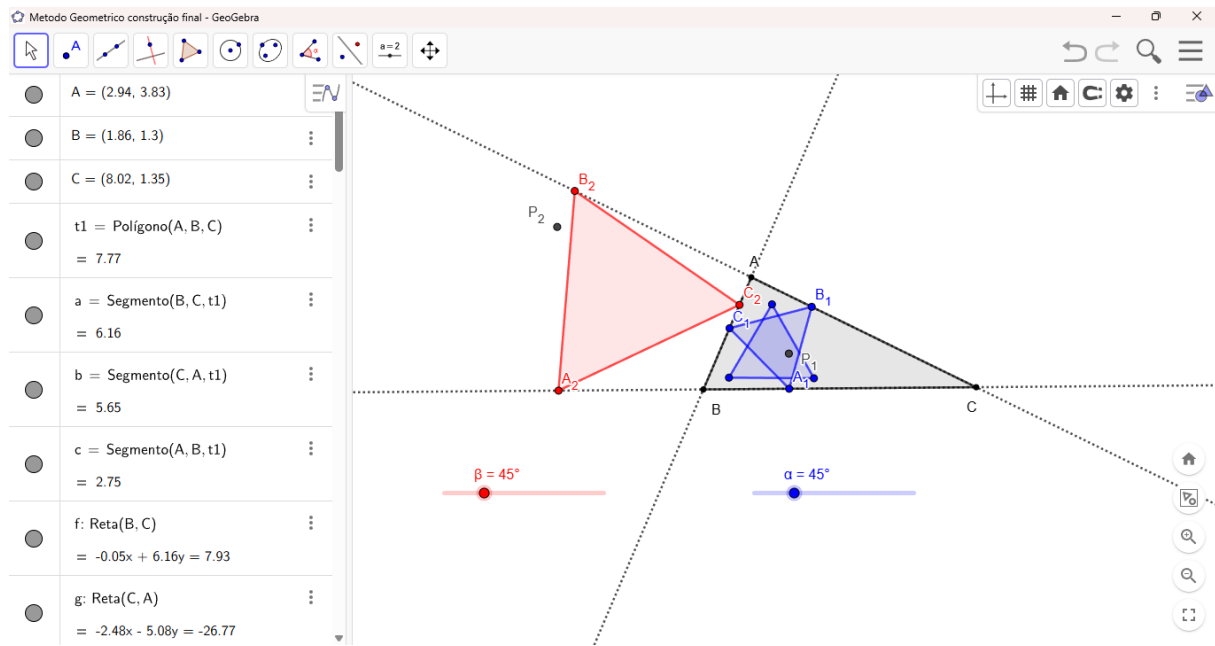


Figura 3.15: Rotação do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$
Fonte: Autor (2026).

Aplica-se homotetia de centro P_1 e razão $\sec \alpha$ sobre o triângulo encontrado após a rotação anterior, obtendo $\triangle A'_1B'_1C'_1$, na Figura 3.16, essa combinação resulta na semelhança espiral.

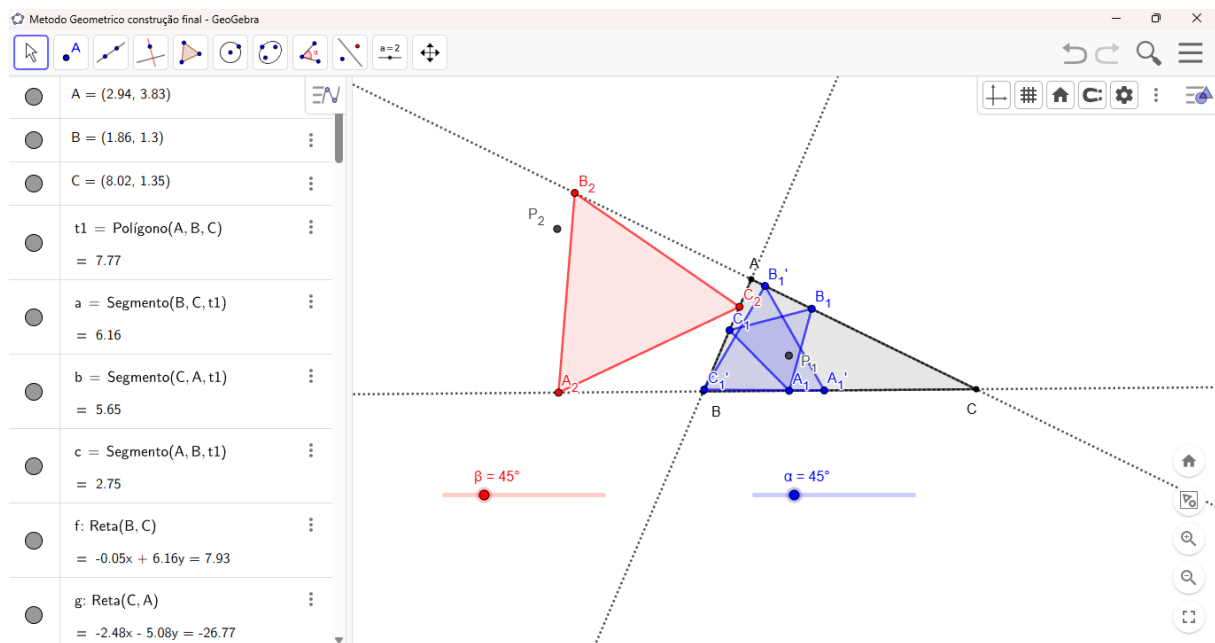


Figura 3.16: Semelhança espiral no $\triangle A_1B_1C_1$
Fonte: Autor (2026).

Gira-se o triângulo pedal $\triangle A_2B_2C_2$ em torno do ponto de Apolônio P_2 pelo ângulo de rotação β , obtendo suas imagens rotacionadas, na Figura 3.17, em seguida aplica-se

homotetia de centro P_2 e razão $\sec \beta$ sobre esse triângulo rotacionado, designando o resultado por $\triangle A'_2 B'_2 C'_2$, na Figura 3.18.

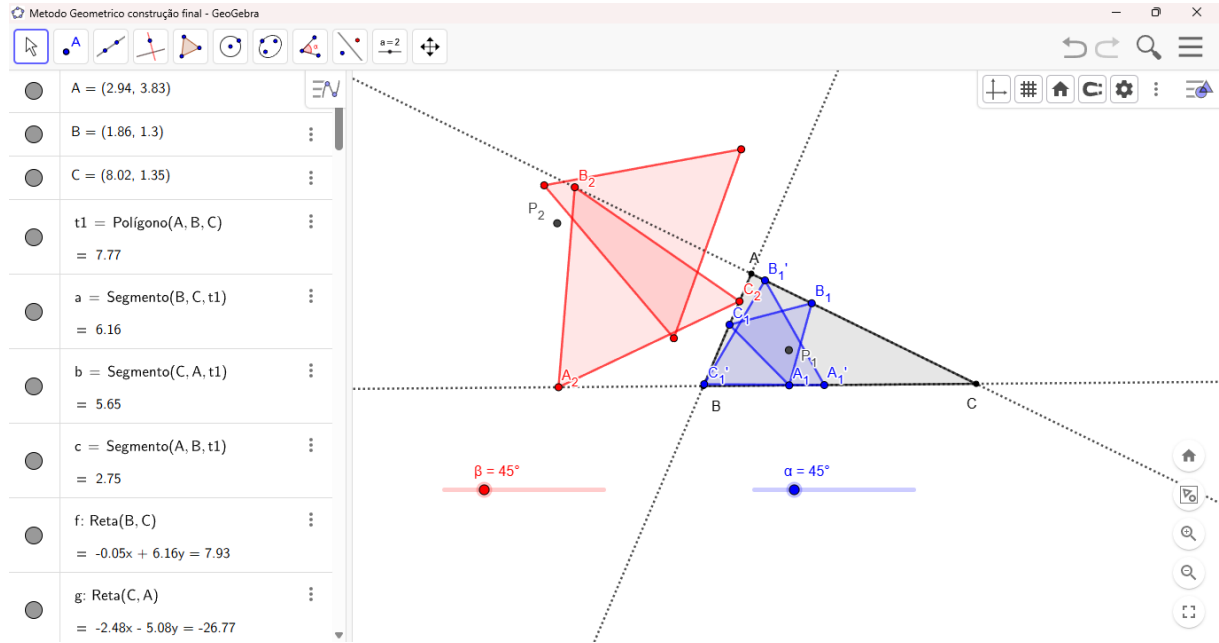


Figura 3.17: Rotação do triângulo $\triangle A_2 B_2 C_2$
Fonte: Autor (2026).

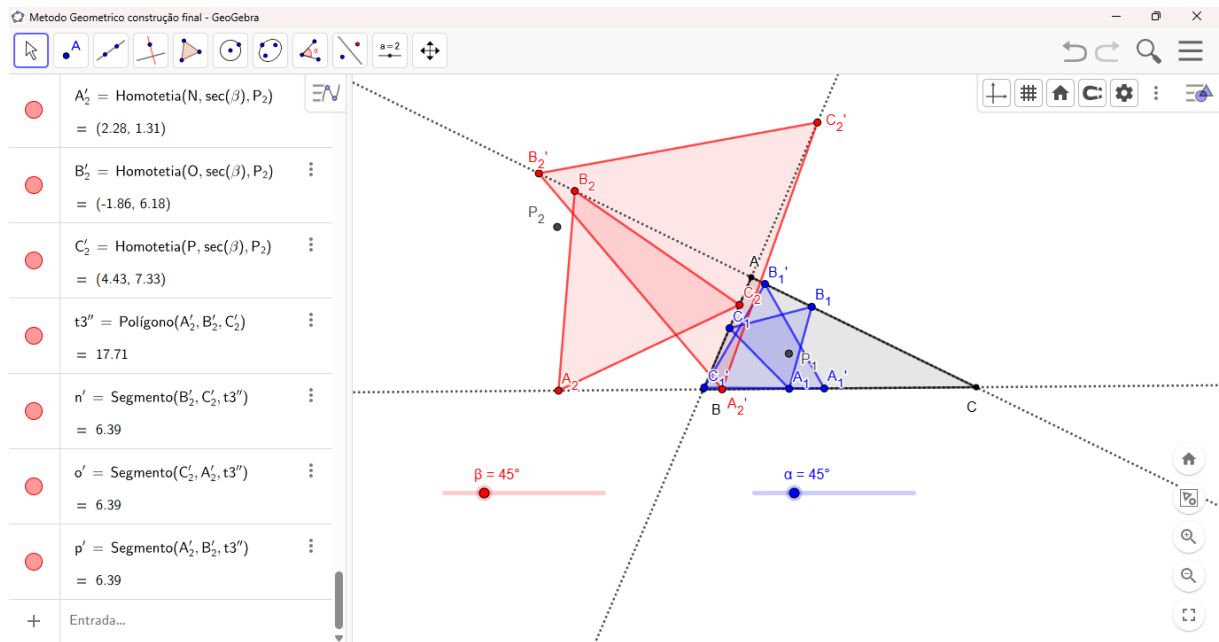


Figura 3.18: Semelhança espiral no $\triangle A_2 B_2 C_2$
Fonte: Autor (2026).

Para determinar as retas dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos em $\triangle ABC$, inicialmente na Figura 3.19, encontram-se os baricentros dos triângulos $\triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle A'_1 B'_1 C'_1$, $\triangle A_2 B_2 C_2$ e $\triangle A'_2 B'_2 C'_2$.

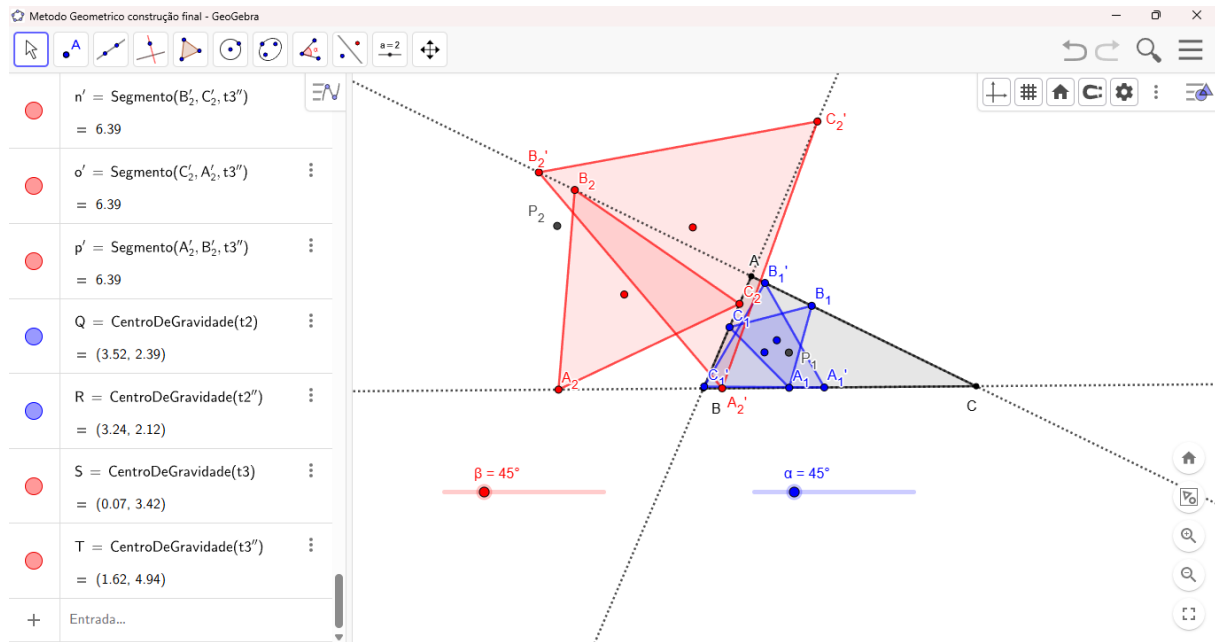


Figura 3.19: Baricentros dos triângulos $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A'_1B'_1C'_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ e $\triangle A'_2B'_2C'_2$
Fonte: Autor (2026).

Em seguida, na Figura 3.20, constroem-se a reta que passa pelos baricentros dos triângulos $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A'_1B'_1C'_1$ e a reta que passa pelos baricentros dos triângulos $\triangle A_2B_2C_2$ e $\triangle A'_2B'_2C'_2$. Essas retas constituem o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos em $\triangle ABC$.

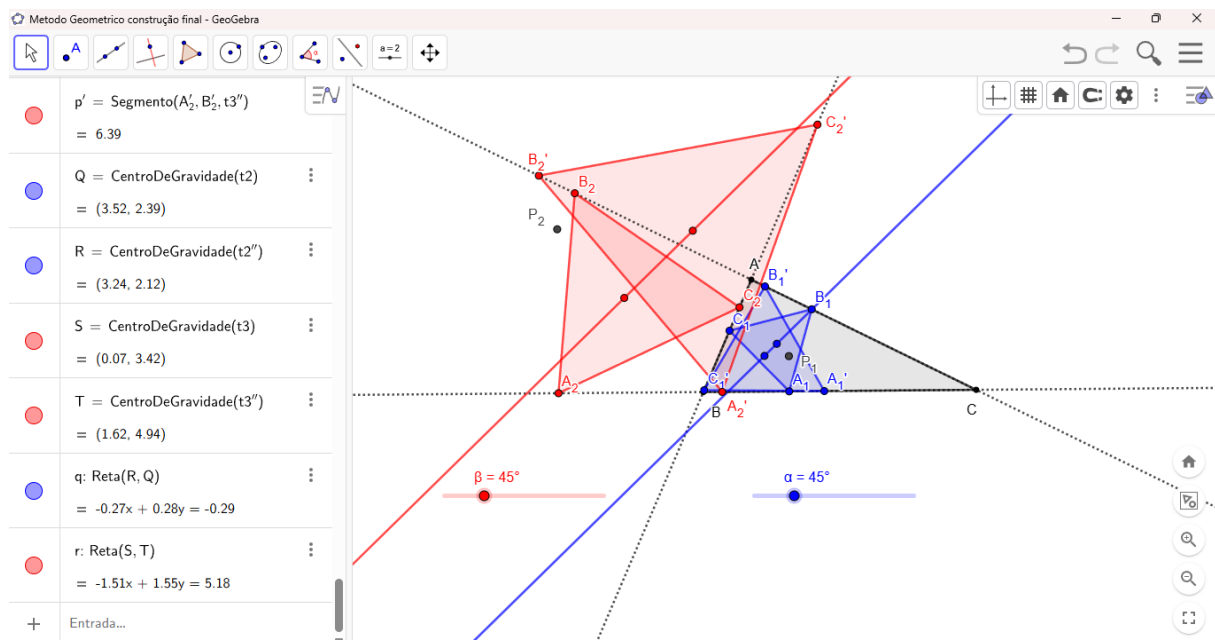


Figura 3.20: Lugar geométrico dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos em $\triangle ABC$
Fonte: Autor (2026).

Ao verificar, na Figura 3.21, a relação entre as duas retas construídas, a que passa

pelos baricentros de $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle A'_1B'_1C'_1$, e a que passa pelos baricentros de $\triangle A_2B_2C_2$ e $\triangle A'_2B'_2C'_2$, constata-se que elas são paralelas.

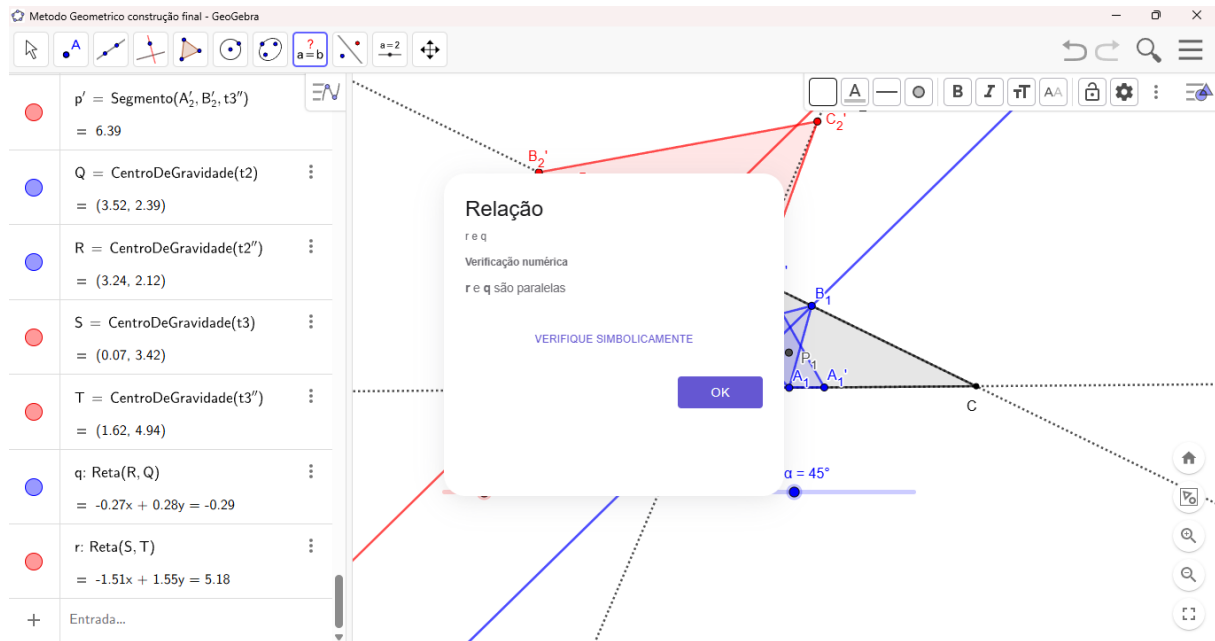


Figura 3.21: Relação entre as retas

Fonte: Autor (2026).

Para validar a proposta de Russell (2015), é necessário a construção da reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$, determinando primeiramente seu circuncentro e seu ortocentro, na Figura 3.22.

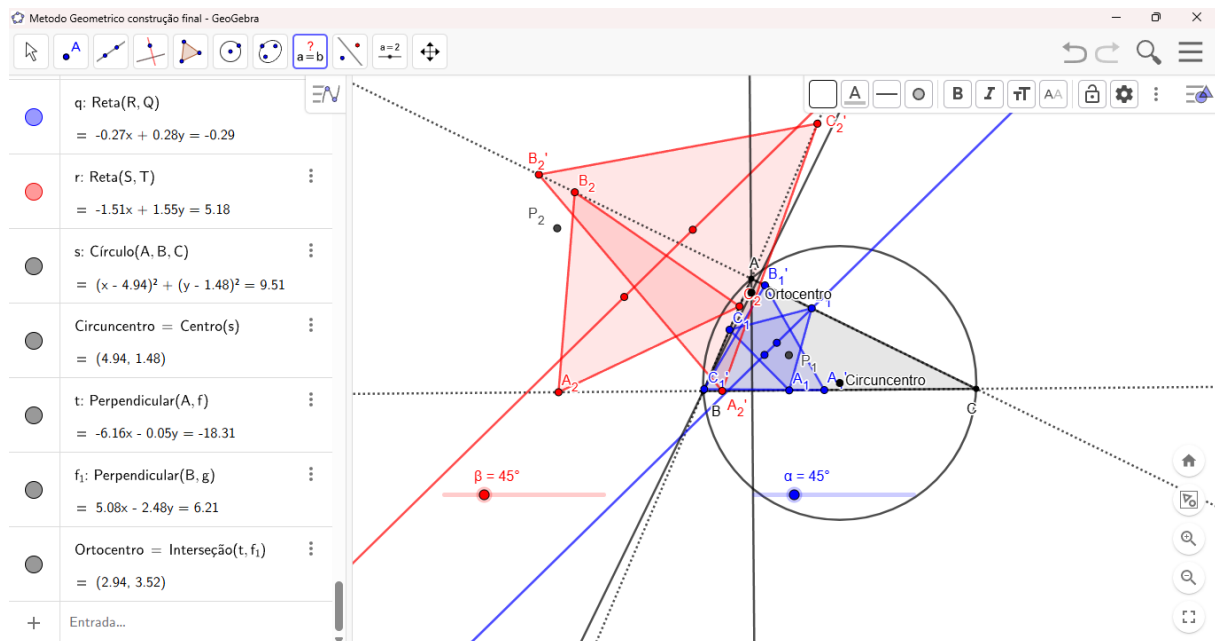


Figura 3.22: Circuncentro e ortocentro do triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Em seguida, na Figura 3.23, constrói-se a reta de Euler de $\triangle ABC$, traçando a reta

que une o circuncentro ao ortocentro.

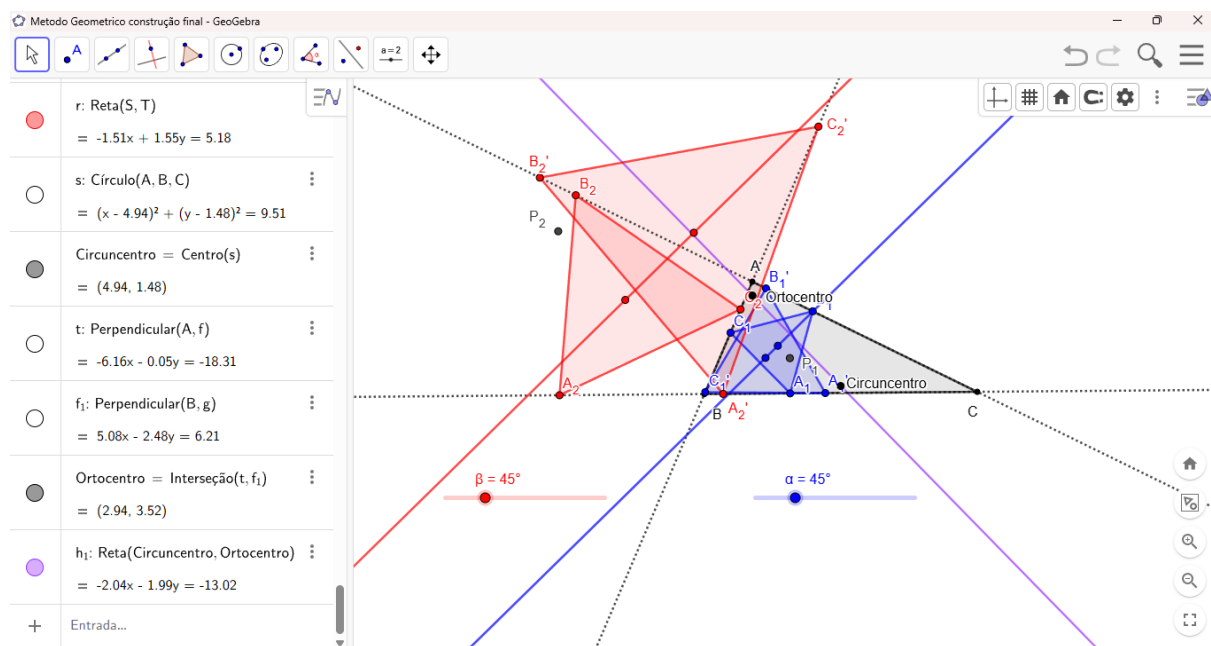


Figura 3.23: Reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Ao verificar a relação entre essas retas e a reta de Euler, na Figura 3.24. Encontra-se que as retas são perpendiculares, validando que as retas dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos a um triângulo são perpendiculares à reta de Euler dele.

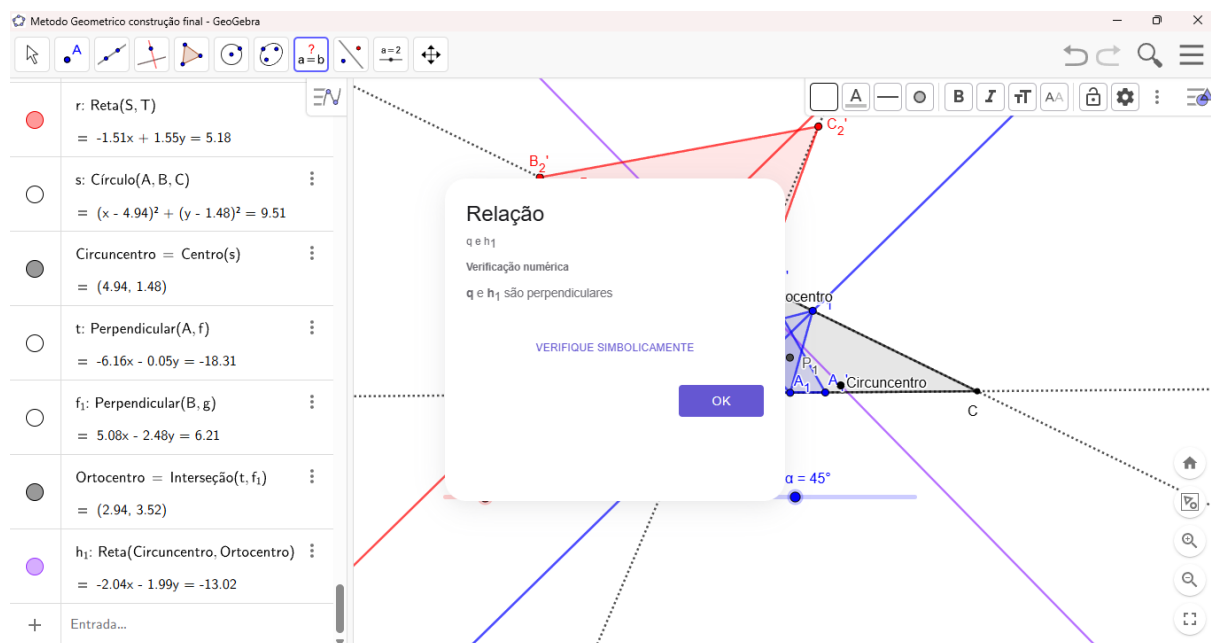


Figura 3.24: Relação entre as retas e a reta de Euler

Fonte: Autor (2026).

Construção disponível em Construção método geométrico.

3.3 Construções para quadrados inscritos em triângulos - caso acutângulo ou retângulo

Para a construção dos quadrados inscritos no triângulo $\triangle ABC$, baseada no método de Bailey e Detemple (1998) e válida para casos em que o triângulo é acutângulo ou retângulo, sem perda de generalidade, assume-se $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$. Inicia-se como na construção do método de (Andrica; Bagdasar; Marinescu, 2024), na Figura 3.25, fixando o vértice B na origem e introduzindo o parâmetro $u \in [0, 10]$ para definir $C = (u, 0)$, permitindo variação flexível do comprimento de BC e o alinhando ao eixo das abscissas.

Na Figura 3.25, o ponto A adequado para a construção deve pertencer a região I , que aparece na Figura 2.14. Logo tem-se que $A = (x, y) \in I$ se e somente se $\left\{ y \geq \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{u}{2}\right)^2} \right\} \cap \left\{ y \leq \sqrt{u^2 - (x - u)^2} \right\} \cap \left\{ 0 \leq x \leq \frac{u}{2} \right\}$, garantindo que os triângulos $\triangle ABC$ serão acutângulos ou retângulos, adequados à construção conforme o Lema 2.1.

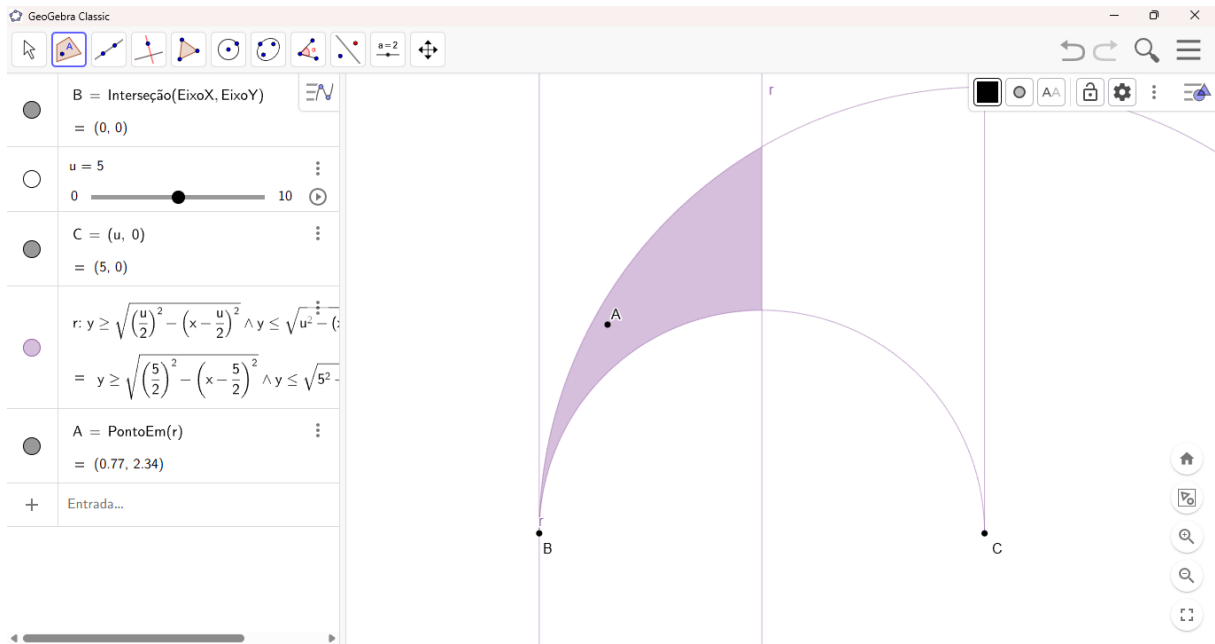


Figura 3.25: Pontos A , B e C

Fonte: Autor (2026).

Após a seleção do ponto $A \in r$, na Figura 3.26, procede-se com a construção do triângulo $\triangle ABC$, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e a determinação da altura h_a relativa ao lado BC . Para tanto, traça-se a reta perpendicular a BC passando por A , marca-se o ponto A' como a interseção dessa perpendicular com BC , obtendo o segmento $AA' = h_a$.

Com a medida de h_a determinada, será descoberto o comprimento do lado do quadrado inscrito em $\triangle ABC$ com um lado contido em BC , conforme Lema 2.1. Essa relação algébrica fornece o valor exato do lado do quadrado, permitindo sua construção de maneira precisa.

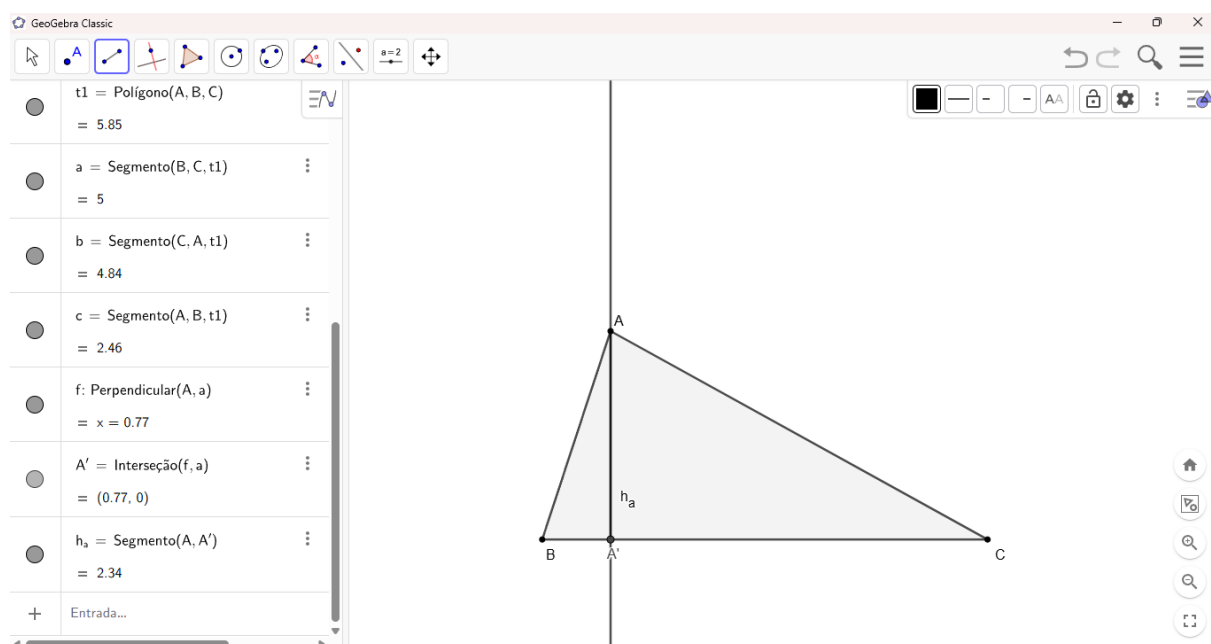


Figura 3.26: Triângulos $\triangle ABC$ e h_a

Fonte: Autor (2026).

Na Figura 3.27, constrói-se uma reta paralela a BC distante dela pela medida $s_a = \frac{2\Delta}{a+h_a} = \frac{a \cdot h_a}{a+h_a}$, onde Δ é a área do triângulo $\triangle ABC$. Para tanto, traça-se a circunferência d de centro A' e raio s_a , marca-se o ponto D como interseção entre d e a altura h_a e constrói-se a reta g perpendicular a h_a passando por D .

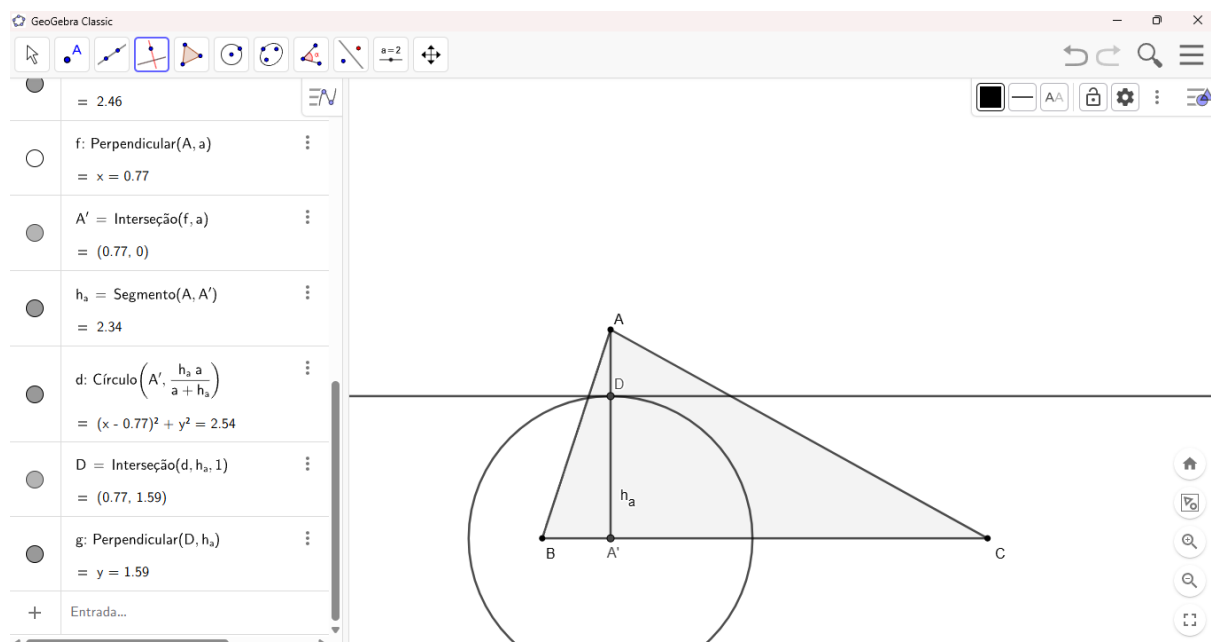


Figura 3.27: Reta paralela a BC

Fonte: Autor (2026).

Em seguida, na Figura 3.28, marcam-se os pontos E e F interseções entre g e os lados AC e AB , respectivamente. Esses pontos determinam as posições dos vértices superiores

do quadrado inscrito, com lado contido em BC .

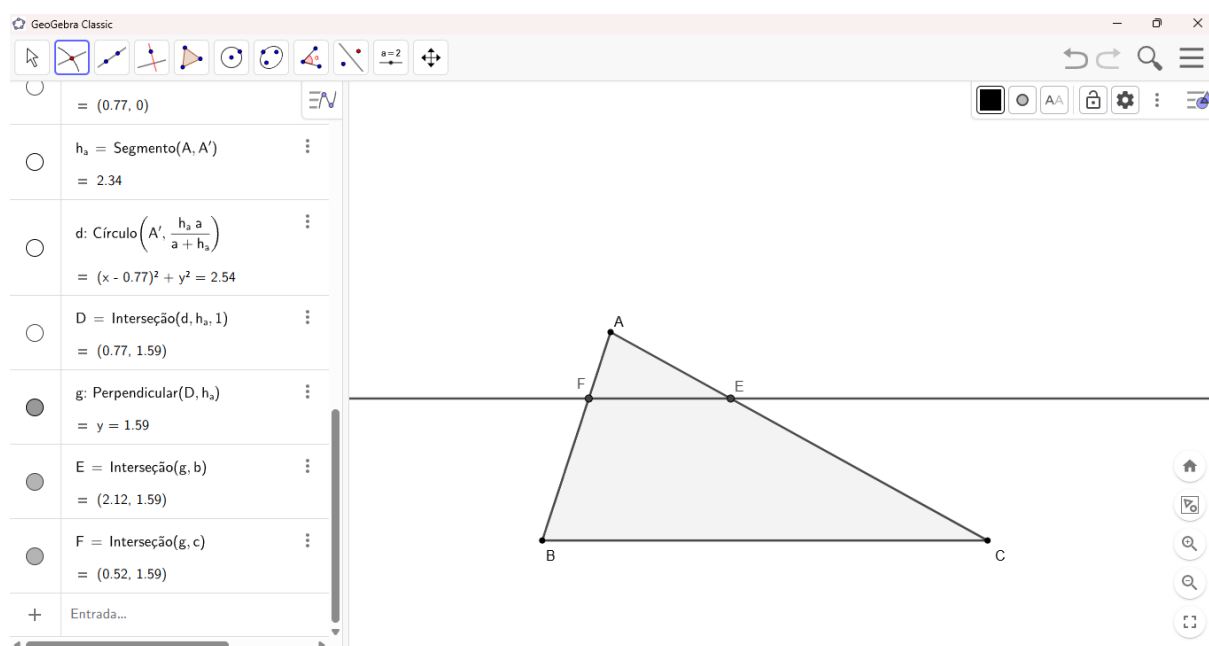


Figura 3.28: Pontos E e F

Fonte: Autor (2026).

Para completar o quadrado, na Figura 3.29, traçam-se duas retas perpendiculares a g : uma passando por E e interceptando BC no ponto H , e outra passando por F e interceptando BC no ponto G .

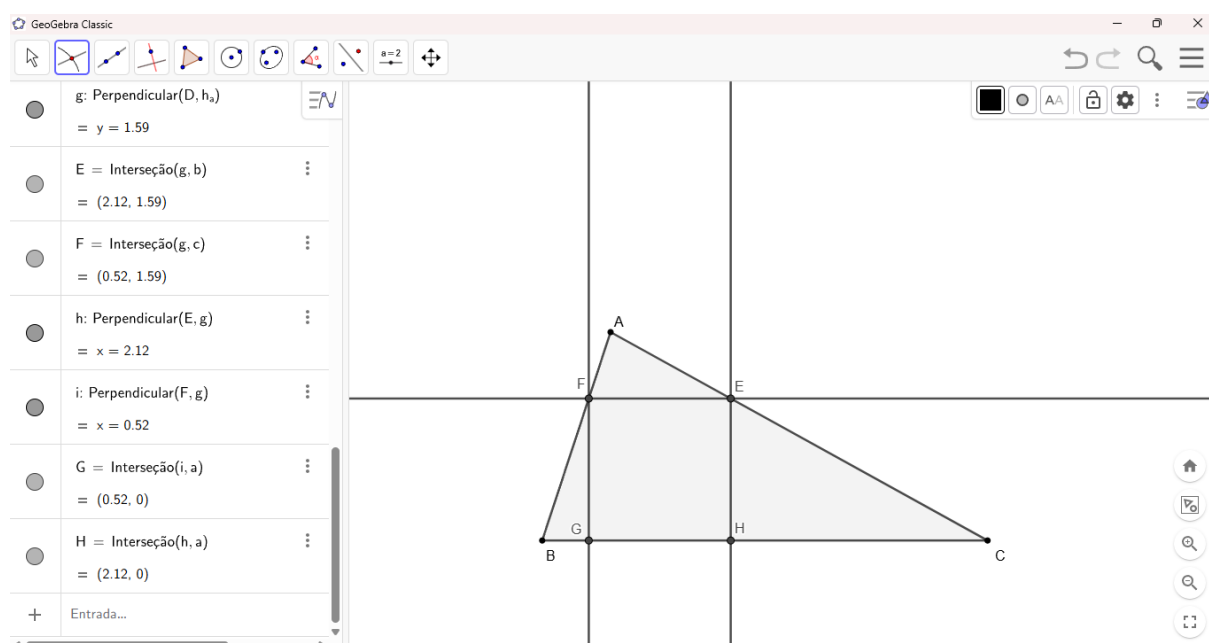


Figura 3.29: Pontos G e H

Fonte: Autor (2026).

Os pontos G e H constituem os vértices inferiores do quadrado $EFGH$, na Figura 3.30, cujo lado GH está contido no lado BC .

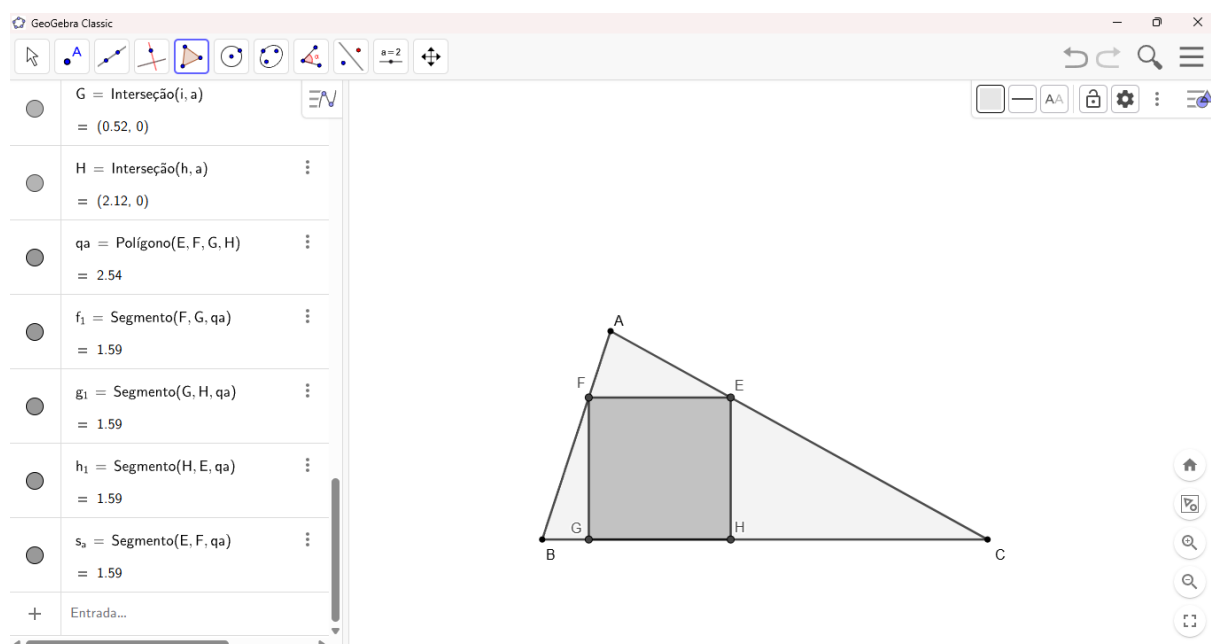


Figura 3.30: Quadrado inscrito ao triângulo $\triangle ABC$ com um lado contido em BC
Fonte: Autor (2026).

Para verificar os itens (a) e (b) do Teorema 2.1, na Figura 3.31, procedem-se as construções dos demais quadrados inscritos no triângulo $\triangle ABC$: um com lado contido em AC e outro com lado contido AB . Essas construções são análogas à anterior, substituindo-se a base BC por AC ou AB .

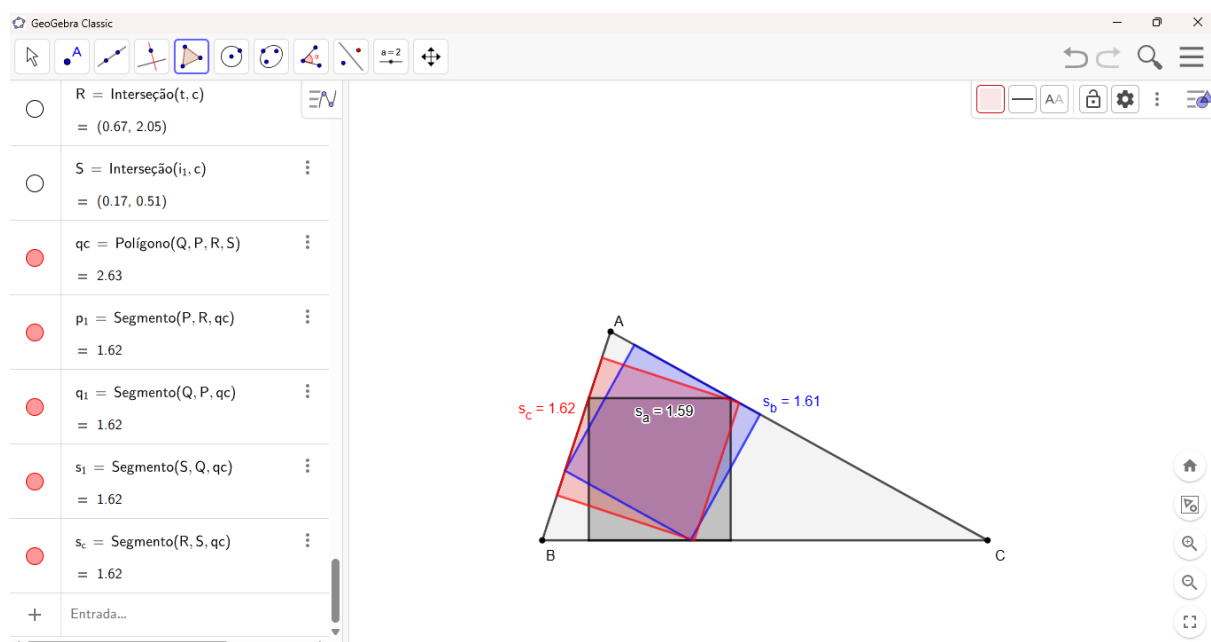


Figura 3.31: Maior quadrado inscrito ao triângulo acutângulo $\triangle ABC$
Fonte: Autor (2026).

Com a construção efetuada, na Figura 3.31, verifica-se que o maior quadrado inscrito no triângulo $\triangle ABC$ é aquele com lado contido no menor lado de $\triangle ABC$. Ademais, na

Figura 3.32, ao deslocar interativamente o ponto A para uma posição que torne $\triangle ABC$ retângulo, constata-se que o maior quadrado inscrito corresponde àquele com lados contidos nos catetos, confirmando os itens (a) e (b) do Teorema 2.1 por meio da exploração dinâmica no GeoGebra.

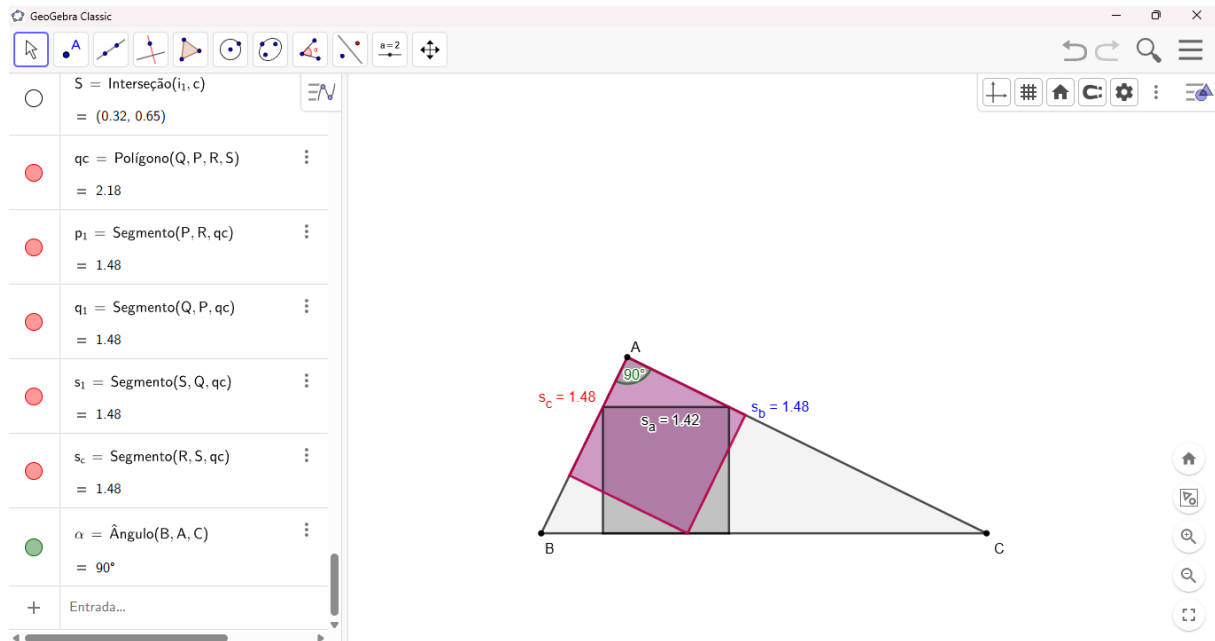


Figura 3.32: Maior quadrado inscrito ao triângulo retângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Construção disponível em Construção quadrados inscritos em triângulos - caso acutângulo ou retângulo.

3.4 Construções para quadrados inscritos em triângulos - caso obtusângulo

Para a construção dos quadrados inscritos no triângulo $\triangle ABC$, baseada no método de Bailey e Detemple (1998) para caso em que o triângulo é obtusângulo. Reinicia-se, na Figura 3.33, o sistema de coordenadas cartesianas, fixando o vértice C na origem do plano, introduzindo o parâmetro $u \in [0, 10]$ para definir $B = (-u, 0)$.

Para garantir que o vértice $A = (x, y)$ seja escolhido de modo que o triângulo $\triangle ABC$ seja obtusângulo, considera-se que ele deve situar-se na região onde o ângulo obtuso está em A , isto é, em uma das regiões designadas por região II (Figura 2.15) ou região III (Figura 2.16). Com esse objetivo, na Figura 3.33, delimita-se a região $r : \left\{ y \leq \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{u}{2}\right)^2} \right\} \cap \{y \geq 0\} \cap \left\{x \leq \frac{u}{2}\right\}$ que corresponde ao semidisco superior de diâmetro BC , restringido ao semiplano $x \leq \frac{u}{2}$, assegurando a posição de A em setores que produzem triângulos obtusângulos.

Além disso, introduz-se a curva implícita $f(x, y) = y^3 + x^2y + 2ux^2 + 2uy^2 + 2u^2x$ a qual atua como fronteira interna separando os triângulos obtusângulos “para fora” (região *II*) e “para dentro” (região *III*). Assim, a escolha de A em r , permite distinguir as duas situações geométricas relevantes para a análise dos quadrados inscritos no caso obtusângulo.

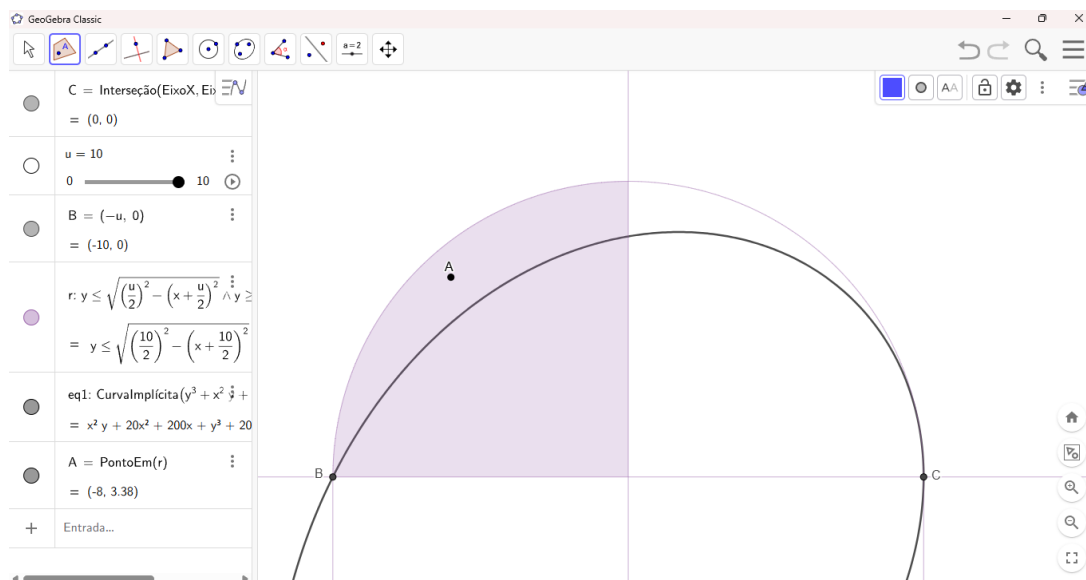


Figura 3.33: Regiões *II* e *III*

Fonte: Autor (2026).

Após a seleção do ponto $A = (x, y) \in r$, na Figura 3.34, procede-se à construção do triângulo $\triangle ABC$. Determina-se as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e da altura h_a relativa ao vértice A , para serem utilizados nas fórmulas (2.2) e (2.3).

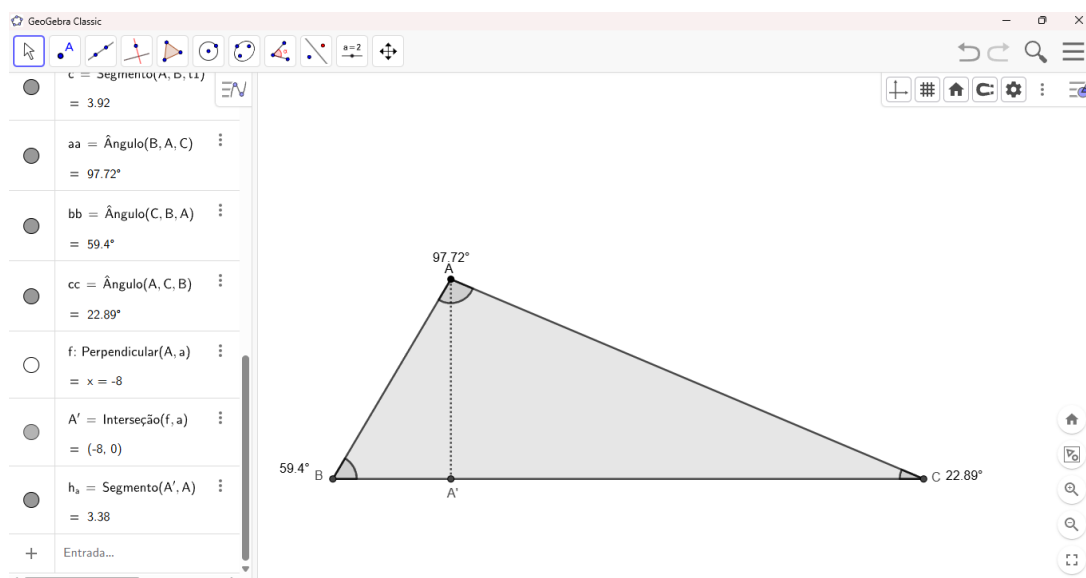


Figura 3.34: Triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Na Figura 3.35, constrói-se a circunferência de centro A e raio $s_b = \frac{h_a}{\cos \hat{C} + \sin \hat{C}}$ e marca-se o ponto D como interseção entre ela e o lado AC .

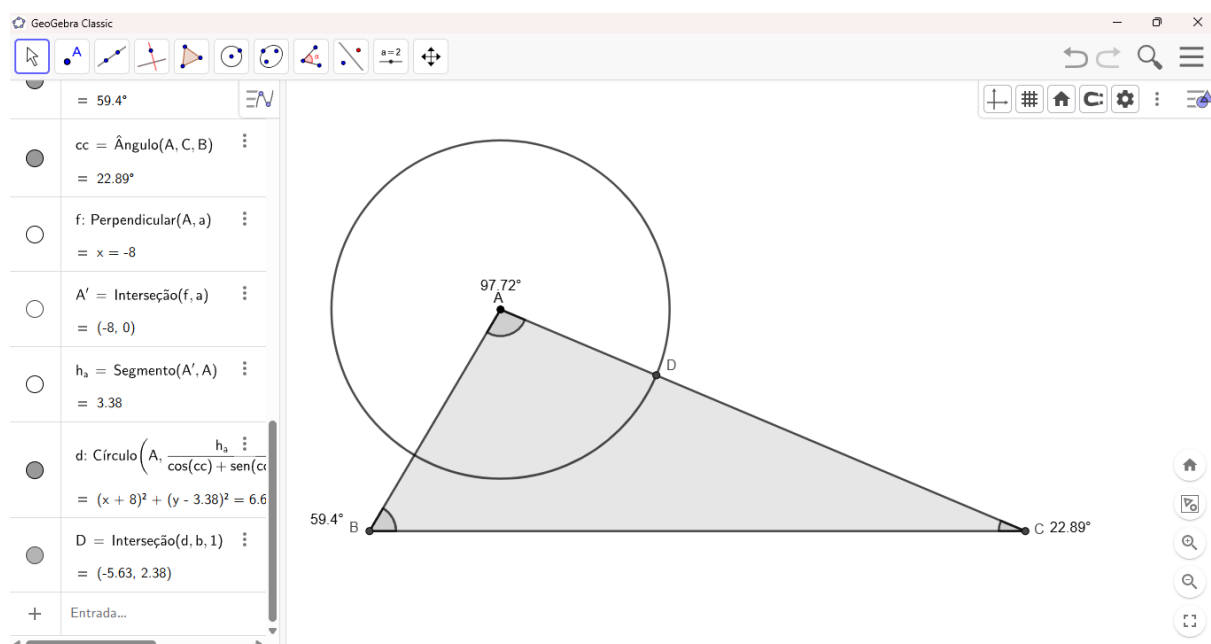


Figura 3.35: Ponto D

Fonte: Autor (2026).

Na Figura 3.36, completa-se a construção do quadrado de lado AD , que é o maior quadrado que *cabe* no $\triangle ABC$ com um lado contido em AC . Esse quadrado é gerado empregando-se a ferramenta de polígono regular no ambiente GeoGebra, selecionando-se os vértices A e D e especificando-se os quatro lados.

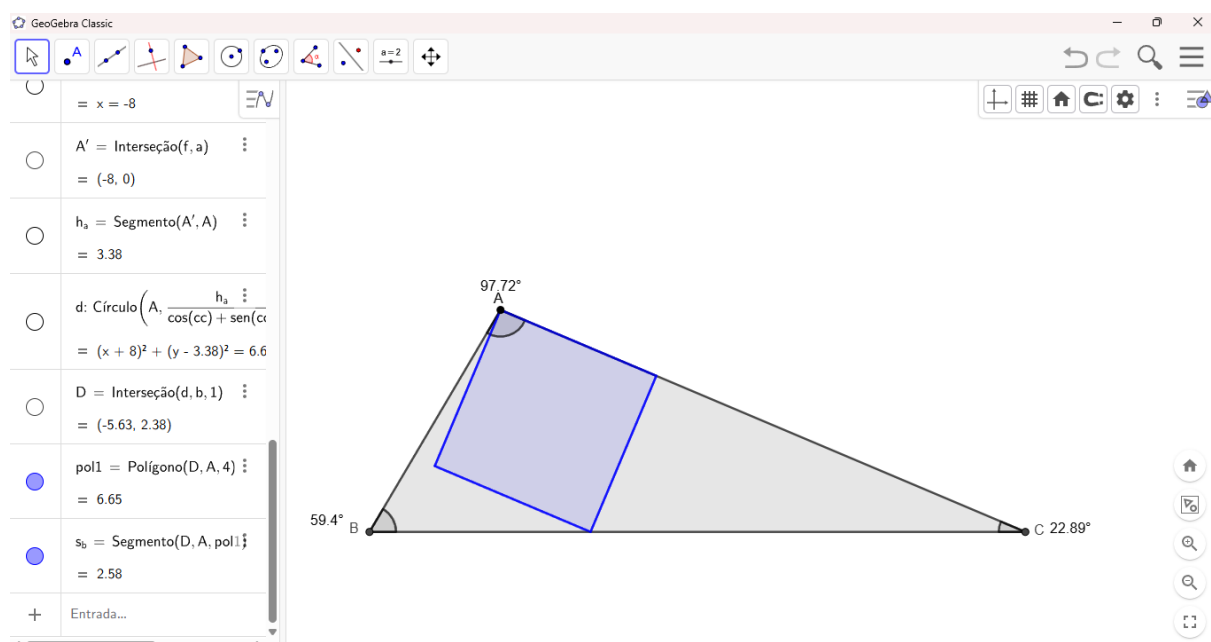


Figura 3.36: Quadrado de lado AD

Fonte: Autor (2026).

De maneira análoga, na Figura 3.37, é construído o quadrado de lado AE , onde E é determinado como interseção da circunferência centrada em A de raio $s_c = \frac{h_a}{\cos \hat{B} + \sin \hat{B}}$ e

do lado AB , empregando novamente a ferramenta de polígono regular nos vértices A e E . Esse é o maior quadrado que cabe em $\triangle ABC$ com um lado contido em AB .

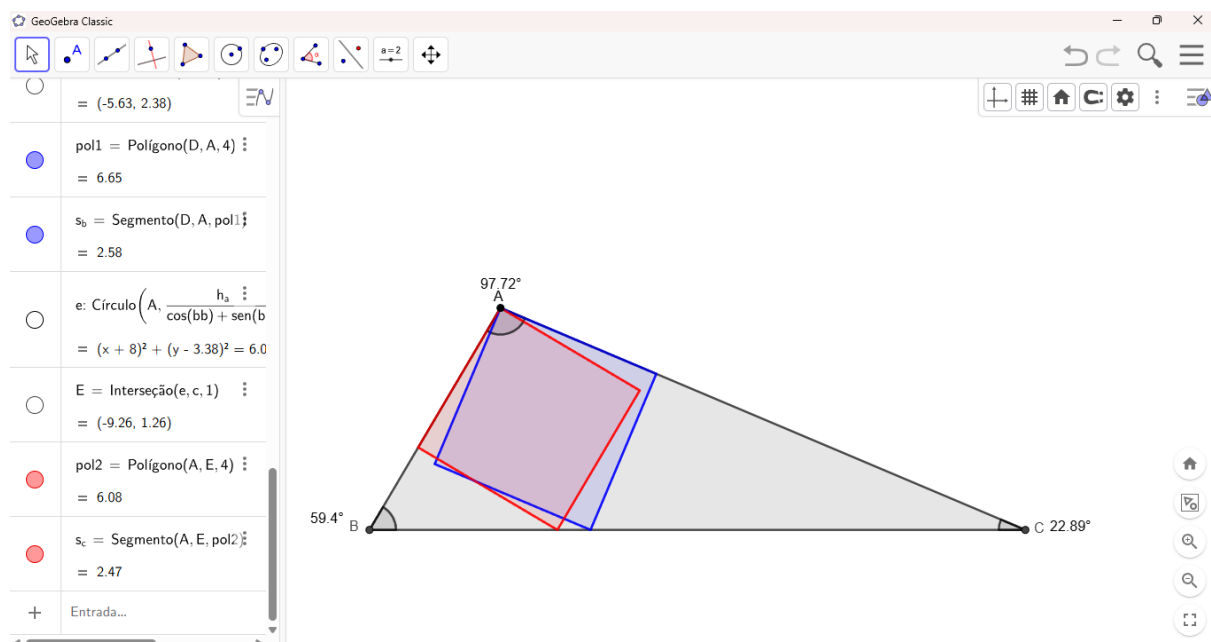


Figura 3.37: Quadrado de lado AE

Fonte: Autor (2026).

Na figura 3.38, constrói-se o quadrado inscrito em $\triangle ABC$ um lado contido em BC , cuja metodologia foi detalhada na seção 3.3.

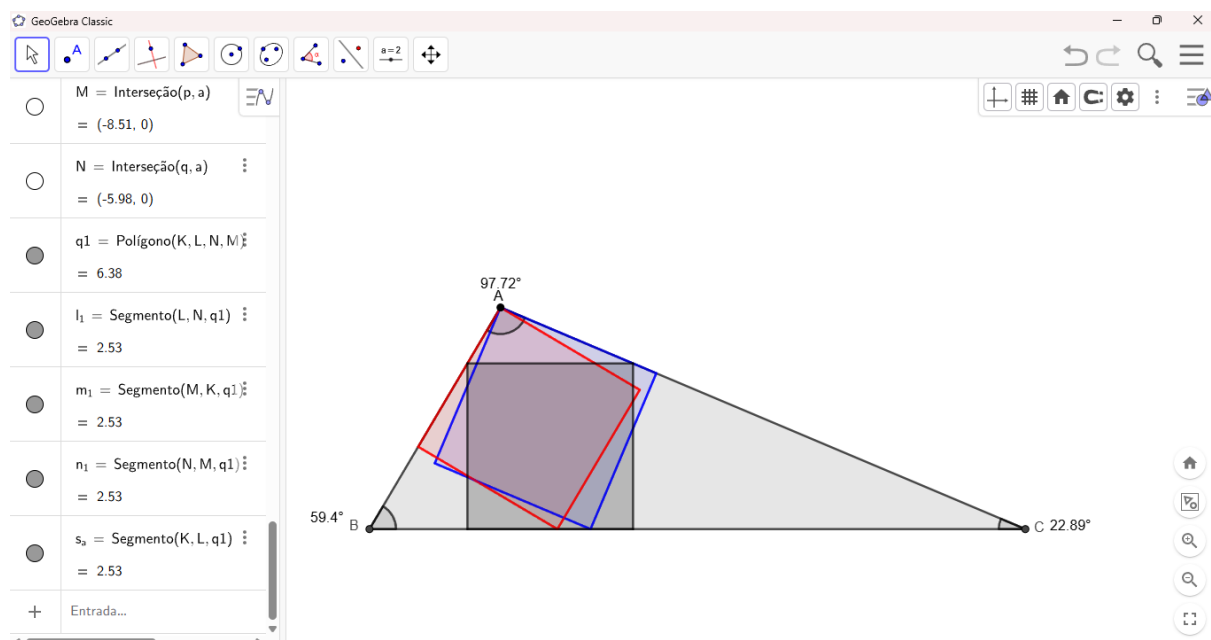


Figura 3.38: Quadrado inscrito ao triângulo $\triangle ABC$

Fonte: Autor (2026).

Com as construções concluídas, torna-se possível verificar a relação entre as medidas de seus lados s_a , s_b e s_c , conforme Teorema 2.2.

Se $A \in II$, Figura 3.39, o maior quadrado corresponde ao de lado s_b .

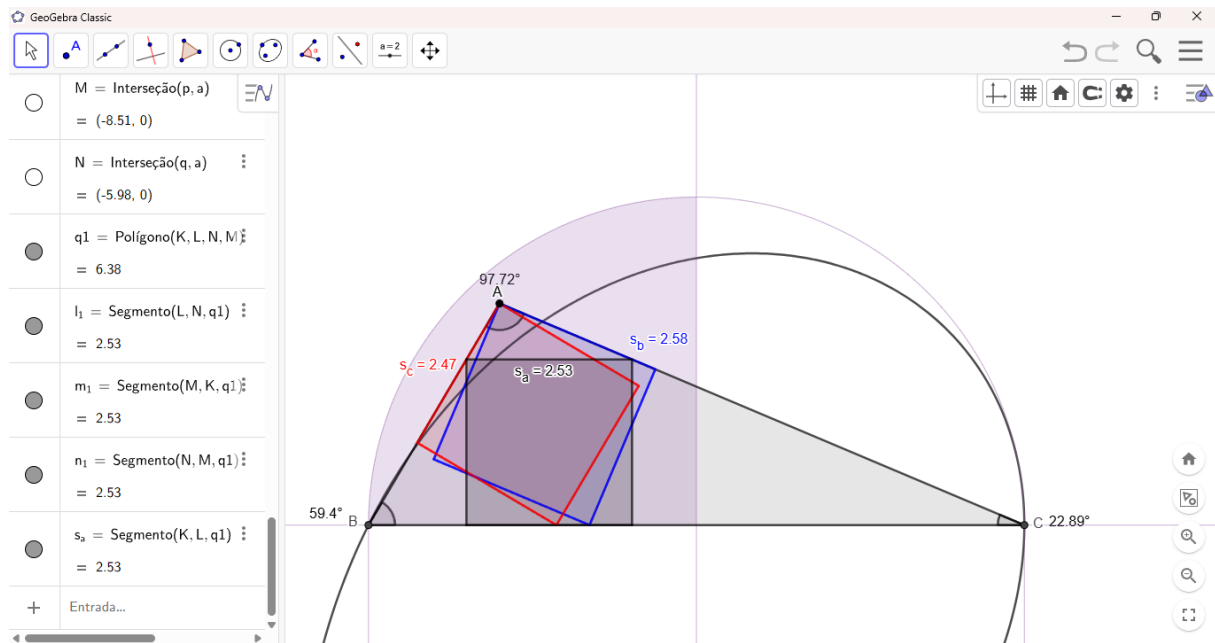


Figura 3.39: $A \in II$

Fonte: Autor (2026).

Se $A \in III$, Figura 3.40, o maior de corresponde ao de lado s_a .

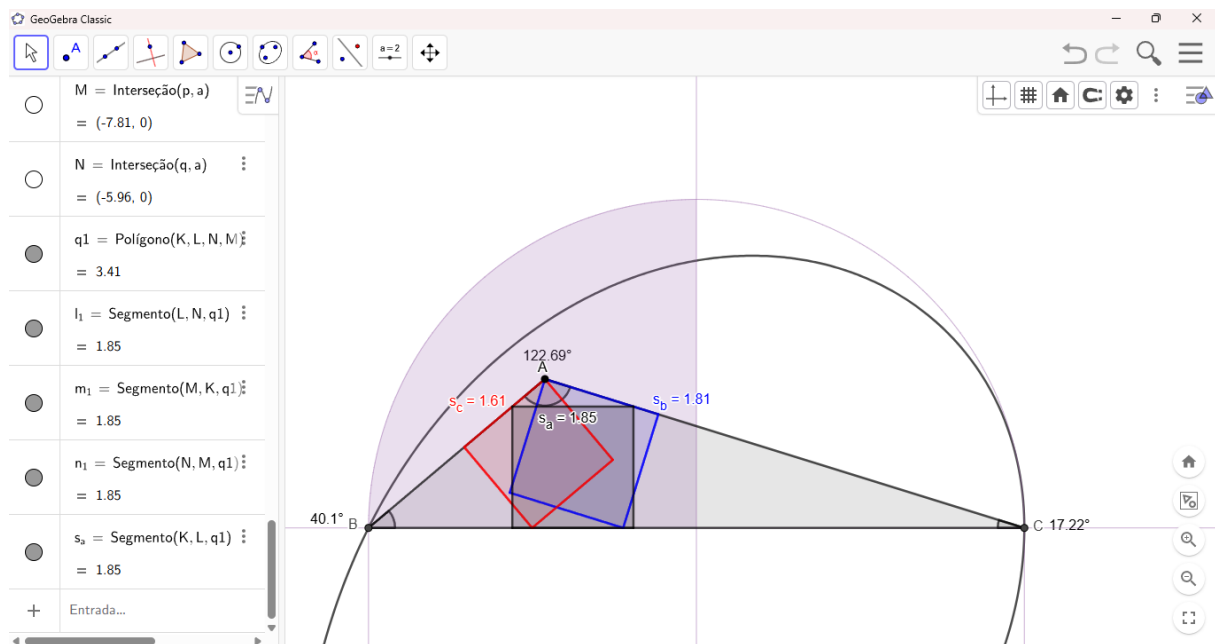


Figura 3.40: $A \in III$

Fonte: Autor (2026).

Ao mover interativamente o ponto A para a posição adequada, é possível visualizar o triângulo de Calabi, na Figura 3.41. Essa dinâmica no GeoGebra revela relações geométricas sutis entre a posição de A , os ângulos obtusos e as dimensões dos quadrados, enriquecendo a exploração didática.

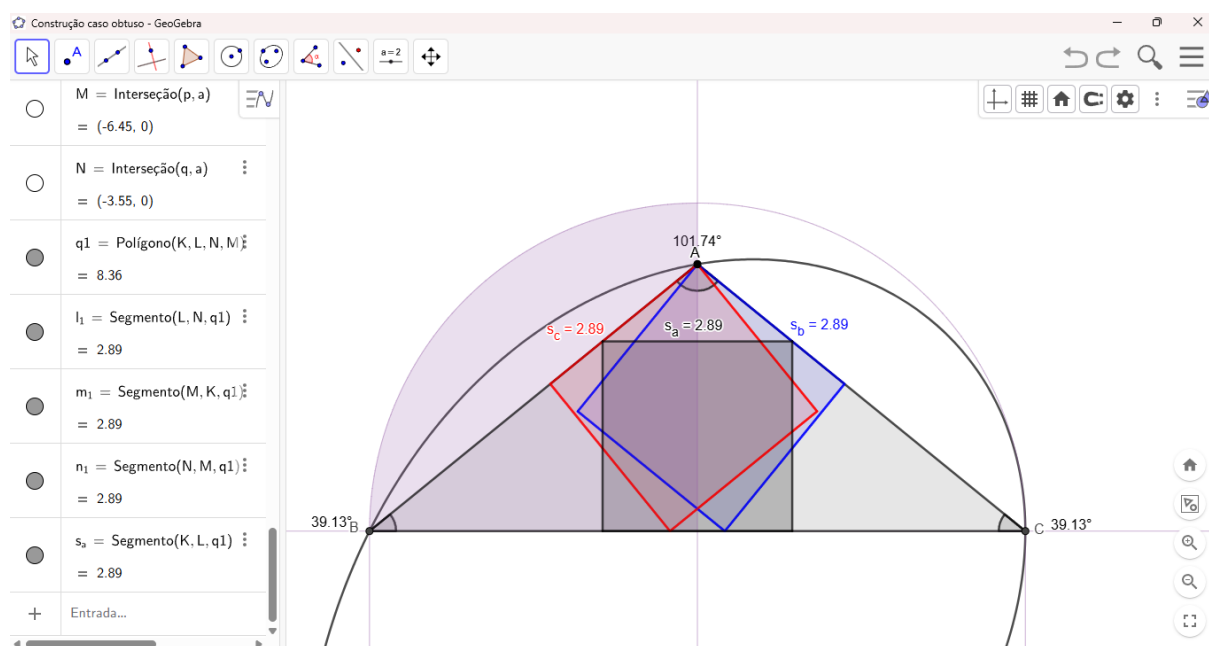


Figura 3.41: triângulo de Calabi

Fonte: Autor (2026).

Construção disponível em Construção quadrados inscritos em triângulos - caso obtusângulo.

Capítulo 4

Perspectivas de aplicação no Ensino Médio

Neste capítulo, são relacionados possíveis métodos didáticos para aplicação do trabalho desenvolvido, com foco em propostas de exploração dinâmica voltadas ao Ensino Médio. O objetivo é indicar caminhos pelos quais os resultados teóricos e construtivos sobre triângulos equiláteros e quadrados inscritos em triângulos podem ser apropriados pelo professor como situações de investigação em sala de aula, promovendo a formulação de conjecturas, o uso de argumentos geométricos e a mobilização de diferentes registros de representação, em especial a geometria dinâmica no GeoGebra.

As propostas aqui apresentadas não se restringem estritamente às construções formalizadas nos capítulos anteriores, mas partem delas para propor atividades que oferecem uma percepção dinâmica da geometria e reforcem habilidades já trabalhadas no Ensino Fundamental e desenvolvam habilidades do Ensino Médio .

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Brasil (2018), o Ensino Fundamental deve garantir que os estudantes desenvolvam habilidades essenciais, entre as quais se destacam:

- Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono;
- Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial;
- Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros;

- Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos;
- Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a interseção de classes entre eles;
- Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais;
- Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros;
- Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano, segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

E em harmonia com as orientações da (BNCC) Brasil (2018), para o Ensino Médio, as habilidades abaixo devem ser desenvolvidas:

- Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
- Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

4.1 A geometria dinâmica como ambiente de investigação

No capítulo anterior evidencia-se o potencial do GeoGebra tanto para a validação experimental de resultados clássicos quanto para a exploração de novas configurações geométricas. No contexto do Ensino Médio, o software pode ser mobilizado como um ambiente de experimentação em que os estudantes:

- Manipulam livremente vértices, segmentos e ângulos, observando como certas propriedades se preservam ou se modificam;
- Medem comprimentos, áreas e ângulos, registrando regularidades numéricas que sugerem relações geométricas;
- Utilizam controles deslizantes para variar parâmetros e investigar como o comportamento de um objeto (por exemplo, o lado de um quadrado inscrito) depende de determinadas grandezas (como um ângulo ou a altura de um triângulo).

Tais práticas favorecem o levantamento de conjecturas que, posteriormente, podem ser objeto de sistematização com argumentos dedutivos mais próximos da formalização apresentada na dissertação. A seguir, são esboçados algumas trilhas possíveis, articulando o conteúdo desenvolvido nos capítulos anteriores com situações de ensino exploratórias.

4.2 Explorações com triângulos equiláteros inscritos em triângulos arbitrários

A partir dos resultados do Capítulo 1, sabe-se que, dado um triângulo $\triangle ABC$, é possível construir triângulos equiláteros inscritos por diferentes métodos (algébrico e geométrico).

O método algébrico destaca-se por traduzir a configuração geométrica em um sistema de equações angulares, permitindo estudar a existência e a variação dos triângulos equiláteros inscritos a partir de um parâmetro e dos ângulos internos do triângulo.

Uma atividade investigativa que pode ser proposta aos estudantes consiste em analisar a existência de triângulos equiláteros inscritos em um triângulo qualquer, a partir do método algébrico desenvolvido na dissertação.

Partindo de um triângulo $\triangle ABC$ e um triângulo $\triangle MNP$ inscrito a $\triangle ABC$, onde $M \in BC$, $N \in CA$ e $P \in AB$. São definidos os ângulos $\alpha_1 = \widehat{CMN}$, $\alpha_2 = \widehat{PMB}$, $\beta_1 = \widehat{ANP}$, $\beta_2 = \widehat{MNC}$, $\gamma_1 = \widehat{BPM}$ e $\gamma_2 = \widehat{NPA}$, com mediação do professor, os alunos montam o sistema de equações que relaciona esses ângulos às condições de $\triangle MNP$ ser equilátero e às somas suplementares com os ângulos do $\triangle ABC$. Em seguida, escolhe-se um parâmetro livre, como $\alpha_1 = \alpha$, para obter as expressões de $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ em função de α e de $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = 120^\circ - \alpha \\ \beta_1 = \alpha + \hat{C} - 60^\circ \\ \beta_2 = 180^\circ - (\alpha + \hat{C}) \\ \gamma_1 = \alpha + 60^\circ - \hat{B} \\ \gamma_2 = 60^\circ + \hat{B} - \alpha \end{cases}$$

Em seguida, o professor discute com os estudantes que, a partir de um único parâmetro α e dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, todos os demais ângulos da configuração ficam determinados.

Na segunda etapa, em grupos, os estudantes impõem as condições

$$0^\circ \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \leq 120^\circ$$

transformando essas restrições em desigualdades para o parâmetro α , podendo assim investigar para quais tipos de triângulo (acutângulo, retângulo, obtusângulo) existe ao menos um valor de α que satisfaz simultaneamente todas as condições.

Paralelamente, utilizam o GeoGebra para construir um triângulo equilátero “candidato”, para observar de forma dinâmica, quando ele de fato se inscreve no triângulo $\triangle ABC$, confrontando o que veem na tela com as conclusões algébricas.

Ao final, os alunos devem determinar e registrar:

- Um intervalo admissível de α em função de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$;
- Uma conjectura sobre quais triângulos admitem algum valor de α onde é possível inscrever ao menos um triângulo equilátero;
- Uma conjectura sobre a quantidade de triângulos equiláteros inscritos possíveis, à medida que o parâmetro α varia em um intervalo.

O professor encerra a atividade conectando essas conjecturas com os resultados formais apresentados na dissertação, mostrando como o método algébrico leva a condições precisas de existência para triângulos equiláteros inscritos.

Já o método geométrico enfatiza o uso de semelhança espiral, círculos e pontos de Apolônio, bem como triângulos pedais associados. Nele mostra-se que os baricentros dos triângulos equiláteros inscritos no triângulo $\triangle ABC$ alinham-se sobre uma reta, cuja posição se relaciona de forma notável com a reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$. Essa propriedade oferece um campo fértil para explorações dinâmicas no Ensino Médio.

Outra atividade consiste em realizar com os alunos a construção feita na seção 3.2 até a Figura 3.19, utilizando o método geométrico descrito no texto.

Após essa construção, os alunos devem analisar:

- O comportamento dos triângulos inscritos em $\triangle ABC$, à medida que α e β variam;
- O comportamento dos baricentros dos triângulos inscritos em $\triangle ABC$, à medida que α e β variam;
- O comportamento da reta de Euler de $\triangle ABC$ à medida que α e β variam.

Os estudantes podem, nesse contexto, serem levados a comparar as posições dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos e a descreverem, inicialmente em linguagem natural, quaisquer regularidades visuais percebidas.

Após a análise, pede-se que os estudantes formulem conjecturas sobre a configuração, como, por exemplo:

- Os baricentros de todos os triângulos equiláteros inscritos em um triângulo parecem estar alinhados;
- A reta que passa pelos baricentros é paralela à reta de Euler.

Por fim, o professor retoma as conjecturas dos alunos e com base nos resultados da dissertação, discute com os alunos como tais afirmações podem ser demonstradas. Introduzindo de forma gradual as ideias de pontos de Apolônio, semelhança espiral e propriedades da reta de Euler.

4.3 Explorações com quadrados inscritos em triângulos arbitrários

O Capítulo 2 apresenta condições de existência e métodos de construção de quadrados inscritos em triângulos, incluindo o caso acutângulo/retângulo e o caso obtusângulo, bem como resultados sobre qual dos quadrados é maior em função dos lados do triângulo.

Uma atividade para trabalhar os resultados do Capítulo 2 no Ensino Médio, é inicialmente realizar com os alunos a construção feita na seção 3.3.

Após essa construção, os alunos devem analisar os comprimentos dos lados a , b e c do triângulo e dos lados s_a , s_b , s_c dos quadrados correspondentes ao movimentar os vértices do triângulo $\triangle ABC$.

A partir desse experimento, os alunos podem ser levados a conjecturar enunciados dos resultados demonstrados na dissertação:

- Quando o lado a é o menor do triângulo, o maior quadrado parece estar sobre a ;
- No triângulo retângulo, o maior quadrado parece estar sobre os catetos.

Essa atividade possibilita que os estudantes explorem relações geométricas de forma investigativa, desenvolvendo tanto a intuição quanto a capacidade de formular e testar conjecturas. Além disso, a proposta contribui para o desenvolvimento das competências previstas na BNCC, ao incentivar a argumentação, a comunicação matemática e o uso de representações múltiplas na resolução de problemas.

4.4 Sequências didáticas

Nesta dissertação, os Apêndices A e B reúnem duas propostas de sequências didáticas, ambas pensadas para serem aplicadas em turmas do ensino médio.

Capítulo 5

Considerações finais

Esta dissertação, voltada à investigação das condições geométricas para a existência de inscrição e circunscção entre polígonos, com ênfase nas relações entre triângulo-triângulo e triângulo-quadrado, trouxe abordagens e técnicas distintas para a compreensão mais elaborada destes temas. A partir das definições clássicas de Euclides (2009) e das contribuições de autores contemporâneos como Andrica, Bagdasar e Marinescu (2024), Russell (2015) e Wetzel (2002), foram sistematizados os métodos algébrico e geométrico que convergem para as mesmas configurações e foi mostrado a determinação do maior quadrado inscrito em triângulos arbitrários, incluindo o caso obtusângulo, até então pouco explorado.

As construções validadas no software GeoGebra permitiram não apenas a verificação dos resultados teóricos, mas também a criação de atividades didáticas para o Ensino Médio. Essas propostas pedagógicas, alinhadas às diretrizes da BNCC, favorecem o desenvolvimento do raciocínio geométrico por meio da exploração experimental, formulação de conjecturas e transição para demonstrações formais.

As principais contribuições deste trabalho incluem:

- Reunião e organização de resultados na literatura sobre problemas de inscrição entre polígonos;
- Desenvolvimento de construções no GeoGebra que podem ser utilizadas como ferramentas didáticas;
- Apresentação de técnicas avançadas de geometria euclidiana em linguagem acessível para professores de matemática.

Do ponto de vista pedagógico, a principal contribuição reside menos na transmissão direta de enunciados e demonstrações avançadas e mais na possibilidade de:

- Criar ambientes de investigação com geometria dinâmica, em que os estudantes possam visualizar propriedades emergindo do movimento;

- Favorecer o trânsito entre experimentação, formulação de conjecturas e argumentação geométrica;
- Articular conteúdos tradicionais (semelhança, triângulos, áreas, funções) com problemas de inscrição e circunscrição geralmente pouco explorados nos currículos escolares.

Os problemas de inscrição e circunscrição oferecem diversas direções para pesquisas futuras:

- Estudar os problemas de inscrição e circunscrição para triângulos arbitrários e quadriláteros arbitrários;
- Investigar condições para inscrição de n -ágono regular em um n -ágono não regular;
- Estudar problemas análogos envolvendo poliedros, como tetraedros inscritos em cubos;
- Criar sequências didáticas baseadas nas construções do GeoGebra para uso no ensino de geometria.

Conforme observado na introdução deste trabalho, a geometria é uma área da matemática que possui diversos problemas com enunciados simples e soluções não triviais. A presente dissertação demonstra que a geometria euclidiana, está longe de ser uma área esgotada, oferecendo ainda muitas oportunidades para investigação e descobertas. A combinação de técnicas clássicas com ferramentas computacionais modernas, como o GeoGebra, potencializa tanto a pesquisa quanto o ensino, tornando resultados sofisticados acessíveis a um público mais amplo.

Referências

AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A. A. **Geometry of Conics**. [S. l.]: American Mathematical Society, 2007. v. 26. (Mathematical World). ISBN 978-0-8218-4323-9.

ALTSHILLER-COURT, N. **College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle**. Second Edition, Revised and Enlarged. Mineola, NY: Dover Publications, 2007. Unabridged republication of the second edition originally published by Barnes & Noble, Inc., New York, 1952. ISBN 0-486-45805-9.

ANDRICA, D.; BAGDASAR, O.; MARINESCU, D.-Ș. Inscribed Equilateral Triangles in General Triangles. **International Journal of Geometry**, v. 13, n. 2, p. 113–124, 2024. Disponível em: <https://ijgeometry.com/vol-13-2024-no-2-april/>. Acesso em: 17 jun. 2025.

BAILEY, H.; DETEMPLE, D. Squares Inscribed in Angles and Triangles. **Mathematics Magazine**, Taylor & Francis, v. 71, n. 4, p. 278–284, 1998. ISSN 0025-570X. DOI: 10.1080/0025570X.1998.11996652. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1998.11996652>.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do Professor de Matemática, 11). Reimpressão: Agosto de 1997. ISBN 85-85818-02-6.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher e Editora da Universidade de São Paulo, 1974. Tradução de *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. [S. l.: s. n.], 2018.

BRUNE, E. W. Größtes Quadrat im Dreiecke. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)**, v. 15, p. 365–366, 1836.

CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **The Book of Numbers**. New York: Copernicus, 1996. ISBN 0-387-97993-X.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar, 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1687-0 (professor). ISBN 978-85-357-1686-3.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. p. 600.

GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; SANTOS CRISSAFF, L. dos. **Geometria Analítica**. 2. ed. [S. l.]: SBM, 2017. p. 373. ISBN 9788583371212.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Projeto Euclides). ISBN 9788524404306.

GUPTA, A.; RUBINSTEIN-SALZEDO, S. Inscribed triangles of Jordan curves in $\mathbb{R}^n$. Versão v1: **arXiv preprint**, fev. 2021. arXiv: 2102.03953 [math.MG]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2102.03953>. Acesso em: 21 dez. 2025.

HONSBERGER, R. **Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry**. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1995. v. 37. (New Mathematical Library). Print ISBN: 978-0-88385-639-0, Electronic ISBN: 978-0-88385-951-3. ISBN 978-0-88385-639-0.

MCDOWELL, J. L. **Exercises on Euclid and in Modern Geometry for the Use of Schools, Private Students, and Junior University Students**. Cambridge: Deighton, Bell, 1863.

MEYERSON, M. D. Equilateral triangles and continuous curves. **Fundamenta Mathematicae**, v. 110, n. 1, p. 1–9, 1980. DOI: 10.4064/fm-110-1-1-9. Disponível em: <https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/fundamenta-mathematicae/all/110>.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. ISBN 9788583371854.

NIELSEN, M. J. Triangles inscribed in simple closed curves. **Geometriae Dedicata**, v. 43, n. 3, p. 291–297, 1992. DOI: 10.1007/BF00151519.

REICH, S. Squares in a triangle. **The Mathematical Gazette**, v. 54, p. 145, 1970.

RUSSELL, R. A. Inscribed Equilateral Triangles. **Journal of Classical Geometry**, v. 4, p. 1–6, 2015. Disponível em: <https://jcgeometry.org/Articles/Volume4/Russel.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2025.

SOUSA, A. D. d. *et al.* Tecnologias na matemática: uma revisão acerca de trabalhos com o uso do GeoGebra no ensino de geometria plana. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 384–401, 2022. DOI:

10.33871/22385800.2022.11.26.384-401. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/download/5201/5073/21188>.

WETZEL, J. E. Squares in triangles. **The Mathematical Gazette**, Cambridge University Press, v. 86, n. 505, p. 28–34, 2002. DOI: 10.2307/3621570. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/3621570>.

YAGLOM, I. M. **Geometric Transformations II**. Tradução: Allen Shields. [S. l.]: Random House, The L. W. Singer Company, 1968. v. 21. (New Mathematical Library). Translated from the Russian.

Apêndice A

Plano de curso

Dados de Identificação	
Professor:	
Disciplina:	Matemática
Tema:	Triângulos equiláteros inscritos a triângulos arbitrários - Método algébrico
Pré-Requisitos:	• Classificação de triângulos. • Soma dos ângulos internos de um triângulo. • Operações algébricas simples com ângulos. • Inequações básicas e leitura de intervalos.
Turma:	2 ^a ou 3 ^a série do Ensino Médio.
Duração da aula:	7 aulas de 50 minutos

Objetivos

Geral

- Formular conjecturas sobre existência e quantidade de triângulos equiláteros inscritos em um triângulo $\triangle ABC$, com apoio do GeoGebra.

Específicos

- Familiarizar-se com a interface do GeoGebra;
- Dominar a criação de pontos livres e fixos no GeoGebra;
- Construir segmentos e explorar suas propriedades básicas no GeoGebra.

- Aprender a medir e exibir ângulos entre segmentos.
- Compreender relações dinâmicas entre medidas no GeoGebra.
- Construir configurações simples para verificação geométrica.
- Retomar conceitos básicos de triângulo equilátero.
- Apresentar a configuração geométrica de triângulo equilátero inscrito em $\triangle ABC$.
- Definir e nomear os ângulos auxiliares $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ e γ_2 .
- Relacionar esses ângulos aos ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$.
- Escolher $\alpha_1 = \alpha$ como parâmetro livre.
- Deduzir, com a turma, as expressões para $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ em função de α e dos ângulos internos de $\triangle ABC$.
- Discutir que um único parâmetro α e os ângulos de $\triangle ABC$ determinam toda a configuração.
- Traduzir as 6 condições geométricas $0^\circ \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \leq 120^\circ$ em desigualdades para o parâmetro α .
- Determinar, para cada condição, um intervalo admissível de α em função de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.
- Verificar experimentalmente, para acutângulo/retângulo/obtusângulo, se existe α que satisfaça todas as desigualdades.
- Formular conjecturas sobre existência e quantidade de triângulos equiláteros inscritos em um triângulo $\triangle ABC$, com apoio do GeoGebra.

Conteúdos

- Triângulos;
- Polígonos inscritos a outros polígonos;
- Sistemas de equações;
- Inequações;
- GeoGebra.

Procedimentos metodológicos

Aula 1: Noções básicas do GeoGebra - Pontos e segmentos

Carga horária: 50 minutos.

Local: Laboratório de informática.

Objetivos:

- Familiarizar-se com a interface do GeoGebra;
- Dominar a criação de pontos livres e fixos no GeoGebra;
- Construir segmentos e explorar suas propriedades básicas no GeoGebra.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Ficha orientada com os passos principais.

Procedimentos metodológicos:

1. Apresentação da interface

Mostrar a barra de ferramentas, área gráfica, barra de entrada e propriedades. Demonstrar como alternar entre diferentes visualizações (Geometria, Álgebra).

2. Criação de pontos

Ensinar a criação de:

- Ponto livre: clique na ferramenta “Ponto” e clique na área gráfica.
- Ponto fixo: digite coordenadas na barra de entrada (ex: $A=(2,3)$).
- Ponto em objeto: clique em segmento ou circunferência.

Pedir que criem 5 pontos livres e 3 pontos fixos nomeados A, B, C.

3. Segmentos e propriedades

Construir segmentos AB, BC, CA. Mostrar:

- Medida do comprimento (ferramenta “Distância”).
- Mostrar/esconder rótulos e informações.
- Alterar cores e espessuras nas propriedades.

Atividade: construir triângulo ABC e medir seus lados.

4. Fechamento

Salvar arquivos individuais (.ggb) e discutir dificuldades.

Aula 2: Noções básicas do GeoGebra - Medição de ângulos

Carga horária: 50 minutos

Local: Laboratório de informática

Objetivos:

- Aprender a medir e exibir ângulos entre segmentos.
- Compreender relações dinâmicas entre medidas no GeoGebra.
- Construir configurações simples para verificação geométrica.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Arquivo .ggb da aula anterior aberto;
- Ficha com exercícios de medição de ângulos.

Procedimentos metodológicos:

1. Revisão rápida

Recuperar triângulo ABC criado na aula anterior. Verificar se todos conseguiram abrir os arquivos salvos.

2. Medindo ângulos

Mostrar:

- Ferramenta “Ângulo” (selecionar 3 pontos ou 2 segmentos).
- Ângulos adjacentes e suplementares.
- Exibir valores dinâmicos (arrastar pontos e observar mudanças).

Atividade: medir $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e verificar se somam 180° .

3. Exploração guiada

Pedir que:

- Construam um triângulo equilátero (lados iguais).
- Meçam seus ângulos (deve dar 60°).
- Arrastem vértices para verificarem as mudanças das medidas dos ângulos e lados do triângulo.

4. Preparação para próximas aulas

Discutir como essas ferramentas serão usadas para construir triângulos equiláteros inscritos. Salvar arquivo final.

Aula 3: Introdução à configuração geométrica

Carga horária: 50 minutos

Local: Sala de aula

Objetivos:

- Retomar conceitos básicos de triângulo equilátero.
- Apresentar a configuração geométrica de triângulo equilátero inscrito em $\triangle ABC$.

Recursos didáticos:

- Quadro, giz/caneta.
- Folha impressa ou projetada com diagrama básico da configuração.

Procedimentos metodológicos:

1. Contextualização

Recuperar definição de triângulo equilátero (lados iguais, ângulos 60°). Perguntar: "Como seria um triângulo equilátero inscrito em outro triângulo?"

2. Apresentação visual da configuração

Desenhar no quadro $\triangle ABC$ qualquer e marcar pontos $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ formando $\triangle MNP$ equilátero.

- Destacar que cada vértice de $\triangle MNP$ está contido em um lado de $\triangle ABC$.
- Perguntar: "O que precisa acontecer para $\triangle MNP$ ser equilátero?"

3. Discussão inicial

Introduzir intuitivamente os ângulos auxiliares ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ e γ_2) que podem ser definidos a partir de dos ângulos internos de $\triangle ABC$ e de um dos ângulos auxiliares e anunciar que na próxima aula serão estudadas essas relações.

Aula 4: Sistema de ângulos auxiliares

Carga horária: 50 minutos

Local: Sala de aula

Objetivos:

- Definir e nomear os ângulos auxiliares $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ e γ_2 .

- Relacionar esses ângulos aos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Recursos didáticos:

- Quadro, giz/caneta.
- Diagrama completo com ângulos nomeados (projetado ou impresso).

Procedimentos metodológicos:

1. Revisão da configuração

Recuperar desenho da aula anterior. Perguntar onde estão os ângulos auxiliares.

2. Nomenclatura dos ângulos

Nomear os ângulos:

- $\alpha_1 = \hat{CMN}$
- $\alpha_2 = \hat{PMB}$
- $\beta_1 = \hat{ANP}$
- $\beta_2 = \hat{MNC}$
- $\gamma_1 = \hat{BPM}$
- $\gamma_2 = \hat{NPA}$

3. Sistema algébrico introdutório

Montar sistema que relaciona esses ângulos com os ângulos internos do $\triangle ABC$.

- $\alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ$
- $\beta_1 + \beta_2 = 120^\circ$
- $\gamma_1 + \gamma_2 = 120^\circ$
- $\beta_1 + \gamma_2 = 180^\circ - \hat{A}$
- $\gamma_1 + \alpha_2 = 180^\circ - \hat{B}$
- $\alpha_1 + \beta_2 = 180^\circ - \hat{C}$

.

4. Preparação

Anunciar que na próxima aula será encontrado as expressões para $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ em função de $\alpha = \alpha_1$ e dos ângulos internos de $\triangle ABC$.

Aula 5: Parâmetro α e dedução das expressões

Carga horária: 50 minutos

Local: Sala de aula

Objetivos:

- Escolher $\alpha_1 = \alpha$ como parâmetro livre.
- Deduzir, com a turma, as expressões para $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ em função de α e dos ângulos internos de $\triangle ABC$.
- Discutir que um único parâmetro α e os ângulos de $\triangle ABC$ determinam toda a configuração.

Recursos didáticos:

- Quadro, giz/canetas.
- Figura da configuração (a mesma utilizada na aula anterior).
- Calculadoras (opcional, para checagem numérica de exemplos).

Procedimentos metodológicos:

1. Escolha de $\alpha_1 = \alpha$

Formalizar a escolha de $\alpha_1 = \alpha$ como parâmetro livre. Escrever no quadro o sistema de equações que relaciona $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ com $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e com as condições de $\triangle MNP$ ser equilátero.

2. Dedução passo a passo

Conduzir a turma na obtenção das expressões, por exemplo:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = 120^\circ - \alpha, \quad \beta_1 = \alpha + \hat{C} - 60^\circ,$$

e assim por diante, até obter todas as relações desejadas. A cada passo, pedir que os estudantes indiquem de qual fato geométrico (soma de ângulos em triângulo, suplementares etc.) a equação foi obtida.

3. Discussão de determinação completa

Destacar que, uma vez escolhidos α e os ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, todos os demais ângulos da configuração $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ ficam determinados. Propor 1 ou 2 exemplos numéricos rápidos para verificar as contas em casos concretos.

Aula 6: Desigualdades algébricas e intervalos para α

Carga horária: 50 minutos

Local: Sala de aula

Objetivos:

- Traduzir as 6 condições geométricas $0^\circ \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \leq 120^\circ$ em desigualdades para o parâmetro α .
- Determinar, para cada condição, um intervalo admissível de α em função de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Recursos didáticos:

- Quadro e giz/caneta.
- Fichas impressas com as 6 condições geométricas e espaço para cálculos.
- Calculadoras simples (opcional).

Procedimentos metodológicos:

1. Revisão rápida

Recuperar sistema de ângulos da aula anterior. Mostrar diagrama com $\alpha_1 = \hat{\alpha}$, $\alpha_2 = \hat{A} - \alpha$, etc.

2. Desigualdades em grupos

Dividir turma em 6 grupos. Cada grupo recebe 1 condição, por exemplo:

$$\begin{aligned}0^\circ &\leq \beta_1 \leq 120^\circ \\0^\circ &\leq \alpha + \hat{C} - 60^\circ \leq 120^\circ \\60^\circ - \hat{C} &\leq \alpha \leq 180^\circ - \hat{C}\end{aligned}$$

Cada grupo registra seu intervalo para α .

3. Socialização e síntese (20 min)

Cada grupo apresenta seu resultado no quadro. Professor registra todas as 6 desigualdades e destaca que o intervalo final é a interseção de todas elas.

Aula 7: Investigação por tipos de triângulo no GeoGebra

Carga horária: 50 minutos

Local: Laboratório de informática

Objetivos:

- Verificar experimentalmente, para acutângulo/retângulo/obtusângulo, se existe α que satisfaça todas as desigualdades.
- Formular conjecturas sobre existência e quantidade de triângulos equiláteros inscritos em um triângulo $\triangle ABC$, com apoio do GeoGebra.

Recursos didáticos:

- Computadores/celulares com GeoGebra.
- Ficha com 3 triângulos prontos (acutângulo, retângulo, obtusângulo).
- Intervalos admissíveis calculados na aula anterior.

Procedimentos metodológicos:

1. Construção inicial

Abrir GeoGebra. Professor demonstra construção rápida:

- $\triangle ABC$ com ângulos medidos.
- Ponto M em BC parametrizado por α .
- Construir $\triangle MNP$ equilátero rotacionando e inscrito a $\triangle ABC$.

2. Exploração experimental

Grupos testam os 3 tipos de triângulo:

- Varia α dentro do intervalo admissível calculado.
- Observa quando $N \in CA$ e $P \in AB$.
- Registra: “Existe solução? Quantas? Em qual intervalo de α ?”

3. Conjecturas e socialização

Cada grupo apresenta 1 descoberta. Professor conecta observações empíricas aos resultados teóricos da dissertação.

Recursos didáticos

- Quadro e giz/canetas.
- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Fichas de orientações;
- Arquivo .ggb;

- Folha impressa com diagrama básico da configuração.
- Calculadoras;

Avaliação

A avaliação, será realizada por meio da observação da participação e do engajamento dos estudantes nas atividades propostas (discussões, trabalhos em grupo e uso do GeoGebra), bem como pela análise de produções escritas e digitais (registros no caderno e síntese final do minicurso).

Apêndice B

Plano de curso

Dados de Identificação	
Professor:	
Disciplina:	Matemática
Tema:	Triângulos equiláteros inscritos a triângulos arbitrários - Método geométrico
Pré-Requisitos:	• Classificação de triângulos e suas propriedades básicas. • Conceitos de baricentro, circuncentro e ortocentro. • Noções de paralelismo e alinhamento de pontos.
Turma:	2ª ou 3ª série do Ensino Médio.
Duração da aula:	6 aulas de 50 minutos

Objetivos

Geral

- Investigar a relações entre as retas dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos em um triângulo $\triangle ABC$ e a reta de Euler de $\triangle ABC$.

Específicos

- Conhecer a interface completa do GeoGebra;
- Dominar ferramentas essenciais: ponto, segmento, polígono e círculo;
- Entender organização da Álgebra e propriedades dos objetos.
- Dominar ferramentas de medição: distância, ângulo, área;

- Aprender construções dependentes: mediatriz, perpendicular, rotação e homotetia;
- Compreender o comportamento dinâmico ao arrastar pontos.
- Reproduzir a construção da Seção 3.2.
- Construir baricentros dos triângulos equiláteros inscrito;
- Analisar comportamento dos baricentros dos triângulos inscritos ao variar α e β , com o rastro ativado.
- Construir reta de Euler de $\triangle ABC$;
- Comparar trajetória dos baricentros com reta de Euler;
- Formular conjecturas baseadas nas observações.

Conteúdos

- GeoGebra;
- Polígonos inscritos a outros polígonos;
- Triângulos;
- baricentro, circuncentro e ortocentro;
- Pontos de Apolônio;
- Semelhança espiral.

Procedimentos metodológicos

Aula 1: Noções básicas do GeoGebra - ferramentas básicas de construção

Carga horária: 50 minutos

Local: Laboratório de informática

Objetivos:

- Conhecer a interface completa do GeoGebra;
- Dominar ferramentas essenciais: ponto, segmento, polígono e círculo;
- Entender organização da Álgebra e propriedades dos objetos.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Ficha orientada com os passos principais.

Procedimentos metodológicos:

1. Interface geral, apresentar as 5 regiões:
 - Área Gráfica;
 - Barra de ferramentas;
 - Barra de entrada;
 - Vista Álgebra;
 - Menu.
2. Ferramentas básicas de construção, demonstrar e praticar cada uma:
 - Ponto;
 - Segmento;
 - Reta;
 - Círculo com centro e ponto;
 - Polígono.

Atividade: construir $\triangle ABC$ e sua circunferência circunscrita.

3. Propriedades e manipulação
 - Mostrar/esconder rótulo;
 - Alterar cor, espessura, estilo;
 - Ativar/desativar traço;
 - Fixar/desfixar posição.
4. Salvar (.ggb) e exportar imagem.

Aula 2: Noções básicas do GeoGebra - Ferramentas de medição e construções dinâmicas

Carga horária: 50 minutos

Local: Laboratório de informática

Objetivos:

- Dominar ferramentas de medição: distância, ângulo, área;
- Aprender construções dependentes: mediatriz, perpendicular, rotação e homotetia;
- Compreender o comportamento dinâmico ao arrastar pontos.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Arquivo .ggb da aula anterior;
- Ficha com exercícios de medição e construção.

Procedimentos metodológicos:

1. Abrir arquivo salvo na aula anterior.

2. Ferramentas de medição

- Distância ou comprimento;
- Ângulo;
- Área;

Verificar a medida dos ângulos internos de $\triangle ABC$.

3. Construções geométricas avançadas

- Mediatriz;
- Retas perpendicular;
- Retas paralelas;
- Rotação;
- Homotetia.

Atividade: construir circuncentro de $\triangle ABC$.

4. Dinamicidade

- Fixar pontos A e B e arrastar C com rastro ativado;
- Observar trajetórias de objetos com rastro ativado nas construções.

5. Preparação para triângulos inscritos

- Salvar (.ggb);
- Anunciar: "Essas ferramentas constroem os equiláteros inscritos da próxima aula".

Aula 3: Reprodução da construção geométrica

Carga horária: 50 minutos

Local: Laboratório de informática

Objetivos:

- Reproduzir a construção da Seção 3.2.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Arquivos .ggb da aula anterior;
- Tutorial passo a passo projetado (capturas de tela da dissertação).

Procedimentos metodológicos:

1. Demonstração guiada da construção;
2. Verificação das construções feitas;
3. Salvar (.ggb) para próxima aula.

Aula 4: Exploração com variação de α e β

Carga horária: 50 minutos

Local: Laboratório de informática

Objetivos:

- Construir baricentros dos triângulos equiláteros inscrito;
- Analisar comportamento dos baricentros dos triângulos inscritos ao variar α e β , com o rastro ativado.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Arquivos .ggb da aula anterior.

Procedimentos metodológicos:

1. Abrir arquivo salvo na aula anterior;
2. Construir baricentros dos triângulos equiláteros inscrito e ativação do rastro;
3. Observar os baricentros com a variação sistemática de α (fixo β);
4. Observar os baricentros com a variação sistemática de β (fixo α);
5. Salvar (.ggb) para próxima aula.

Aula 5: Reta de Euler e comparações

Carga horária: 50 minutos **Local:** Laboratório de informática **Objetivos:**

- Construir reta de Euler de $\triangle ABC$;
- Comparar trajetória dos baricentros com reta de Euler;
- Formular conjecturas baseadas nas observações.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Arquivos .ggb da aula anterior;
- Fichas para registro de conjecturas.

Procedimentos metodológicos:

1. Abrir arquivo salvo no aula anterior;
2. Construção de ortocentro e circuncentro do triângulo $\triangle ABC$;
3. Traçar reta de Euler $\triangle ABC$;
4. Comparação visual do rastro dos baricentros dos triângulos equiláteros e a reta de Euler;
5. Formulação e escrita de conjecturas;
6. Salvar (.ggb) para próxima aula.

Aula 6: Relação entre as retas

Carga horária: 50 minutos **Local:** Laboratório de informática

Objetivos:

- Investigar a relações entre as retas dos baricentros dos triângulos equiláteros inscritos em um triângulo $\triangle ABC$ e a reta de Euler de $\triangle ABC$.

Recursos didáticos:

- Computadores ou celulares com GeoGebra;
- Projetor;
- Arquivos .ggb da aula anterior;
- Diagramas da dissertação projetados.

Procedimentos metodológicos:

1. Abrir arquivo salvo no aula anterior;
2. Concluir que os baricentros dos triângulos equiláteros estão em duas retas paralelas;
3. Concluir que as retas dos baricentros dos triângulos equiláteros é perpendicular a reta de Euler de $\triangle ABC$.
4. Discussão final: conexão entre observação empírica e demonstração formal.

Recursos didáticos

- Computadores ou celulares com GeoGebra;

- Projetor;
- Arquivos .ggb;
- Fichas orientadoras e tutoriais impressos.
- Diagramas da dissertação projetados.

Avaliação

A avaliação será realizada por meio da observação da participação nas construções GeoGebra, qualidade das análises registradas, formulação de conjecturas pertinentes e engajamento nas discussões.