



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Análise do Comportamento de uma Função Associada às Distâncias em um Triângulo: Um Estudo ao Longo da Mediana

Philip Rodrigues Santana

Brasília
17 de junho de 2026

Philip Rodrigues Santana

Análise do Comportamento de uma Função Associada às Distâncias em um Triângulo: Um Estudo ao Longo da Mediana

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, no âmbito do Programa PROFMAT.

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília
17 de junho de 2026

Philip Rodrigues Santana

Análise do Comportamento de uma Função Associada às Distâncias em um Triângulo: Um Estudo ao Longo da Mediana/ Philip Rodrigues Santana. – Brasília, 17 de junho de 2026-

91 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM, 17 de junho de 2026.

1. Geometria Plana 2. Mediana. 3. Otimização. 4. GeoGebra I. Prof. Dr. Rogério César dos Santos II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Análise do Comportamento de uma Função Associada às Distâncias em um Triângulo: Um Estudo ao Longo da Mediana

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Análise do Comportamento de uma Função Associada às Distâncias em um Triângulo: Um Estudo ao Longo da Mediana

por

Philip Rodrigues Santana

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 17 de junho de 2026

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rogério César dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. André von Borries Lopes - MAT/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Sinval Braga de Freitas - SEEDF (Membro Externo)

Dedico este trabalho à minha esposa, Maria Edna de Oliveira Sousa, companheira de todas as horas, por sua força, coragem e amor incondicional. Em meio às adversidades que enfrentamos, sua presença foi meu alicerce, e sua resiliência e fé me sustentaram ao longo desta jornada, ensinando-me a seguir em frente, mesmo quando o caminho parecia incerto.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela oportunidade de trilhar este caminho e pela graça de poder estudar na Universidade de Brasília, bem como pela aprovação no PROFMAT. Essa conquista tornou-se possível a partir da minha aprovação no concurso da Secretaria de Estado da Educação de Goiás, em 2022, marco fundamental para o início desta trajetória.

À minha esposa, Maria Edna de Oliveira Sousa, pelo apoio incondicional, pela força e por tudo o que fez por nós ao longo dessa caminhada. Sua presença foi essencial em todos os momentos.

À minha mãe, Maria Dalva Rodrigues Santana, aos meus irmãos Lucas Rodrigues Santana e Andreza Rodrigues Siqueira, pelo amor, apoio e incentivo ao longo de toda a minha trajetória.

Ao meu pai, João Gilberto Gomes Santana, *in memoriam*, que partiu em 1996, mas que permanece presente em minha caminhada por meio dos valores, ensinamentos e exemplos que deixou, fundamentais para que eu chegasse até aqui.

À família da minha esposa — minha sogra e meu sogro — pelo acolhimento, carinho e apoio constante, que tornaram essa caminhada mais leve.

À equipe do Colégio Cor Jesu — direção, colegas e estudantes — pelo companheirismo, incentivo e pela torcida ao longo deste percurso.

Ao professor André von Borries Lopes, pela dedicação nas disciplinas de Resolução de Problemas e Recursos Computacionais, que foram fundamentais para a minha formação ao longo do curso. Seus ensinamentos contribuíram diretamente para minha aprovação no Exame Nacional de Qualificação (ENQ) e para o domínio do $\text{\LaTeX}$, ferramenta essencial utilizada na elaboração desta dissertação.

Ao professor Rogério César dos Santos, por ter aceitado o convite para esta parceria acadêmica. Sua contribuição foi fundamental para a construção deste trabalho. Nossa conversa inicial sobre conceitos de Geometria deu origem a esta pesquisa, e sua dedicação e domínio do conteúdo sempre foram uma grande inspiração. É um dos melhores professores que já tive, e alguém por quem tenho profunda admiração.

Por fim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

*“Na Matemática, a arte de propor uma questão deve ser considerada de maior valor do
que resolvê-la.”*
(Georg Cantor)

Resumo

Este trabalho investiga o comportamento da função $f(K) = BK^2 + CK^2$, definida pela soma dos quadrados das distâncias de um ponto variável K aos extremos do lado BC de um triângulo ABC , sob a restrição de que esse ponto pertença à mediana relativa a esse lado. O estudo estabelece uma articulação entre Geometria Plana e Análise Matemática, tendo como objetivo analisar o comportamento dessa função, determinar seus extremos absolutos ao longo da mediana e discutir suas potencialidades para o ensino de Matemática.

A abordagem metodológica fundamenta-se em uma perspectiva investigativa, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de exploração e visualização, favorecendo a formulação de conjecturas por meio da manipulação dinâmica de construções geométricas. A partir dessas explorações, procede-se à validação analítica dos resultados por meio da aplicação da Lei dos Cossenos e de técnicas do Cálculo Diferencial. Complementarmente, foi desenvolvida e aplicada uma sequência didática investigativa com estudantes do Ensino Médio, buscando articular exploração geométrica, modelagem matemática e formalização analítica.

Os resultados demonstram que a função admite extremos absolutos no segmento da mediana: o valor mínimo ocorre quando o ponto K coincide com o ponto médio do lado BC , enquanto o valor máximo é atingido quando K coincide com o vértice A . Esses resultados evidenciam uma relação entre propriedades métricas do triângulo e problemas de otimização, além de indicarem o potencial do GeoGebra como ambiente de investigação matemática.

Como contribuição, o trabalho apresenta uma proposta didática que integra exploração geométrica, formulação de conjecturas e demonstração matemática, favorecendo a compreensão de conceitos de Geometria, funções e otimização, bem como ampliando as possibilidades de utilização de abordagens investigativas no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Geometria Plana; Mediana; Problemas de Otimização; Investigação Matemática; GeoGebra.

Abstract

This dissertation investigates the behavior of the function $f(K) = BK^2 + CK^2$, defined as the sum of the squares of the distances from a variable point K to the endpoints of side BC of a triangle ABC , under the constraint that K lies on the median relative to that side. The study establishes a connection between Plane Geometry and Mathematical Analysis, aiming to analyze the behavior of this function, determine its absolute extrema along the median, and discuss its potential applications in Mathematics Education.

The methodological approach is based on an inquiry-based perspective, employing the GeoGebra software as a tool for exploration and visualization, thereby fostering the formulation of conjectures through the dynamic manipulation of geometric constructions. Based on these explorations, the results are validated analytically through the application of the Law of Cosines and techniques from Differential Calculus. Furthermore, an inquiry-based teaching sequence was designed and implemented with high school students, integrating geometric exploration, mathematical modeling, and analytical formalization. The results demonstrate that the function admits absolute extrema on the median segment: its minimum value is attained when the point K coincides with the midpoint of side BC , whereas its maximum value is attained when K coincides with vertex A . These findings establish a connection between metric properties of triangles and optimization problems, while also highlighting the potential of GeoGebra as an environment for mathematical investigation.

As its main contribution, this dissertation presents an inquiry-based teaching proposal that integrates geometric exploration, conjecture formulation, and mathematical proof, promoting the understanding of concepts in Geometry, functions, and optimization, while expanding the possibilities for the use of investigative approaches in Mathematics Education.

Keywords: Mathematics Education; Plane Geometry; Median; Optimization Problems; Mathematical Investigation; GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulo ABC com suas medianas e o baricentro G	27
Figura 2 – Correspondência entre lados e ângulos opostos no triângulo ABC . . .	28
Figura 3 – Triângulo ABC com a mediana AM	29
Figura 4 – Representação gráfica de um ponto crítico x_0 , no qual $f'(x_0) = 0$. . .	32
Figura 5 – Triângulo ABC com a bissetriz relativa ao vértice A e o ponto variável K	38
Figura 6 – Triângulo ABC com a mediana AM e o ponto variável K	39
Figura 7 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$	42
Figura 8 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$	43
Figura 9 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$	44
Figura 10 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$	45
Figura 11 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	48
Figura 12 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	48
Figura 13 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	49
Figura 14 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	49
Figura 15 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	50
Figura 16 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	51
Figura 17 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	51
Figura 18 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	52
Figura 19 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	52
Figura 20 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$	53
Figura 21 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	54
Figura 22 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	55
Figura 23 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	55
Figura 24 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	56
Figura 25 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	56
Figura 26 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	57
Figura 27 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$	57
Figura 28 – Configuração geométrica do problema: triângulo ABC , ponto variável K na mediana AM e as distâncias $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$	59
Figura 29 – Mediana AM , ponto variável K e distâncias $r_1(t)$ e $r_2(t)$	62
Figura 30 – Reta suporte à mediana AM	65
Figura 31 – Família de gráficos da função $f(t) = 2t^2 + \frac{BC^2}{2}$ para diferentes comprimentos do lado BC	67

Figura 32 – Gráfico da função $f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$ destacando o vértice e o domínio $0 \leq t \leq AM$	70
Figura 33 – Triângulo ABC com suas bissetrizes e o incentro I	78
Figura 34 – Exploração da função $r(t)$ com ponto variável K	79
Figura 35 – Exploração inicial na bissetriz, evidenciando a variação das distâncias r_1 e r_2 em função da posição do ponto K	87
Figura 36 – Configuração com valores distintos de r_1 e r_2 , indicando a percepção da dependência funcional entre a posição de K e as distâncias associadas.	88
Figura 37 – Situação em que r_1 e r_2 assumem valores próximos, sugerindo uma condição de equilíbrio associada a possíveis extremos da função analisada.	88
Figura 38 – Exploração avançada na bissetriz, evidenciando a busca por posições específicas associadas a comportamentos particulares da função.	89
Figura 39 – Construção na mediana com variação do ponto K , destacando a mudança nos valores das distâncias e a percepção de regularidades.	89
Figura 40 – Situação intermediária na mediana, indicando a análise comparativa entre diferentes posições do ponto K	90
Figura 41 – Configuração próxima ao ponto de mínimo da função $f(t)$, evidenciando a aproximação empírica de um resultado de otimização.	90
Figura 42 – Situação em que $r_1 = r_2$, indicando uma configuração de simetria associada ao ponto médio do segmento, em consonância com o resultado analítico obtido.	91

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	REFERENCIAL TEÓRICO	23
2.1	Tecnologias no Ensino da Matemática	23
2.2	GeoGebra em Sala de Aula	24
2.3	Conceitos Matemáticos Fundamentais	26
2.3.1	Mediana do Triângulo	27
2.3.2	Lei dos Cossenos	27
2.3.3	Teorema de Apolônio	29
2.3.4	Derivada e Pontos de Extremo	31
2.3.5	Otimização em Intervalo Fechado	33
3	METODOLOGIA	35
3.1	O Estudo de Caso como Estratégia de Pesquisa	35
3.2	Delimitação do Caso Investigado	36
4	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	41
4.1	Investigação da função $r(t)$	41
4.2	Investigação da função $g(t)$	46
4.3	Investigação da função $f(t)$	53
5	MODELAGEM MATEMÁTICA E DEMONSTRAÇÃO	59
5.1	Modelagem Matemática do Problema	59
5.2	Demonstração do Resultado Principal	60
5.3	Obtenção da Função por meio da Lei dos Cossenos	62
5.4	Extensão: comportamento na reta suporte da mediana	65
5.5	Análise da Concavidade da Função	66
5.6	Análise da função no baricentro e ao longo da mediana	67
5.7	Uma abordagem no Ensino Médio: interpretação por meio da função quadrática	69
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	73

	APÊNDICES	75
	APÊNDICE A – ESTUDO DE CASO	77
A.1	Construção Geométrica e Investigação	77
A.2	Definições importantes	77
A.3	Etapas da atividade	77
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO	81
B.1	Compreensão da construção	81
B.2	Exploração da função $r(t)$	81
B.3	Investigação	82
B.4	Variação do triângulo	82
B.5	Exploração com a mediana	82
B.6	Síntese	82
	APÊNDICE C – RESPOSTAS DOS ESTUDANTES	83
	APÊNDICE D – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DOS ESTU- DANTES	87

1 Introdução

A Geometria desempenha um papel fundamental na formação matemática dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da visualização espacial e da capacidade de argumentação. No contexto escolar, o ensino costuma enfatizar a aplicação de procedimentos e a resolução de exercícios, o que ressalta a relevância de abordagens que promovam a compreensão conceitual e a investigação matemática. Conforme discute Duval (2009), a aprendizagem em Matemática está diretamente relacionada à articulação entre diferentes registros de representação, sendo a Geometria um campo privilegiado para o desenvolvimento dessa habilidade. Nessa mesma perspectiva, Martins e Andrade (2021) destacam que a utilização de múltiplas representações e a transição entre elas favorecem uma aprendizagem mais significativa, ao possibilitar que os estudantes estabeleçam conexões entre diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático.

Diante desse cenário, evidencia-se a necessidade de abordagens que promovam a articulação entre diferentes áreas da Matemática, possibilitando uma compreensão mais ampla e integrada dos conceitos. A relação entre Geometria Plana e Análise Matemática, por exemplo, constitui um campo fértil para investigações que envolvem variação, dependência entre grandezas e otimização de funções. Segundo Ponte (2006), a exploração de situações investigativas em sala de aula contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento matemático, ao permitir que os estudantes formulem conjecturas, testem hipóteses e construam argumentos.

Com o avanço das tecnologias digitais, ferramentas como o GeoGebra têm se destacado no processo de ensino e aprendizagem, ao possibilitar a exploração dinâmica de construções geométricas e favorecer a formulação e validação de conjecturas. De acordo com Hohenwarter e Hohenwarter (2009), ambientes de geometria dinâmica ampliam as possibilidades de experimentação, permitindo a manipulação de objetos e a observação de propriedades invariantes. Nesse contexto, conforme discutido por Borba e Penteado (2010), o uso de tecnologias digitais transforma a forma como o conhecimento matemático é produzido e compreendido, favorecendo práticas mais investigativas e interativas.

Além das contribuições apresentadas na literatura sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática, observa-se, nos últimos anos, um crescimento significativo de pesquisas desenvolvidas no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), especialmente aquelas voltadas ao uso do GeoGebra, ao ensino de Geometria, à investigação matemática e à resolução de problemas de otimização.

Entre essas pesquisas, destaca-se a dissertação de MENDES (2020), que investiga o uso do GeoGebra 3D como recurso didático para o ensino de Geometria, enfatizando sua

contribuição para a visualização espacial e para a aprendizagem de conceitos geométricos. Mais recentemente, RIBEIRO (2025) desenvolve uma sequência didática baseada no GeoGebra para o estudo de tópicos de Geometria Plana, explorando demonstrações, resolução de problemas e aplicações em sala de aula. JUNIOR (2025), por sua vez, apresenta uma proposta para o ensino de funções quadráticas com o auxílio do GeoGebra, evidenciando como ambientes de geometria dinâmica favorecem a compreensão das propriedades das funções por meio da experimentação e da investigação matemática. Em outra perspectiva, JESUS (2026) discute o ensino de funções contínuas e derivadas na Educação Básica, com ênfase em problemas de otimização, ressaltando o potencial do Cálculo Diferencial como ferramenta para a resolução de problemas e para a construção de conceitos matemáticos.

Esses trabalhos evidenciam a consolidação do GeoGebra e das abordagens investigativas como recursos relevantes para o ensino de Matemática e situam a presente pesquisa no contexto das produções recentes do PROFMAT. Embora essas investigações abordem diferentes conteúdos matemáticos, todas exploram a articulação entre tecnologia, experimentação e construção do conhecimento matemático. Inserida nesse contexto, esta dissertação concentra-se em um problema de otimização de natureza geométrica, analisando o comportamento da função

$$f(K) = BK^2 + CK^2,$$

quando o ponto variável K percorre a mediana de um triângulo. Ao articular Geometria Plana, Cálculo Diferencial e experimentação no GeoGebra, busca-se oferecer uma abordagem que integra demonstração matemática, investigação e aplicação didática, ampliando as possibilidades de exploração desse tema na Educação Básica.

Diante dessas considerações, este trabalho propõe a análise do comportamento da função $f(K) = BK^2 + CK^2$, definida pela soma dos quadrados das distâncias de um ponto variável K aos extremos do lado BC de um triângulo ABC , sob a restrição de que esse ponto pertença à mediana relativa a esse lado. Investiga-se, então, o comportamento dessa função ao longo da mediana, com o objetivo de determinar seus extremos absolutos e estabelecer conexões entre Geometria Plana, problemas de otimização e Análise Matemática.

Nesse sentido, coloca-se a seguinte questão de pesquisa: quais são as posições do ponto K , ao longo do segmento da mediana de um triângulo, nas quais a função estudada atinge seus extremos absolutos? A investigação dessa questão permite estabelecer conexões entre propriedades geométricas, problemas de otimização e conceitos da Análise Matemática, ampliando as possibilidades de abordagem desse conteúdo no Ensino Médio.

A relevância desta pesquisa está associada à possibilidade de integrar diferentes campos da Matemática no contexto escolar, promovendo uma abordagem que ultrapassa a simples aplicação de técnicas e procedimentos. Conforme destaca Duval (2009), a compreensão matemática está diretamente relacionada à capacidade de transitar entre diferentes registros de representação, sendo essencial que o ensino proporcione situações que

favoreçam essa articulação.

O objetivo geral deste trabalho consiste em analisar o comportamento da referida função ao longo da mediana do triângulo, determinando seus extremos absolutos e discutindo suas potencialidades para o ensino de Matemática, mediante a elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática investigativa apoiada no software GeoGebra.

Como objetivos específicos, destacam-se:

- Caracterizar geometricamente a função $f(K) = BK^2 + CK^2$, relacionando-a ao Teorema de Apolônio e à mediana relativa ao lado BC ;
- Demonstrar, por meio do Teorema de Apolônio, que $f(K) = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2}$, em que M é o ponto médio de BC , evidenciando que o mínimo absoluto da função ocorre nesse ponto;
- Analisar o comportamento de f ao longo da mediana sob a ótica da Análise Matemática, articulando abordagens geométrica, algébrica e funcional;
- Elaborar, aplicar e avaliar uma sequência didática investigativa apoiada no software GeoGebra, explorando a visualização dinâmica dos extremos da função;
- Discutir as potencialidades do problema para o ensino de Matemática, conectando Geometria Plana, otimização e o uso de tecnologias digitais.

A metodologia adotada baseia-se em uma perspectiva investigativa, articulando a experimentação em ambiente computacional e a validação analítica dos resultados. O estudo de caso foi desenvolvido com estudantes, envolvendo atividades de construção geométrica, análise de relações entre grandezas e interpretação de resultados, conforme discutido por Yin (2001) e Ponte (2006), de modo a promover uma aprendizagem significativa.

Após esta introdução, o Capítulo 2 apresenta o referencial teórico que fundamenta a pesquisa. O Capítulo 3 descreve a metodologia adotada. No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados do estudo de caso. O Capítulo 5 desenvolve a modelagem matemática do problema, incluindo a demonstração do resultado principal. Por fim, são apresentadas as considerações finais, nas quais são retomados os principais resultados da pesquisa e suas contribuições para o ensino de Matemática.

2 Referencial Teórico

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos que sustentam a investigação desenvolvida nesta dissertação, articulando contribuições da Educação Matemática e da Matemática. Inicialmente, discute-se o papel das tecnologias digitais no ensino de Matemática, com ênfase no uso de softwares de geometria dinâmica e na exploração de múltiplas representações, aspecto central para a compreensão matemática, conforme destacado por Duval (2009).

Na sequência, são apresentados os conceitos matemáticos que fundamentam o problema investigado, incluindo propriedades do triângulo, a Lei dos Cossenos, o Teorema de Apolônio e conceitos relacionados ao estudo de funções e de seus extremos, necessários à compreensão da modelagem matemática desenvolvida neste trabalho.

A organização deste capítulo busca articular aspectos teóricos da Educação Matemática com ferramentas da Geometria Plana e da Análise Matemática, estabelecendo uma base conceitual consistente para a construção da sequência didática investigativa e para a demonstração do resultado principal apresentada nos capítulos seguintes.

2.1 Tecnologias no Ensino da Matemática

A incorporação de tecnologias digitais ao ensino da Matemática insere-se em um processo histórico que acompanha as transformações científicas, culturais e sociais das últimas décadas. Diversos estudos indicam que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) vêm modificando não apenas os recursos disponíveis em sala de aula, mas também as formas de ensinar, aprender e produzir conhecimento matemático (BORBA; PENTEADO, 2010).

Entre as primeiras ferramentas voltadas especificamente ao ensino de Geometria, destaca-se o Cabri-Géomètre, desenvolvido na década de 1980. Esse software introduziu o conceito de geometria dinâmica, permitindo a manipulação de construções geométricas com preservação de suas propriedades definidoras. Segundo Laborde (1993), a manipulação dinâmica favorece a observação de invariantes geométricos, estimulando a formulação de conjecturas e a compreensão das relações estruturais.

Apesar de sua relevância histórica, o Cabri-Géomètre apresentou limitações relacionadas à sua difusão, sobretudo por tratar-se de um software proprietário. A exigência de licenças institucionais restringiu seu acesso em diversos contextos educacionais, especialmente na educação pública.

No início dos anos 2000, surge o GeoGebra, concebido por Hohenwarter com a proposta de integrar Geometria, Álgebra e representações numéricas em um único ambiente computacional (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009). Diferentemente de

seus predecessores, o GeoGebra foi desenvolvido como software livre, fator que contribuiu decisivamente para sua ampla disseminação internacional. Sua principal inovação reside na articulação simultânea entre múltiplas representações, aspecto fundamental para a compreensão matemática, conforme discutido por Duval (2009), ampliando as possibilidades de exploração conceitual e de investigação matemática.

Sob uma perspectiva epistemológica, a introdução de ambientes computacionais na Educação Matemática altera a própria natureza da atividade matemática, uma vez que as tecnologias passam a atuar como agentes que reorganizam processos cognitivos (BORBA; VILLARREAL, 2005). Nesse sentido, o GeoGebra não se limita à representação de conceitos previamente estabelecidos, mas constitui um ambiente que favorece a experimentação, a formulação de conjecturas e a validação de propriedades geométricas por meio da manipulação dinâmica de construções.

Desse modo, a evolução das tecnologias no ensino da Matemática evidencia um percurso que se inicia com a geometria dinâmica, inaugurada por softwares como o Cabri-Géomètre, passa pela consolidação de ambientes integradores como o GeoGebra e culmina em um cenário no qual a exploração dinâmica de objetos matemáticos assume papel central no processo de aprendizagem. Nesse contexto, o GeoGebra destaca-se por articular múltiplas representações em um ambiente dinâmico e acessível, constituindo a principal ferramenta de investigação utilizada nesta pesquisa para o estudo da função $f(K) = BK^2 + CK^2$ ao longo da mediana de um triângulo.

A proposta desenvolvida nesta pesquisa também está em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza a importância da resolução de problemas, da investigação matemática, do uso de tecnologias digitais e da articulação entre diferentes representações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem BRASIL (2018). Nesse sentido, o uso do GeoGebra como ambiente de exploração dinâmica contribui para o desenvolvimento dessas competências, favorecendo a formulação de conjecturas, a validação de resultados e a compreensão de conceitos geométricos e funcionais.

2.2 GeoGebra em Sala de Aula

Dentre as tecnologias digitais aplicadas ao ensino da Matemática, o GeoGebra ocupa posição de destaque por integrar, em um único ambiente, representações algébricas, gráficas e geométricas. Sua relevância, contudo, ultrapassa a dimensão instrumental, alcançando implicações epistemológicas relacionadas à organização do pensamento matemático em contextos investigativos. Nesta pesquisa, o software constitui o principal ambiente de exploração da função $f(K) = BK^2 + CK^2$, definida ao longo do segmento da mediana de um triângulo.

A presença de tecnologias digitais no ensino não deve ser compreendida apenas

como inovação metodológica, mas como possibilidade de reorganização da própria atividade matemática. Nesse sentido, conforme discutido por Borba e Villarreal (2005), as tecnologias atuam como agentes que transformam a forma como o conhecimento matemático é produzido, ampliando oportunidades de aprendizagem, favorecendo o engajamento dos estudantes e estimulando processos investigativos.

A articulação entre diferentes registros de representação — algébricos, gráficos e geométricos — constitui elemento central para a compreensão matemática, uma vez que permite ao estudante estabelecer conexões conceituais mais consistentes. Segundo Duval (2009), a aprendizagem em Matemática depende da capacidade de transitar entre tais registros, construindo significados de forma integrada.

Essa perspectiva tem sido reafirmada por pesquisas mais recentes. De acordo com Martins e Andrade (2021), a utilização de múltiplas representações favorece a aprendizagem matemática ao permitir que os estudantes estabeleçam relações entre diferentes formas de representar um mesmo objeto, articulando linguagem natural, representações geométricas, algébricas, gráficas e numéricas durante a resolução de problemas. Os autores destacam que a coordenação entre esses registros amplia a compreensão conceitual e contribui para a construção de argumentos matemáticos mais consistentes.

Nesse contexto, softwares dinâmicos como o GeoGebra potencializam essa integração ao possibilitar a manipulação simultânea de diferentes representações. Ao mover elementos de uma construção geométrica, determinadas propriedades permanecem invariantes, tornando visíveis relações estruturais que poderiam permanecer implícitas em representações estáticas.

Tal dinâmica favorece a formulação de conjecturas e a transição da percepção empírica para a argumentação dedutiva. No contexto desta pesquisa, essas possibilidades permitem investigar o comportamento da função estudada antes de sua demonstração matemática, favorecendo a construção de hipóteses pelos estudantes.

Estudos desenvolvidos na Educação Básica indicam que o uso do GeoGebra contribui para tornar as aulas mais interativas e favorecer a compreensão conceitual, sobretudo quando associado a metodologias investigativas (MACEDO et al., 2017). De forma complementar, a revisão sistemática realizada por Maia, Gondim e Vasconcelos (2023) evidencia que o software tem sido amplamente empregado no ensino de Geometria em diferentes níveis de escolaridade, favorecendo a visualização de propriedades, a formulação de conjecturas, a investigação matemática e a articulação entre diferentes representações de um mesmo objeto.

Segundo Hohenwarter e Hohenwarter (2009), a integração das TIC ao ensino cotidiano da Matemática amplia as formas de apoiar a aprendizagem e promover a aquisição de conhecimentos e habilidades matemáticas. No âmbito da Geometria, essa integração permite que o estudante atue como investigador das relações internas que estruturam as figuras, explorando propriedades, testando hipóteses e validando resultados.

A escolha do GeoGebra como ferramenta estruturante desta pesquisa fundamenta-se em seu potencial para integrar representações geométricas, algébricas e numéricas em um ambiente dinâmico de investigação, favorecendo a formulação de conjecturas e a validação matemática de propriedades. Além disso, sua ampla utilização em pesquisas e práticas de ensino de Geometria reforça sua adequação aos objetivos deste trabalho. Essa escolha também encontra respaldo na revisão sistemática apresentada por Maia, Gondim e Vasconcelos (2023), que identifica um crescimento expressivo das pesquisas envolvendo o GeoGebra no ensino de Geometria e destaca seu potencial para promover visualização, experimentação, investigação e construção de conceitos matemáticos.

Assim, o GeoGebra é compreendido, neste trabalho, não apenas como recurso auxiliar, mas como ambiente de investigação geométrica capaz de articular visualização, experimentação e formalização. Tal perspectiva revela-se especialmente pertinente no estudo das propriedades do triângulo e na análise do comportamento de funções associadas a construções geométricas dinâmicas, eixo central desta pesquisa.

Além dos referenciais teóricos apresentados, a elaboração da sequência didática proposta nesta pesquisa foi influenciada pelo livro *Aprendendo Matemática com o GeoGebra* (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010). A obra, utilizada inicialmente durante a formação do pesquisador na disciplina de Desenho Geométrico no Colégio Militar de Brasília e posteriormente aprofundada em estudos de pós-graduação, apresenta construções e atividades que exploram os recursos fundamentais do software. Embora as atividades desenvolvidas nesta dissertação sejam originais e tenham sido adaptadas aos objetivos da investigação, o livro constituiu uma importante referência para a organização das primeiras construções no GeoGebra e para a familiarização com as potencialidades do ambiente de geometria dinâmica.

2.3 Conceitos Matemáticos Fundamentais

Para o desenvolvimento da investigação proposta neste trabalho, torna-se necessário explicitar os fundamentos matemáticos que sustentam a análise geométrica e analítica apresentada nos capítulos posteriores. Embora o problema tenha origem em conceitos da Geometria Plana, sua investigação mobiliza diferentes ferramentas matemáticas, dentre as quais se destacam a Lei dos Cossenos, o Teorema de Apolônio e conceitos relacionados ao estudo de funções reais de variável real e de seus extremos.

Dessa forma, esta seção apresenta os conceitos e resultados preliminares indispensáveis à compreensão da modelagem matemática e da demonstração do resultado principal desenvolvido nesta dissertação.

2.3.1 Mediana do Triângulo

Em um triângulo, denomina-se mediana o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Considerando um triângulo ABC , sendo M o ponto médio do lado BC , o segmento AM constitui a mediana relativa ao vértice A . A mediana desempenha papel central nesta pesquisa, pois o ponto variável K , utilizado na modelagem do problema, pertence ao segmento AM . Dessa forma, o estudo do comportamento da função $f(K) = BK^2 + CK^2$ será desenvolvido considerando K variando ao longo dessa mediana. As três medianas de um triângulo são concorrentes e intersectam-se em um único ponto, denominado baricentro G . Além disso, o baricentro divide cada mediana na razão $2 : 1$, sendo o segmento de maior comprimento aquele adjacente ao vértice.

A Figura 1 apresenta o triângulo ABC com suas três medianas e o baricentro representado pelo ponto G , ilustrando a concorrência das medianas e a posição desse ponto no interior da figura.

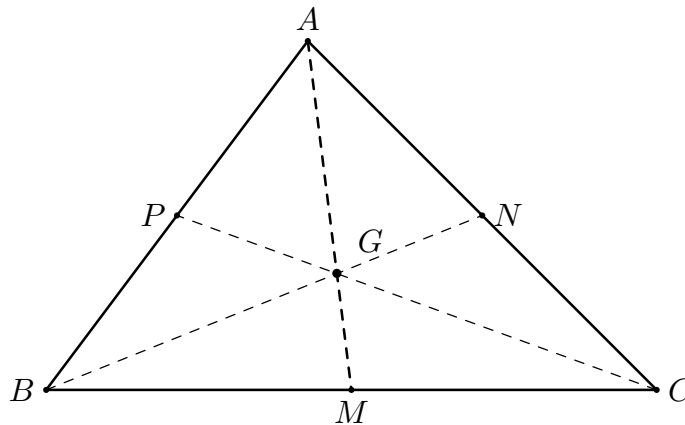


Figura 1 – Triângulo ABC com suas medianas e o baricentro G .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

2.3.2 Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos constitui um dos principais resultados da Geometria Plana, estabelecendo uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo e o cosseno de um de seus ângulos internos. Conforme destaca Neto (2022b), esse resultado é aplicável a qualquer triângulo e desempenha papel fundamental na resolução de problemas geométricos envolvendo distâncias e ângulos.

Considere um triângulo ABC , em que a , b e c representam, respectivamente, os comprimentos dos lados opostos aos vértices A , B e C . A Lei dos Cossenos é expressa por

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \quad (2.1)$$

De maneira análoga, obtêm-se as seguintes relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \quad (2.2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \quad (2.3)$$

Para melhor compreensão da notação adotada e da correspondência entre lados e ângulos opostos, considera-se o triângulo apresentado na Figura 2.

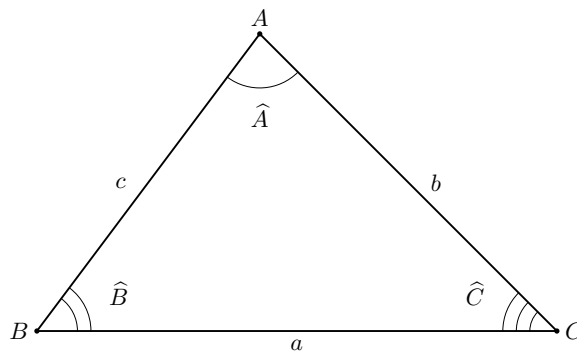


Figura 2 – Correspondência entre lados e ângulos opostos no triângulo ABC

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Observa-se que cada lado do triângulo está associado ao ângulo oposto correspondente, estabelecendo uma convenção de notação amplamente adotada na literatura. Essa correspondência é fundamental para a correta aplicação da Lei dos Cossenos em situações que envolvem simultaneamente grandezas lineares e angulares.

Destaca-se que, no caso particular em que o ângulo considerado é reto, tem-se $\cos(\hat{A}) = 0$, e a Lei dos Cossenos reduz-se ao Teorema de Pitágoras. Assim, essa lei pode ser compreendida como uma generalização natural das relações métricas em triângulos.

No contexto desta pesquisa, a Lei dos Cossenos constitui a principal ferramenta para modelar as distâncias entre um ponto variável K , pertencente ao segmento da mediana de um triângulo, e os vértices B e C . Essa modelagem permitirá obter expressões algébricas para as distâncias envolvidas e estabelecer relações métricas fundamentais para a construção da função estudada.

Além disso, a Lei dos Cossenos constitui a base para a dedução do Teorema de Apolônio e para a demonstração do resultado principal desenvolvido no Capítulo 5. Posteriormente, os resultados obtidos serão reinterpretados sob a perspectiva das funções quadráticas e do Cálculo Diferencial, evidenciando a convergência entre as abordagens geométrica e analítica.

2.3.3 Teorema de Apolônio

O Teorema de Apolônio constitui um importante resultado da Geometria Plana, estabelecendo uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo e a mediana relativa a um de seus lados. Esse resultado pode ser obtido como consequência da Lei dos Cossenos e possui diversas aplicações em problemas métricos e de otimização. No contexto desta dissertação, desempenha papel fundamental na demonstração do resultado principal.

Considere um triângulo ABC , sendo M o ponto médio do lado BC , conforme ilustrado na Figura 3.

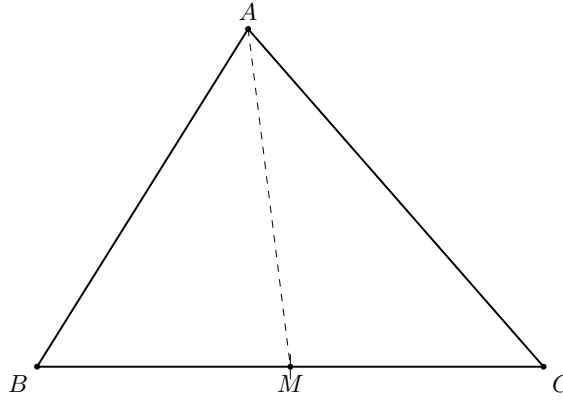


Figura 3 – Triângulo ABC com a mediana AM .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Teorema 1 (Teorema de Apolônio). *Seja ABC um triângulo e seja M o ponto médio do lado BC . Então:*

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Demonstração. Como M é o ponto médio de BC , tem-se

$$BM = CM = \frac{BC}{2}.$$

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ABM , obtém-se:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos(\widehat{AMB})$$

Aplicando novamente a Lei dos Cossenos ao triângulo ACM , segue que:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2 \cdot AM \cdot CM \cdot \cos(\widehat{AMC})$$

Como os ângulos $\widehat{AMB}$ e $\widehat{AMC}$ são suplementares, pois os pontos B , M e C são colineares, tem-se:

$$\cos(\widehat{AMC}) = -\cos(\widehat{AMB})$$

Além disso,

$$BM = CM = \frac{BC}{2}$$

Somando as duas igualdades anteriores, os termos envolvendo o cosseno se anulam, obtendo-se:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2,$$

ou seja,

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário. Nas condições do Teorema de Apolônio, seja K um ponto pertencente ao segmento da mediana AM . Então,

$$BK^2 + CK^2 = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Apolônio ao triângulo BKC . Como M é o ponto médio do lado BC e K pertence à mediana relativa a esse lado, o segmento KM é a mediana do triângulo BKC relativa a BC . Portanto,

$$BK^2 + CK^2 = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Observação. Como o comprimento BC permanece constante para um triângulo fixo, segue do corolário que:

$$f(K) = BK^2 + CK^2 = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Assim, a determinação dos extremos da função reduz-se ao estudo da distância KM . Essa identidade constitui a principal ferramenta geométrica utilizada na demonstração do resultado principal.

O Teorema de Apolônio pode ser interpretado como uma generalização do Teorema de Pitágoras para triângulos quaisquer, relacionando os comprimentos dos lados com a mediana correspondente. No contexto desta pesquisa, esse resultado desempenha papel central na demonstração do resultado principal apresentada no Capítulo 5, permitindo simplificar a expressão da função estudada e estabelecer seus extremos absolutos de forma essencialmente geométrica.

Além disso, o problema investigado nesta dissertação insere-se em um contexto mais amplo da Geometria Plana, no qual diversos resultados relacionam a soma dos

quadrados das distâncias à determinação de pontos notáveis do triângulo. Entre eles, destaca-se o Teorema de Leibniz, segundo o qual, para qualquer ponto P do plano de um triângulo ABC , com baricentro G , vale a identidade:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3} + 3PG^2$$

Como consequência imediata, conclui-se que a soma dos quadrados das distâncias de P aos três vértices do triângulo é minimizada quando $P = G$. De maneira análoga, o resultado obtido nesta dissertação mostra que, ao considerar apenas as distâncias aos vértices B e C e restringir o ponto variável à mediana relativa ao lado BC , a soma dos quadrados das distâncias, ou seja, $BK^2 + CK^2$ atinge seu valor mínimo quando $K = M$. Dessa forma, ambos os resultados evidenciam que problemas de minimização envolvendo somas de quadrados de distâncias estão intimamente relacionados a pontos geometricamente notáveis do triângulo, situando o resultado desenvolvido neste trabalho em uma tradição clássica da Geometria Plana.

2.3.4 Derivada e Pontos de Extremo

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Diz-se que f é derivável em um ponto $x_0 \in I$ se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.4)$$

O valor $f'(x_0)$ denomina-se derivada de f em x_0 e pode ser interpretado como a taxa de variação instantânea da função nesse ponto. Do ponto de vista geométrico, a derivada corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

No estudo dos extremos de uma função, os pontos críticos desempenham papel fundamental. Um ponto $x_0 \in I$ é denominado ponto crítico quando $f'(x_0) = 0$ ou quando a derivada de f não existe em x_0 . Em situações regulares, tais pontos constituem candidatos à ocorrência de máximos ou mínimos locais.

A classificação desses pontos pode ser realizada por meio do teste da segunda derivada. Suponha que f seja duas vezes derivável em uma vizinhança de x_0 e que $f'(x_0) = 0$. Nessas condições, o sinal de $f''(x_0)$ fornece informações sobre a concavidade do gráfico de f nas proximidades de x_0 : se $f''(x_0) > 0$, então f apresenta um mínimo local em x_0 ; se $f''(x_0) < 0$, então f apresenta um máximo local em x_0 (NETO, 2022a). Quando $f''(x_0) = 0$, o teste é inconclusivo, sendo necessária uma análise adicional.

Além da análise local, é necessário considerar o comportamento global da função. Quando f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, o Teorema do Valor Extremo garante que f admite valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto nesse intervalo. Tais valores podem ocorrer tanto em pontos críticos do interior do intervalo quanto em suas extremidades.

A interpretação geométrica da derivada pode ser compreendida a partir do comportamento do gráfico de uma função nas proximidades de um ponto crítico. Quando $f'(x_0) = 0$, a reta tangente ao gráfico nesse ponto é horizontal, indicando a anulação da taxa de variação instantânea. A natureza do extremo está associada à concavidade do gráfico nas proximidades de x_0 , conforme indicado pelo sinal da segunda derivada, como ilustrado na Figura 4.

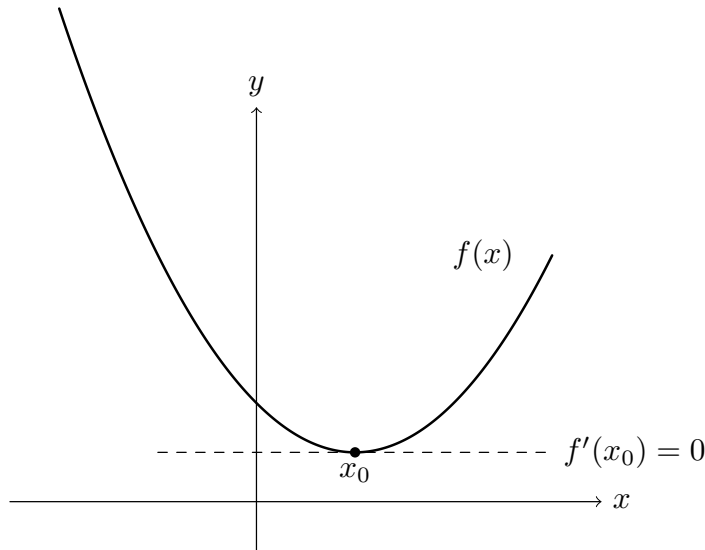


Figura 4 – Representação gráfica de um ponto crítico x_0 , no qual $f'(x_0) = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

No caso particular das funções quadráticas, da forma

$$f(t) = at^2 + bt + c, \quad a \neq 0, \quad (2.5)$$

existe um único ponto crítico, correspondente ao vértice da parábola. Esse ponto é um mínimo quando $a > 0$ e um máximo quando $a < 0$, sendo obtido pela condição $f'(t) = 0$.

No contexto desta pesquisa, o estudo dos extremos assume papel central, uma vez que o problema investigado consiste em determinar os valores extremos da função $f(K) = BK^2 + CK^2$, definida ao longo do segmento da mediana de um triângulo.

Como o domínio dessa função corresponde a um intervalo fechado, a determinação de seus extremos absolutos envolve a análise de seus pontos críticos e de suas extremidades, conforme estabelece o Teorema do Valor Extremo.

Entretanto, nesta dissertação, a demonstração do resultado principal será desenvolvida a partir de propriedades geométricas, utilizando a Lei dos Cossenos e o Teorema de Apolônio. O estudo das derivadas será empregado como uma interpretação analítica complementar, permitindo relacionar a modelagem geométrica ao comportamento de funções quadráticas e aos conceitos de otimização.

2.3.5 Otimização em Intervalo Fechado

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Pelo Teorema do Valor Extremo, toda função contínua definida em um intervalo fechado admite valores máximo absoluto e mínimo absoluto nesse intervalo. Esse resultado constitui um dos principais fundamentos da teoria da otimização em uma variável real.

A determinação desses extremos envolve a análise conjunta do comportamento da função no interior do intervalo e em suas extremidades. Em particular, devem ser considerados os pontos críticos $x_0 \in (a, b)$ tais que $f'(x_0) = 0$ ou nos quais a derivada não existe, bem como os valores assumidos pela função nos extremos a e b . A comparação entre esses valores permite identificar os máximos e mínimos absolutos da função no intervalo considerado. O procedimento clássico para determinação de extremos em intervalo fechado é:

- Determinar os pontos críticos no interior do intervalo;
- Avaliar a função nos pontos críticos;
- Avaliar a função nas extremidades do intervalo;
- Comparar os valores obtidos.

No desenvolvimento desta pesquisa, a função $f(K) = BK^2 + CK^2$ será analisada considerando K pertencente ao segmento da mediana de um triângulo. Como esse segmento constitui um intervalo fechado, a determinação de seus extremos absolutos envolverá a análise dos pontos críticos e das extremidades do domínio. Posteriormente, esse resultado será interpretado tanto sob a perspectiva da Análise Matemática quanto por meio das relações métricas estabelecidas pelo Teorema de Apolônio.

Os fundamentos teóricos apresentados neste capítulo evidenciam a articulação entre tecnologias digitais, investigação geométrica e formalização matemática. A integração entre propriedades da Geometria Plana, resultados clássicos como a Lei dos Cossenos e o Teorema de Apolônio, bem como conceitos da Análise Matemática, constitui o eixo estruturante desta pesquisa, sustentando tanto a modelagem do problema quanto a demonstração do resultado principal e a proposta didática desenvolvida.

Com base nesse referencial teórico, o capítulo seguinte apresenta a metodologia adotada, explicitando os procedimentos de pesquisa, a caracterização da sequência didática investigativa e os instrumentos utilizados para a análise dos dados produzidos.

3 Metodologia

Este capítulo apresenta os fundamentos metodológicos que orientam o desenvolvimento da presente pesquisa. Inicialmente, discute-se o Estudo de Caso como estratégia de investigação, explicitando suas bases epistemológicas e sua adequação ao campo da Educação Matemática.

Na sequência, delimita-se o caso investigado, caracterizando o contexto da intervenção pedagógica e detalhando a organização das atividades propostas. Por fim, descrevem-se os procedimentos de coleta e análise das evidências produzidas, bem como os critérios adotados para a interpretação dos dados.

A escolha metodológica fundamenta-se na necessidade de compreender, em profundidade, a articulação entre exploração geométrica dinâmica e formalização analítica, preservando a complexidade do contexto educativo no qual a investigação se insere.

3.1 O Estudo de Caso como Estratégia de Pesquisa

O Estudo de Caso constitui uma estratégia metodológica amplamente utilizada nas ciências humanas e sociais quando se busca compreender fenômenos complexos inseridos em seus contextos naturais. Segundo Yin (2001), o estudo de caso é uma investigação empírica que analisa um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente quando as fronteiras entre fenômeno e contexto não são claramente definidas.

Diferentemente de abordagens experimentais, que visam ao controle de variáveis e à generalização estatística, o Estudo de Caso privilegia a investigação aprofundada de uma unidade específica, preservando a complexidade e a singularidade do fenômeno analisado.

Pereira, Godoy e Terçariol (2009) destacam que o Estudo de Caso deve ser compreendido como um procedimento científico rigoroso, e não como uma investigação meramente descritiva. Para as autoras, sua principal contribuição reside na possibilidade de articular teoria e prática, integrando múltiplas fontes de evidência e produzindo conhecimento contextualizado. Esse método exige a delimitação clara da unidade de análise, a definição consistente do referencial teórico e a sistematização dos procedimentos de coleta e análise de dados.

Silva, Oliveira e Silva (2021), apoiando-se em Yin e Stake, ressaltam que o Estudo de Caso é especialmente indicado quando as questões de pesquisa assumem a forma de “como” e “por que”, quando o pesquisador possui controle limitado sobre os eventos investigados e quando o fenômeno está fortemente vinculado ao seu contexto. Nessas condições, o estudo aprofundado de um caso permite compreender processos, relações e dinâmicas que dificilmente seriam captados por abordagens quantitativas.

No que se refere à tipologia dos estudos de caso, Yin os classifica em exploratórios, descritivos ou explanatórios, enquanto Stake distingue estudos intrínsecos, instrumentais e coletivos. Em ambas as perspectivas, destaca-se a possibilidade de generalização analítica, isto é, a expansão de proposições teóricas a partir da análise detalhada do caso investigado em contraposição à generalização estatística.

Assim, o Estudo de Caso não busca representar numericamente uma população, mas aprofundar a compreensão de um fenômeno singular, produzindo inferências teóricas que possam dialogar com contextos semelhantes. Tal característica torna essa estratégia particularmente pertinente quando se investigam práticas educativas, nas quais as dimensões cognitivas, sociais e simbólicas encontram-se interligadas.

Nesse sentido, a adoção do Estudo de Caso nesta pesquisa justifica-se pela possibilidade de investigar, em profundidade, um fenômeno educacional situado, considerando suas múltiplas dimensões e interações. Dessa forma, essa abordagem metodológica mostra-se coerente com os objetivos deste trabalho, ao permitir a análise detalhada dos processos envolvidos na articulação entre exploração geométrica e formalização analítica no ensino de Matemática.

3.2 Delimitação do Caso Investigado

O caso investigado nesta pesquisa consistiu na aplicação de uma sequência didática estruturada com o objetivo de articular exploração geométrica dinâmica e formalização analítica no estudo de propriedades do triângulo.

A intervenção foi realizada com estudantes das três séries do Ensino Médio do Colégio Cor Jesu, localizado em Brasília–DF. A participação na pesquisa ocorreu por meio de convite, sendo incluídos no estudo os alunos que manifestaram interesse em participar voluntariamente das atividades propostas.

Participaram efetivamente da pesquisa 24 estudantes, com idades compatíveis com essa etapa de ensino, sendo 6 da 1ª série, 10 da 2ª série e 8 da 3ª série do Ensino Médio. Os alunos já possuíam conhecimentos prévios básicos sobre funções reais e conceitos elementares de geometria plana, porém apresentavam pouca familiaridade com o uso do software GeoGebra como ferramenta de investigação matemática.

As atividades ocorreram no laboratório de informática da instituição, ambiente no qual os estudantes tiveram acesso a 12 computadores com conexão à internet, organizados em duplas, possibilitando a utilização do GeoGebra em sua versão online.

A intervenção foi realizada no mês de março de 2026, em dois encontros presenciais, cada um com duração de uma hora e trinta minutos, conforme o planejamento da sequência didática.

O pesquisador atuou simultaneamente como professor da turma, assumindo papel ativo na condução das atividades, na mediação das discussões e na organização das

interações entre os estudantes.

Essa dupla função foi considerada na condução da pesquisa por meio de alguns cuidados metodológicos. Durante as atividades, a mediação restringiu-se a orientações sobre o uso do software e a questionamentos abertos, evitando-se a antecipação de resultados e a indução de respostas. Além disso, a participação voluntária não esteve vinculada a qualquer instrumento de avaliação escolar, e a interpretação das evidências apoiou-se na triangulação entre as construções produzidas no GeoGebra, as observações registradas durante os encontros e as respostas ao questionário, buscando reduzir possíveis vieses decorrentes da proximidade entre pesquisador e participantes.

A sequência didática foi desenvolvida em dois encontros, cada um com duração de uma hora e meia, conforme descrito a seguir.

1ª Aula

No primeiro encontro, buscou-se promover a familiarização dos estudantes com o ambiente GeoGebra e a retomada de conceitos matemáticos fundamentais. Esse momento foi organizado em três etapas.

1. Etapa 1: Familiarização com o ambiente GeoGebra

Inicialmente, realizou-se a apresentação da interface do software, explorando ferramentas básicas de construção geométrica, como criação de pontos, segmentos e polígonos, bem como a movimentação de objetos. Os estudantes acompanharam a demonstração e reproduziram as construções em seus próprios computadores, com o objetivo de adquirir autonomia no uso do ambiente.

2. Etapa 2: Exploração de ferramentas e comandos

Na segunda etapa, foram aprofundados os comandos necessários para o desenvolvimento das atividades, incluindo a construção de triângulos, o traçado de medianas e bissetrizes, a identificação de pontos notáveis e a inserção de expressões algébricas. Os estudantes realizaram experimentações orientadas, consolidando os procedimentos operacionais.

3. Etapa 3: Revisão de conceitos matemáticos

Na terceira etapa, procedeu-se à revisão e sistematização de conceitos geométricos fundamentais, como bissetriz, mediana, mediatriz e altura de um triângulo, bem como os pontos notáveis associados. Paralelamente, foram retomadas noções básicas sobre funções reais, com ênfase na identificação qualitativa de valores máximos e mínimos.

Esse primeiro encontro teve como finalidade estabelecer as bases conceituais e operacionais necessárias para o desenvolvimento das investigações propostas nas etapas seguintes.

2ª Aula

No segundo encontro, foram desenvolvidas atividades investigativas com o objetivo de analisar o comportamento de funções associadas a construções geométricas.

1. Etapa 1: Investigação na bissetriz

Inicialmente, os estudantes investigaram o comportamento de uma função definida a partir das distâncias entre um ponto variável K , pertencente a uma bissetriz do triângulo, e os vértices adjacentes. Em particular, analisou-se a função

$$r(t) = \frac{r_1(t)}{r_2(t)},$$

em que $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$, sendo t um parâmetro associado à posição do ponto K ao longo da bissetriz, ou seja, $t = KT$, conforme ilustrado na Figura 5.

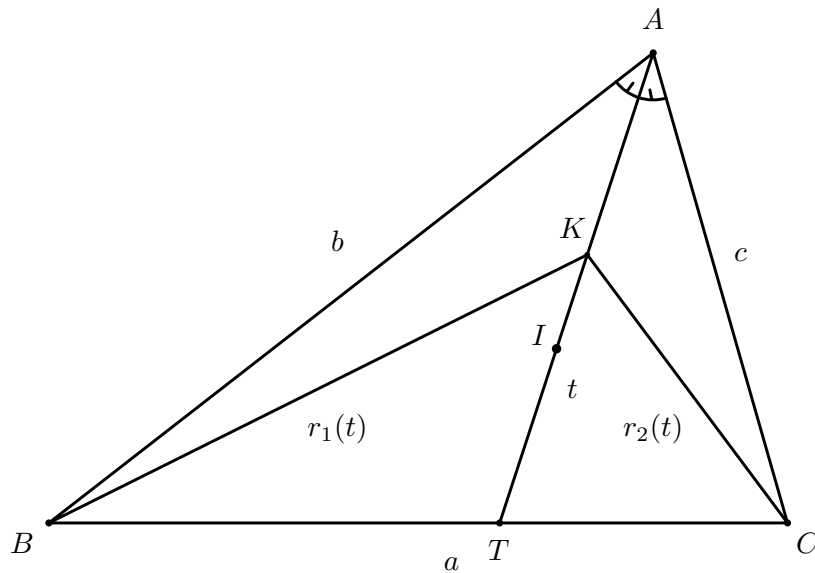


Figura 5 – Triângulo ABC com a bissetriz relativa ao vértice A e o ponto variável K .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A análise foi conduzida por meio da variação da posição do ponto, permitindo a observação de padrões e a formulação de conjecturas.

2. Etapa 2: Investigação na mediana

Em seguida, a investigação foi ampliada para o estudo da mediana do triângulo. Considerando um ponto variável K ao longo da mediana, os estudantes analisaram inicialmente a função definida pela média geométrica das distâncias aos vértices,

$$g(t) = \sqrt{r_1(t) \cdot r_2(t)},$$

em que $r_1(t) = BK$, $r_2(t) = CK$ e t um parâmetro associado à posição do ponto K ao longo da mediana, ou seja, $t = KM$

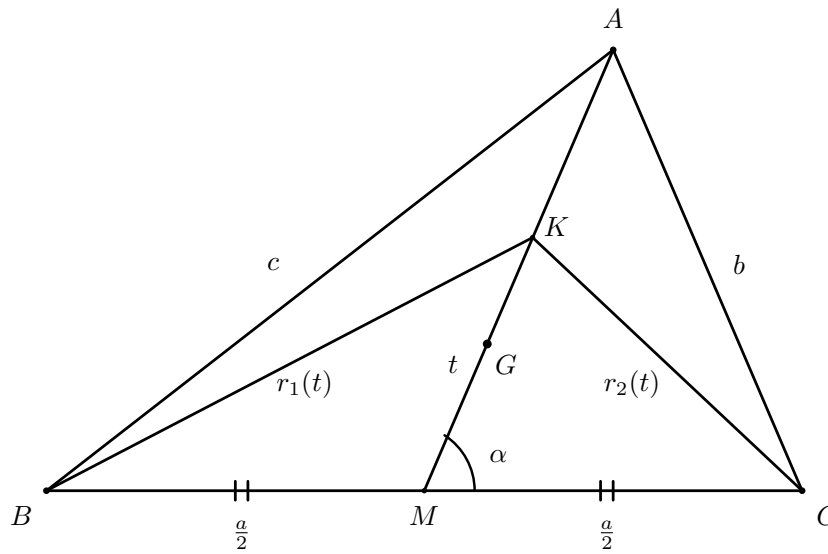


Figura 6 – Triângulo ABC com a mediana AM e o ponto variável K

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Cabe destacar que não foi realizada, no âmbito desta investigação, uma análise sistemática do comportamento da função em função da variação do ângulo α . Ainda assim, alguns casos particulares foram apresentados e discutidos com os estudantes, de modo qualitativo, visando ampliar a percepção acerca das possíveis variações da função. Tais discussões, no entanto, não constituíram objeto de análise formal, em razão da complexidade matemática envolvida e dos objetivos didáticos da proposta.

Posteriormente, os estudantes investigaram a função

$$f(t) = [r_1(t)]^2 + [r_2(t)]^2,$$

que constitui o objeto central de análise deste trabalho. A exploração dessas funções foi realizada por meio de representações numéricas e gráficas, permitindo identificar comportamentos e possíveis valores extremos.

As atividades foram desenvolvidas com momentos de interação entre os estudantes, especialmente em duplas, favorecendo discussões, comparação de resultados e elaboração

de justificativas. A mediação do professor buscou orientar a transição da exploração empírica para a construção de argumentos matemáticos mais estruturados.

Ao final da sequência didática, foi aplicado um questionário por meio do Google Forms, composto por questões discursivas e objetivas, com o objetivo de registrar as percepções dos estudantes e levantar evidências relacionadas à compreensão dos conceitos explorados. As respostas obtidas, juntamente com as construções realizadas no GeoGebra e as observações registradas durante a intervenção, constituem o conjunto de dados analisado no Capítulo 4.

Para a análise dos dados, as evidências produzidas foram organizadas em três categorias principais: (i) as construções geométricas realizadas no GeoGebra; (ii) as observações das interações ocorridas durante as atividades; e (iii) as respostas ao questionário aplicado ao final da intervenção. Essas categorias orientam a análise apresentada no Capítulo 4, na qual são discutidas as estratégias adotadas pelos estudantes, as conjecturas formuladas e as relações estabelecidas entre as representações geométricas, os conceitos de função e os processos de investigação matemática.

4 Análise e Discussão dos Resultados

Este capítulo apresenta a análise das evidências produzidas durante a aplicação da sequência didática descrita no capítulo anterior. A investigação foi conduzida sob uma abordagem qualitativa, buscando compreender como os estudantes construíram significados matemáticos a partir das atividades investigativas propostas.

Os dados analisados foram constituídos por três fontes principais: (i) as construções realizadas no ambiente GeoGebra; (ii) os registros produzidos pelos estudantes durante as atividades; e (iii) as respostas ao questionário aplicado ao final da intervenção. As respostas dos estudantes encontram-se apresentadas no Apêndice C, enquanto exemplos adicionais das construções produzidas pelos estudantes podem ser consultados no Apêndice D.

Nas seções seguintes são analisadas as evidências produzidas nas três atividades investigativas propostas, buscando compreender as estratégias adotadas pelos estudantes, as conjecturas formuladas e as relações estabelecidas entre as representações geométricas e os conceitos matemáticos envolvidos.

Em razão da quantidade de registros produzidos durante a aplicação da sequência didática, foram selecionadas, para análise neste capítulo, algumas construções consideradas representativas do processo investigativo desenvolvido pelos estudantes. As figuras apresentadas ao longo deste capítulo ilustram momentos significativos das atividades realizadas, enquanto outras construções encontram-se reunidas no Apêndice D, complementando as análises aqui desenvolvidas. As respostas ao questionário, apresentadas no Apêndice C, também constituem uma fonte complementar para a interpretação dos resultados discutidos neste capítulo.

4.1 Investigação da função $r(t)$

A primeira atividade investigativa teve como foco a exploração da função

$$r(t) = \frac{r_1(t)}{r_2(t)},$$

em que $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$, considerando um ponto variável K pertencente à bissetriz do ângulo $\hat{A}$. A configuração geométrica utilizada nessa investigação foi apresentada no Capítulo 3, na Figura 5, servindo de base para todas as construções realizadas pelos estudantes no GeoGebra.

A atividade envolvendo a função $r(t)$ foi inspirada nos resultados apresentados por Bialostocki e Bialostocki (2011), que investigam um problema de otimização geométrica associado à razão entre as distâncias de um ponto móvel, pertencente à bissetriz

de um triângulo, aos vértices B e C . Embora essa função não constitua o foco principal desta pesquisa, sua exploração foi utilizada como etapa inicial da sequência investigativa, permitindo que os estudantes se apropriassem da dinâmica de construção, observação e validação de conjecturas no ambiente do GeoGebra.

Partindo da construção apresentada na Figura 5, os estudantes movimentaram o ponto K ao longo da bissetriz do vértice A , observando, em tempo real, as variações das distâncias aos vértices B e C e, conseqüentemente, da função $r(t)$.

As Figuras 7 a 10 apresentam registros produzidos por uma das duplas participantes da pesquisa durante essa exploração. A escolha dessa sequência teve caráter ilustrativo, por representar de forma clara as observações realizadas ao longo da investigação. Em cada configuração, são exibidos os valores das distâncias BK e CK , bem como a razão $r(t) = \frac{r_1(t)}{r_2(t)}$, permitindo acompanhar qualitativamente o comportamento da função à medida que o ponto K se desloca sobre a bissetriz.

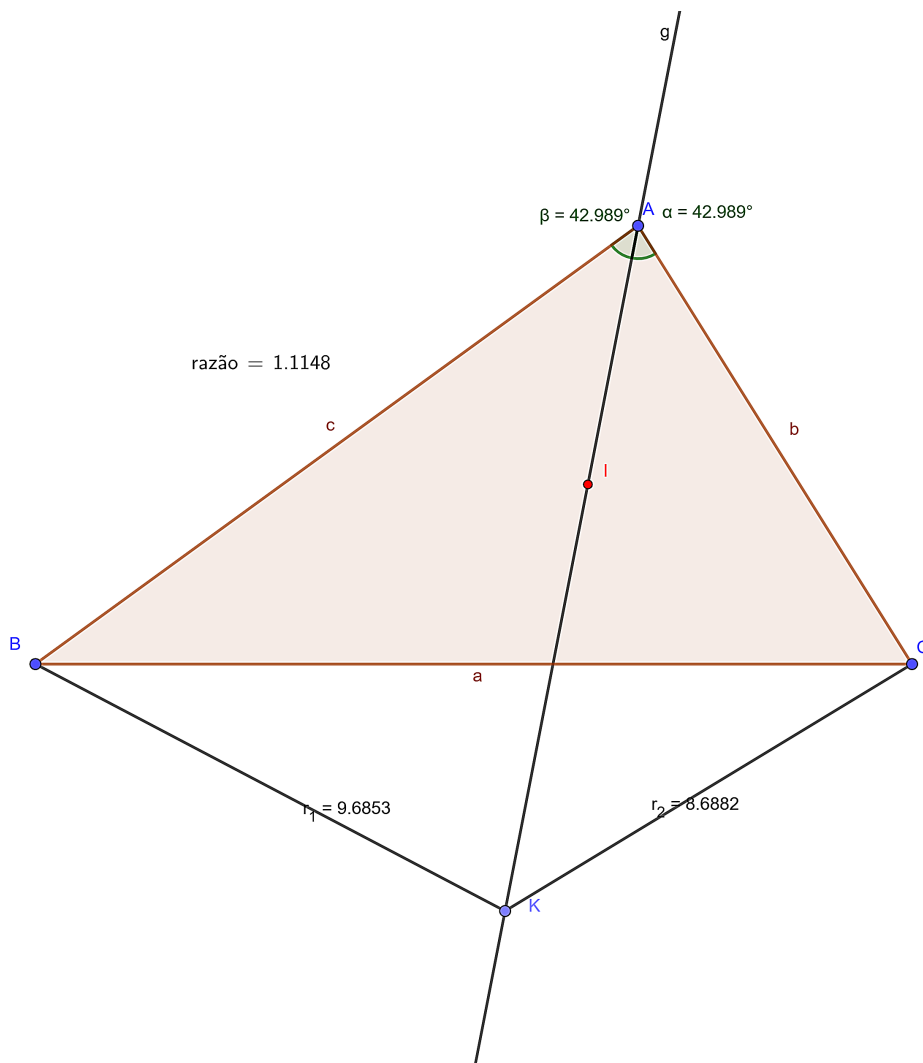


Figura 7 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

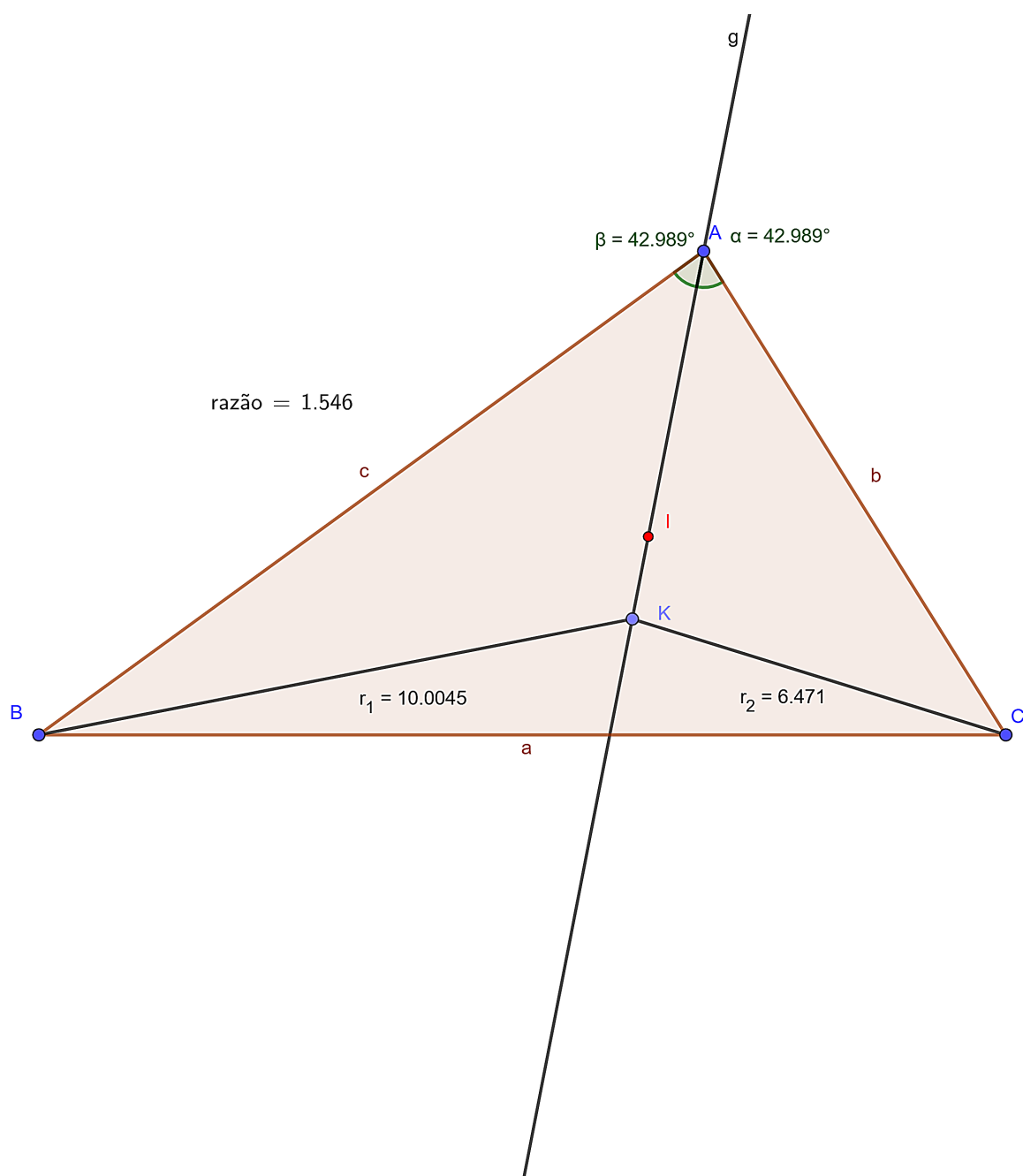


Figura 8 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

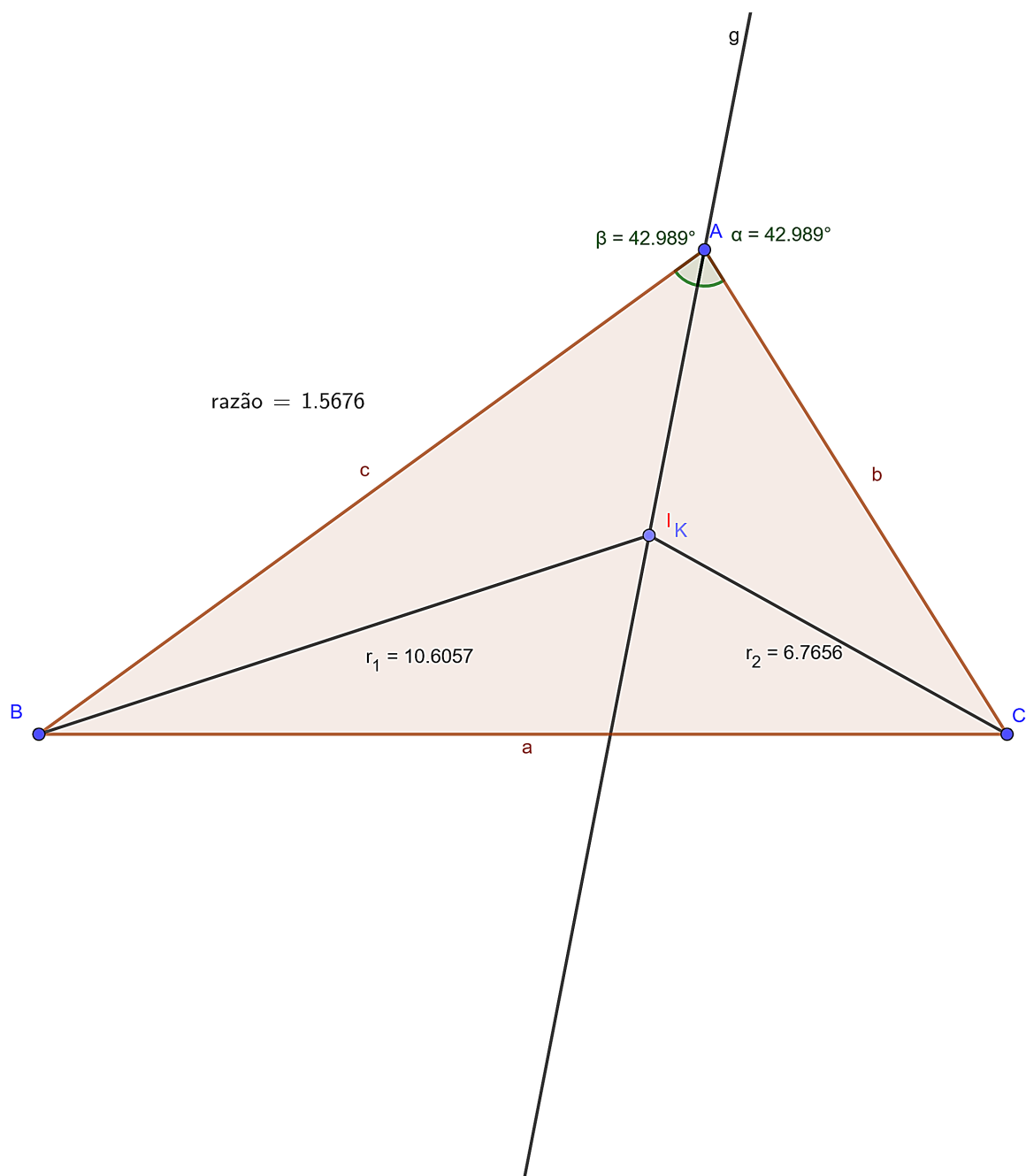


Figura 9 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

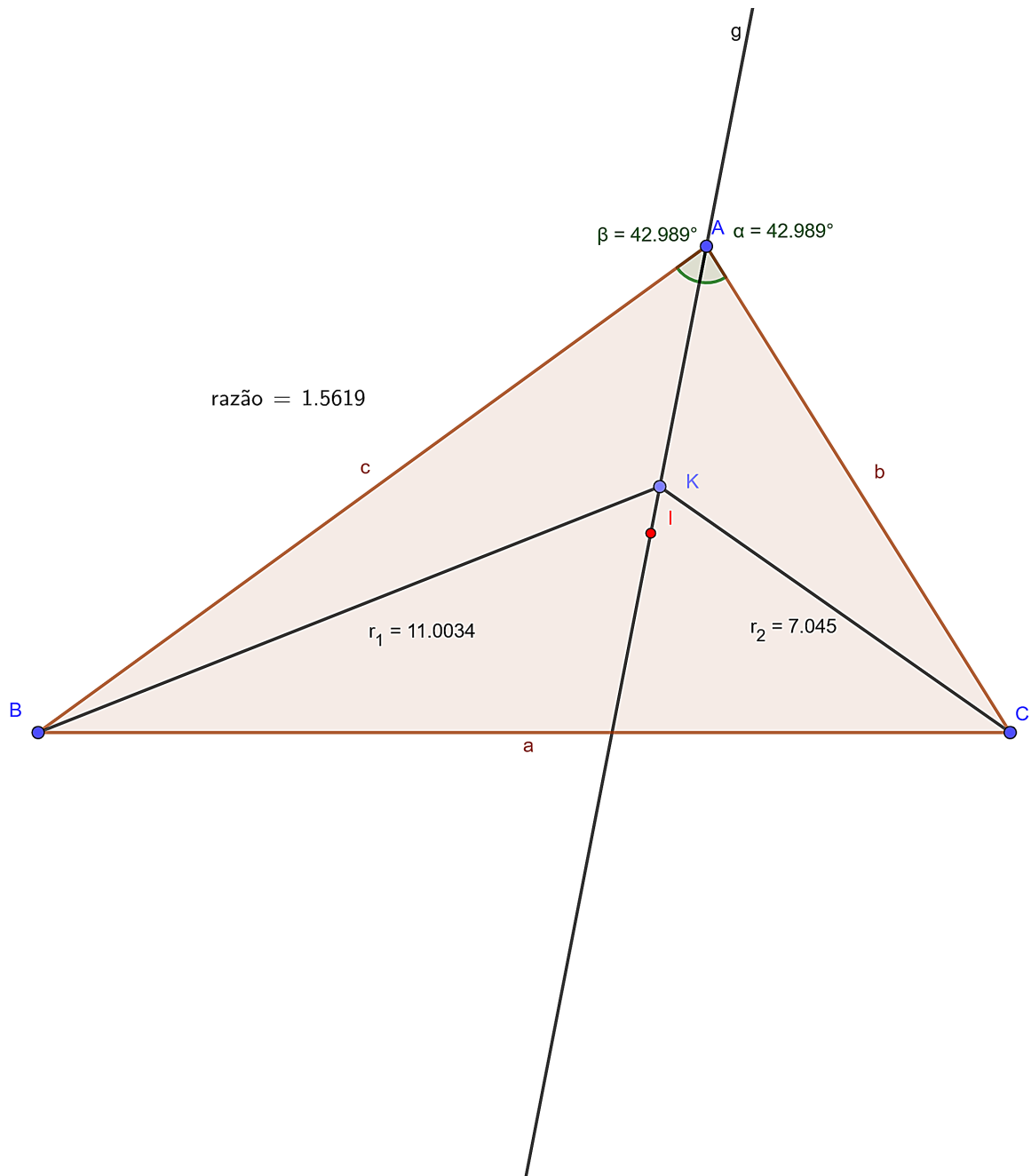


Figura 10 – Construções realizadas durante a investigação da função $r(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

A sequência de construções apresentada nas Figuras 7 a 10 evidencia que os estudantes exploraram diferentes posições do ponto móvel K ao longo da bissetriz do vértice A , registrando, em cada situação, as distâncias BK e CK , bem como o valor correspondente da razão entre essas medidas.

Observa-se que a movimentação do ponto K provocou alterações simultâneas nas medidas dos segmentos BK e CK , refletindo diretamente no valor assumido pela função. A possibilidade de deslocar continuamente o ponto e visualizar, em tempo real, as

modificações na construção geométrica e nos valores numéricos favoreceu a comparação entre diferentes configurações e permitiu que os estudantes identificassem regularidades durante a investigação.

Outro aspecto observado foi a utilização simultânea de diferentes registros de representação disponibilizados pelo GeoGebra. Enquanto a janela gráfica possibilitava acompanhar a posição do ponto K e as relações geométricas da construção, a janela algébrica apresentava as medidas das distâncias e o valor da razão calculada. Essa integração entre os registros gráfico, geométrico e numérico contribuiu para que os estudantes relacionassem a variação da posição do ponto com o comportamento da função investigada.

Segundo a perspectiva de Duval (2009), a compreensão matemática não depende apenas da utilização de diferentes registros de representação, mas da capacidade de coordená-los e estabelecer relações entre eles. Nesse sentido, a atividade desenvolvida favoreceu essa coordenação, uma vez que os estudantes interpretavam simultaneamente a configuração geométrica, as medidas numéricas e o comportamento da razão $r(t)$, articulando informações provenientes de diferentes registros semióticos para formular e validar suas conjecturas.

Embora as figuras apresentem apenas os registros produzidos por uma das duplas participantes da pesquisa, elas ilustram o processo investigativo desenvolvido durante a atividade, no qual a exploração dinâmica antecedeu a formulação de conjecturas que seriam posteriormente discutidas em sala de aula.

Ao término da exploração, o professor propôs aos estudantes a seguinte questão: *A função $r(t)$ apresenta algum valor máximo ou mínimo ao longo da bissetriz?* A partir da movimentação do ponto K , da observação dos valores numéricos apresentados pelo GeoGebra e das discussões entre as duplas, os estudantes verificaram experimentalmente que a razão apresentava um ponto de otimização quando K coincidia com o incentro do triângulo. Essa conclusão foi inicialmente formulada como uma conjectura, construída a partir da experimentação, e posteriormente discutida com a turma.

Essa percepção também foi registrada nas respostas ao questionário aplicado ao final da sequência didática, nas quais diversos estudantes relacionaram o ponto de otimização ao incentro do triângulo. Alguns desses registros encontram-se apresentados no Apêndice C, complementando as evidências discutidas nesta seção.

4.2 Investigação da função $g(t)$

A segunda atividade investigativa teve como foco a exploração da função

$$g(t) = \sqrt{r_1(t) \cdot r_2(t)},$$

em que $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$, considerando um ponto variável K pertencente à mediana relativa ao vértice A . A configuração geométrica utilizada nessa investigação

foi apresentada no Capítulo 3, na Figura 6, servindo de base para todas as construções realizadas pelos estudantes no GeoGebra.

A atividade envolvendo a função $g(t)$ foi inspirada nos resultados apresentados por Freitas, Santos e Velasco (2021), que investigam o comportamento da média geométrica entre as distâncias de um ponto variável aos vértices B e C quando esse ponto percorre a mediana de um triângulo. Diferentemente da atividade anterior, em que foi analisada a razão entre essas distâncias, nesta etapa a construção geométrica permaneceu a mesma, sendo alterada apenas a função investigada. Essa mudança permitiu aos estudantes comparar o comportamento de duas funções distintas definidas sobre um mesmo objeto geométrico, favorecendo a formulação de novas conjecturas acerca dos pontos de otimização. Para investigar o comportamento da função $g(t) = \sqrt{r_1(t) r_2(t)}$, os estudantes deslocaram o ponto móvel K ao longo da mediana relativa ao vértice A , observando as variações das distâncias BK e CK e da média geométrica entre essas medidas.

Inicialmente, os estudantes construíram um triângulo qualquer, obedecendo apenas à condição de que o ângulo α , formado entre a mediana relativa ao vértice A e o lado BC , fosse maior ou igual a 45° . Nessa configuração, deslocaram o ponto K ao longo da mediana, observando o comportamento da função $g(t)$.

Concluída essa primeira etapa, por orientação do professor, os próprios estudantes modificaram a posição do vértice A , reduzindo o valor do ângulo α para uma medida inferior a 45° . Mantendo as demais construções, repetiram a investigação, comparando o comportamento da função nas duas configurações geométricas.

As Figuras 11 a 15 apresentam registros produzidos por uma das duplas participantes durante a investigação do primeiro caso, em que $\alpha \geq 45^\circ$. Em cada construção são exibidos os valores das distâncias BK e CK , bem como o valor da média geométrica entre essas medidas, permitindo acompanhar qualitativamente o comportamento da função à medida que o ponto K percorre a mediana.

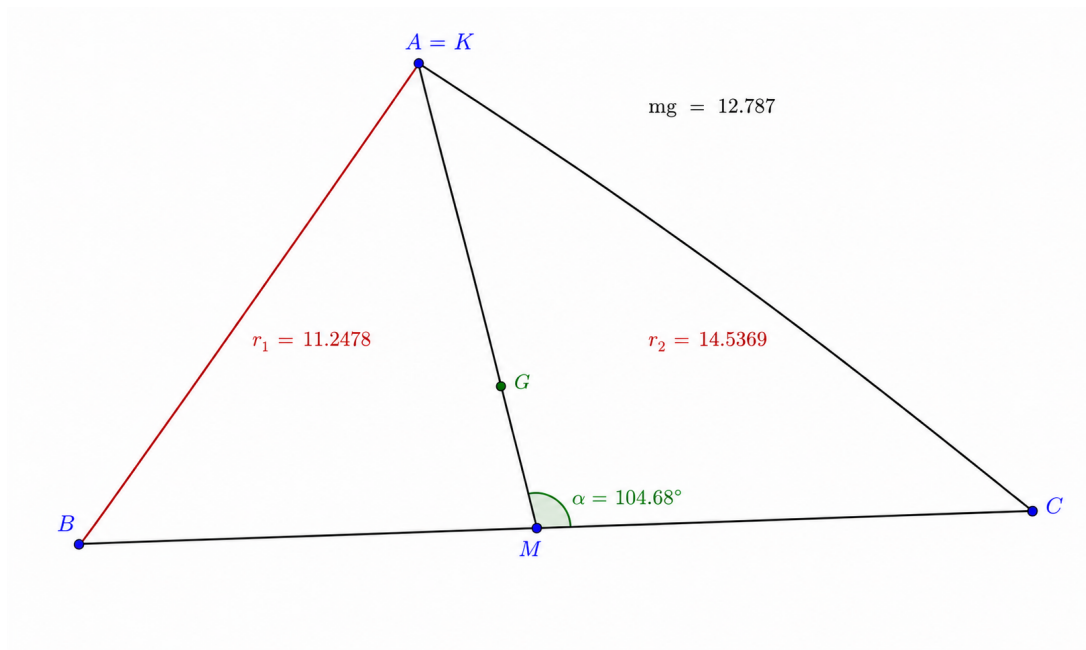


Figura 11 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

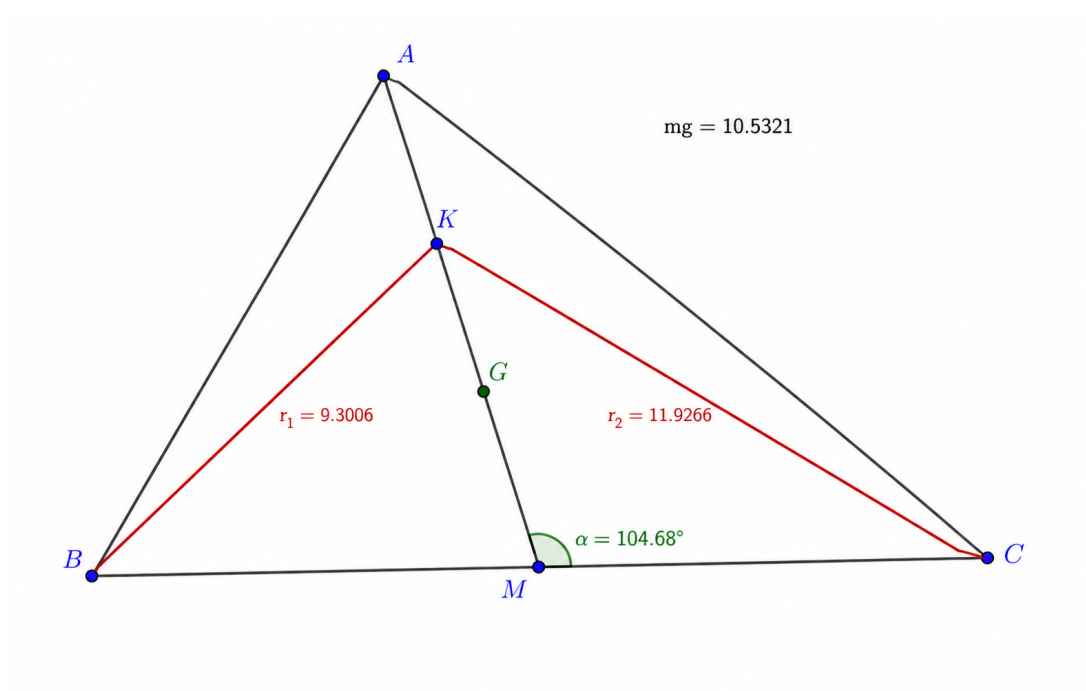


Figura 12 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

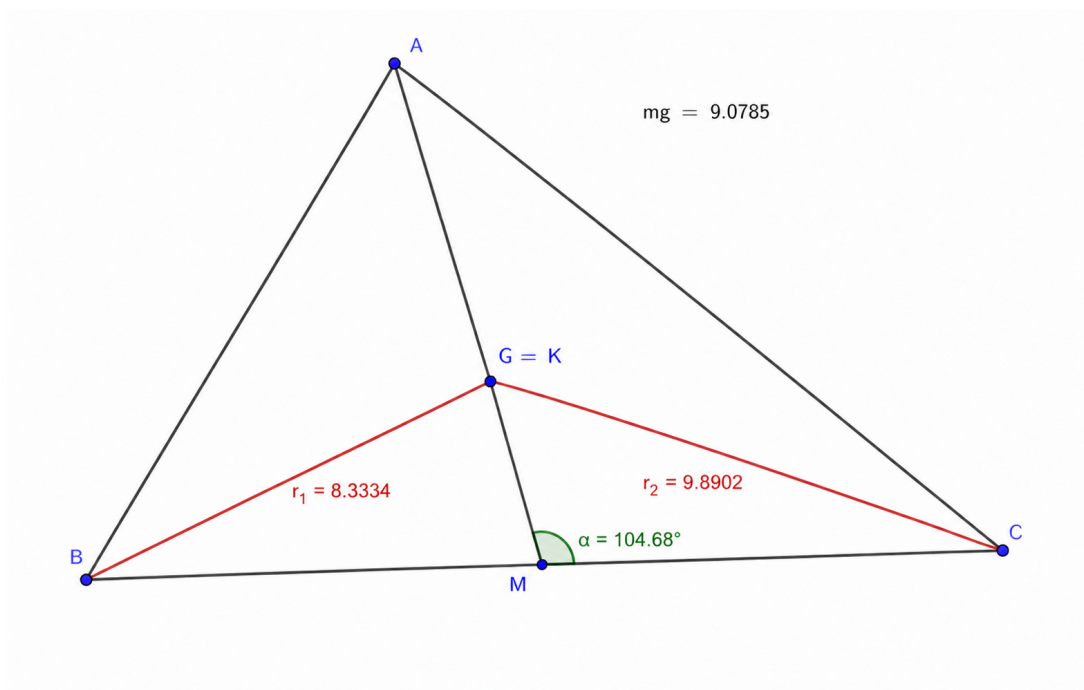


Figura 13 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

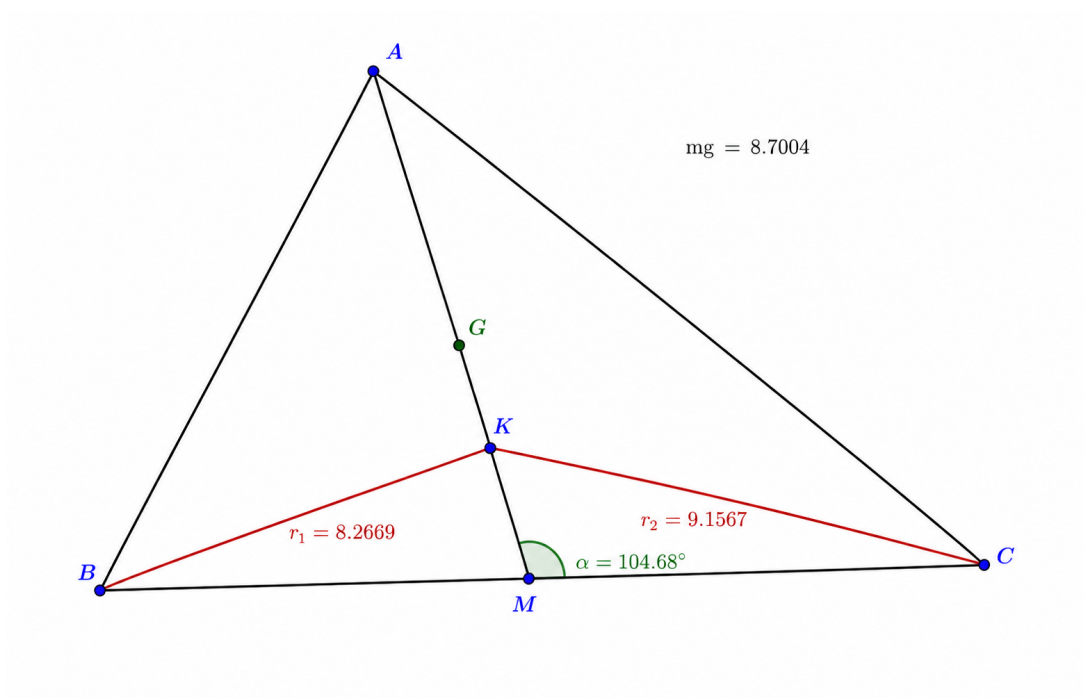


Figura 14 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

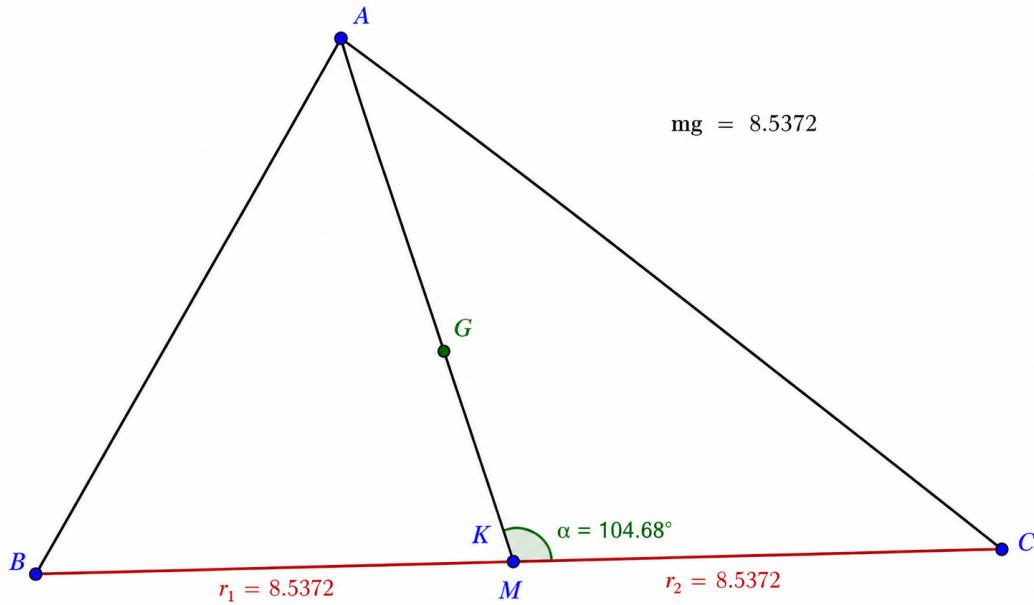


Figura 15 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

A sequência apresentada nas Figuras 11 a 15 evidencia que, ao deslocarem o ponto K ao longo da mediana, os estudantes passaram a acompanhar simultaneamente as variações das distâncias BK e CK e da média geométrica

$$g(t) = \sqrt{r_1(t) \cdot r_2(t)}$$

Observa-se que, nessa configuração, em que $\alpha \geq 45^\circ$, o valor da média geométrica diminui gradativamente à medida que o ponto K se aproxima do ponto médio M do lado BC . Nos registros produzidos pelos estudantes, verifica-se que o menor valor da função ocorre quando K coincide com M , situação em que as distâncias aos vértices tornam-se iguais, isto é, $BK = CK$.

Durante as discussões realizadas em sala, algumas duplas identificaram experimentalmente esse comportamento antes mesmo de qualquer demonstração formal, formulando a conjectura de que o ponto médio da base constitui o ponto de mínimo da função nesse caso. Outras duplas chegaram à mesma conclusão após sucessivas movimentações do ponto K , comparando os valores numéricos apresentados pelo GeoGebra e verificando que qualquer deslocamento para fora de M provocava o aumento da média geométrica.

Em seguida, os estudantes repetiram a investigação considerando triângulos para os quais o ângulo α satisfaz $\alpha < 45^\circ$. As Figuras 16 a 20 apresentam uma nova sequência de registros produzidos durante essa etapa da atividade.

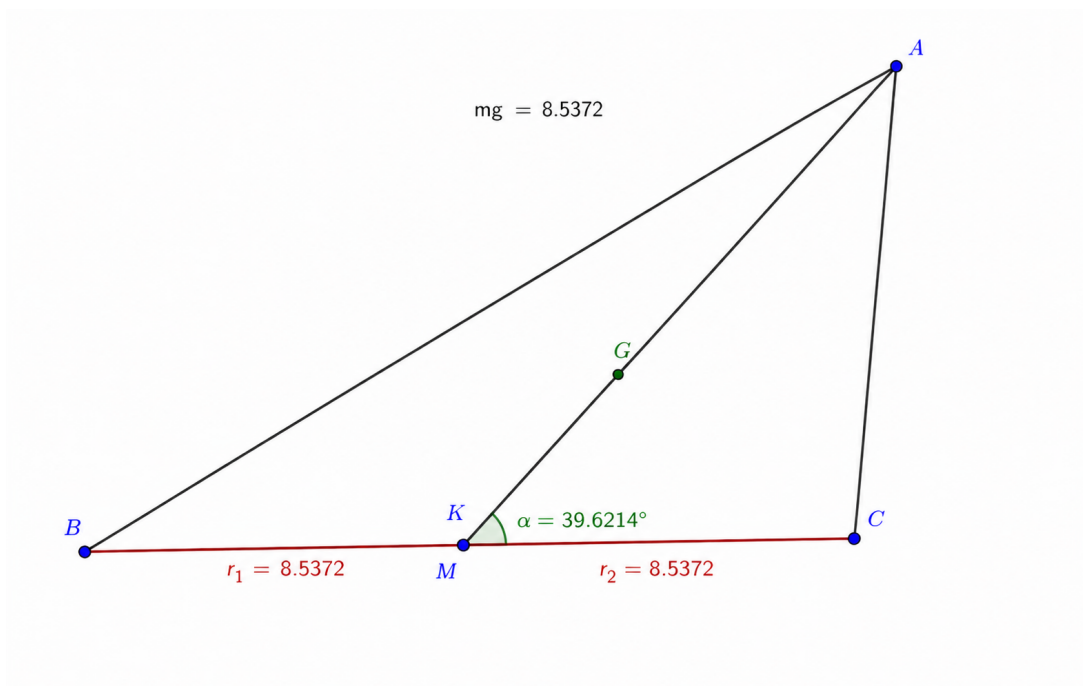


Figura 16 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

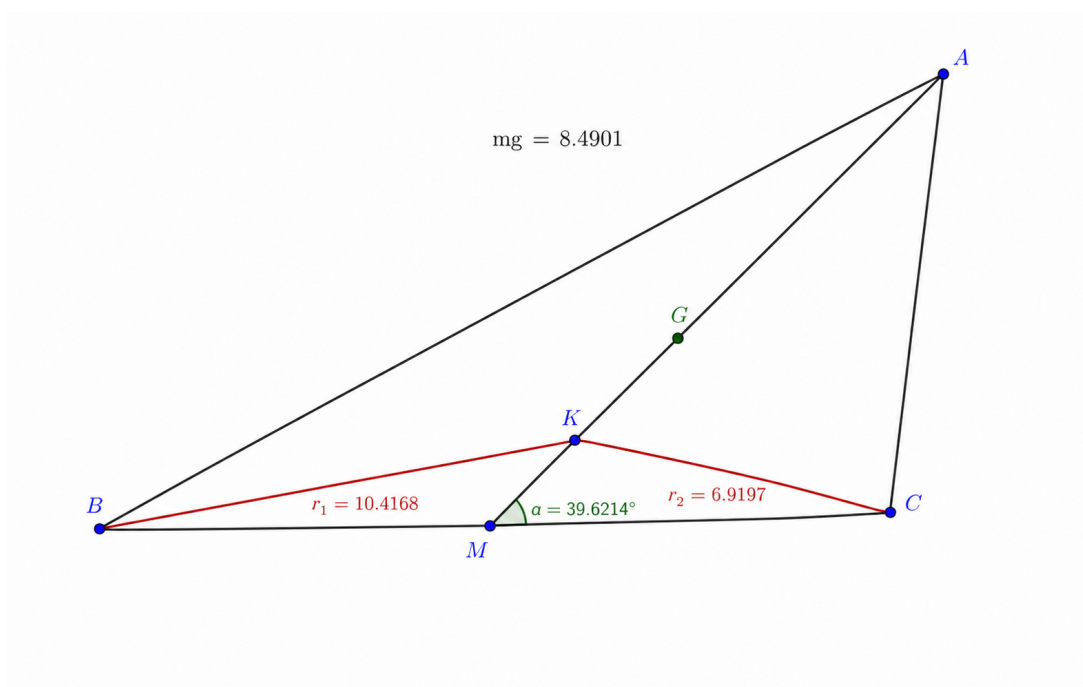


Figura 17 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

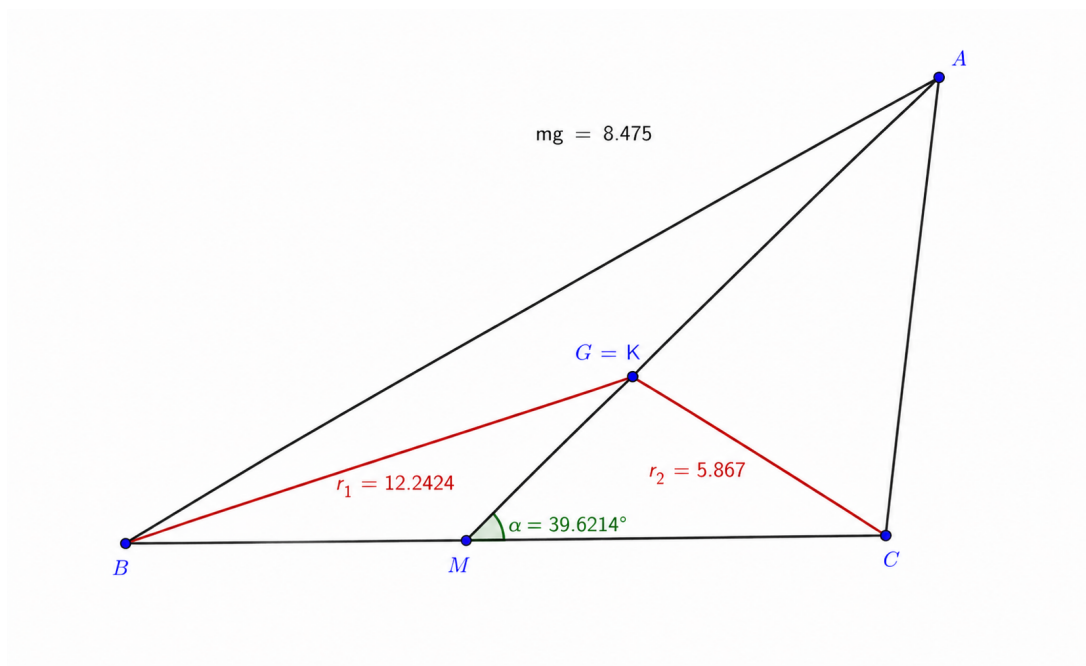


Figura 18 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

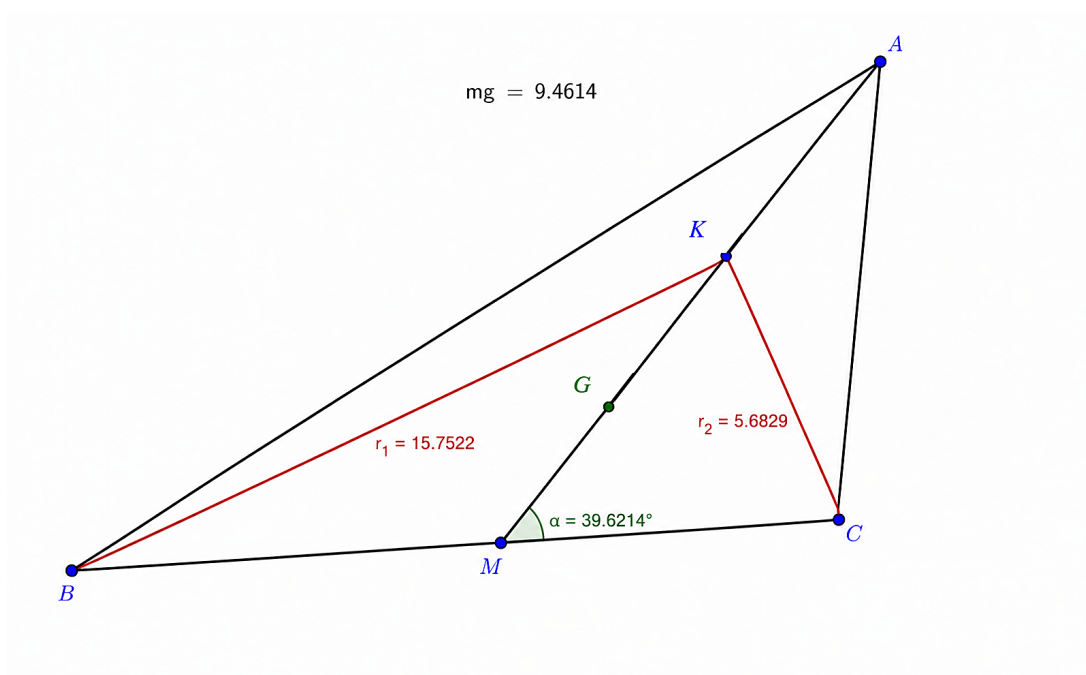


Figura 19 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

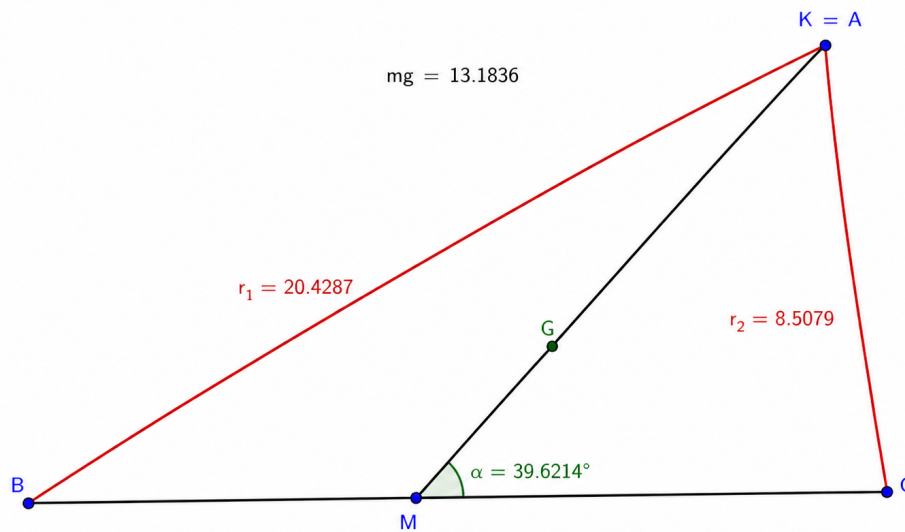


Figura 20 – Construções realizadas durante a investigação da função $g(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

As Figuras 16 a 20 apresentam a exploração realizada após a modificação da posição do vértice A , de modo que o ângulo α se tornasse inferior a 45° . Diferentemente do caso anterior, os estudantes observaram que o comportamento da função passou a apresentar características distintas.

À medida que o ponto K percorria a mediana, verificou-se que o menor valor da média geométrica já não ocorria no ponto médio M . Os registros produzidos evidenciam que a função diminui até determinado ponto da mediana e, a partir desse instante, volta a crescer, indicando a existência de um ponto de mínimo localizado no baricentro G .

Embora os estudantes não dispusessem, nesse momento, de uma demonstração matemática que justificasse esse comportamento, algumas duplas identificaram experimentalmente a existência desse ponto de otimização por meio da observação dos valores numéricos fornecidos pelo GeoGebra. A possibilidade de movimentar continuamente o ponto K permitiu refinar a localização desse mínimo, fortalecendo a conjectura de que a posição do ponto de otimização depende da abertura do ângulo α .

4.3 Investigação da função $f(t)$

A terceira atividade investigativa teve como foco a exploração da função

$$f(t) = r_1(t)^2 + r_2(t)^2,$$

em que K é um ponto variável pertencente à mediana relativa ao vértice A . A configuração geométrica utilizada nessa investigação foi apresentada no Capítulo 3, na Figura 6, servindo de base para todas as construções realizadas pelos estudantes no GeoGebra.

Ao movimentarem o ponto K ao longo da mediana, os estudantes acompanharam, em tempo real, as variações das distâncias BK e CK , investigando o comportamento da soma dos seus quadrados. O objetivo da atividade consistiu em identificar, por meio da experimentação, a existência de pontos de otimização da função, formulando conjecturas antes da apresentação da demonstração matemática desenvolvida no capítulo seguinte.

As Figuras 21 a 27 apresentam registros produzidos pela mesma dupla de estudantes analisada na Seção 4.2. A manutenção da mesma dupla teve como objetivo evidenciar a continuidade do processo investigativo e permitir uma comparação entre as diferentes atividades desenvolvidas ao longo da sequência didática. Em cada construção são exibidos os valores das distâncias BK e CK , bem como o valor correspondente da função $f(t)$, possibilitando acompanhar qualitativamente seu comportamento à medida que o ponto K percorre a mediana.

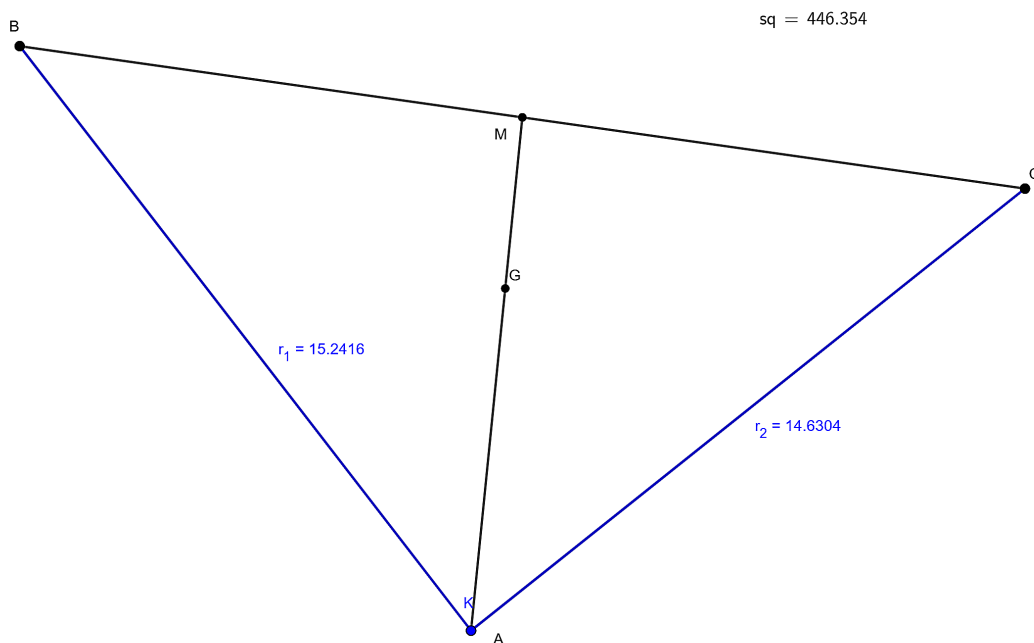


Figura 21 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

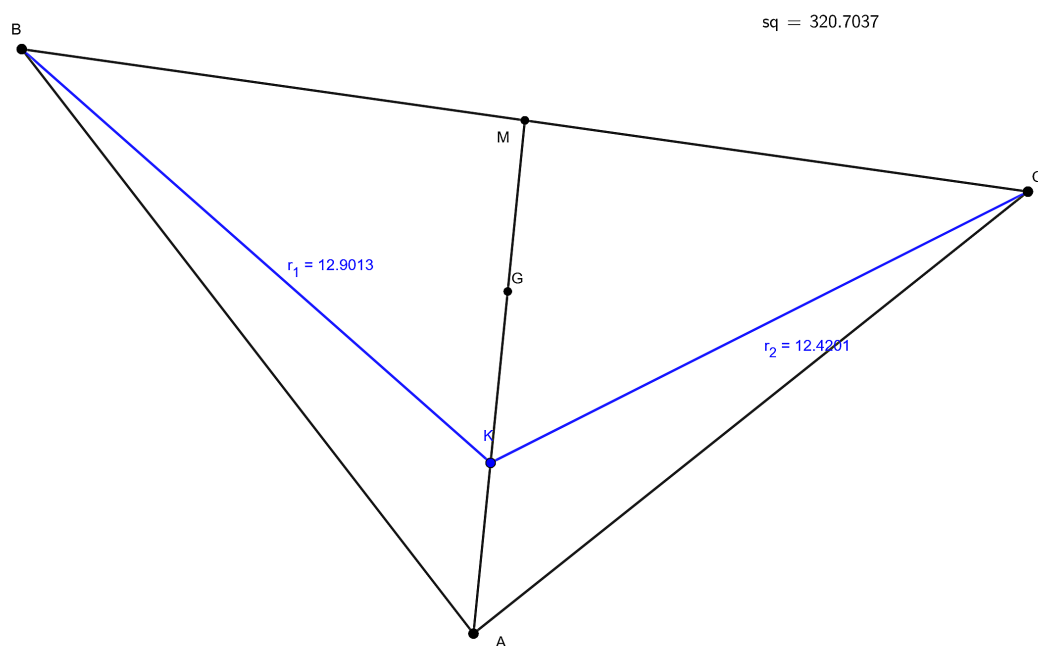


Figura 22 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

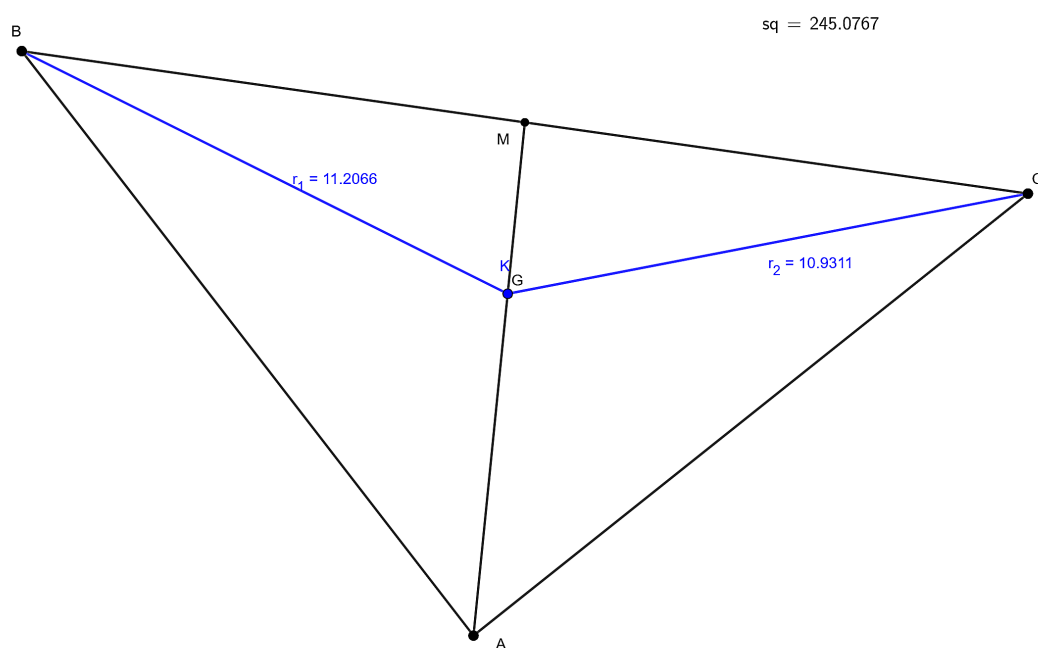


Figura 23 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

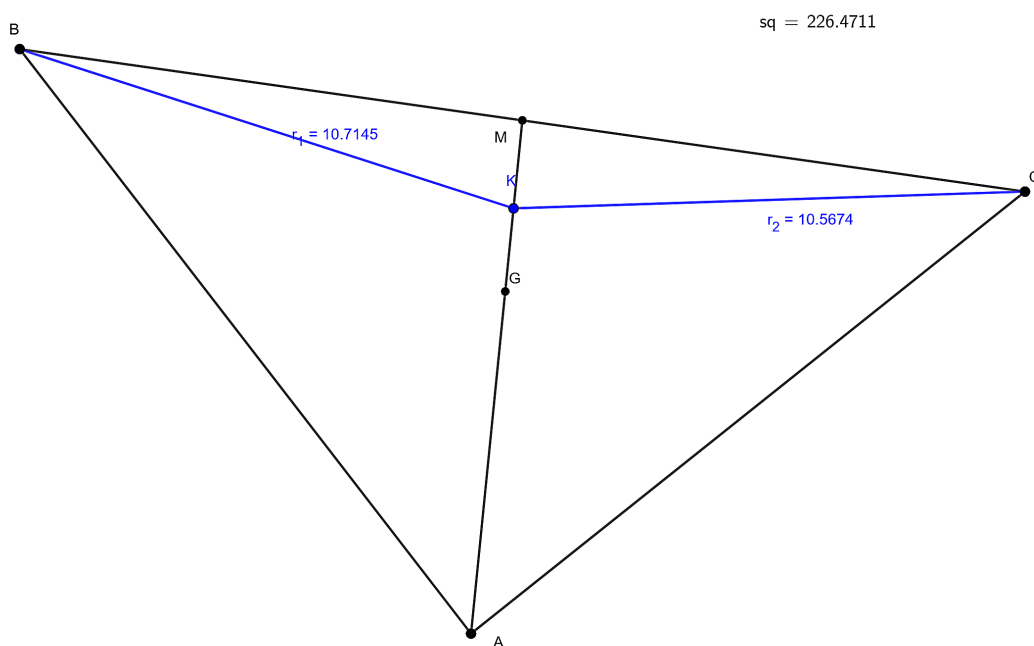


Figura 24 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

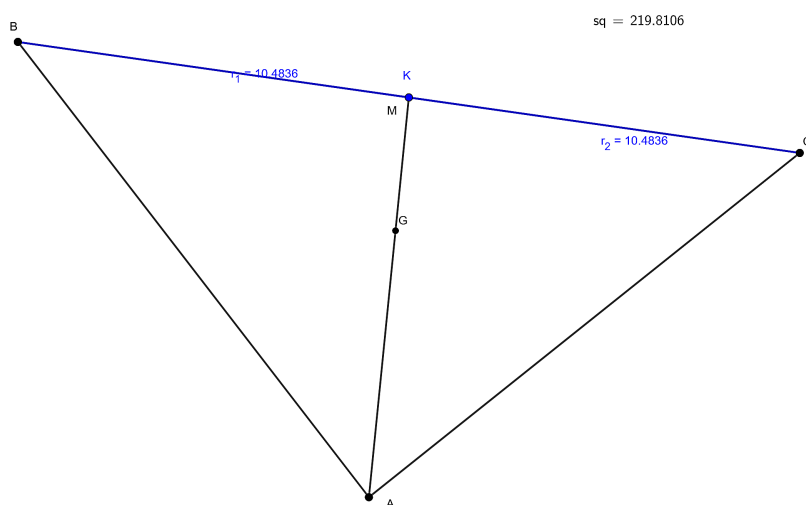


Figura 25 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

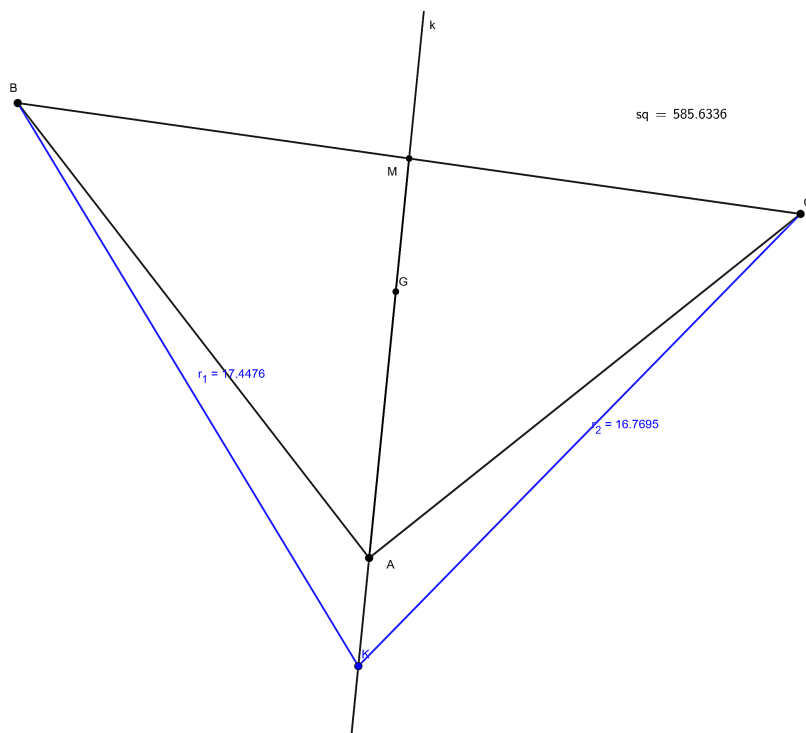


Figura 26 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

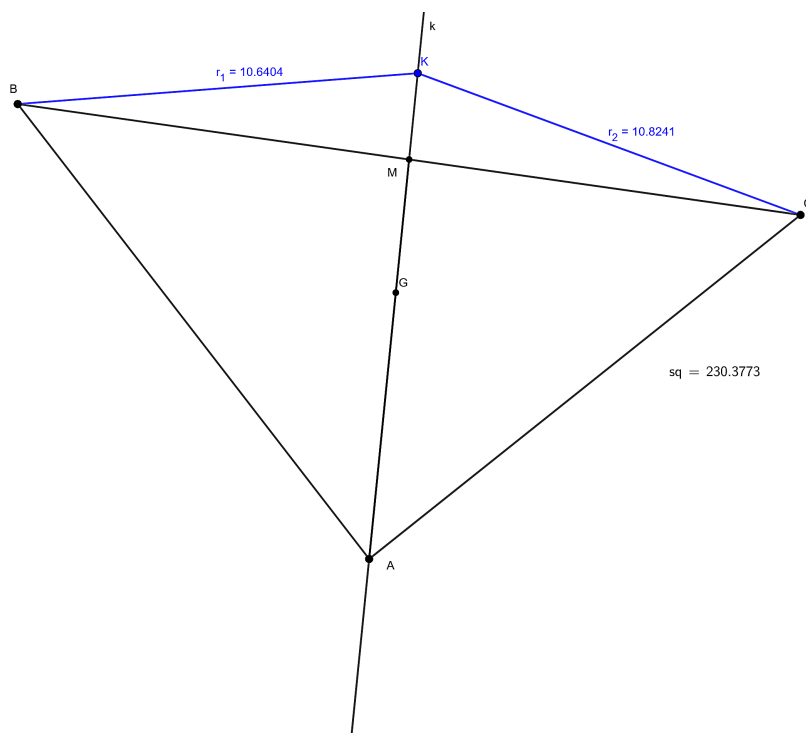


Figura 27 – Construções realizadas durante a investigação da função $f(t)$

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

Observa-se que, durante a movimentação do ponto K , os estudantes acompanharam simultaneamente o comportamento das duas distâncias e da soma de seus quadrados, comparando os valores obtidos em diferentes posições da mediana. Embora uma das distâncias aumentasse enquanto a outra diminuía, verificou-se experimentalmente que a soma dos quadrados apresentava um comportamento regular: os valores diminuía à medida que o ponto K se aproximava do ponto médio M do lado BC e voltavam a crescer quando o ponto era deslocado para posições mais afastadas.

Durante as discussões promovidas ao longo da atividade, algumas duplas identificaram espontaneamente que o menor valor da função ocorria quando o ponto móvel coincidia com o ponto médio M ; outras chegaram à mesma conclusão após sucessivas movimentações do ponto K , comparando os valores numéricos apresentados pelo GeoGebra. Essas observações conduziram à formulação da conjectura de que a soma dos quadrados das distâncias aos vértices B e C é minimizada quando K coincide com o ponto médio do lado BC — principal resultado investigado nesta dissertação.

Outro aspecto relevante, já observado na atividade da Seção 4.1, foi a coordenação entre diferentes registros de representação. Também nesta investigação, enquanto a janela gráfica permitia visualizar a posição do ponto K e sua relação com os elementos geométricos do triângulo, a janela algébrica apresentava os valores das distâncias e da função, possibilitando aos estudantes articular a configuração geométrica e o comportamento numérico. Essa recorrência da coordenação entre registros, nos termos de Duval (2009), reforça sua contribuição para a formulação de conjecturas ao longo de toda a sequência didática.

Cabe destacar que nenhuma demonstração formal foi desenvolvida com os estudantes durante a intervenção. Ao término da atividade, na discussão coletiva, alguns participantes questionaram se o resultado observado poderia ser justificado utilizando apenas conhecimentos matemáticos da Educação Básica, uma vez que a função apresentava comportamento quadrático. Diante desse questionamento, o professor limitou-se a informar que a Lei dos Cossenos e as propriedades da função quadrática constituem ferramentas suficientes para uma demonstração acessível a esse nível de ensino, sem, contudo, desenvolvê-la em sala. Esse episódio revelou que os estudantes passaram a estabelecer relações entre diferentes conteúdos matemáticos, buscando não apenas compreender o comportamento da função, mas também formas de justificar os resultados observados — um movimento investigativo que ultrapassou a simples utilização do software, aproximando a exploração geométrica da argumentação matemática.

Motivado por essa reflexão, o Capítulo 5 apresenta a formalização da conjectura construída pelos estudantes, mediante a obtenção de uma expressão explícita para a função $f(t)$ e a demonstração rigorosa, com ferramentas do Cálculo Diferencial, de que a função atinge seu valor mínimo exatamente quando o ponto K coincide com o ponto médio M do lado BC .

5 Modelagem Matemática e Demonstração

5.1 Modelagem Matemática do Problema

Neste capítulo desenvolve-se a modelagem matemática do problema investigado nesta dissertação e apresenta-se a demonstração do resultado principal. O objetivo consiste em analisar o comportamento da função

$$f(K) = BK^2 + CK^2,$$

em que K é um ponto variável pertencente ao segmento da mediana relativa ao lado BC de um triângulo ABC .

Conforme discutido no Capítulo 2, a escolha da mediana decorre de suas propriedades geométricas e da possibilidade de estabelecer relações métricas por meio da Lei dos Cossenos e do Teorema de Apolônio. Essas ferramentas permitem transformar um problema geométrico em um problema de otimização, cuja solução será inicialmente obtida por argumentos geométricos e, posteriormente, interpretada sob a perspectiva das funções quadráticas e da Análise Matemática.

Seja, portanto, ABC um triângulo qualquer, sendo M o ponto médio do lado BC , de modo que o segmento AM corresponda à mediana relativa a esse lado. Considera-se um ponto variável K pertencente ao segmento AM , conforme ilustrado na Figura 28.

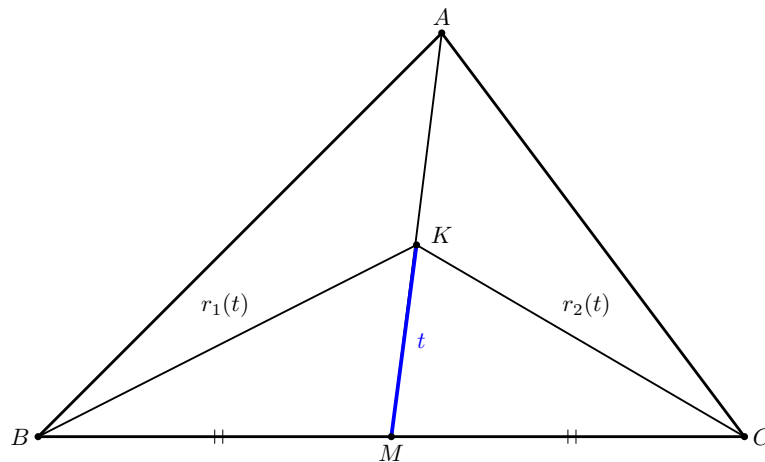


Figura 28 – Configuração geométrica do problema: triângulo ABC , ponto variável K na mediana AM e as distâncias $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Tomando $t = KM$ como parâmetro que determina a posição do ponto variável K ao longo da mediana, cada valor de $t \in [0, AM]$ corresponde a um único ponto $K = K(t)$

do segmento AM . Dessa forma, as distâncias BK e CK passam a ser interpretadas como funções da variável t , denotadas por

$$r_1(t) = BK \quad \text{e} \quad r_2(t) = CK,$$

e a função estudada passa a ser escrita como

$$f(t) = [r_1(t)]^2 + [r_2(t)]^2,$$

definida no intervalo

$$0 \leq t \leq AM.$$

Ao longo deste capítulo, escreve-se, por simplicidade, $f(t) = BK^2 + CK^2$, ficando subentendido que K denota o ponto $K(t)$ da mediana determinado pelo parâmetro t .

O problema consiste em determinar os valores de t para os quais a função $f(t)$ assume seus valores mínimo absoluto e máximo absoluto ao longo do segmento da mediana.

Conforme estabelecido no Capítulo 2, a Lei dos Cossenos e o Teorema de Apolônio fornecem as relações métricas necessárias para a obtenção de uma expressão analítica para $f(t)$. Em particular, o corolário do Teorema de Apolônio permite escrever a soma dos quadrados das distâncias em função da distância KM , estabelecendo uma conexão direta entre a configuração geométrica do problema e sua modelagem matemática.

Essa reformulação conduz naturalmente à obtenção de uma função quadrática na variável t , cuja análise permitirá caracterizar seus extremos absolutos. A demonstração será desenvolvida inicialmente por meio de argumentos geométricos fundamentados no Teorema de Apolônio e, posteriormente, reinterpretada sob a perspectiva das funções quadráticas e do Cálculo Diferencial, evidenciando a convergência entre as abordagens geométrica e analítica.

5.2 Demonstração do Resultado Principal

Nesta seção apresenta-se a demonstração do principal resultado desta dissertação. Conforme estabelecido no Capítulo 2, o Corolário do Teorema de Apolônio permite expressar a soma dos quadrados das distâncias de um ponto variável aos vértices B e C em função da distância desse ponto ao ponto médio do lado BC . Essa relação fornece uma demonstração direta do comportamento da função estudada ao longo da mediana.

Teorema 2. *Seja ABC um triângulo qualquer e seja M o ponto médio do lado BC . Considere um ponto variável K pertencente ao segmento da mediana AM e seja $t = KM$ o parâmetro que determina sua posição. Então, a função*

$$f(t) = BK^2 + CK^2,$$

definida para $0 \leq t \leq AM$, admite exatamente um mínimo absoluto e um máximo absoluto no segmento da mediana.

Além disso,

- o valor mínimo ocorre se, e somente se, $K = M$;
- o valor máximo ocorre se, e somente se, $K = A$.

Demonstração. Pelo Corolário do Teorema de Apolônio, demonstrado na Subseção 2.3.3, tem-se

$$BK^2 + CK^2 = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Como $t = KM$ e $a = BC$, segue imediatamente que

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2},$$

com domínio

$$0 \leq t \leq AM.$$

Como $2t^2 \geq 0$ para todo t , conclui-se que

$$f(t) \geq \frac{a^2}{2},$$

com igualdade se, e somente se, $t = 0$. Como $t = KM$, isso ocorre exatamente quando $K = M$, caracterizando o mínimo absoluto da função.

Além disso, a função f é estritamente crescente no intervalo $[0, AM]$. De fato, dados $0 \leq t_1 < t_2 \leq AM$, tem-se $t_1^2 < t_2^2$, uma vez que a função $t \mapsto t^2$ é estritamente crescente para $t \geq 0$. Portanto,

$$f(t_1) = 2t_1^2 + \frac{a^2}{2} < 2t_2^2 + \frac{a^2}{2} = f(t_2).$$

Como o domínio é o intervalo fechado

$$0 \leq t \leq AM,$$

segue que o maior valor da função ocorre na extremidade direita do intervalo, isto é,

$$t = AM.$$

Como $t = KM$, essa igualdade ocorre se, e somente se, $K = A$. Portanto,

$$f(AM) = 2(AM)^2 + \frac{a^2}{2}$$

corresponde ao valor máximo absoluto da função. Assim, conclui-se que a função $f(t)$ atinge seu valor mínimo absoluto quando $K = M$ e seu valor máximo absoluto quando $K = A$, concluindo a demonstração.

□

O resultado obtido evidencia que o problema de otimização inicialmente formulado em termos de distâncias pode ser reduzido ao estudo de uma função quadrática simples da variável t . Essa caracterização estabelece uma conexão direta entre propriedades métricas do triângulo, a Geometria Plana e a Análise Matemática.

Na seção seguinte, apresenta-se uma dedução alternativa da expressão da função utilizando diretamente a Lei dos Cossenos. Embora conduza ao mesmo resultado, essa abordagem evidencia, de forma detalhada, o processo de modelagem matemática que transforma o problema geométrico em uma função quadrática.

5.3 Obtenção da Função por meio da Lei dos Cossenos

Nesta seção apresenta-se uma dedução alternativa da expressão da função estudada utilizando diretamente a Lei dos Cossenos. Embora o resultado principal tenha sido estabelecido na Seção 5.2 por meio do Corolário do Teorema de Apolônio, a dedução desenvolvida a seguir evidencia, de forma detalhada, o processo de modelagem matemática que transforma a configuração geométrica em uma função quadrática da variável t .

Considere um triângulo ABC , com lados $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Seja M o ponto médio do lado BC e seja K um ponto pertencente ao segmento da mediana AM , conforme ilustrado na Figura 29.

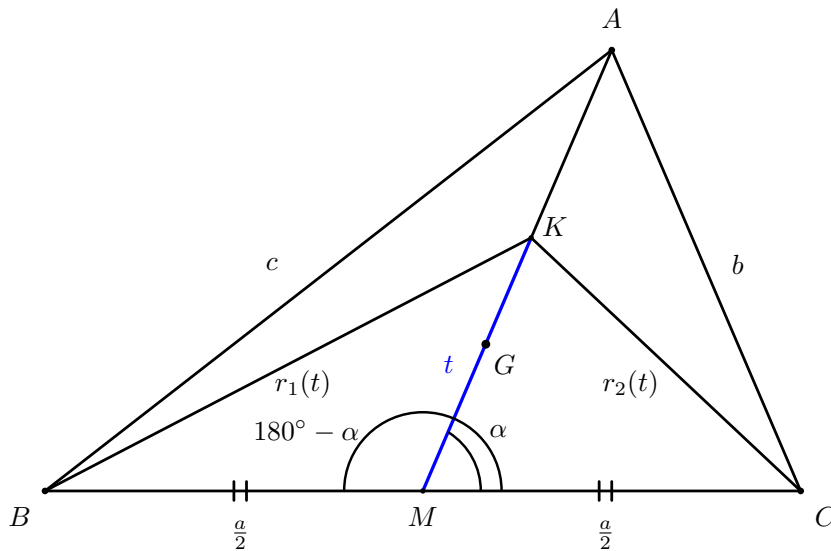


Figura 29 – Mediana AM , ponto variável K e distâncias $r_1(t)$ e $r_2(t)$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Tomando $t = KM$ como a distância entre o ponto variável K e o ponto médio M , definem-se

$$r_1(t) = BK \quad \text{e} \quad r_2(t) = CK,$$

que representam, respectivamente, as distâncias de K aos vértices B e C .

Nosso objetivo é obter uma expressão explícita para a função

$$f(t) = [r_1(t)]^2 + [r_2(t)]^2,$$

utilizando apenas relações métricas provenientes da Lei dos Cossenos.

Demonstração. Seja $K \in AM$ e denote-se por $t = KM$ a distância do ponto K ao ponto M .

Como M é o ponto médio de BC , temos

$$BM = CM = \frac{a}{2}$$

Seja $\alpha = \angle CMK$. Como os pontos B , M e C são colineares, segue que

$$\angle BMK = 180^\circ - \alpha$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo BKM , temos:

$$[r_1(t)]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot t \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Como

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

obtemos

$$[r_1(t)]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 + a t \cos \alpha. \quad (5.1)$$

Aplicando agora a Lei dos Cossenos no triângulo CKM , temos:

$$[r_2(t)]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot t \cdot \cos \alpha$$

Logo,

$$[r_2(t)]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 - a t \cos \alpha \quad (5.2)$$

Somando as Equações (5.1) e (5.2), obtemos

$$f(t) = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 + a t \cos \alpha \right] + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2 - a t \cos \alpha \right] \quad (5.3)$$

Os termos $a t \cos \alpha$ e $-a t \cos \alpha$ se anulam mutuamente. Assim,

$$f(t) = 2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2t^2 = \frac{a^2}{2} + 2t^2 \quad (5.4)$$

Portanto,

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$$

A expressão encontrada coincide exatamente com aquela apresentada na Seção 5.2.

A expressão obtida é notavelmente simples e independe dos ângulos do triângulo, dependendo apenas da posição do ponto K ao longo da mediana e do comprimento do lado BC . Esse fato evidencia o caráter geral do resultado, válido para qualquer triângulo.

Uma vez deduzida a expressão explícita da função, pode-se interpretá-la sob a perspectiva do Cálculo Diferencial, confirmando analiticamente o resultado geométrico estabelecido na Seção 5.2.

Derivando em relação a t , obtém-se

$$f'(t) = 4t$$

Igualando a derivada a zero, conclui-se que a função possui um único ponto crítico, dado por $t = 0$. Para confirmar analiticamente essa caracterização, analisam-se os dois sentidos da equivalência.

($\Rightarrow$) Suponha que $f(t)$ é mínima. Como $f(t)$ é uma parábola com concavidade voltada para cima ($2 > 0$), seu mínimo ocorre no vértice $t_v = 0$. Como $t = KM$, temos $KM = 0$, logo $K = M$.

($\Leftarrow$) Suponha que $K = M$. Então $t = 0$. Substituindo na função, temos $f(0) = \frac{a^2}{2}$. Como $2t^2 \geq 0$ para todo $t \geq 0$, segue que $f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$ para qualquer valor de t . Assim, $f(t) \geq f(0)$, o que prova que a posição $K = M$ fornece o valor mínimo absoluto da função.

Como, no segmento AM , tem-se $0 \leq t \leq AM$, e a função $f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$ satisfaz $f'(t) = 4t > 0$, para todo $t > 0$, segue que f é estritamente crescente no intervalo $[0, AM]$.

Portanto, o valor mínimo da função ocorre na extremidade esquerda do intervalo, isto é, em $t = 0$, enquanto o valor máximo ocorre na extremidade direita, isto é, em $t = AM$.

Como $t = KM$, a igualdade $t = AM$ ocorre se, e somente se, $K = A$. Logo,

$$f(AM) = 2(AM)^2 + \frac{a^2}{2}$$

é o valor máximo da função sob a restrição $K \in AM$.

Assim, no segmento AM , a função $f(t)$ atinge valor mínimo quando $K = M$ e valor máximo quando $K = A$.

Esse resultado evidencia que, sob a restrição da mediana, a soma dos quadrados das distâncias de um ponto aos vértices B e C é minimizada no ponto médio do lado oposto.

5.4 Extensão: comportamento na reta suporte da mediana

Como extensão da análise realizada, considera-se o ponto K variando ao longo da reta suporte da mediana AM , e não apenas restrito ao segmento AM , conforme ilustrado na Figura 30.

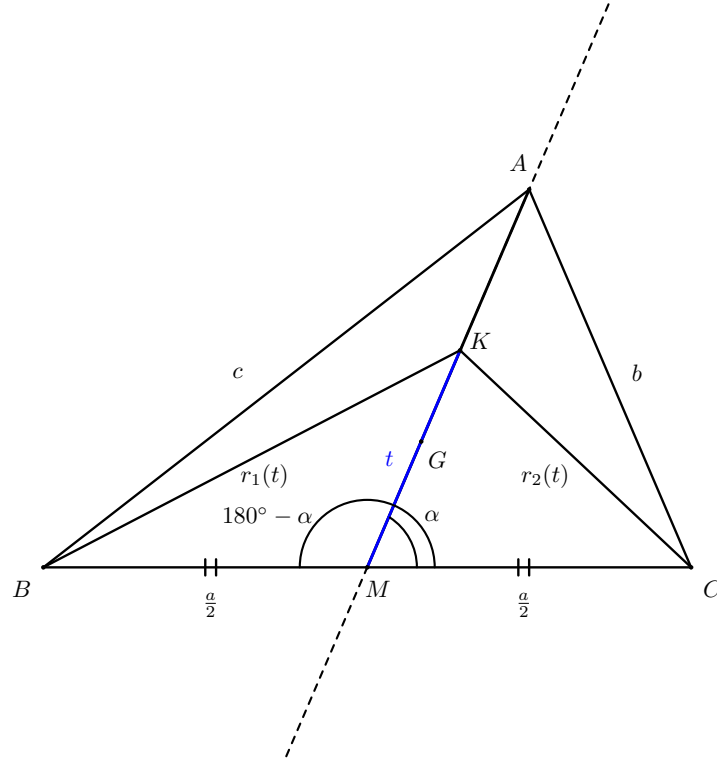


Figura 30 – Reta suporte à mediana AM

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Nesse caso, como o ponto K pode deslocar-se indefinidamente ao longo da reta suporte da mediana no semieixo que contém o vértice A , o parâmetro $t = KM$ permanece não negativo, porém deixa de possuir limite superior.

Consequentemente, o domínio da função passa a ser o intervalo

$$[0, +\infty).$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty,$$

segue que a função cresce sem limite superior. Dessa forma, conclui-se que, ao longo da reta suporte da mediana, a função não admite valor máximo absoluto, possuindo apenas mínimo global em $t = 0$, isto é, quando $K = M$.

Esse resultado evidencia que a existência de valores extremos depende diretamente do domínio considerado: enquanto a restrição ao segmento AM garante a existência de máximo e mínimo, a extensão para a reta suporte elimina a existência de máximo, preservando apenas o mínimo global. Tal análise reforça a importância das condições geométricas impostas ao problema na determinação do comportamento da função.

5.5 Análise da Concavidade da Função

A expressão

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2},$$

permite analisar diretamente o comportamento da função quanto à sua concavidade.

Calculando a segunda derivada, obtém-se

$$f''(t) = 4.$$

Como

$$f''(t) > 0, \quad \forall t \in [0, AM],$$

conclui-se que a função é estritamente convexa em todo o seu domínio. Consequentemente, seu gráfico possui concavidade voltada para cima, característica compatível com a existência de um único ponto de mínimo.

Além disso, como a segunda derivada é constante e nunca se anula, a função não apresenta mudança de concavidade e, portanto, não possui pontos de inflexão.

A Figura 31 apresenta a família de gráficos da função

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2},$$

correspondente a diferentes valores do parâmetro $a = BC$. Observa-se que todas as parábolas possuem a mesma concavidade, o mesmo eixo de simetria e a mesma abertura, diferenciando-se apenas por uma translação vertical determinada pelo termo constante $\frac{a^2}{2}$.

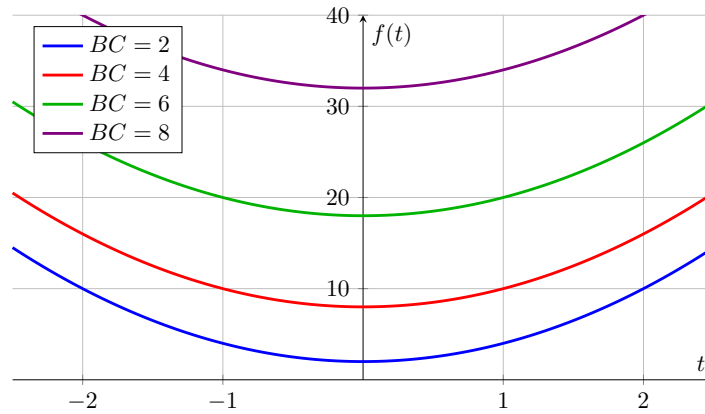


Figura 31 – Família de gráficos da função $f(t) = 2t^2 + \frac{BC^2}{2}$ para diferentes comprimentos do lado BC .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Ressalta-se que, na Figura 31, as parábolas são exibidas em todo o eixo real apenas para fins ilustrativos; no contexto do problema, o domínio restringe-se a $0 \leq t \leq AM$.

Dessa forma, a variação do comprimento do lado BC altera apenas o valor mínimo da função, preservando seu comportamento qualitativo e a posição do ponto crítico em $t = 0$. Os gráficos apresentados sintetizam essas propriedades, evidenciando que a variação do parâmetro a produz apenas uma translação vertical da parábola, preservando sua concavidade, seu eixo de simetria e a inexistência de pontos de inflexão no intervalo $[0, AM]$.

5.6 Análise da função no baricentro e ao longo da mediana

Com o objetivo de aprofundar a interpretação geométrica da função

$$f(t) = [r_1(t)]^2 + [r_2(t)]^2,$$

analisa-se, nesta seção, seu comportamento ao longo da mediana AM , com ênfase no baricentro G do triângulo ABC , bem como nos pontos M e A .

Conforme estabelecido anteriormente, a função pode ser escrita na forma

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2},$$

em que $t = KM$.

No ponto médio M , tem-se $t = 0$. Portanto,

$$f(0) = \frac{a^2}{2},$$

correspondendo ao valor mínimo da função.

Considera-se, agora, o baricentro G do triângulo ABC . Sabe-se que o baricentro divide a mediana na razão $2 : 1$, a partir do vértice, de modo que:

$$GM = \frac{1}{3}AM$$

Assim, tomando $t = GM$, obtém-se:

$$f(GM) = 2(GM)^2 + \frac{a^2}{2} = 2\left(\frac{AM}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

Como

$$0 < GM < AM,$$

e a função f é estritamente crescente no intervalo $[0, AM]$, conclui-se que

$$f(0) < f(GM) < f(AM).$$

No vértice A , tem-se $t = AM$, e, portanto,

$$f(AM) = 2(AM)^2 + \frac{a^2}{2},$$

correspondendo ao maior valor da função sob a restrição $K \in AM$.

Dessa forma, a função $f(t)$ assume valor mínimo em M , valor máximo (no segmento) em A , e valor intermediário no baricentro G .

Observa-se que esse comportamento independe da classificação do triângulo (equilátero, isósceles ou escaleno), uma vez que a expressão da função depende apenas da variável t e do comprimento do lado $a = BC$.

Assim, a análise ao longo da mediana evidencia que, embora o baricentro desempenhe papel central em diversas propriedades geométricas do triângulo, ele não corresponde ao ponto de mínimo nem ao ponto de máximo da função, mas sim a um valor intermediário entre o mínimo, atingido em M , e o máximo, atingido em A .

Esse resultado reforça a interpretação geométrica do problema, evidenciando a coerência entre a estrutura geométrica do triângulo e o comportamento analítico da função.

Além de consolidar a compreensão matemática do problema, os resultados obtidos evidenciam seu potencial didático, permitindo sua abordagem por meio de conceitos acessíveis ao Ensino Médio, conforme será discutido na seção seguinte.

5.7 Uma abordagem no Ensino Médio: interpretação por meio da função quadrática

Com o objetivo de aproximar a análise desenvolvida neste capítulo dos conteúdos abordados no Ensino Médio, apresenta-se, nesta seção, uma interpretação do problema fundamentada em propriedades elementares da função quadrática.

Recorde-se que, ao longo da mediana AM , a função considerada pode ser escrita na forma:

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$$

Escrevendo-a na forma geral de uma função quadrática,

$$f(t) = mt^2 + n,$$

obtem-se:

$$m = 2 \quad \text{e} \quad n = \frac{a^2}{2}$$

Como $m > 0$, conclui-se que o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para cima. Consequentemente, a função admite um valor mínimo, que ocorre em seu vértice.

No caso em estudo, como não há termo linear em t , o vértice é dado por:

$$x_V = 0 \quad \text{e} \quad y_V = f(0) = \frac{a^2}{2}$$

Assim, o vértice da parábola é o ponto:

$$V = \left(0, \frac{a^2}{2}\right)$$

A Figura 32 apresenta o gráfico da função, evidenciando a posição do vértice, a concavidade da parábola e o domínio correspondente ao problema geométrico.

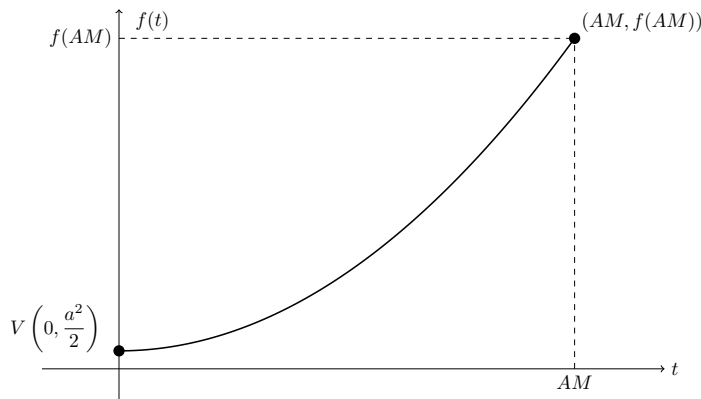


Figura 32 – Gráfico da função $f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$ destacando o vértice e o domínio $0 \leq t \leq AM$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Do ponto de vista geométrico, o fato de o vértice ocorrer em $t = 0$ significa que o menor valor da função é atingido quando $KM = 0$. Como $t = KM$, conclui-se que o valor mínimo ocorre quando $K = M$.

Além disso, a restrição geométrica $K \in AM$ implica que o domínio da função corresponde ao intervalo fechado:

$$0 \leq t \leq AM$$

Nesse intervalo, a função é crescente para $t \geq 0$, iniciando-se no vértice da parábola. Assim, o menor valor é obtido em $t = 0$, isto é, no ponto M , enquanto o maior valor ocorre em $t = AM$, correspondente ao ponto A .

Essa interpretação permite compreender o problema por meio de propriedades elementares da função quadrática, como concavidade, vértice e análise do domínio, sem recorrer ao uso de derivadas. Desse modo, estabelece-se uma articulação natural entre conteúdos de Geometria Plana e de Funções, evidenciando o potencial didático do problema para o Ensino Médio.

Ressalta-se, entretanto, que essa abordagem não foi desenvolvida diretamente com os estudantes durante a aplicação da sequência didática. Sua inclusão nesta dissertação tem caráter complementar e busca evidenciar uma possibilidade de aprofundamento conceitual a partir das atividades investigativas realizadas, considerando que os conceitos de mediana e função quadrática integram o currículo do Ensino Médio.

Assim, a interpretação da função sob a perspectiva da função quadrática complementa a análise geométrica desenvolvida ao longo deste capítulo, evidenciando que um mesmo problema pode ser compreendido por diferentes abordagens matemáticas. Essa convergência entre Geometria Plana e Funções amplia as possibilidades de exploração didática do tema e reforça os resultados apresentados nesta pesquisa.

6 Considerações Finais

A presente pesquisa teve como objetivo investigar o comportamento de uma função associada às distâncias em um triângulo, estabelecendo uma articulação entre exploração geométrica dinâmica e formalização analítica. Ao longo do desenvolvimento do trabalho, procurou-se compreender não apenas o resultado matemático em si, mas, sobretudo, os processos de construção de significados mobilizados pelos estudantes em um contexto investigativo. Nesse sentido, estabeleceu-se um diálogo entre a investigação realizada pelos estudantes e a demonstração matemática rigorosa do resultado obtido, valorizando tanto o processo de construção do conhecimento quanto sua formalização.

Do ponto de vista matemático, os resultados obtidos evidenciam que a função definida pela soma dos quadrados das distâncias de um ponto variável K aos vértices B e C , quando restrito ao segmento da mediana de um triângulo, admite um mínimo absoluto e um máximo absoluto nesse domínio. O mínimo absoluto é atingido quando K coincide com o ponto médio M do lado BC , e o máximo absoluto ocorre quando K coincide com o vértice A . Um dos pontos centrais desta investigação foi demonstrar que esses resultados independem da classificação do triângulo (equilátero, isósceles ou escaleno), constituindo propriedades geométricas intrínsecas da mediana. A modelagem algébrica e a análise via Cálculo Diferencial confirmaram os resultados inicialmente observados durante as explorações realizadas no GeoGebra.

Além disso, a comparação com a análise realizada na bissetriz evidencia que diferentes configurações geométricas conduzem a comportamentos distintos das funções associadas, destacando o papel dos elementos notáveis do triângulo como o incentro e o ponto médio em problemas de natureza otimizada. Tal resultado amplia a compreensão das relações entre Geometria e Análise, evidenciando a riqueza conceitual dessas articulações.

Sob a perspectiva didática, a investigação evidenciou o potencial do uso do GeoGebra como ambiente de exploração matemática. A possibilidade de manipulação dinâmica das construções favoreceu a identificação de regularidades, a formulação de conjecturas e o desenvolvimento de uma compreensão funcional baseada na variação de grandezas. Os dados analisados sugerem que os estudantes reconheceram padrões relevantes, como a existência de valores extremos e a dependência das grandezas em relação à posição do ponto variável.

As evidências produzidas ao longo da intervenção também indicam que a sequência investigativa favoreceu o envolvimento dos estudantes com questões que extrapolaram os objetivos inicialmente propostos. Durante as discussões em sala, alguns participantes questionaram se o resultado observado poderia ser demonstrado utilizando apenas conhecimentos de função quadrática estudados no Ensino Médio, sem recorrer ao Cálculo Diferencial. Embora essa abordagem não tenha sido desenvolvida durante a intervenção,

esse questionamento constitui um indício de que a atividade estimulou a curiosidade matemática e a busca por diferentes formas de argumentação e demonstração.

Os dados produzidos sugerem que a articulação entre diferentes registros de representação — geométrico, numérico e analítico — favoreceu a construção de significados matemáticos mais consistentes, em consonância com as contribuições teóricas de Duval (2009). Nesse sentido, o ambiente dinâmico atuou como mediador, favorecendo a coordenação entre esses registros.

Esta pesquisa apresenta limitações inerentes ao delineamento metodológico adotado. O estudo foi desenvolvido com um grupo específico de estudantes de uma única instituição de ensino, em dois encontros presenciais, tendo o pesquisador atuado também como professor da turma durante a intervenção. Assim, os resultados obtidos devem ser compreendidos no contexto investigado, não possuindo caráter de generalização estatística. Ainda assim, as evidências produzidas oferecem indícios relevantes acerca das potencialidades do uso do GeoGebra em atividades investigativas voltadas ao ensino de Geometria e funções.

Como sugestões para investigações futuras, este trabalho abre possibilidades para:

- **Análise em outras cevianas:** Investigar o comportamento de funções similares quando o ponto K é restrito à altura ou à simediana do triângulo.
- **Generalização de potências:** Estudar a função $f(t) = [r_1(t)]^n + [r_2(t)]^n$ para $n > 2$, verificando como o expoente altera a sensibilidade do ponto de mínimo.
- **Extensão Espacial:** Explorar funções de distância em relação aos vértices de um tetraedro, buscando pontos de otimização em suas medianas espaciais.

Como principal contribuição desta dissertação, apresenta-se uma proposta investigativa apoiada no GeoGebra que articula a exploração de funções associadas às distâncias em um triângulo, a formulação de conjecturas pelos estudantes e sua posterior formalização matemática. Além dos resultados obtidos sobre o comportamento dessas funções ao longo da mediana e da bissetriz, o trabalho oferece uma possibilidade concreta de integrar Geometria Plana, funções e problemas de otimização em atividades investigativas no Ensino Médio, disponibilizando uma sequência didática que poderá ser adaptada e ampliada em diferentes contextos educacionais.

Referências

- ARAÚJO, L. C. L. d.; NÓBRIGA, J. C. C. *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*. Brasília: Exato, 2010. Citado na página 26.
- BIALOSTOCKI, A.; BIALOSTOCKI, D. The incenter and an excenter as solutions to an extremal problem. *Forum Geometricorum*, v. 11, p. 9–12, 2011. Disponível em: <<https://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201102index.html>>. Citado na página 41.
- BORBA, M. d. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- BORBA, M. d. C.; VILLARREAL, M. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 10 fev. 2026. Citado na página 24.
- DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 19, 20, 23, 24, 25 e 72.
- FREITAS, R. C. M.; SANTOS, R. C.; VELASCO, F. C. O baricentro como ponto crítico da função média geométrica entre duas distâncias em um triângulo. *Intermaths*, v. 2, n. 1, p. 1–11, 2021. Citado na página 47.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. *Introduction to GeoGebra*. [S.l.], 2009. Acesso em: 14 fev. 2026. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 25.
- JESUS, R. d. *Ensino de funções contínuas e derivadas no Ensino Básico, com ênfase em problemas de otimização*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Estadual da Paraíba, Juazeiro do Norte - CE, 2026. Citado na página 20.
- JUNIOR, L. N. S. *Ensino de funções quadráticas com auxílio do GeoGebra: uma proposta de sequência didática*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Regional do Cariri, 2025. Citado na página 20.
- LABORDE, C. The case of cabri-géomètre: Learning geometry in a dynamic microworld. *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Springer, Berlin, 1993. Citado na página 23.
- MACEDO, D. F. d. et al. A importância da utilização do aplicativo geogebra em aulas de matemática. In: *Anais do Congresso Nacional de Educação (CONEDU)*. Campina Grande: Realize Editora, 2017. Citado na página 25.
- MAIA, L. E. d. O.; GONDIM, R. d. S.; VASCONCELOS, F. H. L. Utilização do geogebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 10, n. 1, p. 31–51, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

- MARTINS, F. d. C.; ANDRADE, S. Representações múltiplas no ensino de Álgebra e resolução de problemas: aspectos teóricos e práticos. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, v. 16, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.
- MENDES, C. J. *O uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade de Brasília, Brasília, 2020. Citado na página 19.
- NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. (Coleção PROFMAT). Citado na página 31.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. (Coleção PROFMAT). Citado na página 27.
- PEREIRA, L. d. T. K.; GODOY, D. M. A.; TERÇARIOL, D. Estudo de caso como procedimento de pesquisa científica. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, v. 22, n. 3, p. 422–429, 2009. Citado na página 35.
- PONTE, J. P. d. Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, v. 19, n. 25, p. 105–132, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- RIBEIRO, N. S. *Um passeio por alguns tópicos da Geometria Plana com a utilização do GeoGebra*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande - PB, 2025. Citado na página 20.
- SILVA, G. O. d.; OLIVEIRA, G. S. d.; SILVA, M. M. d. Estudo de caso Único: Uma estratégia de pesquisa. *Revista de Educação*, v. 2, n. 1, p. 78–90, 2021. Citado na página 35.
- YIN, R. K. *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 35.

Apêndices

APÊNDICE A – Estudo de Caso

Neste apêndice, apresenta-se o estudo de caso aplicado aos estudantes no contexto da investigação desenvolvida, com o objetivo de explorar relações geométricas e funcionais por meio do software GeoGebra.

A.1 Construção Geométrica e Investigação

Construir um triângulo qualquer acutângulo ABC e traçar suas bissetrizes utilizando o software GeoGebra. Em seguida, determinar o ponto de interseção dessas cevianas, denominado *incentro*. Posteriormente, propõe-se uma atividade investigativa envolvendo a variação de um ponto ao longo de uma das bissetrizes e a análise de uma função associada às distâncias aos vértices do triângulo.

A.2 Definições importantes

Ceviana: Segmento que liga um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.

Bissetriz: Ceviana que divide um ângulo em duas partes congruentes.

Mediana: Segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Incentro: Ponto de interseção das bissetrizes.

Baricentro: Ponto de interseção das medianas.

A.3 Etapas da atividade

1. Construção do triângulo

1. Marcar três pontos distintos A , B e C ;
2. Ligar os pontos formando o triângulo.

2. Construção das bissetrizes

1. Traçar as bissetrizes internas dos ângulos do triângulo;
2. Determinar o ponto de interseção das bissetrizes e nomeá-lo I ;
3. Determinar os pontos de interseção das bissetrizes com os lados do triângulo.

A Figura 33 ilustra a construção realizada.

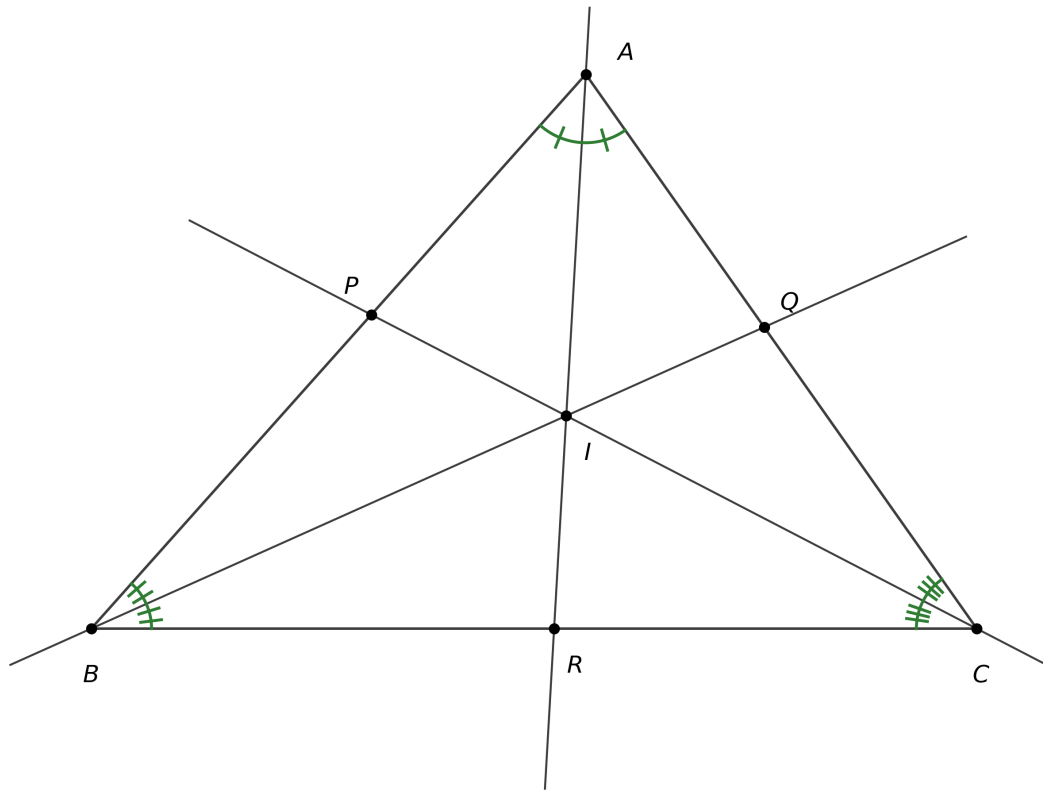


Figura 33 – Triângulo ABC com suas bissetrizes e o incentro I

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

3. Exploração investigativa

1. Marcar um ponto K variável sobre a bissetriz;
2. Traçar $\overline{BK}$ e $\overline{CK}$;
3. Determinar as medidas dos segmentos e definir:

$$r_1(t) = BK, \quad r_2(t) = CK$$

4. Considerar a função:

$$r(t) = \frac{r_1(t)}{r_2(t)},$$

em que t representa a distância do ponto K até um ponto fixo da bissetriz.

A Figura 34 apresenta a configuração da exploração investigativa.

APÊNDICE B – Questionário

Neste apêndice, apresenta-se o questionário aplicado aos estudantes ao final da atividade investigativa, com o objetivo de avaliar a compreensão dos conceitos geométricos e das relações funcionais exploradas.

B.1 Compreensão da construção

1. O ponto I representa:
 - a) Ponto médio de um lado;
 - b) Interseção das medianas;
 - c) Interseção das bissetrizes;
 - d) Um vértice do triângulo.
2. O ponto K foi definido como:
 - a) Um ponto fixo do triângulo;
 - b) Um ponto variável sobre a bissetriz;
 - c) O incentro;
 - d) O ponto médio de um lado.

B.2 Exploração da função $r(t)$

3. Ao mover o ponto K ao longo da bissetriz, o que acontece com as distâncias BK e CK ?
4. A função $r(t)$ representa:
 - a) A soma das distâncias;
 - b) A diferença das distâncias;
 - c) A razão entre duas distâncias;
 - d) O produto das distâncias.
5. Em que posição do ponto K a função $r(t)$ tende a atingir valor extremo?
 - a) Em qualquer ponto da bissetriz;
 - b) No ponto médio;

- c) Próximo ao incentro;
- d) Nos vértices.

B.3 Investigação

6. Descreva o comportamento da função $r(t)$ ao mover o ponto K ao longo da bissetriz.

B.4 Variação do triângulo

7. Ao modificar a forma do triângulo, o que ocorre com a posição em que a função $r(t)$ atinge valores extremos?
- a) Permanece fixa;
 - b) Desaparece;
 - c) Continua associada ao incentro;
 - d) Coincide com um vértice.
8. O comportamento da função $r(t)$ se altera quando o triângulo deixa de ser acutângulo? Justifique.

B.5 Exploração com a mediana

9. A mediana de um triângulo é:
- a) Um segmento que divide um ângulo;
 - b) Um segmento que liga dois vértices;
 - c) Um segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto;
 - d) Um segmento perpendicular a um lado.
10. Ao mover o ponto K sobre a mediana, como se comportam as funções $g(t)$ e $f(t)$?
11. Existe uma posição particular do ponto K em que essas funções atingem valores extremos? Justifique.

B.6 Síntese

12. Compare os resultados obtidos nas explorações com a bissetriz e com a mediana. Que relações podem ser estabelecidas entre os pontos de máximo ou mínimo das funções e os pontos notáveis do triângulo?

APÊNDICE C – Respostas dos Estudantes

Neste apêndice, apresentam-se as respostas produzidas pelos estudantes ao questionário aplicado ao final da atividade investigativa. As respostas foram organizadas por questão, preservando-se, sempre que possível, a forma original de expressão dos alunos.

Ao final da análise das respostas, observa-se que a maioria dos estudantes respondeu corretamente às questões propostas, especialmente aquelas relacionadas à identificação de conceitos geométricos e à interpretação da função $r(t)$ como uma razão entre distâncias. Em particular, verificou-se que os alunos reconheceram, de modo predominante, a associação entre valores extremos da função e o incentro do triângulo, evidenciando a compreensão das relações fundamentais exploradas na atividade investigativa.

No entanto, destaca-se que o foco central deste trabalho reside na análise da função $f(t) = [r_1(t)]^2 + [r_2(t)]^2$, definida ao longo da mediana do triângulo. Nesse contexto, observou-se que os estudantes foram capazes de identificar, ainda que de forma intuitiva, a existência de uma posição particular do ponto K associada a valores extremos da função, com destaque para o ponto médio do lado BC , indicando a percepção de regularidades relacionadas ao problema de otimização proposto.

Por outro lado, algumas dificuldades foram identificadas em questões que exigiam uma análise mais refinada do comportamento funcional e da variação das grandezas envolvidas, evidenciando que, embora os estudantes tenham compreendido os aspectos qualitativos do problema, a formalização dessas ideias ainda se apresenta como um desafio.

De modo geral, os resultados indicam que a abordagem investigativa, mediada pelo uso do GeoGebra, favoreceu a construção de significados matemáticos relevantes, permitindo aos estudantes identificar padrões, formular conjecturas e estabelecer relações entre elementos geométricos e comportamentos funcionais, com especial destaque para a função $f(t)$, em consonância com os objetivos propostos nesta pesquisa.

A seguir, apresentam-se as respostas dos estudantes organizadas por questão, preservando-se integralmente a forma original de expressão, de modo a evidenciar a produção autêntica dos alunos ao longo da atividade investigativa.

Respostas da Questão 01

Interseção das bissetrizes; ponto médio; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes; ponto médio; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes; interseção das bissetrizes.

Respostas da Questão 02

Um ponto variável sobre a bissetriz; o incentro; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz; um ponto variável sobre a bissetriz.

Respostas da Questão 03

Aumentam ao se aproximar de B e diminuem ao se aproximar de AC; podem aumentar ou diminuir dependendo da distância; mudam de valor; dependem do ângulo; variam conforme t; variam seus valores; aumentam ou diminuem conforme o movimento; alteram de tamanho; variam conforme a posição; aumentam; crescem proporcionalmente; aumentam.

Respostas da Questão 04

A razão entre as distâncias; a diferença das distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias; a razão entre as distâncias.

Respostas da Questão 05

Próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro; próximo ao incentro.

Respostas da Questão 06

Aumenta ao se aproximar do incentro; varia apresentando máximos e mínimos; diminui ao se afastar do incentro; acima do incentro é decrescente e abaixo crescente; máximo no ponto I; aumenta quanto mais próximo do incentro; aumenta ao se aproximar do ponto I; diminui ao se afastar do incentro; possui mínimo próximo ao incentro; varia conforme posição e ângulos; possui ponto extremo em I; varia conforme a posição.

Respostas da Questão 07

Continua associada ao incentro; continua associada ao incentro; coincide com o vértice; continua associada ao incentro; continua associada ao incentro; continua associada ao incentro; coincide com o vértice; continua associada ao incentro; continua associada ao incentro; continua associada ao incentro; desaparece; continua associada ao incentro.

Respostas da Questão 08

Sim, depende do ângulo; sim, os pontos se invertem; sim, o incentro vira mínimo; não sabe; sim, aumenta no obtusângulo; não; sim; sim; sim, inverte comportamento; sim, depende dos ângulos; não necessariamente; sim, depende da configuração.

Respostas da Questão 09

Segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento que liga vértice ao ponto médio; segmento perpendicular (erro conceitual); segmento que liga vértice ao ponto médio.

Respostas da Questão 10

Aumentam ao se aproximar de B; variam conforme o triângulo; aumentam; aumentam perto do vértice; comportamento semelhante aos lados; máximo em B e mínimo em M; tendem ao infinito fora do segmento; máximo em B e mínimo em M; aumentam ao subir; dependem da posição; possuem extremos definidos; identificam ponto extremo.

Respostas da Questão 11

Sim, próximo de B; sim, em ângulos específicos; sim, no vértice; sim, no vértice; no ponto B; máximo em B e mínimo em M; sim, em B; possuem máximo e mínimo; máximo em B e mínimo em M; depende das distâncias; sim; depende do ângulo.

Respostas da Questão 12

Bissetriz depende do incentro e mediana do vértice; pontos variam conforme ângulos; máximo na bissetriz no incentro e na mediana no vértice; relação com incentro e vértice;

mudança de ponto notável; máximo no incentro e no vértice; funções mudam comportamento; bissetriz associada ao incentro e mediana aos vértices; máximo em B e mínimo em M; dependência geométrica diferente; relação com baricentro e incentro; diferença entre pontos de máximo e mínimo.

APÊNDICE D – Construções Geométricas dos Estudantes

Este apêndice apresenta exemplos de construções realizadas pelos estudantes no ambiente GeoGebra durante a atividade investigativa. Ressalta-se que as imagens correspondem apenas às representações geométricas: a análise do comportamento das funções foi desenvolvida paralelamente, por meio de anotações nas quais os estudantes registravam e comparavam os valores das distâncias, buscando perceber os pontos de otimização. As imagens selecionadas evidenciam diferentes momentos desse processo de exploração.

Observa-se, ainda, que em algumas construções os estudantes trocaram os vértices A e B de posição em relação à notação adotada no corpo do texto, de modo que a distância registrada como r_1 correspondeu a AK , e não a BK . Trata-se, contudo, de uma diferença apenas de nomenclatura, que não interferiu no desenvolvimento das atividades nem na validade das conclusões obtidas, uma vez que a estrutura do problema um ponto variável sobre a ceviana e as distâncias desse ponto aos extremos do lado oposto permanece exatamente a mesma.

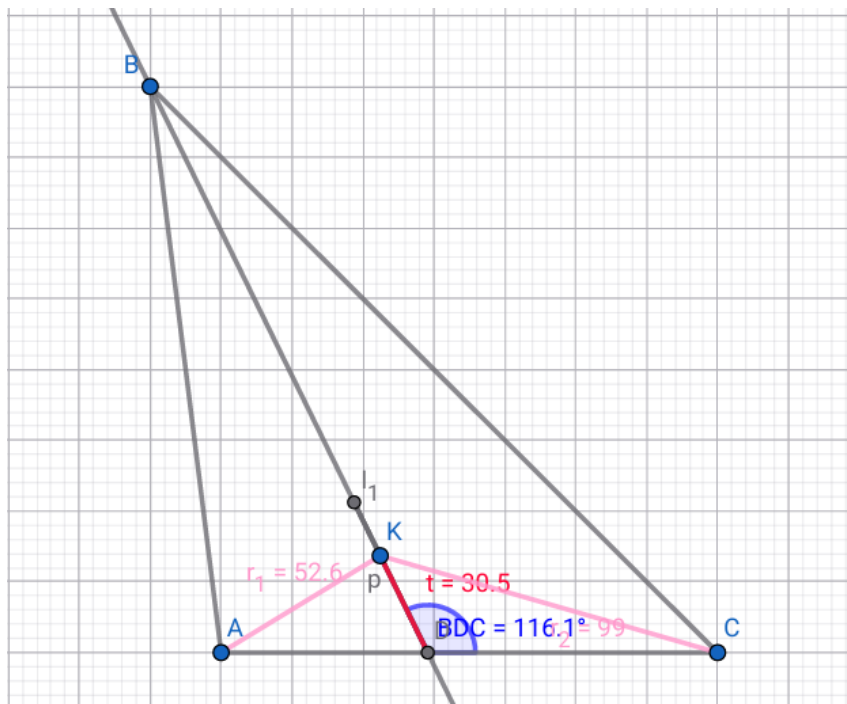


Figura 35 – Exploração inicial na bissetriz, evidenciando a variação das distâncias r_1 e r_2 em função da posição do ponto K .

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

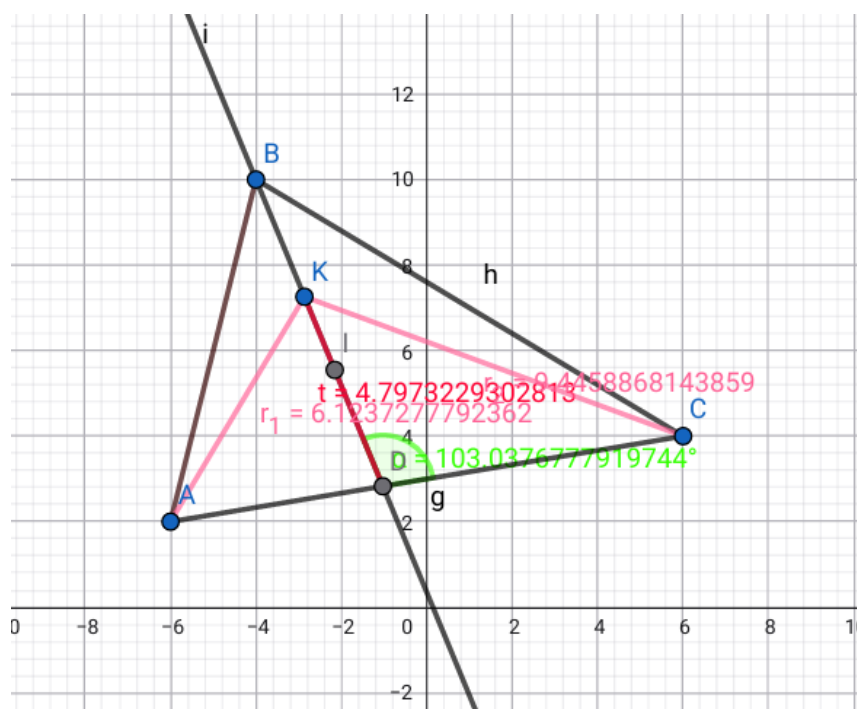


Figura 36 – Configuração com valores distintos de r_1 e r_2 , indicando a percepção da dependência funcional entre a posição de K e as distâncias associadas.

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

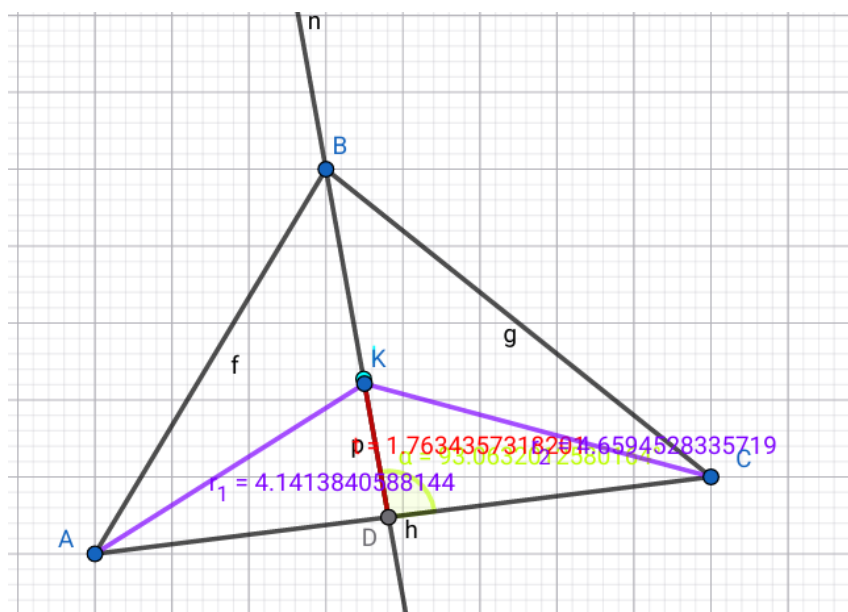


Figura 37 – Situação em que r_1 e r_2 assumem valores próximos, sugerindo uma condição de equilíbrio associada a possíveis extremos da função analisada.

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

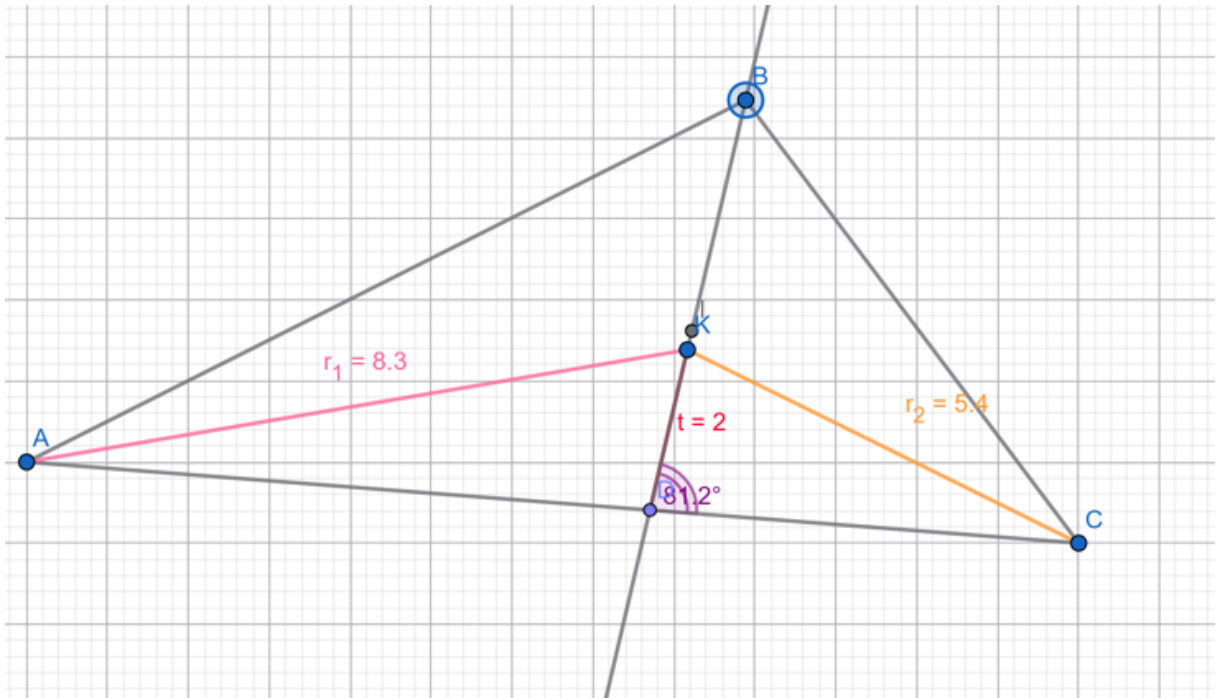


Figura 38 – Exploração avançada na bissetriz, evidenciando a busca por posições específicas associadas a comportamentos particulares da função.

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

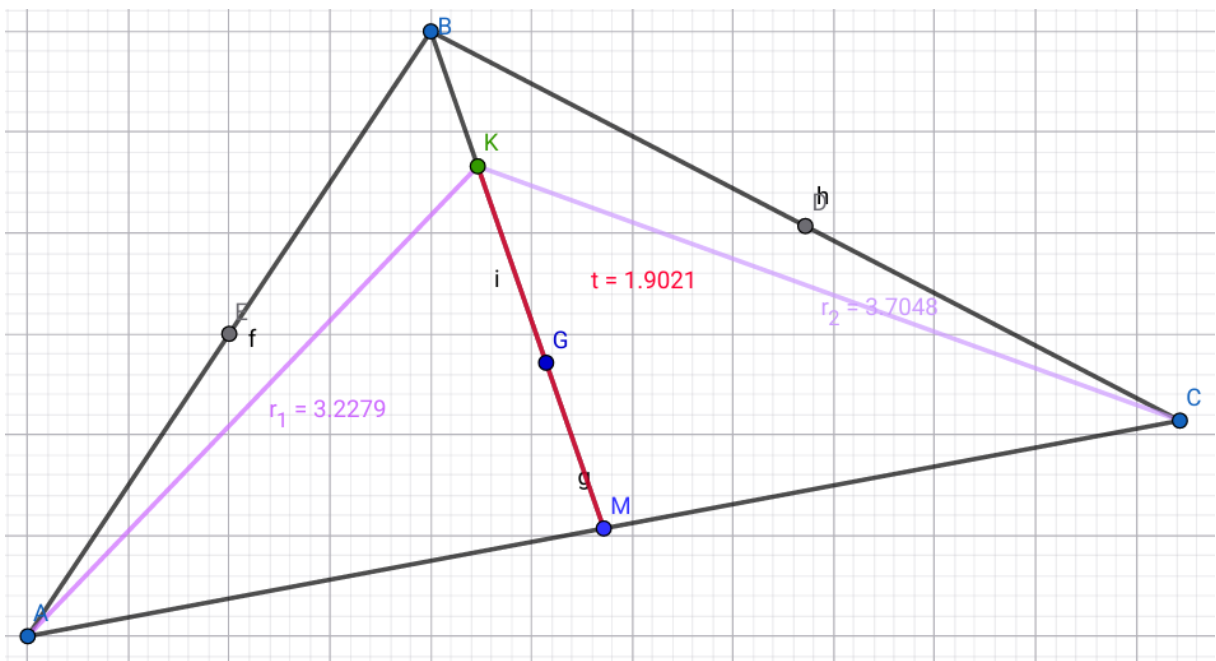


Figura 39 – Construção na mediana com variação do ponto K , destacando a mudança nos valores das distâncias e a percepção de regularidades.

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

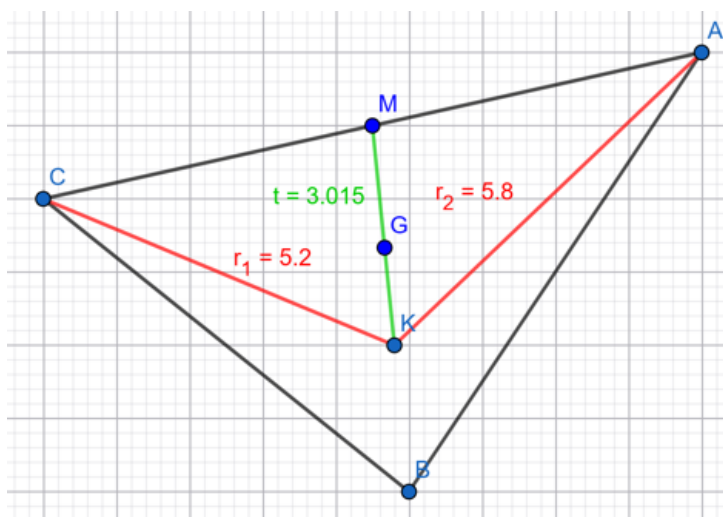


Figura 40 – Situação intermediária na mediana, indicando a análise comparativa entre diferentes posições do ponto K .

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

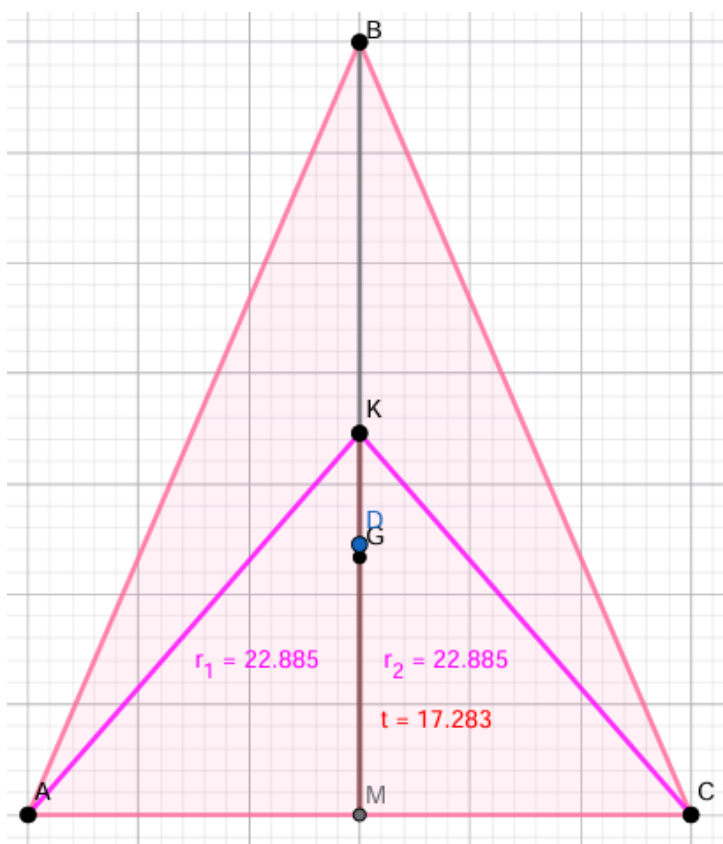


Figura 41 – Configuração próxima ao ponto de mínimo da função $f(t)$, evidenciando a aproximação empírica de um resultado de otimização.

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.

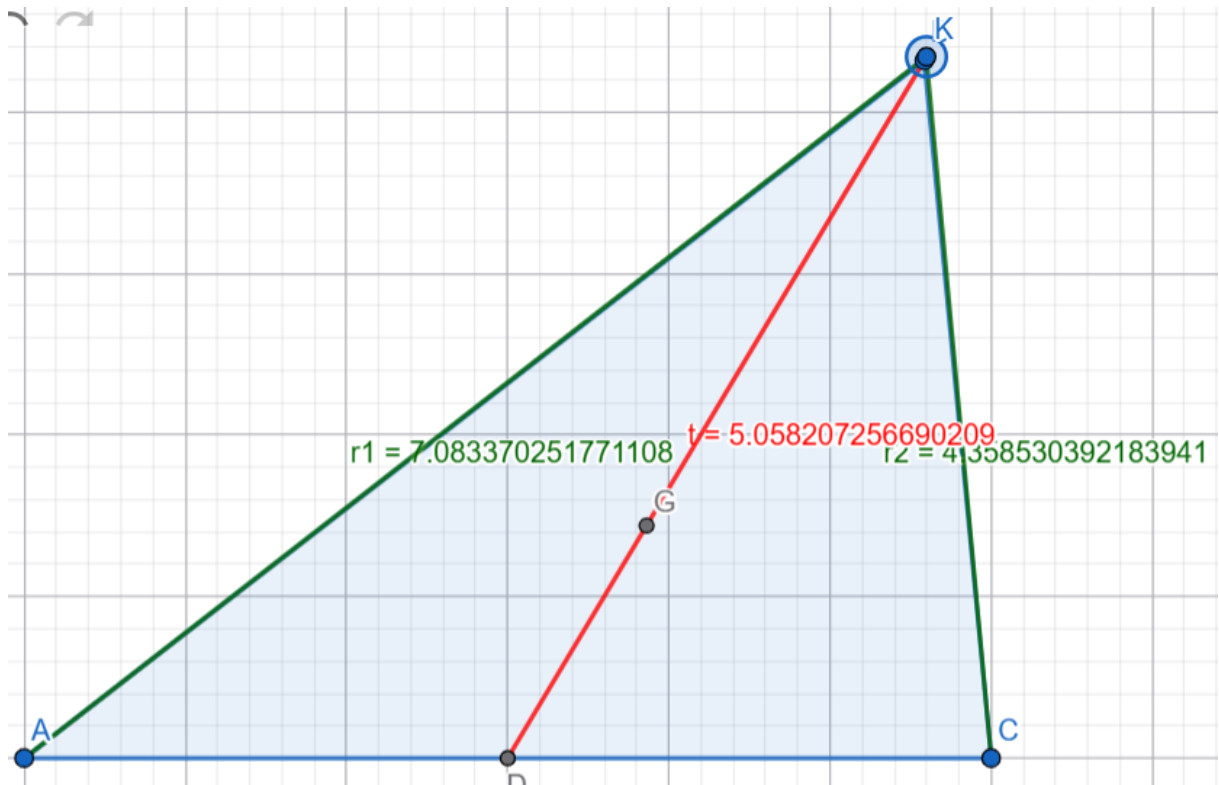


Figura 42 – Situação em que $r_1 = r_2$, indicando uma configuração de simetria associada ao ponto médio do segmento, em consonância com o resultado analítico obtido.

Fonte: Registros produzidos por estudantes participantes da pesquisa, 2026.