



PROFMAT

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Recurso Educacional

K na Medida Certa — investigando distâncias ao longo da mediana

Philip Rodrigues Santana

Brasília
17 de junho de 2026

1 Apresentação

Este recurso educacional foi desenvolvido a partir da dissertação de mestrado intitulada “*Análise do Comportamento de uma Função Associada às Distâncias em um Triângulo: Um Estudo ao Longo da Mediana*”, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade de Brasília.

A proposta fundamenta-se na articulação entre Geometria Plana e Análise Matemática, com foco na investigação do comportamento de funções associadas a distâncias em um triângulo. A abordagem adotada valoriza o uso de tecnologias digitais, em especial o *software* GeoGebra, como ferramenta de exploração, visualização e construção de conhecimento matemático.

O material foi organizado de modo a funcionar de forma autônoma, permitindo sua aplicação por professores que não participaram da pesquisa. Para isso, apresenta: um roteiro detalhado para o professor, com tempos estimados, objetivos específicos, perguntas de mediação e possíveis dificuldades dos estudantes (Seção 5); uma etapa final de sistematização matemática (Seção 7); um roteiro ilustrado de construção no GeoGebra (Apêndice A); e uma folha de atividade do estudante, pronta para reprodução (Apêndice B).

2 Objetivos

2.1 Objetivo Geral

Promover a compreensão de conceitos geométricos e funcionais por meio da investigação do comportamento de funções associadas a um ponto variável em um triângulo.

2.2 Objetivos Específicos

- Explorar propriedades da bissetriz e da mediana de um triângulo;
- Compreender a relação entre a posição de um ponto e a variação de distâncias;
- Interpretar funções a partir de contextos geométricos;
- Identificar padrões e formular conjecturas;
- Introduzir problemas de otimização de forma intuitiva;
- Sistematizar matematicamente a conjectura observada, por meio de uma identidade geométrica elementar;
- Articular diferentes registros de representação matemática.

3 Fundamentação da Proposta

A proposta baseia-se em uma abordagem investigativa, na qual o estudante assume papel ativo na construção do conhecimento. O uso do GeoGebra permite a manipulação dinâmica de construções geométricas, favorecendo a observação de regularidades e a formulação de conjecturas.

Conforme evidenciado na pesquisa, a articulação entre diferentes registros de representação geométrico, numérico e algébrico contribui significativamente para a compreensão matemática,

especialmente em situações que envolvem variação e dependência entre grandezas. A atividade culmina em uma etapa de formalização, na qual a conjectura construída empiricamente é demonstrada por argumentos elementares, adequados ao Ensino Médio.

4 Descrição da Atividade

A atividade consiste na investigação do comportamento de funções associadas às distâncias entre um ponto variável K e os vértices de um triângulo ABC .

4.1 Funções Investigadas

Inicialmente, analisa-se a função

$$r(t) = \frac{r_1(t)}{r_2(t)},$$

associada ao deslocamento do ponto K ao longo da bissetriz interna relativa ao vértice A , como mostra a Figura 1.

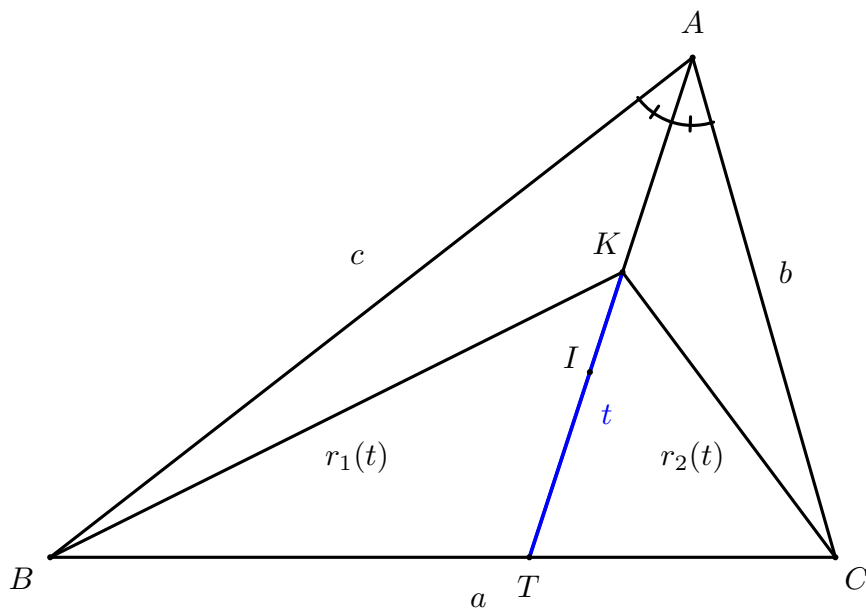


Figura 1: Triângulo ABC com a bissetriz AT e o incentro I .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Essa exploração permite aos estudantes observar relações proporcionais entre as distâncias aos vértices adjacentes e identificar regularidades associadas à posição do ponto.

Em seguida, considerando o ponto K pertencente à mediana AM do triângulo, são investigadas as funções

$$g(t) = \sqrt{r_1(t) \cdot r_2(t)} \quad \text{e} \quad f(t) = [r_1(t)]^2 + [r_2(t)]^2,$$

em que:

- $r_1(t) = BK$;
- $r_2(t) = CK$;
- t representa a posição do ponto K sobre a mediana, medida por $t = KM$.

No ambiente do GeoGebra, os segmentos são nomeados como **r1** e **r2**, correspondendo, respectivamente, às funções matemáticas $r_1(t)$ e $r_2(t)$.

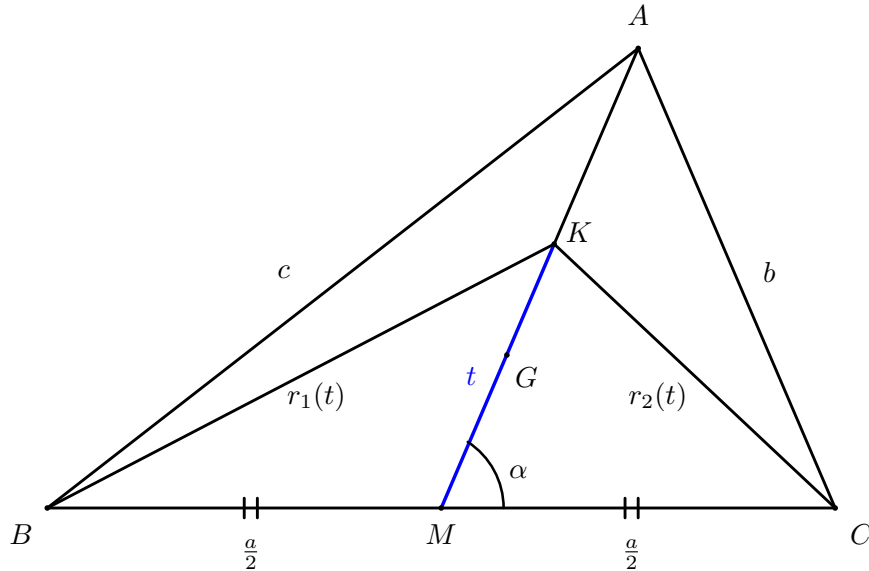


Figura 2: Triângulo ABC com sua mediana AM e o baricentro G .
Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A função $g(t)$ é explorada de maneira investigativa, permitindo aos estudantes analisar comportamentos associados à média geométrica das distâncias.

Destaca-se, contudo, que a função $f(t)$ constitui o foco central da proposta, por possibilitar uma análise mais direta de problemas de otimização e favorecer a articulação entre Geometria Plana e Análise Matemática. Ademais, por se tratar de uma função quadrática conteúdo amplamente explorado no Ensino Médio, sua investigação permite relacionar aspectos algébricos, geométricos e gráficos, contribuindo para uma compreensão mais integrada dos conceitos matemáticos.

5 Organização das Aulas: Roteiro do Professor

A sequência está organizada em **3 aulas de 50 minutos**, podendo ser adaptada conforme a realidade da turma. Para cada aula, apresentam-se o objetivo geral, o detalhamento das etapas com tempo estimado, os objetivos específicos de cada momento, sugestões de perguntas de mediação e possíveis dificuldades dos estudantes, de modo que o material possa ser aplicado por docentes que não participaram da elaboração da pesquisa.

5.1 Aula 1 – Exploração Inicial (50 min)

Objetivo da aula: familiarizar os estudantes com o GeoGebra, construir o triângulo e seus elementos notáveis (bissetriz e mediana) e introduzir a ideia de função como variação.

Tabela 1: Roteiro da Aula 1.

Etapa	Tempo	Objetivo específico	Possíveis dificuldades
1. Apresentação do GeoGebra	10 min	Reconhecer o ambiente do <i>software</i> e suas ferramentas básicas.	Pouca familiaridade com o computador; localização das ferramentas na barra de menus.
2. Construção do triângulo ABC	10 min	Construir um triângulo qualquer com a ferramenta <i>Polígono</i> (Apêndice A, Etapa 1).	Não fechar o polígono clicando novamente no ponto inicial; criar pontos soltos.
3. Construção da bissetriz e da mediana	15 min	Construir a bissetriz AT , o ponto médio M e a mediana AM ; criar o ponto variável K (Apêndice A, Etapas 2, 3, 5 e 6).	Confundir bissetriz com mediana; selecionar os pontos em ordem incorreta na ferramenta <i>Bissetriz</i> ; criar K fora do objeto.
4. Revisão de conceitos geométricos	10 min	Retomar as definições de bissetriz, mediana, ponto médio e elementos notáveis do triângulo.	Definições memorizadas sem significado geométrico; confusão entre altura, mediana e bissetriz.
5. Fechamento: função como variação	5 min	Introduzir informalmente a ideia de que “mover K ” faz variar grandezas que dependem de sua posição.	Dificuldade em perceber a dependência entre posição e medida.

Perguntas de mediação sugeridas:

- O que diferencia a bissetriz da mediana neste triângulo?
- Ao arrastar o ponto K , o que muda na figura? O que permanece igual?
- Que medidas vocês imaginam que dependem da posição de K ?

5.2 Aula 2 – Investigação Matemática (50 min)

Objetivo da aula: investigar, com apoio do GeoGebra, o comportamento das funções $r(t)$, $g(t)$ e $f(t)$, registrar valores numéricos e formular conjecturas.

Tabela 2: Roteiro da Aula 2.

Etapa	Tempo	Objetivo específico	Possíveis dificuldades
1. Definição das distâncias r_1 e r_2	10 min	Definir $r_1 = BK$ e $r_2 = CK$ no campo de entrada e observar sua variação (Apêndice A, Etapas 3 e 6).	Erros de digitação na sintaxe dos comandos; não perceber a atualização dinâmica dos valores.
2. Exploração de $r(t)$ na bissetriz	10 min	Observar o comportamento da razão $r(t) = r_1(t)/r_2(t)$ com K sobre a bissetriz e registrar valores na folha de atividade.	Perceber que a razão $r(t)$ varia conforme a posição do ponto K sobre a bissetriz.
3. Investigação de $g(t)$ e $f(t)$ na mediana	15 min	Definir g e f no GeoGebra (Apêndice A, Etapa 6), mover K sobre a mediana e registrar valores na folha de atividade.	Permanecer no arquivo da bissetriz em vez de iniciar a nova construção; confusão entre as janelas algébrica e geométrica.
4. Identificação de padrões e extremos	10 min	Perceber que $f(t)$ diminui à medida que K se aproxima de M e formular conjectura sobre o ponto de mínimo.	Concluir a partir de poucos casos; imprecisão na leitura dos valores numéricos.
5. Registro das conjecturas	5 min	Redigir, na folha de atividade, a conjectura do grupo sobre a posição de K que minimiza $f(t)$.	Dificuldade em expressar a conjectura em linguagem matemática.

Perguntas de mediação sugeridas:

- O que acontece com o valor de $r(t)$ quando o ponto K se desloca ao longo da bissetriz?
- Existe alguma posição do ponto K em que os valores de $r_1(t)$ e $r_2(t)$ parecem mais equilibrados?
- Onde a soma dos quadrados das distâncias parece assumir o menor valor possível?
- Como vocês poderiam verificar se a conjectura vale para *qualquer* triângulo, e não apenas para o que foi construído?

5.3 Aula 3 – Sistematização Matemática (50 min)

Objetivo da aula: formalizar a conjectura observada na investigação, demonstrando a identidade que fundamenta o mínimo de $f(t)$, por meio de argumentação elementar adequada ao Ensino Médio.

Tabela 3: Roteiro da Aula 3.

Etapa	Tempo	Objetivo específico	Possíveis dificuldades
1. Retomada das conjecturas	10 min	Socializar as conjecturas dos grupos e destacar a necessidade de demonstração.	Considerar a verificação empírica como suficiente.
2. Demonstração da identidade	20 min	Demonstrar, com a Lei dos Cossenos, que $BK^2 + CK^2 = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2}$ (Seção 7).	Aplicação da Lei dos Cossenos com o ângulo suplementar; manipulação algébrica dos termos.
3. Conclusão do mínimo	10 min	Concluir que o mínimo de f decorre de $KM^2 \geq 0$, ocorrendo em $K = M$.	Compreender o argumento de positividade como critério de mínimo.
4. Conexão com a função quadrática	10 min	Reescrever $f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$ e relacionar com o gráfico da parábola observado no GeoGebra.	Transitar entre os registros geométrico, algébrico e gráfico.

Perguntas de mediação sugeridas:

- Por que verificar em vários triângulos no GeoGebra ainda não é uma demonstração?
- Que relação conhecida permite calcular BK e CK usando o ângulo em M ?
- O que acontece com os termos que envolvem $\cos \alpha$ quando somamos as duas expressões? Por quê?
- O que o termo $2t^2$ nos diz sobre o menor valor possível de f ?

6 Metodologia de Aplicação

A atividade deve ser realizada em ambiente com acesso ao GeoGebra, preferencialmente em laboratório de informática. Caso não haja computadores suficientes, o professor pode conduzir a construção de forma demonstrativa, com projetor, mantendo o registro dos valores a cargo dos estudantes.

Os estudantes podem trabalhar em duplas, favorecendo a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento. O professor atua como mediador, orientando a investigação e estimulando a argumentação matemática. A folha de atividade do estudante (Apêndice B) deve ser distribuída no início da Aula 2 e recolhida ao final da Aula 3, servindo como registro do percurso investigativo e como instrumento de avaliação.

6.1 Síntese das Perguntas Norteadoras

Tabela 4: Sugestões de mediação para o professor.

Momento	Pergunta sugerida	Objetivo
Exploração de $r(t)$	O que acontece com o valor de $r(t)$ quando o ponto K se desloca ao longo da bissetriz?	Perceber relações proporcionais e dependência funcional.
Exploração de $g(t)$	Existe alguma posição do ponto K em que os valores de $r_1(t)$ e $r_2(t)$ parecem mais equilibrados?	Investigar relações entre média geométrica e simetria.
Investigação de $f(t)$	Onde a soma dos quadrados das distâncias parece assumir o menor valor possível?	Introduzir a ideia de otimização e mínimo de uma função.
Sistematização	Como garantir que a conjectura vale para qualquer triângulo?	Motivar a demonstração matemática.

7 Sistematização Matemática

Após a exploração no GeoGebra, a conjectura observada pelos estudantes — de que a soma dos quadrados das distâncias $f(t) = BK^2 + CK^2$ atinge seu menor valor quando K coincide com o ponto médio M — pode ser formalizada pela identidade:

$$BK^2 + CK^2 = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (1)$$

7.1 Demonstração da Identidade

Considere o triângulo ABC com $BC = a$ e seja K um ponto da mediana AM , com $KM = t$. Denote por α o ângulo $\angle KMC$; consequentemente, $\angle KMB = 180^\circ - \alpha$, como ilustrado na Figura 3. Como M é ponto médio de BC , tem-se $BM = MC = \frac{a}{2}$.

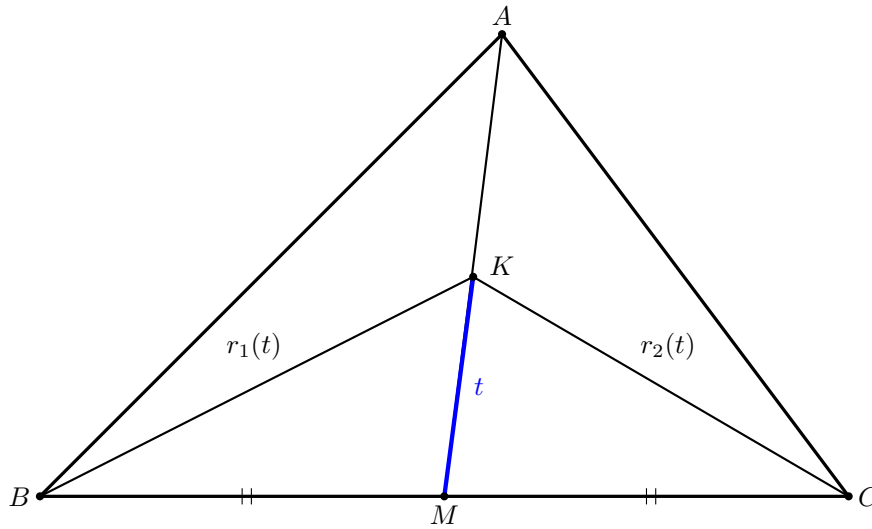


Figura 3: Configuração geométrica do problema: triângulo ABC , ponto variável K na mediana AM e as distâncias $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo KMB , obtém-se

$$BK^2 = t^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot t \cdot \frac{a}{2} \cos(180^\circ - \alpha) = t^2 + \frac{a^2}{4} + a \cdot t \cdot \cos \alpha,$$

pois $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Analogamente, no triângulo KMC ,

$$CK^2 = t^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot t \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha = t^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot t \cdot \cos \alpha$$

Somando as duas expressões, os termos que envolvem $\cos \alpha$ se cancelam:

$$BK^2 + CK^2 = 2t^2 + \frac{a^2}{2} = 2KM^2 + \frac{BC^2}{2},$$

o que demonstra a identidade (1). □

7.2 Conclusão sobre o Mínimo

A partir da identidade (1), o mínimo decorre imediatamente do fato de que $KM^2 \geq 0$. De fato, escrevendo

$$f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}, \quad t = KM \geq 0,$$

observa-se que $f(t) \geq \frac{a^2}{2}$ para todo t , com igualdade se, e somente se, $t = 0$, isto é, quando $K = M$. Portanto,

$$\min f = f(0) = \frac{BC^2}{2},$$

atingido no ponto médio do lado BC .

Esse fechamento articula-se diretamente com o estudo da função quadrática no Ensino Médio: a expressão $f(t) = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$ representa uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice em $(0, \frac{a^2}{2})$, exatamente o comportamento observado pelos estudantes na janela gráfica do GeoGebra (Figura 4).

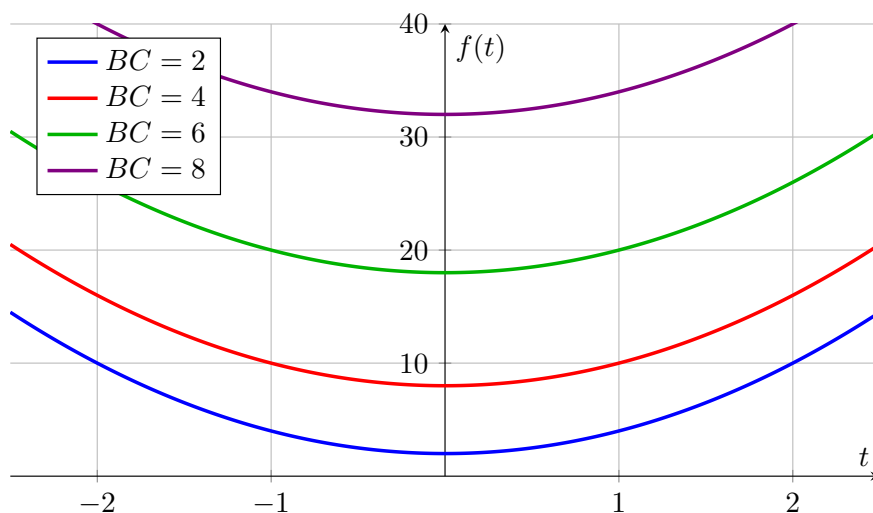


Figura 4: Família de gráficos da função $f(t) = 2t^2 + \frac{BC^2}{2}$ para diferentes comprimentos do lado BC .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

8 Avaliação da Atividade

A avaliação assume caráter processual e formativo, apoiando-se na observação do trabalho das duplas durante as aulas, nos registros da folha de atividade (Apêndice B) e na participação nos momentos de socialização. A Tabela 5 indica as principais evidências de aprendizagem que o professor pode observar, relacionando-as aos instrumentos de coleta.

Tabela 5: Evidências de aprendizagem e instrumentos de avaliação.

Evidência a observar	Instrumento
Compreensão da dependência entre a posição do ponto K e os valores das distâncias $r_1(t)$ e $r_2(t)$.	Observação durante a exploração; Tabelas de registro e Questões 1 e 3 da folha de atividade.
Formulação de conjecturas a partir dos dados coletados, expressas com clareza crescente.	Questões 5 e 6 da folha de atividade; socialização na Aula 3.
Interpretação do comportamento das funções, incluindo a distinção entre os dois casos de $g(t)$ e a independência de $f(t)$ em relação ao ângulo.	Questão 4 da folha de atividade; observação durante a Etapa 7 do roteiro; discussão da Etapa 4 da Aula 3.
Uso correto do GeoGebra: construção dos objetos, definição das distâncias e das funções no campo de entrada.	Observação direta do arquivo construído pela dupla; conferência das Etapas 1 a 7 do roteiro (Apêndice A).
Capacidade de justificar o ponto de mínimo, mobilizando a identidade (1) e o argumento $KM^2 \geq 0$.	Questões 7 e 8 da folha de atividade; participação na demonstração coletiva.

Recomenda-se que o professor valorize a evolução dos registros ao longo das três aulas da observação empírica à justificativa formal, e não apenas a exatidão das respostas finais. Dificuldades identificadas na folha de atividade (por exemplo, conjecturas imprecisas na Questão 5) podem ser retomadas na socialização da Aula 3, transformando o instrumento de avaliação em oportunidade de aprendizagem.

9 Potencial Pedagógico

A proposta apresenta os seguintes potenciais:

- Desenvolvimento do pensamento investigativo;
- Integração entre Geometria e Funções;
- Compreensão de conceitos abstratos por meio da visualização;
- Estímulo à formulação de conjecturas;
- Aproximação intuitiva de problemas de otimização;
- Transição da observação empírica para a demonstração matemática.

10 Resultados Esperados

Espera-se que os estudantes:

- Reconheçam a dependência entre posição do ponto e valores das distâncias;
- Interpretem funções em contexto geométrico;
- Identifiquem posições associadas a valores extremos;
- Desenvolvam argumentação matemática;
- Percebam a função $f(t)$ como modelo de otimização;
- Compreendam a demonstração da identidade (1) como validação da conjectura.

11 Considerações Finais

Este recurso educacional evidencia a potencialidade da articulação entre Geometria Plana e Análise Matemática no ensino. Ao integrar exploração dinâmica, interpretação funcional e formalização, a proposta contribui para a construção de significados matemáticos mais consistentes.

O uso do GeoGebra mostrou-se fundamental para o desenvolvimento da investigação, permitindo aos estudantes explorar, testar e validar suas ideias. A etapa de sistematização, por sua vez, assegura que a atividade não se encerre na verificação empírica, mas culmine em uma argumentação matemática elementar e rigorosa, em consonância com os objetivos da Educação Matemática contemporânea.

A Roteiro Ilustrado de Construção no GeoGebra

Nesta atividade, os estudantes irão construir um triângulo no GeoGebra e investigar o comportamento de funções associadas às distâncias entre um ponto variável K e os vértices do triângulo. As figuras a seguir ilustram o resultado esperado ao final de cada etapa.

Etapa 1 — Construção do triângulo

1. Abra o GeoGebra na versão *online* (www.geogebra.org) ou no aplicativo instalado.
2. Selecione a ferramenta *Polígono*.
3. Clique em três pontos distintos do plano para construir o triângulo ABC .
4. Após selecionar os três pontos, clique novamente sobre o ponto inicial para fechar o polígono.

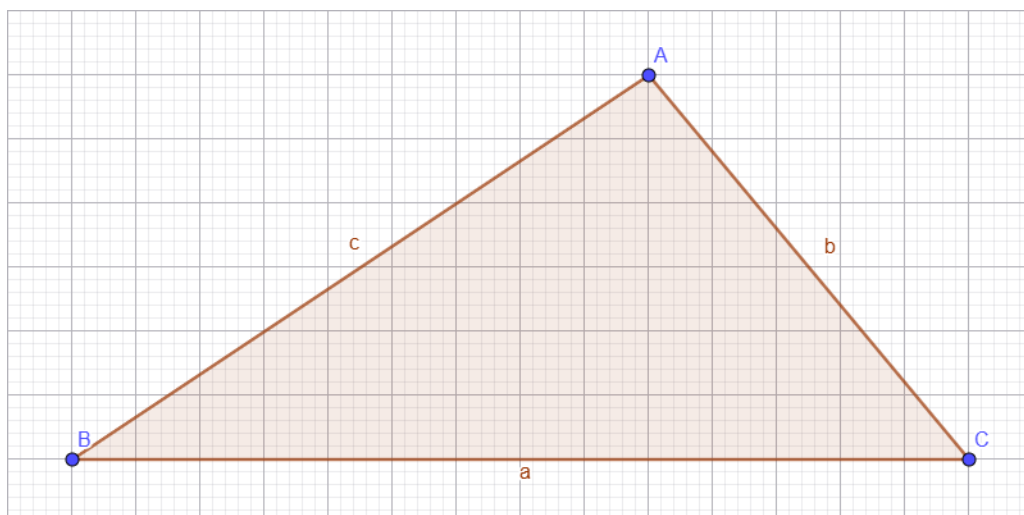


Figura 5: Construção do triângulo ABC

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Etapa 2 — Construção das bissetrizes e dos pontos I e T

5. Selecione a ferramenta *Bissetriz*.
6. Clique nos pontos B , A e C , nessa ordem, para construir a bissetriz relativa ao vértice A .
7. Ainda com a ferramenta *Bissetriz*, clique nos pontos A , B e C , nessa ordem, para construir a bissetriz relativa ao vértice B .
8. Selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clique sobre as duas bissetrizes: o ponto de interseção é o incentro do triângulo. Renomeie-o para I (clique com o botão direito sobre o ponto e escolha *Renomear*).
9. Oculte a bissetriz relativa ao vértice B (clique com o botão direito sobre ela e desmarque *Exibir Objeto*), de modo que permaneça visível apenas a bissetriz do vértice A .

10. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre a bissetriz do vértice A e sobre o lado BC : o ponto de interseção é o pé da bissetriz. Renomeie-o para T .

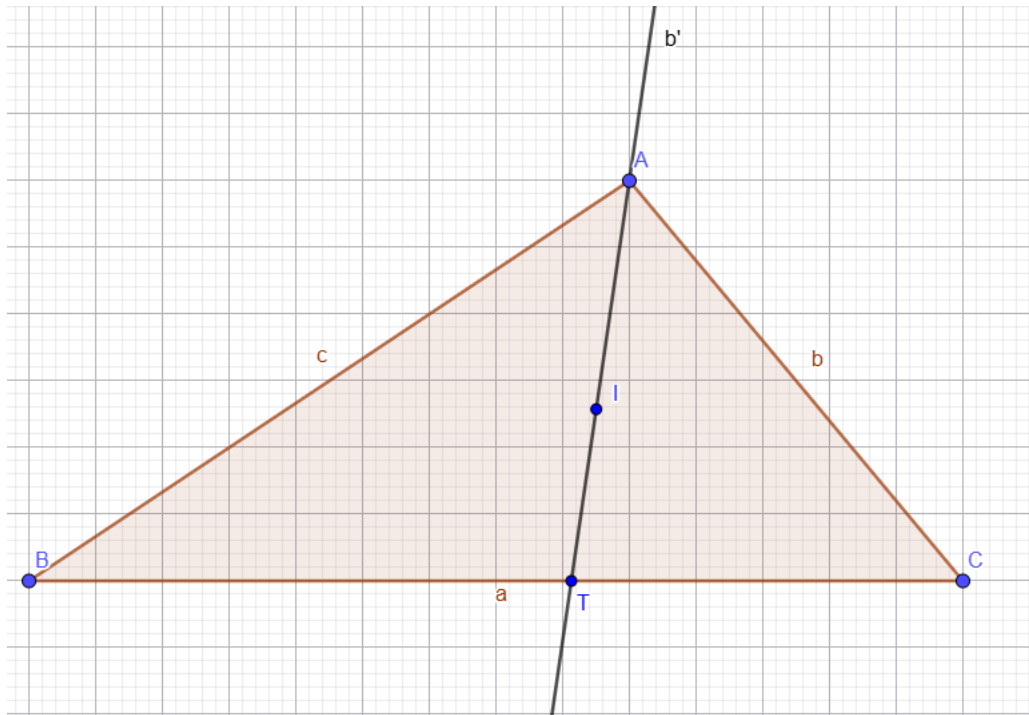


Figura 6: Duas bissetrizes com I e T marcados
Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Etapa 3 — Ponto K , distâncias e a função $r(t)$ na bissetriz

11. Crie um ponto sobre a bissetriz AT utilizando a ferramenta *Ponto em Objeto* e renomeie-o para K .
12. No campo de entrada do GeoGebra, digite:

$$r1 = \text{Segmento}(K,B)$$

13. Em seguida, digite:

$$r2 = \text{Segmento}(K,C)$$

Os segmentos são desenhados na janela de visualização e seus valores correspondem às distâncias $r_1 = BK$ e $r_2 = CK$. Caso seja desejado, altere o estilo dos segmentos para tracejado.

14. Para investigar a função razão, digite:

$$\text{razao} = r1/r2$$

No texto matemático, esse objeto corresponde à função

$$r(t) = \frac{r_1(t)}{r_2(t)}.$$

- Movimente o ponto K ao longo da bissetriz AT e observe, na janela de álgebra, o comportamento do valor de **razao**. Registre suas observações na folha de atividade (Apêndice B, Parte 1).

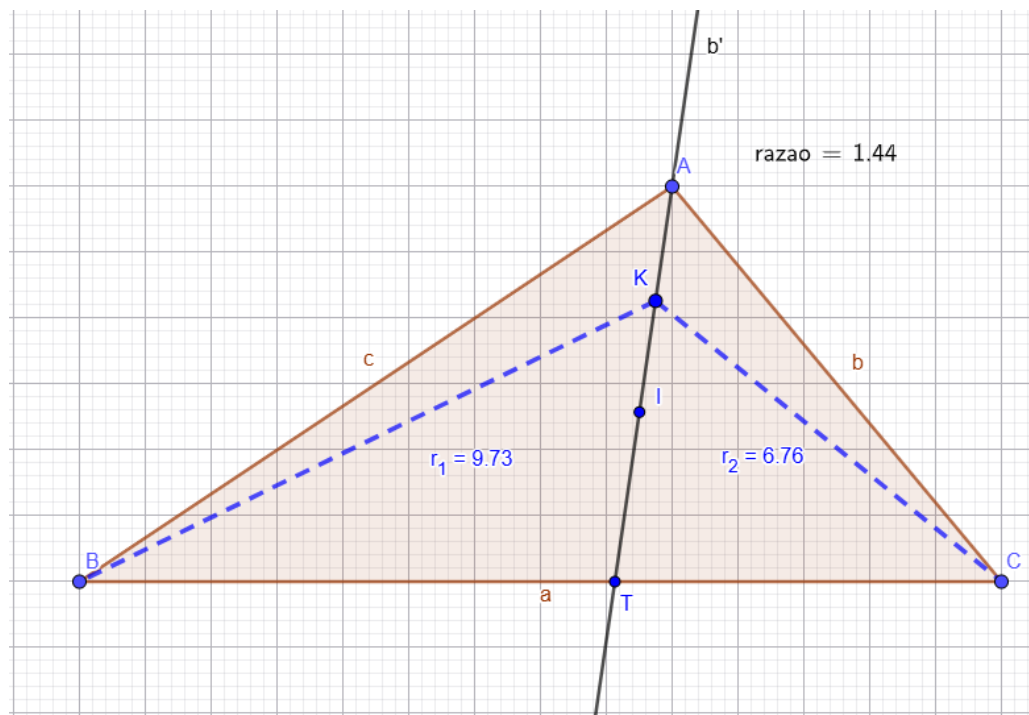


Figura 7: Representação das distâncias $r_1(t) = BK$ e $r_2(t) = CK$ para um ponto K pertencente à bissetriz interna AT .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Etapa 4 — Nova construção do triângulo

Concluída a investigação na bissetriz, inicia-se uma nova construção para o estudo da mediana, na qual as duas funções, $g(t)$ e $f(t)$, serão analisadas ao mesmo tempo.

- Abra uma nova janela do GeoGebra (menu *Arquivo* → *Novo*). Não é necessário salvar as alterações da construção anterior, desde que os registros da Parte 1 da folha de atividade já tenham sido realizados.
- Repita os passos da Etapa 1: com a ferramenta *Polígono*, clique em três pontos distintos do plano e feche o polígono clicando novamente sobre o ponto inicial, construindo o triângulo ABC .

Etapa 5 — Construção das medianas, do baricentro G e do ângulo em M

- Selecione a ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e clique sobre o segmento BC para determinar o ponto médio. Renomeie-o para M .
- Utilize a ferramenta *Segmento* para construir a mediana AM .

20. Repita o procedimento para outro lado do triângulo: determine o ponto médio de AC (ou de AB) com a ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e construa a segunda mediana com a ferramenta *Segmento*.
21. Selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clique sobre as duas medianas: o ponto de interseção é o baricentro do triângulo. Renomeie-o para G .
22. Oculte a segunda mediana e o respectivo ponto médio (clique com o botão direito e desmarque *Exibir Objeto*), de modo que permaneça visível apenas a mediana AM .
23. O ângulo α é definido por

$$\alpha = \angle KMC,$$

isto é, o ângulo formado entre a mediana AM e o segmento MC . Selecione a ferramenta *Ângulo* e clique nos pontos A , M e C , nessa ordem, para medir o ângulo α formado entre a mediana e o lado BC . Caso o GeoGebra exiba o ângulo côncavo (maior que 180°), repita clicando na ordem inversa: C , M e A .

A medição do ângulo α é relevante para a investigação: o comportamento da função $g(t)$ apresenta *dois casos*, conforme o ângulo formado entre a mediana e o lado BC . Durante a exploração, o professor mediador pode arrastar o vértice A de modo que α fique menor que 45° , evidenciando a mudança de comportamento de $g(t)$ — e deixando claro, por contraste, que o comportamento de $f(t)$ não depende do ângulo.

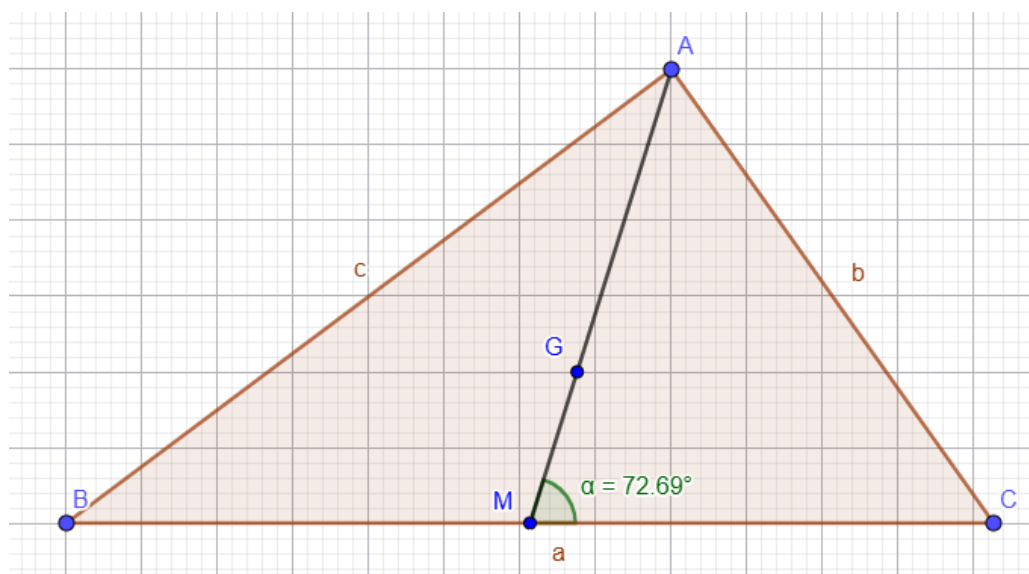


Figura 8: Representação do ângulo α formado entre a mediana AM e o lado BC do triângulo ABC .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Etapa 6 — Ponto K , distâncias e as funções $g(t)$ e $f(t)$

24. Crie um ponto sobre a mediana AM utilizando a ferramenta *Ponto em Objeto* e renomeie-o para K .
25. No campo de entrada, digite: `r1 = Segmento(K, B)`

26. Em seguida, digite: $r2 = \text{Segmento}(K, C)$. Os segmentos são desenhados na tela e seus valores correspondem às distâncias $r_1 = BK$ e $r_2 = CK$; se desejar, altere o estilo para tracejado.

27. Para investigar a média geométrica das distâncias, digite:

$$mg = \text{sqrt}(r1*r2)$$

28. Para investigar a soma dos quadrados das distâncias, digite:

$$sq = r1^2 + r2^2$$

29. Opcionalmente, insira textos dinâmicos na janela de visualização para exibir os valores de mg e sq junto à figura: selecione a ferramenta *Texto*, clique na área gráfica e, na caixa de edição, insira o objeto desejado pelo menu *Objetos*.

Observação sobre os nomes dos objetos: Como o GeoGebra atribui automaticamente nomes aos objetos criados, podem ocorrer conflitos entre os nomes das funções matemáticas e os nomes já utilizados na construção. Por essa razão, no ambiente do GeoGebra são empregados os identificadores mg , para a média geométrica, e sq , para a soma dos quadrados.

Esses objetos correspondem, respectivamente, às funções

$$g(t) = \sqrt{r_1(t) r_2(t)}$$

e

$$f(t) = r_1^2(t) + r_2^2(t).$$

Com as duas medidas definidas, os valores de mg e sq passam a ser exibidos simultaneamente na janela de álgebra (e, opcionalmente, na janela de visualização), permitindo comparar os comportamentos de $g(t)$ e $f(t)$ a cada movimento do ponto K .

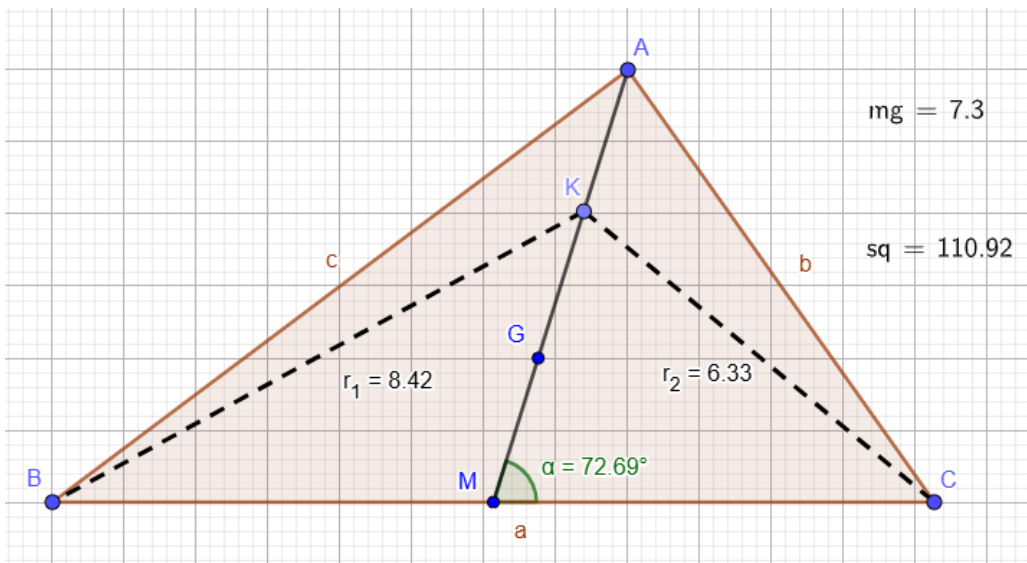


Figura 9: Representação das distâncias BK e CK e das funções $g(t) = \sqrt{r_1(t) r_2(t)}$ e $f(t) = r_1^2(t) + r_2^2(t)$ para um ponto variável K pertencente à mediana AM .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Etapa 7 — Exploração investigativa das funções $g(t)$ e $f(t)$

30. Movimente o ponto K ao longo da mediana AM e observe, ao mesmo tempo, os valores de mg e sq na janela de álgebra (ou nos textos dinâmicos da janela de visualização), correspondentes às funções $g(t)$ e $f(t)$.
31. Aproxime o ponto K do ponto médio M e afaste-o em direção ao vértice A , comparando como cada função reage: em que trechos os valores crescem? Em que trechos diminuem? Alguma das funções parece atingir um menor valor? Em que posição?
32. Arraste o vértice A de modo a alterar o ângulo α (por exemplo, tornando-o menor que 45°) e repita a movimentação de K : observe que o comportamento de $g(t)$ muda conforme o caso, enquanto o de $f(t)$ permanece o mesmo, evidenciando que $f(t)$ não depende do ângulo.
33. Registre na folha de atividade (Apêndice B, Parte 2):
 - situações em que os valores aumentam ou diminuem;
 - possíveis padrões observados;
 - posições associadas a valores mínimos ou máximos;
 - conjecturas formuladas durante a investigação.

B Folha de Atividade do Estudante

K na Medida Certa — *investigando distâncias ao longo da mediana*

Nome: _____ Turma: _____

Data: _____ Dupla: _____

Nesta atividade, você irá investigar como certas medidas variam quando um ponto K se move dentro de um triângulo ABC . Siga o roteiro de construção no GeoGebra e registre aqui suas observações.

Parte 1 — O ponto K na bissetriz

Com o ponto K sobre a bissetriz AT , mova-o para diferentes posições e registre os valores exibidos pelo GeoGebra.

Tabela 6: Registro de valores com K na bissetriz.

Posição	$r_1 = BK$	$r_2 = CK$	$r = \frac{r_1}{r_2}$
1			
2			
3			
4			

Questão 1. O que você observa sobre o valor de r quando K se desloca ao longo da bissetriz?

Parte 2 — O ponto K na mediana

Agora, com o ponto K sobre a mediana AM , mova-o e registre os valores de r_1 , r_2 , g e f .

Tabela 7: Registro de valores com K na mediana.

Posição	$r_1 = BK$	$r_2 = CK$	$g = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$	$f = r_1^2 + r_2^2$
1 (perto de A)				
2				
3				
4				
5 (perto de M)				
6 ($K = M$)				

Questão 2. Existe alguma posição do ponto K em que os valores de r_1 e r_2 se aproximam ou se tornam iguais? O que acontece com o valor de $g(t)$ nessa posição?

Questão 3. Observe a coluna de $f = r_1^2 + r_2^2$. O que acontece com o valor de f à medida que K se aproxima de M ?

Questão 4. Com a orientação do professor, arraste o vértice A para alterar o ângulo α entre a mediana AM e o lado BC , tornando-o, por exemplo, menor que 45° . Em seguida, movimente novamente o ponto K . Como o comportamento de $g(t)$ se altera com a variação do ângulo α ? O comportamento de $f(t)$ também se altera? Justifique com base nos valores observados.

Questão 5 – Conjectura. Em qual posição do ponto K você acredita que a função

$$f(t) = r_1^2(t) + r_2^2(t)$$

assume seu menor valor? Escreva sua conjectura e justifique-a com base nos dados registrados.

Questão 6. Como você poderia verificar se a sua conjectura vale para *qualquer* triângulo, e não apenas para o triângulo que você construiu?

Parte 3 — Depois da sistematização

Questão 7. Após a demonstração realizada em sala, escreva a identidade estudada e utilize-a para explicar por que o menor valor de

$$f(t) = BK^2 + CK^2$$

ocorre quando o ponto K coincide com o ponto médio M .

Questão 8 – Conclusão. Compare a conjectura formulada na Questão 5 com o resultado demonstrado. Sua previsão foi confirmada? Explique o que esta atividade mostrou sobre a diferença entre observar, verificar numericamente e demonstrar uma propriedade matemática.
