



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

# JOGOS DE ESTRATÉGIA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINAS ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM XADREZ E POKER

ORIENTADOR:  
PROF. DR. JAQUES SILVEIRA LOPES

Natal - RN  
Fevereiro de 2026

KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

JOGOS DE ESTRATÉGIA COMO FERRAMENTA  
DIDÁTICA: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINAS  
ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM XADREZ E  
POKER

Dissertação de Mestrado apresentada à  
Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFRN como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

Natal - RN  
Fevereiro de 2026

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Santos, Kácio José Cardoso.

Jogos de estratégia como ferramenta didática: uma proposta de disciplinas eletivas de matemática com xadrez e poker / Kácio José Cardoso Santos. - 2026.

172f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2026.

Orientação: Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes.

1. Ensino de matemática - Dissertação. 2. Poker - Dissertação. 3. Jogos de estratégia - Dissertação. I. Lopes, Jaques Silveira. II. Título.

RN/UF/BSCCET

CDU 510.2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

JOGOS DE ESTRATÉGIA COMO FERRAMENTA  
DIDÁTICA: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINAS  
ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM XADREZ E  
POKER

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes (UFRN - Orientador)

Prof.<sup>a</sup> Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes (UFRN - Membro interno)

Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Junior (UFCAT - Membro externo)

Natal - RN  
Fevereiro de 2026

*Dedico esta dissertação aos meus pais e a minha esposa Lili.*

# Agradecimentos

Sou grato aos meus pais, que me deram todo o suporte e amor de que precisei para seguir em frente e aprofundar meus estudos em Matemática, fazendo dela a base da minha vida profissional. À minha esposa, Lílian, por ter me ajudado de uma forma tão profunda que nem ela mesma consegue imaginar. Ao meu orientador, Prof. Jaques, pela colaboração constante e pelo apoio em todos os momentos de necessidade de esclarecimento. Aos professores do PROFMAT–UFRN, de modo geral, por elevarem o curso de mestrado a um alto nível de excelência acadêmica. Em especial, aos docentes que ministraram disciplinas ao longo dos dois anos em que cursei o mestrado, Paulo Roberto, Edgar Pereira, Esteban Silva, Alan Guimarães, André Gustavo, Ailton Rodrigues e Gabriela Lucheze, pelo compromisso, pela seriedade e pelas contribuições fundamentais à minha formação acadêmica e profissional. E, por fim, aos meus alunos, que são a minha maior fonte de motivação.

*“A matemática é a ferramenta mais  
poderosa para lidar com o acaso.”  
- Richard P. Feynman*

# Resumo

Esta dissertação apresenta a elaboração, implementação e análise de duas disciplinas eletivas de Matemática baseadas em jogos de estratégia — Xadrez e Poker — ofertadas a turmas do Ensino Médio no contexto do Novo Ensino Médio e dos Itinerários Formativos. A proposta parte da premissa de que a aprendizagem matemática pode ser favorecida quando o estudante é inserido em situações que envolvem raciocínio lógico, tomada de decisão, antecipação de cenários e análise de consequências. Nesse sentido, foi desenvolvida uma abordagem pedagógica que integra conteúdos de análise combinatória e probabilidade ao uso estruturado de jogos, explorando suas regras, dinâmicas e potenciais cognitivos como ferramentas formativas. A metodologia envolveu o planejamento e aplicação das disciplinas ao longo de um semestre, combinando aulas teóricas e práticas, atividades gamificadas, resolução de problemas e torneios internos. A coleta e análise de dados englobaram instrumentos quantitativos e qualitativos, incluindo questionários, registro de engajamento dos estudantes, análises de desempenho e relatos docentes e discentes. Os resultados observados ao longo da implementação evidenciam aspectos ligados à motivação estudantil, ao envolvimento nas atividades e ao desenvolvimento de habilidades cognitivas e socioemocionais associadas ao pensamento matemático. O trabalho também pode auxiliar como material didático que descreve as regras dos jogos, as sequências de aulas e as atividades aplicadas, de forma a apoiar professores interessados em utilizar jogos de estratégia como recurso pedagógico no ensino de Matemática.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática; Gamificação; Jogos de Estratégia; Probabilidade; Poker; Xadrez.

# Abstract

This dissertation presents the development, implementation, and analysis of two elective Mathematics courses based on strategy games — Chess and Poker — offered to high school students within the context of Brazil's New High School reform and the Itineraries of Learning. The proposal is based on the premise that mathematical learning can be enhanced when students are placed in situations involving logical reasoning, decision-making, anticipation of scenarios, and consequence analysis. Accordingly, a pedagogical approach was designed that integrates combinatorics and probability with the structured use of games, exploring their rules, dynamics, and cognitive potential as educational tools. The methodology consisted of planning and teaching both courses over one academic semester, combining theoretical and practical lessons, gamified tasks, problem-solving activities, and internal tournaments. Quantitative and qualitative instruments were used for data collection and analysis, including questionnaires, engagement records, performance assessments, and reports from students and teachers. The results obtained throughout the implementation point to aspects related to student motivation, involvement in classroom activities, and development of cognitive and socio-emotional skills associated with mathematical thinking. The study also provides didactic material describing the game rules, instructional sequences, and applied activities, offering support for teachers interested in using strategy games as pedagogical resources in Mathematics education.

**Keywords:** Mathematics Education; Gamification; Strategy Games; Probability; Poker; Chess.

# Lista de Figuras

2.1	O jogo indiano Chaturanga . . . . .	24
2.2	O tabuleiro e as posições iniciais das peças. . . . .	25
2.3	Movimento do peão . . . . .	26
2.4	Movimento da torre . . . . .	27
2.5	Movimento do cavalo . . . . .	27
2.6	Movimento do bispo . . . . .	28
2.7	Movimento da dama . . . . .	28
2.8	Movimento do rei . . . . .	29
2.9	Promoção de Peão . . . . .	30
2.10	Roque grande e roque pequeno . . . . .	30
2.11	En Passant . . . . .	31
2.12	Posição final. . . . .	33
2.13	Exemplo 1 de xeque-mate . . . . .	35
2.14	Exemplo 2 de xeque-mate . . . . .	35
2.15	Estrutura da mesa de poker e as posições de cada jogador . . . . .	41
2.16	Royal Flush . . . . .	42
2.17	Straight Flush . . . . .	42
2.18	Quadra ou Poker . . . . .	42
2.19	Full House . . . . .	42
2.20	Flush . . . . .	43
2.21	Sequência . . . . .	43
2.22	Trinca . . . . .	43
2.23	Dois Pares . . . . .	43
2.24	Um par . . . . .	43
2.25	Carta Alta . . . . .	44
3.1	Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas . . . .	63
3.2	Tabuleiro representado como plano cartesiano. . . . .	66
4.1	Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas . . . .	74
5.1	Alunos em aula prática de xadrez. . . . .	94
5.2	Alunos em aula prática de poker. . . . .	95

5.3	Comentários dos alunos sobre a disciplina Probabilidade na Mesa. . . . .	98
-----	--	----

## Lista de Tabelas

2.1	Valores convencionais das peças de xadrez . . . . .	37
2.2	Prêmio por face do dado. . . . .	58
4.1	Resumo das probabilidades. . . . .	77
4.2	Quantidade de combinações possíveis de cada tipo de mão no poker . . . .	83
4.3	Probabilidades de completar a mão com base no número de outs. . . . .	86
5.1	Indicadores de engajamento dos alunos — Disciplina de Xadrez . . . . .	93
5.2	Evolução do desempenho em conteúdos de probabilidade . . . . .	95

## Lista de Quadros

1	Peças de xadrez e seus símbolos na notação algébrica . . . . .	32
2	Aulas da disciplina Xadrez para Iniciantes. . . . .	63
3	Aulas da disciplina Probabilidade na Mesa. . . . .	73

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>20</b>
2.1	Jogos e Gamificação como Estratégia Pedagógica . . . . .	20
2.2	Xadrez e suas Regras . . . . .	23
2.2.1	História do Xadrez . . . . .	23
2.2.2	Organização do Tabuleiro . . . . .	25
2.2.3	Movimentos das Peças . . . . .	26
2.2.4	Regras Especiais . . . . .	29
2.2.5	Notação do Xadrez . . . . .	31
2.2.6	Objetivo no Xadrez . . . . .	34
2.2.7	Estratégias básicas do xadrez . . . . .	36
2.2.8	Variações do xadrez . . . . .	38
2.3	Poker e suas Regras . . . . .	39
2.3.1	Estrutura inicial no poker Texas Hold'em . . . . .	40
2.3.2	Combinações de Mão . . . . .	42
2.3.3	Rodadas de Apostas . . . . .	44
2.3.4	Encerramento da Mão (objetivo do jogo) . . . . .	45
2.4	Análise Combinatória . . . . .	45
2.4.1	Princípio Fundamental da Contagem . . . . .	46
2.4.2	Fatorial . . . . .	46
2.4.3	Arranjo . . . . .	47
2.4.4	Arranjos com Repetição . . . . .	48
2.4.5	Permutação . . . . .	49
2.4.6	Permutações com Elementos Repetidos . . . . .	50
2.4.7	Combinações . . . . .	51
2.5	Probabilidade e suas propriedades . . . . .	52
2.5.1	Experimento Aleatório . . . . .	52
2.5.2	Espaço amostral e eventos . . . . .	52
2.5.3	Definição de Probabilidade . . . . .	53
2.5.4	Propriedades da probabilidade . . . . .	54
2.5.5	Eventos independentes e condicionais . . . . .	56

	15
2.5.6	Esperança Matemática . . . . . 57
2.5.7	Propriedades do Valor Esperado . . . . . 59
<b>3</b>	<b>DISCIPLINA ELETIVA DE XADREZ SOB A PERSPECTIVA DA MATEMÁTICA</b> . . . . . <b>61</b>
3.1	A estrutura da disciplina . . . . . 62
3.2	A estrutura das aulas . . . . . 64
<b>4</b>	<b>APRENDENDO PROBABILIDADE COM POKER</b> . . . . . <b>72</b>
4.1	A Estrutura da Disciplina . . . . . 72
4.2	A Estrutura das Aulas . . . . . 74
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . . <b>92</b>
5.1	Caracterização das Turmas e Contexto da Aplicação . . . . . 92
5.2	Resultados da Disciplina Matemática com Xadrez . . . . . 93
5.2.1	Engajamento e Participação . . . . . 93
5.2.2	Desenvolvimento de Habilidades Matemáticas . . . . . 94
5.2.3	Evidências Qualitativas . . . . . 94
5.3	Resultados da Disciplina Probabilidade com Poker . . . . . 95
5.3.1	Engajamento e Comportamento Estratégico . . . . . 95
5.3.2	Aprendizagem de Conceitos de Probabilidade . . . . . 95
5.3.3	Evidências Qualitativas . . . . . 96
5.4	Discussão à Luz da Literatura . . . . . 99
5.5	Limitações do Estudo . . . . . 100
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . . <b>102</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . . <b>104</b>
<b>A</b>	<b>– Lista de Desafios Matemáticos Aplicados ao Poker</b> . . . . . <b>105</b>
<b>B</b>	<b>– Relatório de Análise Matemática de uma Mão de Poker</b> . . . . . <b>108</b>
<b>C</b>	<b>– Questionário de Avaliação da Disciplina Probabilidade na Mesa</b> . . . . . <b>110</b>
<b>D</b>	<b>– Produto educacional vinculado a dissertação</b> . . . . . <b>113</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## Meu contexto

Os jogos são práticas tão antigas quanto a própria civilização. É possível imaginar que, ainda na época dos homens das cavernas, já existissem formas lúdicas de competição e diversão — quem colhia mais frutas, quem chegaria primeiro até determinada árvore. Desde os primórdios, a ideia de disputar algo com base em regras claras e previamente estabelecidas desperta interesse e engajamento. Essa lógica do jogo, quando incorporada à forma de enxergar o mundo, transforma tarefas cotidianas em desafios estimulantes e produtivos.

No ambiente escolar, essa abordagem pode ser particularmente potente. Ao incorporar jogos no processo de ensino-aprendizagem, especialmente na Matemática, é possível desenvolver competências essenciais à vida em sociedade: a resiliência diante de derrotas, a capacidade de análise estratégica, o gosto por desafios, a persistência, entre outras. Jogar, nesse contexto, não é apenas competir, mas também aprender a lidar com erros, planejar melhores caminhos e buscar superação (MURR, 2020).

É nesse cenário que minha trajetória ganha forma. Sou professor de Matemática da rede estadual do Rio Grande do Norte. Antes disso, no entanto, na infância tinha o sonho de ser jogador de futebol e, por isso, entrei em uma escolinha. Foi lá que aprendi que não basta conhecer as regras do jogo, é preciso desenvolver as habilidades necessárias para jogar bem. Esse pensamento me acompanhou ao longo da vida e pude estendê-lo para diversas áreas. Hoje, como professor, uso essa mesma lógica para planejar minhas aulas: não basta que o aluno conheça os conteúdos; é essencial que ele desenvolva competências e habilidades para aplicá-los de forma significativa.

Oriundo de uma família humilde da cidade de Canguaretama, precisei começar a trabalhar muito cedo. Dos 13 aos 18 anos, trabalhei na zona rural, descascando cocos para ajudar meus pais. Aos 18 anos, decidi prestar vestibular. Esse momento foi um divisor de águas: ingressei no curso de Matemática e, ao longo da graduação, tive contato com o xadrez e o poker. Meu raciocínio lógico e minha formação matemática me ajudaram a compreender profundamente esses jogos e a me apaixonar por eles.

Esse envolvimento lúdico e estratégico ampliou minha percepção sobre o potencial dos jogos como ferramentas de ensino. Fico, inclusive, refletindo sobre como teria sido minha trajetória acadêmica se essa perspectiva tivesse sido despertada mais cedo. Talvez eu

tivesse alcançado níveis mais avançados de compreensão matemática ainda na juventude.

A partir dessa experiência, passei a enxergar os jogos como metáforas da própria vida. Aprendi que não se trata apenas de vencer adversários, mas de superar desafios, insistir diante das dificuldades e aprender com cada situação. Essa filosofia tem me acompanhado ao longo da vida: fui aprovado em dois concursos públicos, premiado na Olimpíada de Professores de Matemática do Brasil (OPMbr) como um dos melhores professores do Ensino Médio do país, participei de um intercâmbio em Xangai para conhecer o sistema educacional chinês e, agora, concluo este mestrado com uma pesquisa que une duas grandes paixões: Matemática e jogos.

Durante minha passagem por Xangai, observei que os professores chineses utilizam, em suas aulas, metodologias tradicionalmente estruturadas, muitas vezes acompanhadas por recursos tecnológicos, como lousas interativas e calculadoras gráficas. No entanto, apesar desses recursos, a essência das aulas ainda é tradicional.

Essa escolha pedagógica faz sentido, pois os alunos vivem uma realidade muito diferente da dos estudantes brasileiros. Na China, o professor é uma figura respeitada e valorizada pela sociedade, e a educação é tratada como algo imprescindível para a formação de qualquer pessoa. A matemática, em especial, é vista como uma disciplina fundamental, cuja compreensão favorece o entendimento de diversas outras áreas do conhecimento.

Essa experiência no intercâmbio apenas reforçou em mim a percepção de que, no Brasil, é essencial repensarmos a forma como conduzimos nossas aulas. Diante de uma realidade em que muitos estudantes não dispõem de uma estrutura adequada nem de uma cultura familiar que valorize a escola, torna-se ainda mais necessário o uso de metodologias ativas. Essas metodologias têm o potencial de tirar o aluno do comodismo, despertar seu interesse pelos conteúdos e fazer com que ele aproveite melhor a experiência escolar.

Assim como nos jogos, vejo a vida dividida em fases. Em cada uma delas, procuro avançar com estratégia, dedicação e entusiasmo. Ao longo da minha prática docente, busco transmitir essa filosofia aos meus alunos, mostrando como a Matemática, quando contextualizada e vivenciada por meio de jogos, pode se tornar uma aliada poderosa na jornada de aprendizagem e na formação cidadã. E procuro fazer isso trazendo, em minhas aulas, metodologias ativas, como a gamificação associada a abordagens tradicionais de ensino.

## Objetivos

Com a implementação do Novo Ensino Médio, regulamentado pela Lei nº 13.415 de 2017, as escolas passaram a ter a obrigatoriedade de ofertar disciplinas eletivas que compõem os itinerários formativos. Essas disciplinas, ao lado dos componentes curriculares clássicos estabelecidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), têm o papel de ampliar a formação do estudante, articulando saberes diversos, valorizando interesses individuais e promovendo o desenvolvimento de competências es-

pecíficas e interdisciplinares.

Embora tenha sido realizada uma alteração na legislação em 2023, os itinerários formativos previstos pela Lei foram mantidos. A principal mudança consistiu na redução da carga horária destinada a essas unidades curriculares em relação à carga das disciplinas regulares. No entanto, a exigência da oferta de disciplinas eletivas que componham os itinerários formativos permanece vigente, o que reforça a importância de desenvolver propostas pedagógicas alinhadas a essa estrutura.

Nesse contexto, foi desenvolvida uma disciplina eletiva voltada ao desenvolvimento de habilidades essenciais não apenas à Matemática, mas também relevantes para outras áreas do conhecimento e para a formação integral do estudante. A proposta busca estimular capacidades como concentração, foco, planejamento, tomada de decisão, liderança e ética — competências fundamentais para a resolução de problemas complexos e para o exercício pleno da cidadania e da autonomia intelectual.

Para alcançar tais objetivos, opta-se pelo xadrez como recurso pedagógico central da disciplina. Lecionada por seis semestres no Centro de Educação Profissional Professora Lourdinha Guerra, essa eletiva consolida-se como uma das mais procuradas da instituição. O xadrez, jogo milenar com origens que remontam à Índia do século VI, mantém suas regras fundamentais praticamente inalteradas há mais de 150 anos, o que evidencia sua estabilidade estrutural e riqueza simbólica. Essa característica favorece uma abordagem transversal, contemplando tanto o desenvolvimento cognitivo quanto a exploração de conteúdos matemáticos. Ressalta-se, entretanto, que, ao longo das ofertas anteriores, o trabalho concentra-se predominantemente no ensino das regras e da dinâmica do jogo, sem aprofundamento sistemático dos conceitos matemáticos envolvidos. É justamente esse aprofundamento que passa a ser estruturado no presente trabalho de pesquisa, no qual o xadrez é explorado como ambiente pedagógico para o desenvolvimento formal de conteúdos matemáticos, articulando teoria, prática e reflexão crítica.

Do ponto de vista didático, o jogo de xadrez possibilita o tratamento de tópicos como métodos de contagem, ao se considerar as possibilidades de movimentação das peças; geometria, ao analisar a disposição espacial e ocupação do tabuleiro; e raciocínio lógico, aplicado na elaboração de estratégias e resolução de jogadas. A proposta didático-metodológica fundamenta-se em uma abordagem gamificada, em que cada jogador demonstra suas competências por meio do enfrentamento lúdico, despertando motivação intrínseca e engajamento dos estudantes, inclusive no aprendizado matemático que emerge do jogo.

Apesar de seu potencial formativo, o xadrez ainda é pouco aproveitado como ferramenta para o ensino de Matemática nas escolas brasileiras. Diante disso, este trabalho busca estruturar uma proposta de disciplina eletiva que incentive professores a incluí-la em suas práticas pedagógicas como um recurso significativo, atrativo e contextualizado.

Além do xadrez, a proposta inclui também o uso do poker como jogo de estratégia com alto potencial educativo, sobretudo no campo da probabilidade e estatística. Embora

frequentemente associado ao ambiente de cassinos, o poker é oficialmente reconhecido no Brasil como um esporte da mente desde 2010, por meio da atuação da Confederação Brasileira de Texas Hold'em (CBTH), e está na mesma categoria de jogos intelectuais como o xadrez, o go e o bridge (WSOP, 2025).

Diferentemente do senso comum, o poker exige muito mais do que sorte. Envolve a análise de dados, leitura de padrões, gestão de riscos e, principalmente, o cálculo probabilístico e a tomada de decisões sob incerteza. Ao jogar, o estudante é constantemente desafiado a estimar probabilidades, identificar cenários possíveis e fazer escolhas matematicamente fundamentadas. Assim, conceitos que muitas vezes são tratados de forma abstrata em sala de aula tornam-se concretos e compreensíveis no contexto do jogo.

A modalidade escolhida para fins pedagógicos é o Texas Hold'em, a mais praticada no mundo, cujas regras favorecem a criação de situações de aprendizagem progressivas, desde os conceitos mais simples de espaço amostral até modelagens mais sofisticadas, como o uso de cadeias de Markov para descrever estilos de jogo e prever comportamentos.

Esta pesquisa propõe a criação e fundamentação de uma disciplina eletiva que integre o ensino de Matemática à prática de jogos de estratégia, tendo o xadrez e o poker como contextos significativos para o desenvolvimento de competências lógico-matemáticas, cognitivas e socioemocionais em estudantes do Ensino Médio.

A estrutura do trabalho está distribuída em seis capítulos, incluindo essa introdução. O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica que embasa a proposta, discutindo as regras dos jogos utilizados como ferramentas de ensino, bem como as metodologias adotadas nas disciplinas eletivas sugeridas.

Nos capítulos 3 e 4, são discutidas de forma detalhada as relações entre os jogos e os conteúdos matemáticos, evidenciando como esses recursos lúdicos podem favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico e da compreensão conceitual.

Por fim, o quinto e o sexto (último) capítulos propõem uma reflexão crítica sobre as contribuições que essas disciplinas podem oferecer, analisando resultados de uma implementação prévia, e não apenas para o entendimento e a consolidação dos conteúdos matemáticos, mas também para o desenvolvimento de uma postura investigativa e significativa diante do ato de estudar, em consonância com a concepção ampla de educação.

Após a representação introdutória, estabeleceremos os objetivos que esperamos alcançar durante o desenvolvimento da disciplina, com foco na formação integral dos alunos e no desenvolvimento de competências cognitivas e socioemocionais. Também será elaborado o conteúdo programático, de forma a organizar os assuntos em uma sequência lógica e progressiva, garantindo a construção gradativa do conhecimento. Para promover uma aprendizagem significativa, adotaremos uma metodologia ativa baseada na gamificação, ou seja, o uso de elementos dos jogos como estratégia didática para engajar os estudantes.

Neste trabalho e no Produto Educacional vinculado, apresentaremos todas as etapas envolvidas na criação de uma disciplina eletiva sobre Matemática no Xadrez e no Poker, desde sua concepção até a elaboração final do plano de ensino.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentam-se as referências teóricas que subsidiam o planejamento e a prática docente voltados à oferta de componentes eletivos que utilizam o xadrez e o poker como ferramentas pedagógicas para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, em especial aqueles relacionados à Análise Combinatória e à Probabilidade.

### 2.1 Jogos e Gamificação como Estratégia Pedagógica

O termo gamificação (do inglês *gamification*) refere-se à utilização de elementos característicos dos jogos em contextos não lúdicos, com o objetivo de promover engajamento, motivação e mudança de comportamento (DETERDING et al., 2011). Diferente dos jogos completos, a gamificação não necessariamente envolve o desenvolvimento de um jogo, mas sim a aplicação de suas mecânicas para tornar experiências mais envolventes. É importante destacar que utilizar jogos em sala de aula **não é o mesmo** que gamificar uma aula. No uso de jogos, o educador aplica diretamente um jogo com regras próprias, objetivos definidos e estrutura fechada, como recurso didático para trabalhar determinado conteúdo. Já a gamificação da aula consiste em incorporar elementos dos jogos — como desafios, recompensas, níveis, feedbacks imediatos, missões, rankings e narrativas — ao processo de ensino-aprendizagem, sem necessariamente usar um jogo formal. A gamificação busca aumentar o engajamento, a motivação e a autonomia dos alunos, transformando a experiência educacional em algo mais envolvente e significativo.

Para Caroline Murr, a gamificação tem se destacado como uma abordagem eficaz para tornar o ensino da matemática mais envolvente e significativo. Ao incorporar elementos lúdicos e mecânicas de jogos nas atividades pedagógicas, é possível estimular a motivação dos estudantes, promover a resolução de problemas e facilitar a compreensão de conceitos abstratos.

Os elementos de jogos mais usados em gamificação de aulas são pontos, níveis, rankings, desafios, missões, medalhas, conquistas, integração, loops de engajamento, personalização, feedback, regras, narrativa, entre outros (MURR, 2020).

A seguir, algumas formas de gamificar uma aula ou atividade:

- estabelecer um desafio;
- definir uma condição de vitória;

- criar um sistema de pontos;
- oferecer recompensas de Status, Acesso, Poder e Coisas;
- fornecer emblemas para motivar os jogadores;
- favorecer a visibilidade em redes sociais e mudança de status;
- estabelecer um novo desafio.

Pesquisas indicam que a utilização de jogos digitais e ambientes virtuais de aprendizagem pode melhorar o desempenho dos alunos em matemática. Por exemplo, o desenvolvimento de aplicativos baseados em jogos para praticar padrões e estruturas matemáticas demonstrou resultados positivos na aprendizagem dos estudantes. Além disso, a criação de ambientes virtuais tridimensionais, como o "Math World" e o "Khan Academy", permite que alunos do ensino fundamental explorem operações matemáticas básicas de forma interativa, promovendo habilidades cognitivas e emocionais (LOZANO; CANLAS; CORONEL, 2023).

A implementação da gamificação no ensino da matemática também está alinhada com as metodologias ativas, que colocam o aluno como protagonista do processo de aprendizagem. Ao utilizar jogos como estratégia de ensino, os educadores podem criar experiências de aprendizagem mais dinâmicas e adaptadas às necessidades dos estudantes, favorecendo o desenvolvimento de competências essenciais para o século XXI (MURR, 2020).

Os jogos têm se consolidado como importantes recursos didáticos capazes de potencializar a aprendizagem em diferentes áreas do conhecimento. Em termos gerais, a utilização de jogos nas práticas pedagógicas favorece o engajamento ativo dos estudantes, a formulação de hipóteses, a experimentação de estratégias e a reflexão sobre os próprios modos de pensar. Diferentemente das abordagens exclusivamente expositivas, o jogo cria um ambiente em que o aluno se torna protagonista do processo de aprendizagem, construindo significados por meio da ação. Assim, o caráter lúdico não se restringe a um aspecto motivacional; ele mobiliza processos cognitivos fundamentais, como observação, análise e síntese.

Na Educação Matemática, o uso de jogos ganha destaque por permitir que conceitos abstratos se tornem mais acessíveis dentro de situações que exigem planejamento, previsão de resultados, reconhecimento de padrões e elaboração de estratégias. Grandó (2015) discute que muitos jogos — especialmente os de estratégia — apresentam características estruturais semelhantes às de uma situação-problema, o que favorece o desenvolvimento de formas próprias do pensamento matemático, como o levantamento de hipóteses, a generalização e a validação de soluções. Jogar, nesse contexto, não é apenas realizar movimentos, mas engajar-se em um processo contínuo de construção e reconstrução de ideias matemáticas a partir da experiência.

Apenas jogar um jogo tem pouca contribuição para a aprendizagem em matemática. É todo o processo de mediação realizado pelo professor, de discussão matemática realizado no grupo de alunos, de registro e sistematização de conceitos que possibilitam um trabalho efetivo com a matemática a partir do jogo (GRANDO, 2015, p. 404).

Dessa forma, o uso de jogos na aula de Matemática demanda intencionalidade didática. Cabe ao professor promover diálogos, questionamentos, comparações entre estratégias e momentos de sistematização que permitam tornar explícitas as formas de raciocínio elaboradas pelos alunos. A mediação docente é essencial para transformar a ação espontânea em aprendizagem estruturada, articulando o jogo com os conceitos matemáticos envolvidos. Assim, o ambiente lúdico torna-se um espaço fértil para o desenvolvimento de conteúdos curriculares sem desconectar a matemática das experiências dos estudantes.

Além disso, Grando (2015) enfatiza que o jogo favorece a articulação entre a manipulação concreta, a análise reflexiva e a linguagem matemática formal. Ao registrar procedimentos, explicitar escolhas, comparar resoluções e comunicar estratégias, o aluno transita entre diferentes formas de representação, fortalecendo sua compreensão conceitual. Jogos, especialmente os de estratégia ou computacionais, estimulam competências como antecipação, análise de erros, ajuste de procedimentos e autonomia intelectual. Nessa perspectiva, o emprego de jogos no ensino de matemática constitui uma metodologia robusta para o desenvolvimento do pensamento matemático, da resolução de problemas e da comunicação matemática.

Neste trabalho, propomos o uso de jogos e a gamificação das aulas como estratégias pedagógicas para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, envolvente e significativo. A intenção é criar um ambiente em que os estudantes sintam-se motivados a aprender, tanto pela diversão e desafio dos jogos quanto pelo desejo de aprimorar suas habilidades e desenvolver estratégias eficazes para alcançar melhores resultados. Para isso, serão utilizados os jogos de xadrez e poker, como ferramenta didática para facilitar a compreensão de conteúdos de análise combinatória e probabilidade, permitindo aos alunos explorar conceitos matemáticos por meio de situações concretas e desafiadoras. Espera-se que, ao se envolverem com o jogo, os estudantes se engajem ativamente nas atividades, compreendam as regras envolvidas e avancem progressivamente na construção do pensamento lógico, estratégico e probabilístico.

## 2.2 Xadrez e suas Regras

O xadrez é mais do que um simples jogo de tabuleiro: é uma prática milenar que combina raciocínio lógico, estratégia, concentração e tomada de decisões. Com origens que remontam à Índia antiga, o xadrez atravessou séculos e fronteiras culturais até consolidar-se como um dos jogos mais emblemáticos do pensamento humano. No campo educacional, ele tem sido valorizado como uma ferramenta pedagógica capaz de estimular habilidades cognitivas fundamentais, como a antecipação de consequências, a análise de padrões e a resolução de problemas, estas competências estão diretamente associadas à aprendizagem matemática. Este capítulo apresenta os principais aspectos do xadrez, suas regras e estrutura, destacando seu potencial como recurso didático e como linguagem simbólica para o desenvolvimento do pensamento matemático no ambiente escolar.

Antes de explorarmos a relação entre xadrez e matemática, é fundamental conhecer as regras e fundamentos básicos do jogo. Não é possível ensinar essa conexão de forma eficaz sem dominar o essencial do xadrez. Ao longo desse processo de familiarização, vamos percebendo naturalmente como o jogo se articula com conceitos matemáticos e quais conteúdos podem ser trabalhados a partir dele.

### 2.2.1 História do Xadrez

A origem do xadrez é envolta em lendas e mistérios, sendo atribuída a diversas civilizações antigas. Entre as muitas histórias, destaca-se uma famosa lenda indiana que associa a criação do jogo a um pedido engenhoso feito por um súdito ao rei Shirham. Segundo a narrativa, o xadrez foi inventado por Sissa Ben Dahir para entreter o rei, ajudando-o a esquecer os aborrecimentos causados por uma batalha desastrosa. Encantado com o jogo, o soberano ofereceu a Sissa qualquer recompensa que desejasse. O pedido, aparentemente modesto, surpreendeu a todos: “Bondoso rei, conceda-me apenas um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira, e assim sucessivamente, dobrando a quantidade a cada casa, até completar as 64 casas do tabuleiro (AVILA, 2020)”.

O rei, considerando o pedido singelo demais, ordenou de imediato que fosse atendido. No entanto, à medida que os cálculos avançavam, os servos logo perceberam a magnitude da solicitação. Trata-se de uma progressão geométrica com razão 2, cuja soma total é dada pela fórmula:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615 \text{ grãos de trigo.}$$

Mesmo grandes quantidades de trigo não foram suficientes para preencher sequer metade do tabuleiro. Por exemplo, para preencher as primeiras 16 casas, seriam necessários 65.535 grãos. Para chegar à 23ª casa, já eram exigidos mais de 8 milhões de

grãos, e a soma até a 24<sup>a</sup> casa ultrapassava 16 milhões. Quando os matemáticos do reino fizeram os cálculos, concluíram que nem mesmo toda a produção mundial de trigo da época seria suficiente para atender à demanda. Estima-se que seriam necessários aproximadamente 1.000 anos de produção mundial de trigo, na atualidade, para cumprir integralmente o pedido. Esse relato lendário é frequentemente utilizado não apenas para ilustrar o surgimento do xadrez, mas também para apresentar o conceito de crescimento exponencial, tão relevante no ensino de matemática.

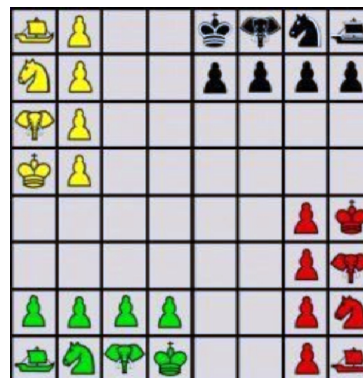
Apesar da riqueza simbólica das lendas, as fontes históricas mais confiáveis apontam que o xadrez surgiu no noroeste da Índia, por volta do ano 570 d.C., sob o nome de Chaturanga. Este era um jogo de tabuleiro que simulava um campo de batalha e continha quatro tipos de tropas: infantaria, cavalaria, elefantes e carros de guerra, que dariam origem às peças atuais — peão, cavalo, bispo e torre (CALDEIRA, 2021).

O tabuleiro era composto por 64 casas de mesma cor (8 linhas por 8 colunas), e o jogo introduzia elementos já presentes no xadrez moderno, como o objetivo de capturar o rei adversário (conceito de xeque).

Originalmente, o Chaturanga era jogado por quatro jogadores, cada um com oito peças distribuídas entre:

- um ministro,
- um cavalo,
- um elefante,
- um navio
- quatro soldados.

Figura 2.1: O jogo indiano Chaturanga



Fonte: Autoria própria.

As peças eram colocadas nos quatro cantos do tabuleiro, e cada jogador utilizava peças de cores diferentes como podem ver na figura 2.1. O jogo podia ser disputado individualmente ou em duplas, sendo necessário raciocínio tático e cooperação.

Com o tempo, o Chaturanga foi se transformando e se espalhou para a Pérsia, onde evoluiu para o Shatranj, e, posteriormente, para o xadrez que conhecemos hoje.

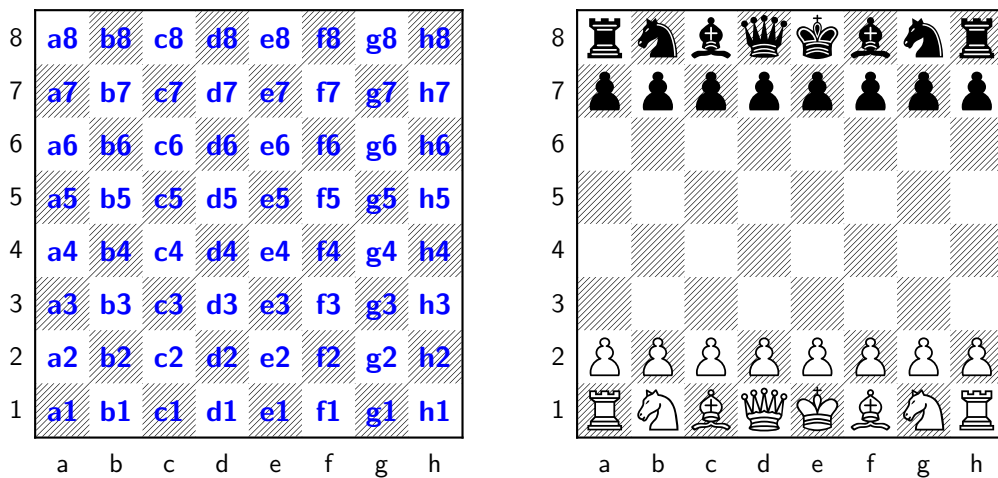
### 2.2.2 Organização do Tabuleiro

O xadrez é jogado em um tabuleiro de 64 casas, sendo 32 brancas e 32 pretas, dispostas alternadamente em oito linhas (numeradas de 1 a 8) e oito colunas (letradas de “a” a “h”). O tabuleiro deve sempre ser posicionado de forma que a casa branca fique no canto inferior direito de cada jogador (CHESS.COM, 2025).

Cada jogador começa com 16 peças, dispostas da seguinte forma:

- Primeira fileira (linha 1 para as brancas, linha 8 para as pretas) são preenchidas canto a canto com as peças torre, cavalo, bispo, dama, rei, bispo, cavalo e torre.
- Segunda fileira (linha 2 para as brancas, linha 7 para as pretas) é ocupada por 8 peões.

Figura 2.2: O tabuleiro e as posições iniciais das peças.



Fonte: Autoria própria.

Uma observação importante a dama sempre começa na sua cor (dama branca na casa clara, dama preta na casa escura). Assim, a posição inicial do jogo é perfeitamente simétrica, permitindo que ambos os jogadores tenham as mesmas oportunidades de ataque e defesa. Outro destaque importante refere-se à captura das peças, que diferentemente do jogo de damas, no qual uma peça salta sobre a do adversário para capturá-la, no xadrez a captura ocorre quando uma peça ocupa a casa que estava sendo ocupada pela peça adversária.

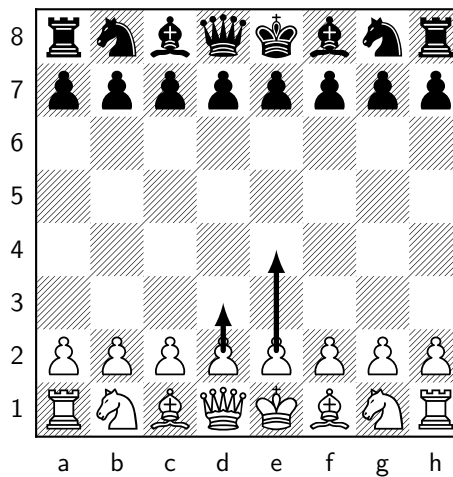
### 2.2.3 Movimentos das Peças

No xadrez, cada peça possui um padrão de movimentação específico. Conhecer bem esses movimentos é essencial para jogar estrategicamente. A seguir, a apresentação de como se movimenta cada peça.

#### Peão

O peão é a peça mais numerosa e movimenta-se sempre para frente, avançando uma casa por vez, exceto no seu primeiro lance, quando pode andar duas casas. Apesar de mover-se em linha reta, o peão captura na diagonal, avançando uma casa na diagonal à frente.

Figura 2.3: Movimento do peão

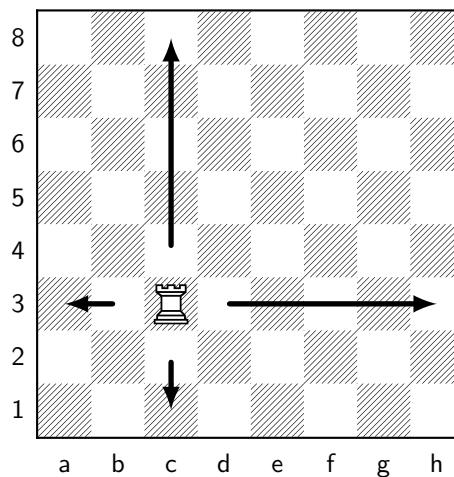


Fonte: Autoria própria.

#### Torre

A torre move-se em linha reta, tanto na horizontal quanto na vertical, quantas casas desejar, desde que o caminho esteja livre. Ela não pode saltar sobre outras peças e participa de um movimento especial chamado roque, realizado em conjunto com o rei.

Figura 2.4: Movimento da torre

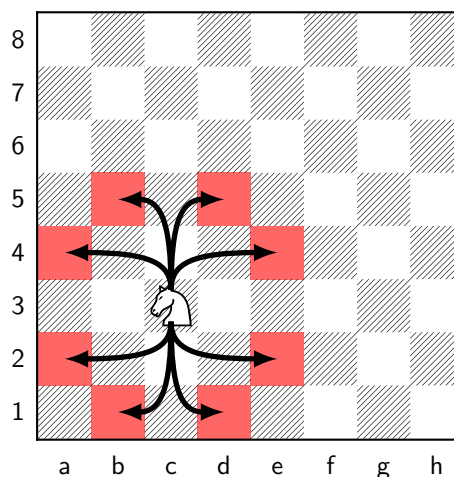


Fonte: Autoria própria.

## Cavalo

O cavalo tem um movimento único em formato de “L”: duas casas em uma direção (horizontal ou vertical) e uma casa perpendicular. Ele é a única peça que pode saltar sobre outras, o que o torna especialmente útil em situações de bloqueio. Ao se mover, sempre muda a cor da casa que ocupa no tabuleiro.

Figura 2.5: Movimento do cavalo

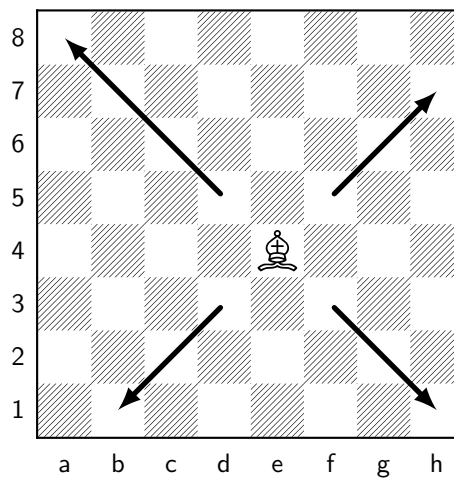


Fonte: Autoria própria.

## Bispo

O bispo movimenta-se pelas diagonais, também quantas casas quiser, desde que o caminho esteja livre. Cada bispo permanece sempre nas casas de uma mesma cor, um em casas brancas e outro em casas pretas, e não pode mudar isso ao longo da partida.

Figura 2.6: Movimento do bispo

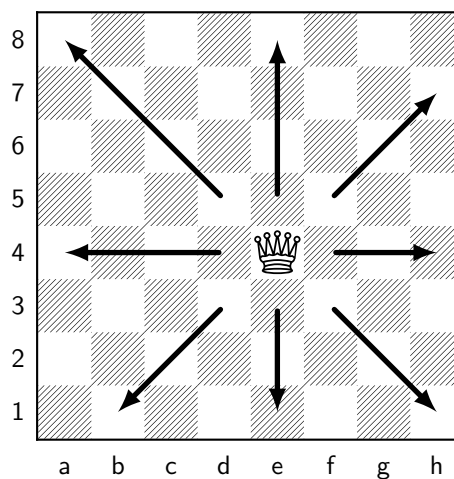


Fonte: Autoria própria.

## Dama

A dama é a peça mais poderosa do jogo, pois combina os movimentos da torre e do bispo. Ela pode mover-se em todas as direções — horizontal, vertical e diagonal — percorrendo qualquer número de casas, desde que o caminho esteja desobstruído. Sua versatilidade a torna essencial no ataque e na defesa.

Figura 2.7: Movimento da dama



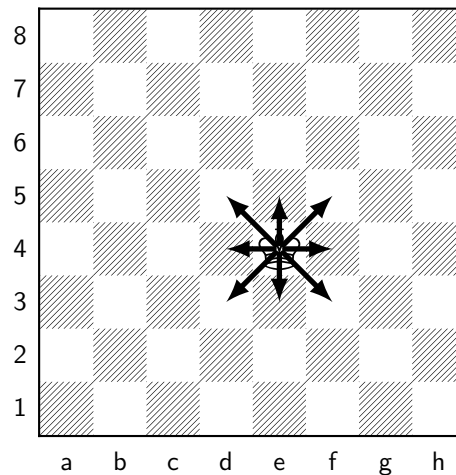
Fonte: Autoria própria.

## Rei

O rei é a peça mais importante do tabuleiro. Ele pode se mover uma casa por vez em qualquer direção, mas não pode se deslocar para casas que estejam sob ataque. O rei também pode realizar um movimento especial chamado roque, feito em conjunto com a

torre, desde que nenhuma das peças tenha se movido antes, que não haja peças entre elas e que o rei não esteja em xeque, nem passe por uma casa atacada durante o movimento.

Figura 2.8: Movimento do rei



Fonte: Autoria própria.

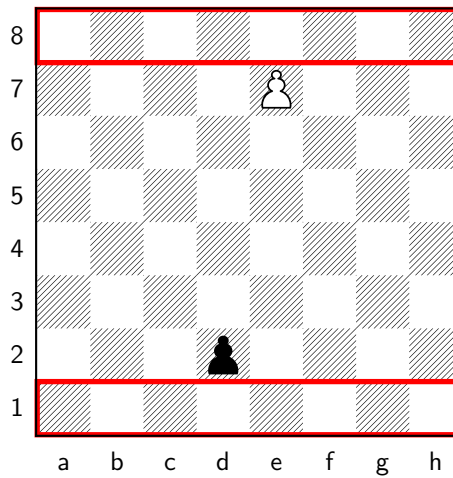
## 2.2.4 Regras Especiais

Além dos movimentos tradicionais, o xadrez possui três regras especiais que acrescentam complexidade e profundidade estratégica ao jogo: a promoção do peão, o roque e o en passant. Elas foram criadas para tornar o xadrez mais divertido e interessante.

### Promoção de peão

A promoção do peão ocorre quando um peão atinge a oitava linha do tabuleiro, ou seja, a última linha do lado adversário. Ao alcançar essa posição, o jogador deve obrigatoriamente promover o peão, escolhendo entre uma dama, uma torre, um bispo ou um cavalo da mesma cor, independentemente das peças que ainda estejam em jogo. A dama é, na maioria das vezes, a escolha preferida por ser a peça mais poderosa, mas situações específicas podem justificar outras opções. A promoção é imediata e não depende do turno seguinte.

Figura 2.9: Promoção de Peão

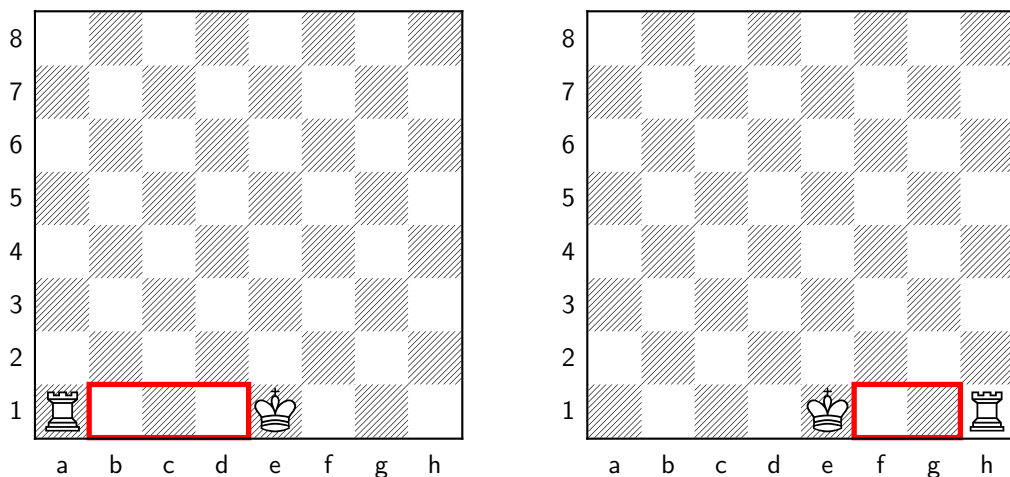


Fonte: Autoria própria.

## Roque

O roque é um movimento especial realizado entre o rei e uma das torres do mesmo jogador. Seu objetivo principal é proteger o rei e ativar a torre, posicionando-a mais próxima do centro. Para realizar o roque, quatro condições devem ser respeitadas: o rei e a torre envolvidos não podem ter se movido anteriormente; não pode haver nenhuma peça entre eles (como na figura 2.10); o rei não pode estar em xeque; e o rei não pode atravessar nem terminar sua movimentação em uma casa atacada. Existem dois tipos de roque: o roque pequeno (do lado do cavalo), em que o rei se move duas casas para a direita e a torre pula por cima dele, e o roque grande (do lado da dama), em que o rei se move duas casas para a esquerda e a torre atravessa por trás (CHESS.COM, 2025).

Figura 2.10: Roque grande e roque pequeno

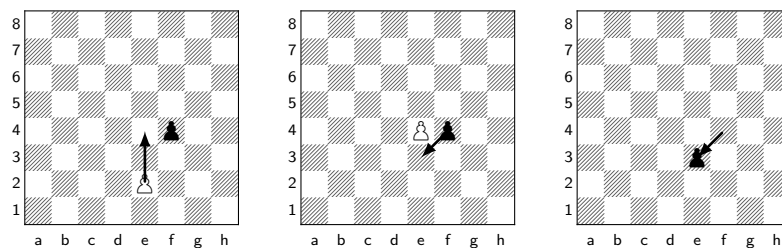


Fonte: Autoria própria.

## En passant

A captura em passant é uma jogada especial que envolve os peões. Ela ocorre quando um peão avança duas casas em seu primeiro movimento e passa ao lado de um peão adversário. Se isso acontecer, o peão do oponente tem o direito de capturá-lo como se ele tivesse avançado apenas uma casa. Essa captura só pode ser realizada imediatamente após o movimento duplo do peão adversário; se o jogador não aproveitar a oportunidade na jogada seguinte, ela é perdida.

Figura 2.11: En Passant



Fonte: Autoria própria.

## 2.2.5 Notação do Xadrez

A notação do xadrez constitui o sistema simbólico utilizado para registrar, descrever e reproduzir os movimentos de uma partida. Embora seja hoje parte natural da prática enxadrística, seu formato atual é resultado de uma evolução histórica marcada pela busca por precisão, padronização e eficiência comunicativa, características diretamente associadas ao pensamento matemático.

Desde os registros mais antigos do *chaturanga* e do *shatranj*, entre os séculos VI e IX, os movimentos das peças eram descritos verbalmente ou em textos narrativos. Essas descrições tinham finalidade cultural e literária, e não técnica, o que impedia o estudo sistemático de partidas. Com a expansão do xadrez para o mundo árabe e europeu, cresce a necessidade de registrar partidas para fins pedagógicos e comparativos. Assim, surgem sistemas de anotação cada vez mais estruturados, culminando na notação algébrica moderna, atualmente regulamentada pela Federação Internacional de Xadrez (FIDE).

A notação algébrica organiza o tabuleiro como um sistema de coordenadas formado pelas colunas e linhas, representadas pelas letras de a até h e os números de 1 até 8, respectivamente. Cada lance é representado por símbolos padronizados que eliminam ambiguidades e permitem que qualquer pessoa reproduza a partida exatamente como ela ocorreu, independentemente de idioma, estilo ou época.

**Quadro 1:** Peças de xadrez e seus símbolos na notação algébrica

Peça	Símbolo	Observação
Rei (King)	K	Peça mais importante do jogo
Dama (Queen)	Q	Peça mais poderosa em termos de mobilidade
Torre (Rook)	R	Atua em linhas e colunas
Bispo (Bishop)	B	Atua nas diagonais
Cavalo (Knight)	N	Usa a letra N para não confundir com rei
Peão (Pawn)	—	Não recebe símbolo; registra-se apenas a casa de destino

Fonte: Autoria própria.

A seguir, apresentam-se os símbolos e convenções utilizados na notação algébrica, conforme o padrão contemporâneo:

- **Movimento simples de peça:** letra da peça + casa de destino (*Be5*, *Nf3*, *Rd8*, *d5* para peão).
- **Captura:** inclusão do símbolo “x” (*Bxe5*, *Nxh6*, *exd5* para captura realizada por peão).
- **En passant:** notação de captura com indicação opcional “e.p.” (*dxc6 e.p.*).
- **Roque:** *O-O* (roque pequeno) e *O-O-O* (roque grande).
- **Promoção:** casa de chegada + “=” + peça promovida (*f8=Q*, *c1=R*, promoções dos peões das casas f8 e c1 para dama e torre, respectivamente).
- **Xeque e xeque-mate:** “+” para xeque e “#” para mate.
- **Encerramento da partida:** *1-0* (vitória branca), *0-1* (vitória preta) ou *1/2-1/2* (empate).

O uso desses símbolos transforma os lances do xadrez em uma linguagem formal, sintética e universal. Como ocorre na matemática, o conjunto de símbolos possui regras sintáticas específicas e significado preciso, permitindo representar sequências de pensamento e de decisões de forma objetiva.

### Exemplo ilustrativo de notação algébrica

A sequência abaixo exemplifica um trecho real de partida, registrada exclusivamente por símbolos:

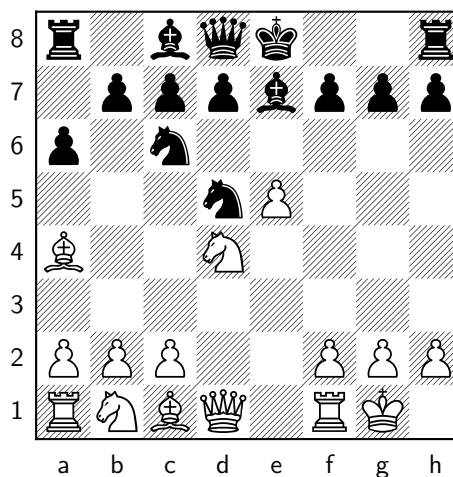
1. *e4 e5* 2. *Nf3 Nc6* 3. *Bb5 a6* 4. *Ba4 Nf6* 5. *O-O Be7* 6. *d4 exd4* 7. *e5 Nd5* 8. *Nxd4*

Esse registro permite interpretar a dinâmica estratégica da partida e chegar a posição final da figura 2.12:

- movimentos de peças maiores e de peões;
- ações ofensivas e defensivas;
- capturas e desenvolvimento das peças;
- um roque curto como parte do plano de segurança do rei;
- lances que modificam o centro do tabuleiro e geram mudanças táticas.

Figura 2.12: Posição final.

1 e4 e5 2 ♘f3 ♘c6 3 ♙b5 a6 4 ♙a4 ♘f6 5 O-O ♙e7 6 d4 exd4 7 e5 ♘d5 8  
♘xd4



Fonte: Autoria própria.

Sem qualquer diagrama, é possível reconstruir toda a posição apenas pela leitura dos símbolos. Essa característica torna a notação instrumento essencial para estudo, comparação de estilos e avaliação técnica das partidas.

### A notação como linguagem matemática

A notação algébrica aproxima o xadrez da matemática por três razões principais:

- utiliza símbolos com significado único e independente do idioma;
- representa uma sequência lógica de decisões, semelhante a uma cadeia algorítmica;
- permite análises quantitativas, como cálculo de erros, precisão e vantagem posicional.

Além disso, os lances registrados geram estruturas comparáveis a árvores de decisão, nas quais cada movimento abre novos ramos possíveis e elimina outros. Assim, a notação não é apenas uma forma de memorização, mas um alicerce para a análise racional do jogo e para o progresso pedagógico em ambientes de ensino.

Conclui-se que a notação algébrica constitui uma linguagem formal que possibilita reproduzir, estudar e comparar partidas com precisão científica. Seu desenvolvimento histórico reflete um processo contínuo de refinamento simbólico, convergindo com o princípio matemático de transformar raciocínio em representação estruturada.

## 2.2.6 Objetivo no Xadrez

O jogador com as peças brancas sempre move primeiro. Desta forma, os jogadores geralmente decidem quem vai começar com as brancas pela sorte, com um cara ou coroa ou um com um jogador tentando adivinhar a cor da peça escondida na mão do outro jogador. As brancas fazem um lance, seguido das pretas, e assim sucessivamente até o fim da partida. Poder começar a partida é uma pequena vantagem que dá às brancas uma oportunidade de atacar logo no início (CHESS.COM, 2025).

Há dois modos de terminar uma partida de xadrez: por xeque-mate ou com um empate.

### Xeque-mate

O xadrez é um jogo de estratégia cujo objetivo principal é ameaçar o rei adversário de forma inevitável, isto é, colocá-lo em xeque-mate. Atingir essa condição encerra a partida e garante a vitória ao jogador que executou o mate. Para compreender plenamente esse objetivo, é necessário entender o conceito de **xeque** e a condição de xeque-mate.

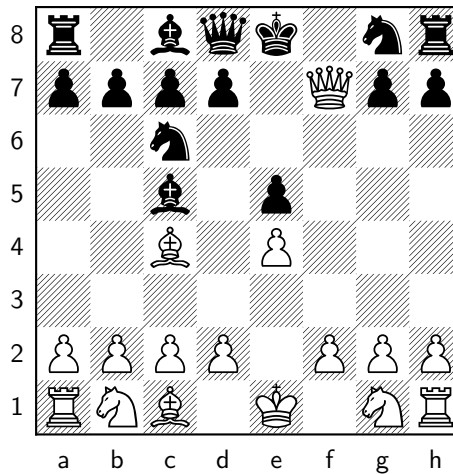
O **xeque** ocorre quando o rei está sob ataque direto de uma peça adversária, ou seja, se o oponente puder capturá-lo na jogada seguinte. Ao receber um cheque, o jogador é obrigado a realizar uma jogada que remova essa ameaça, seja movendo o rei para uma casa segura, interpondo uma peça entre o rei e a peça atacante, ou capturando a peça que está dando o cheque. Ignorar um cheque ou fazer uma jogada que mantenha o rei em risco é ilegal.

O **xeque-mate** é a condição em que o rei está em xeque e não há nenhuma jogada legal que o remova dessa situação. Quando isso ocorre, a partida termina imediatamente com a vitória do jogador que aplicou o xeque-mate. Ao contrário do que muitos pensam, o rei não é capturado; o jogo simplesmente se encerra no momento em que o xeque-mate é inevitável.

Vejamos dois exemplos abaixo.

Figura 2.13: Exemplo 1 de xeque-mate

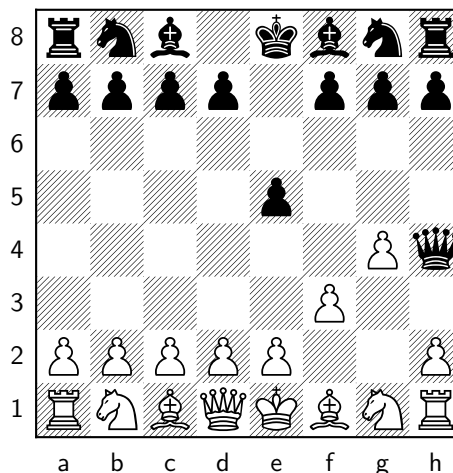
1 e4 e5 2 ♘c4 ♗c6 3 ♖f3 ♘c5 4 ♖xf7



Fonte: Autoria própria.

Figura 2.14: Exemplo 2 de xeque-mate

1 f3 e5 2 g4 ♕h4



Fonte: Autoria própria.

Para sair de um xeque, existem apenas três alternativas possíveis: capturar a peça que está dando o xeque, mover o rei para uma casa segura — ou seja, que não esteja sob ataque — ou interpor uma peça entre o rei e a peça que está aplicando o xeque, bloqueando assim a ameaça. Nos exemplos das figuras 2.13 e 2.14 não é possível fazer nenhum dos movimentos, por isso são situações de xeque-mate.

## Empate

Embora o xeque-mate seja o objetivo principal do jogo, existem também situações de empate, que resultam em uma partida sem vencedor. O empate pode ocorrer de diversas formas. Uma das mais comuns é o afogamento (stalemate), quando o jogador que deve

jogar não está em xeque, mas não possui nenhum lance legal. Outra forma é o acordo mútuo entre os jogadores, previsto nas regras oficiais, especialmente em partidas profissionais. O empate também ocorre por repetição de posição três vezes consecutivas, por regra dos cinquenta lances (quando nenhum peão é movido e nenhuma peça é capturada em cinquenta jogadas consecutivas de cada jogador), ou quando não há mais material suficiente no tabuleiro para dar xeque-mate (como quando restam apenas os dois reis, ou um rei e um bispo contra um rei) (CHESS.COM, 2025).

Dessa forma, o objetivo do xadrez transcende a simples movimentação de peças e envolve uma compreensão estratégica de como proteger seu próprio rei, atacar o rei adversário e, em certos casos, reconhecer quando a vitória é impossível e o empate é o desfecho mais realista. Esse entendimento é fundamental para a formação de jogadores conscientes e para o desenvolvimento do raciocínio lógico, característica marcante do xadrez enquanto instrumento educacional e cognitivo.

### 2.2.7 Estratégias básicas do xadrez

Para quem está começando no xadrez, o mais importante não é decorar jogadas sofisticadas, mas sim compreender e aplicar princípios básicos que ajudam a tomar decisões sólidas ao longo da partida. Simplificar o pensamento e seguir estratégias consistentes é a melhor forma de evoluir no jogo. Nesse sentido, todo jogador iniciante deve ter quatro objetivos principais em mente durante os lances iniciais e o meio-jogo:

#### Controlar o centro do tabuleiro

As casas centrais (d4, d5, e4, e5) são as mais importantes do tabuleiro. Quem controla o centro geralmente tem mais espaço, mobilidade e oportunidades de ataque. Movimentar peões centrais no início (como e4 ou d4) e posicionar peças — especialmente cavalos e bispos — de modo a pressionar o centro, é um dos fundamentos estratégicos mais importantes. Dominar o centro permite lançar ataques com mais força e defender-se com mais flexibilidade.

#### Proteger o rei

O rei é a peça mais importante do jogo. Embora tenha movimentos limitados, sua captura não é permitida; em vez disso, colocá-lo em uma posição sem escapatória (o famoso xeque-mate) encerra a partida. Por isso, desde o início do jogo é essencial proteger o rei, geralmente por meio do **roque**, que coloca o rei em uma posição mais segura e ativa uma torre ao mesmo tempo. Deixar o rei no centro por muitas jogadas pode ser arriscado, especialmente quando o tabuleiro começa a se abrir.

## Ativar todas as peças

Muitas vezes, iniciantes jogam várias jogadas com a mesma peça ou deixam peças ”presas” no fundo do tabuleiro. Um dos objetivos iniciais deve ser desenvolver todas as peças, ou seja, colocá-las em posições úteis. Os cavalos e bispos devem sair cedo para casas onde exerçam controle sobre o tabuleiro. Evite mover a dama muito cedo e lembre-se de envolver as torres — especialmente após o roque. Um exército completo é muito mais forte do que um rei lutando com dois ou três soldados.







## Não entregar peças sem compensação

Cada peça no xadrez tem valor e função. Perder peças de forma descuidada — sem um ganho em troca ou sem um objetivo estratégico claro — é uma das causas mais comuns de derrota entre iniciantes. É importante pensar antes de cada lance: “Se eu mover esta peça, ela pode ser capturada? Se sim, vale a pena?” Jogar com consciência do valor das peças e com atenção ao que o adversário pode fazer é um hábito que se desenvolve com prática, mas deve começar desde os primeiros jogos.

Os valores das peças no xadrez são tradicionalmente atribuídos para ajudar a avaliar trocas e estratégias, embora o valor real dependa muito do contexto da partida. Esses valores surgiram no século XVIII pelo enxadrista francês François Philidor e teóricos da época pensando na mobilidade e poder de ataque de cada peça (ACADEMIC.COM, 2025).

Abaixo estão os valores convencionais usados por jogadores e programas de xadrez:

Tabela 2.1: Valores convencionais das peças de xadrez

Peça	Símbolo	Mobilidade média	Valor (pontos)
Peão		1 ou 2 casas	1
Cavalo		até 8 casas	3
Bispo		até 13 casas	3
Torre		até 14 casas	5
Dama		até 27 casas	9
Rei		não se aplica	Incalculável

Fonte: Autoria própria.

Perceba que o cavalo e o bispo possuem o mesmo valor numérico, embora o bispo possa alcançar mais casas no tabuleiro. No entanto, o cavalo tem a vantagem de saltar obstáculos, o que o torna útil em posições fechadas. Torre e dama têm mais alcance e poder ofensivo. Já o Rei, apesar de forte no final, não entra na contagem porque sua perda significa o fim da partida.

Outro fato importante é que esses valores se aplicam ao início do jogo e podem mudar em situações do jogo. Por exemplo, um cavalo centralizado pode valer mais que um bispo preso, uma torre na sétima fileira pode valer mais que 5 pontos (para jogador

com peças brancas). Isto é, o valor de uma peça muda conforme a posição e o momento da partida.

### 2.2.8 Variações do xadrez

Existem diversas modalidades de xadrez, que variam conforme o formato do jogo, o **ambiente**, o **número de participantes** e o controle de **tempo** utilizado. As variações mais comuns surgem quando se altera o local da partida, podendo ser presencial ou virtual, o número de jogadores — como nas modalidades solo, um contra um ou simultâneas, em que um jogador enfrenta vários adversários ao mesmo tempo —, ou ainda quando o objetivo do jogo é resolver problemas específicos de forma individual, em vez de disputar uma partida tradicional.

Outra forma importante de variação está relacionada ao **ritmo de jogo**. A FIDE (Federação Internacional de Xadrez) reconhece oficialmente três categorias de tempo: clássico, rápido e blitz. Existe ainda uma categoria popular chamada bullet, que consiste em partidas extremamente rápidas (geralmente com 1 minuto por jogador), mas que não é oficialmente reconhecida pela FIDE como uma modalidade regulamentada.

Embora todas essas formas de jogo sigam as regras básicas do xadrez, como as movimentações das peças e os conceitos de xeque e xeque-mate, as estratégias utilizadas e as habilidades exigidas podem variar significativamente. Por exemplo, no xadrez clássico, são valorizadas a paciência, o planejamento profundo e a análise cuidadosa; já em partidas blitz ou bullet, o reflexo rápido, a intuição e a experiência prática são fundamentais. Cada modalidade, portanto, exige do jogador diferentes competências cognitivas e emocionais para alcançar um desempenho eficaz.

## 2.3 Poker e suas Regras

A introdução ao poker, na maioria das vezes, ocorre em rodas de amigos, onde o ambiente informal favorece a experimentação do jogo. Nesse contexto, é comum que o jogador iniciante enfrente dificuldades e acabe perdendo com frequência, uma vez que, além de ter tido contato recente com as regras, geralmente não possui a base matemática necessária para embasar suas decisões. Como resultado, suas escolhas ao longo da partida tendem a ser equivocadas e impulsivas. Uma forma de minimizar essa limitação inicial é apresentar, de forma clara e objetiva, não apenas as regras do jogo, mas também um panorama básico da matemática envolvida no poker. Com esse embasamento, o jogador poderá analisar suas decisões com mais critério e realizar uma autoavaliação sobre a adequação de sua estratégia de jogo.

O poker é um jogo fácil de aprender, que serve para toda a família independente de idade, sexo ou condicionamento físico. Em 2010, foi reconhecido pela Associação Internacional de Esportes da Mente (IMSA — International Mind Sports Association) como um esporte e estará nas próximas Olimpíadas de Jogos da Mente, ao lado do xadrez e do gamão. Esqueça o preconceito. O poker é um jogo legal (não é um jogo de azar proibido pela legislação brasileira). Além disso, é um esporte cadastrado no Ministério dos Esportes do Brasil com o mesmo status do xadrez (BELLO, 2012, p.5).

A origem do poker é marcada por controvérsias e múltiplas influências culturais. Embora não haja um consenso definitivo sobre seu ponto de partida, acredita-se que o jogo tenha evoluído a partir de uma série de jogos de cartas europeus e persas praticados entre os séculos XVI e XIX. Uma das teorias mais aceitas sugere que o poker tem raízes no jogo francês “**poque**”, que por sua vez deriva do alemão “**pochen**”, ambos centrados em apostas e blefes. Outra influência importante vem do jogo persa “**as nas**”, que também envolvia rodadas de apostas com elementos de estratégia e disfarce. O poker moderno começou a tomar forma nos Estados Unidos, principalmente na região do rio Mississippi, durante o século XIX, inicialmente com um baralho de 20 cartas. Com o tempo, o jogo se popularizou em saloons, ganhou variações como o “draw poker” e o “stud poker”, e foi padronizado com o baralho de 52 cartas. No século XX, o poker tornou-se um fenômeno global, especialmente com fato do poker online e de grandes torneios como o World Series of Poker. Hoje, além de ser uma prática recreativa e esportiva, o poker também é explorado como ferramenta pedagógica, principalmente no ensino de probabilidade, combinatória e tomada de decisão (BELLO, 2012).

Diversas instituições de ensino superior já têm explorado o poker como recurso pedagógico em diferentes áreas do conhecimento, em especial nos cursos de negócios e administração. Um exemplo notável é a iniciativa da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), que passou a ofertar uma disciplina inspirada em experiências desenvolvidas em universidades internacionais de prestígio, como o Massachusetts Institute of Tech-

nology (MIT) e Harvard, nas quais o poker é utilizado como ferramenta para discutir aspectos relacionados à tomada de decisão, gestão de riscos e estratégias em ambientes competitivos (MUNIZ, 2013). Essa experiência demonstra que o jogo, para além do entretenimento, pode ser apropriado como objeto de estudo em contextos formais de ensino, possibilitando a aplicação prática de conceitos matemáticos, estatísticos e comportamentais.

A seguir, apresentaremos de forma detalhada cada etapa de uma mão de poker na modalidade Texas Hold'em, explicando também os critérios utilizados para determinar o vencedor de uma rodada ou de um jogo. Inicialmente, destacaremos o objetivo principal do jogo e o funcionamento do ranking de mãos, elemento essencial para a definição da mão vencedora. Em seguida, descreveremos o desenrolar de uma mão, desde a distribuição inicial das cartas até a revelação final (showdown), incluindo todas as fases intermediárias como pré-flop, flop, turn e river. Por fim, explicaremos como uma mão pode ser encerrada — seja por desistência dos oponentes, aposta final ou confronto entre os jogadores restantes — e como é definido o ganhador da rodada com base na melhor combinação de cinco cartas. Esta introdução serve como base para a compreensão das regras formais do Texas Hold'em, que serão exploradas em maior profundidade ao longo dos próximos capítulos.

### 2.3.1 Estrutura inicial no poker Texas Hold'em

Cada jogador recebe **duas cartas fechadas**, conhecidas como *hole cards*, que apenas ele pode ver. Ao longo da partida, serão abertas **cinco cartas comunitárias** sobre a mesa, que todos podem usar em combinação com suas cartas para formar a melhor mão possível de 5 cartas. O jogo segue o sentido horário, com um botão chamado *dealer* indicando a posição do distribuidor fictício — essa posição muda a cada rodada.

Antes da distribuição das cartas, dois jogadores devem colocar apostas obrigatórias chamadas de **blinds**. O jogador à esquerda do dealer paga o *small blind* e o próximo paga o *big blind*. Esses valores são definidos previamente e servem para formar um pote mínimo em disputa.

Além dos *blinds*, as posições dos jogadores em uma mesa de poker são classificadas de acordo com a ordem em que devem agir nas rodadas de apostas. Essa ordem é muito importante, pois influencia diretamente a estratégia e as decisões probabilísticas durante o jogo.

Os primeiros jogadores a agir, localizados logo após os *blinds*, são chamados de **Under the Gun (UTG)** — expressão que significa “sob a mira da arma”. O nome reflete a pressão dessa posição: o jogador deve decidir se entra ou sai da mão sem ter informações sobre as ações dos demais, o que torna essa posição uma das mais desafiadoras e estratégicas da mesa. Estar em posição inicial exige cautela e escolhas mais conservadoras, já que o risco é maior.

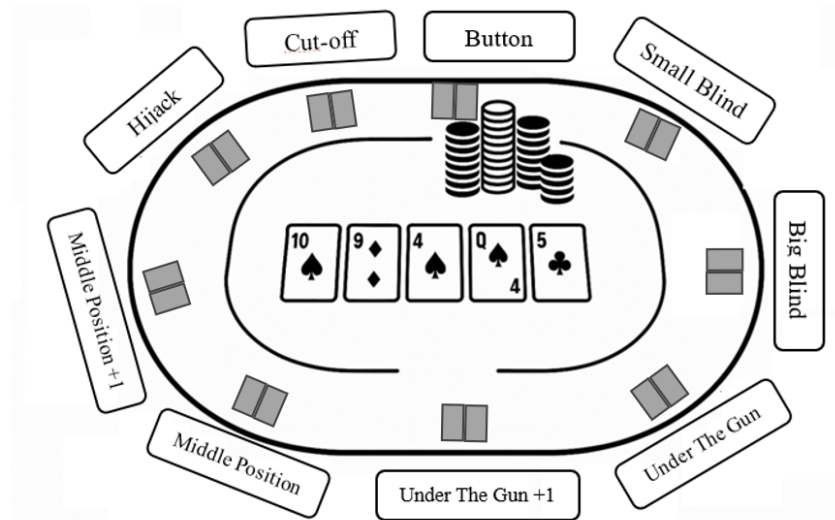
Em seguida vêm as chamadas **posições intermediárias**, ou *Middle Positions (MP)*, ocupadas pelos jogadores que agem após o UTG, mas antes das posições finais.

Nessas posições o jogador já possui algumas informações sobre as decisões anteriores, o que permite um raciocínio mais equilibrado entre agressividade e prudência.

Mais adiante, aproximando-se do final da rodada, encontram-se as **posições finais**, conhecidas como *Hijack (HJ)* e *Cutoff (CO)*. O *Hijack* é o penúltimo jogador a agir antes do *Dealer* (ou *Button*) e costuma ser uma posição favorável para jogadas mais ousadas, como tentativas de “roubar o pote” antes que os jogadores das posições seguintes reajam. Já o *Cutoff* é o último jogador antes do *Dealer* e uma das posições mais privilegiadas da mesa, pois o jogador observa quase todas as ações anteriores e pode tomar decisões mais embasadas.

Por fim, o **Dealer** (ou *Button*) representa a posição mais vantajosa da mesa, pois é o último a agir em todas as rodadas de apostas (exceto na primeira, em que os *blinds* já estão colocados). Ter a ação por último significa **maior controle da informação** e possibilidade de calcular **probabilidades condicionais** com base nas jogadas anteriores. A seguir, na figura 2.15 um esquema da distribuição dos jogadores:

Figura 2.15: Estrutura da mesa de poker e as posições de cada jogador



Fonte: Autoria própria.

### 2.3.2 Combinações de Mão

As mãos são classificadas da mais forte para a mais fraca. A seguir, o ranking das combinações no poker e um exemplo para cada combinação:

1. **Royal Flush:** A, K, Q, J, 10 do mesmo naipe.



Figura 2.16: Royal Flush

2. **Straight Flush:** cinco cartas em sequência e do mesmo naipe.



Figura 2.17: Straight Flush

3. **Quadra (Four of a Kind):** quatro cartas do mesmo valor.

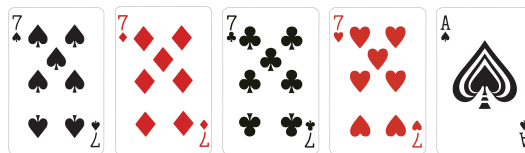


Figura 2.18: Quadra ou Poker

4. **Full House:** uma trinca e um par.

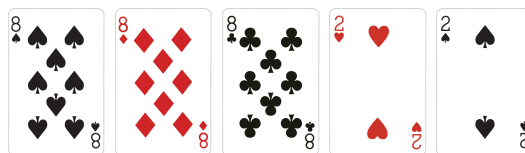


Figura 2.19: Full House

5. **Flush**: cinco cartas do mesmo naipe, sem sequência.

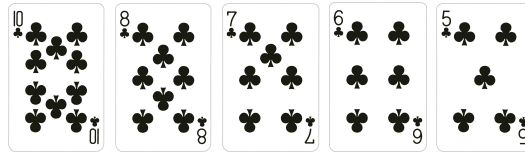


Figura 2.20: Flush

6. **Sequência (Straight)**: cinco cartas em ordem numérica, com naipes variados.



Figura 2.21: Sequência

7. **Trinca (Three of a Kind)**: três cartas do mesmo valor.



Figura 2.22: Trinca

8. **Dois Pares (Two Pair)**: duas duplas diferentes.



Figura 2.23: Dois Pares

9. **Um Par (One Pair)**: duas cartas iguais.



Figura 2.24: Um par

10. **Carta Alta (High Card)**: quando nenhuma combinação acima é formada.



Figura 2.25: Carta Alta

Quando dois jogadores possuem o mesmo tipo de combinação — por exemplo, um par — a definição do vencedor se dá pela comparação das cartas restantes (conhecidas como *kickers*). O jogador que apresentar a carta de maior valor entre as restantes é o vencedor da mão. Da mesma forma, no caso de pares ou trincas, a mão vitoriosa será aquela formada com as cartas de maior valor, respeitando a hierarquia tradicional das cartas, que vai do dois (2) ao ás (A). Ressalta-se que o ás, embora normalmente represente a carta de maior valor, também pode assumir o papel de carta de menor valor quando compõe uma sequência iniciada por dois (ex.: A-2-3-4-5).

### 2.3.3 Rodadas de Apostas

O jogo ocorre em quatro etapas de apostas:

1. **Pré-flop** – após os jogadores receberem suas duas cartas iniciais;
2. **Flop** – três cartas comunitárias são reveladas;
3. **Turn** – uma quarta carta comunitária é aberta;
4. **River** – a quinta e última carta comunitária é exibida.

Em cada uma dessas etapas, os jogadores podem tomar decisões estratégicas, entre elas:

- **Fold (desistir)**: abandonar a mão e sair da rodada;
- **Call (pagar)**: igualar a aposta feita por outro jogador;
- **Raise (aumentar)**: subir o valor da aposta;
- **Check (passar a vez)**: possível se ninguém apostou ainda na rodada atual.

Se todos os jogadores, exceto um, desistirem em qualquer fase, o último jogador restante vence a mão automaticamente, sem precisar mostrar suas cartas. Caso mais de um jogador permaneça até o final, ocorre o *showdown*, onde todos revelam suas mãos, e vence aquele que tiver a **melhor combinação de cinco cartas**.

### 2.3.4 Encerramento da Mão (objetivo do jogo)

A mão termina quando resta apenas um jogador ou quando todos os participantes revelam suas cartas no *showdown*. Nesse momento, a análise da melhor mão leva em conta apenas cinco cartas, mesmo que o jogador tenha mais de cinco disponíveis somando suas cartas com as comunitárias.

O poker é um jogo acessível em suas regras, mas profundo em estratégia. Ele permite ao jogador desenvolver habilidades de raciocínio, estatística e tomada de decisão, sendo, por isso, amplamente utilizado também em contextos educacionais.

Considere uma mão de *Texas Hold'em* com dois jogadores, denominados Jogador X e Jogador Y. No *pré-flop*, o Jogador X recebe as cartas  $A\spadesuit K\diamondsuit$ , enquanto o Jogador Y recebe  $Q\clubsuit Q\heartsuit$ . Após a rodada inicial de apostas, ambos os jogadores permanecem na mão. No *flop*, as cartas comunitárias reveladas são  $A\heartsuit 7\clubsuit 2\diamondsuit$ , conferindo ao Jogador X um par de ases e mantendo o Jogador Y com um par de damas, agora inferior. No *turn*, surge a carta  $Q\spadesuit$ , o que proporciona ao Jogador Y uma trinca de damas, superando temporariamente a mão do adversário. Por fim, no *river*, a carta  $A\diamondsuit$  é revelada, formando para o Jogador X um tinca de ases e para o Jogador Y um *full house* (Trinca de damas e par de ases). No *showdown*, após a comparação das mãos, o Jogador Y vence a mão, pois um *full house* supera uma trinca, ilustrando de forma clara a dinâmica de alternância de vantagem ao longo das etapas do jogo.

## 2.4 Análise Combinatória

Em diversas situações do cotidiano e da matemática, somos levados a contar possibilidades, organizar elementos e avaliar quantas formas distintas algo pode acontecer. Esse tipo de problema está no coração da Análise Combinatória, um ramo da matemática que estuda os diferentes modos de escolher, agrupar ou ordenar objetos dentro de um conjunto, respeitando certas condições. Seja ao calcular quantas senhas diferentes podem ser formadas com determinados dígitos, ou ao avaliar quantas maneiras um time pode ser escalado, a análise combinatória oferece ferramentas poderosas para resolver problemas de contagem de forma sistemática e eficiente (MORGADO; CARVALHO, 2013).

A Análise Combinatória está intimamente ligada ao universo dos jogos, sejam eles de tabuleiro, cartas ou estratégias esportivas. Em muitos desses contextos, compreender o número de possibilidades ou combinações possíveis é essencial para planejar movimentos, tomar decisões e avaliar probabilidades. Jogos como o poker, por exemplo, envolvem a contagem de combinações específicas de cartas que determinam a força de uma mão. Em jogos de tabuleiro ou estratégias de posicionamento, como no xadrez ou no dominó, a análise combinatória também aparece ao considerar o número de sequências ou arranjos possíveis. Dessa forma, os jogos se tornam um campo fértil para a aplicação prática dos conceitos combinatórios, tornando o aprendizado mais significativo, envolvente e contex-

tualizado.

Nesta seção, serão apresentadas algumas técnicas fundamentais de contagem, utilizadas para resolver problemas típicos da Análise Combinatória.

### 2.4.1 Princípio Fundamental da Contagem

O **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**, também conhecido como **princípio multiplicativo**, estabelece que, quando uma tarefa é realizada em etapas sucessivas e independentes, o número total de maneiras de realizá-la é obtido multiplicando-se o número de opções disponíveis em cada etapa. Isto é, se há  $x$  modos de tomar uma decisão  $D_1$  e, tomada a decisão  $D_1$ , há  $y$  modos de tomar a decisão  $D_2$  então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é  $xy$  (MORGADO; CARVALHO, 2013).

#### Exemplo.

Considere o problema de determinar de quantas maneiras diferentes podemos formar uma sequência de duas cartas distintas retiradas de um baralho padrão com 52 cartas, levando em conta a ordem das cartas. Para escolher a primeira carta, há 52 possibilidades. Como as cartas não se repetem, restam 51 opções para a segunda carta. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número total de sequências possíveis é dado por  $52 \times 51 = 2.652$ . Esse exemplo mostra como o PFC pode ser utilizado para calcular o total de possibilidades em situações onde escolhas sucessivas são feitas sem reposição e a ordem dos elementos importa.

### 2.4.2 Fatorial

Na resolução de problemas de contagem é comum aparecerem multiplicações de números consecutivos. A fim de simplificar e resumir vamos definir o **fatorial de  $n$**  (indicado por  $n!$ ), onde  $n \in \mathbb{N}$  como

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Assim, temos por exemplo:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Perceba que, à medida que  $n$  aumenta, o cálculo de  $n!$  torna-se progressivamente mais trabalhoso, devido ao número crescente de multiplicações envolvidas. Nesse contexto, a notação fatorial é especialmente útil, pois permite representar expressões extensas de forma compacta e organizada, facilitando tanto a leitura quanto a resolução de problemas.

### 2.4.3 Arranjo

Um **arranjo** é uma disposição ordenada de elementos distintos escolhidos de um conjunto. Mais formalmente, dado um conjunto com  $n$  elementos distintos, chamamos de arranjo simples a escolha de  $p$  desses elementos, **sem repetição e considerando a ordem importante**. O número total de arranjos possíveis de  $p$  elementos tomados de um total de  $n$  é dado pela fórmula:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot [n - (p-1)]}_{p \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Em particular, se  $p = 1$ , é fácil ver que  $A_{n,1} = n$ . Além disso, de acordo com a definição de arranjo acima temos necessariamente  $1 \leq p \leq n$ .

#### Exemplo 1.

Em um baralho com 52 cartas, cada naipe possui 13 cartas. Deseja-se saber quantas seqüências diferentes de 3 cartas podem ser formadas, ao se retirar sucessivamente e sem reposição, 3 cartas das 13 cartas do naipe de copas.

Como estamos restringindo nossa escolha ao conjunto das 13 cartas de copas, e realizaremos 3 retiradas sem reposição, cada carta retirada não retorna ao conjunto. Além disso, como as retiradas ocorrem em seqüência, a ordem das cartas importa. Essa situação caracteriza um arranjo simples, onde escolhemos  $p = 3$  elementos de um conjunto com  $n = 13$  elementos, sem repetição e com ordem relevante. Logo, o número que queremos é  $A_{13,3}$ , isto é:

$$A_{13,3} = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$$

Portanto, é possível formar 1.716 seqüências distintas de 3 cartas retiradas sucessivamente, sem reposição, exclusivamente a partir das cartas do naipe de copas.

**Exemplo 2.**

Quantas senhas de 3 dígitos podem ser formadas usando os números de 0 a 9, se os dígitos **não** podem se repetir e a ordem importa?

Temos um arranjo simples, sem repetição. onde  $n = 10$  é quantidade de números disponíveis e  $p = 3$  a quantidade de escolhas para os dígitos da senha. Assim,

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Isto é, existem 720 formas de criar uma senha com três dígitos com números diferentes.

Perceba que se no exemplo 2 incluíssem mais 3 caracteres (por exemplo #, \* e @) os cálculos seriam idênticos aos do exemplo 1, pois teria que escolher 3 dígitos entre 13 opções disponíveis.

**2.4.4 Arranjos com Repetição**

Um arranjo com repetição é uma sequência ordenada formada a partir de um conjunto de  $n$  elementos distintos, permitindo-se a repetição dos elementos, e escolhendo-se  $p$  posições. Ou seja, estamos interessados em saber de quantas maneiras podemos preencher  $p$  posições com elementos de um conjunto de  $n$  elementos, permitindo que o mesmo elemento seja usado mais de uma vez, e considerando a ordem importante (HAZZAN, 2013).

Pelo princípio fundamental da contagem a quantidade de arranjos com repetição é dada por:

$$A(R)_{n,p} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{p \text{ vezes}} = n^p.$$

**Exemplo 1.**

Suponha que temos 4 ases (um de cada naipe:  $A_{\spadesuit}$ ,  $A_{\clubsuit}$ ,  $A_{\heartsuit}$ ,  $A_{\diamondsuit}$ ). Queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos retirar três cartas em sequência, sendo que após cada retirada a carta é colocada de volta no conjunto antes da próxima escolha. Note Esse tipo de contagem caracteriza um arranjo com repetição, pois temos um conjunto de 4 elementos (os 4 ases), e queremos formar sequências ordenadas de 3 posições, com possibilidade de repetição. A fórmula para calcular o número total de arranjos com repetição é dada por  $A_{n,p} = n^p$ , onde  $n$  é o número de elementos disponíveis e  $p$  é o número de posições que queremos preencher. Aplicando essa fórmula ao problema, temos:

$$A(R)_{4,3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64.$$

Portanto, é possível formar 64 sequências diferentes de três ases, considerando a ordem e permitindo repetições. Veja alguns arranjos:  $A\heartsuit A\diamondsuit A\diamondsuit$ ,  $A\diamondsuit A\diamondsuit A\heartsuit$ ,  $A\clubsuit A\diamondsuit A\heartsuit$ ,  $A\clubsuit A\spadesuit A\clubsuit$ ,  $A\heartsuit A\diamondsuit A\clubsuit$ .

### Exemplo 2.

Quantas senhas de 3 dígitos podem ser formadas usando os números de 0 a 9, se os dígitos podem se repetir e a ordem importa?

Como os dígitos podem se repetir e a ordem em que eles aparecem importa (por exemplo, a senha 123 é diferente da 321), temos uma situação em que se aplica o conceito de arranjos com repetição. Nesse caso, temos 10 possibilidades para cada uma das três posições da senha: 10 opções para o primeiro dígito, 10 para o segundo e 10 para o terceiro. Logo,  $n = 10$  e  $p = 3$ . Portanto,

$$A(R)_{10,3} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000,$$

ou seja, existem mil senhas possíveis de três dígitos com repetição de números permitida.

## 2.4.5 Permutação

Uma permutação é um tipo específico de arranjo no qual todos os elementos de um conjunto são dispostos em todas as ordens possíveis, sem repetição. Ou seja, trata-se de uma reorganização completa dos elementos de um conjunto, em que a ordem dos elementos importa.

Dado um conjunto com  $n$  elementos distintos, uma permutação consiste em organizar esses  $n$  elementos de todas as maneiras possíveis. O número total de permutações de  $n$  elementos, usando princípio fundamental da contagem, é dado por:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

### Exemplo 1.

Um exemplo clássico, presente em praticamente todos os livros de Análise Combinatória, é o problema da organização de uma fila com quatro pessoas. Naturalmente, poderíamos utilizar PFC para resolver esse problema, fazendo escolhas sucessivas: primeiro escolhemos uma pessoa para a primeira posição da fila (com 4 opções), depois uma para a segunda (com 3 opções restantes), e assim por diante. No entanto, basta observar que o que estamos fazendo, na prática, é uma permutação de 4 elementos distintos. Logo, para resolver esse tipo de problema, basta aplicar a fórmula da permutação simples, ou seja, calcular o fatorial do número total de elementos envolvidos. Assim, o número total de formas de organizar as quatro pessoas em fila é:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Exemplo 2.**

Considere que temos 5 cartas diferentes sobre a mesa:  $A \spadesuit$ ,  $2 \clubsuit$ ,  $3 \heartsuit$ ,  $4 \spadesuit$  e  $5 \diamondsuit$ . Desejamos saber de quantas maneiras distintas podemos organizar todas essas 5 cartas em uma linha, levando em conta a **ordem das cartas**.

Como estamos utilizando **todos os elementos disponíveis** e a **ordem importa**, trata-se de um caso clássico de **permutação simples**. Neste caso, temos  $n = 5$ , logo:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, é possível organizar essas 5 cartas de **120 maneiras diferentes**, considerando a ordem em que são dispostas. Cada nova sequência representa uma permutação distinta. Esse tipo de situação é comum em jogos de cartas, quando se analisa o número total de distribuições possíveis com todas as cartas distintas em posições diferentes.

**2.4.6 Permutações com Elementos Repetidos**

A **permutação com repetição** ocorre quando desejamos contar o número de formas diferentes de organizar todos os elementos de um conjunto, mas alguns desses elementos se repetem. Nesse caso, como certas posições são ocupadas por elementos indistinguíveis, a quantidade total de permutações é menor do que no caso de permutação simples.

Se temos um total de  $n$  elementos, entre os quais:

- $\alpha$  elementos são iguais entre si (de um primeiro tipo),
- $\beta$  elementos são iguais entre si (de um segundo tipo),
- $\gamma$  elementos são iguais entre si (de um terceiro tipo),
- e assim por diante,

então o número total de **permutações com repetição** é dado por:

$$P = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! \cdots}$$

Essa fórmula ajusta o total de permutações possíveis dividindo pela quantidade de elementos que contamos a mais, uma vez que permutar elementos idênticos entre si não gera uma nova configuração distinta.

**Exemplo**

Considere a palavra “**COCO**”, que possui 4 letras, sendo que a letra C aparece 2 vezes e a letra O também aparece 2 vezes. A contagem correta das permutações leva em conta que há repetições. Aplicando a fórmula:

$$P_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Portanto, existem 6 maneiras distintas de organizar as letras da palavra “COCO”. São elas: CCOO, COOC, COCO, OCCC, OCCO, OCOC.

### 2.4.7 Combinações

Em Análise Combinatória, uma **combinação** é uma seleção de elementos feita a partir de um conjunto, **sem levar em conta a ordem** e **sem repetição**. Ou seja, diferentemente do arranjo, aqui a ordem dos elementos escolhidos não altera o resultado. Por exemplo, os subconjuntos  $\{A, B, C\}$  e  $\{C, B, A\}$  são considerados iguais.

Dado um conjunto com  $n$  elementos distintos, o número de maneiras de escolher  $p$  elementos sem repetição e sem considerar a ordem é chamado de **combinação simples**, representado por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

#### Demonstração.

Sabemos que o número total de **arranjos simples**, que consideram a ordem, é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Esse valor representa todas as formas de selecionar  $p$  elementos e organizá-los em ordem. No entanto, como na combinação a ordem não importa, estamos contando várias vezes a mesma seleção.

Cada grupo de  $p$  elementos pode ser permutado de  $p!$  maneiras diferentes. Assim, para obter o número de combinações, dividimos o total de arranjos pelo número de permutações possíveis entre os  $p$  elementos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Portanto, a fórmula final da combinação é:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Exemplo:** Quantas mãos de 5 cartas posso formar com 52 cartas?

Para determinar quantas mãos de 5 cartas podem ser formadas a partir de um baralho padrão com 52 cartas, é necessário observar que estamos lidando com uma situação em que as cartas são escolhidas **sem repetição** e em que a **ordem das cartas não**

**importa.** Em jogos como o poker, por exemplo, o que importa é o conjunto de 5 cartas, independentemente da ordem em que são distribuídas.

Trata-se, portanto, de um problema de **combinação simples**, já que queremos apenas saber de quantas maneiras é possível selecionar 5 cartas distintas entre as 52 disponíveis.

Substituindo  $n = 52$  e  $p = 5$ , temos:

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot (52 - 5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!}$$

Para simplificar o cálculo, usamos apenas os cinco primeiros fatores do 52 fatorial:

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{311875200}{120} = 2.598.960$$

Portanto, é possível formar exatamente **2.598.960 mãos diferentes de 5 cartas** a partir de um baralho com 52 cartas, quando não se considera a ordem das cartas. Esse número representa o total de combinações possíveis e é amplamente utilizado na análise de probabilidades em jogos de cartas como o poker.

## 2.5 Probabilidade e suas propriedades

A probabilidade é o ramo da matemática que estuda a chance de ocorrência de um evento. Ela permite prever, de forma quantitativa, o quão provável é que algo aconteça em situações que envolvem aleatoriedade ou incerteza. Para compreender adequadamente o conceito de probabilidade, é fundamental apresentar previamente as definições de *espaço amostral* e *evento*, pois ambos estão diretamente relacionados aos experimentos que se deseja modelar, em especial aos *experimentos aleatórios*, nos quais o resultado não pode ser previsto com certeza. Esses elementos fornecem a estrutura básica necessária para a formalização matemática da teoria da probabilidade.

### 2.5.1 Experimento Aleatório

Um **experimento aleatório** é aquele cujo resultado não pode ser previsto com certeza, mesmo que o experimento seja repetido nas mesmas condições.

**Exemplos:** Lançamento de um dado, tirar uma carta de um baralho, observar o resultado de uma rodada de poker e medir o tempo até um equipamento quebrar.

### 2.5.2 Espaço amostral e eventos

O **espaço amostral**, denotado por  $\Omega$ , é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Cada elemento  $\omega \in \Omega$  representa um resultado elementar, e

a partir desse conjunto são definidos os eventos e as probabilidades associadas. A natureza do experimento determina a estrutura matemática apropriada para o espaço amostral.

Dizemos que um espaço amostral é **enumerável** quando seus elementos podem ser listados como uma sequência finita ou infinita,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\},$$

isto é, quando existe uma bijeção entre  $\Omega$  e um subconjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ . Exemplos incluem o lançamento de um dado, o lançamento de uma moeda ou a contagem do número de chamadas recebidas em uma central telefônica. Por outro lado, um espaço amostral é dito **não enumerável** quando não pode ser colocado nessa forma sequencial, apresentando a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais. É o caso, por exemplo, da escolha de um ponto em um intervalo  $[0, 1]$ , do tempo contínuo até a falha de uma máquina ou da posição em que um dardo atinge um alvo circular.

Do ponto de vista estrutural, um espaço amostral pode ser classificado como **discreto** ou **contínuo**. Um espaço amostral é **discreto** quando seus elementos são isolados e permitem contagem, ainda que infinita; em termos matemáticos, isso implica que todos os espaços discretos são enumeráveis. Já um espaço amostral **contínuo** é aquele que contém intervalos de números reais ou regiões do plano ou do espaço, impossibilitando a contagem de seus elementos, motivo pelo qual todo espaço contínuo é não enumerável.

**Exemplo (Enumerável):** Em um lançamento de um dado de 6 faces o espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e um possível evento  $E$  é sair um número par cujo conjunto  $E = \{2, 4, 6\}$  o representa.

**Exemplo (Não Enumerável):** No experimento de lançar um dardo sobre um alvo circular, cada resultado possível corresponde ao ponto exato em que o dardo atinge o alvo. Representando o alvo como um disco de raio  $R$  no plano cartesiano e centrado na origem, o espaço amostral é dado por todos os pontos  $(x, y)$  que satisfazem  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Esse conjunto contém infinitos pontos e não pode ser enumerado, possuindo a mesma cardinalidade dos números reais. Assim, trata-se de um exemplo de espaço amostral contínuo e não enumerável.

### 2.5.3 Definição de Probabilidade

Seja  $\Omega$  o espaço amostral e  $A$  o conjunto formado por todos os subconjuntos de  $\Omega$ , incluindo o evento impossível  $\emptyset$  e o evento certo  $\Omega$ . Então podemos definir **probabilidade** como uma função que a cada evento associa um número (chamado de probabilidade do evento) no intervalo  $[0, 1]$ , isto é,

$$P : A \rightarrow [0, 1]$$

em que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- 1)  $P(\Omega) = 1$ ;

2) Se  $A_1, A_2, \dots \in A$  são dois a dois disjuntos, então,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Importante :** O domínio da função probabilidade é o conjunto  $A$  e não apenas o conjunto  $\Omega$ , o que significa dizer que a probabilidade mede todos os possíveis eventos e não apenas os resultados do experimento. Além disso, o terno  $\Omega, A, P$  é chamado de **Espaço de Probabilidade**.

### Exemplo.

Ao lançarmos um dado comum de seis faces numeradas de 1 a 6, estamos diante de um experimento aleatório com um espaço amostral formado pelos elementos  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Supondo que o dado seja equilibrado, cada uma dessas seis possibilidades tem a mesma chance  $p$  de ocorrer, ou seja, usando as propriedades da definição, a probabilidade de qualquer número específico sair é dado por

$$1 = P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup P(\{4\} \cup \{5\} \cup \{6\})) =$$

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = p + p + p + p + p + p = 6p$$

Logo,

$$p = \frac{1}{6}.$$

Suponhamos agora que desejamos calcular a probabilidade de ocorrência de um número ímpar nesse lançamento. Os números ímpares no intervalo de 1 a 6 são 1, 3 e 5, e cada um desses resultados é um evento elementar com probabilidade  $\frac{1}{6}$ .

Como esses eventos são mutuamente exclusivos, isto é, a ocorrência de um exclui a ocorrência dos outros em um único lançamento, podemos aplicar a regra da adição de probabilidades. Assim, a probabilidade de ocorrer qualquer um dos três números ímpares é dada pela soma das probabilidades de cada evento elementar:

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Portanto, concluímos que a probabilidade de sair um número ímpar no lançamento de um dado é  $\frac{1}{2}$  (PEREIRA; CAMPOS, 2012).

## 2.5.4 Propriedades da probabilidade

Seja  $\Omega$  o espaço amostral e  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $\Omega$ .

1)  $P(\emptyset) = 0$ ;

- 2) Se  $A \subset B$ , então,  $P(A) \leq P(B)$ ;
- 3)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ , em que  $A^c$  denota o complementar do conjunto  $A$ , isto é, o conjunto formado por todos os elementos de  $\Omega$  que não pertence ao conjunto  $A$ .
- 4)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como o público-alvo deste material é composto por estudantes do Ensino Médio, podemos adotar a definição clássica de probabilidade, compreendida como o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Essa abordagem é válida quando o espaço amostral possui uma quantidade finita de elementos, como por exemplo

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

e, além disso, quando todos os eventos elementares tiverem a mesma chance de ocorrer. Em outras palavras, se

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \dots = P(\{a_n\}),$$

então podemos aplicar essa definição com segurança.

A justificativa é supor que cada evento elementar tem a mesma probabilidade, que chamaremos de  $q$ , temos que a soma das probabilidades de todos os eventos elementares deve ser igual a 1. Ou seja:

$$\begin{aligned} 1 = P(S) &= P(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}) = \\ &= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_n\}). \end{aligned}$$

Como cada uma dessas probabilidades é igual a  $q$ , temos:

$$1 = nq \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{n}.$$

Agora, considere um evento  $A$ , que é um subconjunto de  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Suponhamos que  $A$  possua  $p \leq n$  elementos. De modo geral, podemos representar esse conjunto como  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ , pois a ordem dos elementos não altera o cálculo da probabilidade.

Então, a probabilidade do evento  $A$  é dada por:

$$P(A) = P(\{a_1, a_2, \dots, a_p\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_p\}).$$

Como os eventos são disjuntos (isto é,  $a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$ ), aplicamos a definição de probabilidade e usamos a aditividade da medida, resultando em:

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_p\}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{p \text{ vezes}} = \frac{p}{n}.$$

Logo, concluímos que a probabilidade de um evento  $A$  é o quociente entre o número de casos favoráveis (elementos de  $A$ ) e o número total de casos possíveis (elementos de  $\Omega$ ):

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

### 2.5.5 Eventos independentes e condicionais

**Eventos Independentes:** Dois eventos são independentes se a ocorrência de um não afeta a do outro.

**Probabilidade Condicional:**

Seja  $\Omega$  um espaço amostral e consideremos dois eventos,  $A$  e  $B$ . Com o símbolo  $P(A|B)$  indicamos a probabilidade do evento  $A$ , dado que o evento  $B$  ocorreu, isto é,  $P(A|B)$  é a probabilidade condicional do evento  $A$ , uma vez que  $B$  tenha ocorrido. Quando calculamos  $P(A|B)$ , tudo se passa como se  $B$  fosse o novo espaço amostral “reduzido” dentro do qual queremos calcular a probabilidade de  $A$  e é dado por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que  $B$  deve ser um evento possível, ou seja,  $P(B) > 0$ . Desse modo, faz sentido definirmos  $P(A|B) = 0$  se  $P(B) = 0$ , pois teria que acontecer algo impossível para depois  $A$  acontecer.

**Exemplo.**

Considere um baralho padrão com 52 cartas. Suponha que uma carta seja retirada, *sem reposição*, e que ela seja um ás. Queremos saber a probabilidade de que a **segunda carta também seja um ás**, dado esse conhecimento prévio.

Definimos:

- $A$ : a segunda carta é um ás.
- $B$ : a primeira carta é um ás.

Sabemos que:

$$P(B) = \frac{4}{52}, \quad \text{pois há 4 ases no baralho.}$$

$P(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$ , pois após sair um ás, restam 3 ases entre 51 cartas

Aplicando a fórmula:

$$P(A | B) = \frac{\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}}{\frac{4}{52}} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

Portanto, dado que a primeira carta foi um ás, a probabilidade condicional de que a segunda também seja um ás é  $\frac{1}{17}$ . Esse raciocínio é fundamental no poker, onde a informação revelada influencia diretamente as probabilidades dos eventos seguintes.

## 2.5.6 Esperança Matemática

Antes de falar em esperança, é necessário tratar das variáveis aleatórias, em particular das variáveis simples ou discretas, que assumem um número finito ou enumerável de valores. A esperança matemática, também chamada de valor esperado, é um conceito fundamental da Teoria da Probabilidade.

Ela representa a média ponderada dos valores possíveis de uma variável aleatória, levando em conta as probabilidades associadas a cada resultado. Formalmente podemos definir da seguinte forma:

### Variável aleatória

Uma variável aleatória  $X$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, A, P)$  é uma função real definida no espaço  $\Omega$  tal que o conjunto  $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  é evento aleatório para todo  $x \in \mathbb{R}$

Dizemos que  $X$  é uma **variável aleatória discreta** se o conjunto dos seus valores possíveis, denotado por  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ , for finito ou enumerável (ROSS, 2014).

### Valor esperado

Ainda pensando no público-alvo e na finalidade, que é a aplicação em situações com possibilidades finitas, seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$  com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , o valor esperado de  $X$  é definido como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i.$$

### Demonstração.

Considere um experimento aleatório com espaço amostral finito  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , cujos resultados possuem probabilidades  $\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = p_j$ . Seja  $X$  uma variável aleatória dis-

creta que assume os valores distintos  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Para cada  $x_i$ , definimos o conjunto

$$A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}.$$

Então,

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = \sum_{i=1}^k \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) = \sum_{i=1}^k \sum_{\omega \in A_i} x_i = \sum_{i=1}^k x_i |A_i|.$$

Como  $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\omega \in A_i} p_\omega$ , segue que a média ponderada dos valores da variável aleatória é

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{P}(X = x_i),$$

o que demonstra a fórmula geral do valor esperado para variáveis discretas.

### Exemplo.

Considere o lançamento de um dado honesto de seis faces. Cada face está associada a um prêmio em reais, conforme a tabela 2.2:

Tabela 2.2: Prêmio por face do dado.

Face do dado	Prêmio (R\$)
1	0,00
2	1,00
3	1,00
4	2,00
5	5,00
6	10,00

Como o dado é equilibrado, a probabilidade de cada face é  $\frac{1}{6}$ . O valor esperado  $E$  é calculado somando-se os produtos de cada valor de prêmio por sua respectiva probabilidade:

$$E = \frac{1}{6}(0) + \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(5) + \frac{1}{6}(10)$$

$$E = \frac{1}{6}(0 + 1 + 1 + 2 + 5 + 10) = \frac{19}{6} \approx 3,17$$

O valor esperado de R\$ 3,17 representa o **ganho médio por jogada**, caso o experimento seja repetido muitas vezes. Ele não indica o prêmio de uma jogada específica, mas sim a média ponderada dos resultados possíveis. Essa análise é essencial em situações que envolvem sorte, estratégia ou tomada de decisão com base em riscos calculados.

## 2.5.7 Propriedades do Valor Esperado

Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias discretas com valor esperado definido, e  $a, b \in \mathbb{R}$  constantes reais. As seguintes propriedades são válidas:

1. **Constante:**

$$E(c) = c$$

Se  $c$  é uma constante, então sua esperança é a própria constante.

2. **Soma de variáveis aleatórias:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Essa propriedade vale independentemente de  $X$  e  $Y$  serem ou não independentes.

3. **Multiplicação por constante:**

$$E(aX) = a \cdot E(X)$$

Caso particular da propriedade de linearidade, onde apenas multiplica-se a variável por uma constante.

4. **Linearidade:**

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

Essa é uma das propriedades mais importantes e afirma que o valor esperado de uma combinação linear de uma variável aleatória também é uma combinação linear dos valores esperados.

O valor esperado constitui um parâmetro central na avaliação de decisões sob incerteza, por sintetizar, em uma única grandeza numérica, os possíveis desfechos de uma ação, ponderados pelas respectivas probabilidades de ocorrência. A análise baseada no valor esperado desloca o foco da observação de resultados isolados para o comportamento estatístico de longo prazo, permitindo distinguir decisões favoráveis dos desfavoráveis, mesmo quando resultados individuais não refletem imediatamente essa tendência. Dessa forma, a noção de correção decisória passa a estar associada não ao desfecho observado em uma instância específica, mas ao desempenho médio que a escolha produziria quando repetida sob condições semelhantes.

Além de sua importância conceitual, o valor esperado estabelece uma base quantitativa para o planejamento e a gestão do risco em diferentes áreas, como economia, engenharia, ciências atuariais e processos de tomada de decisão. Ao integrar probabilidade, impacto e custo em um único cálculo, o valor esperado possibilita comparações objetivas entre alternativas e favorece a seleção daquelas que maximizam retorno ou minimizam prejuízo esperado, dependendo do contexto analisado. Assim, mais do que um

instrumento de cálculo, o valor esperado constitui um critério racional de escolha, orientado por evidências estatísticas e não por impressões subjetivas ou variações aleatórias dos resultados.

### 3 DISCIPLINA ELETIVA DE XADREZ SOB A PERSPECTIVA DA MATEMÁTICA

Ensinar matemática no Ensino Médio nem sempre é uma tarefa fácil. Muitos alunos têm dificuldade em ver sentido na matéria e acham que os conteúdos são muito distantes da realidade. Por isso, é importante buscar formas diferentes de ensinar, que tornem as aulas mais interessantes e ajudem os estudantes a desenvolver o raciocínio lógico de forma prática e divertida.

O xadrez é um jogo que pode contribuir significativamente para esse processo. Leciono essa disciplina há seis semestres, em consonância com as mudanças do Ensino Médio implementadas em 2017 e com o objetivo de complementar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em um primeiro momento, o trabalho concentra-se apenas nas regras básicas do jogo e, no último semestre, passa a aprofundar os conhecimentos matemáticos de forma interdisciplinar. Isso ocorre porque o xadrez não se limita à Matemática, mas também dialoga com disciplinas como História, Filosofia, Educação Física e Sociologia, desenvolvendo habilidades fundamentais tanto para a Matemática quanto para essas outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2018).

O uso do jogo de xadrez como ferramenta pedagógica nas aulas de Matemática, especialmente no ensino básico, é um tema amplamente explorado por pesquisas que buscam metodologias mais eficazes e envolventes para a aprendizagem. O xadrez, por sua natureza estratégica e estrutural, se alinha a diversos conceitos lógico-matemáticos, sendo considerado um **artefato mediador** poderoso para o desenvolvimento cognitivo como já destacava Piaget em sua obra.

Sob um enfoque cognitivo, Teigset (2023) identificou correlação positiva entre jogar xadrez e resolver tarefas matemáticas, especialmente em habilidades de reconhecimento de padrões, raciocínio lógico e controle do tempo. O autor aponta que “as habilidades transferíveis entre o xadrez e a matemática se manifestam de forma mais significativa em situações que exigem análise combinatória e percepção espacial”.

No caso específico da matemática, o xadrez permite explorar conteúdos como coordenadas no plano cartesiano, simetria, lógica, probabilidade, análise combinatória e até geometria, favorecendo a aprendizagem por meio de situações lúdicas e desafiadoras.

A literatura demonstra que o xadrez é mais do que um jogo: é um instrumento cognitivo e pedagógico que dialoga diretamente com os fundamentos da matemática escolar. Seu uso planejado em sala de aula promove o raciocínio lógico, a abstração e a capacidade

de resolver problemas, competências essenciais ao desenvolvimento matemático no ensino básico. Além disso, a ludicidade inerente ao jogo contribui para tornar o aprendizado mais prazeroso e significativo, transformando o espaço escolar em um ambiente de investigação e criatividade.

Neste capítulo, serão apresentados todos os detalhes dessa disciplina: como ela foi pensada, o que foi ensinado em cada aula, quais foram as atividades e avaliações, quais recursos foram utilizados.

### 3.1 A estrutura da disciplina

Ao planejar um itinerário formativo como este, é essencial pensar na construção de uma base sólida e no nivelamento dos estudantes, de modo que as aulas sejam estimulantes para todos os participantes. Nas primeiras aulas, é importante seguir os protocolos adotados pelos jogadores de xadrez, como a postura diante do tabuleiro, o cumprimento entre adversários e o respeito às regras. Esses elementos demonstram seriedade e transmitem o valor do respeito ao jogo e ao oponente — princípios fundamentais para a comunidade enxadrística.

Ainda no primeiro momento, o curso aborda a história do xadrez e suas regras básicas, permitindo que todos os alunos se familiarizem com os elementos essenciais do jogo. Naturalmente, esses conteúdos são apresentados sempre em diálogo com a matemática. Utiliza-se o próprio tabuleiro para reforçar o conceito de coordenadas cartesianas, além de explorar os movimentos das peças como recurso para trabalhar noções de geometria. As jogadas iniciais, conhecidas como aberturas, permitem introduzir métodos de contagem, bem como os conceitos de simetria e espelhamento, especialmente ao se observar e comparar as decisões estratégicas de cada enxadrista.

Nas aulas seguintes, são introduzidos o pensamento estratégico para iniciantes e pequenos problemas práticos, com o objetivo de verificar se os estudantes realmente compreenderam os fundamentos do jogo.

Nas etapas finais da disciplina, os alunos são desafiados com atividades mais complexas, incluindo torneios rápidos que permitem avaliar o desempenho individual. A partir desses resultados, é possível organizar competições mais equilibradas e promover uma vivência mais justa e motivadora para todos.

Ainda na etapa final, é possível realizar uma grande apresentação em que os alunos se fantasiem representando cada peça do xadrez, enquanto dois enxadristas conduzem os movimentos sobre um tabuleiro ampliado montado no chão. Como alternativa, pode-se promover um torneio aberto, no qual os estudantes da disciplina desafiam colegas de outras turmas, colocando em prática os conhecimentos adquiridos ao longo do curso.

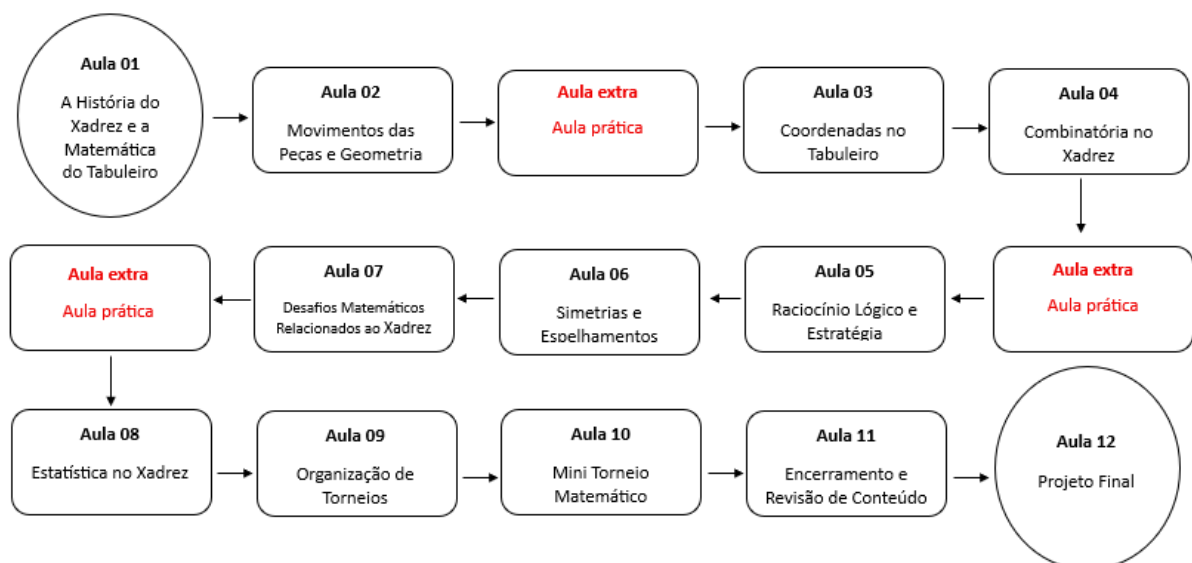
Dessa forma, estrutura-se o plano de ensino da disciplina eletiva, respeitando o ritmo de aprendizagem dos estudantes e valorizando tanto os aspectos matemáticos quanto os valores formativos que o xadrez é capaz de desenvolver. A seguir, apresenta-se um

quadro com a estrutura do curso e, na figura, um esquema de distribuição das aulas, incluindo a sugestão de inserir aulas práticas após as aulas 2, 4 e 7, de modo que os alunos possam aprimorar seus conhecimentos e relacionar a teoria matemática à prática do jogo de xadrez.

**Quadro 2:** Aulas da disciplina Xadrez para Iniciantes.

Aula	Conteúdo
01	A História do Xadrez e a Matemática do Tabuleiro
02	Movimentos das Peças e Geometria
03	Coordenadas no Tabuleiro
04	Combinatória no Xadrez
05	Raciocínio Lógico e Estratégia
06	Simetrias e Espelhamentos
07	Desafios matemáticos relacionados ao xadrez
08	Estatísticas no Xadrez
09	Organização de Torneios e Combinatória Aplicada
10	Mini Torneio Matemático
11	Revisão Geral e Consolidação de Conteúdos
12	Projeto Final

Figura 3.1: Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas



Fonte: Autoria própria.

## 3.2 A estrutura das aulas

A disciplina é voltada para o Ensino Médio e é uma disciplina eletiva ofertada semestralmente, distribuídas em 12 encontros com duas aulas de 50 minutos cada. Está inserida no Eixo de Matemática e suas Tecnologias, com ênfase nos campos do pensamento lógico e algébrico, espaço e forma, e probabilidade e estatística. Estão listadas 12 aulas porém o semestre pode comportar mais aulas, no entanto pode ser que haja a necessidade de repetir uma aula quando não for possível desenvolver toda aula em 100 minutos. Além disso, pode ser necessário intercalar aulas práticas de xadrez onde os alunos jogam e aplicam seus conhecimentos adquiridos nas aulas teóricas.

O objetivo geral da disciplina é utilizar o jogo de xadrez como uma ferramenta didática capaz de potencializar o desenvolvimento do raciocínio lógico, da análise combinatória e da interpretação geométrica. Busca-se, com isso, promover uma aprendizagem significativa da Matemática, em que o estudante possa relacionar conceitos abstratos a situações práticas e lúdicas, aprimorando sua capacidade de resolver problemas, planejar estratégias e compreender padrões matemáticos presentes no jogo. A seguir, uma descrição da primeira aula e a matemática que pode ser abordada nas aulas seguintes que está disponível no **Produto Educacional** vinculado a esse trabalho.

### Aula 1: A História do Xadrez e a Matemática do Tabuleiro

Esta aula tem como finalidade introduzir o xadrez como ferramenta pedagógica e estabelecer as primeiras conexões entre o jogo e a Matemática. O foco não é explorar a história completa do xadrez, mas utilizá-la como ponto de partida para mostrar que o desenvolvimento do jogo, desde suas formas antigas até o modelo moderno, fortaleceu sua relação com o raciocínio lógico, estratégico e combinatório.

Ao apresentar o tabuleiro, recomenda-se enfatizar que sua estrutura não é aleatória: trata-se de uma matriz  $8 \times 8$ , organizada segundo padrões bem definidos, cuja alternância de cores segue um ritmo periódico. Desde o início do curso, é importante que os estudantes compreendam que essa padronização possibilita análises matemáticas, favorecendo a investigação de simetrias, contagens, coordenadas e sequências de movimentos. Durante o diálogo com os alunos, o professor pode conduzir questionamentos que estimulem a formulação de hipóteses sobre como o xadrez pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas, registrando no quadro ideias espontâneas como “contagem de casas”, “sequência de movimentos”, “estratégias”, “padrões” e “raciocínio lógico”.

Para consolidar o conteúdo, sugere-se uma atividade de fixação em que cada estudante escreva, individualmente ou em dupla, uma resposta breve à pergunta: “*Quais aspectos do xadrez podem estar relacionados com a Matemática e por quê?*” Essa produção não deve ser utilizada como instrumento avaliativo de acerto ou erro, mas como diagnóstico inicial do pensamento lógico dos alunos e da forma como cada um percebe a relação entre o jogo e os conceitos matemáticos que serão aprofundados ao longo do curso.

Caso se deseje utilizar esta aula para fins avaliativos, é possível aplicar uma rubrica simples contemplando critérios como participação, capacidade de argumentação e clareza na articulação entre o xadrez e a Matemática. No entanto, essa avaliação é opcional; o objetivo principal da aula é despertar o interesse e construir a base conceitual que permitirá o avanço para os conteúdos posteriores, nos quais cada elemento do tabuleiro e das regras do jogo será associado explicitamente a um conceito matemático específico.

## Matemática e xadrez das próximas aulas

A utilização do xadrez como eixo estruturador de uma disciplina eletiva de Matemática apoia-se no fato de que o jogo é, essencialmente, um sistema formal, composto por regras fixas, movimentos definidos e estrutura espacial rigorosa. Essa organização interna transforma o tabuleiro em um ambiente matematicamente privilegiado, onde é possível explorar, modelar e analisar conceitos de **Geometria, Álgebra, Análise Combinatória e Estatística**.

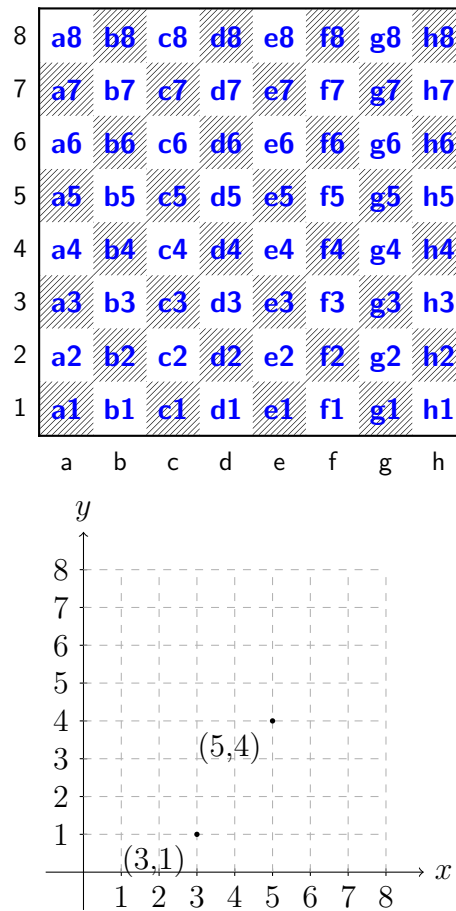
O xadrez opera como um modelo discreto: cada casa é um elemento de um conjunto finito, cada peça possui funções específicas, e cada jogada constitui uma transformação mensurável. Assim, o jogo se torna uma “linguagem concreta” para formular argumentos, justificar procedimentos, investigar padrões e estudar relações matemáticas complexas de maneira intuitiva e aplicada.

### Geometria

A dimensão geométrica do xadrez decorre diretamente da estrutura regular do tabuleiro e das trajetórias das peças. O tabuleiro, composto por 64 casas organizadas em uma malha quadriculada  $8 \times 8$ , constitui um modelo discreto do plano, permitindo que conceitos geométricos tradicionais sejam reinterpretados em um ambiente finito. A alternância de cores, o paralelismo entre linhas e colunas e as diagonais que atravessam o tabuleiro fornecem situações ricas para discutir simetrias, congruências, distâncias e transformações.

Do ponto de vista geométrico, o tabuleiro pode ser entendido como um conjunto de pontos  $(x, y)$ , com  $x, y \in \{1, \dots, 8\}$ . Esse modelo cartesiano permite interpretar cada casa como um ponto do plano discreto, facilitando a descrição de movimentos das peças por vetores. A alternância claro-escuro, por exemplo, pode ser explicada pela paridade: casas com  $x + y$  par são escuras, enquanto casas com  $x + y$  ímpar são claras. Essa caracterização, embora simples, é suficiente para demonstrar propriedades importantes, como a impossibilidade de o bispo mudar de cor ao longo do jogo.

Figura 3.2: Tabuleiro representado como plano cartesiano.



Fonte: Autoria própria.

Note que na figura 3.2 fazendo  $a = 1, b = 2, c = 3 \dots h = 8$ , percebe-se que a casa **c1** corresponde ao ponto  $(3, 1)$ . Como  $3 + 1 = 4$ , e 4 é par, a casa é **escura**. Já o ponto  $(5, 4)$  representa a casa **e4**. Como  $5 + 4 = 9$ , que é ímpar, essa casa é **clara**.

A torre e o bispo são as peças cujos movimentos melhor ilustram transformações geométricas de natureza distinta. A **torre** desloca-se exclusivamente ao longo de linhas horizontais ou verticais. Em coordenadas cartesianas, isso significa que, ao ir de  $(x_1, y_1)$  para  $(x_2, y_2)$ , o movimento é válido se, e somente se,  $x_1 = x_2$  ou  $y_1 = y_2$ . Trata-se, portanto, de um deslocamento ao longo de uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Esse comportamento é compatível com a chamada *distância Manhattan*, definida por

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

que representa o número mínimo de movimentos da torre, desconsiderando obstruções. A geometria desse deslocamento é inteiramente regida pelos alinhamentos do tabuleiro.

O **bispo**, por sua vez, desloca-se ao longo das diagonais e, portanto, suas trajetórias correspondem a retas de inclinação  $+1$  ou  $-1$ . Se o bispo parte de  $(x_0, y_0)$ , qualquer casa

atingível  $(x, y)$  satisfaz a equação

$$y - y_0 = \pm(x - x_0).$$

Uma consequência imediata é a manutenção da paridade de  $x + y$  para qualquer deslocamento diagonal, temos

$$(x \pm n) + (y \pm n) = (x + y) \pm 2n,$$

onde  $n$  é a quantidade de casas, o que preserva a paridade. Segue daí a propriedade clássica: um bispo sempre permanece em casas da mesma cor. Essa demonstração é frequentemente utilizada em sala de aula como exemplo de como um raciocínio geométrico simples resolve uma questão estratégica.

As demais peças — dama, rei e cavalo — também podem ser interpretadas geometricamente, embora sem necessidade de aprofundamento minucioso na eletiva. A dama combina os movimentos da torre e do bispo e, portanto, desloca-se ao longo de qualquer reta horizontal, vertical ou diagonal. O rei pode ser entendido como uma peça que se movimenta um único passo em qualquer direção possível, e seu raio de ação está associado à *distância de Chebyshev*, dada por

$$d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Já o cavalo, cuja movimentação forma a conhecida estrutura em “L”, representa um deslocamento que não segue as direções principais do tabuleiro. Seu salto, definido por variações de  $(\pm 1, \pm 2)$  ou  $(\pm 2, \pm 1)$ , permite discutir brevemente transformações que não são colineares nem diagonais, oferecendo um contraste com as peças anteriores. Um fato notável, facilmente demonstrável pela análise da soma das coordenadas, é que o cavalo alterna a cor da casa a cada movimento.

Além das trajetórias individuais, o tabuleiro como objeto geométrico apresenta simetrias importantes. Entre elas destacam-se a reflexão horizontal, a reflexão vertical e a rotação de  $180^\circ$ . Todas essas transformações preservam a estrutura do tabuleiro, embora nenhuma rotação de  $90^\circ$  o preserve, uma vez que inverteria a coloração das casas. A análise dessas simetrias possibilita introduzir os estudantes ao conceito de invariantes: propriedades do tabuleiro ou das peças que permanecem constantes após certas transformações.

Por fim, muitos problemas tradicionais de xadrez, como o número de quadrados existentes no tabuleiro, o percurso mínimo entre duas casas ou desafios como o passeio do cavalo, são essencialmente problemas geométricos formulados em um domínio discreto. Eles permitem que o aluno investigue relações espaciais, elabore argumentos e generalize padrões. A geometria do xadrez, portanto, transcende a mera compreensão dos movimentos, tornando-se um meio para interpretar, modelar e justificar fenômenos matemáticos dentro de um sistema bem definido.

## Álgebra

A presença de Álgebra no estudo do xadrez decorre principalmente da possibilidade de representar o tabuleiro por um sistema cartesiano discreto e de descrever movimentos e relações entre peças por meio de expressões e condições algébricas. Ao converter a notação algébrica convencional (a1–h8) em pares ordenados  $(x, y)$ , com  $x, y \in \{1, \dots, 8\}$ , obtém-se um ambiente em que trajetórias, alinhamentos e relações de ataque podem ser formalizados por equações simples e funções definidas em um domínio finito.

Essa correspondência geométrico-algébrica permite caracterizar movimentos recorrendo a igualdades entre coordenadas. Assim, um ataque da torre a uma peça situada em  $(x, y)$  ocorre exatamente quando  $x = x_0$  ou  $y = y_0$ , onde  $(x_0, y_0)$  é a posição da torre. De modo semelhante, embora a análise das diagonais já tenha sido tratada na seção de Geometria, aqui basta observar que o movimento do bispo corresponde às soluções da equação linear

$$y - y_0 = \pm(x - x_0),$$

o que integra o jogo às ideias fundamentais da geometria analítica. Essas representações funcionais simplificam a verificação de alinhamentos e permitem ao estudante formular critérios gerais para determinar ataques, defesas e bloqueios.

O rei e o cavalo, embora menos associados a funções lineares, também admitem descrições algébricas úteis. O movimento do rei pode ser formalizado pela condição

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = 1,$$

que caracteriza seu raio de ação imediato. Já o cavalo pode ser descrito como o conjunto das transformações discretas

$$(x, y) \mapsto (x \pm 1, y \pm 2), \quad (x, y) \mapsto (x \pm 2, y \pm 1),$$

permitindo discutir funções definidas por conjuntos de pares e deslocamentos não lineares.

Além dos movimentos, a Álgebra também se manifesta no estudo das condições lógicas presentes nas decisões de jogo. Situações estratégicas podem ser traduzidas em proposições do tipo “se–então”, como em

$$P \Rightarrow Q,$$

onde  $P$  representa um movimento possível e  $Q$  a consequência tática resultante. Conjunções e disjunções também surgem naturalmente, por exemplo, quando uma peça ataca duas casas simultaneamente ou quando um jogador precisa escolher entre alternativas defensivas. O uso desses conectivos possibilita explorar implicações, negações e equivalências, reforçando o vínculo entre raciocínio lógico e estrutura algébrica.

Por fim, expressões algébricas permitem analisar relações adicionais, como o cálculo

de pontos médios, a determinação de distâncias e a verificação de simetrias por meio de funções que preservam ou modificam coordenadas. Embora parte dessas ideias já tenha sido introduzida na seção de Geometria, aqui assume-se a perspectiva algébrica: a de que movimentações e posições podem ser tratadas como objetos submetidos a condições e igualdades formais, organizando o raciocínio matemático de modo preciso e conciso. Assim, a Álgebra no xadrez funciona como uma linguagem complementar, que sintetiza movimentações, relações estratégicas e padrões posicionais por meio de expressões que capturam a estrutura lógica do jogo.

### Análise Combinatória

A Análise Combinatória surge no xadrez de forma natural em problemas que envolvem contagem de posições, arranjos possíveis de peças e determinação de cenários estratégicos em tabuleiros finitos. Como o jogo opera em um conjunto discreto de 64 casas, diversas situações podem ser modeladas utilizando princípios de contagem, combinações, arranjos e contagem com restrições, tornando o tabuleiro um ambiente propício para a formalização desses conceitos.

Um dos exemplos mais elementares é a determinação do número de maneiras de escolher casas distintas para posicionar duas peças. Considerando o tabuleiro como um conjunto de 64 elementos, o número de pares de casas possíveis é dado pela combinação

$$\binom{64}{2} = 2016.$$

Esse valor pode ser refinado quando se impõem restrições relativas ao movimento das peças. Por exemplo, ao estudar o problema clássico de como posicionar duas torres de modo que não se atacam, remove-se da contagem todos os pares que pertencem à mesma linha ou coluna, produzindo uma quantidade significativamente menor de casos válidos. O tratamento dessas restrições fornece ao estudante um exemplo claro do uso do Princípio Fundamental da Contagem e da importância de identificar subconjuntos proibidos.

Problemas análogos aparecem quando se estudam peças com áreas de ataque mais localizadas, como o rei. Se duas casas são ditas adjacentes quando compartilham algum lado ou vértice, então a condição “dois reis não se atacam” equivale a excluir todos os pares de casas cuja distância de Chebyshev seja igual a 1. Assim, a contagem de posições permitidas torna-se um exercício que combina princípios básicos de combinatória com análises estruturais sobre o tabuleiro.

Outro problema clássico consiste em determinar quantos quadrados existem no tabuleiro além dos 64 iniciais. Observando que cada quadrado  $k \times k$  pode ocupar  $(9 - k)^2$  posições dentro de um tabuleiro  $8 \times 8$ , obtém-se a soma

$$\sum_{k=1}^8 (9 - k)^2 = \sum_{k=1}^8 k^2 = 204,$$

o que generaliza para o caso de um tabuleiro  $n \times n$  e permite explorar fórmulas fechadas para somas de quadrados.

Problemas envolvendo trajetórias, como o passeio do cavalo, introduzem os estudantes à contagem baseada em grafos, uma vez que cada casa pode ser vista como um vértice e cada movimento possível, como aresta. Ainda que não seja necessário aprofundar algoritmos sofisticados, compreender que a contagem de caminhos depende da estrutura de conectividade do tabuleiro amplia o entendimento de como regras de movimentação influenciam o total de possibilidades.

Por fim, a organização de torneios de xadrez escolares fornece outra aplicação direta da combinatória. Em um torneio no formato “todos contra todos”, o número de partidas necessárias entre  $n$  jogadores é dado por

$$\binom{n}{2},$$

o que demonstra como as mesmas técnicas utilizadas para contar posições no tabuleiro também se aplicam a situações reais de planejamento e logística.

Assim, a Análise Combinatória, aplicada ao xadrez, permite que o estudante explore contagens simples e com restrições, identifique padrões, formule generalizações e compreenda como estruturas discretas organizam o conjunto de possibilidades do jogo. Esses problemas, apesar de acessíveis, revelam a profundidade matemática envolvida na análise do tabuleiro e das interações entre peças.

## Estatística

A Estatística desempenha um papel relevante no estudo do xadrez ao permitir a análise de dados provenientes de partidas, torneios escolares e desempenhos individuais dos alunos. Como o jogo gera registros objetivos — vitórias, empates, derrotas, escolhas de abertura, tempo gasto por lance e frequência de movimentos específicos — torna-se possível organizar essas informações em tabelas e gráficos, extrair medidas e interpretar resultados de modo quantitativo. Esse processo aproxima o estudante da análise real de dados, fazendo da prática do xadrez um ambiente adequado para desenvolver noções básicas de estatística descritiva.

O ponto inicial consiste na coleta estruturada de dados. Durante as aulas práticas, cada aluno registra os resultados de suas partidas, permitindo a construção de tabelas de frequência. Se  $V$ ,  $E$  e  $D$  representam, respectivamente, o número de vitórias, empates e derrotas de um jogador em um conjunto de partidas, pode-se definir as frequências relativas por

$$f_V = \frac{V}{V + E + D}, \quad f_E = \frac{E}{V + E + D}, \quad f_D = \frac{D}{V + E + D}.$$

Essas proporções fornecem uma visão mais equilibrada da performance, independente-

mente do número total de jogos disputados.

Em algumas situações, a probabilidade também se torna objeto de estudo, especialmente quando se analisam padrões de resultados. Se um jogador, em determinado período, obteve  $V$  vitórias em  $N$  partidas, um modelo simplificado utiliza a estimativa

$$P(\text{vitória}) \approx \frac{V}{N},$$

considerando cada partida como um evento independente. Embora esse modelo não capture toda a complexidade do jogo, fornece uma introdução acessível às ideias de probabilidade empírica e inferência baseada em dados observados.

A análise estatística também permite comparar o desempenho de jogadores usando critérios padronizados. Por exemplo, ao longo da disciplina, é comum observar melhora gradual nas frequências de vitória ou na redução do número de erros táticos identificados. O acompanhamento desses indicadores ao longo das semanas fornece evidência quantitativa de aprendizagem, reforçando que o uso da estatística pode revelar padrões que não são imediatamente perceptíveis apenas pela observação qualitativa.

Por fim, a organização de torneios escolares oferece uma oportunidade natural para consolidar esses conceitos. A elaboração de tabelas classificatórias, o cálculo de porcentagens de aproveitamento e a comparação entre diferentes rodadas estimulam o aluno a interpretar dados numéricos de forma crítica. Assim, a Estatística no contexto do xadrez atua como ferramenta para descrever, comparar e compreender desempenhos, tornando-se parte essencial da abordagem pedagógica da disciplina eletiva.

A presença conjunta de Geometria, Álgebra, Análise Combinatória e Estatística no estudo do xadrez evidencia que o jogo funciona como um ambiente matemático integrado, no qual posições, movimentos e resultados constituem objetos formais passíveis de descrição, análise e interpretação rigorosas. A Geometria fornece a estrutura espacial que orienta trajetórias e simetrias; a Álgebra introduz coordenadas, equações e relações funcionais para descrever condições de ataque e decisões estratégicas; a Combinatória organiza o conjunto de possibilidades do tabuleiro por meio de contagens e restrições; e a Estatística permite interpretar dados de partidas reais, identificar padrões e discutir probabilidades empíricas. Assim, o xadrez, além de atividade lúdica, configura-se como um laboratório matemático que articula diferentes áreas do conhecimento, favorecendo o desenvolvimento de habilidades analíticas e argumentativas dos estudantes.

## 4 APRENDENDO PROBABILIDADE COM POKER

A disciplina eletiva intitulada Probabilidade na Mesa, foi desenvolvida para o contexto do ensino médio técnico. Ela busca integrar o ensino da Matemática ao universo estratégico e lúdico do jogo de cartas Texas Hold'em. A proposta parte da constatação de que muitos estudantes demonstram resistência ao estudo da Probabilidade em sua forma tradicional, muitas vezes desvinculada de contextos concretos e motivadores. Ao aproximar os conceitos matemáticos da realidade dos jogos de estratégia, especialmente o poker, a disciplina visa promover o raciocínio lógico-probabilístico de forma engajada, interdisciplinar e significativa.

### 4.1 A Estrutura da Disciplina

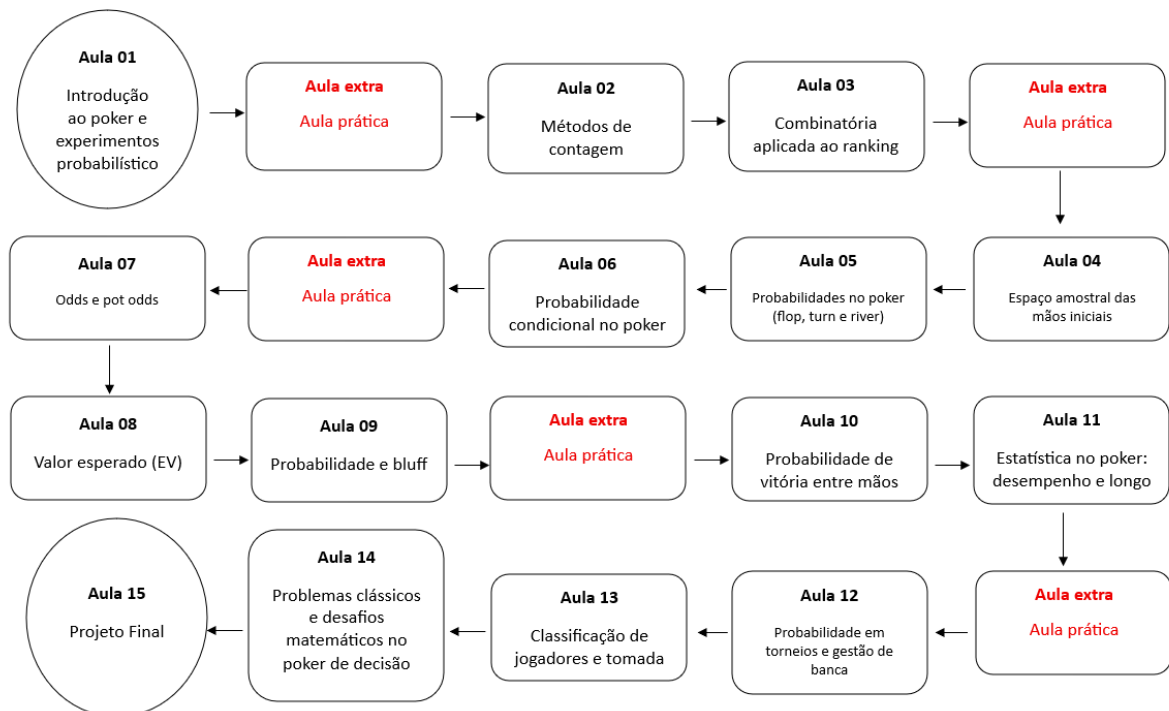
A ementa da disciplina contempla temas fundamentais da teoria das probabilidades, como espaço amostral, probabilidade clássica e condicional, análise combinatória, valor esperado, estatística descritiva e tomada de decisão baseada em dados. Esses conteúdos são trabalhados a partir de situações reais e simulações baseadas no poker, proporcionando aos estudantes desafios matemáticos contextualizados e aplicados. A metodologia combina dois eixos principais: o Ciclo de Aulas com Três Etapas — exploração, conceituação e aplicação — e a gamificação, por meio de torneios internos, desafios entre grupos e rankings simbólicos, com base no desempenho lógico e matemático dos participantes.

Durante as aulas, os estudantes utilizam tanto materiais físicos (como baralhos e fichas), quanto recursos digitais, como planilhas para o cálculo de probabilidades, simuladores online de mãos e apresentações visuais. Essa diversidade de recursos permite contemplar diferentes estilos de aprendizagem, promovendo a experimentação prática articulada à construção formal dos conceitos. A seguir uma tabela com a distribuição das aulas.

Quadro 3: Aulas da disciplina Probabilidade na Mesa.

Aula	Tema	Conteúdo	Atividade
1	Introdução ao Poker	Históriado jogo e regras do Texas Hold'em	Aula expositiva e aplicação das regras
2	Métodos de Contagem	Introdução a PFC, arranjos, permutação e combinações	Calcular a chance de receber par, trinca, dois pares
3	Combinatória aplicada	Calcular todas as possibilidades para o rank de mãos	Resolver exercícios com $C(n,k)$ aplicados ao poker
4	Espaço amostral	Mãos iniciais (preflop); cálculo do espaço amostral (52 cartas)	Listar e classificar tipos de mãos iniciais
5	Probabilidades no Poker	Probabilidade de acertar as combinações do rank de poker	Análisar a coerência entre o rank de mãos do poker
6	Probabilidade Condicional	Chances de completar jogadas entre flop-turn-river	Ex: qual a chance de completar um flush até o river?
7	Odds e Pot Odds	Cálculo de odds matemáticas e pot odds	Resolver situações reais de call ou fold
8	Valor Esperado (EV)	Cálculo do valor esperado de uma jogada	Comparar decisões com EV positivo ou negativo
9	Probabilidade e bluff	Análise de bluff com base em frequência e risco	Simulação de bluff com análise de EV
10	Probabilidade de vitória entre mãos	Comparar força de mãos usando simuladores e conceitos matemáticos	Ex: AK vs QQ – quem tem mais chance pré-flop?
11	Estatística no poker	Frequência, média, variância, longo prazo	Análise de histórico de mãos e gráficos
12	Probabilidades em torneios	Situação de torneios: ICM, decisões finais e gestão de banca	Mini simulação de bolha de torneio com cálculo de risco
13	Classificando jogadores	Jogar passivo ou agressivo, ver ouca ou muitas mãos	Verificar qual o melhor estilo para jogar e contra quem jogar com base em probabilidades
14	Problemas clássicos e desafios	Desafios matemáticos reais do poker	Problemas do tipo: quantas mãos vencem AA pré-flop?
15	Projeto Final: Análise de uma mão com matemática	Apresentação de trabalhos em grupo	Cada grupo analisa uma mão real e defende sua jogada com argumentos probabilísticos

Figura 4.1: Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas



Fonte: Autoria própria.

## 4.2 A Estrutura das Aulas

O cronograma é organizado em 15 aulas de 100 minutos, abordando desde a introdução ao jogo e aos fundamentos da probabilidade até a realização de um projeto final. Talvez, pode haver necessidade de repetir uma aula quando não for possível desenvolver todo o conteúdo previsto dentro dos 100 minutos. Além disso, poderá ser necessário incluir aulas práticas de poker, nas quais os alunos jogam e aplicam os conhecimentos adquiridos nas aulas teóricas.. Nesse projeto, os estudantes analisam uma mão real de poker e justificam suas decisões com base em fundamentos matemáticos e simulações, exercitando sua capacidade de interpretação e argumentação técnica.

A dinâmica da aula combina explicações curtas e objetivas com demonstrações práticas. Em um primeiro momento, o professor apresenta o conceito matemático central da aula; em seguida, os alunos trabalham exemplos orientados, calculando probabilidades, outs, pot odds e expectativas. Após essa etapa, realiza-se uma atividade prática controlada, na qual os estudantes jogam mãos simuladas e justificam matematicamente cada decisão.

Em momentos específicos do curso, geralmente após módulos teóricos mais densos, são realizadas sessões de jogo supervisionado. Nessa atividade, a turma é dividida em mesas menores, permitindo que os alunos apliquem imediatamente os conceitos estudados e consolidem a relação entre teoria matemática e tomada de decisão no poker.

A seguir, apresenta-se a descrição da primeira aula da disciplina eletiva. Nela

são , inicialmente, propostas dinâmicas que evidenciam o fator matemático envolvido na tomada de decisão, introduzindo de forma intuitiva conceitos de contagem, probabilidade e pensamento de longo prazo. As aulas completas encontram-se no **Produto Educacional** vinculado a este trabalho.

## Aula 1: Introdução ao Poker

Nessa primeira aula, é interessante despertar o interesse dos alunos para as próximas aulas, e faremos isso por meio de dinâmicas que tragam elementos presentes em uma partida de poker, isso porque provavelmente um parte da turma não conhece as regras do poker, destacando as situações matemáticas que abordaremos ao longo do curso. Apresentaremos três dinâmicas, que serão enumeradas e explicadas a seguir.

### Dinâmica 1: Jogada segura ou arriscada?

Essa dinâmica tem o intuito de mostrar aos estudantes que trabalharemos com situações que dependem da frequência com que fazemos determinadas escolhas e da compensação envolvida em cada decisão. A atividade consiste em colocar dez bolas numeradas de 1 a 10 e pedir que o estudante escolha entre duas opções.

- **Opção A:** Ganha um bombom se tirar uma bola numerada de 1 a 7.
- **Opção B :** Ganha três bombons se tirar uma bola numerada de 8 a 10.

Em seguida ele retira a bola.

Essa proposta de atividade é excelente para iniciar uma discussão sobre escolhas baseadas em incertezas e comportamento diante do risco, utilizando um modelo simples e lúdico. O estudante deve escolher entre duas opções para tentar ganhar bombons, a partir do sorteio de uma bola numerada de 1 a 10. Note que a escolha envolve um dilema probabilístico entre ganhar menos com mais chance ou ganhar mais com menos chance.

Do ponto de vista matemático, podemos calcular as probabilidades associadas a cada escolha:

- Probabilidade de ganhar na Opção A:

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0,7 \quad (70\%)$$

- Probabilidade de ganhar na Opção B:

$$P(B) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad (30\%)$$

No entanto, os prêmios também são diferentes. Para uma análise mais completa, podemos calcular o **valor esperado** de bombons para cada opção:

- Valor esperado da Opção A:

$$E(A) = 1 \times 0,7 = 0,7 \text{ bombom}$$

- Valor esperado da Opção B:

$$E(B) = 3 \times 0,3 = 0,9 \text{ bombom}$$

Portanto, embora a Opção B pareça mais arriscada, ela possui um valor esperado maior. Isso mostra que, do ponto de vista puramente matemático, vale mais a pena escolher a opção arriscada, pois ela entrega, em média, mais bombons a longo prazo.

### **Dinâmica 2: Caixa do Azar ou da Sorte.**

Prepare três caixas e coloque uma premiação em apenas uma delas. Peça para que um aluno escolha uma das três caixas. Em seguida, entre as duas caixas restantes, revele uma que esteja vazia. Então, pergunte ao aluno se ele deseja manter sua escolha inicial ou trocar pela outra caixa ainda fechada.

Essa dinâmica possibilita uma reflexão sobre qual é a melhor estratégia: manter a escolha inicial ou trocar de caixa. Além disso, essa dinâmica das três caixas é uma adaptação prática e acessível do famoso problema conhecido como *Paradoxo de Monty Hall*, que surgiu em um programa de auditório nos Estados Unidos. Nele, um participante escolhia uma entre três portas, uma delas escondendo um carro, e as outras duas, cabras. Após a escolha inicial, o apresentador revelava uma das portas restantes com uma cabra e oferecia ao participante a chance de trocar sua escolha (PINHEIRO, 2021).

Aparentemente, após uma caixa ser aberta, pode parecer que restam duas opções igualmente prováveis, 50% para cada. No entanto, a matemática nos mostra que essa intuição está incorreta. Quando o aluno faz a primeira escolha, a chance de acerto é de apenas  $\frac{1}{3}$ , enquanto a chance de a premiação estar em uma das caixas não escolhidas é de  $\frac{2}{3}$ . Como o professor sempre abre uma caixa vazia entre as duas restantes, a probabilidade de  $\frac{2}{3}$  se transfere integralmente para a caixa ainda não aberta. Assim, ao trocar de caixa, o aluno dobra suas chances de sucesso, passando de  $\frac{1}{3}$  para  $\frac{2}{3}$ .

Após realizar a atividade, recomenda-se repetir o experimento várias vezes com diferentes estudantes, registrando os resultados em um quadro. A repetição tende a confirmar a teoria, demonstrando na prática que quem troca ganha cerca de 2 em cada 3 vezes. Também é possível ampliar a atividade com mais caixas, desafiando os alunos a preverem o comportamento das probabilidades em situações semelhantes.

### **Dinâmica 3: Trinca, par ou nada?**

Temos três caixas com 4 fichas de cores diferentes (vermelha, verde, azul, amarela) em cada uma das caixas. Pedimos para um aluno escolher entre as três opções:

- **Trinca** : Ganha 4 bombons.
- **Par** : Ganha 1 bombom.
- **Nada**: Ganha 2 bombons.

Em seguida pedimos que ele tire uma ficha de cada caixa e observe se tem três, duas ou nenhuma cor igual. Aqui temos que refletir qual é a melhor opção a longo prazo.

Como as fichas são sorteadas uma a uma, e todas têm igual chance (uniforme), podemos aplicar **princípios de contagem**. Cada retirada pode resultar em uma das 4 cores possíveis, então o total de combinações possíveis é:

$$\text{Total de combinações} = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

É possível analisar os casos favoráveis a cada tipo de combinação.

- **Trinca (três fichas da mesma cor)**: só existem 4 possibilidades (uma para cada cor), como por exemplo: vermelha-vermelha-vermelha. Assim,

$$T = 4 \text{ possibilidades.}$$

- **Nada (todas as fichas com cores diferentes)**: devemos escolher 3 cores diferentes entre 4 possíveis, basta usar PFC.

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ possibilidades.}$$

- **Par (duas cores iguais e uma diferente)**: Como sabemos as possibilidades dos casos anteriores podemos apenas fazer uma subtração

$$P = 64 - T - N = 64 - 4 - 24 = 36 \text{ possibilidades.}$$

Tabela 4.1: Resumo das probabilidades.

Resultado	Casos favoráveis	Probabilidade	Prêmio (bombons)
Trinca	4	$\frac{4}{64} = 0,0625$	4
Par	36	$\frac{36}{64} = 0,5625$	1
Nada	24	$\frac{24}{64} = 0,375$	2

**Cálculo do valor esperado para cada aposta:**

- Trinca:

$$E(\text{Trinca}) = 0,0625 \times 4 = 0,25$$

- Par:

$$E(\text{Par}) = 0,5625 \times 1 = 0,5625$$

- Nada:

$$E(\text{Nada}) = 0,375 \times 2 = 0,75$$

Concluimos que a opção **Nada**, apesar de parecer intermediária, apresenta o maior valor esperado. Ou seja, a longo prazo, é a escolha que maximiza a quantidade de bombons ganhos. Já a opção **Trinca**, mesmo oferecendo o maior prêmio individual, é estatisticamente a menos vantajosa, pois ocorre raramente. Essa dinâmica é excelente para mostrar como o raciocínio probabilístico e os métodos de contagem ajudam a tomar decisões mais vantajosas.

Observa-se que, nesta dinâmica, são utilizados conceitos fundamentais de métodos de contagem, probabilidade e valor esperado para embasar a análise e a tomada de decisão. No entanto, vale destacar que esses conteúdos serão aprofundados progressivamente ao longo do itinerário formativo, permitindo que os estudantes compreendam, com mais rigor e domínio, as ferramentas matemáticas envolvidas.

Passadas as dinâmicas entraremos de fato no assunto, contando um pouco da história do poker e introduzindo as regras sobre o jogo que será usado como ferramenta para estudar análise combinatória e probabilidade. Poderemos encontrar essa parte na seção 2.3. Talvez essa aula se estenda e seja necessário organizar na aula seguinte um pequeno torneio para que os alunos se apropriem das regras do jogo e compreendam, na prática, quais combinações de cartas vencem umas às outras. Com a dinâmica do torneio, os estudantes terão a oportunidade de vivenciar situações reais de tomada de decisão, comparar mãos, aplicar conceitos aprendidos e consolidar o entendimento sobre a hierarquia das combinações do poker.

## Matemática e poker nas próximas aulas

A introdução do poker como elemento central de uma disciplina eletiva de Matemática fundamenta-se no caráter altamente estruturado do jogo, que combina regras precisas, ações sequenciais e um ambiente de incerteza que exige constante avaliação quantitativa. Por reunir decisões estratégicas, informações incompletas e variações controláveis, o poker oferece um contexto didático singular para a formalização de ideias matemáticas, especialmente aquelas ligadas à **Análise Combinatória, Probabilidade, Estatística e Teoria da Decisão**.

No contexto pedagógico, o poker funciona como um modelo estocástico: cada rodada configura um conjunto finito de possibilidades, cada mão apresenta características específicas e cada ação do jogador representa uma transformação mensurável no espaço de resultados. Assim, o jogo torna-se uma “linguagem concreta” para formular argumentos, justificar procedimentos, investigar padrões e estudar relações matemáticas complexas de

maneira intuitiva e aplicada. A própria dinâmica do jogo permite que os estudantes compreendam fenômenos como variabilidade, risco, expectativa matemática e comportamento de longo prazo, inserindo a matemática em um contexto significativo e diretamente ligado à tomada de decisão racional.

### Análise Combinatória

A análise combinatória é a ferramenta matemática fundamental para quantificar todas as possibilidades de distribuição de cartas no poker. Como o jogo utiliza um baralho de 52 cartas distintas, cada situação de jogo pode ser descrita por um conjunto finito de combinações. A compreensão dessas estruturas permite ao estudante interpretar a frequência relativa das mãos e fundamentar decisões estratégicas.

Pode-se apresentar os métodos de contagem de forma gradativa, partindo do **Princípio Fundamental da Contagem (PFC), seguido de Permutações, Arranjos e Combinações**, ilustrando cada etapa com problemas simples, tais como: *De quantas formas diferentes é possível organizar 3 cartas escolhidas dentre as 12 figuras (reis, rainhas e valetes dos quatro naipes)?*

A resolução pode ser conduzida pelo PFC. Ao escolher a primeira carta, o aluno tem 12 possibilidades; para a segunda carta, restam 11 possibilidades; e para a terceira carta, 10 possibilidades. Assim, obtém-se o total:

$$12 \times 11 \times 10 = 1320$$

formas distintas de organizar três cartas de figuras. Esse resultado cria uma ponte natural para a compreensão da contagem sistemática e da importância de considerar se a ordem importa, o que nos leva ao conceito formal de permutação.

Considere que temos três cartas distintas: Ás (A), Rei (K) e Dama (Q). Deseja-se determinar de quantas maneiras diferentes podemos ordenar essas cartas em sequência.

Como a ordem importa, trata-se de uma **permutação simples**. Assim, o número total de permutações é:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

As possíveis ordenações são:

1. A – K – Q
2. A – Q – K
3. K – A – Q
4. K – Q – A
5. Q – A – K
6. Q – K – A

Em outro exemplo suponha agora que desejamos descobrir de quantas formas diferentes as cinco cartas comunitárias do *board* poderiam aparecer na ordem exata em que são reveladas (flop, turn e river), considerando que o conjunto dessas cinco cartas já é conhecido.

Como todas as cartas são distintas, o número de possíveis ordenações é dado por:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Isso significa que, se as cinco cartas do *board* já estiverem definidas, existem 120 sequências possíveis para a ordem em que aparecerão durante a partida.

Uma forma de introduzir o conceito de combinação é pensar em quantas formas pode receber as *hole cards*. Como a ordem das cartas não altera a formação das mãos, utiliza-se o conceito de **combinação simples**. O número total de pares iniciais possíveis no Texas Hold'em é dado por:

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2! \cdot (52-2)!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326.$$

Esse valor representa todas as mãos iniciais possíveis antes do *flop*.

Do problema anterior pode-se conduzir para outro problema e introduzir o conceito de probabilidade. Poderia pensar qual é a probabilidade de receber um par na mão inicial?

Note que só existe 13 valores possíveis para o par, em seguida escolhemos os naipes para cada carta o que pode ser feito como a combinação de 2 de 4 naipes disponíveis. Assim,

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} = 13 \cdot 6 = 78.$$

Logo, existem 78 pares de 1326 possibilidades, ou seja

$$P(\text{par inicial}) = \frac{78}{1326} \approx 5,88\%.$$

Cada tipo de mão do poker pode ser obtido usando contagens combinatórias apropriadas. O entendimento dessas contagens ajuda o aluno a visualizar por que algumas mãos são raras e outras, frequentes.

Para facilitar a entendimento calcula-se as possibilidades de *Royal Flush*, a mão mais forte e gradualmente avança para mãos mais fracas, cujos cálculos são mais complexos. Os resultados obtidos serão:

- **Royal Flush** é a mão mais forte do poker e consiste nas cinco cartas mais altas de um mesmo naipe: Ás (A), Rei (K), Dama (Q), Valete (J) e Dez (10). Como os valores dessas cartas são fixos, a única variação possível ocorre nos naipes, então só há quatro possibilidades.
- **Straight Flush** é uma sequência de cinco cartas consecutivas do mesmo naipe,

excetuando o Royal Flush. Existem 10 seqüências possíveis (de A-5 até 10-A) e 4 naipes possíveis. Contudo, uma dessas seqüências corresponde ao Royal Flush, já contabilizado anteriormente.

Desse modo, a quantidade de possibilidades é dado por:

$$(10 \times 4) - 4 = 36.$$

- **Quadra (Four of Kind)** ocorre quando há quatro cartas de mesmo valor e uma carta adicional diferente (*kicker*).
  - Existem 13 valores possíveis (de Ás a 2) para formar as quadras.
  - Para cada valor, há 1 única forma de escolher as quatro cartas (pois são os quatro naipes).
  - A carta extra pode ser qualquer uma das 48 restantes.

Assim para calcular a quantidades de combinações de quadras fazemos:

$$13 \times 48 = 624.$$

- **Full House** é composto por uma trinca (três cartas de mesmo valor) e um par (duas cartas de outro valor).
  - Escolher o valor da trinca:  $C_{13,1}$ .
  - Escolher 3 naipes entre 4:  $C_{4,3}$ .
  - Escolher o valor do par entre os 12 restantes:  $C_{12,1}$ .
  - Escolher 2 naipes entre 4:  $C_{4,2}$ .

Logo, como todas essas escolhas são independentes, a quantidade de possibilidades são:

$$C_{13,1} \times C_{4,3} \times C_{12,1} \times C_{4,2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744.$$

- **Flush** ocorre quando temos cinco cartas do mesmo naipe, sem formar seqüência.
  - Para cada naipe, podemos escolher  $C_{13,5}$  combinações.
  - Há 4 naipes possíveis.
  - Subtrair os casos em que há Straight Flush ou Royal Flush.

Desse modo, temos:

$$C_{13,5} \times 4 - 4 - 36 = 1287 \times 4 - 40 = 5108.$$

- **Sequência** é formada por cinco cartas consecutivas, de diferentes naipes.
  - Existem 10 possíveis sequências (de A-5 até 10-A).
  - Cada carta pode ter 4 naipes.
  - Assim, há  $4^5 = 1024$  combinações para cada sequência.
  - Excluir as 40 combinações que correspondem aos *Straight Flushes* e *Royal Flushes*.

Portanto,

$$(10 \times 1024) - 40 = 10240 - 40 = 10200.$$

- **Trinca** é composta de três cartas de mesmo valor e duas com valores diferentes.
  - Escolher valor da trinca: 13.
  - Escolher 3 naipes dentre 4:  $C_{4,3}$ .
  - Escolher 2 valores diferentes entre os 12 restantes:  $C_{12,2}$ .
  - Para cada valor escolhido. 1 de 4 naipes:  $4^2$ .

Logo,

$$13 \times C_{4,3} \times C_{12,2} \times 4^2 = 13 \times 4 \times 66 \times 16 = 54912.$$

- **Dois Pares** acontece quando o jogador possui duas cartas de mesmo valor e outras duas cartas de mesmo valor, mais uma carta avulsa (*kicker*).
  - Escolher 2 valores para os pares:  $C_{13,2}$ .
  - Para cada valor, escolher 2 naipes:  $C_{4,2}$ .
  - Escolher o valor da carta restante:  $C_{11,1}$ .
  - Escolher 1 de 4 naipes para ela:  $C_{4,1}$ .

Assim,

$$C_{13,2} \times (C_{4,3})^2 \times C_{11,1} \times C_{4,1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123552.$$

- **Um Par** ocorre quando o jogador possui duas cartas de mesmo valor, e as outras três cartas têm valores diferentes entre si e diferentes do valor do par.
  - Escolher o valor do par:  $C_{13,1}$ .
  - Escolher 2 naipes para o par:  $C_{4,2}$ .
  - Escolher 3 valores distintos entre os 12 restantes:  $C_{12,3}$ .
  - Para cada um, escolher 1 dos 4 naipes:  $4^3$ .

Logo,

$$C_{13,1} \times C_{4,2} \times C_{12,3} \times 4^3 = 13 \times 6 \times 220 \times 64 = 1098240.$$

- **Carta alta** ocorre quando não há nenhuma formação de par, sequência ou cartas do mesmo naipe, ou seja, todas as cinco cartas são de valores diferentes, sem padrão particular. Para encontrar todas possibilidades encontramos o total de combinações possíveis de 5 cartas e subtraímos os toas possibilidades anteriores, logo,

$$C_{52,5} - 1295420 = 2598960 - 1296420 = 1302540.$$

Após a conclusão dos cálculos de todos os tipos de mão, os resultados são organizados em uma tabela 4.2 que apresenta a quantidade total de combinações possíveis para cada categoria do ranking do poker. A partir dessa sistematização, propõe-se uma reflexão com os estudantes sobre a relação entre a força da mão e a raridade com que ela ocorre. Quanto menor o número de combinações possíveis de um determinado tipo de mão, maior tende a ser seu valor estratégico no jogo. Da mesma forma, mãos que aparecem com maior frequência possuem, proporcionalmente, menor força no ranking.

Tabela 4.2: Quantidade de combinações possíveis de cada tipo de mão no poker

<b>Tipo de Mão</b>	<b>Número de Combinações</b>
Royal Flush	4
Straight Flush	36
Quadra (Four of a Kind)	624
Full House	3.744
Flush	5.108
Sequência (Straight)	10.200
Trinca	54.912
Dois Pares	123.552
Um Par	1.098.240
Carta Alta	1.302.540
<b>Total</b>	<b>2.598.960</b>

Fonte: Autoria própria.

## Espaço Amostral e Probabilidade

A probabilidade desempenha um papel central no processo de tomada de decisão no poker, pois cada ação do jogador — pagar, apostar, aumentar ou desistir — está associada à estimativa de ocorrência de determinados eventos. Em um jogo estruturado por

incerteza, compreender probabilidades significa interpretar o comportamento do baralho, medir riscos e antecipar cenários futuros de modo quantitativo.

O ponto de partida é a definição clássica de probabilidade, entendida como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. No poker, o total de casos possíveis é determinado pela análise combinatória do baralho, enquanto os casos favoráveis correspondem às configurações específicas que o jogador deseja obter.

O ponto de partida pode ser apresentar aos alunos a ideia de que todo cálculo de probabilidade parte de uma pergunta fundamental: “Qual é o conjunto de todos os resultados possíveis desta situação?” A partir dessa questão, introduz-se o conceito de espaço amostral, de forma conceitual, mas completamente vinculada ao jogo. Explica-se que, no poker, o **espaço amostral** é formado por todas as combinações de cartas que podem ser distribuídas aos jogadores, e que identificar esse conjunto é o passo inicial antes de se tratar a chance de ocorrência de qualquer evento na mesa.

Para consolidar a ideia, trabalha-se o caso clássico do Texas Hold'em: determinar de quantas maneiras é possível distribuir duas cartas de um baralho de 52. Destaca-se que a ordem não importa, pois receber  $A\spadesuit$  e  $K\heartsuit$  é equivalente a receber  $K\heartsuit$  e  $A\spadesuit$ . Dessa forma, calcula-se o tamanho do espaço amostral por meio da combinação:

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = 1326.$$

Esse resultado estabelece que existem 1326 possíveis mãos iniciais para um jogador. Assim, compreende-se que o espaço amostral não precisa ser enumerado carta por carta, mas pode ser representado matematicamente por uma combinação.

A partir deste ponto, ampliam-se as discussões para outros exemplos de espaço amostral no jogo. Ao revelar o *flop*, composto por três cartas comunitárias, o espaço amostral correspondente pode ser representado por:

$$\binom{50}{3} = \frac{50!}{3!47!} = 19600.$$

Outro exemplo já mencionado anteriormente são as possibilidades de composição das 5 cartas comunitárias no poker. Como a ordem não importa temos,

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

Destacando o fato das possibilidade finitas e o espaço amostral ser discreto então a definição clássica de probabilidade, entendida como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. No poker, o total de casos possíveis é determinado pela análise combinatória do baralho, enquanto os casos favoráveis correspondem às configurações específicas que o jogador deseja obter.

Um dos conceitos mais utilizados nas decisões reais é o cálculo de *outs*, que são as

cartas restantes no baralho capazes de melhorar a mão do jogador. A partir da contagem de *outs*, estima-se a probabilidade de completar determinada mão no *turn*, no *river* ou em ambas as rodadas. Por exemplo, em um *flush draw* com nove *outs*, a probabilidade de completar o *flush* na próxima carta pode ser expressa por:

$$\frac{9}{47},$$

pois após o *flop* restam 47 cartas desconhecidas no baralho.

Além do cálculo direto, o poker exige o uso de probabilidade condicional, especialmente quando o resultado de uma rodada altera o espaço amostral da seguinte. Cada carta revelada reduz o conjunto de possibilidades e modifica as chances de eventos subsequentes. Esse raciocínio é fundamental para avaliar cenários simultâneos, como completar uma sequência ou *flush* enquanto se evita que o adversário forme uma mão superior.

Outro conceito relevante é o de eventos complementares, que permite calcular probabilidades de forma eficiente. Em diversas situações, é mais simples determinar a probabilidade de *não* completar uma mão e, em seguida, obter a probabilidade desejada utilizando o complemento. Tal estratégia é útil no cálculo de chances em múltiplas rodadas, como ao determinar a probabilidade de completar o *flush* até o *river*, considerando *turn* e *river* como eventos encadeados.

No estudo do poker, sob a perspectiva matemática, a probabilidade não é tratada apenas como um conjunto de cálculos isolados, mas como um instrumento de análise estratégica. Cada decisão deve relacionar a probabilidade estimada de vitória ao retorno potencial da jogada. Essa integração entre probabilidade e expectativa matemática será aprofundada em seções posteriores da disciplina.

**Exemplo de Contagem de Outs** — Considere a situação em que o jogador possui  $A\heartsuit 9\heartsuit$  e o *flop* revela  $K\heartsuit 7\clubsuit 2\heartsuit$ . Nessa configuração, há a possibilidade de completar um *flush*, pois já são conhecidas quatro cartas de ouros: duas na mão do jogador e duas no *flop*. Como cada naipe possui treze cartas, restam  $13 - 4 = 9$  cartas de ouros ainda não vistas, ou seja, há **9 outs** capazes de completar o *flush*.

Após o *flop*, permanecem 47 cartas desconhecidas no baralho. Assim, a probabilidade de completar o *flush* no *turn* é dada por  $\frac{9}{47} \approx 19,1\%$ . Já a probabilidade de completar o *flush* até o *river* pode ser calculada pelo complemento: a chance de não acertar no *turn* é  $\frac{38}{47}$  e, em seguida, de não acertar no *river* é  $\frac{37}{46}$ . Portanto, a probabilidade de completar o *flush* até o *river* é

$$1 - \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \approx 34,3\%.$$

Existem tabelas que apresentam as probabilidades de completar determinadas combinações a partir do número de *outs*, considerando todas as etapas da mão (*flop*, *turn* e *river*) como na tabela 4.3. Essas tabelas devem ser estudadas previamente para que o jogador consiga automatizar suas decisões durante a partida, pois não há tempo para

realizar cálculos detalhados enquanto o jogo está em andamento. É importante destacar que os cálculos mais densos são feitos fora da mesa, durante o estudo teórico; no momento do jogo, utiliza-se o conhecimento já consolidado, aplicando as probabilidades aprendidas de forma rápida e intuitiva, sem a necessidade de resolver novamente cada conta.

Tabela 4.3: Probabilidades de completar a mão com base no número de outs.

Nº de Outs	Flop ao Turn	Turn ao River	Flop ao River
1	2,1%	2,2%	4,3%
2	4,3%	4,3%	8,4%
3	6,5%	6,5%	12,5%
4	8,5%	8,7%	16,5%
5	10,6%	10,9%	20,5%
6	12,8%	13,0%	24,0%
7	14,9%	15,2%	27,8%
8	16,9%	17,4%	31,5%
9	19,1%	19,6%	35,0%
10	21,2%	21,7%	38,5%
11	23,4%	23,9%	41,7%
12	25,5%	26,1%	45,0%
13	27,7%	28,3%	48,1%
14	29,8%	30,5%	51,2%
15	31,9%	32,5%	54,0%
16	34,0%	34,8%	57,0%
17	36,2%	37,0%	59,8%
18	38,3%	39,5%	62,5%
19	40,5%	41,5%	65,0%
20	42,5%	43,5%	67,5%

Fonte: (GIPSYTEAM, 2025).

### Valor Esperado no Poker

O conceito de valor esperado (EV – *Expected Value*) constitui um dos pilares matemáticos do poker contemporâneo. Ele permite avaliar se uma decisão é lucrativa no longo prazo, independentemente do resultado imediato de uma jogada específica. Em um ambiente de incerteza como o poker, no qual mesmo a melhor ação pode resultar em perda no curto prazo, o valor esperado funciona como uma medida objetiva que fundamenta decisões estratégicas racionais.

Matematicamente, o valor esperado é definido como a soma dos resultados possíveis

ponderados pelas probabilidades correspondentes. Em termos gerais,

$$EV = \sum_{i=1}^n p_i \cdot R_i,$$

em que  $p_i$  representa a probabilidade do evento  $i$  ocorrer e  $R_i$  denota o retorno financeiro associado a esse evento. Tal grandeza indica o ganho ou perda médio esperado ao repetir a mesma decisão um grande número de vezes. Assim, a ação é considerada matematicamente vantajosa quando

$$EV > 0,$$

desfavorável quando

$$EV < 0,$$

e indiferente quando

$$EV = 0.$$

No contexto do poker, os resultados dependem das ações disponíveis ao jogador — pagar, aumentar, apostar ou desistir — e de como essas ações influenciam o tamanho do pote e o fluxo de fichas. Embora o jogador raramente compute o EV exato durante a mão, compreender esse cálculo permite transformar decisões complexas em heurísticas eficientes, como a comparação entre *pot odds* e *equity*.

Considere, por exemplo, um jogador com um *flush draw* de nove *outs*. Suponha que o pote contenha 100 fichas e que o oponente aposte 25. Para continuar na mão, o jogador precisa pagar 25 para disputar um total de 125 fichas. As *pot odds* são, portanto,

$$\frac{25}{125} = 20\%.$$

A probabilidade de completar o *flush* até o *river* é aproximadamente 35% como pode observar na tabela 4.3. Como essa probabilidade (*equity*) é superior ao custo relativo da aposta, a decisão apresenta EV positivo, indicando que, repetida inúmeras vezes, tende a gerar lucro.

Observer mais alguns exemplos de como calcular o valor esperado.

**Exemplo 1 (Sequência no river)** Considere um jogador com quatro cartas conectadas após o *turn*, restando oito cartas favoráveis entre as 46 disponíveis. A probabilidade de completar a sequência é

$$P(E_{\text{straight}}) = \frac{8}{46} \approx 17,4\%.$$

Suponha que o pote contenha 150 fichas e o adversário aposte 20 fichas. Se a sequência

for completada, o ganho será de 170 fichas. Assim,

$$EV = 0,174 \cdot 170 - 0,826 \cdot 20 \approx 29,6 - 16,5 = 13,1.$$

Como  $EV > 0$ , pagar a aposta é matematicamente vantajoso.

**Exemplo 2 (Full House no river)** Suponha que o jogador possua uma trinca após o *turn* e deseja completar um *full house*. Restam seis cartas favoráveis entre 46, de modo que

$$P(E_{\text{full}}) = \frac{6}{46} \approx 13,0\%.$$

Se o pote contiver 300 fichas e o adversário apostar 60 fichas, o ganho possível será de 360 fichas. Assim,

$$EV = 0,13 \cdot 360 - 0,87 \cdot 60 = 46,8 - 52,2 = -5,4.$$

Embora o evento desejado produza uma mão forte, o resultado negativo indica que pagar a aposta é economicamente desvantajoso no longo prazo.

O conceito de valor esperado também se aplica a situações que não envolvem a força direta da mão, como os blefes. Mesmo sem valor de *showdown*, um blefe pode possuir EV positivo se a probabilidade de o adversário desistir, multiplicada pelo valor do pote, for maior que o custo da aposta realizada. Assim, o EV integra análise probabilística, leitura de *ranges* e gestão do risco, ampliando a compreensão estratégica das jogadas.

Em síntese, o valor esperado articula probabilidade, análise combinatória e teoria da decisão, transformando o poker em um ambiente privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio matemático aplicado.

O conceito de *bluff* é uma ferramenta estratégica no poker, podemos verificar que a decisão de blefar pode ser analisada matematicamente por meio de frequência mínima necessária de desistência e cálculo de valor esperado. Embora o blefe seja frequentemente associado à intuição, sua fundamentação racional decorre da relação entre risco assumido e retorno financeiro esperado.

Entende-se por *bluff* a ação em que o jogador aposta ou aumenta a aposta com uma mão inferior àquela que o adversário provavelmente possui, com o objetivo de fazê-lo desistir. Seja  $F$  o evento “o oponente desiste diante da aposta” e  $P(F)$  a sua probabilidade. Seja  $P$  o valor presente do pote e  $A$  o valor apostado pelo jogador. O ganho em caso de desistência do adversário é  $P$ , enquanto a perda em caso de pagamento é  $A$ . Define-se a variável aleatória  $X$  que modela o ganho do blefe:

$$X = \begin{cases} P, & \text{se } F \text{ ocorrer} \\ -A, & \text{se } F \text{ não ocorrer.} \end{cases}$$

O valor esperado do blefe é dado por:

$$EV_{\text{bluff}} = P(F) \cdot P - (1 - P(F)) \cdot A. \quad (4.1)$$

O blefe é matematicamente vantajoso quando

$$EV_{\text{bluff}} > 0. \quad (4.2)$$

Da desigualdade 4.2, obtém-se a condição equivalente:

$$P(F) > \frac{A}{P + A}.$$

A expressão

$$\frac{A}{P + A}$$

representa a **frequência mínima de desistência do adversário** necessária para que o blefe seja lucrativo no longo prazo.

**Exemplo 3 (Blefe padrão)** Considere  $P = 100$  fichas e uma aposta  $A = 50$  fichas. Então

$$\frac{A}{P + A} = \frac{50}{150} \approx 33,3\%.$$

Se o oponente desistir em mais de 33,3% das situações semelhantes, o blefe produz lucro esperado positivo.

**Exemplo 4 (Blefe econômico)** Considere agora um pote de  $P = 100$  fichas e uma aposta  $A = 25$  fichas. Tem-se:

$$\frac{A}{P + A} = \frac{25}{125} = 20\%.$$

Basta que o adversário desista em mais de 20% das vezes para que o blefe seja lucrativo. Esse exemplo mostra que apostas menores requerem menor taxa de sucesso.

**Exemplo 5 (Blefe agressivo)** Se o pote contém  $P = 100$  fichas e o jogador aposta  $A = 100$  fichas:

$$\frac{A}{P + A} = \frac{100}{200} = 50\%.$$

A estratégia só é lucrativa se o adversário desistir em mais da metade das ocasiões semelhantes, evidenciando que blefes grandes exigem alta taxa de sucesso.

**Exemplo 6 (Cálculo de EV no blefe)** Suponha que em uma determinada situação o jogador avalia que o adversário desiste com probabilidade  $P(F) = 40\%$ , o pote contém  $P = 120$  fichas e o jogador aposta  $A = 50$  fichas. O valor esperado do blefe é então:

$$EV_{\text{bluff}} = 0,40 \cdot 120 - 0,60 \cdot 50 = 48 - 30 = 18.$$

Como  $EV_{\text{bluff}} = 18 > 0$ , o blefe é lucrativo no longo prazo.

**Exemplo 7 (EV negativo em situação de blefe)** Suponha agora que o pote

contém  $P = 200$  fichas e o jogador aposta  $A = 100$  fichas, estimando que o adversário desiste com probabilidade  $P(F) = 45\%$ . Então:

$$EV_{\text{bluff}} = 0,45 \cdot 200 - 0,55 \cdot 100 = 90 - 55 = 35.$$

Apesar do  $EV$  positivo neste cenário específico, se a estimativa de desistência for menor que 50%, tem-se:

$$EV_{\text{bluff}} = P(F) \cdot 200 - (1 - P(F)) \cdot 100.$$

Se  $P(F) = 40\%$ :

$$EV_{\text{bluff}} = 0,40 \cdot 200 - 0,60 \cdot 100 = 80 - 60 = 20,$$

ainda positivo. Entretanto, se  $P(F) = 30\%$ :

$$EV_{\text{bluff}} = 0,30 \cdot 200 - 0,70 \cdot 100 = 60 - 70 = -10.$$

Portanto, a mesma aposta pode ser lucrativa ou prejuízo dependendo da frequência de desistência estimada — destacando a importância de avaliação racional do adversário.

Conclui-se que o blefe é uma ação estratégica fundamentada em quantificação de risco, frequência de desistência e retorno esperado, e não uma decisão aleatória ou intuitiva. A matemática orienta o jogador a blefar apenas quando a probabilidade de desistência supera o limiar dado por  $\frac{A}{P+A}$ , garantindo que o valor esperado seja positivo ao longo de muitas repetições da mesma situação.

## Estatística no Poker

Em contextos de jogos com variância elevada, como o poker, o resultado de uma única mão é apenas uma amostra de um processo aleatório. Portanto, conclusões confiáveis só podem ser obtidas após um número suficientemente grande de observações. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o ganho associado a uma decisão e seja  $EV(X)$  o seu valor esperado, então o acompanhamento estatístico busca verificar se o desempenho real converge para o desempenho esperado ao longo do tempo. Esse fenômeno pode ser interpretado à luz da Lei dos Grandes Números: à medida que o número de decisões aumenta, a média observada tende a se aproximar do valor esperado.

Dessa forma, vencer repetidamente no curto prazo não garante que o jogador esteja tomando decisões corretas; do mesmo modo, uma sequência de perdas não implica necessariamente decisões erradas. O critério rigoroso para avaliar se um jogador está desempenhando bem é verificar se, ao longo de muitas situações, suas ações apresentam valor esperado positivo.

**Exemplo prático de acompanhamento estatístico** — Considere um jogador que registra suas últimas 100 decisões de *call* no *turn* em situações em que precisava

estimar se o valor esperado era positivo. Após análise técnica, concluiu-se que:

- em 62 das decisões, a probabilidade de vitória  $P(E)$  era superior à razão das *pot odds* exigidas, de modo que  $EV > 0$ ;
- em 38 das decisões, a probabilidade de vitória era inferior à razão das *pot odds*, de modo que  $EV < 0$ .

Suponha ainda que o jogador tenha obtido lucro financeiro nas 38 decisões incorretas e prejuízo financeiro nas 62 decisões corretas. Uma análise baseada apenas nos resultados imediatos poderia levar ao diagnóstico equivocado de que o desempenho foi negativo. Entretanto, sob interpretação estatística, o jogador apresentou taxa de decisões matematicamente corretas igual a

$$\frac{62}{100} = 62\%.$$

Se as decisões com  $EV > 0$  forem repetidas consistentemente ao longo de um grande número de mãos, a expectativa teórica é que o lucro acumulado seja positivo, independentemente da sequência momentânea de perdas. Este exemplo demonstra que estatística aplicada ao poker avalia a qualidade das decisões, e não o curto prazo financeiro.

A análise estatística permite responder objetivamente às seguintes questões:

- As decisões tomadas ao longo do tempo apresentam  $EV > 0$  de forma consistente?
- A taxa de erro diminui com o passar das sessões de jogo?
- A tendência financeira converge para o valor esperado calculado?

O registro sistemático de decisões, aliado ao cálculo do valor esperado, fornece indicadores confiáveis de progresso estratégico. Conclui-se que medir desempenho no poker significa medir a qualidade das decisões. O objetivo estatístico não é vencer todas as mãos, mas tomar decisões lucrativas no longo prazo, consistentes com probabilidade, *pot odds*, valor esperado e análise de ranges.

Essa perspectiva reforça que a matemática constitui o referencial objetivo para o estudo estratégico do poker.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O presente capítulo tem como objetivo apresentar e discutir os resultados obtidos a partir da implementação das disciplinas eletivas *Xadrez para Iniciantes* e *Probabilidade na Mesa* no Ensino Médio. A análise contempla evidências quantitativas e qualitativas, coletadas por meio de questionário (Apêndice C) e observações do aplicador, relacionadas ao engajamento dos estudantes, ao desenvolvimento de habilidades matemáticas e ao impacto da utilização de jogos de estratégia como recurso didático. A interpretação dos dados é articulada com a literatura discutida no capítulo de Fundamentação Teórica, especialmente no que se refere à gamificação, aprendizagem ativa e desenvolvimento do pensamento lógico e probabilístico.

A utilização de dados provenientes das atividades desenvolvidas com os estudantes fundamenta-se em finalidade exclusivamente pedagógica e científica, com foco na análise do processo de aprendizagem e na avaliação das estratégias didáticas propostas. Ressalta-se que tais procedimentos não infringem as normas estabelecidas pelo Comitê de Ética em Pesquisa, uma vez que não envolvem intervenções invasivas, coleta de dados sensíveis ou identificação individual dos participantes. Além disso, a instituição dispõe de termo de autorização de uso de imagem e participação em materiais didáticos e científicos, devidamente assinado pelos responsáveis legais no ato da matrícula escolar, o que assegura respaldo legal e ético para a utilização de registros fotográficos e produções acadêmicas vinculadas às atividades educacionais, preservando sempre a identidade e a integridade dos estudantes.

### 5.1 Caracterização das Turmas e Contexto da Aplicação

A disciplina xadrez para iniciantes foi ofertada por seis semestres desde 2021 e a disciplina Probabilidade da Mesa foi implementada no ano letivo de 2025 a estudantes do Ensino Médio em um Centro Estadual de Educação Profissional do Rio Grande do Norte. A disciplina de Xadrez contou com 40 alunos em turma composta com alunos das três séries do ensino médio, enquanto a disciplina de Probabilidade na mesa foi cursada por 28 alunos. As eletivas foram implementadas ao longo de 20 semanas, com carga horária de 100 minutos semanais, contemplando momentos de exposição teórica, resolução de problemas e práticas de jogo supervisionadas.

O perfil dos participantes refletiu heterogeneidade quanto ao desempenho prévio em matemática, idade e familiaridade com os jogos. Essa diversidade se mostrou relevante para a interpretação dos resultados, sobretudo nas atividades que demandavam tomada de decisão, abstração e planejamento estratégico.

## 5.2 Resultados da Disciplina Matemática com Xadrez

### 5.2.1 Engajamento e Participação

Quando as disciplinas eletivas são ofertadas aos alunos, cada estudante deve classificá-las por ordem de preferência, atribuindo o número 1 para a opção mais desejada, 2 para a segunda preferência e assim sucessivamente. Nesse processo de escolha, a disciplina Xadrez para Iniciantes foi a mais indicada como opção número 1 pela maioria dos estudantes, considerando um universo médio de aproximadamente 500 alunos. Esse resultado evidencia que disciplinas relacionadas a jogos despertam elevado interesse entre os estudantes do Ensino Médio, especialmente jovens entre 14 e 18 anos, sugerindo que propostas pedagógicas lúdicas e estratégicas têm grande potencial de engajamento nesse público.

Além disso, a participação média dos alunos ao longo das aulas foi de 90%. Observou-se um aumento progressivo na frequência das aulas práticas, associado ao envolvimento espontâneo em partidas extraclasse. A Tabela 5.1 sintetiza os indicadores de engajamento.

Tabela 5.1: Indicadores de engajamento dos alunos — Disciplina de Xadrez

Indicador	Valor Médio
Frequência geral	90%
Participação ativa em partidas	78%
Interação colaborativa entre pares	81%
Resolução voluntária de problemas no quadro	70%

Fonte: Dados da pesquisa (2025).

A prática do xadrez rapidamente se tornou o momento mais esperado da disciplina. A cada rodada, os alunos demonstravam foco, paciência e respeito ao tempo do adversário, criando um ambiente de competição saudável e de aprendizagem colaborativa. A imagem apresentada na figura 5.1 retrata esse clima: estudantes conectados ao jogo, calculando possibilidades e debatendo hipóteses antes de cada movimento.

Esse resultado evidencia um ponto de conflito, pois, embora a resolução voluntária de problemas tenha alcançado 70%, esse percentual é superior ao que normalmente se

observa em aulas expositivas, nas quais, em geral, nota-se a participação de poucos alunos, muito abaixo desse valor.

Figura 5.1: Alunos em aula prática de xadrez.



Fonte: Autoria própria.

## 5.2.2 Desenvolvimento de Habilidades Matemáticas

Os resultados obtidos no pós-teste evidenciaram progressos significativos na resolução de problemas envolvendo raciocínio lógico, coordenadas cartesianas, análise combinatória e tomada de decisão baseada em restrições. As soluções apresentadas pelos alunos demonstraram maior maturidade argumentativa e capacidade de justificar escolhas estratégicas.

Além disso, no torneio aberto a todos os estudantes da escola, os participantes da disciplina eletiva de Xadrez alcançaram desempenho significativamente superior, chegando às finais em todas as edições e vencendo 5 dos 6 campeonatos realizados ao final do semestre. Esse resultado indica que os alunos matriculados na eletiva apresentaram evolução estratégica e técnica acima da média, quando comparados aos colegas que não participaram da disciplina.

## 5.2.3 Evidências Qualitativas

Os registros de observação em sala apontam uma mudança de postura dos alunos diante de desafios matemáticos. Muitos alunos inicialmente resistentes à disciplina mostraram maior confiança e interesse ao perceber a aplicabilidade do conteúdo teórico no jogo. Um comentário ilustrativo do aluno (E1) evidencia essa percepção, assim como esse comentário foram colhidos muitos comentários semelhantes:

*“Quando eu olho o tabuleiro agora, começo a pensar antes de jogar. Nunca tinha pensado assim em matemática, normalmente eu só tentava acertar. Agora eu tento entender o que pode acontecer se eu fizer tal movimento.”* (Aluno E1)

Além disso, professores notaram mudanças nos comportamentos dos alunos da disciplina *Xadrez para Iniciantes* como visto no comentário transcrito do professor (P1):

*”Eu comentei com outros professores outro dia: dá para perceber quem está na eletiva de Xadrez só pela postura em sala. Esses alunos ficam mais concentrados nas atividades, não se distraem tão fácil e parecem ter mais organização na hora de começar e terminar uma tarefa. Eles param, pensam, planejam antes de agir.”(Professor P1)*

## 5.3 Resultados da Disciplina Probabilidade com Poker

### 5.3.1 Engajamento e Comportamento Estratégico

As aulas envolvendo cálculo de probabilidades e análise de cartas apresentaram alto índice de engajamento, com 91% de participação ativa nas simulações de jogos e nos torneios educativos. A Figura 5.2 apresenta um registro ilustrativo das atividades práticas.

Figura 5.2: Alunos em aula prática de poker.



Fonte: Autoria própria.

### 5.3.2 Aprendizagem de Conceitos de Probabilidade

Os alunos demonstraram avanço significativo na compreensão de espaço amostral, princípios de contagem, probabilidade condicional e variáveis aleatórias. O desempenho no pós-teste teve média 32% superior ao pré-teste. A Tabela 5.2 resume os principais resultados.

Tabela 5.2: Evolução do desempenho em conteúdos de probabilidade

Conteúdo Avaliado	Pré-teste	Pós-teste
Permutação e combinação	38%	75%
Espaço amostral	41%	74%
Probabilidade condicional	29%	51%
Valor esperado e decisões estratégicas	25%	56%

Fonte: Dados da pesquisa (2025).

A análise da tabela evidencia que o conteúdo de *Permutação e Combinação* apresentou o maior crescimento entre o pré-teste e o pós-teste. No diagnóstico inicial, muitos estudantes responderam com base em palpites ou intuições, sem recorrer aos métodos formais de contagem; após a intervenção, observou-se melhora significativa na capacidade de aplicar procedimentos combinatórios de maneira adequada.

Também se percebe que o tópico de *Espaço Amostral* foi aquele que os alunos mais assimilaram. A abordagem adotada, que buscou apresentar uma visão global das possibilidades envolvidas em diferentes situações do cotidiano, contribuiu para que os estudantes compreendessem melhor a estrutura dos experimentos aleatórios. Já o conceito de *Valor Esperado*, embora ainda não plenamente compreendido pela turma, apresentou avanços relevantes. A principal dificuldade relatada pelos estudantes foi a necessidade de raciocinar em termos de longo prazo, o que exige um nível de abstração matemática mais elevado.

Por fim, a *Probabilidade Condicional* revelou-se o conteúdo mais desafiador. Trata-se de um tema que envolve relações lógicas e estruturais complexas, o que pode dificultar sua assimilação no nível médio. Ainda assim, o aumento observado no pós-teste indica que houve progresso, ainda que mais modesto.

### 5.3.3 Evidências Qualitativas

Os relatos dos estudantes indicaram um entendimento mais crítico sobre tomada de decisões sob incerteza. Muitos verbalizaram que passaram a associar escolhas do jogo a conceitos matemáticos, compreendendo a probabilidade como ferramenta de raciocínio. Na figura 5.3 apresentam-se as respostas abertas fornecidas pelos alunos ao questionário de avaliação sobre a disciplina *Probabilidade na Mesa* que se encontra no apêndice C.

#### **Estudante A1**

*O que mais gostou:* “A parte prática (jogatina, apostar etc.)”

*O que menos gostou ou poderia melhorar:* “Quando o jogador perde e precisa esperar ou ficar observando os colegas jogando.”

#### **Estudante A2**

*O que mais gostou:* “A forma como tínhamos que fazer cálculos dentro de um jogo, com poker.”

*O que menos gostou ou poderia melhorar:* “Ter mais aulas práticas.”

#### **Estudante A3**

*O que mais gostou:* “Da forma participativa e pelo fato de não existir apenas aulas teóricas.”

#### **Estudante A4**

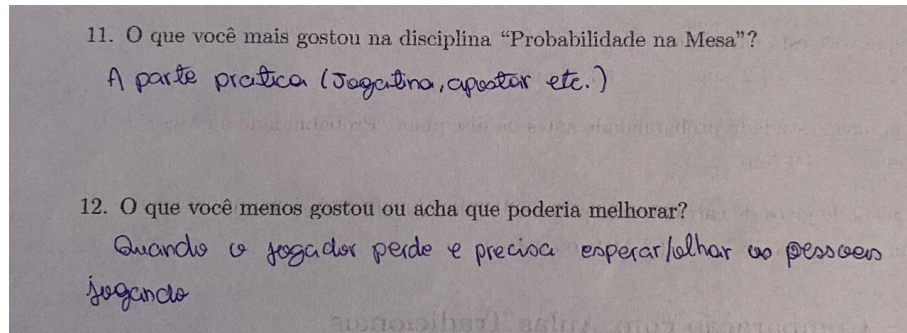
*O que mais gostou:* “O fato de poder aprender novas estratégias matemáticas além do que é visto nas aulas tradicionais.”

*O que menos gostou ou poderia melhorar:* “O ambiente. Poderia ser melhor para os jogos — a biblioteca não era o local ideal.”

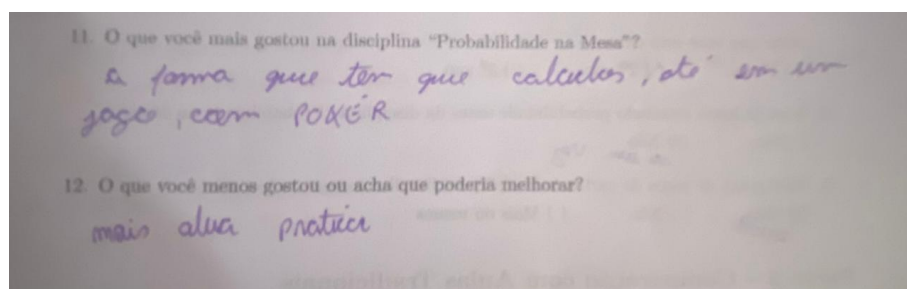
**Estudante A5**

*O que mais gostou:* “A aplicação de um conteúdo em algo divertido.”

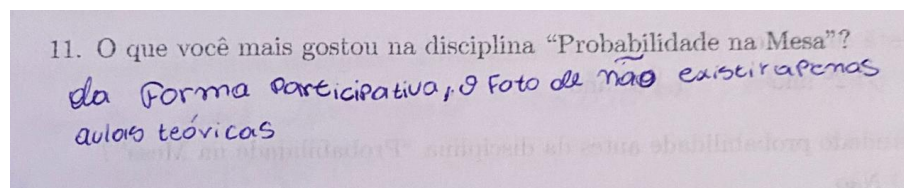
Figura 5.3: Comentários dos alunos sobre a disciplina Probabilidade na Mesa.



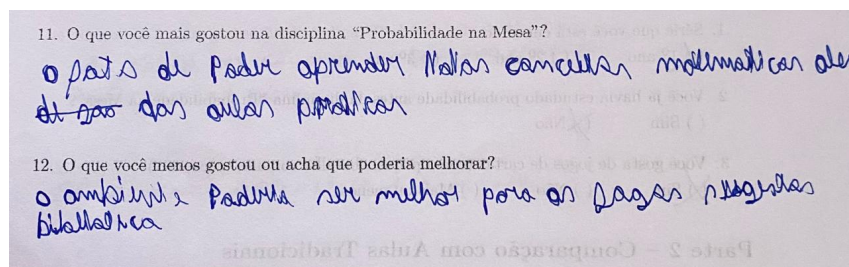
(a) Resposta ao questionário pelo aluno A1.



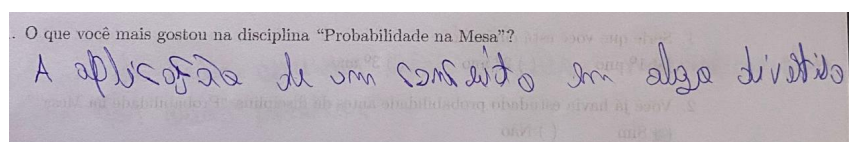
(b) Resposta ao questionário pelo aluno A2.



(c) Resposta ao questionário pelo aluno A3.



(d) Resposta ao questionário pelo aluno A4.



(e) Resposta ao questionário pelo aluno A5.

Fonte: Dados da pesquisa (2025).

As respostas evidenciam um forte apreço pela dimensão prática da disciplina, destacando que a integração do poker como recurso didático contribuiu para tornar o estudo da probabilidade mais dinâmico e compreensível. Os estudantes ressaltaram a oportunidade

de “aprender matemática jogando”, o que reforça o caráter motivador da aprendizagem ativa.

A partir das falas, observa-se que os aspectos mais valorizados foram:

- aplicação concreta dos cálculos matemáticos no contexto do jogo;
- participação direta nas atividades;
- experiência de aprendizagem divertida e significativa.

Quanto aos aspectos passíveis de melhoria, surgiram sugestões voltadas ao aprimoramento do formato das aulas, tais como:

- redução do tempo ocioso dos estudantes eliminados das rodadas;
- aumento da carga horária prática;
- melhoria do espaço físico destinado às partidas.

A análise qualitativa indica que os alunos demonstraram alto nível de satisfação com a disciplina, reconhecendo o valor pedagógico do uso de jogos de estratégia no ensino de matemática. As críticas apresentadas não se referem ao conteúdo ou à metodologia central, mas a aspectos operacionais, sugerindo que a experiência de aprendizagem poderia ser ainda mais potencializada com ajustes na logística e no ambiente de jogo. Assim, os depoimentos corroboram a eficácia da proposta didática e indicam caminhos concretos de aperfeiçoamento para futuras ofertas da disciplina.

## 5.4 Discussão à Luz da Literatura

As evidências observadas convergem com estudos que apontam os jogos de estratégia como promotores de aprendizagem ativa, autonomia intelectual e pensamento crítico. O engajamento dos estudantes durante as aulas confirma a hipótese apresentada por autores como Deterding et al. (2011) para quem a gamificação, entendida como o uso de elementos estruturais dos jogos em contextos educacionais, cria ambientes de maior motivação e participação. A dinâmica das atividades, marcada por desafios progressivos, feedback imediato e liberdade para testar hipóteses, aproximou a experiência matemática de uma lógica de jogo, permitindo que os estudantes aprendessem pelo erro construtivo, pela experimentação e pela análise de consequências, aspecto destacado também por Kishimoto ao discutir o potencial pedagógico do lúdico.

Esse comportamento reforça os achados de Lozano, Canlas e Coronel (2023) segundo os quais ambientes estruturados com elementos de jogo favorecem o desenvolvimento de competências cognitivas superiores, especialmente quando os alunos precisam tomar decisões sob restrição de informação e incerteza. O aumento consistente nos indicadores de participação, resolução voluntária de problemas e argumentação matemática

está alinhado a essa literatura, que aponta a gamificação como catalisadora de processos de autorregulação, persistência e análise crítica.

A progressão dos alunos nos conteúdos de probabilidade e análise combinatória confirma o que a Educação Matemática registra: desafios contextualizados favorecem a compreensão de conceitos abstratos. Em consonância com Grandó (2015), que descreve os jogos como situações-problema naturais, observou-se que atividades envolvendo cálculo de probabilidades, contagem de combinações ou análise de cenários possíveis tornaram-se mais acessíveis quando inseridas no contexto das jogadas reais. Os alunos, ao decidirem se pagariam, aumentariam ou desistiriam da mão, mobilizavam estratégias de raciocínio combinatório e probabilístico, transformando o jogo em um laboratório de modelagem informal.

O desempenho registrado nos testes reforça esse movimento. O crescimento mais expressivo no tópico de permutação e combinação dialoga diretamente com a ideia de que o jogo cria demanda cognitiva autêntica, pois para raciocinar sobre tipos de mãos possíveis, estrutura do baralho e chances de vitória, os estudantes precisaram aplicar a contagem de forma significativa. De modo semelhante, o avanço no conceito de espaço amostral está alinhado ao argumento de Kishimoto de que o lúdico amplia a percepção do todo e das relações internas de um sistema, permitindo ao estudante visualizar melhor as possibilidades envolvidas.

Por outro lado, os resultados mais modestos em valor esperado e probabilidade condicional são coerentes com a hierarquia dos conteúdos em livros-texto, em que esses são conceitos de maior abstração e exigem uma transição cognitiva mais sofisticada, do raciocínio imediato para o raciocínio baseado em longo prazo e dependência entre eventos. Mesmo assim, o progresso observado demonstra que o poker funcionou como um contexto fértil para iniciar essa transição, oferecendo situações reais em que decisões melhores só podem ser tomadas quando se compreende a interação entre probabilidades e consequências futuras.

Dessa forma, os dados coletados não apenas confirmam pressupostos teóricos discutidos na literatura especializada, mas também demonstram o potencial formativo dos jogos de estratégia quando mediados por intencionalidade pedagógica.

## 5.5 Limitações do Estudo

Algumas limitações devem ser reconhecidas na condução deste estudo. A primeira refere-se ao número reduzido de participantes, circunscrito a uma única instituição de ensino, o que restringe a generalização dos resultados para outros contextos educacionais. Além disso, o tempo disponível para a implementação da proposta mostrou-se insuficiente para o aprofundamento sistemático de conteúdos matemáticos mais avançados, especialmente aqueles que demandam maior maturidade conceitual por parte dos estudantes.

Outro aspecto relevante diz respeito à heterogeneidade do conhecimento prévio da

turma, que exigiu ajustes contínuos nas sequências didáticas e no ritmo das atividades, impactando o planejamento inicialmente previsto. Somam-se a esse fator as limitações de ordem logística, relacionadas à disponibilidade de materiais e ao espaço físico, que influenciaram diretamente a organização das aulas práticas e a condução das atividades propostas.

Destaca-se, ainda, uma limitação específica associada à prática extraclasse do poker em ambiente presencial, uma vez que essa modalidade requer a participação simultânea de um número maior de jogadores para que sua dinâmica ocorra de forma adequada, o que dificultou sua implementação contínua ao longo do período de intervenção. Tal característica contrasta com o xadrez, que pode ser praticado de forma imediata entre apenas dois participantes, favorecendo maior flexibilidade, frequência e autonomia nas atividades em sala de aula. Essas limitações, embora não invalidem os resultados obtidos, devem ser consideradas na interpretação dos dados e na proposição de estudos futuros.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos evidenciam o potencial dos jogos de estratégia como ferramenta pedagógica significativa para o ensino de matemática. As disciplinas de Xadrez e Poker demonstraram ser capazes de promover engajamento, raciocínio lógico, pensamento probabilístico e autonomia intelectual. Os achados reforçam que a matemática pode ser ensinada de maneira dinâmica, significativa e contextualizada, contribuindo para a formação integral dos estudantes.

Ainda é possível concluir que os componentes eletivos propostos e analisados apresentam estrutura sólida e potencial pedagógico significativo. Quando bem planejadas e aplicadas, as disciplinas de Xadrez e de Probabilidade com Poker proporcionam aos estudantes uma experiência de aprendizagem dinâmica, motivadora e intelectualmente desafiadora. Além de favorecer a compreensão de conteúdos matemáticos, essas eletivas contribuem para o desenvolvimento de habilidades essenciais, como concentração, organização, tomada de decisão, pensamento estratégico e resolução de problemas, competências úteis não apenas na Matemática, mas também em diversas outras áreas do conhecimento.

Este trabalho e o Produto Educacional vinculado também se configuram como uma oportunidade de construção de um material didático voltado a professores que não são familiarizados com os jogos utilizados. Ao apresentar tanto as regras dos jogos quanto as possibilidades de aplicação pedagógica, busca-se oferecer suporte para que docentes possam incorporar essas práticas em suas aulas, visualizando maneiras concretas de relacionar o lúdico ao conteúdo curricular. Espera-se, assim, contribuir para o fortalecimento dos componentes eletivos e estimular a criação de novas atividades que deixem as propostas ainda mais completas, atrativas e alinhadas às necessidades dos estudantes.

Sugere-se a ampliação do estudo para diferentes contextos escolares, níveis de ensino e perfis socioeconômicos. Outras perspectivas incluem a avaliação longitudinal dos impactos do uso de jogos de estratégia no desempenho acadêmico em longo prazo e a incorporação de ferramentas digitais, inteligência artificial e jogos online educacionais para ampliar experiências interativas.

# Referências Bibliográficas

- ACADEMIC.COM en. *Chess piece relative value*. 2025. <<https://en-academic.com/dic.nsf/enwiki/11527151>>. Acesso em: 20 jul. 2025.
- AVILA, G. *O Jogo de Xadrez*. Campinas-SP: IMECC-UNICAMP, 2020.
- BELLO, L. *Poker em 50 lições rápidas e fáceis*. Rio de Janeiro: Agir, 2012.
- BRASIL. *Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as diretrizes e bases da educação nacional para dispor sobre a reforma do ensino médio*. Brasília: [s.n.], 2017. Diário Oficial da União, seção 1. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/lei/L13415.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/L13415.htm)>. Acesso em: 26 ago. 2025.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 3 jun. 2025.
- CALDEIRA, A. *Para Ensinar e Aprender Xadrez*. Jandira-SP: Principis, 2021.
- CHESS.COM. *Como jogar xadrez*. 2025. <<https://www.chess.com/pt-BR/como-jogar-xadrez>>. Acesso em: 3 jun. 2025.
- DETERDING, S. et al. From game design elements to gamefulness: Defining "gamification". In: *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference*. New York: ACM, 2011.
- GIPSYTEAM. *Outs no Poker: o que são e como calcular*. 2025. Acessado em 10 jan. 2025. Disponível em: <<https://www.gipsyteam.com.br/poker/outs-no-poker>>.
- GRANDO, R. C. Recursos didáticos na educação matemática: jogos e materiais manipulativos. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, v. 5, n. 2, p. 393–416, 2015. ISSN 2236-2150.
- HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- LOZANO, A. S.; CANLAS, R. J. B.; CORONEL. A game-based learning application to help learners to practice mathematical patterns and structures. *International Journal of Computing Sciences Research*, 2023.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

- MUNIZ, R. *Seguindo MIT e Harvard, Unicamp adota pôquer em disciplina sobre negócios*. 2013. Ensino Superior Unicamp, 21 ago. 2013. Acesso em: 02 set. 2025. Disponível em: <https://www.revistaensinosuperior.gr.unicamp.br/notas/seguindo-mit-e-harvard-unicamp-adota-poquer-em-disciplina-sobre-negocios>.
- MURR, C. E. *Entendendo e aplicando a gamificação [curso eletrônico]: o que é, para que serve, potencialidades e desafios*. Florianópolis: [s.n.], 2020. Curso eletrônico, UFSC/UAB.
- PEREIRA, A. G. C.; CAMPOS, V. S. M. *Análise combinatória e probabilidade*. 2. ed. Natal: EDUFRN, 2012.
- PINHEIRO, C. *O problema de Monty Hall: probabilidade condicional*. 2021. MIT Technology Review Brasil. Disponível em: <https://mittechreview.com.br/o-problema-de-monty-hall/>. Acesso em: 26 ago. 2025.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. 11. ed. Cambridge: Academic Press, 2014.
- TEIGSET, M. D. *Association Between Playing Chess and Solving Mathematical Tasks*. Dissertação (Mestrado) — University of Agder, Norway, 2023.
- WSOP. *Legalidade do poker*. 2025. <https://wsop.com.br/legalidade/>. Acesso em: 19 maio 2025.

# A – Lista de Desafios Matemáticos Aplicados ao Poker

Resolva os problemas a seguir apresentando os cálculos e justificativas matemáticas completas.

1. Calcule a probabilidade de receber um par de ases na mão inicial.
2. Qual é a probabilidade de formar um *set* (trinca com a carta da mão) no *flop* segurando um par na mão?
3. Com quatro cartas do mesmo naipe no *flop*, qual é a probabilidade de completar *flush* até o *river*?
4. Com um *open-ended straight draw* no *turn*, calcule a probabilidade de completar sequência no *river*.
5. Qual é a probabilidade de uma mão aleatória vencer *AK* no pré-flop?
6. Um jogador tem 9 *outs* no *turn* e recebe uma aposta que oferece *pot odds* 3:1. Pagar é correto?
7. Calcule o valor esperado de pagar uma aposta de 1 200 fichas em um pote de 4 500 com probabilidade de vitória de 28%.
8. Segurando *KK*, avalie a equidade contra um range TAG: {99+, *ATs*+, *AQo*+, *KQs*}.
9. Com 12 *outs* e razão de 4:1, qual deve ser a probabilidade mínima para pagar?
10. Em um torneio, você tem 18*BB* e o adversário LAG declara *all-in*. Com *AJs*, qual é o critério matemático para decidir?
11. Segurando *AQ*, calcule a probabilidade de vencer contra *JJ* pré-flop.
12. Quantas combinações formam uma mão de *full house* no Texas Hold'em?
13. Qual é a probabilidade de formar quadra usando apenas uma carta da mão?
14. Determine o valor esperado de um blefe com investimento de 3 000 em um pote de 5 400 quando o adversário desiste 48% das vezes.

15. Um jogador com VPIP 42% e PFR 9% declara aumento — qual é o perfil provável?
16. Em *heads-up*, qual é a probabilidade de *T9s* vencer contra *AJo* pré-flop?
17. Em mesa final, qual é o efeito matemático do *ICM* na decisão de pagar ou desistir?
18. Segurando *QQ*, calcule se o *call* é matematicamente favorável contra um range composto de  $\{TT+, AQ+, KQs\}$ .
19. Em um blefe no *river*, qual deve ser a taxa mínima de desistência para que o blefe tenha  $EV \geq 0$ ?
20. Avalie a consistência do estilo de um jogador com VPIP 24%, PFR 22% e agressividade pós-flop alta.

## Gabarito dos Desafios

1.  $\frac{6}{1326} \approx 0,45\%$ .
2.  $\frac{7}{50} \approx 12\%$ .
3.  $\frac{9}{46} + \frac{9}{45} - \frac{9}{46} \frac{9}{45} \approx 35\%$ .
4.  $\frac{8}{46} \approx 17,4\%$ .
5. Aproximadamente 43%.
6. Correto apenas se  $P > 25\%$  — com 9 *outs* é correto.
7.  $EV = 0,28(4\,500) - 0,72(1\,200) \approx -24$  fichas.
8. Aproximadamente 47%.
9. Probabilidade mínima: 20%.
10. Decisão baseada em equidade vs range e risco de eliminação do torneio (ICM).
11. Aproximadamente 46%.
12. 3 744 combinações.
13. Aproximadamente 0,168%.
14.  $EV = 0,48(5\,400) - 0,52(3\,000) \approx 136,8$  fichas.
15. Loose–Passive.
16. Aproximadamente 52%.
17. O ICM aumenta o custo de eliminação e reduz a faixa de *call*.
18. Aproximadamente 53%.
19.  $FC \text{ mínima} = \frac{\text{valor do blefe}}{\text{pote final}} = \frac{3\,000}{8\,400} \approx 36\%$ .
20. Estilo *TAG* *agressivo consistente*.

# B – Relatório de Análise Matemática de uma Mão de Poker

Nome do(a) estudante: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

## 1. Identificação da mão

- Cartas iniciais do jogador: \_\_\_\_\_
- Posição na mesa: \_\_\_\_\_
- Número de jogadores no pote: \_\_\_\_\_

## 2. Descrição da mão

Descreva as ações em cada rodada (pré-flop, flop, turn e river), incluindo tamanhos de apostas e ações dos adversários:

## 3. Perfis e ranges dos adversários

Descreva os perfis observados (TAG, LAG, TP ou LP) e os ranges prováveis de cada adversário envolvido:

## 4. Equidade e probabilidade

Calcule ou estime a equidade da mão principal em relação aos ranges atribuídos:

## 5. Cálculo das *pot odds* e valor esperado (*EV*)

Apresente os valores do pote, o valor da aposta e o cálculo do *EV* das ações possíveis (pagar, aumentar ou desistir):

## 6. Conclusão

Responda de forma objetiva:

- A decisão tomada foi matematicamente correta? \_\_\_\_\_
- Caso não tenha sido correta: qual seria a melhor ação? \_\_\_\_\_
- O perfil do adversário alterou o cálculo matemático? \_\_\_\_\_
- Houve influência emocional na decisão? \_\_\_\_\_

## 7. Reflexão final

Como essa análise pode ajudar a melhorar sua tomada de decisão em futuras situações de jogo?

*Assinatura do(a) estudante:* \_\_\_\_\_

# C – Questionário de Avaliação da Disciplina Probabilidade na Mesa

## Comparação com Aulas Tradicionais de Matemática

**Objetivo:** Investigar a percepção dos alunos sobre a disciplina “*Probabilidade na Mesa*”, comparando-a com aulas tradicionais de matemática quanto à aprendizagem, motivação, metodologia e relevância.

### Parte 1 – Perfil do Aluno

1. Série que você está cursando:  
 1º ano       2º ano       3º ano
2. Você já havia estudado probabilidade antes da disciplina “Probabilidade na Mesa”?  
 Sim       Não
3. Você gosta de jogos de cartas (como pôquer, baralho comum, truco, etc.)?  
 Sim       Não       Mais ou menos

## Parte 2 – Comparação com Aulas Tradicionais

**Escala:** 1 = Discordo totalmente    2 = Discordo    3 = Neutro    4 = Concordo    5 = Concordo totalmente

Nº	Afirmação	1	2	3	4	5
1	A disciplina “Probabilidade na Mesa” foi mais interessante do que as aulas tradicionais de matemática.					
2	Eu aprendi mais sobre probabilidade usando o pôquer do que em aulas expositivas.					
3	As atividades práticas (jogos, simulações, desafios) ajudaram a compreender melhor os conceitos matemáticos.					
4	A metodologia da disciplina aumentou minha participação nas aulas.					
5	A forma de avaliação foi mais justa e motivadora que nas aulas tradicionais.					
6	A disciplina ajudou a desenvolver meu raciocínio lógico e probabilístico.					
7	Trabalhar em grupo facilitou o aprendizado dos conteúdos.					
8	A relação com o professor foi mais próxima e participativa.					
9	A disciplina me fez perceber a utilidade da probabilidade no dia a dia.					
10	Eu preferiria que outras disciplinas fossem ministradas de forma semelhante.					



## D – Produto educacional vinculado a dissertação

Este trabalho resulta da pesquisa desenvolvida no âmbito do **Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/UFRN**, pertencente à linha de pesquisa *Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias*. O projeto apresenta duas propostas de disciplinas eletivas que utilizam jogos de estratégia como ferramentas didáticas para potencializar a aprendizagem em Matemática.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

# PRODUTO EDUCACIONAL DISCIPLINAS ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM XADREZ E POKER

ORIENTADOR:  
PROF. DR. JAQUES SILVEIRA LOPES

**Natal - RN**  
Fevereiro de 2026

KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

**PRODUTO EDUCACIONAL  
DISCIPLINAS ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM  
XADREZ E POKER**

Produto Educacional vinculado a  
Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFRN como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

**Natal - RN**  
Fevereiro de 2026

## Resumo

Este produto educacional apresenta duas propostas de disciplinas eletivas voltadas ao ensino de Matemática por meio de jogos de estratégia: *Xadrez para Iniciantes* e *Probabilidade na Mesa (Poker)*. A partir da perspectiva do PROFMAT/UFRN e da linha de pesquisa Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias, as duas eletivas foram concebidas como instrumentos metodológicos capazes de integrar conceitos matemáticos a situações lúdicas, contextualizadas e estimulantes. A eletiva de xadrez utiliza a estrutura do tabuleiro, os movimentos das peças e desafios clássicos para desenvolver conteúdos como geometria, lógica, análise combinatória e estatística. Já a eletiva de poker explora o Texas Hold'em como ambiente pedagógico para o estudo de espaço amostral, probabilidade, combinatória, valor esperado, equidade e tomada de decisão baseada em dados. Ambas as propostas foram organizadas em planos de aula completos, com duração de 100 minutos cada, contendo objetivos, materiais e desenvolvimento detalhado. O produto busca oferecer aos professores uma alternativa metodológica ativa que favoreça a autonomia intelectual dos estudantes e a aprendizagem significativa de Matemática por meio da resolução de problemas, argumentação e análise crítica.

**Palavras-chave:** Plano de aula; Jogos de estratégia; Probabilidade; Poker; Xadrez.

# Abstract

This educational product presents two elective course proposals designed to support Mathematics teaching through strategic games: *Chess for Beginners* and *Probability at the Table (Poker)*. Developed within the PROFMAT/UFRN framework and aligned with the research line Mathematics in Basic Education and its Technologies, the electives were conceived as methodological tools that integrate mathematical concepts into engaging, contextualized, and problem-based learning environments. The chess elective uses the board structure, piece movements, and classical challenges to explore geometry, logic, combinatorics, and statistics. The poker elective employs Texas Hold'em as a pedagogical setting for studying sample spaces, probability, combinatorial analysis, expected value, equity, and data-driven decision making. Both proposals are organized into complete 100-minute lesson plans, each including objectives, required materials, and structured development. This educational product aims to provide teachers with an active methodological alternative that promotes student autonomy and meaningful learning through investigation, argumentation, and critical analysis.

**Keywords:** Lesson plan; Strategy games; Probability; Poker; Chess.

# Sumário

<b>1</b>	<b>APRESENTAÇÃO</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>XADREZ PARA INICIANTES</b>	<b>7</b>
2.1	Aula 1: A história do xadrez e a matemática do tabuleiro . . . . .	9
2.2	Aula 2: Movimentos das peças e geometria . . . . .	10
2.3	Aula 3: Coordenadas no tabuleiro . . . . .	11
2.4	Aula 4: Combinatória no xadrez . . . . .	13
2.5	Aula 5: Raciocínio lógico e estratégia . . . . .	15
2.6	Aula 6: Simetrias e espelhamentos . . . . .	16
2.7	Aula 7: Desafios matemáticos relacionados ao xadrez . . . . .	17
2.8	Aula 08: Estatísticas no xadrez . . . . .	18
2.9	Aula 09: Organização de torneios e combinatória aplicada . . . . .	19
2.10	Aula 10: Mini torneio matemático . . . . .	20
2.11	Aula 11: Revisão geral e consolidação de conteúdos . . . . .	20
2.12	Aula 12: Projeto final . . . . .	21
<b>3</b>	<b>PROBABILIDADE NA MESA (POKER)</b>	<b>22</b>
3.1	Aula 1: Introdução ao poker . . . . .	24
3.2	Aula 2: Métodos de contagem . . . . .	28
3.3	Aula 3: Combinatória aplicada . . . . .	29
3.4	Aula 4: Espaço amostral . . . . .	32
3.5	Aula 5: Probabilidades no poker . . . . .	33
3.6	Aula 6: Probabilidade condicional . . . . .	35
3.7	Aula 7: Odds e Pot Odds . . . . .	37
3.8	Aula 8: Valor esperado (EV) . . . . .	39
3.9	Aula 9: Probabilidade e bluff . . . . .	41
3.10	Aula 10: Probabilidade de vitória entre mãos . . . . .	43
3.11	Aula 11: Estatística no poker: performance e longo prazo . . . . .	46
3.12	Aula 12: Probabilidade em Torneios e Gestão de Banca . . . . .	49
3.13	Aula 13: Classificação de jogadores: perfil, probabilidade e decisão . . . . .	51
3.14	Aula 14: Problemas clássicos e desafios matemáticos no poker . . . . .	54
3.15	Aula 15: Projeto final: Análise matemática de uma mão real . . . . .	55

# 1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho resulta da pesquisa desenvolvida no âmbito do **Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/UFRN**, pertencente à linha de pesquisa *Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias*. O projeto apresenta duas propostas de disciplinas eletivas que utilizam jogos de estratégia como ferramentas didáticas para potencializar a aprendizagem em Matemática.

A primeira proposta utiliza o jogo de xadrez como eixo estruturador para promover discussões e atividades relacionadas a diversos tópicos matemáticos, abrangendo *geometria, álgebra, análise combinatória, estatística*, entre outros. A metodologia parte da dinâmica do jogo para estimular o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a argumentação matemática e a autonomia dos estudantes.

A segunda proposta tem como base o *poker* no estilo *Texas Hold'em*, explorado não como jogo de azar, mas como um ambiente matemático rico e contextualizado, que favorece a compreensão aplicada de conteúdos como *análise combinatória, probabilidade, estatística e tomada de decisão baseada em dados*. Ao modelar cenários reais do jogo, o aluno é levado a interpretar informações, calcular riscos, avaliar estratégias e fundamentar decisões de forma crítica.(SANTOS, 2026)

Ao apresentarmos este material, nosso propósito é oferecer aos professores uma alternativa metodológica ativa, que contribua para o ensino de Matemática de forma mais envolvente e significativa. Buscamos apoiar docentes que, muitas vezes, enfrentam dificuldades para trabalhar determinados conteúdos de maneira motivadora, promovendo assim o estudante como protagonista e agente transformador do próprio processo de aprendizagem.

Neste material, o professor encontrará os planos de aula organizados de forma sequenciada, os quais, em conjunto com a dissertação à qual estão vinculados, podem subsidiar a construção de uma disciplina completa que integra o estudo desses dois jogos tão significativos aos conteúdos fundamentais da Matemática. A proposta evidencia como ambos os jogos se articulam com conceitos essenciais da área, oferecendo um caminho pedagógico coerente, motivador e alinhado às práticas contemporâneas de ensino.

## 2 XADREZ PARA INICIANTE

O componente eletivo *Xadrez para Iniciantes* foi concebido com o objetivo de integrar o potencial pedagógico do jogo de xadrez ao estudo de conteúdos matemáticos da Educação Básica. Por sua estrutura altamente organizada e por exigir planejamento, análise e antecipação de consequências, o xadrez constitui um ambiente privilegiado para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, como raciocínio lógico, visualização espacial, análise combinatória, interpretação de padrões e argumentação. Ao explorar o tabuleiro, as peças e as regras do jogo, os estudantes vivenciam conceitos de geometria, álgebra, estatística e lógica de forma concreta e contextualizada, favorecendo aprendizagens significativas.

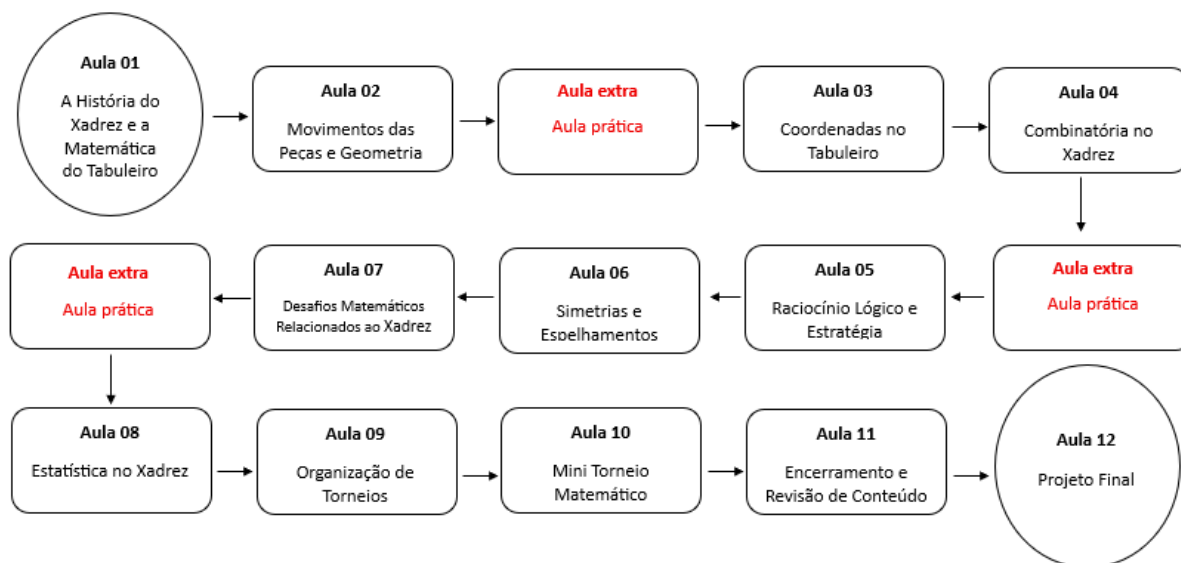
A proposta desta eletiva valoriza metodologias ativas, nas quais o estudante assume papel protagonista na resolução de problemas, na formulação de hipóteses e na justificativa das estratégias adotadas durante as atividades e partidas. Cada aula foi elaborada para articular a ludicidade do jogo com o rigor matemático, permitindo que o xadrez se torne mais do que uma prática recreativa: transforma-se em um instrumento formativo capaz de ampliar a compreensão dos estudantes sobre a matemática e sobre suas aplicações em situações reais. Espera-se que a disciplina contribua para o desenvolvimento de competências cognitivas essenciais não só para matemática como para outras áreas do conhecimento e para o fortalecimento da autonomia intelectual dos alunos.

A identificação das habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desenvolvidas na eletiva de Xadrez é essencial para evidenciar a intencionalidade pedagógica da proposta e seu alinhamento ao currículo do Ensino Médio. O xadrez, por integrar raciocínio lógico, análise espacial e resolução de problemas, constitui um contexto privilegiado para mobilizar competências de Geometria, Probabilidade, Estatística e Processos Matemáticos. Ao relacionar cada aula às habilidades específicas, demonstra-se como o jogo favorece aprendizagens significativas, articulando teoria e prática e potencializando o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. As habilidades da BNCC desenvolvidas durante as disciplinas eletivas estão no quadro 1 (BRASIL, 2018).

**Quadro 1:** Habilidades da BNCC desenvolvidas na Eletiva de Xadrez

<b>Aula</b>	<b>Códigos</b>	<b>Descrição</b>
<b>Aula 01:</b> História do xadrez e matemática do tabuleiro	EM13MAT102, EM13MAT104	Resolução de problemas em diferentes contextos, análise de estratégias e construção de argumentos matemáticos ao relacionar a estrutura do tabuleiro com ideias de organização, padrão e regularidade.
<b>Aula 02:</b> Movimentos das peças e geometria	EM13MAT401, EM13MAT404	Uso de propriedades geométricas e transformações (deslocamentos, alinhamentos, diagonais) para descrever e analisar os movimentos das peças no tabuleiro.
<b>Aula 03:</b> Coordenadas no tabuleiro	EM13MAT301, EM13MAT401	Utilização de representações algébricas e geométricas para localizar casas como pontos de um plano cartesiano e descrever trajetórias de peças com base em relações geométricas.
<b>Aula 04:</b> Combinatória no xadrez	EM13MAT302, EM13MAT501	Identificação de padrões e uso de técnicas de contagem para determinar disposições possíveis de peças, analisando espaços amostrais finitos e probabilidades simples em situações do jogo.
<b>Aula 05:</b> Raciocínio lógico e estratégias	EM13MAT104, EM13MAT302	Construção de argumentos lógicos para justificar jogadas e estratégias, reconhecendo padrões em posições e sequências de movimentos.
<b>Aula 06:</b> Simetrias e espelhamentos	EM13MAT404, EM13MAT405	Aplicação de reflexões e outras transformações geométricas na análise de posições equivalentes no tabuleiro, investigando simetrias e suas propriedades.
<b>Aula 07:</b> Desafios matemáticos no xadrez	EM13MAT104, EM13MAT302	Resolução de desafios envolvendo o tabuleiro (como percursos e contagens), explorando padrões, regularidades e justificando procedimentos adotados.
<b>Aula 08:</b> Estatísticas no xadrez	EM13MAT502, EM13MAT503	Coleta, organização e interpretação de dados de partidas ou torneios, cálculo de frequências e medidas estatísticas simples e análise de desempenho.
<b>Aula 09:</b> Organização de torneios de xadrez	EM13MAT501, EM13MAT502	Construção e interpretação de espaços amostrais e contagens de confrontos, análise de tabelas e frequências em diferentes formatos de torneio.
<b>Aula 10:</b> Mini torneio matemático	EM13MAT503, EM13MAT104	Análise de resultados do torneio com base em dados registrados e argumentação sobre estratégias e decisões à luz das informações estatísticas obtidas.
<b>Aula 11:</b> Encerramento do conteúdo e revisão de tópicos	EM13MAT102, EM13MAT302	Revisão articulada de conceitos (geometria, combinatória, estatística e lógica), identificação de conexões entre os tópicos e reflexão sobre estratégias de resolução de problemas.
<b>Aula 12:</b> Projeto final da disciplina	EM13MAT104, EM13MAT506	Elaboração e comunicação de análises matemáticas estruturadas envolvendo o xadrez, avaliando dados e apresentando conclusões fundamentadas em argumentos e cálculos.

Figura 2.1: Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas



Fonte: Autoria própria.

## 2.1 Aula 1: A história do xadrez e a matemática do tabuleiro

Esta aula tem como finalidade introduzir o xadrez como ferramenta pedagógica e estabelecer as primeiras conexões entre o jogo e a Matemática. O foco não é explorar a história completa do xadrez, mas utilizá-la como ponto de partida para mostrar que o desenvolvimento do jogo, desde suas formas antigas até o modelo moderno, fortaleceu sua relação com o raciocínio lógico, estratégico e combinatório.

Ao apresentar o tabuleiro, recomenda-se enfatizar que sua estrutura não é aleatória: trata-se de uma matriz  $8 \times 8$ , organizada segundo padrões bem definidos, cuja alternância de cores segue um ritmo periódico. Desde o início do curso, é importante que os estudantes compreendam que essa padronização possibilita análises matemáticas, favorecendo a investigação de simetrias, contagens, coordenadas e sequências de movimentos. Durante o diálogo com os alunos, o professor pode conduzir questionamentos que estimulem a formulação de hipóteses sobre como o xadrez pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas, registrando no quadro ideias espontâneas como “contagem de casas”, “sequência de movimentos”, “estratégias”, “padrões” e “raciocínio lógico”.

Para consolidar o conteúdo, sugere-se uma atividade de fixação em que cada estudante escreva, individualmente ou em dupla, uma resposta breve à pergunta: “*Quais aspectos do xadrez podem estar relacionados com a Matemática e por quê?*” Essa produção não deve ser utilizada como instrumento avaliativo de acerto ou erro, mas como diagnóstico inicial do pensamento lógico dos alunos e da forma como cada um percebe a relação

entre o jogo e os conceitos matemáticos que serão aprofundados ao longo do curso.

Caso se deseje utilizar esta aula para fins avaliativos, é possível aplicar uma rubrica simples contemplando critérios como participação, capacidade de argumentação e clareza na articulação entre o xadrez e a Matemática. No entanto, essa avaliação é opcional; o objetivo principal da aula é despertar o interesse e construir a base conceitual que permitirá o avanço para os conteúdos posteriores, nos quais cada elemento do tabuleiro e das regras do jogo será associado explicitamente a um conceito matemático específico.

## 2.2 Aula 2: Movimentos das peças e geometria

Esta aula tem por finalidade apresentar os movimentos das peças do xadrez, estabelecendo paralelos com conceitos geométricos que auxiliam no desenvolvimento do raciocínio espacial e no reconhecimento de padrões matemáticos. O propósito central não é apenas memorizar como cada peça se desloca, mas compreender que tais movimentos seguem regras estruturadas que podem ser descritas, analisadas e comparadas por meio da linguagem da Geometria.

Recomenda-se iniciar com a representação do tabuleiro como um plano quadriculado composto por 64 casas, o que favorece a identificação de deslocamentos em linhas, colunas e diagonais. Em seguida, cada peça deve ser apresentada de forma sistemática, destacando a relação entre seu movimento e conceitos geométricos associados. Por exemplo, a torre desloca-se em trajetórias retilíneas paralelas aos eixos do tabuleiro; o bispo movimenta-se ao longo de diagonais, evidenciando direções oblíquas; e a dama combina deslocamentos retos e diagonais, permitindo uma interpretação alternativa como composição de movimentos da torre e do bispo. O cavalo deve receber atenção especial, pois se trata de uma peça cujo deslocamento alterna direção e distância, formando um padrão geométrico em “L”, permitindo introduzir o raciocínio sobre saltos e deslocamentos não lineares.

A abordagem matemática nesta aula deve acontecer de forma progressiva e contextualizada. Ao descrever os movimentos, recomenda-se registrar no quadro os termos geométricos correspondentes — paralelismo, perpendicularidade, diagonal, mudança de direção, distância, simetria e trajetória — para que o estudante compreenda que a movimentação das peças não é arbitrária, mas estruturada por relações que podem ser analisadas segundo propriedades da Geometria. Se desejado, pode-se também introduzir comparações entre peças, como distinguir movimentos ilimitados e movimentos de alcance restrito, ou diferenciar peças que dependem de casas livres para se deslocarem daquelas capazes de saltar outras peças.

Para reforçar o aprendizado, é recomendável a aplicação de uma atividade prática simples na qual os estudantes recebam diferentes posições iniciais no tabuleiro e precisem indicar todas as casas alcançáveis por uma determinada peça em um único

lance. Essa prática pode ser realizada com peças físicas, tabuleiro projetado em tela ou representações impressas, desde que os alunos sejam incentivados a justificar verbalmente os movimentos com base nos conceitos geométricos estudados. Caso se deseje incorporar avaliação nesta aula, pode ser aplicada uma tarefa de identificação escrita, em que os estudantes descrevam em linguagem matemática os tipos de deslocamentos de pelo menos três peças distintas, demonstrando a relação entre o movimento e suas propriedades geométricas.

Ao final da aula, é importante ressaltar que o domínio dos movimentos não constitui apenas uma habilidade operacional necessária para jogar xadrez, mas também uma porta de entrada para o estudo formal da Geometria, uma vez que o tabuleiro se comporta como plano discreto onde trajetórias, direções e restrições de movimento podem ser modeladas matematicamente. Esse entendimento fornecerá base para as aulas seguintes, que aprofundarão coordenadas no tabuleiro, combinatória aplicada e estratégias lógicas.

## 2.3 Aula 3: Coordenadas no tabuleiro

Esta aula tem como finalidade relacionar o tabuleiro de xadrez ao Plano Cartesiano, promovendo o desenvolvimento da visualização geométrica e da interpretação de coordenadas no contexto do jogo. O ponto de partida consiste em revisar os conceitos essenciais do plano cartesiano, tais como eixo horizontal, eixo vertical, pares ordenados e noção de quadrantes, enfatizando que o tabuleiro pode ser interpretado como uma grade estruturada de pontos, semelhante a um sistema de coordenadas bidimensional. Essa revisão deve ser objetiva e funcional, reforçando apenas os elementos necessários para ampliar a leitura espacial dos alunos durante o estudo do xadrez.

Após essa retomada, propõe-se analisar a notação algébrica do xadrez (a1–h8) como um sistema equivalente à linguagem matemática de coordenadas. Cada casa do tabuleiro deve ser identificada simultaneamente pelas duas formas de representação: colunas marcadas por letras e linhas numeradas, que podem ser associadas a pares ordenados  $(x, y)$ . É importante enfatizar que não existe conflito entre as duas linguagens, mas sim uma tradução entre elas, permitindo que o estudante compreenda uma mesma posição como, por exemplo, “e4” e  $(5, 4)$ , desde que uma convenção de correspondência seja estabelecida previamente, como nas figuras 2.2 e 2.3.

Figura 2.2: Tabuleiro representado como plano cartesiano.

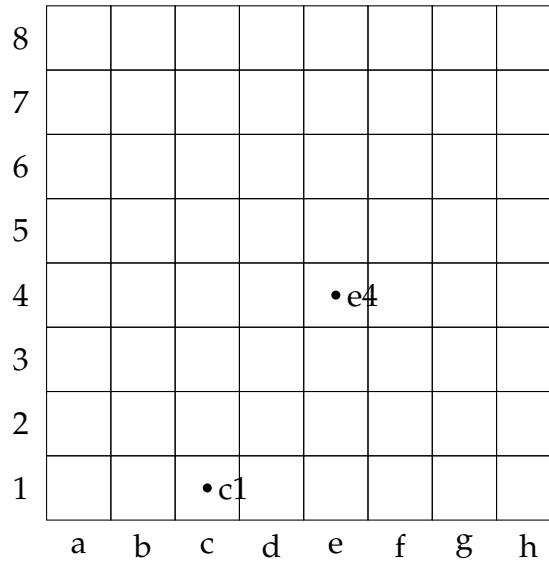
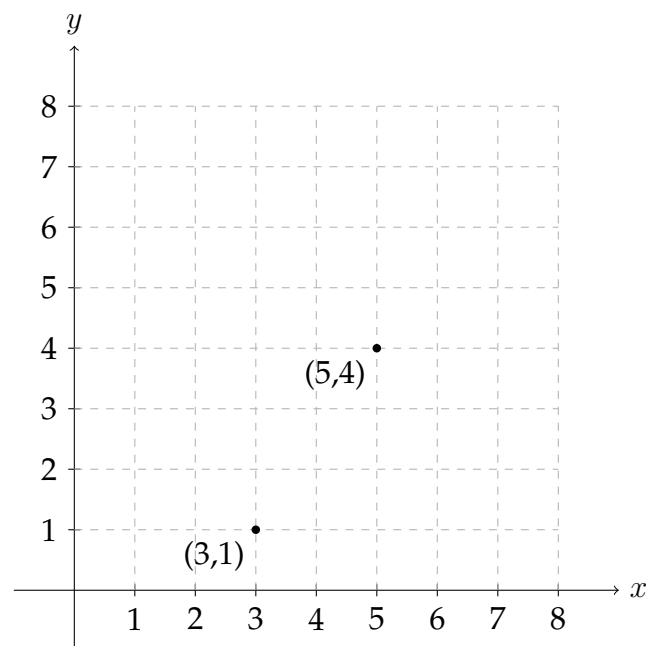


Figura 2.3: Plano cartesiano com pontos representando posições equivalentes ao tabuleiro.



A partir da equivalência entre notação algébrica e coordenadas cartesianas, recomenda-se avançar para a aplicação prática representando graficamente as trajetórias das peças. A trajetória da torre pode ser usada como exemplo de deslocamento paralelo aos eixos; a da dama, como composição de movimentos retos e diagonais; e a do cavalo, como deslocamento descontínuo. Em particular, o movimento do bispo possibilita uma exploração mais aprofundada da geometria analítica, já que suas trajetórias correspondem a retas com coeficiente angular definido, permitindo a modelagem por equações. Assim, sugere-se trabalhar com o problema orientador: “Qual é a equação da reta percorrida pelo bispo no deslocamento de c1 até g5?”, incentivando os estudantes a

localizar os pontos correspondentes, converter a notação algébrica para coordenadas cartesianas, identificar o coeficiente angular e construir a equação da reta.

A discussão pode prosseguir incorporando conceitos complementares da geometria analítica, como cálculo da distância entre duas casas no tabuleiro interpretadas como pontos do plano e determinação do ponto médio entre posições iniciais e finais de uma peça em um deslocamento. Esses procedimentos favorecem o fortalecimento do raciocínio matemático e expandem a compreensão dos estudantes acerca do tabuleiro como plano discreto governado por relações geométricas precisas.

Para finalizar, recomenda-se a construção de um mapa coletivo de coordenadas no quadro. O professor pode marcar algumas casas iniciais e solicitar que os estudantes completem gradualmente as posições restantes utilizando a dupla representação (algébrica e cartesiana). O fechamento visual desse mapa contribui para consolidar a compreensão da correspondência entre as notações e oferece um recurso de apoio para aulas posteriores, quando novos conteúdos lógicos e combinatórios serão introduzidos com base nas posições do tabuleiro.

## 2.4 Aula 4: Combinatória no xadrez

O início da aula deve apresentar o problema motivador: “*Quantas maneiras existem de colocar duas torres no tabuleiro de xadrez de modo que elas não se ataquem?*”. A questão, além de introduzir um desafio acessível, aproxima os estudantes do raciocínio combinatório ao exigir que identifiquem posições possíveis e descartem aquelas que violam a condição de segurança entre as peças. A situação pode ser abordada como metáfora para a noção de aberturas no xadrez, uma vez que diferentes posicionamentos iniciais produzem dinâmicas distintas na partida, favorecendo a discussão sobre variedade de possibilidades dentro de um sistema governado por regras.

No desenvolvimento, recomenda-se aplicar explicitamente os princípios de contagem, arranjos e combinações, tomando o tabuleiro como universo finito de possibilidades. A resolução do problema inicial pode ser progressivamente guiada, partindo do caso irrefletido — número total de posições possíveis para duas torres — e avançando para a exclusão dos casos inválidos, quando ambas compartilham a mesma linha ou coluna. Assim, a solução pode ser obtida observando que o tabuleiro possui 64 casas, de modo que o número total de pares de casas possíveis é

$$\binom{64}{2} = 2016.$$

As torres se atacam quando ocupam a mesma linha ou a mesma coluna. Em cada linha há

$$\binom{8}{2} = 28 \text{ pares possíveis,}$$

e como existem 8 linhas, obtém-se  $8 \cdot 28 = 224$  pares. O mesmo ocorre com as colunas, resultando em outros 224 pares em que as torres se atacam. Assim, o número total de pares inválidos é

$$224 + 224 = 448.$$

Logo, o número de posicionamentos possíveis em que as duas torres não se atacam é

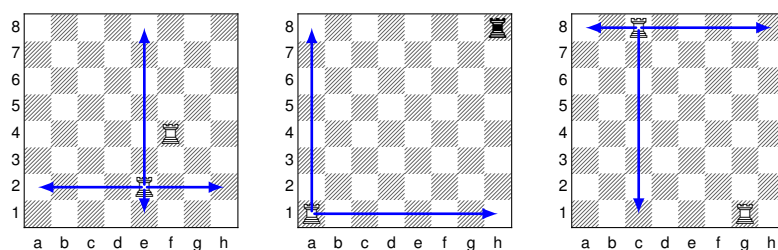
$$2016 - 448 = \boxed{1568}.$$

Se as torres forem distinguíveis (torre preta e torre branca), cada par é contado duas vezes. Portanto,

$$1568 \cdot 2! = \boxed{3136}$$

Na figura 2.4 estão três exemplos de possibilidades.

Figura 2.4: Torres não se atacando



Fonte: Própria autoria

Outro problema no mesmo sentido: *De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não possam se atacar mutuamente?* Uma maneira natural de resolver é contar todas as posições possíveis e subtrair aquelas em que os reis se atacam. Escolhendo uma casa para o rei branco e outra distinta para o rei preto, o número total de colocações possíveis é

$$64 \cdot 63 = 4032.$$

Os reis se atacam quando estão em casas vizinhas (horizontal, vertical ou diagonal). O total de pares ordenados de casas vizinhas pode ser calculado pela soma dos vizinhos de cada tipo de casa:

- 36 casas internas têm 8 vizinhos:  $36 \cdot 8$ ;
- 24 casas na lateral (não nos cantos) têm 5 vizinhos:  $24 \cdot 5$ ;
- 4 cantos têm 3 vizinhos:  $4 \cdot 3$ .

Logo, o total de "pares de casas vizinhas" contados com ordem é

$$36 \cdot 8 + 24 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 288 + 120 + 12 = 420,$$

Esses 420 correspondem justamente às colocações em que os reis se atacam mutuamente. Assim, o número de colocações em que não se atacam é

$$4032 - 420 = \boxed{3612}.$$

Assim, existem 3612 maneiras de posicionar um rei branco e um rei preto no tabuleiro de modo que não possam se atacar mutuamente.

O fechamento da aula deve enfatizar a compreensão do xadrez como um ambiente rico em problemas combinatórios. O tabuleiro, por ser um espaço discreto e finito, permite a construção de modelos matemáticos mediante contagem estruturada de possibilidades sob restrições. Assim, busca-se que os estudantes reconheçam que as ideias trabalhadas não se limitam a desafios lúdicos, mas constituem princípios fundamentais da matemática combinatória, relevantes para a resolução de problemas em diferentes contextos. Essa síntese contribui para preparar os alunos para os conteúdos posteriores, nos quais as estratégias combinatórias serão associadas à lógica do jogo.

## 2.5 Aula 5: Raciocínio lógico e estratégia

O início da aula deve promover uma conversa orientada sobre a importância de “pensar antes de jogar”, estimulando os estudantes a perceberem que cada jogada no xadrez envolve antecipação de cenários e análise de possibilidades. Essa reflexão pode ser associada ao funcionamento das proposições lógicas, já que, tal como em um argumento matemático, uma jogada é tomada com base nas condições do tabuleiro e nas consequências que ela produz. O objetivo dessa etapa inicial é aproximar os estudantes da ideia de que o raciocínio estratégico no xadrez pode ser compreendido como uma forma de encadeamento lógico, em que conclusões dependem de premissas claramente avaliadas.

No desenvolvimento, recomenda-se trabalhar os conectivos lógicos — “e”, “ou”, “não” e “se-então” — aplicando-os diretamente a situações de jogo. O uso de exemplos concretos facilita a transposição entre linguagem do xadrez e linguagem lógica, como na proposição: “*Se mover o cavalo, então deixará o rei em xeque*”. Essa afirmação pode ser analisada como uma implicação lógica, permitindo a construção da tabela-verdade correspondente e o estudo de sua validade, independentemente de se tratar de uma jogada vantajosa ou não. De modo semelhante, podem ser exploradas conjunções, disjunções e negações em expressões como “*A dama ataca a torre e o bispo*”, “*O rei pode fugir ou bloquear o ataque*” e “*Não existe defesa possível para esta posição*”. O estudo dessas proposições possibilita interpretar o raciocínio estratégico como um processo argumentativo, em que cada afirmação deve ser avaliada quanto à sua veracidade e às consequências lógicas que desencadeia.

O fechamento da aula deve retomar a integração entre lógica e estratégia, desta-

cando que a habilidade de planejar jogadas com base em condições e consequências é semelhante à estrutura de uma demonstração matemática, na qual conclusões só são válidas quando derivam coerentemente de premissas. Assim, busca-se consolidar a compreensão de que a tomada de decisão no xadrez não depende de intuição isolada, mas de um processo de encadeamento racional que pode ser analisado, justificado e aprimorado por meio de ferramentas lógicas formais.

## 2.6 Aula 6: Simetrias e espelhamentos

A aula tem como objetivo desenvolver a compreensão de simetrias e espelhamentos a partir da observação do tabuleiro de xadrez, estimulando o reconhecimento das regularidades geométricas presentes em sua estrutura. A proposta inicia-se com a apresentação do tabuleiro para que os estudantes identifiquem espontaneamente possíveis simetrias, permitindo que construam referências visuais antes da formalização conceitual. Na sequência, são introduzidas as definições de simetria axial e simetria central, estabelecendo relações entre os conceitos matemáticos e a organização geométrica do tabuleiro.

Como aprofundamento conceitual, recomenda-se explorar a representação algébrica das simetrias no plano cartesiano, relacionando o tabuleiro a transformações geométricas formais. Pode-se, por exemplo, propor que os estudantes determinem as coordenadas da imagem de uma peça localizada em  $(x, y)$  quando refletida em relação ao eixo vertical central do tabuleiro. Considerando o tabuleiro indexado de 1 a 8, a reflexão em relação à reta  $x = 4,5$  pode ser modelada pela transformação

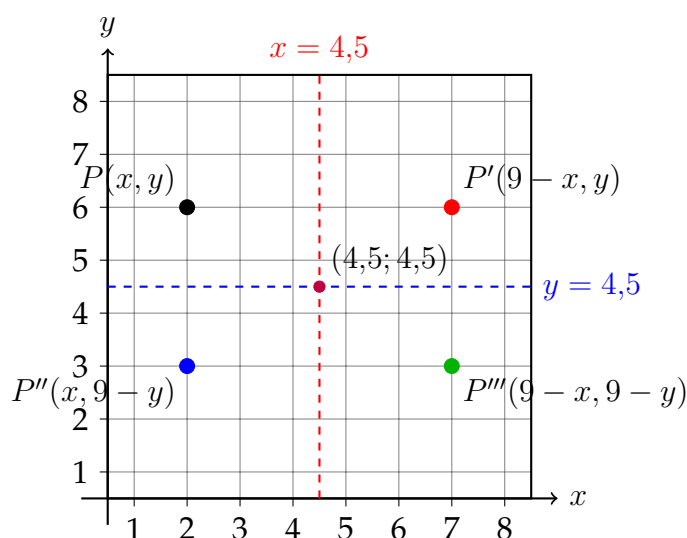
$$(x, y) \mapsto (9 - x, y).$$

De modo semelhante, a reflexão em relação à reta horizontal  $y = 4,5$  pode ser descrita por

$$(x, y) \mapsto (x, 9 - y).$$

Essas expressões permitem formalizar o conceito de espelhamento, articulando linguagem geométrica e linguagem algébrica.

Figura 2.5: Representação do tabuleiro como plano cartesiano discreto, com reflexões axial vertical ( $x = 4,5$ ), horizontal ( $y = 4,5$ ) e simetria central.



Como atividade investigativa, sugere-se propor o seguinte problema: “Quantas casas do tabuleiro permanecem invariantes sob reflexão central?” Ao considerar a simetria central em torno do ponto  $(4,5; 4,5)$ , observa-se que nenhuma casa coincide exatamente consigo mesma, pois o centro da simetria não corresponde a uma casa, mas ao ponto médio entre quatro casas centrais. Essa discussão favorece a compreensão da diferença entre simetria axial e simetria central, além de estimular a análise das propriedades estruturais do tabuleiro. Outra possibilidade consiste em investigar quais posições de duas peças distintas produzem configurações simétricas e como essa simetria pode ser utilizada estrategicamente em finais de partida.

Outro momento prático, recomenda-se a utilização de dobraduras e espelhos para representar reflexões de posições sobre o tabuleiro, de modo a reforçar a aprendizagem por meio de manipulação concreta. A atividade orientada consiste em refletir a posição de uma peça em relação aos eixos  $x = 4,5$  e  $y = 4,5$ , favorecendo a aplicação direta dos conceitos trabalhados. Ao final, orienta-se que os estudantes associem a simetria ao aspecto estético e estratégico do xadrez, destacando que padrões geométricos presentes no tabuleiro contribuem para a lógica do jogo e podem auxiliar na tomada de decisões durante a partida.

## 2.7 Aula 7: Desafios matemáticos relacionados ao xadrez

A aula tem como finalidade explorar problemas matemáticos clássicos associados ao xadrez, utilizando situações desafiadoras para promover o raciocínio lógico, a análise de padrões e a elaboração de estratégias. A proposta inicia-se com a apresentação do desafio do “passeio do cavalo”, no qual os estudantes devem mover a peça cavalo de  $a1$  até  $h8$ , visitando cada casa do tabuleiro exatamente uma vez, sem repetições. Esse desa-

fio incentiva a compreensão da dinâmica do movimento em “L” e exige planejamento sequencial, antecipação de consequências e uso de tentativa e erro orientada. A abordagem recomendada consiste em estimular os alunos a registrarem cada movimento, analisando alternativas e identificando caminhos inviáveis, construindo progressivamente uma solução válida. Esse problema pode ser ampliado com a discussão do *Algoritmo de Warnsdorff*, que fornece uma regra heurística para otimizar o percurso do cavalo.

Na sequência, propõe-se o problema do número de quadrados existentes no tabuleiro, o qual aparenta possuir 64 unidades, mas revela um resultado maior quando analisado de forma combinatória. Recomenda-se conduzir os estudantes ao reconhecimento de que o tabuleiro contém quadrados de diferentes tamanhos ( $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , ...,  $8 \times 8$ ) e que o total pode ser obtido pela soma  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2 = 204$ . Essa atividade favorece a construção de generalizações relacionadas à soma de quadrados e à contagem de elementos em progressão. Outro desafio indicado é o problema do “dominó mutilado”, que consiste em determinar se é possível cobrir completamente o tabuleiro com peças de dominó após a remoção de duas casas opostas. A resolução evidencia que o tabuleiro original possui igual número de casas claras e escuras, enquanto a remoção das duas casas altera a paridade, tornando impossível o revestimento completo — solução que reforça o papel da lógica dedutiva e de argumentos baseados em invariantes matemáticos.

Durante o desenvolvimento das tarefas, recomenda-se que seja enfatizado o registro de tentativas, a comunicação das estratégias e o uso de algoritmos ou heurísticas quando pertinentes. As soluções devem ser discutidas coletivamente no fechamento, com foco não apenas nos resultados finais, mas na comparação de métodos, na análise da eficiência de cada abordagem e na valorização dos processos de pensamento matemático. Dessa forma, promove-se um ambiente de aprendizagem baseado em investigação, reflexão e argumentação, no qual os estudantes compreendem que a matemática presente no xadrez não se limita ao jogo em si, mas constitui um campo fértil para o desenvolvimento cognitivo e para a resolução de problemas complexos.

## 2.8 Aula 08: Estatísticas no xadrez

A aula tem como objetivo introduzir conceitos estatísticos utilizando dados reais de torneios de xadrez como contexto pedagógico. A proposta inicia-se com a apresentação de tabelas de resultados ou bases de dados contendo informações como número de vitórias, empates, derrotas, tempo médio das partidas e desempenho com peças brancas e pretas. Esse material serve como ponto de partida para o estudo de frequência absoluta e relativa, média, porcentagem e probabilidade, permitindo que os estudantes analisem informações reais provenientes do universo do xadrez. Recomenda-se que os alunos sejam orientados a organizar os dados em tabelas, identificando

padrões numéricos e tendências de desempenho dos jogadores.

No desenvolvimento da atividade, sugere-se que os estudantes sejam conduzidos à construção de gráficos — barras, setores ou histogramas — para representação visual dos resultados obtidos, favorecendo a interpretação e comparação entre desempenhos. Em seguida, propõe-se o estudo de probabilidade condicional com base em situações estratégicas do jogo, como na questão: “Dado que o jogador tem as brancas, qual a chance de vitória?”. Esse tipo de investigação permite discutir a influência de variáveis externas no resultado das partidas e reforçar a importância da análise contextualizada dos dados na tomada de decisões estratégicas. No encerramento da aula, orienta-se promover reflexão sobre como os recursos estatísticos podem ser aplicados na antecipação de tendências de jogo, auxiliando na elaboração de previsões e estratégias mais embasadas.

## 2.9 Aula 09: Organização de torneios e combinatória aplicada

A aula tem como objetivo abordar a organização de torneios de xadrez como contexto para o estudo de princípios de análise combinatória e de modelos de competição. Inicialmente, recomenda-se apresentar diferentes formatos de torneio, tais como eliminatória simples, sistema suíço e todos contra todos, destacando as características de cada um em termos de tempo de duração, número de partidas e critérios de classificação. Essa discussão introdutória permite que os estudantes compreendam que a escolha do formato não é apenas uma decisão organizacional, mas envolve também questões de equidade, viabilidade e estratégia.

No desenvolvimento da aula, propõe-se trabalhar, de maneira mais formal, o cálculo do número de partidas possíveis em torneios do tipo todos contra todos, utilizando a combinação  $C(n, 2)$  para representar o número de confrontos distintos entre  $n$  jogadores. Sugere-se que os alunos resolvam situações em que se variam a quantidade de participantes, comparando, por exemplo, torneios com 4, 8, 10 ou 16 jogadores, de modo a perceber o crescimento rápido do número de partidas. Em seguida, recomenda-se a criação de simulações de torneios e o uso de planilhas para organizar tabelas de confrontos, resultados e classificação, permitindo que os estudantes observem, na prática, como a combinatória auxilia na construção de calendários equilibrados e na verificação de consistência dos dados.

No fechamento, orienta-se promover uma discussão sobre como os conceitos de combinatória e de organização de dados podem otimizar sistemas de competição, seja em torneios escolares de xadrez ou em outros contextos esportivos e acadêmicos. Deve-se enfatizar que a matemática está presente tanto na estrutura formal dos torneios quanto nas decisões estratégicas relacionadas ao seu planejamento, evidenciando a relevância do raciocínio combinatório para resolver problemas reais de logística e de gestão de eventos.

## 2.10 Aula 10: Mini torneio matemático

A aula tem como objetivo integrar conteúdos matemáticos previamente estudados às dinâmicas de uma competição lúdica, articulando raciocínio lógico e tomada de decisão em tempo reduzido. A atividade inicia-se com a explicação das regras do torneio, dos critérios de pontuação e dos procedimentos de registro de resultados, garantindo clareza e organização para todos os participantes.

No desenvolvimento, os estudantes disputam partidas curtas enquanto resolvem desafios matemáticos rápidos, como contagem de movimentos, cálculo de médias e identificação de simetrias. Os desempenhos obtidos devem ser anotados em planilhas, de modo a permitir a análise final dos resultados. No encerramento, recomenda-se realizar premiação simbólica e breve debate sobre raciocínio estratégico e ética, reforçando que a competição funciona como meio para aplicação prática da matemática e não como objetivo exclusivo.

## 2.11 Aula 11: Revisão geral e consolidação de conteúdos

A aula de encerramento tem como propósito retomar, de forma articulada, os principais conteúdos matemáticos explorados ao longo da eletiva, evidenciando como cada um deles se integrou à dinâmica do jogo de xadrez. O professor conduz uma revisão estruturada dos temas centrais — como movimentos das peças e sua relação com a geometria, coordenadas do tabuleiro e a interpretação do plano cartesiano, desafios combinatórios envolvendo posicionamento de peças, raciocínio lógico em situações de ataque e defesa, e análises estatísticas derivadas de partidas e torneios simulados. Essa retomada não tem caráter meramente repetitivo, mas busca promover uma compreensão global da disciplina, permitindo que os estudantes identifiquem conexões entre os conceitos estudados, reconheçam avanços individuais e compreendam como cada tópico contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Após esse momento coletivo de sistematização, os alunos são convidados a resolver atividades que integram diferentes conteúdos, estimulando a mobilização dos conhecimentos construídos ao longo da eletiva. A proposta valoriza o diálogo, o trabalho colaborativo e a argumentação, com espaço para que os estudantes discutam estratégias, justifiquem procedimentos e comparem resoluções distintas. O professor atua como mediador, incentivando reflexões sobre como o xadrez funcionou como um ambiente rico para a aplicação de conceitos matemáticos e como essa experiência pode ser transposta para outras situações de estudo ou resolução de problemas. A aula se encerra com um breve convite para a aula final da eletiva, na qual os estudantes apresentarão um projeto, uma partida comentada ou uma análise matemática relacionada ao jogo, consolidando de modo significativo e autoral a aprendizagem construída ao longo da disciplina.

## 2.12 Aula 12: Projeto final

A aula tem como objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos ao longo do componente eletivo por meio da elaboração de um projeto final coletivo. A atividade inicia-se com a apresentação das orientações gerais e com a escolha, em consenso pela turma, do formato do projeto. Entre as possibilidades, sugerem-se um Xadrez Humano, utilizando alunos caracterizados como peças, ou a realização de um torneio aberto em que os estudantes matriculados no componente desafiam alunos de outras turmas.

No desenvolvimento, os grupos elaboram e apresentam projetos que integrem xadrez e conteúdos matemáticos, tais como resolução de problemas, construção de jogos, painéis estatísticos ou outros produtos conceituais. Recomenda-se avaliar os projetos considerando criatividade, clareza da proposta e aplicação correta dos conceitos estudados. Para o encerramento, orienta-se promover a exposição dos trabalhos e a entrega simbólica de certificados, valorizando o engajamento dos participantes e reforçando o sentido de conclusão do percurso formativo.

A eletiva Xadrez para Iniciantes evidencia o potencial do jogo como recurso didático estruturante para o ensino de Matemática, articulando, de forma integrada, conteúdos de Geometria, Geometria Analítica, Análise Combinatória, Lógica Matemática e Estatística. Ao longo das aulas, os estudantes desenvolvem habilidades relacionadas à visualização espacial, uso de coordenadas no plano cartesiano, contagem de possibilidades sob restrições, reconhecimento de simetrias, análise de padrões e interpretação de dados provenientes de partidas e torneios simulados.

As atividades práticas com o tabuleiro favorecem a construção de significados para conceitos abstratos, permitindo que o aluno transite constantemente entre a linguagem matemática formal e situações concretas do jogo. Estratégias como desafios matemáticos, organização de torneios, análise estatística de resultados e elaboração de projetos finais promovem o protagonismo discente e estimulam a autonomia intelectual.

Observa-se ainda que o xadrez atua como um ambiente privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, da capacidade de antecipação de consequências e da tomada de decisões fundamentadas. Sua estrutura organizada possibilita a modelagem de situações matemáticas variadas, tornando-se um instrumento potente para a aprendizagem significativa e interdisciplinar. Assim, a eletiva não apenas contribui para o domínio de conteúdos curriculares, mas também fortalece competências cognitivas essenciais, como planejamento, perseverança, pensamento estratégico e reflexão crítica, ampliando o alcance formativo da Matemática na Educação Básica.

### 3 PROBABILIDADE NA MESA (POKER)

A eletiva *Probabilidade na Mesa* utiliza o poker no estilo Texas Hold'em como instrumento didático para a abordagem de conteúdos de probabilidade, combinatória, estatística e tomada de decisão fundamentada em dados. Longe de qualquer associação com práticas de jogo de azar, o poker é aqui apresentado como um ambiente estruturado e matematicamente rico, no qual cada decisão envolve análise de cenários, estimativa de riscos, cálculo de probabilidades e avaliação de resultados a longo prazo. A dinâmica do jogo — marcada por informações incompletas, incertezas e múltiplas estratégias possíveis — proporciona um contexto autêntico para a compreensão profunda de conceitos matemáticos frequentemente trabalhados de forma abstrata no currículo tradicional.

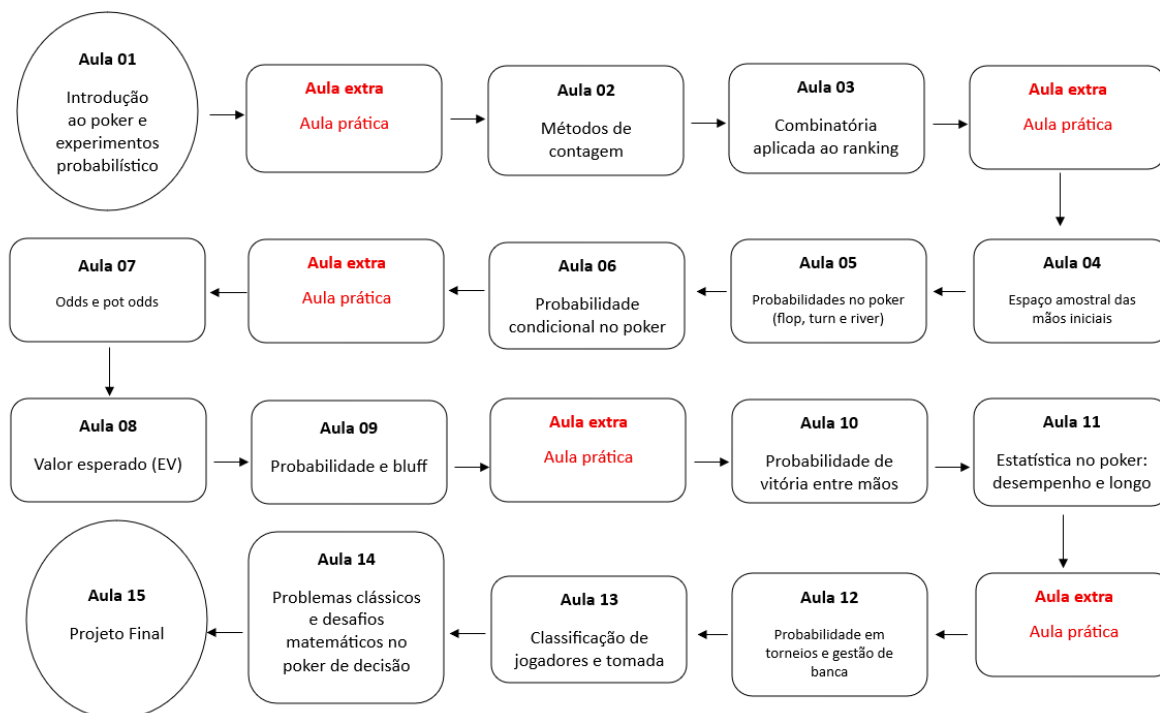
As aulas foram planejadas para conduzir o estudante em um percurso investigativo que parte de experimentos simples de probabilidade até análises avançadas envolvendo equidade, valor esperado e estatística aplicada. Em cada etapa, busca-se promover a reflexão crítica, o uso consciente de evidências numéricas e o desenvolvimento de competências que permitem ao aluno justificar decisões com base em critérios matemáticos. Assim, a eletiva transforma o jogo em uma ferramenta educativa poderosa, capaz de fortalecer o pensamento probabilístico e de aproximar a matemática do cotidiano dos estudantes.

As habilidades da BNCC desenvolvidas na eletiva de Poker evidencia o caráter profundamente matemático dessa disciplina, cuja estrutura se apoia especialmente nos campos da análise combinatória, da probabilidade e da estatística, como é possível observar no quadro 2 (BRASIL, 2018). O estudo das mãos possíveis, das chances de ocorrência de eventos, da variabilidade dos resultados e das tomadas de decisão fundamentadas em dados permite que os estudantes mobilizem técnicas de contagem, construam e analisem espaços amostrais, calculem probabilidades simples e condicionais, interpretem medidas estatísticas e avaliem riscos e expectativas. Dessa forma, a eletiva não apenas amplia a compreensão conceitual desses temas, mas também demonstra sua aplicabilidade em situações reais, fortalecendo a capacidade dos alunos de modelar problemas, justificar estratégias e tomar decisões embasadas em raciocínio matemático.

**Quadro 2:** Habilidades da BNCC desenvolvidas na disciplina Eletiva de Poker

<b>Aula</b>	<b>Código</b>	<b>Descrição</b>
<b>Aula 01:</b> Introdução ao poker e experimentos probabilísticos	EM13MAT501, EM13MAT104	Construção de espaços amostrais simples e análise de decisões em situações aleatórias, justificando escolhas com base em raciocínios matemáticos.
<b>Aula 02:</b> Métodos de contagem	EM13MAT302, EM13MAT501	Identificação de padrões e uso de técnicas de contagem (princípio multiplicativo, arranjos, combinações) para modelar situações com cartas e possíveis mãos.
<b>Aula 03:</b> Combinatória aplicada ao ranking das mãos	EM13MAT302, EM13MAT501	Aplicação de análise combinatória para quantificar mãos possíveis e relacionar tais contagens à raridade e à hierarquia de força das mãos de poker.
<b>Aula 04:</b> Espaço amostral das mãos iniciais	EM13MAT501, EM13MAT502	Determinação de espaços amostrais de mãos iniciais e comparação de probabilidades de ocorrência de diferentes tipos de combinações de cartas.
<b>Aula 05:</b> Probabilidades no poker (flop, turn e river)	EM13MAT502, EM13MAT503	Cálculo e interpretação de probabilidades em etapas sucessivas do jogo, relacionando-as à tomada de decisão em situações reais de aposta.
<b>Aula 06:</b> Probabilidade condicional no poker	EM13MAT503, EM13MAT504	Uso de probabilidade condicional para atualizar estimativas de chance a partir de novas cartas reveladas, interpretando eventos dependentes.
<b>Aula 07:</b> Odds e <i>pot odds</i>	EM13MAT503, EM13MAT302	Comparação entre razões ( <i>odds</i> ) e valores do pote, relacionando proporcionalidade e probabilidade para decidir entre pagar, aumentar ou desistir.
<b>Aula 08:</b> Valor esperado (EV)	EM13MAT504, EM13MAT506	Cálculo e interpretação do valor esperado em diferentes decisões de aposta, avaliando risco, ganho médio a longo prazo e impactos quantitativos das escolhas.
<b>Aula 09:</b> Probabilidade e <i>bluff</i>	EM13MAT503, EM13MAT104	Análise de decisões de blefe com base em probabilidades de sucesso, frequências de ação dos oponentes e argumentação sobre a racionalidade das estratégias.
<b>Aula 10:</b> Probabilidade de vitória entre mãos	EM13MAT502, EM13MAT503	Comparação de probabilidades de vitória ( <i>equity</i> ) entre mãos em confronto, considerando diferentes cenários de cartas comunitárias e combinações possíveis.
<b>Aula 11:</b> Estatística no poker: desempenho e longo prazo	EM13MAT505, EM13MAT506	Análise de resultados ao longo de várias sessões, utilizando médias, variância e gráficos para distinguir variabilidade de curto prazo e tendências de longo prazo.
<b>Aula 12:</b> Probabilidade em torneios e gestão de banca	EM13MAT503, EM13MAT506	Avaliação de risco e expectativa em contextos de torneios e gerenciamento de banca, analisando quantitativamente cenários de ganho, perda e sobrevivência.
<b>Aula 13:</b> Classificação de jogadores e tomada de decisão	EM13MAT506, EM13MAT104	Interpretação de dados e padrões de comportamento de perfis de jogadores e justificativa de decisões com base em informações estatísticas e probabilísticas.
<b>Aula 14:</b> Problemas clássicos e desafios matemáticos no poker	EM13MAT302, EM13MAT503	Resolução de problemas avançados envolvendo contagem, probabilidade e eventos condicionais em situações de poker, integrando múltiplos conceitos.
<b>Aula 15:</b> Projeto final: análise matemática de uma mão	EM13MAT104, EM13MAT506	Produção e comunicação de análise matemática detalhada de uma mão de poker, utilizando dados, cálculos probabilísticos e estatísticos para fundamentar conclusões.

Figura 3.1: Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas



Fonte: Autoria própria.

### 3.1 Aula 1: Introdução ao poker

Nessa primeira aula, é interessante despertar o interesse dos alunos para as próximas aulas, e faremos isso por meio de dinâmicas que tragam elementos presentes em uma partida de poker, isso porque provavelmente um parte da turma não conhece as regras do poker, destacando as situações matemáticas que abordaremos ao longo do curso. Apresentaremos três dinâmicas, que serão enumeradas e explicadas a seguir.

#### Dinâmica 1: Jogada segura ou arriscada?

Essa dinâmica tem o intuito de mostrar aos estudantes que trabalharemos com situações que dependem da frequência com que fazemos determinadas escolhas e da compensação envolvida em cada decisão. A atividade consiste em colocar dez bolas numeradas de 1 a 10 e pedir que o estudante escolha entre duas opções.

- **Opção A** : Ganha um bombom se tirar uma bola numerada de 1 a 7.
- **Opção B** : Ganha três bombons se tirar uma bola numerada de 8 a 10.

Em seguida ele retira a bola.

Essa proposta de atividade é excelente para iniciar uma discussão sobre escolhas baseadas em incertezas e comportamento diante do risco, utilizando um modelo simples e lúdico. O estudante deve escolher entre duas opções para tentar ganhar bombons,

a partir do sorteio de uma bola numerada de 1 a 10. Note que a escolha envolve um dilema probabilístico entre ganhar menos com mais chance ou ganhar mais com menos chance.

Do ponto de vista matemático, podemos calcular as probabilidades associadas a cada escolha:

- Probabilidade de ganhar na Opção A:

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0,7 \quad (70\%).$$

- Probabilidade de ganhar na Opção B:

$$P(B) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad (30\%).$$

No entanto, os prêmios também são diferentes. Para uma análise mais completa, podemos calcular o **valor esperado** de bombons para cada opção:

- Valor esperado da Opção A:

$$E(A) = 1 \times 0,7 = 0,7 \text{ bombom.}$$

- Valor esperado da Opção B:

$$E(B) = 3 \times 0,3 = 0,9 \text{ bombom.}$$

Portanto, embora a Opção B pareça mais arriscada, ela possui um valor esperado maior. Isso mostra que, do ponto de vista puramente matemático, vale mais a pena escolher a opção arriscada, pois ela entrega, em média, mais bombons a longo prazo.

## Dinâmica 2: Caixa do azar ou da sorte.

Prepare três caixas e coloque uma premiação em apenas uma delas. Peça para que um aluno escolha uma das três caixas. Em seguida, entre as duas caixas restantes, revele uma que esteja vazia. Então, pergunte ao aluno se ele deseja manter sua escolha inicial ou trocar pela outra caixa ainda fechada.

Essa dinâmica possibilita uma reflexão sobre qual é a melhor estratégia: manter a escolha inicial ou trocar de caixa. Além disso, essa dinâmica das três caixas é uma adaptação prática e acessível do famoso problema conhecido como *Paradoxo de Monty Hall*, que surgiu em um programa de auditório nos Estados Unidos. Nele, um participante escolhia uma entre três portas, uma delas escondendo um carro, e as outras duas, cabras. Após a escolha inicial, o apresentador revelava uma das portas restantes com uma cabra e oferecia ao participante a chance de trocar sua escolha (PINHEIRO, 2021).

Aparentemente, após uma caixa ser aberta, pode parecer que restam duas opções igualmente prováveis, 50% para cada. No entanto, a matemática nos mostra que essa intuição está incorreta. Quando o aluno faz a primeira escolha, a chance de acerto é de apenas  $\frac{1}{3}$ , enquanto a chance de a premiação estar em uma das caixas não escolhidas é de  $\frac{2}{3}$ . Como o professor sempre abre uma caixa vazia entre as duas restantes, a probabilidade de  $\frac{2}{3}$  se transfere integralmente para a caixa ainda não aberta. Assim, ao trocar de caixa, o aluno dobra suas chances de sucesso, passando de  $\frac{1}{3}$  para  $\frac{2}{3}$ .

Após realizar a atividade, recomenda-se repetir o experimento várias vezes com diferentes estudantes, registrando os resultados em um quadro. A repetição tende a confirmar a teoria, demonstrando na prática que quem troca ganha cerca de 2 em cada 3 vezes. Também é possível ampliar a atividade com mais caixas, desafiando os alunos a preverem o comportamento das probabilidades em situações semelhantes.

### Dinâmica 3: Trinca, par ou nada?

Temos três caixas com 4 fichas de cores diferentes (vermelha, verde, azul, amarela) em cada uma das caixas. Pedimos para um aluno escolher entre as três opções:

- **Trinca** : Ganha 4 bombons.
- **Par** : Ganha 1 bombom.
- **Nada**: Ganha 2 bombons.

Em seguida pedimos que ele tire uma ficha de cada caixa e observe se tem três, duas ou nenhuma cor igual. Aqui temos que refletir qual é a melhor opção a longo prazo.

Como as fichas são sorteadas uma a uma, e todas têm igual chance (uniforme), podemos aplicar **princípios de contagem**. Cada retirada pode resultar em uma das 4 cores possíveis, então o total de combinações possíveis é:

$$\text{Total de combinações} = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

É possível analisar os casos favoráveis a cada tipo de combinação.

- **Trinca (três fichas da mesma cor)**: só existem 4 possibilidades (uma para cada cor), como por exemplo: vermelha-vermelha-vermelha. Assim,

$$T = 4 \text{ possibilidades.}$$

- **Nada (todas as fichas com cores diferentes)**: devemos escolher 3 cores diferentes entre 4 possíveis, basta usar PFC.

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ possibilidades.}$$

- **Par (duas cores iguais e uma diferente):** Como sabemos as possibilidades dos casos anteriores podemos apenas fazer uma subtração

$$P = 64 - T - N = 64 - 4 - 24 = 36 \text{ possibilidades.}$$

#### Resumo das probabilidades:

Resultado	Casos favoráveis	Probabilidade	Prêmio (bombons)
Trinca	4	$\frac{4}{64} = 0,0625$	4
Par	36	$\frac{36}{64} = 0,5625$	1
Nada	24	$\frac{24}{64} = 0,375$	2

#### Cálculo do valor esperado para cada aposta:

- Trinca:

$$E(\text{Trinca}) = 0,0625 \times 4 = 0,25.$$

- Par:

$$E(\text{Par}) = 0,5625 \times 1 = 0,5625.$$

- Nada:

$$E(\text{Nada}) = 0,375 \times 2 = 0,75.$$

Concluimos que a opção **Nada**, apesar de parecer intermediária, apresenta o maior valor esperado. Ou seja, a longo prazo, é a escolha que maximiza a quantidade de bombons ganhos. Já a opção **Trinca**, mesmo oferecendo o maior prêmio individual, é estatisticamente a menos vantajosa, pois ocorre raramente. Essa dinâmica é excelente para mostrar como o raciocínio probabilístico e os métodos de contagem ajudam a tomar decisões mais vantajosas.

Observa-se que, nesta dinâmica, são utilizados conceitos fundamentais de métodos de contagem, probabilidade e valor esperado para embasar a análise e a tomada de decisão. No entanto, vale destacar que esses conteúdos serão aprofundados progressivamente ao longo do itinerário formativo, permitindo que os estudantes compreendam, com mais rigor e domínio, as ferramentas matemáticas envolvidas.

Passadas as dinâmicas entraremos de fato no assunto, contando um pouco da história do poker e introduzindo as regras sobre o jogo que será usado como ferramenta para estudar análise combinatória e probabilidade. Talvez essa aula se estenda e seja necessário organizar na aula seguinte um pequeno torneio para que os alunos se apropriem das regras do jogo e compreendam, na prática, quais combinações de cartas vencem umas às outras. Com a dinâmica do torneio, os estudantes terão a oportunidade de vivenciar situações reais de tomada de decisão, comparar mãos, aplicar conceitos aprendidos e consolidar o entendimento sobre a hierarquia das combinações do poker.

## 3.2 Aula 2: Métodos de contagem

Iniciaremos a aula com um problema que permitirá aplicar o conceito de Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Para isso, consideraremos todas as cartas que possuem figuras no baralho: reis, damas e valetes. Como há quatro naipes, temos um total de  $3 \times 4 = 12$  cartas com figuras. Colocaremos essas cartas em ordem sobre a mesa e, em seguida, questionaremos os alunos: **quantas formas diferentes é possível organizar 3 cartas escolhidas dentre as 12 figuras (reis, rainhas e valetes dos quatro naipes)?**

A resolução pode ser conduzida pelo PFC. Ao escolher a primeira carta, o aluno tem 12 possibilidades; para a segunda carta, restam 11 possibilidades; e para a terceira carta, 10 possibilidades. Assim, obtém-se o total:

$$12 \times 11 \times 10 = 1320.$$

formas distintas de organizar três cartas de figuras. Esse resultado cria uma ponte natural para a compreensão da contagem sistemática e da importância de considerar se a ordem importa, o que nos leva ao conceito formal de permutação.

Esse exemplo funciona como uma introdução acessível aos **métodos de contagem**, permitindo aos alunos visualizar concretamente como as combinações e arranjos surgem na prática. Após essa atividade inicial, podemos propor novas questões como:

- De quantas formas podemos escolher 2 cartas de figuras dentre as 12?
- De quantas maneiras é possível formar pares, trincas ou sequências utilizando as cartas do baralho?
- Quantas mãos iniciais diferentes podem ser distribuídas no poker Texas Hold'em?

Essas perguntas conectam a teoria combinatória ao contexto do poker, mostrando que, por trás de cada jogada, há cálculos envolvendo contagem, possibilidades e tomada de decisão estratégica.

Ao longo da aula, os conceitos podem ser organizados em progressão e podemos usar o texto do Capítulo 2 da dissertação :

1. **Princípio Fundamental da Contagem** — Lógica multiplicativa da contagem.
2. **Permutação** — Quando a ordem das cartas importa.
3. **Arranjo** — Escolher um subconjunto de cartas com ordem relevante.
4. **Combinação** — Selecionar cartas independentemente da ordem, como ocorre na formação de uma mão de poker.

Dessa forma, o poker deixa de ser apenas um jogo e passa a ser um recurso didático para tornar os métodos de contagem mais concretos, intuitivos e envolventes. Ao final da aula, espera-se que os alunos compreendam não apenas as regras do jogo, mas também como os conceitos matemáticos explicam as possibilidades que surgem na mesa, desenvolvendo uma visão crítica e estratégica, que será aprofundada nas próximas aulas com o tema combinatória no poker.

### 3.3 Aula 3: Combinatória aplicada

Esta aula acontece logo após a introdução aos métodos de contagem e tem como objetivo mostrar, de forma prática e contextualizada, como os conceitos de permutação, arranjo e combinação aparecem naturalmente no jogo de poker. A intenção é que os alunos percebam que, por trás de cada jogada, existe raciocínio matemático, modelos de contagem e cálculos que apoiam decisões estratégicas.

O professor inicia a aula lembrando brevemente a diferença entre permutação, arranjo e combinação e enfatizando a pergunta orientadora que ajudará em toda a aula: “A ordem importa?”. Essa retomada deve ser rápida, pois o foco principal do encontro é a aplicação dos conceitos, não a repetição teórica. Uma vez recuperado o conteúdo, o professor apresenta a proposta dizendo aos alunos que, naquele momento, eles utilizarão combinatória para calcular quantas possibilidades existem em cada categoria do ranking de mãos do poker, indo do resultado mais comum ao mais raro.

Com a tabela do ranking projetada ou em papel, o professor explica que cada tipo de mão pode ser traduzido para uma situação de contagem. A turma passa então a calcular, com mediação do professor, o número de possibilidades de cada mão. O cálculo começa pelo *Royal Flush*, a mão mais forte e gradualmente avança para mãos mais fracas, cujos cálculos são mais complexos. Os resultados obtidos serão:

- **Royal Flush** é a mão mais forte do poker e consiste nas cinco cartas mais altas de um mesmo naipe: Ás (A), Rei (K), Dama (Q), Valete (J) e Dez (10). Como os valores dessas cartas são fixos, a única variação possível ocorre nos naipes, então só há quatro possibilidades
- **Straight Flush** é uma sequência de cinco cartas consecutivas do mesmo naipe, excetuando o Royal Flush. Existem 10 sequências possíveis (de A-5 até 10-A) e 4 naipes possíveis. Contudo, uma dessas sequências corresponde ao Royal Flush, já contabilizado anteriormente.

Desse modo, a quantidade de possibilidades é dado por:

$$(10 \times 4) - 4 = 36.$$

- **Quadra (Four of Kind)** ocorre quando há quatro cartas de mesmo valor e uma carta adicional diferente (*kicker*).
  - Existem 13 valores possíveis (de Ás a 2) para formar as quadras.
  - Para cada valor, há 1 única forma de escolher as quatro cartas (pois são os quatro naipes).
  - A carta extra pode ser qualquer uma das 48 restantes.

Assim para calcular a quantidades de combinações de quadras fazemos:

$$13 \times 48 = 624$$

- **Full House** é composto por uma trinca (três cartas de mesmo valor) e um par (duas cartas de outro valor).
  - Escolher o valor da trinca:  $C_{13,1}$ .
  - Escolher 3 naipes entre 4:  $C_{4,3}$ .
  - Escolher o valor do par entre os 12 restantes:  $C_{12,1}$ .
  - Escolher 2 naipes entre 4:  $C_{4,2}$ .

Logo, como todas essas escolhas são independentes, a quantidade de possibilidades são:

$$C_{13,1} \times C_{4,3} \times C_{12,1} \times C_{4,2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744.$$

- **Flush** ocorre quando temos cinco cartas do mesmo naipe, sem formar sequência.
  - Para cada naipe, podemos escolher  $C_{13,5}$  combinações.
  - Há 4 naipes possíveis.
  - Subtrair os casos em que há Straight Flush ou Royal Flush.

Desse modo, temos:

$$C_{13,5} \times 4 - 4 - 36 = 1287 \times 4 - 40 = 5108.$$

- **Sequência** é formada por cinco cartas consecutivas, de diferentes naipes.
  - Existem 10 possíveis sequências (de A-5 até 10-A).
  - Cada carta pode ter 4 naipes.
  - Assim, há  $4^5 = 1024$  combinações para cada sequência.
  - Excluir as 40 combinações que correspondem aos *Straight Flushes* e *Royal Flushes*.

Portanto,

$$(10 \times 1024) - 40 = 10240 - 40 = 10200.$$

- **Trinca** é composta de três cartas de mesmo valor e duas com valores diferentes.
  - Escolher valor da trinca: 13.
  - Escolher 3 naipes dentre 4:  $C_{4,3}$ .
  - Escolher 2 valores diferentes entre os 12 restantes:  $C_{12,2}$ .
  - Para cada valor escolhido. 1 de 4 naipes:  $4^2$ .

Logo,

$$13 \times C_{4,3} \times C_{12,2} \times 4^2 = 13 \times 4 \times 66 \times 16 = 54912.$$

- **Dois Pares** acontece quando o jogador possui duas cartas de mesmo valor e outras duas cartas de mesmo valor, mais uma carta avulsa (*kicker*).
  - Escolher 2 valores para os pares:  $C_{13,2}$ .
  - Para cada valor, escolher 2 naipes:  $C_{4,2}$ .
  - Escolher o valor da carta restante:  $C_{11,1}$ .
  - Escolher 1 de 4 naipes para ela:  $C_{4,1}$ .

Assim,

$$C_{13,2} \times (C_{4,3})^2 \times C_{11,1} \times C_{4,1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123552.$$

- **Um Par** ocorre quando o jogador possui duas cartas de mesmo valor, e as outras três cartas têm valores diferentes entre si e diferentes do valor do par.
  - Escolher o valor do par:  $C_{13,1}$ .
  - Escolher 2 naipes para o par:  $C_{4,2}$ .
  - Escolher 3 valores distintos entre os 12 restantes:  $C_{12,3}$ .
  - Para cada um, escolher 1 dos 4 naipes:  $4^3$ .

Logo,

$$C_{13,1} \times C_{4,2} \times C_{12,3} \times 4^3 = 13 \times 6 \times 220 \times 64 = 1098240.$$

- **Carta alta** ocorre quando não há nenhuma formação de par, sequência ou cartas do mesmo naipe, ou seja, todas as cinco cartas são de valores diferentes, sem padrão particular. Para encontrar todas possibilidades encontramos o total de combinações possíveis de 5 cartas e subtraímos os toas possibilidades anteriores, logo,

$$C_{52,5} - 1295420 = 2598960 - 1296420 = 1302540.$$

Após a conclusão dos cálculos de todos os tipos de mão, os resultados são organizados em uma tabela 3.1 que apresenta a quantidade total de combinações possíveis para cada categoria do ranking do poker. A partir dessa sistematização, propõe-se uma reflexão com os estudantes sobre a relação entre a força da mão e a raridade com que ela ocorre. Quanto menor o número de combinações possíveis de um determinado tipo de mão, maior tende a ser seu valor estratégico no jogo. Da mesma forma, mãos que aparecem com maior frequência possuem, proporcionalmente, menor força no ranking.

Tabela 3.1: Quantidade de combinações possíveis de cada tipo de mão no poker

<b>Tipo de Mão</b>	<b>Número de Combinações</b>
Royal Flush	4
Straight Flush	36
Quadra (Four of a Kind)	624
Full House	3.744
Flush	5.108
Sequência (Straight)	10.200
Trinca	54.912
Dois Pares	123.552
Um Par	1.098.240
Carta Alta	1.302.540
<b>Total</b>	<b>2.598.960</b>

Esse processo de análise permite que os alunos compreendam que o ranking oficial das mãos não é arbitrário, mas construído com base na dificuldade combinatória de se obter cada uma delas. Dessa forma, a matemática não apenas explica o funcionamento do jogo, mas também oferece suporte racional para a tomada de decisões, contribuindo para o desenvolvimento de uma postura crítica e estratégica nas próximas aulas sobre probabilidade.

### 3.4 Aula 4: Espaço amostral

Esta aula tem como finalidade introduzir formalmente o conceito de espaço amostral e preparar os estudantes para o estudo de probabilidade. A proposta consiste em utilizar o contexto do poker como ambiente motivador e aplicado, permitindo que os alunos percebam que a análise probabilística só se torna possível quando o conjunto de todos os resultados possíveis é previamente identificado e compreendido.

A aula inicia com uma breve retomada da atividade anterior, destacando que já foram calculadas as quantidades de combinações correspondentes a cada tipo de mão do ranking. Em seguida, apresenta-se aos alunos a ideia de que todo cálculo

de probabilidade parte de uma pergunta fundamental: “Qual é o conjunto de todos os resultados possíveis desta situação?” A partir dessa questão, introduz-se o conceito de espaço amostral, de forma conceitual, mas completamente vinculada ao jogo. Explica-se que, no poker, o espaço amostral é formado por todas as combinações de cartas que podem ser distribuídas aos jogadores, e que identificar esse conjunto é o passo inicial antes de se tratar a chance de ocorrência de qualquer evento na mesa.

Para consolidar a ideia, trabalha-se o caso clássico do Texas Hold'em: determinar de quantas maneiras é possível distribuir duas cartas de um baralho de 52. Destaca-se que a ordem não importa, pois receber  $A\spadesuit$  e  $K\heartsuit$  é equivalente a receber  $K\heartsuit$  e  $A\spadesuit$ . Dessa forma, calcula-se o tamanho do espaço amostral por meio da combinação:

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = 1326.$$

Esse resultado estabelece que existem 1326 possíveis mãos iniciais para um jogador. Assim, compreende-se que o espaço amostral não precisa ser enumerado carta por carta, mas pode ser representado matematicamente por uma combinação.

A partir deste ponto, ampliam-se as discussões para outros exemplos de espaço amostral no jogo. Ao revelar o *flop*, composto por três cartas comunitárias, o espaço amostral correspondente pode ser representado por:

$$\binom{50}{3} = \frac{50!}{3!47!} = 19600.$$

Caso se deseje determinar o número de possibilidades para o *turn*, restando 47 cartas. De maneira semelhante, para o *river*, o espaço amostral 46 cartas.

Esses exemplos permitem mostrar que, à medida que as cartas são reveladas, o espaço amostral se reduz continuamente, o que significa que a probabilidade de determinados eventos pode mudar ao longo do jogo. Assim, os alunos percebem que o conjunto de todos os resultados possíveis deixa de ser estático quando novas informações são incorporadas, introduzindo naturalmente a noção de probabilidade condicional, que será abordada em aulas posteriores.

### 3.5 Aula 5: Probabilidades no poker

Esta aula tem como objetivo introduzir o conceito de probabilidade a partir da relação entre o espaço amostral e os subconjuntos de interesse, utilizando o poker como contexto aplicado. Após compreender o espaço amostral da distribuição de cartas e a dinâmica combinatória que determina cada tipo de mão, os estudantes estão preparados para interpretar a probabilidade como medida de chance associada ao número de resultados favoráveis dividido pelo total de resultados possíveis.

A aula tem início com a definição formal de probabilidade clássica, destacando

que, quando todos os elementos do espaço amostral são equiprováveis, a probabilidade de um evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Retoma-se o cálculo anterior: há

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

possíveis mãos distintas de cinco cartas em um baralho padrão. Cada tipo de mão corresponde, portanto, a um subconjunto desse espaço amostral, e é a dimensão relativa desse subconjunto que determina sua probabilidade de ocorrência.

Nesse momento, constrói-se a tabela de probabilidades, relacionando cada tipo de mão do ranking ao número de combinações possíveis e à probabilidade correspondente. A organização tabular permite visualizar com clareza que os resultados mais raros são também os mais fortes, enquanto os mais frequentes ocupam as posições mais baixas no ranking. A seguir apresenta-se a tabela completa e tradicionalmente utilizada no estudo matemático do poker:

Tabela 3.2: Rank de mão e suas probabilidades

<b>Tipo de mão</b>	<b>Nº de combinações</b>	<b>Prob. exata</b>	<b>Prob. aproximada</b>
Carta Alta	1 302 540	$\frac{1\,302\,540}{2\,598\,960}$	50,1177%
Um Par	1 098 240	$\frac{1\,098\,240}{2\,598\,960}$	42,2569%
Dois Pares	123 552	$\frac{123\,552}{2\,598\,960}$	4,7539%
Trinca	54 912	$\frac{54\,912}{2\,598\,960}$	2,1128%
Sequência	10 200	$\frac{10\,200}{2\,598\,960}$	0,3925%
Flush	5 108	$\frac{5\,108}{2\,598\,960}$	0,1965%
Full House	3 744	$\frac{3\,744}{2\,598\,960}$	0,1441%
Quadra (Four of a Kind)	624	$\frac{624}{2\,598\,960}$	0,0240%
Straight Flush	36	$\frac{36}{2\,598\,960}$	0,00139%
Royal Straight Flush	4	$\frac{4}{2\,598\,960}$	0,000154%

Ao analisar os valores apresentados na tabela, os estudantes percebem que o ranking oficial das mãos não é arbitrário: as mãos mais fortes são justamente aquelas mais improváveis de ocorrer. A relação direta entre raridade e valor estratégico evidencia que decisões racionais no jogo se fundamentam em quantificação e comparação de probabilidades, e não em intuição ou sorte.

A aula se encerra destacando que a probabilidade apresentada na tabela refere-se ao conjunto inicial de cinco cartas. Ao longo de uma partida de poker, novas cartas são reveladas e, portanto, o espaço amostral se modifica. Consequentemente, a probabilidade de eventos também muda conforme o jogo avança. Essa observação

prepara os estudantes para conteúdos futuros, especialmente probabilidade condicional e análise de chances no *flop*, *turn* e *river*.

### 3.6 Aula 6: Probabilidade condicional

O objetivo desta aula é formalizar o conceito de probabilidade condicional utilizando o contexto do poker como modelo aplicado. Ao longo de uma rodada de Texas Hold'em, novas cartas são reveladas progressivamente, modificando o espaço amostral e, conseqüentemente, as probabilidades associadas aos eventos de interesse. Assim, busca-se evidenciar que o cálculo probabilístico em situações reais é dinâmico e depende da informação disponível em cada etapa da partida.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade, no qual  $\Omega$  representa o conjunto de todos os resultados possíveis em uma rodada do jogo,  $\mathcal{F}$  o conjunto dos eventos, e  $P$  uma medida de probabilidade. Para dois eventos  $A, B \in \mathcal{F}$  com  $P(B) > 0$ , define-se probabilidade condicional como

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Considera-se agora um exemplo aplicado ao poker. Suponha que um jogador comece com duas cartas de mesmo naipe. Seja  $F$  o evento “completar um flush (cinco cartas do mesmo naipe) até o final da rodada”. Antes do *flop*, há 13 cartas do mesmo naipe no baralho, das quais o jogador detém duas. Assim, existem 11 cartas favoráveis entre as 50 disponíveis.

#### Probabilidade de $F$ após o flop

Seja  $E_{\text{flop}}$  o evento “o flop exhibe exatamente  $k$  cartas do mesmo naipe do jogador”, com  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . A probabilidade de obter ao menos duas cartas favoráveis no flop é dada por

$$P(E_{\text{flop}}(k \geq 2)) = 1 - P(E_{\text{flop}}(0)) - P(E_{\text{flop}}(1)),$$

onde

$$P(E_{\text{flop}}(0)) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{50}{3}}, \quad P(E_{\text{flop}}(1)) = \frac{\binom{11}{1} \binom{39}{2}}{\binom{50}{3}}.$$

#### Probabilidade de $F$ após o turn

Suponha que o flop tenha revelado duas cartas do mesmo naipe. Nesse caso, o jogador possui quatro cartas favoráveis e restam ainda 9 cartas do mesmo naipe no baralho, dentre 47 cartas possíveis. Seja  $C_{\text{turn}}$  o evento “completar o flush no turn”. Então

$$P(C_{\text{turn}}) = \frac{9}{47}.$$

### Probabilidade de $F$ no river

Se o evento  $C_{\text{turn}}$  não ocorrer, resta apenas uma carta a ser revelada. Seja  $C_{\text{river}}$  o evento “completar o flush no river”. Nesse caso,

$$P(C_{\text{river}}) = \frac{9}{46}.$$

### Probabilidade conjunta até o river

Seja  $N_{\text{turn}}$  o evento “não completar o flush no turn” e  $N_{\text{river}}$  o evento “não completar o flush no river”. A probabilidade de não completar o flush após turn e river é

$$P(N_{\text{turn}} \cap N_{\text{river}}) = \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46}.$$

Assim, utilizando probabilidade complementar, obtém-se

$$P(F) = 1 - \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \approx 0,350 \quad (35\%).$$

Exemplo análogo pode ser construído para o evento  $T$  “formar uma trinca no flop” quando o jogador inicia com um par. Há duas cartas remanescentes do mesmo valor entre as 50 disponíveis, de modo que

$$P(T) = \frac{\binom{2}{1} \binom{47}{2}}{\binom{50}{3}} \approx 0,118 \quad (11,8\%).$$

Outro evento relevante é  $S$  “completar uma sequência até o final da rodada” quando o jogador possui quatro cartas conectadas após o flop. Existem 8 cartas favoráveis (quatro extremidades possíveis com dois naipes cada). Assim,

$$P(S_{\text{turn}}) = \frac{8}{47}, \quad P(S_{\text{river}}) = \frac{8}{46},$$

e, utilizando probabilidade complementar,

$$P(S) = 1 - \frac{39}{47} \cdot \frac{38}{46} \approx 0,315 \quad (31,5\%).$$

Esses exemplos demonstram que o espaço amostral evolui ao longo da partida, pois novas informações restringem o conjunto de resultados possíveis. Consequentemente, a probabilidade dos eventos é atualizada conforme  $B$  varia no cálculo da probabilidade condicional  $P(A | B)$ . Ao final da aula, conclui-se que decisões racionais no poker devem ser fundamentadas em estimativas probabilísticas dinâmicas, e não em valores fixos. Esse entendimento prepara o estudante para conteúdos posteriores relacionados a *pot odds* e *expected value*, nos quais a probabilidade condicional é integrada à análise econômica da tomada de decisão sob incerteza.

### 3.7 Aula 7: Odds e Pot Odds

O objetivo desta aula é relacionar probabilidade condicional e tomada de decisão racional no poker, por meio da formalização do conceito de *pot odds*. A proposta consiste em demonstrar que não basta conhecer a probabilidade de um evento ocorrer; é necessário avaliar matematicamente se o custo de permanecer na rodada é compensado pelo retorno potencial.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade, no qual  $\Omega$  representa o conjunto de todos os resultados possíveis,  $\mathcal{F}$  o conjunto dos eventos e  $P$  uma medida de probabilidade. Durante uma rodada de Texas Hold'em, cartas adicionais são reveladas progressivamente, modificando o espaço amostral e atualizando a probabilidade de eventos. A escolha estratégica deve, portanto, ser fundamentada não apenas em  $P(E)$ , tal que  $E \in \mathcal{F}$ , mas também no custo-benefício esperado da ação.

Considere um pote atual de valor  $P$  fichas e uma aposta adversária de valor  $A$  fichas. Para continuar na mão, o jogador deve pagar  $A$  fichas para disputar um pote total de  $P + A$  fichas. Define-se *pot odds* como

$$\text{Pot Odds} = \frac{A}{P + A}.$$

Seja  $E$  um evento desejado (por exemplo, completar uma mão vencedora) e  $P(E)$  sua probabilidade condicional dado o estado atual do baralho. A decisão racional é descrita pelos critérios:

$$\text{Pagar é matematicamente vantajoso se } P(E) > \frac{A}{P + A},$$

$$\text{Abandonar é matematicamente vantajoso se } P(E) < \frac{A}{P + A}.$$

#### Exemplo 1 — Flush

Suponha que o jogador esteja no *turn* com quatro cartas do mesmo naipe e deseja completar um flush. Restam 9 cartas favoráveis entre 46 disponíveis, de modo que

$$P(E_{\text{flush}}) = \frac{9}{46} \approx 19,6\%.$$

Se o pote contém 100 fichas e o adversário aposta 25 fichas, então

$$\text{Pot Odds} = \frac{25}{100 + 25} = 20\%.$$

Como  $P(E_{\text{flush}}) < \text{Pot Odds}$ , a decisão matematicamente correta é abandonar a mão.

### Exemplo 2 — Sequência (*Straight*)

Considere agora o caso em que o jogador possui quatro cartas conectadas após o flop, com 8 cartas que completam a sequência. A probabilidade de completá-la até o river é

$$P(E_{\text{straight}}) = 1 - \frac{39}{47} \cdot \frac{38}{46} \approx 31,5\%.$$

Se o pote contém 150 fichas e o adversário aposta 50 fichas, então

$$\text{Pot Odds} = \frac{50}{150 + 50} = 25\%.$$

Como  $P(E_{\text{straight}}) > \text{Pot Odds}$ , pagar a aposta é matematicamente vantajoso.

### Exemplo 3 — Trinca (*Three of a Kind*)

Suponha que o jogador comece com um par e deseje formar uma trinca no flop. A probabilidade de  $E_{\text{trinca}}$  é

$$P(E_{\text{trinca}}) = \frac{\binom{2}{1} \binom{47}{2}}{\binom{50}{3}} \approx 11,8\%.$$

Se o pote contém 80 fichas e o adversário aposta 10 fichas, então

$$\text{Pot Odds} = \frac{10}{80 + 10} \approx 11,1\%.$$

Como  $P(E_{\text{trinca}}) > \text{Pot Odds}$ , a decisão racional é pagar.

Se, no entanto, o adversário aposta 20 fichas no mesmo pote,

$$\text{Pot Odds} = \frac{20}{80 + 20} = 20\%.$$

Como  $P(E_{\text{trinca}}) < \text{Pot Odds}$ , a decisão correta passa a ser abandonar.

### Exemplo 4 — Full House

Suponha que, após o *turn*, o jogador possui uma trinca e deseja completar um *full house*. Restam duas cartas do mesmo valor para completar a dupla e 3 cartas do valor que forma a dupla oposta, totalizando 6 cartas favoráveis entre 46 disponíveis:

$$P(E_{\text{full}}) = \frac{6}{46} \approx 13,0\%.$$

Se o pote contém 200 fichas e o adversário aposta 20 fichas,

$$\text{Pot Odds} = \frac{20}{200 + 20} \approx 9,1\%.$$

Como  $P(E_{\text{full}}) > \text{Pot Odds}$ , pagar é matematicamente vantajoso.

Os exemplos demonstram que *pot odds* não tratam da probabilidade de vencer uma mão específica, mas da viabilidade estatística da decisão no longo prazo. Mesmo quando o evento desejado não ocorre, se a estratégia é aplicada consistentemente quando  $P(E) > \text{Pot Odds}$ , o resultado acumulado ao longo de muitas mãos tende a ser positivo. A aula encerra destacando que *pot odds* estabelece a ligação entre probabilidade e economia de decisões, servindo como base para o próximo conteúdo: *Expected Value* (EV), no qual se avalia matematicamente o lucro esperado associado a cada ação possível no poker.

### 3.8 Aula 8: Valor esperado (EV)

O objetivo desta aula é introduzir o conceito de *Expected Value* (Valor Esperado, ou EV) como ferramenta matemática para quantificar o ganho financeiro médio associado a uma decisão no poker. A proposta consiste em demonstrar que decisões estratégicas não devem basear-se apenas na probabilidade de realizar uma mão, mas também no retorno econômico esperado dessa ação no longo prazo.

Seja  $X$  uma variável aleatória que representa o ganho monetário associado a uma ação em uma rodada de poker, admitindo valores positivos ou negativos. Define-se o valor esperado de  $X$  por

$$EV(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i),$$

em que  $x_i$  representa um resultado possível e  $P(X = x_i)$  a probabilidade de sua ocorrência. Tal grandeza indica o ganho ou perda médio esperado ao repetir a mesma decisão um grande número de vezes. Assim, a ação é considerada matematicamente vantajosa quando

$$EV > 0,$$

desfavorável quando

$$EV < 0,$$

e indiferente quando

$$EV = 0.$$

Considera-se inicialmente um exemplo ilustrativo. Suponha que um jogador paga uma aposta de 20 fichas com probabilidade de 25% de completar uma mão vencedora que resultará em um ganho de 100 fichas. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o ganho da decisão. Os possíveis resultados são: ganhar 100 fichas com

probabilidade 0,25 ou perder 20 fichas com probabilidade 0,75. Assim,

$$EV = (100 \cdot 0,25) + (-20 \cdot 0,75) = 25 - 15 = 10.$$

Como  $EV = 10 > 0$ , a decisão é lucrativa no longo prazo, ainda que possa resultar em perda em um caso isolado.

Observa-se que o EV integra probabilidade e retorno esperado. Supondo que  $P(E)$  seja a probabilidade de completar a mão desejada e que, ao pagar uma aposta de valor  $A$ , o jogador dispute um pote final de  $P + A$ , tem-se a representação geral:

$$EV = P(E) \cdot (P + A) - (1 - P(E)) \cdot A.$$

A ação racional consiste em pagar a aposta quando  $EV > 0$  e desistir quando  $EV < 0$ .

A seguir, apresentam-se exemplos numéricos no contexto do poker para ilustrar a aplicabilidade do EV na tomada de decisão.

### Exemplo 1 — Sequência (*Straight*) no river

Considere um jogador com quatro cartas conectadas após o *turn*, restando oito cartas favoráveis entre as 46 disponíveis. A probabilidade de completar a sequência é

$$P(E_{\text{straight}}) = \frac{8}{46} \approx 17,4\%.$$

Suponha que o pote contenha 150 fichas e o adversário aposte 20 fichas. Se a sequência for completada, o ganho será de 170 fichas. Assim,

$$EV = 0,174 \cdot 170 - 0,826 \cdot 20 \approx 29,6 - 16,5 = 13,1.$$

Como  $EV > 0$ , pagar a aposta é matematicamente vantajoso.

### Exemplo 2 — Full House

Suponha que o jogador possua uma trinca após o *turn* e deseja completar um *full house*. Restam seis cartas favoráveis entre 46, de modo que

$$P(E_{\text{full}}) = \frac{6}{46} \approx 13,0\%.$$

Se o pote contiver 300 fichas e o adversário apostar 60 fichas, o ganho possível será de 360 fichas. Assim,

$$EV = 0,13 \cdot 360 - 0,87 \cdot 60 = 46,8 - 52,2 = -5,4.$$

Embora o evento desejado produza uma mão forte, o resultado negativo indica que pagar a aposta é economicamente desvantajoso no longo prazo.

Ao final da aula, conclui-se que o valor esperado sintetiza a lógica matemática que orienta a tomada de decisão eficiente no poker: a probabilidade indica a chance de sucesso, as *pot odds* relacionam risco e retorno imediato e o valor esperado determina, de forma quantitativa, se a jogada gera lucro ou prejuízo esperado ao longo do tempo. Assim, o EV conecta o estudo da probabilidade à análise econômica de decisões sob incerteza, constituindo um conceito central para a compreensão estratégica do jogo.

### 3.9 Aula 9: Probabilidade e bluff

O objetivo desta aula é introduzir o conceito de *bluff* como ferramenta estratégica no poker e demonstrar que a decisão de blefar pode ser analisada matematicamente por meio de frequência mínima necessária de desistência e cálculo de valor esperado. Embora o blefe seja frequentemente associado à intuição, sua fundamentação racional decorre da relação entre risco assumido e retorno financeiro esperado.

Entende-se por *bluff* a ação em que o jogador aposta ou aumenta a aposta com uma mão inferior àquela que o adversário provavelmente possui, com o objetivo de fazê-lo desistir. Seja  $F$  o evento “o oponente desiste diante da aposta” e  $P(F)$  a sua probabilidade. Seja  $P$  o valor presente do pote e  $A$  o valor apostado pelo jogador. O ganho em caso de desistência do adversário é  $P$ , enquanto a perda em caso de pagamento é  $A$ . Define-se a variável aleatória  $X$  que modela o ganho do blefe:

$$X = \begin{cases} P, & \text{se } F \text{ ocorrer} \\ -A, & \text{se } F \text{ não ocorrer.} \end{cases}$$

O valor esperado do blefe é dado por:

$$EV_{\text{bluff}} = P(F) \cdot P - (1 - P(F)) \cdot A.$$

O blefe é matematicamente vantajoso quando

$$EV_{\text{bluff}} > 0.$$

Da desigualdade acima, obtém-se a condição equivalente:

$$P(F) > \frac{A}{P + A}.$$

A expressão

$$\frac{A}{P + A}$$

representa a **frequência mínima de desistência do adversário** necessária para que o

blefe seja lucrativo no longo prazo.

### Exemplo 1 — Blefe padrão

Considere  $P = 100$  fichas e uma aposta  $A = 50$  fichas. Então

$$\frac{A}{P + A} = \frac{50}{150} \approx 33,3\%.$$

Se o oponente desistir em mais de 33,3% das situações semelhantes, o blefe produz lucro esperado positivo.

### Exemplo 2 — Blefe econômico

Considere agora um pote de  $P = 100$  fichas e uma aposta  $A = 25$  fichas. Tem-se:

$$\frac{A}{P + A} = \frac{25}{125} = 20\%.$$

Basta que o adversário desista em mais de 20% das vezes para que o blefe seja lucrativo. Esse exemplo mostra que apostas menores requerem menor taxa de sucesso.

### Exemplo 3 — Blefe agressivo

Se o pote contém  $P = 100$  fichas e o jogador aposta  $A = 100$  fichas:

$$\frac{A}{P + A} = \frac{100}{200} = 50\%.$$

A estratégia só é lucrativa se o adversário desistir em mais da metade das ocasiões semelhantes, evidenciando que blefes grandes exigem alta taxa de sucesso.

### Exemplo 4 — Cálculo de EV no blefe

Suponha que em uma determinada situação o jogador avalia que o adversário desiste com probabilidade  $P(F) = 40\%$ , o pote contém  $P = 120$  fichas e o jogador aposta  $A = 50$  fichas. O valor esperado do blefe é então:

$$EV_{\text{bluff}} = 0,40 \cdot 120 - 0,60 \cdot 50 = 48 - 30 = 18.$$

Como  $EV_{\text{bluff}} = 18 > 0$ , o blefe é lucrativo no longo prazo.

### Exemplo 5 — EV negativo em situação de blefe

Suponha agora que o pote contém  $P = 200$  fichas e o jogador aposta  $A = 100$  fichas, estimando que o adversário desiste com probabilidade  $P(F) = 45\%$ . Então:

$$EV_{\text{bluff}} = 0,45 \cdot 200 - 0,55 \cdot 100 = 90 - 55 = 35.$$

Apesar do  $EV$  positivo neste cenário específico, se a estimativa de desistência for menor que 50%, tem-se:

$$EV_{\text{bluff}} = P(F) \cdot 200 - (1 - P(F)) \cdot 100.$$

Se  $P(F) = 40\%$ :

$$EV_{\text{bluff}} = 0,40 \cdot 200 - 0,60 \cdot 100 = 80 - 60 = 20,$$

ainda positivo. Entretanto, se  $P(F) = 30\%$ :

$$EV_{\text{bluff}} = 0,30 \cdot 200 - 0,70 \cdot 100 = 60 - 70 = -10.$$

Portanto, a mesma aposta pode ser lucrativa ou prejuízo dependendo da frequência de desistência estimada — destacando a importância de avaliação racional do adversário.

Conclui-se que o blefe é uma ação estratégica fundamentada em quantificação de risco, frequência de desistência e retorno esperado, e não uma decisão aleatória ou intuitiva. A matemática orienta o jogador a blefar apenas quando a probabilidade de desistência supera o limiar dado por  $\frac{A}{P+A}$ , garantindo que o valor esperado seja positivo ao longo de muitas repetições da mesma situação. Esta análise prepara o terreno para conteúdos futuros relacionados a *balanceamento de ranges* e teoria da decisão sob incerteza.

## 3.10 Aula 10: Probabilidade de vitória entre mãos

O objetivo desta aula é analisar comparações diretas entre mãos de poker no pré-flop, utilizando conceitos matemáticos e resultados de simulações para estimar qual mão possui maior probabilidade de vitória ao final da rodada. Busca-se evidenciar que a força relativa entre mãos iniciais não depende de intuição ou preferência subjetiva, mas decorre de cálculos combinatórios e probabilísticos.

Denomina-se *equidade da mão* a probabilidade de que uma determinada mão inicial vença o pote no longo prazo, considerando todas as possíveis combinações de cartas comunitárias (*flop*, *turn* e *river*) e todas as mãos adversárias possíveis, sob hipóteses bem definidas (por exemplo, jogo *heads-up* contra uma mão específica ou contra um adversário com mão aleatória). Em termos formais, se  $\Omega$  denota o conjunto de todas as combinações possíveis de cinco cartas comunitárias, a probabilidade de

vitória de uma mão  $H$  contra uma mão (ou range)  $H'$  pode ser descrita como

$$P(\text{vitória de } H) = \frac{|\{\omega \in \Omega : H \text{ forma a melhor mão contra } H' \text{ em } \omega\}|}{|\Omega|}.$$

Como o número de combinações é muito grande, tais probabilidades são usualmente estimadas por métodos de simulação (por exemplo, simulações de Monte Carlo), ainda que a base conceitual seja estritamente combinatória.

Para introduzir o tema, considera-se o confronto clássico  $AK$  versus  $QQ$  no pré-flop. Em um cenário *heads-up*, sob hipóteses padrão, as estatísticas mostram que o par de damas ( $QQ$ ) apresenta equidade levemente superior à de  $AK$ , ou seja, tem maior probabilidade de vencer no longo prazo. Essa comparação ilustra que:

- mesmo quando uma mão é “favorita”, ela não vence em 100% das partidas;
- a força pré-flop é uma noção probabilística, não absoluta;
- pequenas diferenças de equidade podem ter impacto significativo quando decisões são repetidas muitas vezes.

De forma geral, a probabilidade de vitória de uma mão  $H_1$  contra uma mão  $H_2$  no pré-flop pode ser escrita como

$$P(\text{vitória de } H_1) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \mathbf{1}_{\{H_1 \text{ vence } H_2 \text{ em } \omega\}},$$

onde  $P(\omega)$  é a probabilidade de ocorrência da combinação  $\omega$  de cartas comunitárias (tipicamente assumida uniforme) e  $\mathbf{1}$  é a função indicadora.

### Matriz de 169 mãos iniciais

Em Texas Hold'em, existem 1 326 combinações distintas de duas cartas iniciais, mas muitas delas são equivalentes em valor pré-flop, pois os naipes não possuem hierarquia. Agrupando por classes de valor, obtêm-se 169 classes não equivalentes de mãos iniciais: 13 pares, 78 mãos *suited* e 78 mãos *offsuit*. Essas 169 classes são tradicionalmente organizadas em uma matriz  $13 \times 13$ , em que:

- a diagonal principal contém os pares ( $AA, KK, \dots, 22$ );
- a parte acima da diagonal corresponde às mãos *suited*;
- a parte abaixo da diagonal corresponde às mãos *offsuit*.

A seguir apresenta-se a matriz completa das 169 classes de mãos iniciais. Nela, cada entrada indica a classe da mão; opcionalmente, pode-se associar a cada entrada a equidade numérica correspondente (por exemplo, adicionando entre parênteses a

probabilidade de vitória estimada contra um adversário com mão aleatória ou em um cenário *heads-up* específico).

Tabela 3.3: Matriz das 169 classes de mãos iniciais em Texas Hold'em

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	AA	AKs	AQs	AJs	ATs	A9s	A8s	A7s	A6s	A5s	A4s	A3s	A2s
K	AKo	KK	KQs	KJs	KTs	K9s	K8s	K7s	K6s	K5s	K4s	K3s	K2s
Q	AQo	KQo	QQ	QJs	QTs	Q9s	Q8s	Q7s	Q6s	Q5s	Q4s	Q3s	Q2s
J	AJo	KJo	QJo	JJ	JTs	J9s	J8s	J7s	J6s	J5s	J4s	J3s	J2s
T	ATo	KTo	QTo	JTo	TT	T9s	T8s	T7s	T6s	T5s	T4s	T3s	T2s
9	A9o	K9o	Q9o	J9o	T9o	99	98s	97s	96s	95s	94s	93s	92s
8	A8o	K8o	Q8o	J8o	T8o	98o	88	87s	86s	85s	84s	83s	82s
7	A7o	K7o	Q7o	J7o	T7o	97o	87o	77	76s	75s	74s	73s	72s
6	A6o	K6o	Q6o	J6o	T6o	96o	86o	76o	66	65s	64s	63s	62s
5	A5o	K5o	Q5o	J5o	T5o	95o	85o	75o	65o	55	54s	53s	52s
4	A4o	K4o	Q4o	J4o	T4o	94o	84o	74o	64o	54o	44	43s	42s
3	A3o	K3o	Q3o	J3o	T3o	93o	83o	73o	63o	53o	43o	33	32s
2	A2o	K2o	Q2o	J2o	T2o	92o	82o	72o	62o	52o	42o	32o	22

Caso se deseje associar a cada classe a sua equidade numérica pré-flop, é possível acrescentar, em cada célula, a porcentagem de vitória estimada (por exemplo, AA (85,2%) ou AKs (67,0%)), com base em tabelas obtidas por simuladores de poker amplamente utilizados na literatura. Dessa forma, a matriz passa a representar não apenas a classificação qualitativa das mãos, mas também sua força quantitativa aproximada.

### Comparação de força entre mãos

Como exemplo de aplicação, pode-se considerar o confronto entre duas mãos específicas  $H_1$  e  $H_2$  (por exemplo, AK e QQ) em um cenário *heads-up*. A equidade de  $H_1$  contra  $H_2$  é dada por

$$\text{Eq}(H_1; H_2) = P(\text{vitória de } H_1) + \frac{1}{2}P(\text{empate}),$$

e, analogamente, a equidade de  $H_2$  satisfaz

$$\text{Eq}(H_2; H_1) = P(\text{vitória de } H_2) + \frac{1}{2}P(\text{empate}),$$

com  $\text{Eq}(H_1; H_2) + \text{Eq}(H_2; H_1) = 1$ .

Na prática, tais probabilidades são estimadas por simulação: fixa-se a mão  $H_1$  para o jogador, a mão  $H_2$  para o adversário, sorteiam-se repetidamente as cinco cartas comunitárias e registra-se a frequência relativa de vitórias, derrotas e empates. O resultado consolida a noção de que pares médios e altos, como  $QQ$ , tendem a apresentar equidade maior do que mãos não pareadas, como  $AK$ , embora ambas possam assumir valores estratégicos distintos dependendo do contexto (posição, número de jogadores, ranges adversários e tamanho efetivo dos stacks).

Para auxiliar nesta aula, é recomendável utilizar simuladores de equidade já disponíveis em sites especializados, como o PokerNews e outras plataformas reconhecidas pela comunidade do poker. Os cálculos de equidade pré-flop são extremamente complexos, pois levam em conta um grande número de fatores, como todas as combinações possíveis de cartas comunitárias, distribuição dos naipes, número de jogadores envolvidos, ranges adversários e possíveis empates. Por esse motivo, embora seja importante apresentar os fundamentos matemáticos da equidade em sala, a aplicação prática pode ser complementada com ferramentas computacionais que realizam milhões de simulações para estimar probabilidades com alto grau de precisão.

Nesses simuladores é possível comparar diretamente diferentes mãos iniciais, ajustando variáveis como quantidade de jogadores na mesa, estilos de jogo, ranges de abertura e cenários específicos de confronto. Assim, os estudantes podem observar em tempo real como a equidade de uma mão varia de acordo com o contexto em que está inserida. Essa experiência prática favorece a compreensão de que nenhuma mão é absolutamente vencedora em todos os cenários, e que a força de uma mão pré-flop depende tanto de sua constituição quanto das condições estratégicas do momento. Observe na figura um exemplo de como é a interface na calculadora do site do Pokernews.

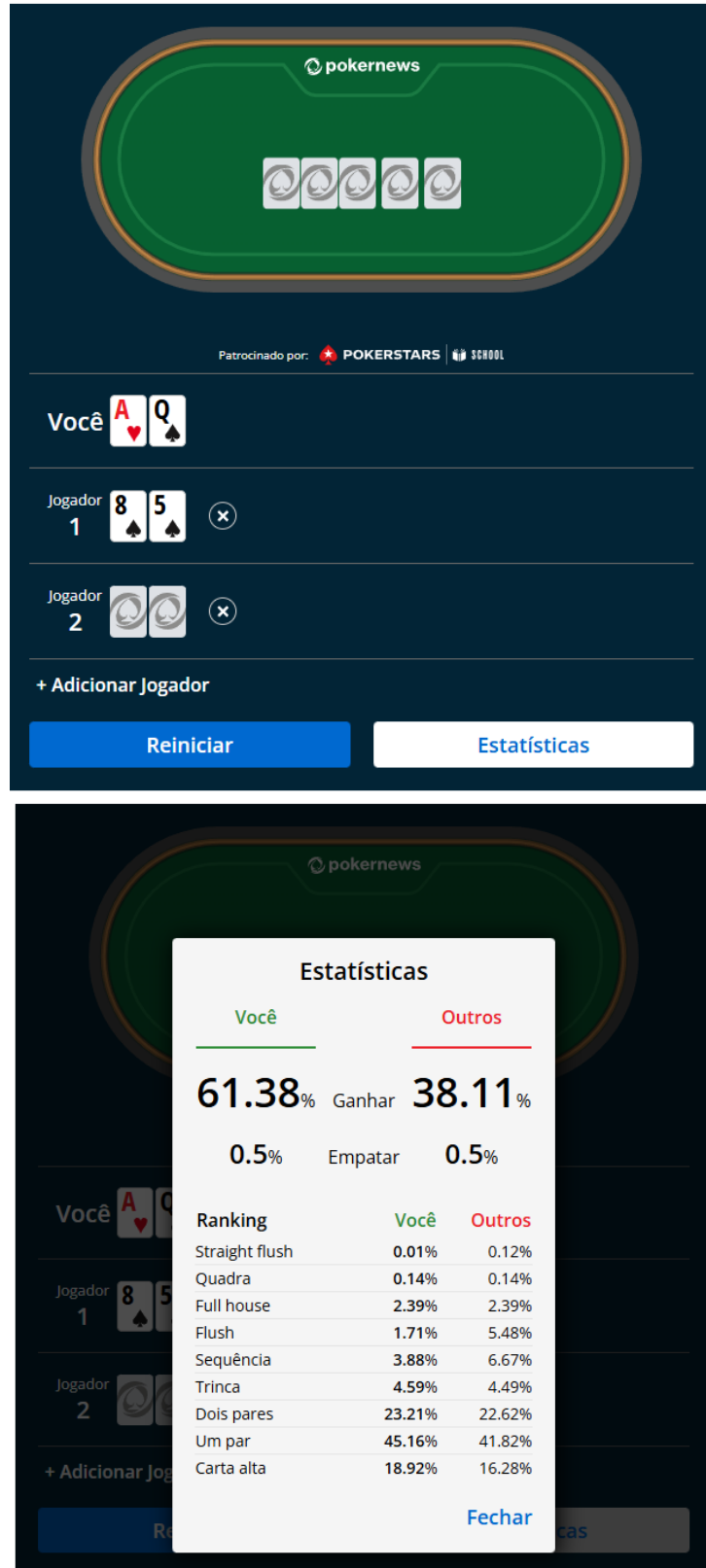
A análise das equidades pré-flop, combinada com os conceitos estudados nas aulas anteriores (espaço amostral, probabilidade, *pot odds* e valor esperado), fornece uma base quantitativa para a tomada de decisão no pré-flop, permitindo que o professor discuta com os estudantes não apenas quais mãos são “fortes” ou “fracas”, mas em que medida e sob quais condições essa classificação é matematicamente justificada.

### **3.11 Aula 11: Estatística no poker: performance e longo prazo**

O objetivo desta aula é apresentar o uso da estatística para avaliar o desempenho no poker de forma racional, evitando conclusões baseadas exclusivamente em resultados imediatos. A proposta consiste em mostrar que ganhar uma mão não implica necessariamente ter tomado uma decisão correta, assim como perder não implica que a decisão tenha sido ruim. O foco central é aprender a analisar o desempenho com base em um grande número de decisões, e não em ocorrências isoladas.

Em contextos de jogos com variância elevada, como o poker, o resultado de

Figura 3.2: AQ offsuited contra 85 suited na Calculadora Pokernews



uma única mão é apenas uma amostra de um processo aleatório. Portanto, conclusões confiáveis só podem ser obtidas após um número suficientemente grande de observações. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o ganho associado a uma decisão e seja  $EV(X)$  o seu valor esperado, então o acompanhamento estatístico busca verificar se o desempenho real converge para o desempenho esperado ao longo do tempo. Esse fenômeno pode ser interpretado à luz da Lei dos Grandes Números: à medida que o número de decisões aumenta, a média observada tende a se aproximar do valor esperado.

Dessa forma, vencer repetidamente no curto prazo não garante que o jogador esteja tomando decisões corretas; do mesmo modo, uma sequência de perdas não implica necessariamente decisões erradas. O critério rigoroso para avaliar se um jogador está desempenhando bem é verificar se, ao longo de muitas situações, suas ações apresentam valor esperado positivo.

### Exemplo prático de acompanhamento estatístico

Considere um jogador que registra suas últimas 100 decisões de *call* no *turn* em situações em que precisava estimar se o valor esperado era positivo. Após análise técnica, concluiu-se que:

- em 62 das decisões, a probabilidade de vitória  $P(E)$  era superior à razão das *pot odds* exigidas, de modo que  $EV > 0$ ;
- em 38 das decisões, a probabilidade de vitória era inferior à razão das *pot odds*, de modo que  $EV < 0$ .

Suponha ainda que o jogador tenha obtido lucro financeiro nas 38 decisões incorretas e prejuízo financeiro nas 62 decisões corretas. Uma análise baseada apenas nos resultados imediatos poderia levar ao diagnóstico equivocado de que o desempenho foi negativo. Entretanto, sob interpretação estatística, o jogador apresentou taxa de decisões matematicamente corretas igual a

$$\frac{62}{100} = 62\%.$$

Se as decisões com  $EV > 0$  forem repetidas consistentemente ao longo de um grande número de mãos, a expectativa teórica é que o lucro acumulado seja positivo, independentemente da sequência momentânea de perdas. Este exemplo demonstra que estatística aplicada ao poker avalia a qualidade das decisões, e não o curto prazo financeiro.

### Implicações estratégicas

A análise estatística permite responder objetivamente às seguintes questões:

- As decisões tomadas ao longo do tempo apresentam  $EV > 0$  de forma consistente?
- A taxa de erro diminui com o passar das sessões de jogo?
- A tendência financeira converge para o valor esperado calculado?

O registro sistemático de decisões, aliado ao cálculo do valor esperado, fornece indicadores confiáveis de progresso estratégico. Conclui-se que medir desempenho no poker significa medir a qualidade das decisões. O objetivo estatístico não é vencer todas as mãos, mas tomar decisões lucrativas no longo prazo, consistentes com probabilidade, *pot odds*, valor esperado e análise de ranges.

Essa perspectiva reforça que a matemática constitui o referencial objetivo para o estudo estratégico do poker e prepara os estudantes para tópicos futuros, como análise de variância e gestão de banca.

### 3.12 Aula 12: Probabilidade em Torneios e Gestão de Banca

O objetivo desta aula é apresentar a aplicação da probabilidade no contexto de torneios de poker e relacioná-la à gestão de banca (*bankroll management*). A proposta consiste em demonstrar que o desempenho em torneios depende da tomada de decisão baseada em probabilidade, controle de risco e disciplina financeira, destacando o poker como esporte da mente, em contraste com jogos puramente aleatórios nos quais o resultado depende exclusivamente da sorte.

Em torneios de poker, cada competidor inicia com o mesmo número de fichas e, à medida que os *blinds* aumentam e jogadores são eliminados, decisões progressivamente mais arriscadas se tornam necessárias. Nesse formato, o objetivo não é vencer todas as mãos, mas maximizar a probabilidade de sobrevivência no torneio e alcançar fases remuneradas. Assim, mesmo jogadores altamente habilidosos vencem apenas uma pequena fração dos torneios que disputam, devido à variância inerente ao jogo; em contrapartida, podem ser lucrativos a longo prazo.

A estatística fornece o referencial adequado para avaliar o desempenho. Em vez de medir resultados imediatos, avalia-se o desempenho com base em tendências. Com o passar do tempo, o lucro acumulado tende a refletir a qualidade das decisões tomadas — e não a variância de curto prazo. Portanto, o critério rigoroso de avaliação não é o número de torneios vencidos, mas a consistência de decisões lucrativas ao longo de uma grande amostragem.

#### Gestão de banca (Bankroll management)

A gestão de banca estabelece quanto capital é necessário para suportar financeiramente a variância do jogo até que a expectativa matemática se manifeste. Seja  $B$  o

valor total da banca e  $C$  o custo de inscrição de um torneio (*buy-in*). O jogador está em situação de risco quando  $B$  e  $C$  são comparáveis. O princípio geral recomenda que

$$B > C,$$

devendo a razão  $B/C$  ser suficientemente grande para evitar *risco de ruína*.

### Risco de ruína

Denomina-se risco de ruína a probabilidade de a banca ser completamente perdida antes que a expectativa positiva ( $EV$ ) se realize. Sejam:

- $B$  — valor total da banca destinado a torneios;
- $C$  — custo de inscrição de um torneio;
- $p$  — probabilidade de premiação (probabilidade de terminar ITM — *in the money*);
- $q = 1 - p$  — probabilidade de não premiação.

Sob um modelo simplificado baseado no trabalho de Ferreira (2013), assume-se que o jogador ganha ou perde uma unidade da banca em cada torneio, e o risco de ruína é dado por

$$R = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{B}{C}} \quad \text{para } p > q.$$

### Exemplo prático de gestão de banca

Considere um jogador com banca reservada exclusivamente para torneios no valor de

$$B = 2\,000$$

e que participa de torneios com entrada

$$C = 20.$$

A razão é  $B/C = 100$  inscrições possíveis. Suponha que o jogador tenha taxa de premiação

$$p = 0,20 \quad \text{e} \quad q = 0,80.$$

Assim,

$$R = \left(\frac{0,80}{0,20}\right)^{100} = (4)^{100},$$

um valor extremamente elevado, indicando risco de ruína praticamente certo nesse cenário — mesmo que o jogador seja habilidoso. Isso mostra que, com taxa de premiação

baixa, a variância do formato torna inviável a participação nesses torneios com banca insuficiente.

Se o mesmo jogador compete em torneios cujo estilo reduz a variância e aumenta a taxa de premiação para

$$p = 0,35 \quad \text{e} \quad q = 0,65,$$

tem-se

$$R = \left( \frac{0,65}{0,35} \right)^{100} \approx (1,857)^{100},$$

ainda altíssimo, reforçando que a razão  $B/C = 100$  é insuficiente para o perfil do jogador diante da variância do torneio.

Agora, suponha que o jogador aumente a razão banca/custo para

$$B = 6\,000, \quad C = 20, \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{C} = 300.$$

Mantendo  $p = 0,35$  e  $q = 0,65$ :

$$R = \left( \frac{0,65}{0,35} \right)^{300},$$

valor extremamente menor, aproximando estatisticamente o risco de ruína de zero. Portanto, o jogador garante sustentação financeira até que a expectativa matemática acumulada de decisões positivas se manifeste.

Conclui-se que resultados isolados em torneios não determinam o desempenho. O jogador estatisticamente vencedor é aquele que:

- toma decisões com valor esperado positivo;
- mantém disciplina financeira capaz de suportar a variância;
- monitora o desempenho ao longo de uma amostragem grande.

A probabilidade em torneios e a gestão de banca, portanto, permitem que a habilidade supere a variância com o tempo, reforçando o poker como esporte da mente baseado em tomada de decisões lógicas, e não em sorte imediata.

### 3.13 Aula 13: Classificação de jogadores: perfil, probabilidade e decisão

O objetivo desta aula é apresentar um modelo matemico-estratégico para classificar jogadores de poker a partir de padrões de tomada de decisão observáveis. A proposta consiste em demonstrar que estilos de jogo influenciam diretamente a probabilidade de vitória no longo prazo e que compreender o perfil do oponente é uma ferramenta quantitativa para melhorar decisões, e não uma opinião subjetiva.

A aula inicia com a reflexão: “*Todos os jogadores tomam decisões da mesma forma?*” Com base nessa pergunta, introduz-se a ideia de que o comportamento estatístico de um jogador pode ser analisado por variáveis como frequência de participação em mãos, agressividade e disposição para desistir. Dessa forma, a classificação de jogadores constitui uma caracterização baseada em estatísticas de comportamento e não em resultados financeiros isolados.

O modelo clássico divide os jogadores em quatro estilos fundamentais, construídos pela combinação entre frequência de mãos jogadas (tight/loose) e agressividade (aggressive/passive):

A classificação estratégica tem impacto matemático direto: jogadores que entram em muitas mãos sem vantagem estatística tendem a apresentar valor esperado negativo ( $EV < 0$ ), enquanto jogadores que entram seletivamente e atacam os potes corretamente tendem a mostrar valor esperado positivo ( $EV > 0$ ). Assim, o perfil de um jogador pode ser interpretado como um conjunto de *tendências probabilísticas de decisão*.

A aula introduz, em seguida, dois indicadores quantitativos amplamente adotados na teoria moderna do poker:

$$\text{VPIP} = \text{Voluntarily Put Money in the Pot}, \quad \text{PFR} = \text{Pre-Flop Raise}.$$

Com base nesses indicadores, formas numéricas de classificação podem ser estabelecidas. Por exemplo:

- VPIP baixo + PFR alto  $\Rightarrow$  Tight–Aggressive (TAG),
- VPIP alto + PFR alto  $\Rightarrow$  Loose–Aggressive (LAG),
- VPIP baixo + PFR baixo  $\Rightarrow$  Tight–Passive (TP),
- VPIP alto + PFR baixo  $\Rightarrow$  Loose–Passive (LP).

Estilo	VPIP	PFR	Característica
Tight–Aggressive	Baixo	Alto	Seleciona boas mãos e pressiona quando joga
Loose–Aggressive	Alto	Alto	Joga muitas mãos e pressiona continuamente
Tight–Passive	Baixo	Baixo	Seleciona poucas mãos e tende a pagar demais
Loose–Passive	Alto	Baixo	Joga muitas mãos e evita apostar

A interpretação dos perfis também é dinâmica: um jogador pode transitar temporariamente entre estilos conforme posição na mesa, fase do torneio, tamanho do stack, nível técnico dos adversários e aspectos psicológicos. Portanto, perfis não são rótulos permanentes, mas distribuições de probabilidade referentes às ações do adversário.

### Exemplo prático: probabilidade de vitória com leitura de perfil

Considere uma situação de *heads-up* no pré-flop em que o jogador possui *AKs*. Se não houver leitura sobre o adversário, assume-se um range amplo e genérico  $R$ , de modo que a equidade estimada é aproximadamente

$$\text{Eq}(AKs; R) \approx 64\%.$$

Entretanto, suponha que os dados coletados indiquem que o adversário possui perfil *tight-aggressive* (TAG), com VPIP = 18% e PFR = 15%. Nessa situação, assume-se que o range de aumento é mais forte, por exemplo:

$$R_{\text{TAG}} = \{99+, ATs+, AJo+, KQs\}.$$

A equidade de *AKs* contra esse range mais restrito diminui:

$$\text{Eq}(AKs; R_{\text{TAG}}) \approx 47\%.$$

Por outro lado, suponha que o adversário apresente perfil *loose-aggressive* (LAG), com VPIP = 38% e PFR = 28%. O range atribuído é naturalmente mais amplo:

$$R_{\text{LAG}} = \{22+, Axs, AT+, KJ+, QJ, T9s, 98s, 87s\}.$$

A equidade de *AKs* contra esse range cresce novamente:

$$\text{Eq}(AKs; R_{\text{LAG}}) \approx 63\%.$$

O exemplo mostra que a probabilidade de vitória não depende apenas da força isolada da mão, mas do conjunto de mãos plausíveis que o adversário pode possuir. Assim, compreender o perfil do oponente permite adaptar decisões matematicamente sofisticadas em vez de avaliar a força das cartas de maneira absoluta.

Conclui-se que classificar jogadores auxilia diretamente nos cálculos de ranges, probabilidade condicional, *expected value* e frequência de blefes. A matemática do poker não se limita ao baralho, mas estende-se ao comportamento estratégico das pessoas, reforçando o caráter do poker como esporte da mente baseado em tomada de decisão racional e disciplinada.

### 3.14 Aula 14: Problemas clássicos e desafios matemáticos no poker

O objetivo desta aula é apresentar aos estudantes uma série de problemas clássicos relacionados ao poker cuja resolução exige aplicação integrada dos conhecimentos estudados ao longo do curso, incluindo combinatória, espaço amostral, probabilidade, equidade, valor esperado, análise de *ranges* e estatística. Pretende-se demonstrar que o poker constitui um ambiente rico para desafios conceituais e tomada de decisão fundamentada matematicamente.

Historicamente, problemas envolvendo poker tornaram-se comuns em pesquisas e livros de probabilidade, bem como em cursos de estatística, simulação e teoria da decisão. A popularidade desses problemas ocorre porque o poker combina cálculos exatos e raciocínio estratégico em condições de incerteza, favorecendo a construção de habilidades matemáticas avançadas.

Os desafios apresentados ao longo da aula são divididos em três categorias principais:

1. **Problemas de contagem e probabilidade pura:** envolvem cálculo direto da probabilidade de um evento ocorrer, como formar um *flush*, completar *straight*, ou obter *full house*. Exigem domínio de espaço amostral e métodos de contagem.
2. **Problemas de decisão com base em risco e retorno:** exigem comparar probabilidade de completar uma mão com a razão de risco e retorno (*pot odds*) e determinar se pagar, aumentar ou desistir é matematicamente justificável.
3. **Problemas estratégicos baseados em leitura de oponentes:** incluem situações em que a mão adversária é desconhecida e a decisão envolve análise de *ranges*, perfis de jogadores e probabilidade condicional.

Esses três blocos permitem que o aluno perceba que o objetivo da matemática aplicada ao poker não é prever cartas futuras, mas maximizar o valor esperado das decisões diante da incerteza.

Exemplos comuns utilizados na aula incluem:

- Qual é a probabilidade de completar um *flush* no *river* após ver o *flop* com quatro cartas do mesmo naipe?
- Com 12 *outs* no *turn*, diante de uma aposta que oferece razão de 5:1, pagar é correto?
- Com a mão *AK*, qual é a melhor decisão frente a um adversário identificado como *loose-aggressive* que declara *all-in* pré-flop?

Esses problemas exigem articulação de conhecimentos prévios e a construção de justificativas matemáticas formais. A aula é concluída reforçando que a finalidade do estudo matemático no poker é fornecer ferramentas para tomada de decisão racional e disciplinada, e não avaliar resultados isolados. A grande lição conceitual é que a qualidade da decisão deve ser julgada com base em probabilidade e valor esperado, e não no resultado imediato da mão.

### 3.15 Aula 15: Projeto final: Análise matemática de uma mão real

O objetivo desta aula é avaliar a aprendizagem dos estudantes por meio da análise individual de uma mão de poker, exigindo a aplicação integrada dos conteúdos estudados ao longo do curso: combinatória, probabilidade, equidade, *pot odds*, valor esperado, análise de ranges, estatística e perfil dos jogadores.

Cada estudante deve selecionar uma mão específica — preferencialmente uma mão que tenha jogado, presenciado ou assistido — e desenvolver uma análise matemática completa da tomada de decisão associada a ela. O foco avaliativo não recai sobre o resultado final da mão, mas sim sobre a qualidade da decisão tomada com base nas informações disponíveis no momento da jogada.

A atividade deve conter os seguintes elementos:

- Descrição da mão e das ações em cada rodada;
- Cartas iniciais do jogador e posição na mesa;
- Tamanho do pote e valores apostados ao longo da mão;
- Perfil dos adversários e possíveis ranges atribuídos;
- Identificação do momento decisivo para análise (turno crítico);
- Cálculo da equidade da mão em relação ao(s) range(s) adversário(s);
- Cálculo das *pot odds* e avaliação do valor esperado (*EV*);
- Justificativa da escolha tomada e comparação com alternativas possíveis.

O relatório deve concluir explicitando:

- se a decisão tomada foi matematicamente correta;
- qual seria a decisão com maior valor esperado, caso seja diferente da tomada;
- como o perfil do(s) adversário(s) influenciou a análise matemática;
- se houve impacto de fatores emocionais no processo decisório.

O estudante pode utilizar o formulário anexado no apêndice ??.

## Exemplo de Análise Completa de uma Mão de Poker

A seguir apresenta-se um modelo de análise matemática de uma mão real para auxiliar os estudantes na elaboração de seus relatórios.

**Situação:** Torneio de Texas Hold'em. Blinds 200/400. O jogador está no botão com  $AK_s$ . Stack efetivo: 12.500 fichas.

**Pré-flop:** Jogador em posição intermediária (perfil TAG) aumenta para 1.200 fichas. Jogadores seguintes foldam. O aluno paga no botão. Blinds foldam.

**Flop:**  $K\heartsuit 9\heartsuit 4\clubsuit$  — pote = 3.200 fichas. O adversário aposta 1.600 fichas. O aluno paga.

**Turn:**  $2\spadesuit$  — pote = 6.400 fichas. O adversário aposta 4.800 fichas.

### 1. Análise de ranges

Com base no perfil TAG do adversário, atribui-se o seguinte range ao aumento pré-flop:

$$R = \{88+, ATs+, AJ0+, KQs\}.$$

### 2. Equidade aproximada

Usando simulador de equidade ou tabela de referência:

$$\text{Eq}(AK_s; R | K94) \approx 58\%.$$

Portanto,  $AK_s$  está à frente da maior parte do range adversário nesse bordo.

### 3. Pot odds

O adversário aposta 4.800 em um pote de 6.400:

$$\text{pot odds} = \frac{4.800}{6.400 + 4.800} \approx 42,8\%.$$

Como a equidade da mão (58%) é superior às *pot odds* exigidas, a decisão de pagar apresenta  $EV > 0$ .

### 4. Valor esperado

Seja  $x = 4.800$  fichas a serem pagas e  $P = 6.400 + 4.800 = 11.200$  o valor total do pote:

$$EV(\text{call}) = 0,58 \cdot 11.200 - 0,42 \cdot 4.800 = 6.496 - 2.016 = 4.480.$$

$$EV(\text{call}) > 0.$$

## 5. Decisão

A decisão correta matematicamente é **pagar**. Folding tem  $EV = 0$ . Aumentar poderia ter  $EV$  maior caso a fold equity fosse conhecida, mas não pode ser afirmado com segurança devido ao perfil TAG do adversário.

## 6. Conclusão

A jogada correta no turn foi **pagar**, pois:

- a equidade da mão (58%) é superior às *pot odds* do pote (42,8%);
- o adversário possui um range forte, mas grande parte das mãos do range perde para  $AK_s$  no bordo analisado;
- não há evidência matemática de que o blefe teria fold equity suficiente para justificar um aumento.

## 7. Reflexão

Ainda que a mão possa ser perdida eventualmente, a decisão tomada é lucrativa no longo prazo. Esse é o elemento essencial da avaliação: medir a qualidade da decisão e não o resultado isolado.

A finalidade desta avaliação é consolidar o entendimento de que a matemática aplicada ao poker não busca prever o resultado final de uma mão isolada, mas orientar decisões racionais diante da incerteza. Dessa forma, a aprendizagem se manifesta na coerência das escolhas e na fundamentação matemática utilizada para justificá-las.

A eletiva Probabilidade na Mesa apresenta o poker Texas Hold'em como um ambiente matemático rico para o estudo de probabilidade, análise Combinatória, estatística e tomada de decisão baseada em dados. Ao longo do percurso formativo, os estudantes exploram conteúdos como espaço amostral, métodos de contagem, probabilidades simples e condicionais, odds, valor esperado, equidade entre mãos e análise estatística de desempenho, sempre contextualizados em situações reais do jogo.

As práticas pedagógicas privilegiam experimentações, simulações, resolução de problemas autênticos, análise de cenários e projetos finais, promovendo um aprendizado investigativo e reflexivo. Dinâmicas iniciais, cálculos de probabilidades em etapas sucessivas do jogo, estudos de valor esperado e interpretação de resultados de longo prazo permitem aos alunos compreenderem a diferença entre variabilidade imediata e expectativa matemática, aspecto fundamental para a consolidação do pensamento probabilístico.

Além dos conteúdos formais, a eletiva favorece o desenvolvimento de competências socioemocionais e cognitivas, como avaliação de riscos, argumentação baseada em evidências, autocontrole diante da incerteza e tomada de decisões racionais. O poker mostra-se especialmente potente para evidenciar a natureza estocástica de muitos fenômenos, aproximando a Matemática do cotidiano dos estudantes e desconstruindo a ideia de que probabilidades se restringem a exercícios abstratos.

Dessa forma, o jogo configura-se como uma ferramenta didática eficaz para promover aprendizagem significativa, ao integrar conceitos matemáticos a contextos concretos, estimular o protagonismo discente e fortalecer a capacidade de modelar situações reais por meio do raciocínio quantitativo. A proposta reafirma que jogos de estratégia, quando mediados pedagogicamente, ampliam as possibilidades do ensino de Matemática, favorecendo uma formação crítica, autônoma e orientada por dados

## Referências Bibliográficas

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 3 jun. 2025.

FERREIRA, A. M. *A Ruína do Jogador: Uma Análise para o Ensino Médio*. Mestrado Profissional, 2013. Trabalho de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

PINHEIRO, C. *O problema de Monty Hall: probabilidade condicional*. 2021. MIT Technology Review Brasil. Disponível em: <https://mittechreview.com.br/o-problema-de-monty-hall/>. Acesso em: 26 ago. 2025.

SANTOS, K. J. C. *Jogos de Estratégia como Ferramenta Didática: Uma Proposta de Disciplinas Eletivas de Matemática com Xadrez e Poker*. 120 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UFRN, Natal, 2026. PROFMAT.