



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



UMA VISÃO VETORIAL DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO TETRAEDRO VIA MATRIZ DE GRAM

ELINALDO SOARES COSTA

UMA VISÃO VETORIAL DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO TETRAEDRO VIA MATRIZ DE GRAM

ELINALDO SOARES COSTA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu.

Costa, Elinaldo Soares

Uma visão vetorial do Teorema de Pitágoras no tetraedro via matriz de Gram. / Elinaldo Soares Costa. – São Luís, MA, 2026.

39 f.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Maranhão, 2026.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Espaço tridimensional. 3. Visão vetorial. 4. Matriz de Gram. 5. Tetraedro trirretangular. I. Título.

CDU: 512.64

UMA VISÃO VETORIAL DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO TETRAEDRO VIA MATRIZ DE GRAM

ELINALDO SOARES COSTA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu.

Aprovado em: 07 de Maio de 2026.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **IVANILDO SILVA ABREU**
Data: 09/06/2026 13:21:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. IVANILDO SILVA ABREU - UEMA
Orientador

Documento assinado digitalmente
 **JOAO COELHO SILVA FILHO**
Data: 09/06/2026 15:46:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. JOÃO COELHO SILVA FILHO - UEMA
Examinador Interno

Documento assinado digitalmente
 **ANSELMO BAGANHA RAPOSO JÚNIOR**
Data: 09/06/2026 14:01:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. ANSELMO BAGANHA RAPOSO JÚNIOR - UFMA
Examinador Externo à Instituição

São Luís - MA
2026

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Jeová-Deus e a seu Filho Jesus Cristo, em seguida a minha esposa Marluce e minha família. Ao meu orientador, o professor Ivanildo Abreu, pelas suas coordenadas, guia durante a dissertação, sugestões e apoio. A todos os colegas do curso que contribuíram nos nossos estudos para a integralização das disciplinas. À CAPES, pelo incentivo ao nos ajudar com a bolsa de estudos. Ao professor Sérgio Noletto Turibus, coordenador do programa, pela sua especial paciência e atenção nas aulas e no suporte durante todo o curso, ao professor Anselmo Baganha da UFMA pela atenção prestada e pelas aulas dadas para o Exame de Qualificação, as quais foram importantíssimas e pela ajuda especial com a formatação da dissertação, ao professor João Coelho, pelas aulas a mais de Aritmética que foram um suporte para o Exame de qualificação também e pelas suas observações na parte escrita desta dissertação. A todos os professores do PROFMAT-UEMA, pois eles foram peças importantes para chegarmos onde chegamos. Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho fosse produzido.

*“A vida é como a geometria: nela, tudo se mede
por proporções.”*

Pitágoras

RESUMO

O Teorema de Pitágoras é, sem dúvida, um dos pilares mais fundamentais da geometria euclidiana, possuindo inúmeras demonstrações e aplicações práticas ao longo da história da matemática. Este trabalho propõe uma abordagem teórica para a sua demonstração no espaço tridimensional: o Teorema de De Gua. A pesquisa fundamenta-se em uma visão vetorial, utilizando a Matriz de Gram como ferramenta central para demonstrar a relação entre as áreas das faces de um tetraedro trirretangular. Com o propósito de realizar uma transposição didática voltada ao ambiente escolar na educação básica, desenvolveu-se o Produto Educacional intitulado “Pitágoras 3D: A Geometria do Canto da Sala”. Trata-se de um roteiro investigativo que integra o uso de materiais manipuláveis, exploração digital e aplicação prática na resolução de um problema de modelagem.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Espaço tridimensional; Visão vetorial; Matriz de Gram; Tetraedro trirretangular.

ABSTRACT

The Pythagorean Theorem is undoubtedly one of the most fundamental pillars of Euclidean geometry, with numerous proofs and practical applications throughout the history of mathematics. This work proposes a theoretical approach to its proof in three-dimensional space: De Gua's Theorem. The research is based on a vectorial perspective, using the Gram Matrix as a central tool to demonstrate the relationship between the areas of the faces of a trirectangular tetrahedron. With the purpose of performing a didactic transposition aimed at the school environment in basic education, the Educational Product entitled "Pythagoras 3D: The Geometry of the Corner of the Room" was developed.

Keywords: Pythagorean Theorem; three-dimensional space; vectorial perspective; Gram Matrix.

Lista de Figuras

1	Generalização do Teorema de Pitágoras com figuras planas semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.	11
2	Representação geométrica da base canônica ortonormal no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$	16
3	Representação geométrica da diferença entre vetores e a Lei dos Cossenos.	16
4	Interpretação geométrica do produto vetorial e a sua ortogonalidade em relação ao plano gerado pelos vetores base $\vec{u}$ e $\vec{v}$	20
5	Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial - relação entre o produto vetorial e a área do paralelogramo:	22
6	Construção geométrica para a demonstração via projeção ortogonal.	28

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	GEOMETRIA VETORIAL E A MATRIZ DE GRAM	14
2.1	O espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e o produto escalar	15
2.1.1	Definição e interpretação geométrica	15
2.1.2	Norma, distância e ortogonalidade de vetores	18
2.2	Produto vetorial e ortogonalidade	19
2.3	A identidade de Lagrange e a área do paralelogramo	21
2.4	A matriz de Gram e suas propriedades	23
3	O TETRAEDRO TRIRRETÂNGULO	26
3.1	Abordagens clássicas de demonstração	26
3.1.1	Demonstração via projeção ortogonal – Geometria	27
3.1.2	Demonstração via Cálculo Diferencial e Integral - Integral de Superfície	29
4	O TEOREMA DE PITÁGORAS GENERALIZADO VIA MATRIZ DE GRAM	32
4.1	O enunciado do teorema no espaço e a modelagem vetorial do problema . .	32
4.2	A demonstração via determinante de Gram	33
5	A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO TEOREMA PARA O ENSINO MÉDIO	35
5.1	Estrutura da sequência didática	35
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

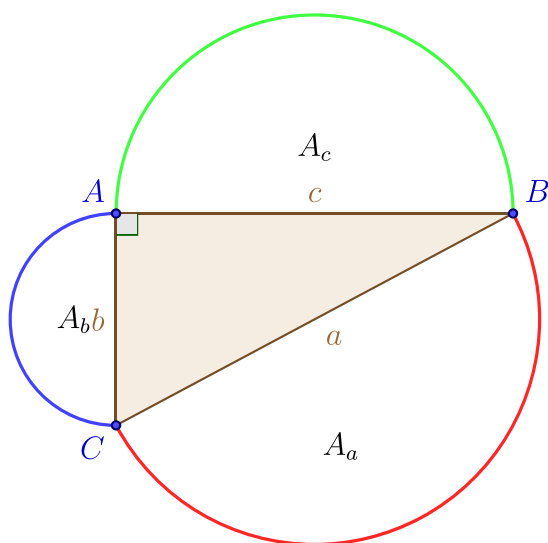
A Matemática, ao longo de sua história, tem sido construída sobre a generalização de conceitos e a busca por padrões. Dentre os resultados que permeiam a educação básica e superior, o Teorema de Pitágoras destaca-se não apenas pela sua popularidade, mas pela sua onipresença em diversas áreas das ciências exatas. Nesse contexto, Domingues (2001, p. 74) afirma que “o grande mérito da escola pitagórica foi ter elevado a matemática à categoria de ciência dedutiva”, consolidando a transição do conhecimento empírico para a demonstração geométrica formal.

Tradicionalmente enunciado para triângulos retângulos no plano bidimensional, este teorema estabelece a relação métrica fundamental entre os catetos e a hipotenusa, conforme enuncia Wagner (2010, p. 13), “Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”.

Contudo, a essência matemática desta relação transcende a figura específica do quadrado, pois o teorema também admite uma generalização notável para quaisquer polígonos ou contornos curvos, desde que sejam semelhantes. Conforme explica Wagner (2010, p. 14):

Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. [...] Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. [...] Portanto, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras semelhantes construídas sobre os catetos.

Figura 1: Generalização do Teorema de Pitágoras com figuras planas semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.



Fonte: O autor (2026).

A demonstração dessa propriedade é uma consequência direta da razão de semelhança geométrica: sejam a a medida da hipotenusa, e b e c as medidas dos catetos, considere-se três figuras semelhantes construídas sobre esses lados, cujas áreas são denotadas por S_a , S_b e S_c , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 1.

Na geometria plana, demonstra-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança (ou seja, o quadrado da razão entre os seus lados homólogos). Portanto, estabelecem-se as seguintes proporções algébricas:

$$\frac{S_b}{S_a} = \frac{b^2}{a^2} \quad (1)$$

e

$$\frac{S_c}{S_a} = \frac{c^2}{a^2}. \quad (2)$$

Somando membro a membro as equações (1) e (2), obtém-se:

$$S_b + S_c = S_a \left(\frac{b^2}{a^2} \right) + S_a \left(\frac{c^2}{a^2} \right) = S_a \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2} \right). \quad (3)$$

Pelo enunciado clássico do Teorema de Pitágoras, sabe-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Substituindo esta igualdade no numerador da fração da equação (3), a expressão simplifica-se para a unidade, resultando na confirmação da tese: $S_b + S_c = S_a$. No entanto, a geometria não se limita ao plano. A história da matemática mostra que o conhecimento precede a formalização. Domingues (2001, p. 28) ressalta que “muito antes de Pitágoras, os babilônios já conheciam empiricamente a relação entre os lados de um triângulo retângulo”. Contudo, a generalização desse conceito para dimensões superiores é um passo natural na evolução do pensamento matemático.

Quando se estende o olhar para o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, surgem análogos naturais para as figuras planas. Conforme definem Dolce e Pompeo (2013), o análogo tridimensional do triângulo é o tetraedro, e o análogo do triângulo retângulo é o tetraedro trirretângulo, um sólido que possui um vértice onde três arestas se encontram formando ângulos de 90 graus entre si.

Enquanto no plano a relação é linear entre os quadrados dos comprimentos dos lados do triângulo retângulo, no espaço tridimensional a relação se dá entre os quadrados das áreas das faces. O Teorema de Pitágoras Generalizado para o tetraedro trirretângulo afirma que o quadrado da área da face oposta ao vértice do triedro trirretângulo é igual à soma dos quadrados das áreas das outras três faces do tetraedro.

A motivação para este trabalho surge da necessidade de revisitar esse teorema clássico sob uma ótica moderna e vetorial. Embora existam demonstrações geométricas puras, a utilização da Álgebra Linear e da Geometria Analítica oferece ferramentas robustas como o produto vetorial e o produto escalar. Como sintetizam Steinbruch e Winterle (1987, p. 2), “o tratamento vetorial da Geometria Analítica facilita e simplifica o estudo

das retas e planos no espaço”, permitindo uma demonstração mais elegante e compacta.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma demonstração vetorial do Teorema de Pitágoras Generalizado aplicado ao tetraedro trirretângulo, utilizando a Matriz de Gram como ferramenta central, e propor reflexões pedagógicas sobre a transposição didática desse conhecimento para o ensino de geometria na educação básica.

A metodologia adotada é de natureza bibliográfica e dedutiva. Para alcançar os objetivos propostos, o trabalho mostra os conceitos fundamentais de vetores no espaço $\mathbb{R}^3$, produto escalar e produto vetorial. Além disso, define e explora as propriedades da Matriz de Gram e sua relação com o cálculo de áreas de paralelogramos. A partir dessa base teórica, o tetraedro trirretângulo é modelado vetorialmente. Isso permite a aplicação da Identidade de Lagrange associada ao determinante da Matriz de Gram para validar a relação métrica entre as áreas das faces.

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos. O primeiro capítulo contextualiza o tema e define os objetivos da pesquisa. O segundo capítulo estabelece as bases teóricas, definindo as operações vetoriais e introduzindo rigorosamente a Matriz de Gram. O terceiro capítulo dedica-se à geometria do tetraedro trirretângulo, definindo os seus elementos e propriedades analíticas. O quarto capítulo constitui o núcleo matemático deste trabalho, apresentando a demonstração do teorema principal através da modelagem vetorial e da expansão do determinante de Gram. O quinto capítulo promove uma ponte entre a matemática de nível superior e a sala de aula, discutindo a transposição didática da generalização do teorema para o Ensino Médio. Por fim, o sexto capítulo apresenta as considerações finais, resumizando as implicações dos resultados obtidos e a sua relevância tanto para a álgebra linear quanto para a educação básica.

Esta pesquisa pretende contribuir para o avanço do conhecimento na área do estudo da geometria clássica, geometria analítica e álgebra inserindo o teorema de Pitágoras como protagonista e incentivando novas pesquisas do seu uso no espaço tridimensional.

2 GEOMETRIA VETORIAL E A MATRIZ DE GRAM

A geometria clássica, fundamentada nos postulados de Euclides, proporciona uma intuição visual profunda sobre as propriedades das figuras no plano e no espaço. Contudo, a extensão de resultados da geometria plana para o espaço tridimensional, especialmente quando se trata de quantificar áreas e volumes complexos, requer ferramentas mais robustas do que apenas a construção de figuras e o traçado de retas auxiliares. A Geometria Vetorial e a Álgebra Linear surgem, então, como a linguagem ideal para essa tarefa, pois permitem traduzir problemas espaciais complexos em equações algébricas precisas.

Neste capítulo, constrói-se a base matemática necessária para demonstrar o Teorema de Pitágoras Generalizado, o Teorema de Gua. O foco não reside apenas em apresentar um compêndio de fórmulas, mas sim em estruturar uma narrativa lógica que justifique as operações matriciais subsequentes. A transição da visão puramente geométrica para a manipulação algébrica exige que se revisitem os conceitos de espaço euclidiano, ortogonalidade e cálculo de áreas sob uma nova ótica.

Como destacam Steinbruch e Winterle (1987), a grande vantagem da abordagem vetorial é a sua capacidade de simplificação e generalização. Problemas que na geometria clássica dependeriam de visualizações espaciais difíceis tornam-se sistemáticos e acessíveis quando tratados algebricamente. Assim, revisam-se aqui as definições de produto escalar e produto vetorial, culminando na apresentação e demonstração da identidade que legitima o uso da Matriz de Gram, conforme a metodologia proposta por Abreu et al. (2022).

Para que esta transição metodológica seja validada, é imprescindível que nenhuma etapa algébrica seja omitida ou assumida como trivial. A substituição da intuição visual pelo rigor analítico exige, em primeiro lugar, a formalização estrita do espaço de atuação e das regras que governam as métricas de comprimento e ortogonalidade dentro desse ambiente.

Com esse propósito, o presente capítulo foi estruturado de modo lógico e progressivo. Inicialmente, a Seção 2.1 formaliza o espaço euclidiano tridimensional e as propriedades do produto escalar, estabelecendo a base métrica necessária. Em seguida, a Seção 2.2 mostra o produto vetorial com foco na sua capacidade de quantificar áreas de superfícies. A Seção 2.3 estabelece a relação analítica entre essas duas operações matemáticas através da Identidade de Lagrange, apresentando a sua demonstração algébrica. Por fim, a Seção 2.4 conclui a fundamentação teórica ao introduzir a Matriz de Gram, consolidando o formalismo matricial que será aplicado diretamente, nos capítulos subsequentes, para calcular a área da face oposta ao vértice reto do tetraedro trirretângulo.

2.1 O espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e o produto escalar

Para trabalhar com a geometria espacial de forma analítica, faz-se necessário definir rigorosamente o ambiente matemático de atuação dos vetores. Neste trabalho, o ambiente geométrico e algébrico adotado para a modelagem e demonstração dos resultados é o espaço euclidiano tridimensional, denotado por $\mathbb{R}^3$.

Algebricamente, o espaço $\mathbb{R}^3$ é definido como o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais (x, y, z) . No entanto, um espaço vetorial, na sua definição mais pura, garante apenas a estabilidade das operações de adição de vetores e de multiplicação por escalares. Por si só, este espaço afim não fornece as ferramentas matemáticas necessárias para medir distâncias ou determinar ângulos entre direções. Para que a geometria métrica seja possível, é indispensável dotar o espaço de uma estrutura analítica adicional.

Conforme explicam Callioli, Domingues e Costa (1990), é a introdução do produto interno (ou produto escalar) que transforma um espaço vetorial comum num Espaço Euclidiano. É esta operação singular que estabelece a métrica do espaço, permitindo o cálculo rigoroso de comprimentos (normas) e a formalização do conceito de perpendicularidade (ortogonalidade), sem os quais a análise de figuras como o tetraedro triângulo seria inviável.

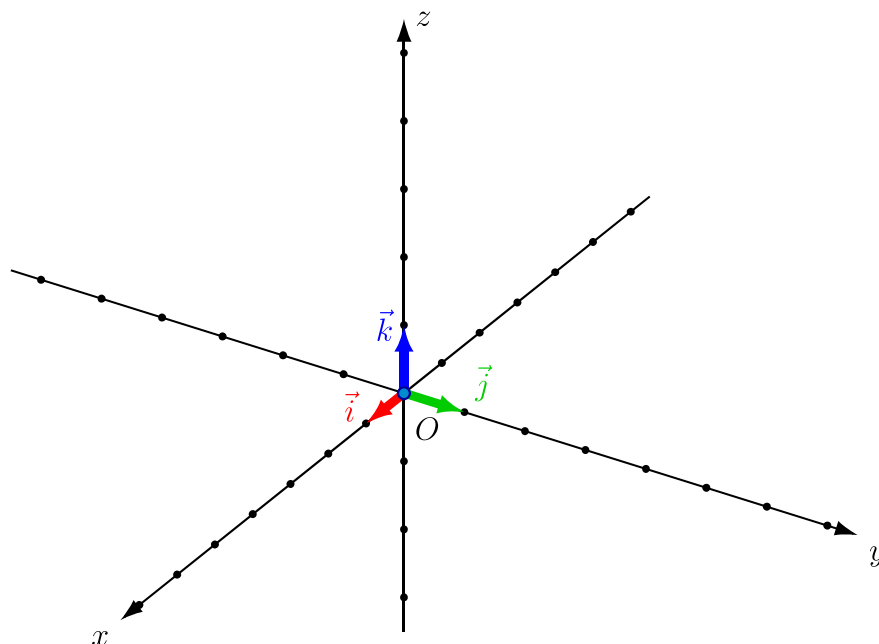
2.1.1 Definição e interpretação geométrica

No âmbito da Álgebra Linear, o produto interno não é apenas uma fórmula, mas sim uma operação bilinear, simétrica e que resulta sempre num valor positivo quando um vetor não nulo é multiplicado por si mesmo. É esta característica fundamental que permite calcular comprimentos no espaço sem lidar com raízes de números negativos.

Para que o espaço $\mathbb{R}^3$ adquira a estrutura de Espaço Euclidiano, considera-se que este é gerado por uma base canônica ortonormal, frequentemente denotada pelos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, os quais se encontram alinhados com os eixos coordenados x , y e z , respectivamente.

Para que o produto escalar funcione como uma ferramenta de medida geométrica, é preciso relacioná-lo à trigonometria. De acordo com Steinbruch e Winterle (1987), essa operação possui uma natureza dupla, podendo ser expressa tanto de forma algébrica quanto geométrica. A ponte entre essas duas interpretações é feita por meio da Lei dos Cossenos, conforme demonstrado a seguir.

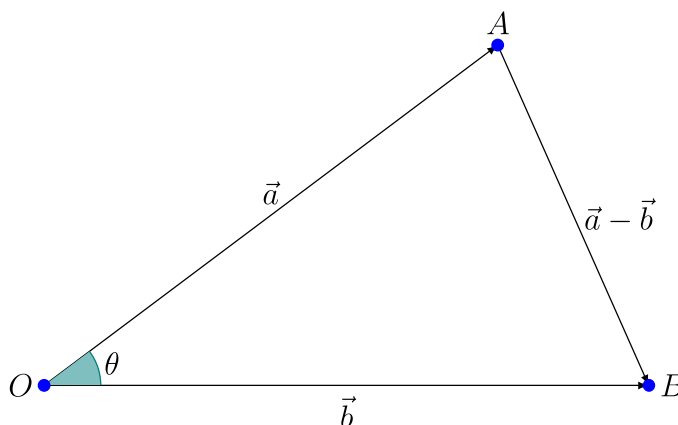
Figura 2: Representação geométrica da base canônica ortonormal no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.



Fonte: O autor (2026).

A origem analítica do produto escalar não é arbitrária, sendo uma consequência direta da transição da geometria plana para a álgebra vetorial através da Lei dos Cossenos. Nesse contexto, Boulos e Camargo (2005, p. 48) atestam que esta transição ocorre de forma natural, explicando que “a motivação geométrica para a definição do produto escalar provém da lei dos cossenos”. E desta forma, esta lei da geometria serve como a ponte algébrica ideal para generalizar a noção de métrica e ângulo no espaço. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores não nulos no $\mathbb{R}^3$, com a mesma origem, formando um ângulo θ entre si. Geometricamente, traçando um terceiro vetor unindo a extremidade de $\vec{b}$ à extremidade de $\vec{a}$, fecha-se um triângulo cujo terceiro lado é o vetor diferença $\vec{a} - \vec{b}$, conforme ilustrado na figura 3.

Figura 3: Representação geométrica da diferença entre vetores e a Lei dos Cossenos.



Fonte: O autor (2026).

Pela Lei dos Cossenos, tem-se:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta). \quad (4)$$

Por outro lado, ao desenvolver o lado esquerdo da equação algebricamente, recorre-se à propriedade de que o quadrado da norma de um vetor equivale ao produto escalar desse vetor por si mesmo. Aplicando a bilinearidade (propriedade distributiva) e a comutatividade do produto escalar, obtém-se

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 - 2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

De (4) e (5), resulta a seguinte identidade:

$$|\vec{a}|^2 - 2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta). \quad (6)$$

Cancelando os termos $|\vec{a}|^2$ e $|\vec{b}|^2$ em ambos os membros da equação (6) e dividindo ambos os membros da igualdade resultante por -2 , obtém-se a definição geométrica fundamental do produto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta).$$

Desta forma, dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, o produto interno entre eles é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta).$$

É perante o estabelecimento desta lei geral que o comportamento da base canônica ortonormal se torna previsível. Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ possuem comprimento unitário e são mutuamente ortogonais ($\theta = 90^\circ$). Aplicando a lei geométrica a esta base:

- **Colinearidade:** Multiplicando um vetor por si mesmo, obtém-se:

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 1 \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

- **Ortogonalidade:** Multiplicando vetores distintos, obtém-se:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Sejam $\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ e $\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$. Ao calcular o produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ por meio da aplicação da propriedade distributiva, resulta uma expansão polinomial de nove termos. Contudo, devido à ortogonalidade mútua dos vetores da base canônica, os

seis produtos cruzados anulam-se, reduzindo a expressão algébrica à sua fórmula analítica clássica:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Para que esta operação sirva como alicerce de um sistema de medidas coerente, Lima (2014) destaca que a mesma satisfaz propriedades axiomáticas inquebráveis para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **Simetria (ou Comutatividade):** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. A ordem dos operandos não altera a métrica do espaço.
- **Bilinearidade (Distributividade e Homogeneidade):** $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{w}$. Esta propriedade garante que as operações de projeção e métrica são lineares em relação a cada um dos vetores.
- **Positividade:** $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, verificando-se a igualdade se, e somente se, for o vetor nulo ($\vec{0}$).

2.1.2 Norma, distância e ortogonalidade de vetores

A propriedade da positividade, citada anteriormente, permite definir o conceito de comprimento de um vetor, tecnicamente chamado de norma (ou módulo). A justificativa analítica para esta definição decorre diretamente da fórmula geométrica do produto escalar. Ao calcular-se o produto escalar de um vetor $\vec{u}$ por si mesmo, o ângulo formado entre as duas direções é nulo ($\theta = 0^\circ$ ou 0 radiano). Como $\cos(0) = 1$, a relação fundamental reduz-se a:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{u}| \cos(\theta) = |\vec{u}|^2.$$

Isolando o módulo, a norma de um vetor $\vec{u}$, denotada por $|\vec{u}|$, é definida como a raiz quadrada do produto escalar do vetor por ele mesmo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Em termos de coordenadas, considerando o vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ expresso na base canônica do $\mathbb{R}^3$, o produto escalar do vetor por si mesmo desenvolve-se como

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Portanto, a norma expressa-se algebricamente por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A partir da norma, estabelece-se rigorosamente o conceito de distância geométrica no espaço. A distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^3$, representados pelos vetores posição

$\vec{u}$ e $\vec{v}$, é quantificada pela norma do vetor diferença entre eles:

$$d(u, v) = |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}.$$

Além de medir magnitudes, o produto escalar estabelece a conexão entre a álgebra e a geometria angular. Conforme deduzido anteriormente, o produto escalar entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ relaciona-se com o ângulo θ (onde $0 \leq \theta \leq \pi$) através da fórmula:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta).$$

Esta relação traz uma consequência vital para o estudo do tetraedro trirretângulo. Como o cosseno de $\frac{\pi}{2}$ é zero, obtém-se a condição algébrica para o perpendicularismo. Neste sentido, Muniz Neto (2013, p. 115) corrobora que “dois vetores não nulos são ditos ortogonais se, e somente se, formam um ângulo reto”. Desse modo, constata-se que dois vetores são ortogonais se, e somente se, o seu produto escalar for nulo:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Este fato será a chave mestra para a demonstração do teorema principal no Capítulo 4. Como as arestas do tetraedro trirretângulo partem de um vértice comum formando ângulos retos entre si, os seus produtos escalares cruzados serão rigorosamente nulos. É esta anulação sistêmica que simplificará drasticamente a manipulação algébrica da Matriz de Gram, colapsando a estrutura matricial para os termos que representam exatamente as áreas das faces do tetraedro.

2.2 Produto vetorial e ortogonalidade

Enquanto o produto escalar ou produto interno associa dois vetores a um número real, existe uma segunda operação fundamental no $\mathbb{R}^3$, cujo resultado é um novo vetor. Esta operação é denominada produto vetorial (ou produto externo).

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores linearmente independentes no $\mathbb{R}^3$. O produto vetorial entre eles, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, é definido formalmente pelo determinante simbólico de terceira ordem

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

onde a primeira linha é composta pelos vetores da base canônica.

Para resolver este determinante simbólico e encontrar as componentes do novo

vetor, recorre-se ao Teorema de Laplace¹ para realizar a expansão ao longo da primeira linha. Este teorema estabelece que o determinante de uma matriz pode ser calculado pela soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

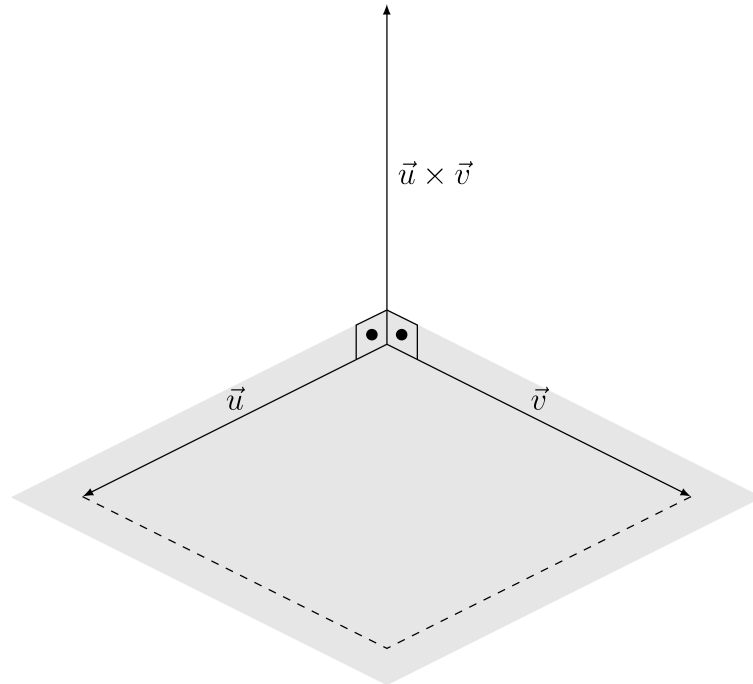
Por conveniência algébrica, escolhe-se a expansão ao longo da primeira linha, que contém os vetores da base canônica ortonormal ($\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$). Ao aplicar o teorema, o determinante de terceira ordem é reduzido a uma combinação linear de determinantes de segunda ordem:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Calculando os determinantes de ordem 2 (multiplicando os elementos da diagonal principal e subtraindo o produto da diagonal secundária), obtém-se a expressão analítica final do vetor resultante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}.$$

Figura 4: Interpretação geométrica do produto vetorial e a sua ortogonalidade em relação ao plano gerado pelos vetores base $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Fonte: O autor (2026).

Esta expansão evidencia que o resultado da operação não é um escalar, mas sim um vetor tridimensional com coordenadas bem definidas. Segundo Steinbruch e Winterle

¹Pelo Teorema de Laplace, o cofator associado a um elemento na linha i e coluna j é dado por $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$, onde M_{ij} é o *menor complementar*. Na expansão pela primeira linha, os sinais alternam-se: o vetor $\vec{i}$ ($i = 1, j = 1$) tem sinal positivo, pois $(-1)^2 = 1$; o vetor $\vec{j}$ ($i = 1, j = 2$) negativo, pois $(-1)^3 = -1$, gerando a subtração na equação; e $\vec{k}$ ($i = 1, j = 3$) positivo, pois $(-1)^4 = 1$.

(1987), este novo vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ possui características geométricas singulares que o tornam indispensável para o cálculo de áreas no espaço. Boulos e Camargo (2005, p. 69) atestam que a principal propriedade deste operador reside precisamente nesta direção, uma vez que “o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ simultaneamente”. O sentido é determinado pela regra da mão direita, apontando na direção do polegar quando os dedos da mão direita se curvam do primeiro vetor ($\vec{u}$) para o segundo ($\vec{v}$).

A terceira característica fundamental deste vetor, o seu módulo (ou norma), guarda uma relação profunda com o cálculo de áreas de superfícies. Contudo, para demonstrar essa equivalência métrica de forma algébrica e rigorosa, é necessário estabelecer primeiramente uma relação entre o produto escalar e o produto vetorial, o que será formalizado a seguir através da Identidade de Lagrange.

2.3 A identidade de Lagrange e a área do paralelogramo

Embora o produto vetorial e o produto escalar sejam operações de naturezas distintas (uma resultando num vetor e a outra num escalar), existe uma ligação algébrica profunda entre elas, formalizada pela Identidade de Lagrange. Como elucidam Steinbruch e Winterle (1987, p. 86), esta identidade assume um papel estrutural indispensável na álgebra vetorial porque “estabelece a relação entre o produto vetorial e o produto escalar de dois vetores”. Esta identidade é o elo fundamental que permitirá quantificar superfícies no espaço tridimensional.

Para desenvolver essa relação, parte-se da norma ao quadrado do vetor produto vetorial, utilizando as componentes obtidas na expansão do determinante apresentada na Seção 2.2:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2.$$

Ao expandir os produtos notáveis e reorganizar os termos (somando e subtraindo parcelas convenientes para forçar o aparecimento de agrupamentos conhecidos), chega-se a uma fatoração algébrica notável:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2.$$

Observando atentamente os termos entre parênteses, reconhecem-se imediatamente as definições analíticas do quadrado das normas dos vetores e do produto escalar, estabelecidas na seção 2.1. Substituindo essas expressões, a longa equação coordenada reduz-se à elegante Identidade de Lagrange:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Com a Identidade de Lagrange provada algebricamente, pode-se agora revelar a sua interpretação geométrica. Retomando a relação angular do produto escalar conforme

demonstrado na seção 2.1.1, dada por $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta)$, efetua-se a substituição desta expressão no quadrado do produto interno da identidade:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta))^2 \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2(\theta). \end{aligned}$$

Colocando o fator comum em evidência:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2(\theta)).$$

Aplicando a Relação Fundamental da Trigonometria, $1 - \cos^2 \theta = \sin^2(\theta)$, obtém-se:

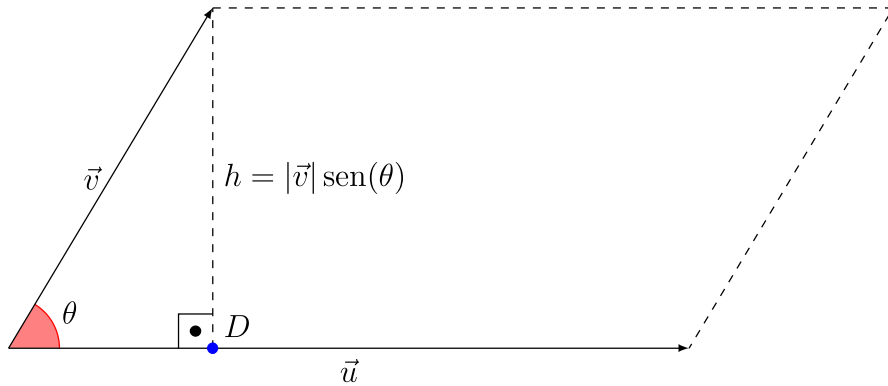
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2(\theta).$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, e considerando que no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, consolida-se a relação métrica fundamental:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\theta).$$

É exatamente esta expressão escalar que descreve a magnitude geométrica de uma superfície. Sobre este resultado, Steinbruch e Winterle (1987, p. 88) asseveram que “geometricamente, o módulo do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é igual à área do paralelogramo determinado pelos vetores”. Portanto, considere-se o paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Adotando-se o vetor $\vec{u}$ como base, o seu comprimento é $|\vec{u}|$. A altura referente a esta base é dada por $h = |\vec{v}| \sin(\theta)$, conforme ilustrado a seguir.

Figura 5: Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial - relação entre o produto vetorial e a área do paralelogramo:



Fonte: O autor (2026).

Sabendo que a área de qualquer paralelogramo é o produto da sua base pela sua altura, conclui-se de forma irrefutável que a norma do produto vetorial quantifica

exatamente esta área:

$$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\theta) = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Como a área de um triângulo é a metade da área do paralelogramo que o determina, deduz-se a fórmula primordial que sustentará a demonstração principal desta dissertação. A área S de qualquer triângulo no espaço, delimitado por dois vetores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é expressa por:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Por fim, retornando à Identidade de Lagrange, nota-se que a expressão

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

pode ser reescrita de uma forma ainda mais estruturada utilizando a notação de determinantes. Esta expressão corresponde exatamente ao determinante de uma matriz de ordem 2×2 formada pelos produtos internos dos vetores:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \det(G_2) = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}.$$

A demonstração desta equivalência matricial é direta. Ao aplicar a regra de cálculo para determinantes de ordem (produto dos elementos da diagonal principal subtraído do produto dos elementos da diagonal secundária), obtém-se:

$$\det(G_2) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{v} \cdot \vec{u}).$$

Recorrendo às propriedades fundamentais do produto escalar, estabelecidas na seção 2.1 (especificamente a definição de norma ($\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$) e a propriedade da comutatividade ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$)), a expansão do determinante simplifica-se para:

$$\det(G_2) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Fica, assim, provado que o quadrado da norma do produto vetorial na Identidade de Lagrange equivale exatamente ao determinante da matriz de Gram de ordem dois. Essa estrutura, cuja generalização será apresentada na próxima seção, servirá como a ferramenta analítica central para a demonstração do Teorema de Pitágoras no tetraedro.

2.4 A matriz de Gram e suas propriedades

A Identidade de Lagrange revelou que o quadrado da área de um paralelogramo pode ser expresso como o determinante de uma matriz formada exclusivamente por

produtos escalares. Essa estrutura analítica não é uma coincidência isolada, mas sim a manifestação bidimensional de um objeto matemático fundamental na Álgebra Linear: a Matriz de Gram. Seja um espaço vetorial euclidiano e considere-se uma sequência finita de vetores $\alpha = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Define-se a matriz de Gram associada a esta sequência, denotada por G_n , como a matriz quadrada de ordem n cujas entradas g_{ij} são constituídas pelos produtos escalares dos vetores operados dois a dois, ou seja, $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$.

Formalmente, a matriz é expressa por:

$$G_n = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_n \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_n \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_n \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz, conhecido como determinante de Gram, possui uma interpretação geométrica objetiva que permite quantificar medidas no espaço euclidiano. Segundo Lima (2014), esse determinante resulta sempre num número real não negativo e atua como uma generalização analítica para os conceitos de medida (comprimento, área e volume), visto que “o determinante de Gram de vetores é igual ao quadrado do volume do paralelepípedo -dimensional determinado por eles”, explica Lima. No caso unidimensional ($n = 1$), a matriz reduz-se a um único elemento e o seu determinante é simplesmente $|\vec{v}_1|^2$, ou seja, o quadrado do comprimento do vetor. Ao expandir para dois vetores ($n = 2$), o valor do determinante corresponde, conforme atestado pela Identidade de Lagrange, ao quadrado da área do paralelogramo formado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Seguindo essa lógica indutiva de expansão dimensional, para três vetores não coplanares ($n = 3$), o determinante de Gram é numericamente igual ao quadrado do volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

Essa propriedade ímpar de converter configurações espaciais e ortogonais em valores algébricos rigorosos constitui a base fundamental para a demonstração do Teorema de Pitágoras Generalizado. Ao utilizar o determinante da matriz de Gram, torna-se possível calcular a área da face oposta ao vértice reto do tetraedro trirretângulo diretamente através dos componentes da matriz, relacionando-a de forma analítica com as áreas das faces que compõem o vértice reto.

Para consolidar esta ferramenta algébrica em função das faces triangulares de um poliedro, retoma-se a conclusão da seção anterior, a qual estabelece que a área de um triângulo gerado por dois vetores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada pela metade da norma do seu produto vetorial:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Ao elevar ambos os membros desta equação ao quadrado, a fim de preparar a

estrutura analítica para a demonstração pitagórica, obtém-se:

$$S^2 = \frac{1}{4} |\vec{u} \times \vec{v}|^2.$$

Conforme demonstrado analiticamente pela Identidade de Lagrange, o termo $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$ é equivalente ao determinante da Matriz de Gram de ordem 2 associada a esses vetores. Por conseguinte, o quadrado da área de qualquer triângulo no espaço euclidiano pode ser expresso através da seguinte formulação matricial:

$$S^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}.$$

É munido desta poderosa equivalência algébrica que o estudo avança para a estruturação geométrica do tetraedro trirretângulo, ambiente no qual o determinante de Gram será aplicado.

3 O TETRAEDRO TRIRRETÂNGULO

O estudo da geometria espacial recorre frequentemente a analogias com a geometria plana para construir e expandir novos conceitos. Assim como o triângulo constitui o polígono mais simples do plano bidimensional, o tetraedro é o poliedro mais elementar do espaço tridimensional. Este sólido é caracterizado por possuir quatro vértices, seis arestas e quatro faces triangulares.

Conforme destaca Muniz Neto (2013), em sua obra para a Coleção PROFMAT, a transição do triângulo para o tetraedro constitui um processo de generalização natural e fecundo na matemática. De acordo com Boulos e Camargo (2005, p. 128), “um triedro trirretângulo é formado por três semirretas de mesma origem, não coplanares e mutuamente ortogonais”. Ao seccionar este triedro por um plano que não passa pelo seu vértice de origem, obtém-se o tetraedro trirretângulo.

Em virtude desta singularidade geométrica, os elementos que compõem este sólido recebem nomenclaturas análogas às do triângulo retângulo bidimensional. O ponto de encontro das três arestas perpendiculares é denominado vértice reto. As três faces triangulares adjacentes que convergem para este vértice constituem as faces cateto; devido à ortogonalidade na origem, cada uma destas três faces é, por si só, um triângulo retângulo clássico. Por fim, a quarta face do tetraedro, que não contém o vértice, é denominada face hipotenusal (ou face oposta ao vértice do triedro trirretângulo).

Para a análise rigorosa das áreas dessas faces, Lima (2014) assevera que a alocação do sólido em um sistema de coordenadas cartesiano é essencial. Fazendo o vértice reto coincidir com a origem do sistema, determinam-se as coordenadas dos vértices restantes sobre os eixos ortogonais, o que permite o cálculo analítico das áreas das faces cateto.

Historicamente, conforme os registros do historiador Hygino H. Domingues (2001), este resultado é consagrado como o Teorema de De Gua, evidenciando que a harmonia métrica de Pitágoras não se limita a comprimentos no plano, mas estende-se às áreas no espaço. Antes de se introduzir o formalismo vetorial contemporâneo e a Matriz de Gram, é pertinente revisitar as abordagens tradicionais historicamente empregues para demonstrar este teorema. No entanto, como destaca Carvalho (2022), “a atribuição exclusiva do teorema a De Gua é fruto de uma formalização tardia, uma vez que a essência da relação métrica entre as áreas das faces de um tetraedro trirretângulo já permeava os estudos de Faulhaber e Descartes mais de um século antes.”

3.1 Abordagens clássicas de demonstração

A validação de um teorema de tamanha relevância como o de De Gua não se restringe a uma única linguagem matemática; pelo contrário, a sua robustez é atestada pela

convergência de diferentes campos da ciência exata. Antes de se introduzir a demonstração via Matriz de Gram, faz-se indispensável revisitar e pormenorizar os caminhos tradicionais que consolidaram este resultado ao longo do tempo.

O propósito de apresentar estas abordagens clássicas é duplo. Primeiramente, busca-se estabelecer um referencial teórico que permita ao leitor contrastar a complexidade das construções geométricas e analíticas tradicionais com a síntese proporcionada pelo tratamento vetorial moderno. Em segundo lugar, estas demonstrações servem como uma ferramenta pedagógica de transposição didática, evidenciando como conceitos de diferentes níveis de ensino podem ser mobilizados para provar a mesma tese.

Nesta seção, o teorema será demonstrado sob duas óticas distintas: a primeira demonstração apoia-se na geometria sintética. Esta via exige a construção de retas e planos auxiliares, além de uma boa capacidade de visualização espacial para a aplicação do Teorema das Três Perpendiculares. O objetivo desta abordagem é mostrar como o teorema espacial pode ser deduzido a partir de sucessivas extensões do Teorema de Pitágoras bidimensional e das relações métricas de triângulos retângulos. Trata-se de um caminho tradicional que, apesar de não utilizar vetores, evidencia o nível de complexidade e abstração geométrica necessários para comprovar a relação das áreas no tetraedro.

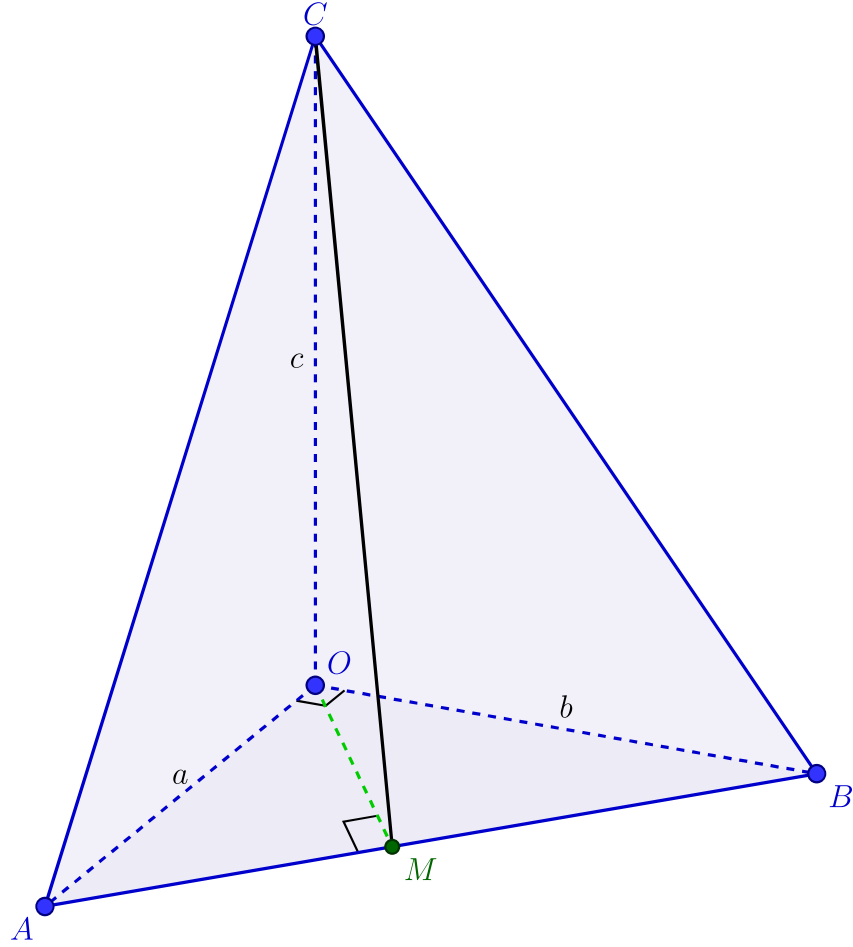
A segunda, por sua vez, fundamenta-se no Cálculo Integral, especificamente no uso de integrais duplas para o cálculo de áreas de superfícies. Esta via analítica é apresentada com o intuito de mostrar que o Teorema de De Gua pode ser validado através de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral, tratando a face hipotenusal como o gráfico de uma função plana inclinada no espaço.

3.1.1 Demonstração via projeção ortogonal – Geometria

Para demonstrar o teorema geometricamente, considera-se o tetraedro $OABC$ com vértice reto em O . As arestas OA , OB e OC têm comprimentos a , b e c , respectivamente. Traça-se a altura OM da face inferior $\triangle OAB$ em relação à hipotenusa AB . Ao conectar o vértice C ao ponto M , o Teorema das Três Perpendiculares² garante que o segmento CM é a altura da face inclinada $\triangle ABC$.

²Pelo Teorema das Três Perpendiculares, como a reta suporte da aresta OC é ortogonal ao plano da base, e OM é perpendicular à reta AB , qualquer segmento que parta de um ponto da reta OC e intersecte AB no ponto M será perpendicular a AB . Sendo C um ponto desta reta vertical, conclui-se que CM é a altura relativa à base AB na face $\triangle ABC$.

Figura 6: Construção geométrica para a demonstração via projeção ortogonal.



Fonte: O autor (2026).

Para encontrar a relação entre as áreas, o raciocínio mais natural é partir da própria definição da área da face hipotenusal $\triangle ABC$, que denotaremos por S_h .

A área de um triângulo é a metade do produto da sua base pela sua altura. Neste caso, a base é o segmento AB e a altura relativa a ela é o segmento CM :

$$S_H = \frac{AB \cdot CM}{2}.$$

Como o objetivo do teorema é relacionar os quadrados das áreas, eleva-se esta equação ao quadrado:

$$S_h^2 = \frac{AB^2 \cdot CM^2}{4}.$$

Neste ponto, recorre-se à geometria interna do tetraedro. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle OMC$, que é retângulo na origem O , estabelece-se a relação entre a altura da face inclinada e a altura da base: $CM^2 = OM^2 + OC^2$. Substituindo

essa equivalência na equação da área, obtém-se:

$$S_z^2 = \frac{AB^2 \cdot (OM^2 + OC^2)}{4}.$$

Aplicando a propriedade distributiva, a equação é separada em duas parcelas:

$$S_h^2 = \frac{AB^2 \cdot OM^2}{4} + \frac{AB^2 \cdot OC^2}{4}.$$

Analisando a primeira parcela, nota-se que ela pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{AB \cdot OM}{2} \right)^2.$$

O termo dentro dos parênteses é, exatamente, o cálculo da área da face cateto da base $\triangle OAB$, que chamaremos de S_z . Portanto, a primeira parte da equação já corresponde a S_z^2 , obtendo-se:

$$S_h^2 = S_z^2 + \frac{AB^2 \cdot OC^2}{4}.$$

Para desenvolver a segunda parcela, basta olhar novamente para o triângulo da base $\triangle OAB$. Como ele é retângulo em O , o Teorema de Pitágoras garante que $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Substituindo o AB^2 na equação, temos:

$$S_h^2 = S_z^2 + \frac{(OA^2 + OB^2) \cdot OC^2}{4}.$$

Distribuindo a multiplicação no numerador e chamando OA de a , OB de b e OC de c (os comprimentos das arestas), a expressão torna-se:

$$S_h^2 = S_z^2 + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{4} = S_z^2 + \left(\frac{ac}{2} \right)^2 + \left(\frac{bc}{2} \right)^2.$$

Como os termos entre parênteses representam rigorosamente as fórmulas das áreas das faces cateto laterais S_y e S_x , a substituição finaliza a demonstração geométrica:

$$S_h^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

3.1.2 Demonstração via Cálculo Diferencial e Integral - Integral de Superfície

Uma segunda maneira clássica de validar o Teorema de De Gua fundamenta-se no Cálculo Integral. O objetivo nesta secção é tratar a face hipotenusal como o gráfico de uma função e calcular a sua área por meio de uma integral dupla.

Para iniciar a modelagem, é necessário definir analiticamente a superfície que representa a face hipotenusal $\triangle ABC$. Sabe-se que, na Geometria Analítica, a equação

geral de qualquer plano no espaço tridimensional assume a forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Como a face inclinada intercepta os eixos coordenados cartesianos exatamente nos vértices do tetraedro, conhecemos três pontos precisos pelos quais este plano passa: $(a, 0, 0)$ no eixo das abscissas, $(0, b, 0)$ no eixo das ordenadas e $(0, 0, c)$ no eixo das cotas. Ao substituir as coordenadas destes pontos na equação geral, podemos determinar os coeficientes A , B e C em função de D , levando a encontrar a equação segmentária do plano:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

A partir desta representação, o passo seguinte consiste em isolar a variável z para representar a face inclinada como uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, o que nos permitirá aplicar as ferramentas do cálculo integral para determinar a área da superfície:

$$z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{c} \right).$$

Para determinar a área desta superfície inclinada, recorre-se à fórmula da integral de superfície. A lógica deste cálculo estabelece que a área total de uma superfície S no espaço é obtida pela integração de pequenos elementos de área dS . Quando esta superfície é projetada sobre um plano coordenado (neste caso, o plano xy), cada elemento dS da face inclinada relaciona-se com um elemento de área plano dA através de um fator de correção que depende da inclinação do plano.

Dessa forma, a fórmula para o cálculo da área da face hipotenusal S_h é dada por:

$$S_h = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dA.$$

Para calculá-lo, determinamos as derivadas parciais da função $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{c} \right)$. Substituindo estas derivadas na expressão do integrando, obtemos:

$$\sqrt{1 + \left(-\frac{c}{a} \right)^2 + \left(-\frac{c}{b} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}.$$

Para simplificar a expressão, reduzimos os termos ao mesmo denominador comum a^2b^2 :

$$\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2b^2}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{ab}.$$

Como os valores de a , b e c são constantes que representam as medidas das arestas do tetraedro, todo este termo é constante e, portanto, pode ser colocado fora da

integral. Assim, a expressão para a área torna-se:

$$S_h = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{ab} \iint_D dA.$$

Nesta etapa, a integral $\iint_D dA$ representa simplesmente a área da região de integração D no plano xy . Como vimos na modelagem geométrica, a região é a projeção ortogonal do tetraedro sobre o plano da base, ou seja, um triângulo retângulo de catetos a e b , cuja área é $\frac{ab}{2}$. Substituindo este valor, temos:

$$S_h = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{ab} \cdot \frac{ab}{2} = S_h = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{2}.$$

Para finalizar a demonstração e obter a relação entre os quadrados das áreas, elevamos ambos os membros da equação ao quadrado:

$$S_h^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{4} = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2.$$

Como cada termo entre parênteses corresponde, respectivamente, às áreas S_z , S_x e S_y das faces ortogonais do tetraedro, chegamos à conclusão final do Teorema de De Gua:

$$S_h^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Desta forma, o Cálculo Integral valida analiticamente que a soma dos quadrados das áreas das faces que convergem na origem é igual ao quadrado da área da face inclinada, demonstrando que o teorema no espaço mantém o princípio de Pitágoras em termos de áreas de superfícies.

4 O TEOREMA DE PITÁGORAS GENERALIZADO VIA MATRIZ DE GRAM

A utilização da matriz de Gram no estudo do tetraedro trirretangular representa uma transição fundamental da geometria sintética para a álgebra linear analítica. Enquanto as abordagens baseadas em geometria euclidiana clássica ou cálculo integral dependem de construções auxiliares e projeções, o método vetorial fundamentado no determinante de Gram oferece uma estrutura métrica intrínseca ao espaço euclidiano. Conforme destacam Abreu *et al.* (2022), essa abordagem permite que a generalização do Teorema de Pitágoras — historicamente atribuída a Jean-Paul de Gua de Malves em 1783 — seja demonstrada de forma robusta, vinculando o conceito de volume de paralelepípedos e áreas de triângulos ao produto interno de vetores.

Neste contexto, o Teorema de De Gua é compreendido como a extensão bidimensional do Teorema de Pitágoras clássico. Se no plano a relação de ortogonalidade é estabelecida entre comprimentos de segmentos, no espaço tridimensional essa relação se manifesta entre as áreas das faces que compõem o triedro trirretângulo. De acordo com Carvalho (2022), a essência dessa generalização reside no fato de que o quadrado da área da face hipotenusal (a face que não contém o vértice reto) é rigorosamente igual à soma dos quadrados das áreas das três faces ortogonais adjacentes à origem.

A grande vantagem de usar a matriz de Gram nesta demonstração reside na sua capacidade de facilitar o cálculo de áreas e volumes, especialmente por adaptar-se de maneira analítica à inclinação das figuras geométricas. Ao aplicarmos este método ao tetraedro, a dificuldade de trabalhar com a face inclinada hipotenusal é ultrapassada de forma simples através da Identidade de Lagrange, que cria uma ponte direta entre o produto vetorial e o determinante de Gram. Deste modo, os cálculos que apresentamos a seguir não só comprovam o teorema, como também reforçam a perspectiva de Boulos e Camargo (2005), os quais dizem que “o uso de vetores é um caminho bastante claro e elegante para resolver problemas de medidas no espaço tridimensional”.

4.1 O enunciado do teorema no espaço e a modelagem vetorial do problema

A generalização espacial do famoso teorema estabelece que, em qualquer tetraedro que possua um triedro trirretângulo (três ângulos retos convergindo num único vértice), o quadrado da área da face oposta a esse vértice é igual à soma dos quadrados das áreas das três faces adjacentes ao vértice reto. Utilizando a notação estabelecida visualmente na Figura 6, tem-se:

$$S_h^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Para demonstrar esta relação via Matriz de Gram, posicionamos o tetraedro $OABC$ no espaço euclidiano tridimensional, com o vértice reto na origem $O = (0, 0, 0)$. Os demais vértices são definidos sobre os semieixos positivos: $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$, onde a , b e c são as medidas das arestas do poliedro. A partir desta configuração, definimos os vetores direcionais que partem da origem e repousam sobre os eixos coordenados: $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (a, 0, 0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (0, b, 0)$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC} = (0, 0, c)$.

A ferramenta analítica central desta demonstração é a relação entre a área de um triângulo e o determinante de Gram. Conforme fundamentado na revisão teórica, a área S de um triângulo gerado por dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ é dada por:

$$S^2 = \frac{1}{4} \det G(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{p} & \vec{p} \cdot \vec{q} \\ \vec{q} \cdot \vec{p} & \vec{q} \cdot \vec{q} \end{vmatrix}.$$

4.2 A demonstração via determinante de Gram

O desenvolvimento da prova consiste em calcular individualmente o quadrado das áreas das três faces cateto e, em seguida, relacioná-las com o quadrado da área da face hipotenusal S_h . As faces cateto são geradas por pares de vetores ortogonais. Como o produto escalar de vetores ortogonais é nulo, as matrizes de Gram correspondentes serão diagonais, o que simplifica o cálculo dos determinantes. Dessa forma, amparado na fundamentação de Abreu *et al.* (2022), as áreas das faces situadas sobre os planos coordenados são obtidas conforme segue:

1. Área da face S_x (Plano xy): Gerada pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o quadrado de sua área é dado por:

$$S_x^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

2. Área da face S_y (Plano xz): Gerada pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, o quadrado de sua área é dado por:

$$S_y^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{b^2 c^2}{4}.$$

3. Área da face S_z (Plano xy): Gerada pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o quadrado de sua área é dado por:

$$S_z^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{a^2 c^2}{4}.$$

Somando-se as três equações obtidas, estabelece-se a relação algébrica para as faces cateto:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{4}.$$

O passo seguinte consiste em calcular a área S_h da face hipotenusal $\triangle ABC$. Seguindo o tratamento vetorial sugerido por Boulos e Camargo (2005) para a resolução de problemas métricos no espaço, toma-se o vértice como origem local para definir os vetores que formam as arestas deste triângulo inclinado. Como os vetores posição dos vértices foram definidos anteriormente em relação à origem como $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, as arestas da face inclinada são dadas pela diferença entre eles: $\vec{AB} = \vec{v} - \vec{u} = (-a, b, 0)$ e $\vec{AC} = \vec{w} - \vec{u} = (-a, 0, c)$.

Para a montagem da matriz de Gram $G(\vec{AB}, \vec{AC})$, calculam-se os produtos escalares individuais:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AB} &= (-a)^2 + b^2 + 0^2 = a^2 + b^2, \\ \vec{AC} \cdot \vec{AB} &= (-a)^2 + 0^2 + c^2 = a^2 + c^2, \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (-a)(-a) + b \cdot 0 + 0 \cdot c = a^2.\end{aligned}$$

Daqui,

$$4S_h^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 + c^2 \end{vmatrix}.$$

A resolução deste determinante, através do produto da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária, revela a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}4S_h^2 &= (a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - a^2 \cdot a^2 \\ &= (a^4 + a^2c^2 + b^2a^2 + b^2c^2) - a^4.\end{aligned}$$

Ao cancelar o termo a^4 com $-a^4$ e dividir a equação por 4, chega-se à expressão final da face hipotenusal:

$$S_h^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{4}.$$

Comparando-se a equação de S_h^2 com a soma das equações das faces cateto, constata-se que elas partilham a mesma igualdade algébrica. Portanto, em conformidade com os resultados apresentados por Abreu *et al.* (2022), conclui-se de forma irrefutável que:

$$S_h^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

5 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO TEOREMA PARA O ENSINO MÉDIO

A pesquisa desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pressupõe não apenas o aprofundamento teórico, mas também o retorno desse conhecimento para a sala de aula da Educação Básica. Conforme a teoria da Transposição Didática, amplamente discutida no contexto educacional brasileiro por Pais (2002), o “saber sábio” (conhecimento acadêmico formal) precisa sofrer adaptações rigorosas para se transformar no “saber ensinado” (conhecimento escolar), garantindo a compreensão do aluno sem que haja perda da essência matemática.

Nos capítulos anteriores, a generalização espacial do Teorema de Pitágoras foi demonstrada através de ferramentas analíticas avançadas, como o Cálculo Integral e a Álgebra Linear via Matriz de Gram. O desafio inerente a este capítulo é traduzir o resultado geométrico destas demonstrações — o Teorema de De Gua — para a linguagem e o nível cognitivo dos discentes do Ensino Médio, os quais ainda não dispõem do formalismo do cálculo vetorial matricial.

Para efetivar essa transposição, desenvolveu-se, como Produto Educacional associado a esta dissertação (apresentado em documento anexo), um Caderno Didático Investigativo estruturado em uma sequência híbrida, que articula a manipulação de materiais concretos à experimentação tecnológica.

O Produto Educacional foi intitulado “Pitágoras 3D: A Geometria do Canto da Sala – Um Roteiro Investigativo com Materiais Manipuláveis e GeoGebra”. Trata-se de um guia prático direcionado ao professor de matemática da Educação Básica, contendo uma sequência didática dividida em três etapas fundamentais. O objetivo central do material é conduzir o aluno à descoberta autônoma de que a relação pitagórica clássica para comprimentos no plano bidimensional possui um análogo direto para áreas de superfícies no espaço tridimensional.

Para evitar abstrações excessivas, a analogia geométrica principal adotada no material aproxima-se do cotidiano visual do aluno: a percepção do tetraedro triângulo como o recorte da quina inferior de uma caixa retangular ou o canto de um cômodo, local onde duas paredes perpendiculares entre si concorrem com o plano do chão ou de um teto. Essa visualização permite que o estudante identifique as faces cateto como as superfícies ortogonais (paredes e piso/teto) e a face hipotenusal como a superfície de corte inclinada que as une.

5.1 Estrutura da sequência didática

A sequência didática foi elaborada sob a ótica da investigação matemática, planejada para ser aplicada em três encontros sucessivos, orientando o aluno por um grau

crecente de abstração geométrica e algébrica.

O primeiro encontro possui caráter estritamente manual e aritmético. O docente fornece aos alunos uma planificação impressa em papel cartão que, ao ser recortada e montada, materializa o modelo físico de um tetraedro trirretângulo. Nesta etapa investigativa, o uso de calculadoras ou qualquer instrumento eletrônico de cálculo é intencionalmente vetado para estimular o raciocínio clínico e o domínio das operações básicas.

Munidos unicamente de régua, lápis e papel, os estudantes são orientados a aferir as medidas dos catetos dos três triângulos retângulos que formam o triedro reto (representando as áreas S_x , S_y e S_z) e a calcular as suas respectivas áreas através da fórmula clássica euclidiana. Na sequência, determinam a base e a altura relativa da face inclinada para calcular a sua área (S_h). Ao efetuarem a elevação dos resultados ao quadrado de forma aritmética e manual, os alunos constatarem empiricamente a validade da igualdade $S_h^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$, vivenciando a formulação da conjectura matemática através da manipulação do concreto.

Considerando que a modelagem física em papel está sujeita a limitações materiais e imprecisões milimétricas de recorte e medição, o segundo encontro transpõe a investigação para o laboratório de informática. Empregando o software GeoGebra 3D, o discente é instruído a construir um modelo computacional dinâmico, apropriando-se de coordenadas equivalentes àsquelas modeladas vetorialmente no Capítulo 4 desta pesquisa, porém valendo-se de comandos de interface acessível.

O roteiro metodológico orienta a seguinte execução sistêmica: primeiramente, a criação de parâmetros dinâmicos via controles deslizantes a , b e c para definir os comprimentos das arestas; em seguida, a fixação das coordenadas dos vértices sobre os eixos, estabelecendo a origem $O(0, 0, 0)$ e os pontos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ e $C(0, 0, c)$; e, finalmente, a geração das superfícies através do comando de polígonos.

Ao inserir rotinas de cálculo para comparar a soma dos quadrados das áreas cateto com o quadrado da área hipotenusal, o aluno percebe que, ao deformar o sólido com o mouse, a igualdade se preserva invariavelmente para qualquer configuração trirretangular, promovendo a validação irrefutável do conceito.

O encontro conclusivo destina-se à fixação do saber através da modelagem de um problema aplicado. A abstração é direcionada à resolução de um problema prático contextualizado na marcenaria. Propõe-se o cenário de um artesão que, ao manipular um bloco de madeira maciça, realiza um corte plano que atravessa três arestas ortogonais que se encontram num vértice comum (quina). Utilizando as medidas específicas de 3 cm, 4 cm e 2 cm para essas arestas, os estudantes são desafiados a calcular a área da face triangular resultante. Esta etapa é crucial, pois permite a aplicação direta do Teorema de De Gua, confrontando os resultados obtidos por métodos tradicionais de geometria plana com a elegância e celeridade da generalização espacial do Teorema de Pitágoras.

Desse modo, o processo de transposição didática cumpre a sua finalidade acadêmica: o aluno do Ensino Médio domina uma propriedade métrica espacial sofisticada, mobilizando-a de forma geométrica, algébrica e computacional.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação propôs um percurso que uniu o rigor analítico da Álgebra Linear à prática pedagógica da Geometria Espacial, tendo como fio condutor a generalização do Teorema de Pitágoras para o espaço tridimensional. Através do estudo do Teorema de De Gua, demonstrou-se que a utilização da Matriz de Gram não é apenas uma alternativa elegante de demonstração, mas uma ferramenta poderosa para unificar conceitos de métrica e volume em estruturas tetraédricas.

Do ponto de vista teórico, a abordagem vetorial permitiu tratar a face da hipotenusa e as faces catetos de um tetraedro trirretângulo de forma sistêmica. A demonstração via determinante de Gram conferiu ao trabalho um caráter de generalização que transcende a visão euclidiana tradicional, oferecendo ao professor de Matemática um repertório técnico robusto para abordar temas de Geometria Analítica e Álgebra Linear de maneira integrada.

Quanto à vertente pedagógica, o Produto Educacional intitulado “Pitágoras 3D: A Geometria do Canto da Sala” revelou-se um mediador eficaz. A escolha de medidas específicas para a exploração inicial — as arestas ortogonais de 3 cm, 4 cm e 2 cm — permitiu que os estudantes saíssem da abstração teórica para a verificação empírica. A progressão proposta, que partiu da construção manual do tetraedro (planificação), passou pela modelagem dinâmica no GeoGebra 3D e culminou na resolução do problema prático da marcenaria, mostrou-se capaz de despertar o interesse investigativo e consolidar a compreensão do Teorema de De Gua.

Observou-se que a analogia com o “canto da sala” ou a “quina de um bloco” humaniza a matemática avançada, tornando o Teorema de De Gua uma extensão natural e compreensível do Teorema de Pitágoras. Este trabalho reforça a ideia de que o ensino de geometria no Ensino Médio ganha em profundidade quando o professor dispõe de materiais manipuláveis que dialogam diretamente com ferramentas tecnológicas e fundamentação teórica sólida.

Por fim, espera-se que esta dissertação e o seu respectivo caderno didático sirvam de inspiração para novas práticas docentes. A matemática, quando apresentada como uma ciência de conexões — onde um determinante de uma matriz pode explicar a área de uma face no espaço —, deixa de ser uma disciplina de fórmulas isoladas para se tornar um campo de descobertas palpáveis e significativas.

REFERÊNCIAS

ABREU, Ivanildo Silva *et al.* **Demonstração do Teorema de Pitágoras Generalizado no Tetraedro Trirretangular via Matriz de Gram.** Seven Editora, 2022. E-book.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial.** 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto Celso Fabricio. **Álgebra Linear e Aplicações.** 7. ed. São Paulo: Atual, 1990.

CARVALHO, Henrique Marins de. Notas históricas e demonstrações do teorema de De Gua sobre as áreas das faces de um tetraedro: “Pitágoras” em três (ou n) dimensões. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 1-16, jul. 2022. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/!/departamentos/matematica/revista-cqd/>.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de História da Matemática.** São Paulo: Atual, 2001.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar, volume 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica.** São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1987.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** Rio de Janeiro: OBMEP, 2010.