

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TATIELEN DEMARCHI

**ENTRE MATRIZES E CÓDIGOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA EM
DEMANDAS COGNITIVAS PARA A RESSIGNIFICAÇÃO DO ENSINO DE
ÁLGEBRA**

CORNÉLIO PROCÓPIO

2026

TATIELEN DEMARCHI

**ENTRE MATRIZES E CÓDIGOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA EM
DEMANDAS COGNITIVAS PARA A RESSIGNIFICAÇÃO DO ENSINO DE
ÁLGEBRA**

**Between Matrices and Codes: A Cognitive-Demand-Based Didactic
Sequence for the Resignification of Algebra Teaching**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador(a): Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani

Coorientador(a): Prof. Dr. Alisson de Carvalho Reinol

CORNÉLIO PROCÓPIO

2026



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio**



TATIELEN DEMARCHI

**ENTRE MATRIZES E CÓDIGOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA EM DEMANDAS COGNITIVAS
PARA A RESSIGNIFICAÇÃO DO ENSINO DE ÁLGEBRA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 13 de Fevereiro de 2026

Dr. Alireza Mohebi Ashtiani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Debora Aparecida Francisco Albanez, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Saeed Tafazolian, Doutorado - Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 13/02/2026.

Aos que entendem que a ciência também é um ato de amor. E que ensinar é, no fundo, tocar o infinito com os olhos do outro.

AGRADECIMENTOS

Nenhuma palavra será suficiente para alcançar a grandiosidade de tudo o que vivi durante este percurso. Ainda assim, deixo aqui um pouco da imensidão que carrego em mim.

A Deus, fonte inesgotável de sabedoria, força e amor, minha eterna gratidão. Foi nos momentos de incerteza, cansaço e dúvida que senti com mais intensidade Sua presença me sustentando e guiando. Cada conquista nesta caminhada só foi possível porque, mesmo quando minhas forças pareciam falhar, Ele me renovava com esperança e coragem. A Ele, dedico não apenas este trabalho, mas todos os passos dados até aqui e os próximos que virão.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani, nem todas as palavras seriam suficientes para expressar a minha gratidão por você ter aceitado ser meu orientador. Desde o primeiro dia de aula do mestrado, reconheci em você a pessoa com quem eu gostaria de trilhar este caminho. Sua presença, sua alegria e a paz que você transmite a todos ao seu redor tornam o ambiente acadêmico mais leve, humano e acolhedor. Em cada encontro e em cada conversa, sua postura sempre positiva, me tranquilizava, mostrando que é possível enfrentar os desafios da pesquisa com equilíbrio e esperança. Sua forma de estar no mundo e a maneira como você vê e lida com as situações, sempre otimista e generosa, foram, desde o começo, uma fonte constante de inspiração para mim. A maneira humana com que sempre conduziu nossa orientação fizeram toda a diferença ao longo dessa caminhada. Obrigada por me apoiar nos momentos difíceis, por me fortalecer quando o cansaço e as dúvidas apareciam e por me motivar a seguir em frente, acreditando em mim e me incentivando a buscar sempre o meu melhor e meus sonhos. Que a nossa parceria continue frutífera e que possamos construir muitos trabalhos e reflexões juntos. Levo deste mestrado não apenas conhecimento, mas também o privilégio de ter sido orientada por alguém que faz diferença na vida acadêmica e humana de tantas pessoas, inclusive na minha. Muito obrigada, de coração, com admiração, respeito e carinho.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Alisson de Carvalho Reinol, minha gratidão mais sincera. Com seu coração imenso e sua didática cativante, você me ensinou a estudar com profundidade, foco e propósito. Foi você quem me mostrou que posso crescer a cada dia, basta entregar o melhor de mim. Obrigada por acreditar no meu potencial, por me orientar com delicadeza e firmeza, e por oferecer aulas que, além de conteúdo, traziam inspiração. Nunca me esquecerei de tudo que você fez por mim. Que muitos outros alunos possam ter a felicidade de aprender com você, como eu tive.

Aos professores do curso PROFMAT, minha gratidão emocionada. Cada disciplina, cada aula, cada conselho me ajudaram a enxergar a Matemática com outros olhos. Vocês me mostraram que ela pode ser sensível, viva, fascinante. Aprendi com vocês mais do que números e fórmulas, aprendi sobre persistência, ética, curiosidade. Obrigada por me lembrarem que nunca é tarde para recomeçar, para continuar e para aprender

Ao meu esposo, Luiz Ricardo. Em cada passo desta caminhada, você esteve comigo, não só ao meu lado, mas vibrando em cada vitória, me amparando nos momentos de cansaço e

me lembrando do quanto sou capaz. Quando eu pensei em desistir, você me ergueu, cuidando de mim, da nossa casa e do nosso filho, para que eu pudesse seguir estudando, mesmo com todos os pesos nos ombros. Essa conquista também é sua e ela só foi possível porque você nunca soltou minha mão. Obrigada por todos os dias partilhados até aqui e pelos muitos que ainda construiremos juntos. .

Ao meu filho amado, Gabriel, que talvez ainda não entenda o tamanho deste momento, mas que foi e é a razão maior de toda a minha luta. Você, com sua inocência e sua presença encantadora, foi minha força invisível. No seu sorriso, encontrei sentido, mesmo tão pequeno, você me ensinou tanto! Este trabalho é uma semente plantada também para o seu futuro, meu amor. Que um dia você possa ler estas palavras e se orgulhar do caminho que trilhamos juntos.

Aos meus pais, Devair e Andreia, minha base desde o princípio. Vocês acreditaram nos meus sonhos quando eles ainda eram apenas sementes lançadas ao vento, e me ensinaram a cultivá-los com dedicação e coragem, a amar o estudo e me mostraram, com o exemplo, que esforço e amor constroem caminhos. Obrigada por nunca deixarem de me incentivar, por me apoiarem em cada escolha e por serem meu alicerce em todas as fases da minha vida. Cada página deste trabalho carrega um pouco do que aprendi com vocês.

À minha querida amiga Alexia, minha companheira de estudos e de alma. Em você encontrei mais do que ajuda acadêmica, encontrei afeto, apoio emocional e compreensão. Estudamos juntas, vencemos desafios juntas e criamos laços que levarei para sempre no meu coração. Meus sábados eram melhores com a sua presença e sem dúvidas, você foi uma das melhores partes do mestrado.

Aos gestores e colegas das escolas E.E. Pedro Antônio Ferraz de Andrade e Colégio Super Ensino, meu sincero agradecimento pelo apoio, pela confiança no meu trabalho e por sempre me impulsionarem nas pesquisas, apresentações e sonhos. Saber que acreditam em mim fez toda a diferença. Gratidão por abrirem portas e caminhos.

Aos meus queridos alunos, razão maior de tudo isso. Cada descoberta, cada exemplo criado, cada lágrima e cada alegria ao longo desse trabalho tem vocês como motivação. É por vocês que eu sigo. É por vocês que eu insisto na educação como caminho de transformação. Obrigada por existirem, me motivarem e torcerem em cada etapa desse sonho.

Aos Colegas de sala da Turma PROFMAT 2024, à Coordenação e Secretaria do Curso e a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho: minha eterna gratidão.

Deixo aqui meu mais genuíno obrigada à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Código de Financiamento 001), cujo apoio financeiro foi essencial para a realização desta pesquisa e para que eu pudesse seguir firme na minha trajetória acadêmica. Sou imensamente grata por essa confiança que tornou possível transformar sonhos em conquistas.

A todos vocês que caminharam comigo, o meu mais profundo obrigada. Este trabalho carrega o coração de cada um que me apoiou e é com ele que sigo, com amor, para os próximos passos.

RESUMO

Entre operações matriciais, códigos e processos de formalização algébrica, esta pesquisa investiga como uma sequência didática articulada à Educação Matemática Realística e às demandas cognitivas pode transformar a forma como os estudantes do Ensino Médio se aproximam da Álgebra. O propósito central consiste em compreender de que maneira essa sequência, construída a partir de situações investigativas e desafios progressivos, pode favorecer novos modos de significar e praticar a álgebra em sala de aula. A partir de oficinas conduzidas pelos próprios alunos, de tarefas estruturadas em níveis crescentes de complexidade e de situações de criptografia que instigam a curiosidade, o estudo revela movimentos de reorganização conceitual. As análises, realizadas por meio da Análise Textual Discursiva (ATD), evidenciam avanços conceituais, maior engajamento e uma aproximação dos estudantes com práticas matemáticas de caráter mais investigativo. Entre erros produtivos, interpretações criativas e rupturas conceituais, os resultados sugerem que aprender álgebra pode ser menos sobre repetir procedimentos e mais sobre decifrar estruturas, quase como desvendar um código. Ao final, o que se apresenta não é apenas o relato de uma experiência didática, mas um convite a reconsiderar o lugar da álgebra no ensino: um espaço em que sentido e forma se entrelaçam, e no qual a investigação se torna parte essencial da aprendizagem matemática.

Palavras-chave: ensino de álgebra; tarefas; códigos; pensamento algébrico; sequência didática.

ABSTRACT

Amid matrix operations, codes, and processes of algebraic formalization, this study investigates how a didactic sequence articulated with Realistic Mathematics Education and cognitive-demand principles can transform the way high school students approach Algebra. The central purpose is to understand how such a sequence—designed through investigative situations and progressively challenging tasks—can foster new ways of giving meaning to and practicing Algebra in the classroom. Drawing on student-led workshops, tasks structured in increasing levels of complexity, and cryptography scenarios that spark curiosity, the study reveals movements of conceptual reorganization. The analyzes, conducted through Discursive Textual Analysis, highlight conceptual advances, stronger engagement, and a closer alignment of students with more investigative mathematical practices. Amid productive errors, creative interpretations, and conceptual shifts, the data suggest that learning Algebra may be less about repeating procedures and more about deciphering structures, almost like unraveling a code. What emerges, in the end, is not merely the account of a didactic experience but an invitation to reconsider the place of Algebra in education: a space in which meaning and form intertwine and where investigation becomes an essential part of mathematical learning.

Keywords: algebra teaching; tasks; codes; algebraic thinking; didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistemas SPD, SPI e SI.	60
Figura 2 – Princípios da Educação Matemática Realística	71
Figura 3 – Etapas da MEAAMaRP	76
Figura 4 – Eixos da Computação na Educação Básica	85
Figura 5 – Metodologias ativas e RME na SD	89
Figura 6 – Demandas Cognitivas de tarefas	96
Figura 7 – Segurança de uma Senha	98
Figura 8 – Criptografia de Ponta a Ponta	100
Figura 9 – QR Code do Padlet	100
Figura 10 – Código em Phyton	107
Figura 11 – Código em Python da Questão 3	109
Figura 12 – Cálculo de determinante com Python	111
Figura 13 – Alunos realizando a Atividade 1	137
Figura 14 – Padlet construído pela turma	138
Figura 15 – Mapa mental produzido por uma das duplas	140
Figura 16 – Mapa mental com explicações metafóricas	141
Figura 17 – Envelopes do Caça ao Tesouro	142
Figura 18 – Encontrando as leis de formação	144
Figura 19 – Explorando o Python no Google Colab	147
Figura 20 – Criptografando com Python	148
Figura 21 – Alunos realizando a Atividade 3 da SD	149
Figura 22 – Representações do item a do problema gerador	151
Figura 23 – Resolução item b da dupla IJ	152
Figura 24 – Resoluções do item c do problema gerador	153
Figura 25 – Resolução do item d da dupla LF	154
Figura 26 – Problema elaborado pelo aluno C	156
Figura 27 – Diagrama relacionando ATD, demandas cognitivas e RME.....	159

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Frequência de acertos: Q2 × Q3	162
Gráfico 2 – Dispersão entre Q2 e Q3	163

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Organização de dados em linhas e colunas.....	33
Tabela 2 – Materiais utilizados pelos alunos no dia 1.....	39
Tabela 3 – Materiais utilizados pelos alunos no dia 2.....	39
Tabela 4 – Produção de doces na semana.....	40
Tabela 5 – Produção de bombons em outubro de 2005.....	42
Tabela 6 – Ingredientes usados em outubro de 2005.....	43
Tabela 7 – Participação dos alunos por atividade e turma.....	45
Tabela 8 – Comportamento das propriedades aritméticas no contexto de matrizes..	46
Tabela 9 – Cifra de César.....	103
Tabela 11 – Frequência de acertos por questão no Questionário Diagnóstico (Q2)....	161
Tabela 12 – Frequência de acertos por questão no Questionário Pós-intervenção (Q3)	161
Tabela 13 – Comparação descritiva entre os resultados do Questionário Diagnós- tico (Q2) e o Questionário Pós-intervenção (Q3).....	162

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Cofatores dos elementos da matriz A do Exemplo 19	50
Quadro 2 – Fases do processo de aprendizagem segundo Van Hiele	67
Quadro 3 – Síntese das metodologias ativas mobilizadas e suas aplicações na Sequência Didática	88
Quadro 4 – Níveis de Demandas Cognitivas	95
Quadro 5 – Síntese das atividades e níveis de demanda cognitiva segundo Stein e Smith (1998)	117
Quadro 6 – Síntese das atividades e sua relação com as características da RME	119
Quadro 7 – Cruzamento entre percepções dos estudantes, categorias emergentes da ATD e metatextos interpretativos	129
Quadro 8 – Cruzamento entre percepções dos estudantes, categorias emergentes da ATD e metatextos interpretativos (Eixo 2)	135
Quadro 9 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 1	137
Quadro 10 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 2	146
Quadro 11 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 3	150
Quadro 12 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 4	158
Quadro 13 – Relação entre ATD, RME, metodologias ativas e evidências quantitativas	164

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Contexto e Motivação da Pesquisa	15
1.2	Objetivos da pesquisa	19
1.3	Relevância e contribuições esperadas	20
1.4	Estrutura do trabalho	20
2	ENTRE DESAFIOS E POSSIBILIDADES: O ENSINO DA ÁLGEBRA	23
2.1	Panorama histórico e curricular da Álgebra	23
2.2	Desafios e lacunas na aprendizagem dos estudantes	24
2.3	Documentos oficiais, formação docente e implicações para o ensino da Álgebra	26
2.3.1	Limitações curriculares e políticas educacionais	26
2.3.2	Impactos na prática docente e limitações pedagógicas	28
3	CONCEITOS ESSENCIAIS DE ÁLGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO	32
3.1	Fundamentos da Aritmética e da Álgebra	32
3.2	Definição de Matriz	33
3.2.1	Tipos Especiais de Matrizes	34
3.2.2	Igualdade de Matrizes	36
3.3	Lei de Formação de uma Matriz	37
3.4	Operações com Matrizes	38
3.4.1	Adição e Subtração de Matrizes	38
3.4.2	Multiplicação de uma Matriz por um Escalar	40
3.4.3	Multiplicação de Matrizes	41
3.4.4	Transposta de uma Matriz	44
3.5	Propriedades das Operações com Matrizes	45
3.6	Matrizes e Determinantes	47
3.6.1	Teorema de Laplace	50
3.6.2	Regra de Chió	51
3.7	Sistemas Lineares e Discussão de Soluções	54
3.7.1	Métodos de Resolução	55
3.7.2	Regra de Cramer	57
3.7.3	Classificação de Sistemas	59
4	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	62
4.1	Princípio da Atividade: Matemática como Ação Humana	63
4.2	Princípio da Realidade: Aprender a partir do que faz sentido	64
4.3	Princípio de Níveis: dos significados informais à formalização	66
4.4	Princípio da Interatividade: aprender com o outro e pelo outro	67
4.5	Princípio do Entrelaçamento: a álgebra em diálogo com o mundo	68
4.6	Princípio da Orientação: a Reinvenção Guiada como caminho	70
4.7	Ressignificando o ensino de Álgebra pela RME	71
5	METODOLOGIAS ATIVAS: FERRAMENTAS E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO	73
5.1	Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas: Uma perspectiva no Ensino de Álgebra	74
5.2	Flipped Classroom: O potencial da Sala de Aula Invertida	78
5.3	A Gamificação	81

5.4	Do Código à Compreensão: Explorando Conceitos Matemáticos com Python	83
5.5	O Papel das Sequências Didáticas	89
6	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	92
6.1	Tipo de pesquisa e abordagem	92
6.2	Contexto escolar e sujeitos da pesquisa	93
6.3	Organização das Intervenções	94
6.4	Elaboração da Sequência Didática e Categorização das tarefas	96
6.4.1	Atividade 1: Por que proteger informações?.....	97
6.4.2	Atividade 2: Agência de Espionagem Escolar.....	101
6.4.3	Atividade 3: Gerando códigos com Python.....	105
6.4.4	Atividade 4: A Fábrica de Alimentos.....	113
6.5	Instrumentos de coleta de dados: registros, observações e questionários	118
7	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	121
7.1	Eixo 1: Avaliação das Oficinas: percepções, envolvimento e indicadores iniciais de aprendizagem	122
7.1.1	Percepção geral das oficinas: Autoavaliação.....	122
7.1.2	Contribuições para a aprendizagem.....	124
7.1.3	Dificuldades identificadas.....	126
7.1.4	Síntese interpretativa do eixo.....	127
7.2	Eixo 2: Análise do Questionário Diagnóstico: conhecimentos prévios, percepções e pontos de fragilidade conceitual	128
7.2.1	Desempenho conceitual e padrões das respostas.....	130
7.2.2	Percepções iniciais sobre a Álgebra e metodologias ativas.....	131
7.2.3	Indícios de matematização horizontal.....	131
7.2.4	Metatextos interpretativos da ATD no Eixo 2.....	132
7.2.5	Síntese interpretativa do eixo.....	134
7.3	Eixo 3: Análise da Sequência Didática, evidências de aprendizagem, evolução conceitual e mobilização de estratégias	134
7.3.1	Análise da Atividade 1.....	136
7.3.2	Análise da Atividade 2.....	142
7.3.3	Análise da Atividade 3.....	146
7.3.4	Análise da Atividade 4.....	150
7.4	Análise quantitativa dos dados	160
7.4.1	Limites e escolhas metodológicas da análise quantitativa.....	163
8	CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	166
	REFERÊNCIAS	168
	APÊNDICES	177
	APÊNDICE A – Questionário Avaliativo – Momento Inicial	178
	APÊNDICE B – Questionário Diagnóstico – Pré-intervenção	183
	APÊNDICE C – Questionário Avaliativo e Reflexivo – Pós-intervenção	192

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto e Motivação da Pesquisa

Quando o assunto é Matemática, a dificuldade em compreender a disciplina e o preconceito em relação à aprendizagem, que a considera difícil, ainda permeiam grande parte dos alunos. Entre os fatores que justificam tais dificuldades, além da natureza abstrata do raciocínio lógico-matemático e das práticas pedagógicas ainda pautadas em métodos tradicionais, estão amplamente citados em muitos estudos na área da Educação Matemática, pois reduzem a aula de Matemática a um simples manejo de fórmulas, regras e cópias de tarefas com muita repetição, o que acaba fragilizando a relação aluno-professor e, conseqüentemente, comprometendo o ensino e a aprendizagem do estudante. (Freire, 2011; Lins; Gimenez, 2001; Mestre, 2014; Kieran, 2004; Ma, 2009; Mestre; Oliveira, 2011)

Essas limitações tornam-se ainda mais visíveis no ensino da Álgebra, uma área reconhecida como uma das mais desafiadoras da disciplina, em razão de seu caráter simbólico, generalizante e abstrato. Enquanto linguagem formal da Matemática, a Álgebra desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da generalização e na formalização do pensamento abstrato; contudo, apesar de sua relevância, seu ensino no Ensino Médio ainda é marcado por práticas fragmentadas e descontextualizadas, (Ponte, 2005; Fiorentini; Miorim; Miguel, 2016; Araujo, 2008; Gil, 2008).

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (2016), ao longo da história, a Educação Algébrica assumiu diferentes concepções. Uma delas, denominada linguístico-pragmática, compreende a Álgebra como uma ferramenta muito útil para a resolução de problemas, mas frequentemente limitada à aplicação mecânica de técnicas e algoritmos em sala de aula. Ponte (2005) observa que, desde dois séculos atrás, o ensino da Álgebra já estava centrado no domínio das equações, o que mostra que seu ensino precisa ser atualizado para atender às necessidades atuais dos alunos. Na escola, hoje, o principal objetivo da Álgebra deve ser o desenvolvimento do pensamento algébrico, entendido como uma forma de raciocínio que amplia a capacidade de utilizar a abstração, contribuindo para que o estudante tenha uma formação mais completa e atuante em muitas áreas, como, por exemplo, a resolução de problemas.

Nesse sentido, para que o conhecimento algébrico cumpra sua função formativa, é necessário que, antes de manipular fórmulas, o aluno consiga identificar padrões, representar relações, resolver problemas e fortalecer o pensamento abstrato. Contudo, a forma como e quando esse conteúdo é tradicionalmente inserido no currículo (apenas nos anos finais do Ensino Fundamental) tende a dificultar uma transição tranquila para seu estudo no Ensino Médio. Dessa forma, o ensino da Álgebra enfrenta um grande desafio: superar a fragmentação curricular e consolidar sua presença no Ensino Médio de forma mais articulada e significativa para os estudantes.

Para superar essas limitações e alinhar o ensino às novas necessidades, autores como (Usiskin, 1994) e (Ponte; Branco; Matos, 2009) defendem que o ensino da Álgebra deve ir além

da resolução de equações, abrangendo também a generalização aritmética, o estudo de estruturas e a resolução de problemas com sentido. Nessa mesma direção, Ferreira (2018) destaca que diversas pesquisas, tanto nacionais quanto internacionais, apontam para a necessidade de antecipar o contato dos estudantes com ideias algébricas, não apenas como uma introdução precoce aos conteúdos, mas para ampliar o repertório deles, favorecendo a construção do pensamento algébrico desde os anos iniciais.

Os desafios da aprendizagem algébrica, portanto, não se restringem a aspectos cognitivos, mas também refletem uma construção histórica e sistemática do ensino de Matemática no Brasil. A fragmentação curricular, a desarticulação entre as etapas escolares e a ausência de políticas formativas contínuas resultam em estudantes que chegam ao Ensino Médio com compreensões frágeis sobre variáveis, expressões e funções. Como afirmam Rodrigues e Pires (2017), superar essas fragilidades requer uma articulação entre currículo, formação docente e práticas pedagógicas que deem sentido à Álgebra no processo formativo. Outro aspecto que compromete a aprendizagem algébrica, segundo Sortisso (2011), é a desorganização na sequência dos conteúdos, uma vez que os professores, muitas vezes, não conseguem superar a rigidez dos currículos estaduais. Como consequência, determinados conteúdos acabam sendo postergados para séries ou etapas posteriores, mas não são devidamente retomados, pois não há continuidade docente. Esse descompasso entre o planejamento curricular e a execução pedagógica acaba ampliando ainda mais as lacunas existentes entre a construção do pensamento algébrico e a fragmentação curricular.

Corroborando, Araujo (2008) ressalta que não é possível utilizar a linguagem algébrica sem atribuir significado, de modo que a falta de compreensão dessa nova linguagem prejudica diretamente o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entre as dificuldades mais recorrentes apresentadas pelos alunos, destacam-se a confusão entre variável e incógnita, o desconhecimento das propriedades das expressões e o uso inadequado de símbolos herdados da aritmética.

Embora a discussão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico tenha avançado em países como os Estados Unidos, Espanha e Portugal (Canavarro, 2007; Russell; Schifter; Bastable, 2011; Schliemann; Carraher; Brizuela, 2007), no Brasil esse movimento ainda encontra entraves importantes, especialmente no que diz respeito à organização curricular. Como aponta Ferreira (2018), os documentos oficiais apresentam avanços pontuais, mas não incorporam de forma consistente o termo “pensamento algébrico” nos anos iniciais. Essa ausência repercute diretamente nos projetos pedagógicos das escolas, perpetuando a separação histórica entre Aritmética e Álgebra. No Ensino Médio, esse distanciamento reaparece na forma de práticas fragmentadas, sustentadas por exercícios repetitivos e descontextualizados, em contraste com o que a BNCC propõe. Autores como Carraher, Schliemann e Brizuela (2006) e Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) já chamam a atenção para esse problema, ressaltando que, quando Aritmética e Álgebra não dialogam, o estudante chega às etapas posteriores com lacunas que dificultam a compreensão de conceitos fundamentais.

A discussão sobre o Ensino Médio começou a ganhar outro contorno já na década de 1990. A LDB 9.394/96 Brasil (1996), ao incluir o Ensino Médio na própria Educação Básica, alterou o entendimento sobre o que essa etapa deveria oferecer. A ideia de uma formação mais ampla (científica, cultural e social) passou a ganhar mais força nas escolas. Depois disso, os PCNEM Brasil (2000) vieram como um primeiro esforço para organizar essas orientações em áreas, descrevendo habilidades e competências que deveriam atravessar o trabalho pedagógico, inclusive na Matemática.

Com o passar dos anos, essas propostas foram revistas. O MEC publicou as Diretrizes Curriculares Nacionais de 2012 Básica (2012), buscando ajustar o que já vinha sendo feito e aproximar o currículo escolar das mudanças ocorridas no país. O texto mantinha a ideia de uma parte comum para todos e outra parte que poderia variar conforme o sistema de ensino. Essa organização, no entanto, não permaneceu por muito tempo. Em 2017, a Lei 13.415/2017 alterou novamente a estrutura curricular do Ensino Médio, criando os itinerários formativos e redefinindo o que deveria ser obrigatório e o que poderia ser escolhido pelos estudantes.

O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber: I - linguagens e suas tecnologias; II - Matemática e suas tecnologias; III - ciências da natureza e suas tecnologias; IV - ciências humanas e sociais aplicadas; V - formação técnica e profissional. (Brasil, 2017, Art.36)

A mudança feita na LDB em 2017 acabou mexendo diretamente no Ensino Médio e, com isso, as Diretrizes Curriculares precisaram ser revistas. Não foi um processo “automático”; os sistemas de ensino estavam tentando entender como reorganizar seus currículos, e a atualização só veio com a Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Esse documento procurou ajustar as DCNEM às novas exigências legais e também às questões que já vinham aparecendo nas redes e nas escolas. Pouco depois, em dezembro de 2018, a BNCC do Ensino Médio foi homologada (Portaria nº 1.432/2018). Com ela, passou a existir um conjunto de aprendizagens claramente definido para essa etapa, servindo como referência obrigatória para a construção dos currículos e a organização do trabalho pedagógico nas escolas.

A partir desses marcos, o Currículo Paulista foi elaborado, organizado nas quatro áreas do conhecimento da formação geral básica (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), dos itinerários formativos, juntamente com a formação técnica e profissional. Conforme descrito no Currículo Paulista São Paulo (2020), os tempos são outros, o que demanda novas formas de organização dos espaços escolares, novas metodologias de ensino, gestão do currículo e novas formações para professores. É com esses objetivos que os Itinerários Formativos apresentam novas maneiras de organizar e estruturar o ensino nas escolas, trazendo experiências inovadoras ao processo de aprendizagem dos estudantes. Mas será que essas mudanças foram suficientes para moldar outras formas de ensinar álgebra?

É claro que, sob essa ótica, o ensino de Álgebra no Ensino Médio ainda permanece condicionado por uma visão curricular tradicional em que a resolução de exercícios mecânicos prevalece sobre a exploração conceitual na maioria das instituições de ensino. Embora a Brasil (2018) proponha o desenvolvimento do pensamento algébrico como competência contínua, sua implementação ainda é comprometida por essas abordagens que estão presentes não só nas salas de aula, mas também nos materiais didáticos disponibilizados aos docentes, como, por exemplo, nos livros didáticos, além de ser visível também nas lacunas na formação dos professores. Como destacam Bortolote e Bicudo (2024), há uma tendência, nos documentos oficiais, de reduzir o pensamento algébrico à mera aplicação de procedimentos, dissociando-o de sua dimensão investigativa e significativa. A BNCC reforça essa perspectiva ao destacar, no trecho a seguir, a importância de introduzir ideias algébricas desde os anos iniciais:

Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação (Brasil, 2018, p. 270)

Paralelamente, pesquisas apontam que muitos professores de Matemática se sentem despreparados para trabalhar a Álgebra de maneira conceitual e investigativa. A formação inicial muitas vezes privilegia os procedimentos técnicos em detrimento da compreensão teórica, o que dificulta a adoção de práticas mais significativas em sala de aula (Fiorentini; Miorim; Miguel, 2016; Lins; Gimenez, 2001). Dessa forma, Araujo (2008) acredita que a mudança no ensino da Álgebra só se concretizará se a construção do pensamento algébrico for contemplada nas instituições escolares, ou seja, além das necessidades de formalização.

Diante de críticas acadêmicas, limitações curriculares e diretrizes oficiais, o ensino da Álgebra no Brasil configura-se como um cenário complexo. Nessa direção, propusemos uma alternativa pedagógica para o ensino-aprendizagem de matrizes, suas operações e sistemas lineares. Em vez de compreendê-las como um conjunto de regras a serem memorizadas, adotamos a perspectiva da Educação Matemática Realística (RME)¹, que concebe a Matemática e seu ensino como uma atividade humana de organizar e tratar a realidade por meio de conceitos e ideias Matemáticas. Essa abordagem, idealizada por Hans Freudenthal, valoriza a aprendizagem pela matematização², processo que encoraja os estudantes a explorarem e redescobrirem

¹ Sigla para Realistic Mathematics Education

² Na perspectiva da RME refere-se ao processo no qual o estudante organiza, modela e formaliza situações do contexto em linguagem matemática, passando de estratégias informais para representações mais estruturadas

a Matemática a partir de momentos e contextos ricos e significativos, em vez de apenas aceitarem uma aprendizagem pronta e engessada (Freudenthal, 1991).

Nesse caminho, utilizamos a perspectiva da RME articulada a metodologias ativas, como a sala de aula invertida, Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas (Allevato; Onuchic, 2021), gamificação, interdisciplinaridade e tecnologia, incluindo a linguagem de programação *Python*. A proposta de uma sequência (SD) apoia-se também na Educação Algébrica crítica, expressiva e contextualizada, conforme defendem Kieran (2004), Carraher, Schliemann e Brizuela (2006), Blanton e Kaput (2005), Canavarro (2007) e Gonçalves, Ribeiro e Aguiar (2024). Em contextos autênticos, ao introduzir a criptografia, é possível mobilizar o pensamento algébrico de forma natural, conectando a teoria das Matrizes a uma prática social e tecnológica do cotidiano dos estudantes.

Em consequência, estruturamos a fundamentação teórica desta dissertação em cinco eixos principais: (i) desafios históricos e didáticos da Educação Algébrica; (ii) aportes dos documentos oficiais para uma prática mais significativa; (iii) conceitos essenciais de Álgebra para o Ensino Médio; (iv) perspectiva da RME; e (v) contribuições das metodologias ativas para o engajamento e a aprendizagem. Esperamos que os resultados deste projeto sirvam como referência inicial para professores de Matemática e de outras áreas, possibilitando a articulação entre Álgebra, RME e metodologias ativas, transformando a prática docente e a forma como os estudantes vivenciam o aprendizado.

1.2 Objetivos da pesquisa

Nesta dissertação, propomos investigar alternativas para a ressignificação do ensino de Álgebra no Ensino Médio, por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática estruturada à luz da RME e que utiliza metodologias ativas, tendo a criptografia como temática norteadora das atividades. Essa proposta busca articular os fundamentos teóricos da Álgebra com sua aplicação em contextos reais e contemporâneos, rompendo com as práticas tradicionais centradas na memorização e na execução mecânica de procedimentos, conforme já mencionado, e promovendo uma aprendizagem investigativa e contextualizada.

A sequência didática foi planejada para integrar diferentes estratégias pedagógicas, proporcionando aos estudantes oportunidades de explorar, experimentar e construir conceitos de álgebra de forma colaborativa e reflexiva. Ao mesmo tempo, a criptografia funciona como um eixo interdisciplinar que conecta os conteúdos matemáticos a situações concretas e relevantes, mobilizando o processo de matematização de mensagens, como a codificação e a decodificação, a segurança digital e o raciocínio lógico aplicados a problemas do cotidiano.

Além disso, valorizamos o papel do professor como mediador do conhecimento, estimulando a reflexão crítica sobre a prática docente. Ao combinar teoria, prática, tecnologia e interdisciplinaridade, este trabalho pretende contribuir para a formação integral dos estudantes, evidenciando a relevância da Matemática em sua vida cotidiana e estabelecendo um referencial pedagógico capaz de inspirar novas experiências de ensino-aprendizagem no contexto do En-

sino Médio, com foco em Álgebra. Assim, buscamos compreender em que medida a integração entre a RME e as metodologias ativas pode favorecer a aprendizagem da Álgebra e contribuir para a formação docente reflexiva.

1.3 Relevância e contribuições esperadas

- Identificar as principais dificuldades conceituais e procedimentais dos estudantes do Ensino Médio em relação ao conteúdo de Álgebra, com ênfase em operações com matrizes;
- Analisar como o pensamento algébrico e as operações com matrizes são abordados em documentos curriculares oficiais (nacionais e estaduais);
- Planejar, desenvolver e aplicar uma sequência didática estruturada em metodologias ativas, incluindo a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da resolução de problemas, flipped classroom, gamificação e linguagem de programação;
- Utilizar recursos digitais, como *Python*, softwares de visualização e ferramentas online, para apoiar a aprendizagem, promover o engajamento e facilitar a resolução de problemas;
- Investigar como conceitos de criptografia, aplicados por meio de operações com matrizes, podem favorecer a construção do pensamento algébrico e o desenvolvimento das habilidades algébricas no Ensino Médio;
- Avaliar a eficácia de tarefas com alta demanda cognitiva, com base na RME e na taxonomia de Stein e Smith (1998), para promover a matematização horizontal e vertical nos estudantes;
- Avaliar os impactos da sequência didática na aprendizagem, na motivação e na construção de significados matemáticos dos estudantes, por meio de instrumentos qualitativos, como questionários, observações e registros escritos;
- Refletir sobre os desdobramentos pedagógicos da experiência, considerando a replicabilidade da proposta em outros contextos docentes;
- Promover a articulação entre teoria e prática, evidenciando a relevância da matematização dos estudantes e incentivando a autonomia na aprendizagem.

1.4 Estrutura do trabalho

Após esta Introdução, no Capítulo 2, apresentamos o contexto histórico e curricular da Álgebra, destacando lacunas na aprendizagem dos estudantes, limitações na formação docente

e desafios relacionados aos materiais didáticos disponíveis. Além disso, discutiremos as dificuldades dos alunos e estabeleceremos uma relação crítica com os documentos norteadores oficiais, como a BNCC e o Currículo Paulista, sob a ótica docente.

No Capítulo 3, aprofundamos os fundamentos de Álgebra, em especial as Matrizes e Sistemas Lineares voltados para o Ensino Médio, enfatizando operações e propriedades essenciais para aplicações práticas, como adição, subtração, multiplicação por escalar, multiplicação entre matrizes, determinantes, matriz inversa e o Teorema de Laplace.

No Capítulo 4, o referencial teórico que fundamenta esta pesquisa será desenvolvido, tendo a Educação Matemática Realística como eixo estruturante, amparada nas contribuições de Hans Freudenthal e de autores que a ampliaram. Nesse capítulo, discutiremos seus princípios (atividade, realidade, níveis, interatividade, entrelaçamento e orientação), enfatizando como eles oferecem um enquadramento capaz de ressignificar o ensino da Álgebra no Ensino Médio e de orientar a elaboração da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa.

Com essa base teórica consolidada, o Capítulo 5 aprofunda o conjunto de metodologias ativas que sustentam o desenho e a aplicação da sequência didática. Neste capítulo, examinamos a metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação através da resolução de problemas, da sala de aula invertida, da gamificação, da interdisciplinaridade e do uso do Python como recurso didático. Nossa intenção é explicitar como cada uma dessas abordagens se articula com os princípios da RME, especialmente no que diz respeito à criação de ambientes que favorecem a investigação, o protagonismo intelectual e a mobilização de diferentes formas de representação. Ao discutir essas metodologias, buscamos mostrar que elas não se configuram como técnicas isoladas, mas como dispositivos que ampliam a visão dos estudantes e possibilitam que a álgebra seja vivenciada.

No Capítulo 6, descrevemos como organizamos a pesquisa e quais caminhos metodológicos escolhemos para conduzir o trabalho. Apresentamos o caráter qualitativo do estudo, explicamos os instrumentos que utilizamos e, principalmente, nos dedicamos a detalhar a sequência didática elaborada. Esse capítulo é o espaço em que mostramos cada tarefa da sequência, comentando por que foi construída daquela maneira, quais ideias Matemáticas pretendíamos desenvolver, como os princípios da RME sustentaram as decisões didáticas e de que forma as escolhas dialogaram com as necessidades da turma. A leitura deste capítulo revela, portanto, o movimento de passagem entre a teoria estudada e a prática vivida na sala de aula.

No Capítulo 7, reunimos as análises resultantes da aplicação da sequência. Discutimos o que observamos no comportamento dos estudantes, as estratégias que construíram, as dificuldades que surgiram, o quanto conseguiram avançar conceitualmente e como responderam às metodologias propostas. Tratamos também das nossas próprias reflexões enquanto professores-pesquisadores, apontando aspectos que funcionaram bem e outros que exigem reformulações.

Ao encerrar o trabalho, no Capítulo 8, apresentamos nossas considerações finais. Retomamos os principais resultados, destacamos as contribuições da pesquisa para o ensino de álgebra e para a prática docente, e indicamos os limites que encontramos ao longo do percurso.

Também apontamos possibilidades importantes para futuros estudos, tanto para aprofundar elementos da sequência quanto para ampliar as discussões sobre a aprendizagem algébrica no Ensino Médio.

Ao longo desta dissertação, falamos também do movimento que temos construído como professores em sala de aula. Não se trata apenas de um trabalho acadêmico; para nós, é uma tentativa real de romper com o modelo engessado de ensino da Álgebra que vivenciamos e que ainda encontramos em muitas escolas: carteiras enfileiradas, apostilas copiadas e pouco espaço para que os estudantes pensem, testem e perguntem. Temos buscado ir na direção contrária. Queremos aulas mais vivas, nas quais os alunos participem, se movimentem e percebam que a álgebra pode ocupar um lugar concreto em suas próprias experiências.

Enquanto docentes, o PROFMAT nos ajudou significativamente nesse percurso. Ampliamos nossos conhecimentos matemáticos e, sobretudo, ganhamos segurança para olhar para nossa prática e ajustar o que já não fazia sentido. Ao longo do curso, fomos experimentando novas propostas, compartilhando ideias com colegas professores, levando atividades diferentes para a sala de aula e observando atentamente como os estudantes reagiam. Aos poucos, essas tentativas foram se tornando parte do nosso modo de ensinar.

Pretendemos seguir nesse caminho. Acreditamos que a pesquisa em Educação Matemática pode e deve dialogar com o que realizamos no cotidiano escolar. Temos interesse em continuar estudando, produzindo e divulgando abordagens que aproximem os alunos da álgebra e a tornem menos distante, menos temida e mais convidativa. Se conseguirmos contribuir para que mais professores encontrem caminhos possíveis e mais estudantes se sintam capazes de aprender, já teremos alcançado um dos principais objetivos que nos mobilizaram neste mestrado.

2 ENTRE DESAFIOS E POSSIBILIDADES: O ENSINO DA ÁLGEBRA

Neste capítulo, buscamos discutir os principais desafios relacionados ao ensino e à aprendizagem da álgebra, com base em uma revisão da literatura recente e na análise de documentos curriculares oficiais. Serão apresentados os aspectos históricos e curriculares do ensino da álgebra, as principais dificuldades cognitivas e metodológicas apontadas por professores e pesquisadores, bem como possíveis caminhos para a transformação da prática pedagógica nas escolas públicas.

2.1 Panorama histórico e curricular da Álgebra

A Matemática, como ciência formal, é composta por diversas áreas de estudo que dialogam entre si e sustentam sua estrutura conceitual. Dentre elas, a álgebra desempenha um papel central, dada sua capacidade de representar padrões, modelar situações e expressar generalizações. Desde suas origens históricas, a álgebra esteve vinculada à resolução de problemas cotidianos, como já praticavam civilizações antigas, como a babilônica (1700 a.C.), que utilizavam procedimentos matemáticos para lidar com situações práticas (Boyer, 1974). Coelho Joice Santos e Aguiar (2018) ressaltam que tais práticas já evidenciavam formas embrionárias de pensamento algébrico, o que reforça a importância de contextualizar esse aspecto histórico no processo de ensino.

A evolução da álgebra ao longo da história revela diferentes modos de compreender os números, as operações e as relações Matemáticas estabelecidas entre grandezas. A chamada álgebra retórica, presente entre os gregos e os árabes, utilizava apenas palavras para descrever procedimentos de resolução de problemas. Com o avanço do conhecimento matemático, especialmente após as contribuições de Diofanto e, posteriormente, de al-Khwarizmi, deu-se início a um processo gradual de simbolização que transformou profundamente a forma como os objetos algébricos passaram a ser tratados (Boyer, 1974). Ao longo desse percurso, a linguagem algébrica assumiu a função de representar generalizações e de estabelecer propriedades válidas independentemente de casos particulares, um movimento que ampliou o caráter abstrato da Matemática.

Entretanto, a construção da álgebra que conhecemos foi tecida em muitos estágios, ocorrendo inicialmente por meio de expressões que eram redigidas em linguagem natural, etapa essa conhecida como retórica. Posteriormente, surgiram formas abreviadas de escrita (fase sincopada) até que, com o tempo, estabeleceu-se um sistema de notação simbólica que tornou a álgebra uma linguagem concisa, poderosa e amplamente utilizada nas ciências e na tecnologia.

A partir do século XVI, com Viète e o desenvolvimento da notação literal, consolidou-se uma nova forma de pensar a álgebra, na qual letras passaram a representar quantidades desconhecidas e parâmetros, favorecendo o estudo de equações e relações gerais. Mais tarde, as contribuições de Descartes expandiram esse escopo ao estabelecer vínculos entre álgebra e geometria, abrindo espaço para uma linguagem universal capaz de expressar tanto fenômenos

algébricos quanto geométricos. Essa transição demarca o início da chamada álgebra moderna, na qual estruturas como grupos, anéis e corpos passaram a compor um corpo teórico robusto, que fundamenta grande parte da Matemática contemporânea.

Contudo, essa sofisticação da linguagem algébrica muitas vezes não é devidamente compreendida ou internalizada pelos estudantes da Educação Básica. Ainda é comum que a álgebra seja ensinada de forma fragmentada, com foco na manipulação de letras e números, desvinculada de significados mais amplos, o que não deveria ocorrer, já que está presente em todas as etapas de ensino, desde a educação infantil até o ensino médio. Sua importância na área da educação vai além do fato de oferecer ferramentas para generalizar padrões, modelar situações, desenvolver raciocínio abstrato e resolver problemas em diversos contextos; está também na construção de novas tecnologias, como aborda a Base Nacional Comum Curricular Brasil (2018), segundo a qual isso ocorre por meio de processos que envolvem uma habilidade adquirida durante o desenvolvimento das competências algébricas, denominada “pensamento algébrico”.

Com essa reconfiguração conceitual, a álgebra deixou de ser apenas uma técnica aplicada à resolução de equações e passou a constituir-se como um campo epistêmico voltado ao estudo de estruturas e relações (Coelho; Aguiar, 2018). Entretanto, esse entendimento mais amplo nem sempre se reflete nas práticas escolares atuais, que ainda tendem a enfatizar algoritmos e manipulações simbólicas em detrimento de processos de investigação e generalização. A própria história da álgebra evidencia que seu desenvolvimento ocorreu a partir de necessidades humanas e de práticas culturais, e não de regras prontas ou procedimentos memorizados, o que reforça a urgência de uma abordagem que considere sua natureza formativa.

Embora a Brasil (2018) reconheça a álgebra como uma unidade temática presente ao longo de toda a Educação Básica, sua materialização curricular tende a fragmentar conceitos e reduzir o pensamento algébrico a um componente operacional. Tal perspectiva não valoriza adequadamente o percurso histórico desse campo e pode contribuir para que os estudantes compreendam a álgebra como um mero conjunto de técnicas descontextualizadas. Considerar sua constituição histórica, ao contrário, permite compreender por que a álgebra é parte essencial do desenvolvimento do raciocínio abstrato, da modelagem e da interpretação de fenômenos em múltiplos campos do conhecimento.

2.2 Desafios e lacunas na aprendizagem dos estudantes

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao aprender álgebra não estão apenas relacionadas à sua complexidade conceitual, mas também ao modo como esse conteúdo é tradicionalmente ensinado. Conforme discutido por Santos (2021), a ausência de estratégias metacognitivas por parte dos professores e a priorização de aspectos formais em detrimento dos significados prejudicam a aprendizagem efetiva. O autor destaca que a metacognição (entendida como a consciência e o controle dos próprios processos cognitivos) é uma competência

fundamental para o professor que deseja aprimorar sua prática pedagógica e promover uma aprendizagem mais completa.

Além dessas dificuldades, observa-se que muitos alunos chegam ao Ensino Médio sem compreender o papel das letras nas expressões algébricas. Esse é um dos obstáculos conceituais mais recorrentes na aprendizagem, uma vez que a letra pode assumir diferentes significados, como variável, incógnita, parâmetro ou objeto generalizador (Graciani, 2020). Quando essa polissemia não é explorada de forma intencional, os estudantes tendem a atribuir às letras interpretações equivocadas e rígidas, atreladas apenas à ideia de um desconhecido a ser encontrado.

Autores como Ferreira (2003) e Figueira (2002) também reforçam a importância da autorreflexão docente no ensino da álgebra, apontando que a capacidade de planejar, monitorar e reavaliar as estratégias de ensino é decisiva para enfrentar as dificuldades dos alunos. Assim, promover o desenvolvimento metacognitivo do professor também é uma estratégia para melhorar o desempenho dos estudantes.

Sabemos que a álgebra exige dos alunos um elevado grau de abstração. Entretanto, a transição da aritmética concreta para o uso de letras que representam números exige uma mudança de paradigma, frequentemente desafiadora. Estudos como os de Blanton e Kaput (2005) apontam que o pensamento algébrico envolve a capacidade de generalizar padrões, estabelecer leis Matemáticas e expressá-las de forma simbólica:

Estudantes generalizam ideias Matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem as generalizações por meio de um discurso argumentativo e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade. (Blanton; Kaput, 2005, p.413)

Outro aspecto crítico está na forma como a álgebra é historicamente apresentada aos estudantes: como um conteúdo isolado, desconectado de situações reais e da própria atividade humana. Bortolete, Guaranha e Oliveira (2022) evidenciam que o ensino tradicional, centrado na manipulação de símbolos, produz um afastamento dos sentidos que sustentam essa linguagem Matemática. Os estudantes passam a resolver equações sem compreender o que elas representam, distanciando-se da natureza conceitual do pensamento algébrico.

Essa dissociação entre expressão simbólica e significado também repercute em uma perspectiva utilitarista do conteúdo, como apontam Bortolete e Bicudo (2024). Ao atribuir à álgebra um caráter extremamente prático, ligado à resolução mecânica de problemas cotidianos, perde-se de vista sua função epistêmica de investigação, argumentação e construção de modelos. Essa redução contribui para a crença, comum entre os estudantes, de que a álgebra não tem relação com o modo como pensam e agem no mundo.

Quando essa transição (da aritmética operacional para o pensamento algébrico, marcado pela generalização e atribuição de significado aos símbolos) não é realizada com o devido suporte pedagógico, os estudantes tendem a memorizar procedimentos sem compreensão conceitual. Essa dificuldade é agravada quando os materiais didáticos introduzem símbolos e

expressões sem uma base conceitual sólida, deixando de lado aspectos como regularidade, generalização e relacionamento entre grandezas.

Em muitos casos, o processo de ensino não permite que os alunos percebam regularidades e construam generalizações de forma gradual. Como destacam Graciani (2020), a apresentação da álgebra na maioria dos livros didáticos ocorre de maneira abrupta, com institucionalizações rápidas e pouca exploração de significados. Quando não há espaço para formular conjecturas e justificar ideias, o pensamento algébrico deixa de emergir como prática investigativa e passa a ser compreendido como mera sucessão de procedimentos a memorizar.

Segundo Boaler (2014), essa antecipação do fracasso pode gerar retração, afetando o engajamento dos alunos nos conteúdos. Tais desafios exigem que o professor assuma um papel ativo na mediação da aprendizagem, promovendo ambientes mais acolhedores e metodologias que valorizem o erro como parte do processo de construção do conhecimento.

Nesse cenário, muitos estudantes desenvolvem um bloqueio socioemocional em relação à álgebra, acreditando que ela pertence apenas àqueles que “nascem com facilidade” para a Matemática. Bortolete e Bicudo (2024) alertam que tal percepção é reforçada quando o ensino não possibilita a construção de sentidos e quando o erro é tratado como sinal de fracasso, e não como parte constitutiva da aprendizagem. Portanto, superar essas lacunas demanda práticas pedagógicas que valorizem a argumentação, a modelagem e a progressiva formalização das ideias, permitindo que os estudantes compreendam que a álgebra é resultado de uma atividade humana historicamente construída e acessível a todos.

2.3 Documentos oficiais, formação docente e implicações para o ensino da Álgebra

A compreensão das dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem de álgebra exige um olhar atento às políticas curriculares e à atuação docente em sala de aula. Os documentos oficiais, ao definirem orientações e expectativas de aprendizagem, influenciam diretamente as práticas pedagógicas e a organização dos conteúdos que chegam aos estudantes. No entanto, quando tais diretrizes não apresentam clareza conceitual ou acabam por restringir o papel da Matemática a uma visão tecnicista, limitam também a autonomia e as possibilidades formativas dos professores. Nesse cenário, torna-se essencial analisar como a BNCC e outros documentos normativos abordam o pensamento algébrico, bem como compreender os impactos dessa abordagem nas práticas pedagógicas e na formação dos estudantes, de modo a indicar caminhos para uma ressignificação da álgebra no contexto escolar.

2.3.1 Limitações curriculares e políticas educacionais

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece a álgebra como uma das cinco unidades temáticas da Matemática e a apresenta como central para o desenvolvimento de competências fundamentais ao longo da Educação Básica. Contudo, uma leitura mais atenta do documento evidencia limitações conceituais: embora o pensamento algébrico seja mencionado

diversas vezes, ele não é claramente definido. Em muitos trechos, é reduzido a um "tipo especial de pensamento" voltado à identificação de padrões e à resolução de equações, o que enfraquece suas dimensões investigativas e conceituais (Bortolote; Bicudo, 2024). Essa simplificação acaba comprometendo o potencial formativo da álgebra como campo de construção de significados e de raciocínio abstrato.

Embora a BNCC reconheça o papel da argumentação lógica e da incerteza como elementos constituintes do pensamento matemático, ela falha em sustentar essa amplitude nas descrições práticas de habilidades e competências. Segundo Bortolote e Bicudo (2024), o documento adota uma perspectiva tecnicista, priorizando algoritmos e representações simbólicas em detrimento da compreensão profunda dos conceitos envolvidos. O pensamento algébrico é frequentemente apresentado como uma habilidade operacional, conectada ao pensamento computacional, o que pode levar ao esvaziamento do sentido da álgebra enquanto linguagem e forma cultural de expressão (Bortolote; Bicudo, 2024). Essa crítica converge com Vieira (2024), que alerta para os riscos de que o ensino da álgebra se resuma a regras e fórmulas sem significado para os estudantes.

Apesar desse discurso normativo, a BNCC permanece alinhada a uma lógica de organização curricular fragmentada, na qual a álgebra aparece como etapa a ser alcançada apenas após o domínio aritmético. No entanto, como defendem Bortolote, Guaranha e Oliveira (2022), essa visão sequencial desconsidera que o pensamento algébrico pode e deve se desenvolver desde os anos iniciais, por meio da observação de padrões e generalizações que emergem em situações reais de aprendizagem. Ao manter estruturas rígidas e desvinculadas do contexto formativo, o documento restringe as possibilidades de construção progressiva das ideias algébricas pelos estudantes.

Outra lacuna importante da BNCC diz respeito à compreensão epistemológica da álgebra. Conforme destacam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a álgebra escolar deve assumir o papel de mediação entre diferentes formas de pensar matematicamente, especialmente no que se refere à generalização e ao estudo de relações. Quando reduzida ao adestramento simbólico, perde-se a dimensão formativa que, historicamente, constituiu esse campo do conhecimento. A forma como a BNCC trata o pensamento algébrico também revela uma compreensão limitada da linguagem Matemática. Radford (2010) argumenta que o pensamento algébrico envolve gestos, artefatos, linguagem e cultura, produzindo modos particulares de significar. Ao não contemplar essas idealidades e ao priorizar modelos utilitaristas, o documento desconsidera que aprender álgebra é aprender uma maneira de interpretar o mundo e de expressar raciocínios. (Coelho; Aguiar, 2018)

Além disso, conforme apontam Lins e Gimenez (2001), a transição da aritmética para a álgebra exige que o estudante mobilize novos registros de significação, o que requer um trabalho sistemático de mediação por parte do professor. Quando o currículo atribui à álgebra apenas um caráter procedural, sem assegurar condições para a produção de significados, tende-se a reforçar lacunas na aprendizagem e a fragilizar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais e os Guias do PNLD, os materiais didáticos devem apresentar conteúdos de forma articulada, permitindo ao estudante perceber que os conhecimentos matemáticos não são isolados em campos estanques (Brasil, 2002; Brasil, 1997b; Brasil, 1997a). No entanto, como destacam Neto e Demarchi (2022), nem todos os materiais seguem essa diretriz de forma consistente. Esse dado reforça a necessidade de maior cuidado na elaboração dos materiais didáticos, que devem estar alinhados aos objetivos formativos da BNCC e às competências esperadas para cada etapa de ensino.

A análise do texto da BNCC revela, portanto, uma dicotomia entre o discurso inicial, que valoriza a Matemática como campo formativo, e as orientações pedagógicas efetivamente propostas. Embora a álgebra seja apresentada como mediadora da compreensão de fenômenos e relações entre grandezas, a maneira como o pensamento algébrico é operacionalizado no currículo tende a privilegiar sua aplicabilidade em detrimento da reflexão conceitual. Para que se cumpra o propósito formativo do ensino matemático, é necessário, como afirmam Neto e Demarchi (2022), que os materiais didáticos e as práticas docentes avancem para além do tecnicismo e considerem a historicidade e a natureza epistêmica da álgebra. (Brasil, 2018)

Bortolete e Bicudo (2024) realizam uma análise crítica das potencialidades e fragilidades do pensamento algébrico na BNCC, evidenciando que o documento estrutura o ensino em unidades temáticas, incluindo álgebra, mas não define claramente esse pensamento. Sua concepção privilegia modelos e símbolos, sem aprofundar as idealidades, as origens e os modos próprios de raciocínio, o que reforça uma visão utilitarista da disciplina (Bortolete; Bicudo, 2024, p. 19). A compreensão da álgebra apenas como um meio de resolver problemas cotidianos empobrece sua natureza. O ensino deve resgatar sua dimensão formadora, explorando os sentidos expressos por sua linguagem e simbologia (Bortolete; Bicudo, 2024; Bortolete; Guaranha; Oliveira, 2022).

2.3.2 Impactos na prática docente e limitações pedagógicas

Diversos estudos apontam que o ensino de álgebra ainda é marcado por abordagens excessivamente técnicas e desprovidas de significado conceitual, o que compromete a construção do pensamento algébrico desde os anos finais do Ensino Fundamental. A trajetória histórica desse ensino no Brasil demonstra uma forte influência de modelos tradicionais e reprodutivos, nos quais o foco recai sobre a manipulação de símbolos e a resolução de equações, sem articulação com contextos reais ou aplicações significativas. Como evidenciado por Araujo (2008), a aprendizagem da álgebra foi, durante muito tempo, reduzida à aplicação de algoritmos e de transformações formais, desconectadas da lógica e da função social do conhecimento matemático.

Nesse mesmo sentido, Coelho e Aguiar (2018) afirmam que o ensino tradicional da álgebra, centrado na resolução de equações e na memorização de regras, muitas vezes negligencia o desenvolvimento do pensamento lógico-abstrato. Para os autores, essa limitação compromete

a formação de estudantes autônomos e críticos, capazes de utilizar a álgebra como ferramenta para interpretar e modelar situações do cotidiano.

Além das dificuldades inerentes à linguagem algébrica, muitas vezes as fragilidades estão na própria estrutura do material didático utilizado nas escolas públicas. Segundo Neto e Demarchi (2022), mesmo com a presença da álgebra nos livros didáticos, sua abordagem nem sempre favorece a construção sólida do pensamento algébrico, pois há lacunas em sua construção, em particular na apresentação dos conceitos iniciais da álgebra para a institucionalização desse saber matemático (Neto; Demarchi, 2022, p. 93).

Um dos aspectos apontados pelos autores é a ausência de uma distinção clara entre os conceitos de variável e de incógnita, o que pode gerar confusão nos anos posteriores. Essas observações são cruciais para o Ensino Médio, pois os alunos chegam a essa etapa com lacunas importantes, o que compromete o avanço em tópicos mais complexos, como funções, equações do 2º grau e sistemas lineares. A formação docente, nesse contexto, precisa oferecer ferramentas teóricas e práticas para enfrentar essas defasagens com intencionalidade pedagógica.

Estudos recentes também apontam que os erros recorrentes na aprendizagem da álgebra não se restringem a falhas operatórias, mas estão enraizados em uma compreensão superficial do próprio conteúdo. De acordo com Gorini (2021), muitos estudantes enfrentam dificuldades significativas na transição da aritmética para a álgebra, especialmente na interpretação e na construção de expressões algébricas. Essas dificuldades estão associadas não apenas a lacunas conceituais, mas também a fatores emocionais, como o sentimento de incapacidade e a crença de que a Matemática é um privilégio de poucos. A autora ressalta que o ambiente familiar e social frequentemente reforça essa percepção negativa, contribuindo para um bloqueio afetivo em relação à disciplina de Matemática. Dessa forma, a aprendizagem da álgebra não é apenas um desafio cognitivo, mas também psicológico, exigindo do professor um olhar atento às condições subjetivas que afetam o desempenho dos alunos.

Neste cenário, os livros didáticos, principal recurso pedagógico em muitas escolas, frequentemente não contribuem para superar tais obstáculos, como afirma Gil (2008), pois, em grande parte das instituições, predominam atividades mecânicas, sem conexão com situações reais ou que favoreçam a problematização. Santos (2007) também observa que a forma como a álgebra é tratada nos materiais didáticos influencia diretamente as dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

De acordo com Santos (2021), embora haja diretrizes que valorizem o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares, na prática, ainda prevalece o ensino voltado para a mecanização de procedimentos. De modo semelhante, Neto e Demarchi (2022) apontam que práticas que vinculam a álgebra a situações concretas tendem a ser mais bem recebidas pelos alunos, pois a abordagem por meio de situações-problema contextualizadas estimula a curiosidade e favorece a construção de sentido.

Para promover uma mudança efetiva na álgebra do ensino básico, Gorini (2021) defende o uso de metodologias lúdicas e de recursos tecnológicos que favoreçam a construção ativa do

conhecimento. Em sua pesquisa, a autora desenvolveu e aplicou atividades com jogos matemáticos e softwares educativos, os quais demonstraram resultados positivos no engajamento e na superação das dificuldades conceituais dos alunos. Sendo assim, as dificuldades no ensino da álgebra podem ser superadas por meio da adoção de práticas pedagógicas inovadoras. O uso de tecnologias digitais, jogos matemáticos, projetos interdisciplinares e metodologias investigativas é um caminho promissor. É imprescindível que o professor assuma o papel de mediador do conhecimento, organizando situações didáticas que favoreçam a construção do pensamento algébrico Neto e Demarchi (2022).

Nesse sentido, é fundamental que os professores tenham acesso à formação continuada, a materiais de qualidade e a espaços para a reflexão sobre sua prática. Somente assim será possível transformar o ensino da álgebra em uma experiência diferente da que vem ocorrendo nas últimas décadas. As contribuições de autores como Blanton e Kaput (2005), retomadas por Coelho e Aguiar (2018), apontam para a importância de desenvolver atividades que favoreçam o pensamento algébrico desde os primeiros anos da escolaridade. Isso exige do professor um olhar mais atento aos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem e a capacidade de conectar os saberes matemáticos às experiências dos alunos. Araujo (2008) sugere que a formação inicial e continuada de professores deve contemplar essas dimensões, promovendo uma prática pedagógica que vá além da repetição de fórmulas e algoritmos. De acordo com Gorini (2021), o mapeamento dos erros mais frequentes cometidos pelos alunos pode ser um ponto de partida estratégico para o planejamento docente.

Diante dessas lacunas e da necessidade de ir além do ensino tradicional e tecnicista, nossa pesquisa propõe a Educação Matemática Realística (RME) como um referencial teórico capaz de oferecer caminhos pedagógicos para ressignificar o ensino da álgebra e fortalecer sua dimensão conceitual e formativa. Em vez de seguir apenas as recomendações da Brasil (2018), a RME orienta o docente a construir ambientes de aprendizagem nos quais o estudante não apenas manipule símbolos, mas também produza significados, articulando o pensamento informal à formalização. Este é o ponto de partida de nossa metodologia, que busca, em essência, dar vida e propósito à álgebra no Ensino Médio, promovendo uma aprendizagem contextualizada e reflexiva.

Assim, torna-se necessário repensar o ensino da álgebra para além das prescrições curriculares, investindo em propostas que promovam a construção de significados. A Educação Matemática Realística apresenta-se, assim, como um referencial teórico promissor, pois considera a Matemática como uma atividade humana e valoriza a matematização progressiva, aproximando os estudantes de modelos conceituais enquanto ampliam sua capacidade de abstração (Freudenthal, 1973a). Ao adotarmos essa perspectiva na elaboração de uma sequência didática para o Ensino Médio, buscamos possibilitar caminhos para ressignificar o papel da álgebra na experiência escolar, favorecendo uma aprendizagem que seja, ao mesmo tempo, conceitual, contextualizada e formadora.

Com esse propósito, no Capítulo 3, desenvolvemos uma abordagem sistemática da álgebra do Ensino Médio, voltada à compreensão de matrizes, suas operações e propriedades,

bem como das estruturas formais que as fundamentam. Em seguida, no Capítulo 4, aprofundaremos a teoria que alicerça nossa proposta, a RME, que servirá de lente para a elaboração e análise da sequência didática.

3 CONCEITOS ESSENCIAIS DE ÁLGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO

No capítulo anterior, após discutirmos os desafios do ensino de álgebra no Brasil, apresentamos a Educação Matemática Realística (RME) como um referencial capaz de ressignificar esse ensino, sobretudo ao enfatizar a construção de significados. Para concretizar essa perspectiva e orientar a intervenção pedagógica, que será detalhada posteriormente, com foco no estudo de matrizes, é necessário, neste momento, estabelecer as bases conceituais do conteúdo algébrico a ser explorado.

Embora a RME seja proposta para que o ensino parta de contextos realísticos, a sistematização dos conceitos fundamentais a seguir não apenas sustenta o conteúdo da nossa Sequência Didática, mas também expressa a profundidade e o rigor que buscamos desenvolver nos estudantes. Trata-se, assim, de uma preparação indispensável para que o docente conduza a jornada de matematização que propomos. Este capítulo organiza, portanto, os principais conhecimentos sobre matrizes, suas operações e propriedades, de acordo com o escopo do ensino médio.

3.1 Fundamentos da Aritmética e da Álgebra

A álgebra constitui uma linguagem universal para expressar, generalizar, resolver problemas e representar padrões. Sua importância vai além das aplicações Matemáticas, abrangendo diversas áreas do conhecimento, como a ciência da computação, a engenharia, a física e até mesmo as ciências sociais. Essas aplicações vão desde modelos e formulações teóricas até ferramentas práticas, como na criptografia e na teoria dos códigos.

Nos primeiros anos da escolarização, os estudantes são introduzidos às operações aritméticas fundamentais sobre os números naturais (adição, subtração, multiplicação e divisão) que associam dois números a um terceiro, de acordo com regras específicas. Nem todas essas operações são, entretanto, sempre válidas no conjunto dos números naturais. Por exemplo, $5 - 8$ não pertence a \mathbb{N} , e o mesmo ocorre com frações como $\frac{1}{2}$, o que mostra que determinadas operações não são fechadas nesse conjunto. Essa constatação conduz à necessidade de ampliar os conjuntos numéricos, incorporando outros, como, por exemplo, os inteiros, racionais, reais e complexos, cada um preservando ou estendendo novas propriedades. No estudo das operações aritméticas, é fundamental que os estudantes compreendam que as propriedades associadas a essas operações garantem consistência e estrutura ao raciocínio matemático.

Essas propriedades constituem a base para que os alunos compreendam que as operações Matemáticas não são apenas procedimentos mecânicos, mas também seguem regras gerais. Durante as práticas, ao perceberem essa regularidade, os estudantes conseguem transitar naturalmente da manipulação de números para a de símbolos e estruturas mais complexas, como expressões algébricas e, especificamente no Ensino Médio, matrizes. Nesse processo, passam também a reconhecer como as propriedades aritméticas se manifestam no contexto

matricial; algumas são mantidas, outras adaptadas, o que torna explícitos os conceitos fundamentais da álgebra.

Este capítulo apresenta, portanto, os conceitos centrais de álgebra e de matrizes voltados ao ensino médio, abordando suas operações, tipos, propriedades e aplicações. O objetivo é oferecer uma base sólida para que professores e alunos realizem corretamente operações com matrizes e compreendam seu papel em contextos práticos, como na resolução de sistemas lineares e na codificação de mensagens. Além disso, propõe uma reflexão sobre o pensamento algébrico, destacando que as estruturas Matemáticas, mesmo que abstratas, têm impacto direto nas tecnologias do cotidiano, como a segurança digital e a criptografia (fundamentos que serão explorados no próximo capítulo), por meio de atividades práticas e de uma sequência didática.

3.2 Definição de Matriz

O estudo das matrizes no Ensino Médio representa um marco importante no desenvolvimento do pensamento algébrico, pois amplia a noção de organização, representação e manipulação de informações numéricas. Além disso, permite uma conexão direta entre conceitos algébricos e aplicações reais, tornando a aprendizagem mais significativa para os estudantes.

As matrizes podem ser compreendidas como tabelas organizadas de elementos, dispostos em linhas e colunas. Essa organização permite representar e relacionar dados de forma mais estruturada. Por exemplo, ao coletar dados referentes ao número de irmãos, à idade e ao número de pessoas que vivem na mesma residência em uma turma formada por 6 alunos, podemos organizá-los em forma de uma tabela:

Tabela 1 – Organização de dados em linhas e colunas

Aluno	Idade (anos)	Número de irmãos	Pessoas na casa
1	16	2	4
2	15	1	3
3	16	3	5
4	17	0	2
5	15	2	4
6	16	1	3

Fonte: Elaboração própria (2025).

Ao abstrair os significados das linhas e colunas, obtemos uma matriz A de 6 linhas e 3 colunas; dizemos que ela tem tamanho 6×3 . De forma geral, toda matriz pode ser organizada em linhas e colunas em um formato $m \times n$ onde m indica o número de linhas e n o número de colunas:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 15 & 1 & 3 \\ 16 & 3 & 5 \\ 17 & 0 & 2 \\ 15 & 2 & 4 \\ 16 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{6 \times 3}.$$

Transformar uma tabela de dados em uma matriz é um passo fundamental para organizar as informações de forma sistemática, especialmente quando lidamos com diversas variáveis ou um grande número de observações. Denotamos uma matriz genérica por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que m representa o número de linhas e n o número de colunas.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1. A seguinte matriz A é 2×3 , pois possui 2 linhas e 3 colunas, ou seja, $m=2$ e $n=3$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

As matrizes podem ser compostas por números reais ou por quaisquer outros elementos, como polinômios e funções, conforme o contexto. Em geral, utilizam-se letras maiúsculas para denotar matrizes e, quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A , isto é, o número de linhas e colunas, usaremos a notação $A_{m \times n}$. Não obstante, as matrizes nesta dissertação serão apresentadas entre colchetes, embora também possam ser representadas entre parênteses:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right).$$

A partir dessa estrutura geral, diferentes configurações podem surgir, dependendo da quantidade de linhas, colunas e dos elementos que as compõem. Tais características conferem propriedades específicas às matrizes, tornando-as úteis em diversos contextos da Matemática. Por exemplo, em computação, matrizes linha e coluna são usadas para representar vetores; já as matrizes quadradas aparecem com frequência em contextos de geometria, estatística e criptografia. A seguir, são explorados alguns desses tipos fundamentais.

3.2.1 Tipos Especiais de Matrizes

Ao ensinar matrizes, é necessário observar que existem algumas que, seja pela quantidade de linhas e colunas, seja pela natureza de seus elementos, possuem propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer.

- **Matriz linha:** possui apenas uma linha

Exemplo 2.

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz coluna:** possui apenas uma coluna

Exemplo 3.

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz quadrada:** tem o mesmo número de linhas e colunas ($m = n$)

Exemplo 4.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz identidade:** denotada por I_n , uma matriz quadrada com 1 na diagonal principal e 0 nos demais elementos.

Exemplo 5.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz nula:** denotada por O , uma matriz com todos os elementos iguais a zero

Exemplo 6.

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz diagonal:** uma matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

Exemplo 7.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz triangular superior:** uma matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos

Exemplo 8.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz triangular inferior:** uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal principal são nulos

Exemplo 9.

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Além dessas matrizes, existem outros tipos de matrizes, como, por exemplo, escalares, simétricas, anti-simétricas, ortogonais, idempotentes, inversíveis, singulares, esparsas, cheias, de postos completos, degeneradas, por blocos, entre outras.

Uma vez compreendidos os diferentes tipos de matrizes, é natural que os estudantes perguntem como podemos compará-las. A noção de igualdade entre matrizes surge, portanto, como um conceito fundamental. Ela garante que duas representações sejam equivalentes não apenas em forma, mas também em conteúdo. Esse princípio é especialmente útil em contextos de resolução de problemas, nos quais a comparação de resultados é feita elemento a elemento.

3.2.2 Igualdade de Matrizes

A igualdade entre matrizes é definida de forma elemento a elemento: duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de mesma ordem são iguais $A = B$ se, e somente se, todos os elementos correspondentes forem iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j .

Exemplo 10.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como A e B têm a mesma ordem e os mesmos elementos, $A = B$.

O conceito de igualdade também revela a riqueza do estudo das matrizes: não se trata apenas de verificar números, mas de reconhecer padrões e relações entre variáveis. Ao resolver sistemas de equações por meio da comparação de elementos correspondentes, por exemplo, é possível transformar problemas algébricos abstratos em situações mais organizadas e visuais. Essa transição ilustra como as matrizes podem servir de ponte entre a Aritmética e a Álgebra, ampliando as possibilidades de interpretação e análise.

Exemplo 11. Considerando, por exemplo, a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} 2x + 1 & 3y - 4 \\ z & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & y + 2 \\ 2z - 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

podemos concluir que:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 7 \\ 3y - 4 = y + 2 \\ z = 2z - 1 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Ao resolver esse sistema, tem-se que:

$$x = 3, \quad y = 3, \quad z = 1.$$

3.3 Lei de Formação de uma Matriz

Compreender a igualdade entre matrizes é um passo fundamental para interpretar relações entre grandezas e resolver problemas que envolvem múltiplas variáveis de forma organizada. O próximo avanço consiste em definir estruturas matriciais a partir de regras gerais, ou seja, por meio de leis de formação, o que aproxima o aluno da generalização algébrica característica do Ensino Médio. A *lei de formação* das matrizes a seguir nos permite definir os elementos de uma matriz a partir de fórmulas que envolvem os índices de linha e coluna, ampliando as possibilidades de construção e de análise dessas estruturas.

Uma matriz pode ser definida por meio de uma lei de formação, ou seja, uma expressão que determina os elementos a_{ij} a partir dos índices i e j .

Exemplo 12. Considere $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ uma matriz definida por $a_{ij} = i + j$, para todo $i, j = 1, 2, 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 13. Seja $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, uma matriz dada por $b_{ij} = 2i - j$, para todo $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Após identificar diferentes tipos de matrizes e compreender como compará-las, o próximo passo é analisar as operações que podem ser realizadas com elas. Essas operações generalizam propriedades numéricas para uma estrutura ampliada, reforçando a ideia de que a álgebra trabalha com objetos e regras que transcendem os números naturais e reais.

3.4 Operações com Matrizes

O estudo das matrizes não se resume apenas à sua definição estrutural, mas também às operações que podem ser realizadas entre elas. De acordo com Boldrini *et al.* (1986), ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de realizar certas operações, como, por exemplo, a produção em uma plantação, o valor dos produtos e as vitaminas presentes em alimentos. Assim como acontece com os números reais, podemos somar, subtrair, multiplicar por um número (escalar) ou multiplicar duas matrizes entre si. Cada uma dessas operações possui regras próprias que devem ser compreendidas para evitar erros e para que o aluno perceba a utilidade das matrizes na resolução de problemas. Entre as operações mais comuns, destacam-se a adição, a subtração, a multiplicação por escalar, a multiplicação entre matrizes e o cálculo da matriz transposta.

3.4.1 Adição e Subtração de Matrizes

Por definição, para que duas matrizes possam ser somadas ou subtraídas, é necessário que tenham a mesma ordem, isto é, o mesmo número de linhas e colunas. Na soma de matrizes, cada elemento da primeira matriz é somado ao elemento que ocupa a mesma posição na segunda matriz. Sendo assim, dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ de mesma ordem, define-se a matriz $C = A + B$ como a matriz de mesma ordem $m \times n$ cujos elementos são obtidos pela soma dos elementos correspondentes de A e B , isto é,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

De modo análogo, a subtração $D = A - B$ é definida por:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplo 14. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa interpretação algébrica fortalece a compreensão de que matrizes podem representar informações de forma organizada no cotidiano, e a soma e a subtração tornam-se ferramentas naturais para combinar ou comparar dados.

Exemplo 15. Situação-Problema: Soma de Matrizes – Suponha que, em uma sala de aula com 4 alunos, queiramos registrar, em dois dias diferentes, a quantidade de cadernos e lápis que cada aluno possui. Podemos organizar esses dados em duas tabelas, conforme a seguir:

Tabela 2 – Materiais utilizados pelos alunos no dia 1

Aluno	Cadernos	Lápis
1	2	5
2	3	4
3	1	2
4	4	3

Fonte: Elaboração própria (2025).

Tabela 3 – Materiais utilizados pelos alunos no dia 2

Aluno	Cadernos	Lápis
1	1	2
2	2	3
3	2	1
4	1	4

Fonte: Ebaloração própria (2025).

Transformando essas tabelas em matrizes, temos então:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, a soma das matrizes representa a quantidade total de materiais nos dois dias:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 1 & 5 + 2 \\ 3 + 2 & 4 + 3 \\ 1 + 2 & 2 + 1 \\ 4 + 1 & 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

A matriz resultante $A + B$ nos mostra, de forma organizada, o total de cadernos e lápis de cada aluno, considerando ambos os dias.

Essa operação é bastante direta e ajuda os alunos a se familiarizarem com o conceito de matrizes. Ao usar exemplos numéricos simples em sala de aula, os estudantes percebem

que somar matrizes funciona de maneira semelhante à soma de números reais, o que facilita, a partir daí, a compreensão das operações em estruturas maiores e mais complexas.

Após compreender a soma e a subtração de matrizes, é importante reconhecer que também podemos alterar proporcionalmente seus valores, mantendo sua organização estrutural. Surge, então, a multiplicação de uma matriz por um número real.

3.4.2 Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

Outra operação que envolve matrizes é a multiplicação por um número real (escalar). Nesse caso, cada elemento da matriz é multiplicado por esse número. Trata-se de uma forma de ampliar ou reduzir proporcionalmente os valores da matriz. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k , define-se:

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}.$$

Exemplo 16. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

temos então

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 17. Situação–problema: Produto de Matriz por Escalar – *Uma confeitaria produz diariamente diferentes tipos de doces, como brigadeiros, beijinhos e cajuzinhos. Durante uma semana, a produção de uma das turmas é registrada na tabela abaixo, mostrando a quantidade de doces produzidos em cada dia (segunda a quarta-feira):*

Tabela 4 – Produção de doces na semana

Doce/Dia	Segunda	Terça	Quarta
Brigadeiro	10	12	15
Beijinho	8	9	7
Cajuzinho	5	6	4

Fonte: Elaboração própria (2025).

A confeitaria decidiu dobrar a produção da semana seguinte. Para isso, multiplicamos toda a matriz de produção por 2. Denotando a matriz de produção por

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

temos:

$$2 \cdot P = 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 24 & 30 \\ 16 & 18 & 14 \\ 10 & 12 & 8 \end{bmatrix}.$$

Observamos que cada elemento da matriz foi multiplicado por 2, o que representa a duplicação da produção de cada tipo de doce em cada dia. Essas operações são fundamentais na criptografia e na modelagem Matemática, pois muitas vezes precisamos “ajustar” os valores de uma matriz sem alterar sua estrutura, como, por exemplo, seu tamanho. Entretanto, existem situações em que combinar dados ou relações exige mais do que apenas ajustar ou somar valores: é necessário integrar informações de naturezas distintas. É nesse contexto que a multiplicação de matrizes se torna essencial.

3.4.3 Multiplicação de Matrizes

Outra operação fundamental na álgebra linear, que funciona de forma diferente da soma e da subtração, é a multiplicação de matrizes. Em vez de combinar elementos que ocupam a mesma posição, essa operação envolve as linhas da primeira matriz e as colunas da segunda. sejam duas matrizes

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad \text{e} \quad B = (b_{ij})_{n \times p},$$

o produto de AB é a matriz $C = AB = (c_{ij})_{m \times p}$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Observa-se que o produto só pode ser efetuado se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda, ou seja, n . Além disso, cada elemento c_{ij} da matriz produto é obtido multiplicando os elementos da i -ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna de B e somando os produtos. (Boldrini *et al.*, 1986). A multiplicação de matrizes, de fato, exige uma atenção redobrada, pois não é realizada elemento a elemento. O resultado é obtido ao combinar as linhas da primeira matriz com as colunas da segunda, o que costuma ser um desafio inicial para os alunos.

Exemplo 18. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, observamos que cada elemento do produto é obtido pela combinação das linhas de A com as colunas de B , o que evidencia a regra de multiplicação de matrizes. Esse mecanismo torna a multiplicação de matrizes uma ferramenta para relacionar dados de naturezas distintas. O exemplo a seguir ilustra um caso de aplicação em que a multiplicação de matrizes surge ao combinar informações de naturezas distintas.

Exemplo 19. Situação-problema: Vendas de produtos – Uma loja vende três produtos P_1, P_2, P_3 . Em uma semana, dois vendedores registraram as seguintes quantidades vendidas:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix},$$

em que a primeira linha corresponde ao vendedor 1 e a segunda linha ao vendedor 2. O preço em reais de cada produto é dado pela matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando as matrizes Q e P , obtemos:

$$Q \cdot P = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 20 + 5 \cdot 15 + 8 \cdot 30 \\ 6 \cdot 20 + 9 \cdot 15 + 7 \cdot 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 475 \\ 495 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que o vendedor 1 vendeu um total de R\$475, enquanto o vendedor 2 alcançou um total de R\$495 em vendas.

Exemplo 20. Situação-problema: Fábrica de doces – Uma fábrica de doces produz bombons em dois sabores (chocolate ao leite e chocolate meio amargo), nos modelos básico, luxo e premium. A Tabela 5 apresenta a produção de bombons no mês de outubro de 2005, e a Tabela 6 apresenta a quantidade de ingredientes utilizados em cada tipo de bombom no mesmo mês.

Tabela 5 – Produção de bombons em outubro de 2005

Sabor / Modelo	Básico	Luxo	Premium
Ao leite	3	5	4
Meio amargo	4	3	5

Fonte: Elaboração própria (2025).

Seja F a matriz cujas linhas representam os tipos de ingredientes (açúcar, leite em pó e cacau) e as colunas, os sabores, conforme apresentados na Tabela 6. E P é a matriz cujas linhas representam os sabores dos bombons e as colunas, os modelos, conforme apresentados

Tabela 6 – Ingredientes usados em outubro de 2005

Ingrediente / Sabor	Ao leite	Meio amargo
Açúcar (kg)	10	12
Leite em pó (kg)	8	8
Cacau (kg)	4	6

Fonte: Elaboração própria (2025).

na Tabela 5. Diante disso, a quantidade de ingredientes usados nos bombons é obtida pela multiplicação das matrizes $F \cdot P$:

Efetuando as multiplicações:

$$\begin{aligned}
 F \cdot P &= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10 \cdot 3 + 12 \cdot 4 & 10 \cdot 5 + 12 \cdot 3 & 10 \cdot 4 + 12 \cdot 5 \\ 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4 & 8 \cdot 5 + 8 \cdot 3 & 8 \cdot 4 + 8 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 & 4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 78 & 86 & 100 \\ 56 & 64 & 72 \\ 36 & 38 & 46 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

O resultado apresenta a quantidade de ingredientes (em kg) utilizada em cada modelo (básico, luxo e premium), organizados por tipo (açúcar, leite em pó e cacau). Assim, para o **modelo premium**, obtemos: açúcar 100 kg, leite em pó 72 kg e cacau 46 kg. Logo, o total de ingredientes utilizados no modelo premium foi $100 + 72 + 46 = 218$.

Exemplo 21. Situação-problema: Transformação geométrica – Na Geometria Analítica e na Computação Gráfica, a multiplicação de matrizes é usada para realizar transformações em figuras no plano. Considere a Matriz X :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

representando dois pontos no plano. Se aplicarmos a matriz de rotação de 90° no sentido anti-horário:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o produto XR fornece as coordenadas dos pontos após a rotação

$$XR = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o ponto $(1, -1)$ é transformado em $(2, 3)$ e o ponto $(2, 3)$ em $(-1, 1)$, ilustrando como a multiplicação de matrizes permite aplicar transformações geométricas de forma sistemática.

Essa operação, embora mais trabalhosa, é uma das mais importantes da álgebra linear, das transformações geométricas e dos algoritmos de criptografia. Sob a perspectiva da RME, esta é uma forma concreta de fazer Matemática, pois, ao multiplicar matrizes, o aluno percebe que essas estruturas não servem apenas para “armazenar números”, mas também para transformar informações de maneira diferente. Além dessas operações, existem procedimentos que reorganizam a matriz sem alterar seus valores. Um exemplo é a transposição, que desempenha um papel importante tanto em propriedades simétricas quanto em manipulações algébricas posteriores, servindo como uma ferramenta fundamental na análise e no tratamento de matrizes.

3.4.4 Transposta de uma Matriz

Outra operação bastante utilizada é a transposição. A matriz transposta, indicada por A^T , é obtida ao trocar as linhas pelas colunas. Apesar de ser simples, esse conceito tem grande importância, e a transposta aparece naturalmente em problemas de álgebra linear, geometria analítica, estatística e até mesmo em programação de computadores, onde os dados frequentemente precisam ser reorganizados. Na sala de aula, também é uma operação com a qual os estudantes têm facilidade para compreender.

Formalmente, se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, sua transposta é $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$, obtida exatamente trocando as linhas de A pelas colunas correspondentes.

Exemplo 22. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 23. *Uma escola registrou o número de alunos que participaram de três atividades diferentes (Matemática, Ciências e Esportes) em duas turmas (Turma A e Turma B) durante uma semana. Os dados são organizados na tabela abaixo:*

Tabela 7 – Participação dos alunos por atividade e turma

Atividade	Turma A	Turma B
Matemática	12	15
Ciências	8	10
Esportes	5	7

Fonte: Elaboração própria (2025).

Organizando esses dados como uma matriz $A_{3 \times 2}$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

É possível reorganizar os dados de modo que cada linha represente uma turma e cada coluna, uma atividade. Para isso, basta transportar a matriz original, trocando as linhas pelas colunas:

$$A^T = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 5 \\ 15 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Todas essas operações elementares fornecem a base para conceitos mais avançados, nos quais os estudantes precisam manipular várias operações simultaneamente. Em muitos casos, o conhecimento das propriedades das operações facilita a resolução de problemas, tornando o processo mais intuitivo e compreensível. A seguir, apresentaremos as propriedades operatórias das matrizes, que ajudam a organizar e simplificar essas manipulações. Ao dominar essas operações elementares, torna-se necessário compreender como elas se comportam e se relacionam entre si. Assim como no conjunto dos números reais, algumas propriedades são preservadas, enquanto outras precisam ser adaptadas ao contexto matricial.

3.5 Propriedades das Operações com Matrizes

As operações com matrizes possuem propriedades semelhantes às operações aritméticas, embora apresentem particularidades decorrentes da estrutura matricial. A compreensão dessas propriedades é fundamental para a resolução de problemas envolvendo matrizes em diferentes contextos.

O Quadro 8 sintetiza as principais propriedades das operações matriciais. No contexto da adição, preservam-se as propriedades de fechamento, comutatividade e associatividade, bem como a existência de elementos nulos e opostos. Já no contexto da multiplicação, embora se mantenham as propriedades, como a associatividade e a distributividade em relação à adição, outras propriedades deixam de ser válidas. Por exemplo, a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa, uma vez que, em geral, para duas matrizes A e B , não se tem $AB = BA$.

Quadro 8 – Comportamento das propriedades aritméticas no contexto de matrizes

Propriedade	Aritmética	Matrizes
Fechamento	A operação entre dois números do conjunto resulta em outro número do mesmo conjunto.	A soma de matrizes de mesma ordem e a multiplicação entre matrizes compatíveis resultam em matrizes do conjunto considerado: $A + B$, AB . A multiplicação por escalar também preserva o conjunto.
Associatividade	$(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$; a multiplicação de matrizes é associativa: $(AB)C = A(BC)$.
Comutatividade	$a + b = b + a$, $ab = ba$	A adição de matrizes é comutativa: $A + B = B + A$. A multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa: $AB \neq BA$.
Elemento neutro	$a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$	A matriz nula é o elemento neutro da adição; a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação: $A + 0 = A$, $AI = IA = A$.
Elemento oposto	$a + (-a) = 0$	Para toda matriz A , existe a matriz oposta $-A$, tal que $A + (-A) = 0$.
Elemento inverso	$a \cdot a^{-1} = 1$	Nem toda matriz possui inversa multiplicativa; apenas matrizes quadradas não singulares admitem inversa: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
Distributividade	$a(b + c) = ab + ac$	A multiplicação de matrizes é distributiva em relação à adição: $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$.
Multiplicação por escalar	$k(a + b) = ka + kb$	A multiplicação por escalar preserva as propriedades distributivas e associativas: $k(A + B) = kA + kB$ e $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Exemplo 24 (Não comutatividade da multiplicação de matrizes). – *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando os produtos AB e BA , obtém-se:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $AB \neq BA$, conclui-se que a multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa.

As operações com matrizes abrem caminho para novos conceitos que permitem analisar se uma matriz pode ser invertida e determinar soluções de sistemas lineares. Entre esses conceitos, destaca-se o determinante, cuja compreensão é fundamental para as aplicações que serão exploradas ao longo desta dissertação.

3.6 Matrizes e Determinantes

Registros históricos indicam que o cálculo de determinantes remonta há muitos séculos. Evidências do uso de procedimentos relacionados à resolução de sistemas lineares utilizando matrizes e determinantes podem ser encontradas por volta de 250 a.C., no antigo texto chinês *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, de autor desconhecido. Na China antiga, tais conceitos já eram conhecidos, enquanto no Ocidente começaram a ser explorados de forma mais esporádica apenas a partir do século XVII. O estudo dos determinantes teve início com as obras de G. W. Leibniz (1646–1716), que foi um dos primeiros a discutir o tema, e, mais tarde, Gabriel Cramer (1704-1752) apresentou um método para a resolução de sistemas lineares por meio de determinantes, conhecido atualmente como *Regra de Cramer*, publicado em 1750. Contudo, foi apenas no século XIX que a teoria dos determinantes passou a ser investigada de maneira mais sistemática, especialmente a partir do tratado de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), em 1812, seguido pelas contribuições de Carl Gustav Jacobi (1804–1851). (Boldrini *et al.*, 1986).

A partir desse período, o conceito de determinante difundiu-se amplamente, mostrando-se extremamente útil para diversas situações, como a verificação da inversibilidade de uma matriz ou a determinação de soluções de sistemas lineares, temas que serão explorados nas próximas seções. Inicialmente, serão abordados os conceitos preliminares de determinantes conforme apresentados no ensino médio.

É importante destacar que os determinantes são definidos exclusivamente para matrizes quadradas, uma vez que o determinante está associado a propriedades geométricas e algébricas que exigem uma correspondência entre linhas e colunas. Para matrizes não quadradas, essas propriedades não são consistentes e, portanto, o determinante não existe. Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, o determinante de A , denotado por $\det(A)$ ou $|A|$, é um valor numérico obtido a partir de seus elementos, calculado segundo regras específicas que dependem da ordem da matriz.

Por definição, se $A = [a_{11}]$ é uma matriz 1×1 , então $\det(A) = a_{11}$. E, para uma matriz 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

o cálculo do determinante é realizado multiplicando-se os elementos da diagonal principal (destacada em vermelho) e subtraindo-se o produto dos elementos da diagonal secundária (destacada em azul):

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

Exemplo 25. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\det(A) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 8 - 3 = 5.$$

No caso de matrizes 3×3 , o determinante pode ser encontrado utilizando a **Regra de Sarrus**, procedimento no qual as duas primeiras colunas da matriz são copiadas à direita, facilitando o cálculo por meio de somas e subtrações de produtos diagonais. O procedimento é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 26. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Pela Regra de Sarrus, no primeiro passo, repetimos à direita as duas primeiras colunas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

e somamos os produtos das diagonais principais (em vermelho):

$$S_1 = (1 \cdot 4 \cdot 6) + (2 \cdot 5 \cdot 1) + (3 \cdot 0 \cdot 0) = 34.$$

Em seguida, identificamos as diagonais secundárias (em azul)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e somamos os produtos das diagonais secundárias

$$S_2 = (3 \cdot 4 \cdot 1) + (2 \cdot 0 \cdot 6) + (1 \cdot 5 \cdot 0) = 12.$$

Sendo assim, o determinante da matriz A é dado como a diferença das somas encontradas, isto é,

$$\det(A) = S_1 - S_2 = 22$$

Até o momento, foram apresentados os determinantes de matrizes 1×1 , 2×2 e 3×3 . De maneira análoga, é possível propor um procedimento para o cálculo do determinante de matrizes de ordem superior a 3, porém esse processo se tornaria muito trabalhoso. Por isso, será explorado um teorema que pode ser utilizado para calcular determinantes de matrizes de qualquer ordem. Antes disso, é fundamental introduzir o conceito de **cofator**, que desempenha um papel central nesse processo.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n . Para cada elemento a_{ij} de A , define-se a matriz M_{ij} , denominada *menor complementar*, como a matriz obtida de A pela eliminação da linha i e da coluna j . O cofator correspondente ao elemento a_{ij} é dado por:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

em que o fator $(-1)^{i+j}$ garante a alternância de sinais na construção da matriz de cofatores.

Exemplo 27. Considere a matriz A de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para começar, calculamos o cofator do elemento a_{11} . Para isso, ao eliminar a primeira linha e coluna da matriz A encontramos o menor complementar M_{11} cujo determinante é dado por:

$$\det(M_{11}) = \det \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 7 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 42 - 15 = 27.$$

Sendo assim, C_{11} é dado por:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 27 = 27.$$

O Quadro 1 abaixo apresenta todos os cofatores dos elementos da matriz A .

Quadro 1 – Cofatores dos elementos da matriz A do Exemplo 19

Elemento	Cálculo		Valor
C_{11}	$(-1)^{1+1} \cdot$	$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	$7 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 27$
C_{12}	$(-1)^{1+2} \cdot$	$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$	$-(0 \cdot 6 - 5 \cdot (-1)) = -5$
C_{13}	$(-1)^{1+3} \cdot$	$\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$	$0 \cdot 3 - 7 \cdot (-1) = 7$
C_{21}	$(-1)^{2+1} \cdot$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	$-(1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = 6$
C_{22}	$(-1)^{2+2} \cdot$	$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$	$(-2) \cdot 6 - 4 \cdot (-1) = -8$
C_{23}	$(-1)^{2+3} \cdot$	$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$	$-[(-2) \cdot 3 - 1 \cdot (-1)] = 5$
C_{31}	$(-1)^{3+1} \cdot$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$	$1 \cdot 5 - 4 \cdot 7 = -23$
C_{32}	$(-1)^{3+2} \cdot$	$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$	$-[(-2) \cdot 5 - 4 \cdot 0] = 10$
C_{33}	$(-1)^{3+3} \cdot$	$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$	$(-2) \cdot 7 - 1 \cdot 0 = -14$

Fonte: Elaboração própria (2025).

3.6.1 Teorema de Laplace

Uma vez estabelecido o conceito de cofator, podemos enunciar o Teorema de Laplace, que permite calcular o determinante de uma matriz de qualquer ordem a partir de seus cofatores. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $n > 2$. O determinante de A pode ser calculado como a soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna, multiplicados pelos seus respectivos cofatores. Em notação Matemática, para a i -ésima linha ou a j -ésima coluna, temos:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (\text{expansão pela } i\text{-ésima linha}),$$

ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (\text{expansão pela } j\text{-ésima coluna}).$$

Exemplo 28. Seja a matriz A de ordem 4 abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\det(A)$ pelo Teorema de Laplace, é conveniente escolher uma coluna ou linha com zeros. Observamos que a 3ª coluna tem o maior número de elementos nulos, logo, só precisamos calcular os cofatores relativos a $a_{23} = 1$ e $a_{43} = 2$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^4 a_{i3}C_{i3} = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}.$$

Como $a_{13} = 0$ e $a_{33} = 0$, esses termos se anulam, restando

$$\det(A) = a_{23}C_{23} + a_{43}C_{43}.$$

Recordando $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, onde M_{ij} é o determinante do menor obtido ao eliminar a i -ésima linha e a j -ésima coluna, calculamos os menores complementares M_{23} e M_{43} . Podemos ver simplesmente que:

$$M_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 3) - 2 \cdot (3 \cdot 5 - 2 \cdot 2) + 1 \cdot (3 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -16,$$

$$M_{43} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) - 2 \cdot (0 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 13.$$

Portanto

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{2+3}M_{23} + 2 \cdot (-1)^{4+3}M_{43} = 16 - 26 = -10$$

3.6.2 Regra de Chió

No cálculo do determinante de uma matriz quadrada M , de ordem $n \geq 3$, é interessante reduzir a ordem de M , isto é, obter uma matriz N , de ordem $n - 1$, de modo que $\det(M) = \det(N)$. Seja $M = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 3$ que possui um elemento $a_{ij} = 1$. A **Regra de Chió** permite calcular $\det(M)$ obedecendo aos seguintes passos:

1. Eliminamos a linha i e a coluna j que se cruzam no elemento $a_{ij} = 1$.
2. Para cada elemento a_{kl} restante da matriz, subtraímos o produto dos elementos correspondentes da linha i e da coluna j eliminados no item anterior.
3. Com as diferenças encontradas construímos uma nova matriz N , de ordem $(n - 1)$, cujo determinante satisfaz

$$\det(M) = (-1)^{i+j} \det(N).$$

Exemplo 29. Calcule o determinante da matriz M :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

utilizando a Regra de Chió.

Observamos que o elemento $a_{11} = 1$ está na posição $(i, j) = (1, 1)$. Portanto, eliminamos a primeira linha e a primeira coluna. Na sequência, construímos N subtraindo, em cada posição (k, l) , o produto $a_{k1} \cdot a_{1l}$:

$$N = \begin{bmatrix} 2 - (4 \cdot 2) & 3 - (4 \cdot 0) & 7 - (4 \cdot 8) \\ 4 - (3 \cdot 2) & 1 - (3 \cdot 0) & 6 - (3 \cdot 8) \\ 3 - (2 \cdot 2) & 4 - (2 \cdot 0) & 5 - (2 \cdot 8) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$N = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -25 \\ -2 & 1 & -18 \\ -1 & 4 & -11 \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\det(M) = (-1)^{1+1} \det(N) = \det(N).$$

Agora, ao calcular $\det(N)$, temos então:

$$\begin{aligned} \det(N) &= (-6) \begin{vmatrix} 1 & -18 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & -18 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} + (-25) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -203 \end{aligned}$$

Matriz Inversa

A relação entre o determinante de uma matriz e a existência de sua inversa é fundamental. É justamente pelo valor do determinante que verificamos a possibilidade de uma matriz representar transformações reversíveis. Dada uma matriz quadrada A de ordem n , dizemos que A é **invertível** (ou não singular) se existir outra matriz A^{-1} , também de ordem n , tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

Vale ressaltar que nem toda matriz quadrada possui inversa. Uma condição fundamental para que a inversa de uma matriz A exista é que o seu determinante seja diferente de zero, em outras palavras,

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ é invertível.}$$

Exemplo 30. *Seja a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é encontrar uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Da equação matricial $A \cdot B = I$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

consequentemente,

$$\begin{bmatrix} 2x + 1z & 2y + 1w \\ 5x + 3z & 5y + 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comparando os elementos correspondentes, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + w = 0 \\ 5x + 3z = 0 \\ 5y + 3w = 1 \end{cases}$$

Ao considerar a primeira e a terceira equação do sistema:

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 5x + 3z = 0 \end{cases}$$

obtemos $x = 3$, $z = -5$, e ao considerar a segunda e a quarta equação:

$$\begin{cases} 2y + w = 0 \\ 5y + 3w = 1 \end{cases}$$

encontramos as soluções $y = -1$, $w = 2$. Tendo, então, os elementos da matriz B , podemos escrever a matriz inversa:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Encontrar a inversa de uma matriz consiste em determinar outra matriz que, ao ser multiplicada pela matriz original, resulta na matriz identidade. O conhecimento da matriz inversa, bem como das operações relacionadas abordadas neste capítulo, é em teoria de códigos, para decifrar uma mensagem corretamente, garantindo que apenas destinatários autorizados tenham acesso ao conteúdo. Essa aplicação evidencia a importância das matrizes não apenas no contexto da Matemática, mas também em contextos práticos ligados à segurança da informação, tema que será explorado em um dos tópicos do próximo capítulo.

Ao compreender operações e propriedades envolvendo matrizes, torna-se natural avançar para uma de suas principais aplicações no Ensino Médio: a resolução de sistemas lineares. Essas estruturas algébricas permitem organizar as relações entre variáveis e analisar situações que dependem da simultaneidade de condições, tornando o estudo das matrizes ainda mais significativo.

3.7 Sistemas Lineares e Discussão de Soluções

O estudo de sistemas lineares estabelece uma ponte direta entre os conceitos de matrizes e determinantes. Um sistema linear é formado por equações nas quais as incógnitas aparecem apenas com expoente 1 e sua solução é o conjunto de valores que satisfaz todas as equações simultaneamente. A representação matricial permite organizar os coeficientes e aplicar métodos mais estruturados de resolução, como o escalonamento e a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

3.7.1 Métodos de Resolução

No Ensino Médio, o estudo de sistemas lineares geralmente é desenvolvido por meio de três estratégias principais: o método da substituição, o método da adição (eliminação) e o método do escalonamento (eliminação de Gauss). A seguir, serão apresentados esses métodos de resolução, acompanhados de exemplos que auxiliam na compreensão de sua aplicação no Ensino Médio.

a) Método da Substituição

Este método consiste em isolar uma das incógnitas de uma equação do sistema e substituí-la nas demais, transformando o sistema original em um sistema equivalente com menos variáveis.

Exemplo 31. Resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se $x = 2 - y$. Substituindo essa expressão na primeira:

$$(2 - y) - 2y = -4 \Rightarrow 2 - 3y = -4 \Rightarrow y = 2.$$

Retornando à expressão de x , tem-se $x = 2 - y = 0$. Assim, a solução do sistema é $(x, y) = (0, 2)$.

b) Método da Adição

Já o método da adição baseia-se na combinação linear das equações do sistema, de modo a eliminar pelo menos uma incógnita por meio da soma ou subtração das equações.

Exemplo 32. Resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, obtém-se:

$$(2x + y) + (3x - y) = 9 + 6 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3.$$

Substituindo esse valor na primeira equação, tem-se $2(3) + y = 9$, isto é, $y = 3$.

c) Método do Escalonamento

Por sua vez, o método do escalonamento organiza o sistema linear por meio de uma matriz aumentada. A partir dessa representação e utilizando as operações elementares sobre as linhas (ou colunas), transformamos a matriz em uma forma escalonada, geralmente triangular superior.

Exemplo 33. Resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

A matriz aumentada é formada pela junção da matriz dos coeficientes das variáveis e do vetor dos termos independentes, separadas pelo símbolo "|". Ou seja, em um sistema linear $Ax = b$, a matriz aumentada é dada por $[A|b]$. Considerando o sistema de equações linear, a matriz aumentada correspondente é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

Agora, aplicamos as operações elementares sobre as linhas, subtraímos duas vezes a linha 1 da linha 2 e subtraímos três vezes a linha 1 da linha 3:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1,$$

A matriz resultante será:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 4 & 5 \end{array} \right]$$

Agora, subtraímos a linha 2 da linha 3 para zerar a segunda coluna da terceira linha:

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2,$$

Com essa operação elementar, a matriz resultante será:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

Observamos que a matriz resultante agora está em forma triangular superior, o que facilita significativamente a resolução do sistema. Da terceira linha, obtemos $z = 2$. Substituímos esse valor na segunda linha para obter $y = \frac{3}{5}$. Finalmente, substituímos os valores de y e z na primeira linha para obter $x = \frac{9}{5}$.

3.7.2 Regra de Cramer

Outro método de resolução de sistemas lineares é a Regra de Cramer. Essa regra é um método muito útil para resolver sistemas lineares, especialmente quando o sistema tem um número reduzido de equações e incógnitas. O método baseia-se no cálculo de determinantes e permite encontrar diretamente as soluções de um sistema de equações lineares, sem precisar fazer substituições ou adições de equações envolvidas.

Seja $Ax = b$ um sistema linear. A ideia central da Regra de Cramer é que cada incógnita pode ser determinada a partir dos determinantes. Para isso, substituímos a coluna correspondente a cada incógnita pela coluna dos termos independentes, b , e calculamos o determinante da matriz resultante. Para ilustrar a aplicação da Regra de Cramer, consideramos um sistema linear simples com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Sendo assim, temos a matriz dos coeficientes A e a coluna dos termos independentes, b dados por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

A Regra de Cramer estabelece que se $\det(A) \neq 0$, então o sistema possui uma solução única. Neste caso, as soluções x e y são dadas por:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad \text{e} \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},$$

em que A_1 e A_2 são as matrizes obtidas pela substituição, respectivamente, da primeira e da segunda coluna de A pelo vetor b , isto é,

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 34. Resolver o seguinte sistema de linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}.$$

Neste exemplo, a matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Substituindo a primeira coluna de A pelo vetor dos termos independentes, obtém-se:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

com determinante

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

De modo análogo, podemos ver que $\det(A_2) = -7$.

Sendo assim, aplicando a Regra de Cramer, obtemos:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-14}{-7} = 2 \quad \text{e} \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1,$$

portanto, a solução do sistema é $(x,y) = (2,1)$.

A Regra de Cramer pode ser generalizada para sistemas lineares de ordem $n \times n$, desde que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero. Nessa situação, cada incógnita é obtida pela razão entre o determinante da matriz obtida pela substituição das colunas correspondentes pelos termos independentes e o determinante da matriz dos coeficientes do sistema. Apesar de sua simplicidade, a aplicação prática da regra torna-se cada vez mais complexa à medida que a ordem do sistema aumenta, pois o cálculo de determinantes de ordens elevadas exige um esforço computacional significativo. Por essa razão, métodos como

o escalonamento ou a eliminação de Gauss são geralmente mais eficientes do ponto de vista computacional.

3.7.3 Classificação de Sistemas

A classificação de um sistema linear está diretamente relacionada ao valor do determinante da matriz dos coeficientes. Essa relação é fundamental, pois o determinante indica se a matriz é ou não invertível. Quando $\det(A) \neq 0$, a matriz admite inversa e, portanto, o sistema possui uma única solução, uma vez que é possível escrever $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Por outro lado, quando $\det(A) = 0$, a matriz não é invertível e, nesse caso, não é possível garantir a existência de uma solução única, sendo necessário analisar a consistência do sistema.

Dizemos que um sistema é **consistente** quando admite pelo menos uma solução (única ou infinita) e **inconsistente** quando não admite nenhuma solução. Sabe-se que no caso de sistemas lineares com duas incógnitas, cada equação do sistema pode ser interpretada geometricamente como uma reta no plano cartesiano. Assim, a solução do sistema corresponde aos pontos de interseção dessas retas, o que permite visualizar três possibilidades distintas:

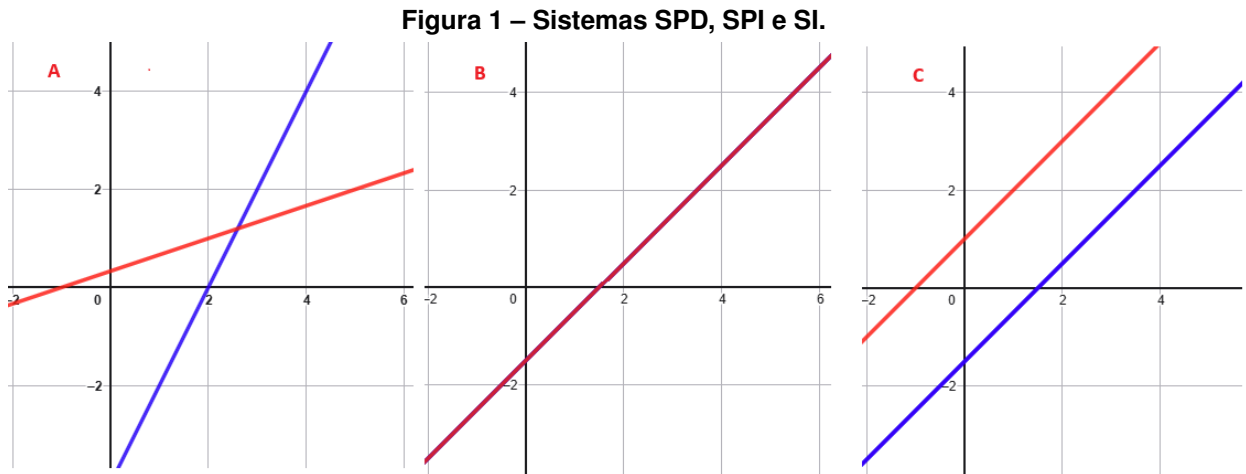
- **Sistema Possível e Determinado (SPD):** ocorre quando $\det(A) \neq 0$. Nesse caso, existe uma única solução. Geometricamente, as retas se cruzam em um único ponto (Figura 1 (A)).
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** ocorre quando $\det(A) = 0$ e o sistema admite infinitas soluções. Geometricamente, isso corresponde a duas retas coincidentes, isto é, a mesma reta. Em outras palavras, uma equação pode ser obtida a partir da outra, multiplicando-a por um escalar. Assim, em vez de um único ponto de interseção, temos infinitos pontos de interseção, todos os pontos da reta (Figura 1 (B)).
- **Sistema Impossível (SI):** ocorre quando $\det(A) = 0$ e o sistema não admite solução. Nesse caso, as equações são inconsistentes entre si. Geometricamente, as equações representam retas paralelas no plano, que não têm ponto de interseção (Figura 1 (C)).

Exemplo 35. *Discutir o seguinte sistema linear em função do parâmetro a :*

$$\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$$

Pelo Teorema de Cramer, sabe-se que, se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, então o sistema linear possui uma solução única. Calculando o determinante da matriz dos coeficientes, podemos ver que $\det(A) = a^2 - 6a$. Logo, os valores de a que anulam o determinante são dados por $a = 0$ ou $a = 6$.

Dessa forma



Fonte: Elaboração própria (2025).

- Se $a \neq 0$ e $a \neq 6$, então $\det(A) \neq 0$ e o sistema possui **solução única** (SPD).
- Se $a = 0$ ou $a = 6$, o sistema pode ser **possível e indeterminado** ou **impossível**, sendo necessária uma análise adicional.

Se $a = 0$, substituindo esse valor no sistema, obtemos

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 0y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Da segunda equação, segue que $x = 2$. Como a primeira equação é uma identidade, a variável y pode assumir **qualquer valor real**. Portanto, para $a = 0$, o sistema possui **infinitas soluções** (SPI).

Por outro lado, se $a = 6$, substituindo esse valor no sistema, temos:

$$\begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por 6 e a segunda por 2, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Observa-se que as equações são contraditórias, pois não podem ser satisfeitas simultaneamente. Portanto, para $a = 6$, o sistema é **impossível** (SI). Sendo assim, conclui-se que se $a \neq 0$ e $a \neq 6$ o sistema admite uma única solução (SPD); se $a = 0$, o sistema possui infinitas soluções (SPI); e, por fim, se $a = 6$, o sistema não admite nenhuma solução (SI).

Essa relação entre determinantes, consistência e geometria reforça a importância de interpretar sistemas lineares não apenas como um conjunto de procedimentos, mas também como representações de situações que expressam relações entre grandezas. Desse modo, o aluno compreende que resolver um sistema significa interpretar como essas relações se organizam.

Neste capítulo, apresentamos um panorama detalhado dos conceitos de matrizes e sistemas lineares, bem como suas operações e propriedades, fornecendo a base técnica e formal necessária para a compreensão da álgebra no âmbito do Ensino Médio. Vimos como a organização de dados dependem dessas estruturas. Com esse conhecimento estabelecido, o próximo passo da nossa pesquisa é apresentar a lente teórica que permitirá a aplicação desses conceitos.

No Capítulo 4, discutiremos os princípios da Educação Matemática Realística (RME) e, no Capítulo 5, serão abordadas metodologias ativas que possibilitam ao professor trabalhar a Álgebra de maneira investigativa e contextualizada. Assim, a articulação entre o domínio matemático e a prática pedagógica busca superar um ensino meramente procedimental, promovendo aprendizagens mais alinhadas às demandas do mundo contemporâneo.

4 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

As discussões sobre os desafios e limitações do ensino tradicional de álgebra, apresentadas no Capítulo 2, nos conduzem à busca por abordagens que resgatem o significado e a relevância da Matemática, sobretudo da álgebra, para os estudantes do Ensino Médio. Nesse contexto, a Educação Matemática Realística (RME) surge como um referencial teórico capaz de oferecer uma nova perspectiva para a prática pedagógica. Neste capítulo, apresentamos os fundamentos da RME e discutimos as formas pelas quais seus princípios orientaram o planejamento e a aplicação da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa. A RME, ao compreender a Matemática como uma atividade humana, propõe um ensino que parte do sentido e da experiência dos estudantes, promovendo a construção de significados de forma progressiva, contextualizada e reflexiva. Dessa forma, busca-se mostrar como cada princípio desse referencial contribuiu para a repensação do ensino da Álgebra no Ensino Médio, sustentando a ideia de que a Matemática deve ser reinventada pelos estudantes (Freudenthal, 1973b, p. 47).

Seu surgimento ocorreu na Holanda, entre as décadas de 1960 e 1970, quando educadores buscaram alternativas ao Movimento da Matemática Moderna e a outras abordagens mecanicistas, que privilegiavam o formalismo excessivo e a pouca conexão com a realidade dos estudantes (Freudenthal, 1968; Freudenthal, 1991). Desenvolvida principalmente por Hans Freudenthal, a RME defende que a Matemática não é um corpo de conhecimento pronto e acabado, mas uma construção humana que emerge da necessidade de organizar a realidade e de resolver problemas. Nesse sentido, aprender Matemática implica fazer Matemática, formulando e testando estratégias, comparando ideias e revisitando conceitos. Como afirma Van den Heuvel-Panhuizen (2010), o termo realístico refere-se ao que é imaginável e significativo para os estudantes, e não apenas ao que é concreto ou cotidiano (Gravemeijer; Cobb, 2006; Doorman, 2005).

Assim, em vez de introduzir definições algébricas prontas para, depois, buscar aplicações, inverter o percurso didático passa a ser central: primeiro, apresentamos uma situação significativa; depois, junto aos estudantes, procuramos as estruturas Matemáticas que surgem nesse percurso. A formalização, nesse processo, não desaparece, mas torna-se uma consequência da atividade, e não um ponto de partida. Essa compreensão se tornou fundamental para o planejamento e a aplicação da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa. Ao trabalhar com criptografia, sistemas de mensagens codificadas, operações com matrizes e o uso de Python, buscamos criar cenários de investigação nos quais a Álgebra deixasse de ser apenas um conteúdo escolar e pudesse aparecer como uma ferramenta para pensar, proteger, comunicar, decidir e argumentar. (Freudenthal, 1983; Freudenthal, 1991; Freudenthal, 1968; Gravemeijer, 2008; Gravemeijer; Cobb, 2006; Doorman, 2005).

A perspectiva da Educação Matemática Realística é estruturada intencionalmente por seis princípios que orientam o trabalho pedagógico. Conforme discute Silva (2024), em diálogo com os estudos de Van den Heuvel-Panhuizen (2010), esses princípios oferecem condições para que a Matemática seja experienciada como uma atividade de descoberta, investigação

e reconstrução de significados. Heuvel-Panhuizen (2000) sistematiza tais fundamentos, destacando os princípios da realidade, dos níveis, da interatividade, do entrelaçamento, da atividade e da orientação. Essa organização retoma e amplia as contribuições de Treffers (1991), ao incluir explicitamente o princípio da orientação, reafirmando a importância atribuída por Freudenthal à ideia de *reinvenção guiada* do conhecimento matemático (Freudenthal, 1973b; Freudenthal, 1991).

Assim, ao apresentar cada um desses princípios, procuramos não apenas descrevê-los conceitualmente, mas também articulá-los às escolhas que realizamos na elaboração e na aplicação da sequência didática, compreendendo que teoria e prática não se separam no ato de ensinar: elas se constituem mutuamente. Essa articulação tem como propósito mostrar que a Álgebra pode ser ressignificada quando trabalhada como atividade humana situada, apoiada em significados que surgem do próprio contexto escolar. Como afirmam Doorman (2005) e Gravemeijer (2008), uma das forças da RME reside exatamente na possibilidade de integrar conteúdo e experiência, favorecendo a construção de formalismos a partir da ação.

Considerando essas diretrizes estruturantes da RME, passamos a apresentar cada um de seus princípios, destacando como cada um deles fundamentou as decisões pedagógicas desta pesquisa, começando pelo Princípio da Atividade.

4.1 Princípio da Atividade: Matemática como Ação Humana

O primeiro princípio que sustenta a Educação Matemática Realística é o da Atividade, que concebe a Matemática como um fazer humano. Esse princípio destaca a importância de que o estudante participe ativamente da construção do conhecimento, compreendendo, explorando e representando situações que façam sentido para ele. Assim, a álgebra deixa de ser apresentada como um conjunto de técnicas e fórmulas prontas e passa a ser vivida como uma linguagem capaz de expressar ideias, resolver problemas e construir significados.

Ao compreender a Matemática como uma atividade humana, Freudenthal (1973b) explica que o conhecimento matemático não é recebido passivamente, mas é produzido, reinventado e negociado a partir das interações com situações significativas. Esse entendimento foi fundamental para repensar nossa própria prática docente, deslocando o foco da transmissão de conteúdo para a criação de oportunidades em que os estudantes pudessem fazer Matemática. Nesse contexto, a RME define esse processo ativo de produção Matemática como *matematização*, que envolve formular questões, reorganizar informações, identificar estruturas, testar hipóteses, escolher representações e construir significados. (Freudenthal, 1973b; Freudenthal, 1983; Freudenthal, 1991; Ferreira; Buriasco, 2023)

Ao planejar a sequência didática, buscamos promover esse movimento. Quando os estudantes investigaram a segurança de suas senhas, exploraram a cifra de César ou codificaram mensagens utilizando matrizes em Python (ver Capítulo 6), não apenas executaram procedimentos, mas também mobilizaram ideias, compararam estratégias, tomaram decisões e ressignificaram o papel da álgebra em suas vidas.

Treffers (1987) distingue dois movimentos complementares no processo de matematização. O primeiro é a **Matematização Horizontal**, quando o estudante parte de situações vividas ou imaginadas para representá-las matematicamente. Como aponta Freudenthal (1991), no mundo da vida, o sujeito age e interpreta fenômenos, enquanto no mundo simbólico, ele refina essas interpretações. A identificação de variáveis, a organização de dados em matrizes e a modelagem de sistemas de cifras, observadas na SD, ilustram esse processo inicial de passagem do contexto aos símbolos. Conforme descreve De Lange (1999), isso envolve reconhecer regularidades, esquematizar ideias e formular problemas.

O segundo movimento é a **Matematização Vertical**, que consiste no aprofundamento conceitual e na generalização do conhecimento. De Lange (1999) destaca que esse avanço se manifesta quando os estudantes passam a representar relações formalmente, a justificar propriedades e a articular modelos em novos contextos. Esse movimento, como discutem Gravemeijer e Doorman (1999) e Drijvers (2003), ocorre progressivamente e está entrelaçado ao anterior. Na prática da SD, esse processo ficou evidente quando os estudantes reconheceram padrões em operações matriciais, compreenderam o papel dos determinantes e justificaram transformações algébricas.

Assim, concordando com De Lange (1999), a matematização envolve atividades cognitivas que vão muito além da aplicação de fórmulas: descobrir regularidades, reconhecer similaridades entre diferentes situações, refinar modelos e generalizar relações Matemáticas. Em uma abordagem orientada pela RME, o significado antecede a formalização, uma vez que é a necessidade de resolver uma situação que impulsiona a organização simbólica das ideias.

Como sintetiza Treffers (1987, p. 71), atividades como construir, experimentar e classificar fazem parte do processo de matematização tanto quanto simbolizar e formalizar. A distinção entre os tipos de matematização é analítica, pois, na prática, tais movimentos se entrelaçam continuamente.

Ao longo da sequência didática, a presença do princípio da Atividade revelou-se em cada situação, convidando os estudantes a investigar, justificar seus raciocínios e comparar estratégias. Foi possível observar que a aprendizagem se fortalece quando o aluno se reconhece como autor de seus caminhos, quando erra, revisa e refaz, atribuindo sentido ao que constrói. Dessa forma, a álgebra se apresenta como uma forma de pensar e agir matematicamente, conectada ao mundo e às experiências dos sujeitos.

4.2 Princípio da Realidade: Aprender a partir do que faz sentido

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, o ponto de partida do trabalho em sala de aula deve ser uma situação que o estudante possa compreender, imaginar ou reconhecer como possível em sua experiência. Freudenthal (1973b) defende que a Matemática é uma atividade humana, construída na relação com o mundo, e que, portanto, o ensino não deve iniciar pela abstração, mas pelo contato com aquilo que o aluno é capaz de tornar real em seu pensamento. Assim, o termo realístico, no contexto da RME, ultrapassa o que é concreto ou

cotidiano e passa a designar aquilo que pode ganhar significado para o sujeito (Freudenthal, 1991). Nessa mesma direção, Treffers (1991) ressalta que o trabalho matemático deve surgir de problemas que tenham sentido para o estudante, mobilizando suas estratégias e seus modos próprios de pensar.

A abordagem da criptografia permitiu concretizar esse princípio de forma evidente, pois, ao investigar a segurança de suas senhas, decifrar mensagens e proteger informações em um “jogo de espionagem”, os estudantes não apenas aplicaram matrizes ou sistemas lineares, mas também reconheceram a necessidade desses conteúdos para resolver situações que faziam sentido em suas experiências. A álgebra deixou de ocupar o lugar de um conhecimento distante e abstrato, passando a atuar como uma ferramenta útil e significativa. Esse deslocamento se evidenciou no engajamento, na curiosidade e nas justificativas apresentadas pelos estudantes ao tomarem decisões durante as atividades.

Segundo Heuvel-Panhuizen (2000), o ensino orientado por situações realísticas organiza um percurso no qual o estudante parte de um contexto significativo, que se traduz em estruturas Matemáticas e, somente então, avança para a formalização. Esse movimento orientou a sequência didática: primeiro, um problema próximo à vivência do grupo; depois, a busca por estratégias; e, por fim, a sistematização dos procedimentos algébricos. Nesse processo, os conhecimentos prévios dos estudantes não são vistos como obstáculos, mas como um ponto de partida legítimo para a construção do entendimento.

A relação entre ação e elaboração é aprofundada por Gravemeijer e Terwel (2000), ao explicarem que o aprendizado se desenvolve quando o estudante revisita e analisa o próprio percurso, reorganizando-o. A ação realizada em um determinado nível passa a ser objeto de reflexão em outro, aproximando-se das ideias de Freudenthal e Van Hiele sobre os níveis de compreensão: a experiência inicial não é descartada, mas reelaborada, convertendo-se em uma estrutura conceitual.

É importante destacar que, embora a palavra realidade possa remeter ao concreto, seu sentido pode ser mais amplo. O dicionário Houaiss (2009) associa o termo ao que é material e observável; Abbagnano (1982), ao que existe independentemente da mente humana; e Mora (1971), ao que é atual e existente. Na RME, essa noção é expandida para incluir aquilo que pode se tornar real no pensamento do estudante, aquilo que ele pode imaginar, construir e sobre o qual pode agir. Assim, uma situação é considerada realística quando pode ser intelectualmente vivida, ainda que não tenha sido experimentada concretamente.

Desse modo, na SD, a teoria não foi estabelecida como ponto de partida, mas como consequência necessária da atividade. A formalização surgiu quando os estudantes sentiram a necessidade de comunicar e estabilizar aquilo que haviam construído. A aprendizagem das matrizes e dos sistemas lineares deixou de ser uma memorização de regras para se constituir como uma produção de significados sustentada por experiências reconhecidas como relevantes.

Trabalhar a partir de situações realísticas significou transformar a sala de aula em um espaço de investigação, no qual a necessidade do conteúdo emergia do próprio problema. Nesse movimento, teoria e prática se encontraram, e aprender Matemática se tornou uma experiência

com propósito, aprofundando a compreensão da álgebra a partir do que fazia sentido para o estudante.

4.3 Princípio de Níveis: dos significados informais à formalização

Ao refletir sobre o processo de aprendizagem em Matemática, especialmente no contexto da álgebra, compreendemos que aprender não é um ato linear ou contínuo, mas um percurso marcado por rupturas, reorganizações e reconstruções internas que o estudante realiza ao longo de sua trajetória. Aprender não é subir degraus prontos: é reorganizar-se (Freudenthal, 1973b; Freudenthal, 1991).

Um aspecto que se mostrou significativo em nossa prática foi compreender que os procedimentos informais não são um erro a ser corrigido, mas sim um ponto de partida necessário. O estudante precisa ter a oportunidade de experimentar, testar, representar, comparar e discutir antes de se aproximar da formalização. Quando esse tempo de elaboração não existe, a álgebra assume imediatamente uma feição rígida, distante e artificial, é justamente nesse ponto que muitos estudantes se perdem.

Freudenthal (1991, p. 96) afirma que “o que importa no processo de aprendizagem são as descontinuidades”. Ou seja, dificuldades e aparentes retrocessos podem representar momentos de reorganização interna em que o aluno ajusta suas compreensões e reconfigura sua relação com o conceito. Nessa perspectiva, a aprendizagem é viva e profundamente humana. Para tornar essa transição visível, recorreremos às fases de aprendizado propostas por Van Hiele (1986), que, embora formuladas para a Geometria, dialogam com a progressão da compreensão algébrica. Assim, a sequência didática foi organizada de modo que:

1. O estudante se familiarizasse com uma situação (como a criptografia ou o problema da fábrica);
2. Explorasse o contexto com apoio e troca com os colegas;
3. Começasse a nomear, justificar e verbalizar suas compreensões;
4. Por fim, pudesse agir com autonomia sobre o conhecimento formal.

Cada estudante inicia a atividade Matemática a partir de um nível próprio de compreensão, com estratégias que nem sempre são formais ou convencionais, mas que são legítimas, coerentes e reveladoras da lógica interna do sujeito. Conforme Drijvers (2000), essas estratégias iniciais constituem a base para modelos mais estruturados, desde que o ambiente de aprendizagem favoreça esse processo. Portanto, reconhecer os diferentes níveis de desenvolvimento dos estudantes é fundamental para a construção de significados.

Ao valorizar as resoluções informais dos estudantes como ponto de partida, a RME reconhece que a formalização surge progressivamente no contexto de uma classe de situações (Drijvers, 2000). A transição entre níveis envolve descontinuidades (Freudenthal, 1991, p. 96),

mas é justamente essa passagem que marca a matematização: o deslocamento do contexto para as ideias estruturadas. Para explicitar como isso pode ser organizado didaticamente, recorreremos às Fases do Processo de Aprendizagem de Van Hiele (1986):

Quadro 2 – Fases do processo de aprendizagem segundo Van Hiele

Fase	Descrição
Informação	Familiarização com o domínio de trabalho, em que o estudante observa, manipula e explora objetos ou situações, criando referências iniciais.
Orientação Guiada	Exploração do conteúdo por meio de tarefas intencionalmente estruturadas pelo professor, permitindo que o aluno investigue e reconheça relações importantes.
Explicitação	Momento em que o estudante verbaliza, descreve e nomeia as relações identificadas, ampliando sua linguagem técnica e sua consciência do próprio raciocínio.
Orientação Livre	Etapa em que o estudante passa a resolver problemas de forma mais autônoma, experimentando diferentes estratégias e consolidando significados.
Integração	Organização e consolidação das relações construídas, compondo uma rede coerente de significados que permite operar no novo nível de pensamento.

Fonte: Adaptado de Passos, Buriasco e Soares (2019).

A aplicação desse princípio na sequência didática mostrou que, quando o estudante pode experimentar e expressar suas ideias, o avanço para níveis mais formais ocorre naturalmente. As diferentes fases vivenciadas confirmam que a compreensão da álgebra é dinâmica, pessoal e marcada por reorganizações constantes. Assim, mais do que ensinar regras, trata-se de acompanhar trajetórias de pensamento em construção, respeitando o tempo de elaboração conceitual de cada estudante.

4.4 Princípio da Interatividade: aprender com o outro e pelo outro

Na perspectiva da RME, a aprendizagem é entendida como um processo que acontece no próprio contexto da prática educativa. Freudenthal (1971) destaca que os problemas educacionais são resolvidos no cotidiano da sala de aula e que essa construção é lenta, social e contínua. Assim, a Matemática é concebida como uma atividade humana viva, que se desenvolve em diálogo constante com o ambiente e com as pessoas que dele participam.

Nesse cenário, o Princípio da Interatividade assume um papel central. Heuvel-Panhuizen (2000) afirma que aprender Matemática é uma atividade social, realizada por meio de interações entre o professor e os estudantes, bem como entre os próprios estudantes. As trocas, conversas, justificações e argumentações que ocorrem durante a realização das tarefas são partes constitutivas da aprendizagem, não elementos adicionais ou complementares ao ensino.

Nelissen e Treffers (2010) distinguem-se dois tipos principais de interatividade: aquela que ocorre na relação professor–estudante e a que se dá entre os estudantes. No primeiro caso, o professor pode intervir, valendo-se de diferentes recursos, como comunicação oral, registros escritos ou gestos, orientando o aluno a revisar e reorganizar sua produção (Silva, 2018). O registro escrito, em particular, torna-se uma importante fonte de informações sobre os percursos do pensamento, auxiliando nas intervenções docentes que favorecem o desenvolvimento de estratégias próprias (Santos, 2014).

A interação entre os estudantes também se configura como um espaço privilegiado de aprendizagem. Kwon (2002) enfatiza que discussões baseadas em conjecturas, explicações e justificações possibilitam que os alunos avancem coletivamente, reformulem ideias e reconstruam significados. Para De Lange (1999), essa comunicação contribui tanto para a socialização de modos de pensar quanto para o fortalecimento das estratégias Matemáticas no grupo.

Nessa mesma direção, Artigue e Blomhøj (2013) destacam que abordagens baseadas em investigação, resolução de problemas e reinvenção guiada pressupõem uma cultura de sala de aula fundamentada na colaboração, na escuta e na valorização do raciocínio dos estudantes. O professor, assim, atua como orientador atento, criando condições para que os alunos expliquem, questionem, avaliem e integrem suas próprias ideias às de seus colegas.

Foi a partir desse entendimento que a sequência didática foi planejada. Mais do que organizar os estudantes em grupos, buscamos criar situações em que o diálogo se tornasse condição para o avanço na atividade. As tarefas exigiam que os estudantes confrontassem estratégias, explicitassem seus raciocínios e reconstruíssem caminhos a partir das contribuições coletivas. Nesse processo, ideias antes implícitas tornaram-se discutidas e ressignificadas, fortalecendo a aprendizagem.

Ao longo do desenvolvimento da SD, observamos que a aprendizagem Matemática se consolida no encontro entre vozes, na escuta das justificativas e na reconstrução conjunta de significados. A interatividade evidencia-se, portanto, como condição necessária para que o conhecimento se estabilize, ganhe profundidade e sentido. Além disso, muitas das conexões estabelecidas nessas discussões mostraram-se decisivas para articular conteúdos e compreender a álgebra para além de técnicas isoladas, movimento que dialoga diretamente com o Princípio do Entrelaçamento, a ser discutido a seguir.

4.5 Princípio do Entrelaçamento: a álgebra em diálogo com o mundo

Ao longo do processo de planejamento e aplicação da sequência didática, compreendemos que a álgebra não pode ser tratada como um campo isolado da Matemática, visto que seus significados se consolidam na articulação com outros domínios. Esse entendimento se ancora no Princípio do Entrelaçamento da Educação Matemática Realística, segundo o qual diferentes áreas Matemáticas dialogam entre si na experiência de aprendizagem, e esse diálogo é fundamental para que os conceitos ganhem sentido. Para Freudenthal (1991), a Matemática não se

apresenta ao sujeito como um conjunto de blocos estanques, mas como uma rede de relações construída à medida que o estudante elabora modelos e reorganiza suas compreensões.

Os diferentes domínios do conhecimento matemático (números, geometria, álgebra) não devem, portanto, ser vistos como áreas isoladas, mas como campos fortemente integrados e entrelaçados. Conforme Freudenthal (1991), na RME essas conexões são essenciais ao desenvolvimento conceitual; contudo, como destacam Buriasco e Silva (2017), podem surgir pontas soltas ao longo do processo de ensino. Nesses casos, cabe ao professor retomá-las assim que possível, conectando os conteúdos para que a aprendizagem avance de forma contínua (Van den Heuvel-Panhuizen, 2010).

No ensino tradicional, a álgebra costuma ser abordada de forma dissociada da geometria, da aritmética e de situações contextualizadas. Essa fragmentação reforça uma percepção instrumental e mecânica da disciplina, reduzindo-a à aplicação de técnicas prontas. Ao assumir o entrelaçamento como referência, buscamos promover experiências nas quais a Álgebra aparecesse como uma linguagem capaz de modelar fenômenos, generalizar relações e produzir explicações significativas, o que está alinhado à perspectiva de Buriasco e Silva (2017), segundo a qual conexões fortalecem a aprendizagem ao conferir coerência ao conhecimento estudado.

Essa articulação entre domínios também se evidencia no movimento entre processos de aprendizagem prospectivos e retrospectivos. Como discute Freudenthal (1991), inicialmente, o estudante se apoia no conhecimento prévio e em estratégias informais (movimento prospectivo). Posteriormente, revisita e reorganiza o que fez para formalizar, justificar e estabilizar as compreensões (movimento retrospectivo). Em nossa prática, esse ciclo foi essencial para que conceitos intuídos, como o papel do determinante, se transformassem em conhecimento estruturado, conectando conteúdos aparentemente distantes e “amarrando” sentidos construídos ao longo da SD.

Embora a RME entenda que os domínios do conhecimento matemático devam ser entrelaçados, ainda assim admitem que possam existir “pontas soltas”, ou seja, conteúdos que, por algum motivo, não podem ser entrelaçados aos demais. No caso de existirem pontas soltas, o recomendável é que sejam trabalhadas na primeira oportunidade em que possam ser conectadas com outros conteúdos para dar continuidade ao entrelaçamento (FREUDENTHAL, 1991 apud SILVA, 2015, p. 36).

O entrelaçamento, portanto, expressa-se como uma postura pedagógica, pois exige que o professor reconheça a Matemática como um campo vivo e relacional, e não como uma sequência linear de conteúdos. Também requer sensibilidade para identificar conexões que emergem espontaneamente nas produções dos estudantes e representam oportunidades de avanço conceitual. Ao valorizar essas conexões, observamos que os alunos passaram a compreender a álgebra não como um conjunto de operações isoladas, mas como uma ferramenta para interpretar e transformar situações, tanto as Matemáticas quanto as cotidianas.

Dessa forma, o ensino deixa de ser um percurso fragmentado e passa a ser uma experiência de significações interligadas. Nas discussões, nas relações estabelecidas entre conceitos e nas escolhas argumentativas dos estudantes, tornou-se visível a constituição de uma rede de significados que sustentou o aprendizado da SD. O entrelaçamento mostrou-se, assim, fundamental para que a Álgebra ganhasse sentido, consolidando sua compreensão como um conhecimento vivo e conectado ao mundo.

4.6 Princípio da Orientação: a Reinvenção Guiada como caminho

Entre os princípios da Educação Matemática Realística, o que mais impactou nossa prática foi o Princípio da Orientação, pois ele desloca a compreensão da aprendizagem Matemática da ideia de receber um conteúdo pronto para a de reconstruí-lo em contexto. Aprender Matemática significa fazer Matemática, isto é, organizar, modelar e formalizar ideias a partir de situações que façam sentido para o estudante. A sala de aula torna-se, assim, um espaço em que os estudantes podem atuar como autores de procedimentos e significados, e não apenas como repetidores de algoritmos (Freudenthal, 1973b; Freudenthal, 1991).

Nesse cenário, a reinvenção guiada apresenta-se como uma forma de ensino na qual o estudante não é deixado para descobrir tudo sozinho, tampouco é conduzido de maneira direta. Ela se situa em um equilíbrio intencional, no qual o professor planeja caminhos possíveis, promove avanços, formula perguntas e organiza situações, sem antecipar resultados ou soluções. Conforme discutem Van den Heuvel-Panhuizen (2010) e Mendes (2014), o professor orienta o processo por meio de tarefas que permitem que os estudantes avancem gradualmente de estratégias informais a modos mais estruturados de pensar. Silva (2015) enfatiza que esse percurso exige clareza sobre a trajetória de aprendizagem, prevendo formas de intervenção, possibilidades de erro e momentos de retomada. Essa trajetória não funciona como um roteiro fechado, mas como uma estrutura flexível que acompanha o movimento real da sala de aula e se reorganiza conforme as interações e as produções dos estudantes.

Ao planejar e conduzir a SD, percebemos que orientar não significa esperar que o estudante descubra tudo sozinho. A reinvenção guiada se diferencia tanto da instrução expositiva quanto da descoberta livre porque se constrói em um entrelugar cuidadoso, no qual as tarefas são preparadas para que o estudante avance, sem revelar o caminho antes da hora. Como descrevem Van den Heuvel-Panhuizen (2010) e Ferreira e Buriasco (2021), o professor organiza intencionalmente os problemas, as perguntas e as interações para que o aluno passe de estratégias informais a modelos mais formais, construindo conhecimento a partir do que ele mesmo elabora.

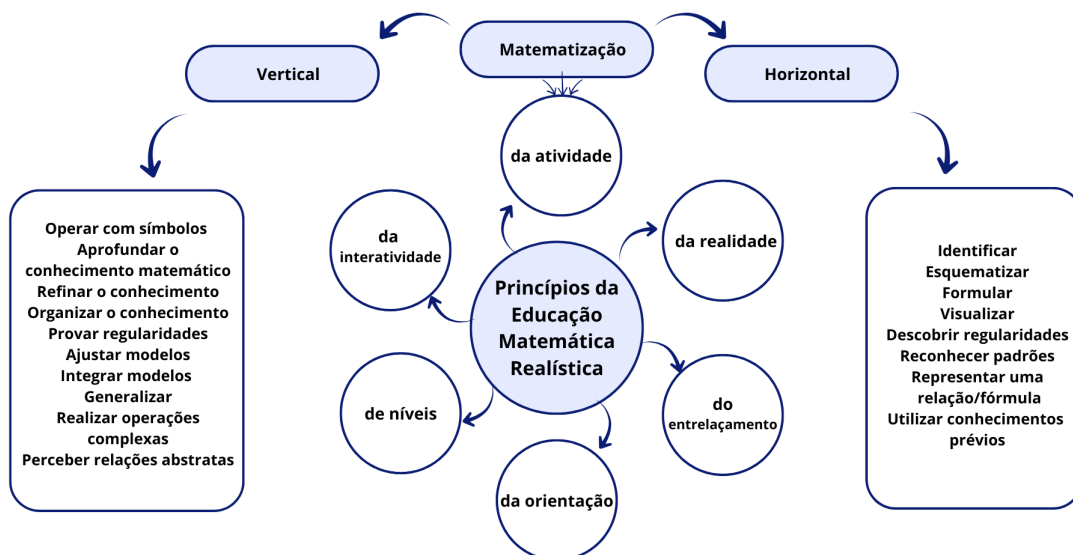
Ao longo da sequência didática, foi possível perceber também que, quando os estudantes explicam seus raciocínios e confrontam diferentes formas de resolver um problema, a álgebra deixa de ser uma coleção de regras abstratas e torna-se uma linguagem que ajuda a interpretar e transformar situações. A reinvenção guiada, portanto, não é apenas um método, mas uma postura ética que valoriza o tempo do pensamento, o direito à dúvida e o processo de

construção de sentido. Ela exige um olhar atento às maneiras como os estudantes significam o que fazem, uma escuta sensível aos caminhos que constroem e coragem para não antecipar respostas. A aprendizagem torna-se mais verdadeira porque nasce de dentro e não apenas se impõe de fora. É nesse ponto que a Álgebra, tantas vezes vista como árida e distante, ganha rosto, intenção, propósito e sentido.

4.7 Ressignificando o ensino de Álgebra pela RME

Ao considerar os princípios da Educação Matemática Realística como orientadores da prática pedagógica, torna-se possível compreender o ensino de álgebra para além da memorização de procedimentos. O Princípio da Interatividade evidenciou que a aprendizagem se fortalece na troca entre estudantes, na explicitação de ideias e na argumentação. O Princípio do Entrelaçamento mostrou que a Álgebra só ganha sentido quando articulada com outros domínios da Matemática e com situações que refletem o mundo vivido. O Princípio da Orientação, por sua vez, destacou a importância da reinvenção guiada como postura docente que acolhe e sustenta o processo de elaboração conceitual, garantindo que a formalização seja consequência de experiências com propósito.

Figura 2 – Princípios da Educação Matemática Realística



Fonte: Elaboração Própria (2025).

Ao longo deste capítulo, buscamos evidenciar como a Educação Matemática Realística orientou as escolhas pedagógicas desta pesquisa, tanto na organização das tarefas quanto na condução das interações em sala de aula. A relação entre sentido, orientação e formalização tornou-se mais clara à medida que as atividades se desdobravam e, nesse percurso, pude perceber que a aprendizagem não é um momento pontual, mas um processo que se constrói na convivência com problemas significativos e na constante reconstrução de significados. A

Figura 2 sintetiza os princípios que embasaram o planejamento e a realização da SD, evidenciando como se entrelaçam na prática e sustentam o processo de matematização vivido pelos estudantes.

Com isso, reforçamos que a RME não se limita a um conjunto de orientações teóricas, mas constitui uma perspectiva que reorganiza o sentido da prática pedagógica e amplia a compreensão da álgebra como conhecimento vivo, útil e acessível aos estudantes do Ensino Médio. Ao integrar interatividade, entrelaçamento, realidade, níveis e reinvenção guiada na estrutura da sequência didática, foi possível reconhecer indícios concretos de aprendizagem, engajamento e significação do conteúdo.

Assim, encerramos este capítulo destacando que a RME representou o alicerce que possibilitou repensar o ensino da Álgebra neste trabalho, ao aproximar o que se ensina do modo como os estudantes pensam e atribuem sentido ao que fazem. No capítulo seguinte, discutimos as metodologias ativas que contribuem para potencializar essa proposta, em especial quanto ao protagonismo dos estudantes e ao uso de recursos tecnológicos como mediadores da aprendizagem.

5 METODOLOGIAS ATIVAS: FERRAMENTAS E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

A educação brasileira tem passado por inúmeras transformações significativas, especialmente impulsionadas pela Reforma do Ensino Médio. Instituída pela Lei nº 13.415/2017, essa reforma surgiu a partir de uma medida provisória aprovada em um contexto conturbado no cenário político e educacional brasileiro, introduzindo mudanças na proposta da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) na etapa final da Educação Básica, no que diz respeito à organização curricular e ao financiamento, o que impacta diretamente tanto o trabalho pedagógico quanto a atuação docente e a própria formação dos estudantes (Ferretti, 2018; Miranda; Carneiro, 2024; Garcia; Noronha, 2025; Brasil, 2017).

Alinhada às mudanças promovidas pela Reforma do Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também trouxe a unificação dos conteúdos a serem abordados no Ensino Médio. Brasil (2018) define, de forma bem ampla, as competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver, fornecendo aos docentes diretrizes para que possam planejar e conduzir práticas pedagógicas de forma articulada e significativa. Dessa forma, o documento não apenas organizou o currículo, mas também incentivou o uso de novas estratégias e metodologias de ensino.

Em contrapartida, para alinhar todas essas mudanças no cenário educacional, vêm emergindo muitas propostas pedagógicas que buscam superar modelos tradicionais de ensino, com destaque para as metodologias ativas. Entendidas como estratégias que colocam o estudante no centro do processo de aprendizagem, essas metodologias favorecem a autonomia, o pensamento crítico e a capacidade de tomar decisões em situações reais por parte dos estudantes (Borges; Alencar, 2014; Seabra *et al.*, 2023). Ao promover o protagonismo do aluno, aproxima-se do conhecimento escolar em conexão com as práticas sociais, tornando o processo formativo mais dinâmico e significativo. Segundo Marques *et al.* (2021), a aprendizagem de qualidade atualmente depende mais do relacionamento pessoal entre o professor, que atua como facilitador, e o aluno do que de aspectos como habilidades pedagógicas, planejamento curricular ou uso de recursos audiovisuais (Mello; Alves; Lemos, 2014; Bellaver, 2019).

A BNCC orienta a Educação Básica por meio de dez competências essenciais, destacando o papel das tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem. A competência 4 enfatiza o uso de diferentes linguagens (verbal, corporal, visual, sonora e digital), além do conhecimento das linguagens artísticas, Matemáticas e científicas, para que os estudantes possam expressar ideias, compartilhar informações e experiências e construir sentidos que favoreçam a compreensão mútua em contextos diversos. Por sua vez, a competência 5 coloca ênfase no protagonismo estudantil, estreitando a relação com metodologias ativas ao estimular o desenvolvimento de habilidades para compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma ética, reflexiva e significativa. Esse enfoque permite que os alunos se comuniquem, resolvam problemas e assumam responsabilidades no próprio aprendizado, fortalecendo sua autonomia e participação ativa nas práticas educativas (Brasil, 2018).

Nesse sentido, mesmo diante de fortes críticas à BNCC, discutir as metodologias ativas no ensino de Matemática mostra-se fundamental, sobretudo no Ensino Médio, etapa em que muitos estudantes apresentam desinteresse ou dificuldade em compreender a aplicabilidade dos conteúdos. Ao propor situações de aprendizagem nas quais o estudante é desafiado a investigar, experimentar e construir significados, o professor amplia as possibilidades de engajamento e fortalece a relação entre teoria e prática, trazendo significado à experiência escolar e a todo o processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, neste capítulo, buscamos analisar algumas das principais metodologias ativas aplicáveis ao ensino da Matemática no Ensino Médio, mostrando seus fundamentos e as aplicações pedagógicas utilizadas ao longo desta pesquisa. Inicialmente, será apresentada a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, destacando sua contribuição para a relação entre conteúdos e situações reais no contexto da RME. Em seguida, discutiremos a Sala de Aula Invertida (Flipped Classroom) e a gamificação, que reorganizam a lógica tradicional de ensino e aprendizagem, valorizando a autonomia dos estudantes. Também destacamos a interdisciplinaridade, com foco na criptografia, como um recurso capaz de despertar o interesse dos alunos ao conectar a Matemática a situações práticas e contemporâneas. Além disso, será explorado o uso do Python, uma linguagem de programação que possibilita a realização de experimentos e simulações Matemáticas como metodologia ativa na computação.

Posteriormente, ao finalizar o capítulo, iremos explorar as Sequências Didáticas, compreendidas como estratégias que permitem ao professor organizar o ensino de forma progressiva e contextualizada, diferentemente das aulas tradicionais. Assim, o conjunto dessas metodologias e da ferramenta SD será apresentado como um repertório de práticas que não só diversificam a atuação docente, mas também podem transformar o ensino da Álgebra no Ensino Médio sob a lente da Educação Matemática Realística.

5.1 Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas: Uma perspectiva no Ensino de Álgebra

A resolução de problemas consolidou-se, ao longo das últimas décadas, como uma das metodologias mais potentes para o ensino da Matemática, especialmente quando articulada ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio, argumentação e tomada de decisão. Em um cenário educacional marcado por demandas cognitivas cada vez mais complexas, a centralidade dessa abordagem se torna evidente, pois desloca o foco da mera repetição de procedimentos para um trabalho que exige mobilização de conhecimentos, análise de situações e elaboração de estratégias (Santos, 2022; Braga, 2020). Nesse sentido, compreender a resolução de problemas como metodologia, e não apenas como atividade, constitui um movimento essencial para repensar o ensino da Álgebra no Ensino Médio.

A resolução de problemas é uma competência fundamental no ensino e na aprendizagem da Matemática, servindo como pilar tanto na Educação Básica quanto no desenvolvimento

de competências avançadas. No cenário educacional, não só brasileiro, mas mundial, onde a capacidade de resolver problemas complexos é cada vez mais valorizada, a ênfase na metodologia de resolução de problemas no Ensino da Matemática tornou-se ainda mais proeminente, visto que é uma das metodologias ativas mais eficazes para cultivar habilidades críticas e pensamento lógico (Santos, 2022; Braga, 2020)

A metodologia de resolução de problemas, no contexto do Ensino de Matemática, não apenas aprimora a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também desenvolve habilidades como a capacidade de aplicar conhecimentos adquiridos a situações novas e desconhecidas em todos os níveis escolares (Santos, 2022)

Onuchic e Allevato (2004) destaca que a adoção da resolução de problemas como metodologia de ensino só passou a ganhar destaque na década de 70, quando educadores matemáticos passaram a considerá-la e questioná-la em suas práticas pedagógicas. No entanto, diante das mudanças sociais e tecnológicas, os métodos utilizados naquela época estão se mostrando cada vez mais desatualizados e menos eficazes nas salas de aula do século XXI. Para elas, há duas principais razões que fundamentam a necessidade de reformular a abordagem do ensino de Matemática em sala de aula: em primeiro lugar, é fundamental que os estudantes compreendam a relevância da Matemática, não apenas dentro do contexto escolar, mas também em suas vidas e na sociedade em geral; em segundo lugar, é importante atender a demanda daqueles que demonstram maior interesse pela Matemática. É importante ressaltar que:

sempre houve muita dificuldade para se ensinar Matemática. Apesar disso todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para se entender o mundo e nele viver. Como o elemento mais importante para se trabalhar Matemática é o professor de Matemática, e como este não está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções, as dificuldades neste processo têm aumentado muito (Allevato; Onuchic, 2021, p. 213-214)

No entanto, a metodologia de resolução de problemas exige do professor uma preparação e um engajamento distintos dos convencionais na elaboração e na execução de atividades. (Allevato; Onuchic, 2021) destacaram três abordagens fundamentais para o uso da resolução de problemas, consideradas essenciais na condução de atividades pelo professor e com impacto significativo na aprendizagem dos estudantes: ensinar “sobre” a resolução de problemas; ensinar Matemática “para” a resolução de problemas; e ensinar Matemática “através” da resolução de problemas.

A primeira diz respeito às teorias da resolução de problemas. George Polya, segundo Onuchic e Allevato (2004), é um importante representante dessa linha. Entretanto, há uma grande diferença entre o aluno saber o conteúdo e conseguir resolver situações-problema, pois o primeiro está associado à habilidade do objeto do conhecimento, desenvolvida para resolver problemas e por sua vez, trata-se de uma atividade humana fundamental, segundo o próprio Pólya (1995). A segunda, nada mais é do que o ato de formalizar o conteúdo apresentado aos estudantes por meio de exercícios, sendo a prática mais utilizada pelos docentes, principal-

mente nas aulas de Matemática, e até mesmo nos materiais didáticos, como livros, slides e materiais digitais.

Diante do pressuposto, a terceira abordagem, chamada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), ocorre quando o professor parte de um problema e, na sala de aula, os estudantes fazem relações com diferentes habilidades e objetos do conhecimento, construindo, assim, novos conceitos e aprendizagens. Segundo Allevato e Onuchic (2021), o professor precisa deixar de ser o centro das atenções e passar a dar aos estudantes maior responsabilidade pela própria aprendizagem. Já os estudantes, para que a metodologia funcione, precisam assumir e entender sua responsabilidade e adotar uma nova postura em sala, o que não é tão fácil.

Além disso, de acordo com Demarchi, Ashtiani e Gonçalves (2025), a articulação entre ensino, aprendizagem e avaliação deve ocorrer de maneira simultânea e integrada durante todo o processo, cabendo ao professor o papel de mediador durante a aplicação da metodologia em sala de aula. A MEAAMaRP é estruturada em dez etapas, conforme propostas por Allevato e Onuchic (2021, p. 47-51), sendo elas: (1) proposição do problema gerador; (2) leitura individual na qual o aluno recorre aos conhecimentos prévios; (3) leitura em conjunto onde, em pequenos grupos, os alunos aprimoram as resoluções; (4) alunos (em grupos) resolvem o problema; (5) o professor incentiva e observa; (6) alunos apresentam a solução; (7) em plenária, professor e alunos discutem ideias e concepções; (8) busca de consenso sobre as resoluções; (9) o professor formaliza o conteúdo matemático; e (10) proposição e resolução de novos problemas, conforme mostrado na figura:

Figura 3 – Etapas da MEAAMaRP



Fonte: Adaptado de Allevato e Onuchic (2021).

Deste modo, o professor desempenha um papel crucial para o sucesso da metodologia de resolução de problemas. Intervenções excessivas podem minar a iniciativa dos estudantes, enquanto a ausência de orientação pode gerar frustração ou estagnação. Assim, o trabalho

do professor não se resume a corrigir ou validar respostas, mas também envolve interpretar caminhos, valorizar diferentes estratégias e promover conexões que sustentem a construção do conhecimento matemático.

A literatura recente tem destacado que a resolução de problemas, quando tratada como metodologia, não se restringe à escolha de boas tarefas, mas também envolve a construção de uma cultura investigativa em sala de aula. Estudos como o de Silva e Allevato (2024) enfatizam que essa cultura se estabelece quando os estudantes se engajam em processos de argumentação, justificativa e validação coletiva de ideias, superando uma visão de aula centrada na simples verificação de respostas. Nessas práticas, o foco desloca-se para a produção de significados pessoais e compartilhados, ampliando o papel do erro, da dúvida e da negociação conceitual como elementos estruturantes da aprendizagem. Ao assumir essa perspectiva, a MEAAMaRP passa a funcionar não apenas como uma técnica, mas como uma reorganização profunda das interações que sustentam o trabalho matemático.

Além disso, pesquisas de Martins (2024) mostram que a resolução de problemas modifica a relação dos estudantes com o conhecimento matemático ao permitir que reconstruam conceitos a partir da análise de diferentes estratégias. Essa diversidade de caminhos produz um ambiente rico para o desenvolvimento da autonomia intelectual, pois evidencia que o raciocínio matemático pode ser elaborado por múltiplas vias, e não apenas pela aplicação direta de algoritmos previamente ensinados. No ensino de Álgebra, essa postura é particularmente relevante, pois os estudantes frequentemente associam conteúdos algébricos a procedimentos rígidos. A metodologia, ao contrário, evidencia que a Álgebra também é um terreno fértil para a interpretação, a modelagem e a comparação de métodos, elementos essenciais à formação de um pensamento mais flexível.

Pironel (2019) reforça ainda que o engajamento dos estudantes em situações desafiadoras favorece uma aprendizagem mais persistente, uma vez que precisam recorrer a conhecimentos prévios, testar hipóteses e analisar resultados intermediários. Esse percurso investigativo dialoga diretamente com as intenções da MEAAMaRP, na qual o problema não é apenas o ponto de partida, mas também o eixo que estrutura a aula. Ao resolver problemas, os estudantes constroem vínculos mais fortes entre diferentes tópicos matemáticos, desenvolvem habilidades de comunicação e aprendem a justificar suas decisões, aspectos fundamentais para consolidar a álgebra como linguagem de modelagem e não como um conjunto de técnicas isoladas.

Por fim, a articulação apresentada por Silva e Allevato (2024) sobre o papel das discussões coletivas destaca a importância das etapas de socialização e de formalização na MEAAMaRP. Nessas etapas, o professor atua como mediador, organizando, ampliando e estabilizando as ideias emergentes, transformando estratégias intuitivas em conceitos matemáticos mais estruturados. Esse momento é decisivo para o ensino da Álgebra, pois permite que processos inicialmente informais, como a identificação de padrões, a comparação de procedimentos e o reconhecimento de estruturas, sejam gradualmente convertidos em linguagem simbólica e em propriedades gerais. Assim, o movimento entre exploração, discussão e sistematização, carac-

terístico da MEAAMaRP, assegura que o conhecimento algébrico se torne compreensível, útil e aplicável pelos estudantes em situações mais amplas.

Na sequência didática desenvolvida nesta pesquisa, aplicamos a MEAAMaRP como núcleo de uma das atividades de Álgebra, buscando compreender como a resolução de problemas poderia organizar tanto os conteúdos quanto as interações entre os estudantes. As adaptações que realizamos decorreram da observação atenta da realidade da turma e dos objetivos matemáticos que pretendíamos desenvolver, preservando sempre o princípio da relevância intelectual da tarefa.

Nesse movimento, percebemos que a metodologia não opera como um roteiro fixo, mas como uma forma de conduzir a aula que dialoga diretamente com os princípios da Educação Matemática Realística. Assim como a RME, a resolução de problemas exige que o conhecimento surja da experiência, do confronto de ideias e da necessidade criada pela própria situação, o que ampliou as oportunidades de matematização e favoreceu a construção gradual do pensamento algébrico. A articulação entre a MEAAMaRP e a Educação Matemática Realística (RME) torna-se ainda mais evidente quando consideramos o papel central da matematização, processo descrito por Treffers (1987) como movimento horizontal.

Nas atividades desenvolvidas, observamos que a resolução de problemas favorece exatamente essa transição, já que os estudantes iniciam explorando estratégias intuitivas, conectadas ao contexto, e gradualmente passam a utilizar propriedades, expressões e representações próprias da Álgebra. Assim, tanto a MEAAMaRP quanto a RME convergem ao promover um percurso investigativo em que os problemas funcionam como motor para a construção de conceitos matemáticos.

5.2 Flipped Classroom: O potencial da Sala de Aula Invertida

A Sala de Aula Invertida (SAI) ou também chamada de Flipped Classroom tem ganhado espaço como uma das metodologias ativas mais discutidas na Educação contemporânea, sobretudo por reorganizar de forma significativa a lógica tradicional da aula expositiva. Diferentemente do modelo centrado na figura do professor e na transmissão direta do conteúdo, a SAI propõe que o estudante entre em contato inicial com os conhecimentos fora da sala de aula, geralmente por meio de videoaulas, textos curtos ou materiais digitais, para que o tempo presencial seja dedicado ao aprofundamento, à discussão e à resolução de problemas em colaboração com os colegas e com a mediação do docente.

Esse movimento modifica a estrutura da aula e amplia as possibilidades de participação dos estudantes. Em vez de dedicar grande parte do encontro presencial a explicações iniciais, o professor passa a orientar atividades de maior complexidade cognitiva, tornando o processo mais ativo, significativo e dinâmico. Como destaca Valente (2014), a SAI desloca o foco da aprendizagem para o estudante, criando condições para que ele assuma maior responsabilidade pelo próprio percurso, enquanto o professor atua como mediador, articulando intervenções que aprofundam o entendimento matemático.

É importante considerar que o contexto educacional contemporâneo é marcado pela presença constante das tecnologias digitais na vida dos estudantes. Conforme aponta Santa-ella (2010), os jovens de hoje estão habituados a acessar informações de forma imediata por meio de smartphones e computadores, o que torna metodologias centradas exclusivamente na exposição oral do professor pouco significativas e desmotivadoras. Essa geração, muitas vezes criticada por dificuldades relacionadas ao pensamento abstrato, tende a apresentar desinteresse e baixo desempenho em áreas como Ciências e Matemática, não pela falta de capacidade, mas porque experiências negativas com metodologias tradicionais, como já mencionamos neste trabalho, são excessivamente baseadas na memorização de regras e fórmulas, o que acaba afastando-os dessas áreas ao ingressarem no Ensino Superior (Guerin, 2020).

Diante dessa realidade, torna-se urgente a busca por alternativas metodológicas que promovam uma aprendizagem ativa, na qual os estudantes assumam um papel protagonista na construção do conhecimento. As metodologias ativas, como destaca Moran (2018), atendem a essa demanda ao colocar o aluno no centro do processo, estimulando sua participação, autonomia e engajamento. Entre essas abordagens, a SAI tem ganhado destaque, especialmente nas Ciências Exatas, por transformar a lógica tradicional da aula e otimizar o tempo de interação pedagógica.

A origem da SAI remonta às experiências iniciais de Mazur (2009), em Harvard, na década de 1990, quando o autor começou a explorar estratégias de aprendizagem ativa em cursos de Física por meio do método Peer Instruction. Anos mais tarde, entre 2006 e 2007, Bergmann e Sams, professores de Química no Ensino Médio do Colorado, começaram a gravar e disponibilizar videoaulas para estudantes que se ausentavam devido a competições esportivas, prática que rapidamente evoluiu para o modelo mais estruturado da Sala de Aula Invertida (Bergmann; Sams, 2018). O sucesso dessas experiências contribuiu para a disseminação da metodologia em diferentes contextos, consolidando-a como uma proposta viável e inovadora.

Como o próprio nome sugere, a SAI inverte a lógica tradicional da sala de aula: o estudo inicial dos conteúdos ocorre fora do ambiente escolar, enquanto o tempo em sala é dedicado a atividades de maior complexidade, como análise, debate, colaboração e resolução de problemas. Nessa dinâmica, o professor deixa de dedicar a maior parte do tempo a explicações introdutórias e assume o papel de mediador, oferecendo feedback contínuo e conduzindo situações que promovem a aprendizagem ativa (Santiago; Carvalho, 2018). A viabilidade da SAI está diretamente relacionada ao acesso às tecnologias digitais, pois os materiais prévios, como as videoaulas e leituras, costumam ser disponibilizados em Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA), permitindo que cada estudante organize seu ritmo de estudo

As pesquisas indicam que a SAI pode trazer benefícios importantes para o desenvolvimento de habilidades, como autonomia, iniciativa, colaboração e resolução de problemas. Ao chegar à sala de aula mais preparado para interagir, o estudante aproveita melhor o tempo presencial, que passa a ser empregado em atividades práticas e dialógicas, alinhadas às demandas contemporâneas da Educação e às orientações de documentos oficiais. O protagonismo estu-

dantil, nesse contexto, deixa de ser um ideal abstrato e se materializa na prática pedagógica cotidiana, reforçando a pertinência dessa metodologia no ensino de Matemática.

No contexto do Ensino Médio e das transformações propostas pela Reforma e pela BNCC, essa abordagem torna-se ainda mais pertinente. As competências gerais do documento, especialmente as relacionadas ao uso crítico das tecnologias digitais, ao protagonismo estudantil e ao desenvolvimento do pensamento crítico, dialogam diretamente com os princípios da Sala de Aula Invertida. A Competência Geral 5 enfatiza o uso de tecnologias digitais de maneira ética e criativa, enquanto a Competência Geral 7 destaca a importância da argumentação, da resolução de problemas e da participação ativa no processo educativo (Brasil, 2018). A SAI, ao articular o estudo prévio com práticas colaborativas em sala, responde diretamente a essas orientações.

Pesquisas recentes mostram que essa metodologia pode favorecer a aprendizagem em Matemática. Nachtigall e Abrahão (2025) observaram que a SAI contribuiu para o desenvolvimento de crenças positivas de autoeficácia acadêmica em estudantes de Licenciatura em Matemática, fortalecendo a confiança diante de atividades mais complexas. Resultados semelhantes são apresentados por Cho *et al.* (2021), que, ao investigarem estudantes de Engenharia, identificaram melhorias no desempenho e na percepção de aprendizagem quando o modelo invertido foi adotado, especialmente porque o tempo presencial passou a ser utilizado para atividades que exigiam maior raciocínio e aplicação prática dos conceitos.

No ensino de Matemática, a SAI desempenha um papel particularmente relevante, pois reorganiza o tempo e o espaço da aula, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico. Quando o estudante chega à sala com um contato prévio, mesmo que introdutório, com definições, propriedades ou representações iniciais, o tempo presencial pode ser dedicado à análise de padrões, à comparação de estratégias e à exploração de funções e de matrizes em diferentes registros. Esse arranjo metodológico potencializa processos investigativos e dialoga diretamente com a resolução de problemas, pois permite que a aula presencial seja um ambiente de experimentação.

Dessa forma, a SAI cria condições para que a Álgebra deixe de ser apresentada exclusivamente de forma expositiva, tornando-se uma atividade cognitiva de exploração e argumentação. Isso abre espaço para atividades que, no modelo tradicional, muitas vezes não cabem no tempo da aula, como:

- resolução de problemas mais complexos;
- atividades investigativas e de experimentação;
- análise e comparação de estratégias entre colegas;
- uso de tecnologias digitais, como softwares matemáticos e linguagem de programação.

Ao aplicarem a Sala de Aula Invertida em conjunto com estratégias de gamificação, Junges *et al.* (2023a) observaram maior engajamento e envolvimento dos estudantes, reforçando que a reorganização da aula contribui para tornar o ambiente mais atrativo e participativo.

Entretanto, como ocorre com qualquer metodologia ativa, a implementação da Sala de Aula Invertida apresenta desafios que devem ser considerados no planejamento pedagógico. Em revisão sistemática, Baig e Yadegaridehkordi (2023) apontam dificuldades associadas ao acesso desigual às tecnologias, ao aumento da carga de preparação docente e à resistência inicial dos estudantes, que podem estranhar a necessidade de estudo prévio e de maior autonomia. Tais fatores indicam que a adoção da SAI exige intencionalidade, clareza de objetivos e a disponibilização de materiais acessíveis, garantindo condições para que todos os estudantes possam participar de forma equitativa.

Além disso, a Sala de Aula Invertida dialoga diretamente com as demandas da Educação, especialmente no que diz respeito à autonomia intelectual, ao protagonismo estudantil e ao uso crítico das tecnologias. Como apontam Moran (2018) e Valente (2014), a metodologia cria um ambiente propício para que o estudante assuma maior responsabilidade sobre seu processo de aprendizagem, enquanto o professor passa a atuar como mediador que observa, intervém, questiona e orienta o aprofundamento conceitual. No caso da Matemática, essa configuração torna-se ainda mais relevante, pois permite trabalhar aspectos como raciocínio lógico, argumentação e resolução de problemas de forma mais integrada.

Estudos como os de Cho *et al.* (2021), Nachtigall e Abrahão (2025) e Junges *et al.* (2023a) demonstram que a SAI favorece o engajamento, melhora a percepção de autoeficácia, amplia a participação dos estudantes e contribui para uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos. Quando associada a práticas colaborativas ou recursos digitais, a metodologia parece tornar a aprendizagem mais dinâmica e significativa, estimulando o desenvolvimento de habilidades que extrapolam o domínio técnico do conteúdo.

Dessa forma, compreendemos a SAI como uma abordagem capaz de reconfigurar a dinâmica da sala de aula, tornando o processo de aprendizagem mais participativo e alinhado às competências propostas pelos documentos curriculares nacionais. Ao deslocar o foco da transmissão para a investigação, a Sala de Aula Invertida contribui para que os estudantes se apropriem dos conceitos matemáticos de maneira mais reflexiva, crítica e conectada às demandas atuais da formação escolar. Essa compreensão fundamenta sua relevância no ensino de Matemática e sustenta sua escolha como uma das metodologias que integram esta pesquisa.

5.3 A Gamificação

A gamificação, por sua vez, tem se consolidado nos últimos anos como uma das estratégias mais promissoras entre as metodologias ativas, especialmente por criar ambientes de aprendizagem mais motivadores, dinâmicos e próximos das experiências cotidianas dos estudantes. O termo, de acordo com Kapp (2012), refere-se ao uso de elementos próprios dos jogos em contextos não lúdicos, com o objetivo de engajar, motivar e promover a aprendizagem. Essa abordagem não se limita ao simples uso de jogos educativos, mas envolve a integração de mecânicas, dinâmicas e estéticas típicas do universo dos jogos na organização das atividades pedagógicas.

A popularização da gamificação está diretamente ligada à presença das tecnologias digitais na vida dos estudantes. Conforme discute Santaella (2010), os jovens estão imersos em ambientes altamente interativos e mediados por dispositivos móveis, o que impacta diretamente suas formas de atenção, motivação e relacionamento com o conhecimento escolar. Nesse sentido, a gamificação se apresenta como uma alternativa potente para aproximar os estudantes das atividades acadêmicas, dialogando com suas práticas socioculturais e promovendo um aprendizado mais ativo.

Diversos autores destacam que a gamificação se fundamenta em princípios motivacionais capazes de promover o envolvimento contínuo dos estudantes. Werbach e Hunter (2014) identificam três dimensões basilares: motivação, elementos de jogo e dinâmicas. A motivação inclui fatores intrínsecos, como a curiosidade e a autonomia, e extrínsecos, como recompensas simbólicas. Os elementos de jogo correspondem às estruturas concretas utilizadas nas atividades, como pontos, medalhas, níveis, avatares e rankings. Já as dinâmicas dizem respeito ao comportamento emergente no processo, como cooperação, competição e senso de progressão. A combinação desses três níveis possibilita experiências de aprendizagem mais envolventes, sustentadas pelo desafio e pela participação ativa.

No contexto da Educação, especialmente na área da Matemática, esses elementos têm potencial para transformar a relação dos estudantes com os conteúdos. Conforme apontam Alsawaier (2018), a gamificação estimula o engajamento cognitivo e emocional, contribuindo para a permanência do estudante na tarefa e para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Além disso, estratégias gamificadas tendem a favorecer a autonomia, permitindo que o aluno acompanhe seu próprio progresso e perceba que está avançando gradualmente.

Os trabalhos analisados também destacam a importância da gamificação para superar desafios históricos do ensino de Matemática, como o desinteresse, a desmotivação e a percepção negativa da disciplina. Guerin (2020) argumenta que metodologias baseadas apenas em repetição e memorização podem afastar os estudantes das áreas científicas; diante disso, abordagens mais interativas e contextualizadas, como a gamificação, têm se mostrado capazes de ressignificar a aprendizagem Matemática. Na mesma direção, Junges *et al.* (2023b) observaram que a integração entre gamificação e atividades investigativas ampliou o envolvimento e a participação dos estudantes, favorecendo uma compreensão mais significativa de conceitos matemáticos.

A literatura também evidencia que a gamificação pode apoiar o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, como colaboração, persistência e tomada de decisão, especialmente quando associada a desafios que exigem resolução de problemas. Carvalho e Santiago (2015) destaca que, ao integrar narrativas, missões e metas, o professor cria um ambiente em que o estudante se sente protagonista, tomando decisões e participando ativamente da construção do conhecimento. Esse caráter investigativo aproxima a gamificação das demais metodologias ativas, reforçando seu potencial no Ensino Médio.

Outro aspecto relevante é que a gamificação não depende necessariamente de tecnologias sofisticadas; embora muitos recursos digitais possam potencializar a experiência, elemen-

tos simples, como tabelas de progressão, cartões de desafio, trilhas de aprendizagem e sistemas de pontuação, podem ser aplicados em aulas tradicionais. Zainuddin *et al.* (2020) apontam que, quando articulada a objetivos pedagógicos claros e acompanhada pelo professor, a gamificação aumenta o interesse e a persistência dos estudantes, especialmente em conteúdos considerados abstratos.

No ensino de Matemática, esse potencial torna-se ainda mais evidente ao considerarmos o caráter desafiador da disciplina e a necessidade de tornar os conceitos mais acessíveis e atraentes. Amico, Moraes e Prá (2017) destacam que atividades gamificadas contribuem para tornar a aula mais leve e interativa, estimulando a participação e o pensamento estratégico. Em pesquisas recentes, Castilho, Saraiva e Nogueira (2020) verificaram avanços significativos na compreensão de conteúdos matemáticos quando os estudantes participaram de trilhas gamificadas, nas quais resolviam desafios progressivos e recebiam feedback imediato.

No ensino de álgebra, os elementos da gamificação podem ser incorporados de forma estratégica para auxiliar a aprendizagem de conceitos fundamentais. Trilhas gamificadas podem organizar progressões de dificuldade em temas como operações com matrizes, resolução de equações ou análise de funções; *quizzes* adaptativos podem fornecer feedback imediato sobre erros comuns; e desafios por missões podem envolver a interpretação de padrões numéricos ou a construção de modelos algébricos a partir de situações reais.

Além disso, o uso de rankings cooperativos ou de medalhas, por meio de estratégias criativas, incentiva o estudante a experimentar diferentes formas de resolução. Essas possibilidades dialogam diretamente com a proposta da nossa pesquisa, na qual estruturas gamificadas contribuiriam para tornar os conteúdos algébricos mais acessíveis, motivadores e conectados às práticas dos alunos.

Assim, entendemos que a gamificação, ao integrar elementos próprios dos jogos com objetivos pedagógicos, representa uma estratégia para promover a aprendizagem Matemática no Ensino Médio. Ao criar um ambiente dinâmico, colaborativo e motivador, essa abordagem favorece o protagonismo dos estudantes e contribui para tornar o processo educativo mais alinhado às demandas contemporâneas.

5.4 Do Código à Compreensão: Explorando Conceitos Matemáticos com Python

A ampliação do uso de tecnologias digitais na escola tem transformado a forma como os estudantes interagem com conceitos matemáticos, especialmente quando essas ferramentas são articuladas a práticas investigativas e metodologias ativas. Documentos curriculares recentes reforçam que, para desenvolver o letramento matemático, o aluno precisa mobilizar diferentes linguagens, representar ideias e resolver problemas de forma contextualizada. Nesse sentido, ao incorporar a programação como mediadora do conhecimento, criamos um ambiente em que o aluno experimenta, testa hipóteses e observa relações Matemáticas, assumindo uma postura investigativa alinhada às orientações da BNCC. (Brasil, 2018).

Assim, a inserção de tecnologias educacionais, como o Pensamento Computacional ou até mesmo a linguagem de programação, apresenta-se como uma ótima alternativa pedagógica. Essas abordagens interdisciplinares podem tornar o ensino mais contextualizado e inclusivo, adaptando-se aos desafios do cotidiano. De acordo com Nóvoa (2017), as escolas que utilizam metodologias ativas conseguem criar ambientes mais significativos, pois se adaptam às necessidades dos estudantes, o que impacta diretamente o índice de presença escolar e o engajamento.

Esse movimento também dialoga com transformações mais amplas no Ensino Médio brasileiro. A inclusão da Computação como área estruturante, prevista em documentos recentes e reforçada pela Política Nacional de Educação Digital, evidencia a importância de se trabalhar a cultura digital, a compreensão de códigos e o desenvolvimento do pensamento computacional ao longo de toda a formação escolar. Como mostram Brackmann (2025), esses eixos não tratam a tecnologia como um elemento acessório, mas como um componente curricular capaz de favorecer práticas pedagógicas mais contextualizadas e críticas.

Dessa forma, a inclusão da computação na Educação Básica foi um grande avanço na formação dos estudantes. Inicialmente prevista pelas Resoluções CNE/CP 02/2017 e CNE/CP 04/2018, a disciplina começou a ser incluída em todas as etapas de ensino, ganhando força em 17 de fevereiro de 2022, com o parecer denominado *Norma sobre Computação na Educação Básica*, complemento à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), juntamente com as Tabelas de Habilidades e Competências, que foram aprovadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) por unanimidade. (Brackmann, 2025; Brasil, 2018)

No âmbito da Matemática, a aproximação entre a computação e o pensamento matemático vem sendo aprofundada por diversas pesquisas. Ashtiani e Demarchi (2025) destacam que as competências previstas para o Ensino Médio já incluem processos próprios do pensamento computacional, como a decomposição, a organização de dados, a construção de algoritmos e o uso de fluxogramas. Esses elementos abrem espaço para que a programação auxilie os estudantes a compreender a estrutura lógica dos procedimentos matemáticos, fortalecendo tanto a formulação quanto a resolução de problemas em diversos contextos.

A Política Nacional de Educação Digital (PNED), sancionada pela Lei nº 14.533/23, complementa esse movimento ao inserir computação, programação, robótica e outras competências digitais como componentes curriculares obrigatórios no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Esse documento organiza a Educação de Computação em três eixos principais:

I. Cultura Digital, que estimula uma postura crítica, ética e responsável frente às tecnologias e à informação;

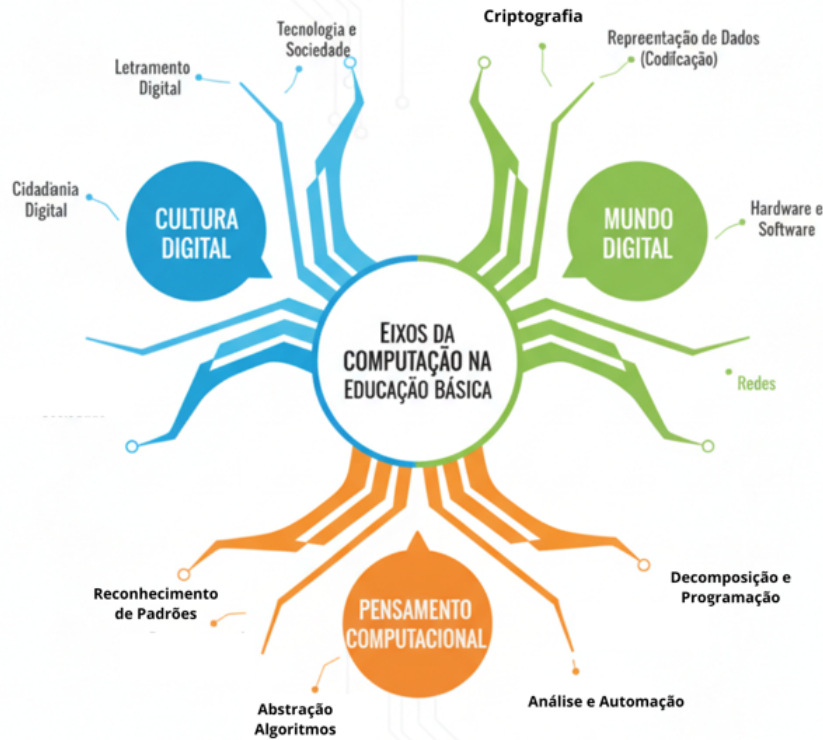
II. Mundo Digital, que envolve o uso consciente de artefatos digitais e a compreensão de códigos e dados;

III. Pensamento Computacional, que desenvolve habilidades para modelar, resolver e automatizar problemas de forma sistemática.

Esses eixos, conforme mostrados na Figura 4, oferecem aos docentes diretrizes e caminhos mais claros para promover o uso reflexivo e criativo das tecnologias, favorecendo a

integração de metodologias ativas e a construção de aprendizagens significativas (Brackmann, 2025)

Figura 4 – Eixos da Computação na Educação Básica



Fonte: Adaptado de Brackmann (2025).

Segundo Ashtiani e Demarchi (2025), no âmbito das habilidades previstas para o Ensino Médio, o pensamento computacional aparece explicitamente em algumas competências da área de Matemática. Entre essas competências, incluem-se a análise e a representação de algoritmos por meio de fluxogramas, quando pertinente, além do uso de elementos introdutórios de uma linguagem de programação para transformar algoritmos descritos em linguagem Matemática ou do cotidiano em instruções executáveis.

O letramento matemático, também previsto, está definido em competências e habilidades, em que, por meio de conceitos, argumentos e fatos que favorecem a formulação e a resolução de problemas, o aluno consegue reconhecer procedimentos e fatos matemáticos fundamentais para compreender o mundo e desenvolver essas habilidades. (Brasil, 2018)

A incorporação da linguagem de programação Python ao ensino de Matemática no Ensino Médio tem se mostrado um caminho consistente para ampliarmos as possibilidades pedagógicas e promovermos uma aprendizagem mais investigativa. Silva, Didier e Bonfim (2024) apontam que a programação, quando integrada à Modelagem Matemática, favorece a mobilização de conteúdos como lógica, funções reais, cálculo diferencial e equações diferenciais, ampliando o entendimento estrutural da Matemática escolar. Os autores também destacam que o uso do Python em plataformas como o Google Colab permite a visualização imediata dos modelos construídos, o que potencializa a aprendizagem e dá maior sentido ao estudo de fenômenos reais.

Resultados semelhantes são apresentados por Pinargote-Zambrano, Lino-Calle e Vera-Almeida (2024), cuja investigação aponta que a simplicidade sintática do Python e a robustez de suas bibliotecas o tornam um recurso eficaz no ensino de álgebra e na resolução de equações. Em nossas análises, reconhecemos que essa linguagem favorece não apenas a compreensão procedimental, mas também a autonomia dos estudantes ao explorar algoritmos, testar hipóteses e verificar resultados. Além disso, esses autores ressaltam que a crescente presença do Python nos meios acadêmicos e profissionais reforça sua relevância pedagógica, aproximando os conteúdos matemáticos das práticas de letramento digital necessárias à formação contemporânea.

Observamos ainda experiências que reforçam a pertinência da relação entre Matemática e computação como estratégia para superar dificuldades históricas de aprendizagem. Brandão, Batista e Guarniz (2024) apresenta resultados de um projeto interdisciplinar que integrou Python, Geometria Analítica e Álgebra Linear, mostrando que essa abordagem contribuiu para reduzir estigmas associados à Matemática e para ampliar a motivação dos estudantes.

Corroborando, Menezes (2019) afirma que o Python é uma linguagem de programação simples e gratuita, que pode ser utilizada na maioria dos computadores por ser um software livre. Isso permite que muitas pessoas tenham acesso e criem uma rede colaborativa ao desenvolver projetos em bibliotecas online. Além disso, sua linguagem clara e concisa é acessível ao Ensino Médio e pode ser utilizada para solucionar diversos problemas em várias áreas, incluindo a Matemática.

Uma contribuição adicional é apresentada por Araújo (2025), cuja proposta eletiva articula Python à BNCC, explorando o ensino de gráficos, tabelas e diferentes registros de representação. A autora evidencia, ainda, que tal abordagem dialoga diretamente com as competências gerais da BNCC, especialmente as relacionadas à cultura digital, ao pensamento crítico e à resolução de problemas.

Resultados semelhantes constam em experiências práticas relatadas em pesquisas recentes. Santos e Menezes (2025) evidenciam que a programação permite ao estudante visualizar operações que, no ensino tradicional, permanecem excessivamente abstratas. Ao acompanhar a execução de um algoritmo, o aluno observa, passo a passo, o funcionamento da ideia Matemática, desenvolvendo maior autonomia intelectual.

À medida que linguagens como Python se tornam recursos acessíveis e versáteis no contexto educacional, ampliam-se também as possibilidades de aproximar práticas computacionais do desenvolvimento do pensamento matemático. Essa integração não se restringe ao uso de ferramentas tecnológicas, mas envolve repensar modos de aprender, favorecendo a autonomia dos estudantes na exploração de estratégias, na formulação de soluções e na compreensão de conceitos de forma investigativa. Assim, o trabalho com programação articula-se diretamente aos princípios do Pensamento Computacional, que desempenha um papel formativo mais amplo no processo educativo.

a criatividade e autonomia dos alunos. A integração entre conhecimentos computacionais e matemáticos é essencial para resolver problemas reais e tem grande potencial para impactos sociais. (Ash-tiani; Demarchi, 2025, p. 4)

Essas discussões mostram que o pensamento computacional amplia o repertório de estratégias disponíveis ao estudante, permitindo que ele manipule, teste e valide procedimentos matemáticos de forma mais estruturada. Nesse cenário, a programação surge como uma ferramenta que favorece a experimentação ativa e o raciocínio lógico, aproximando os estudantes tanto dos algoritmos quanto das representações Matemáticas formais. Assim, integrar linguagens de programação ao ensino da Matemática reforça as competências previstas na BNCC e abre caminho para práticas pedagógicas mais investigativas. (Brackmann, 2025; Araújo, 2025; Brandão; Batista; Guarniz, 2024; Santos, 2021; Menezes, 2019)

Diante desse conjunto de evidências, reafirmamos que a integração entre Matemática e Python cria condições favoráveis ao desenvolvimento de práticas pedagógicas mais atuais. Ao empregarmos a programação como ferramenta de investigação, ampliamos a compreensão conceitual e fortalecemos o raciocínio lógico. Reconhecemos, assim, que essa articulação não apenas diversifica o ensino, mas também contribui para que a Matemática, em especial a Álgebra, seja percebida como um instrumento para interpretar e transformar a realidade em que estamos inseridos.

Nesse sentido, ao buscar envolver a linguagem de programação na contextualização de Matrizes no Ensino Médio, encontramos no Python um grande potencial. Por ser uma linguagem de fácil assimilação e de fácil acesso online, ela foi escolhida pela docente para complementar e incorporar uma das atividades da SD elaboradas por ela.

Com o intuito de tornar mais explícitas as relações entre o referencial teórico e as escolhas pedagógicas da sequência didática, organizamos um quadro-síntese que articula cada metodologia ativa estudada, Resolução de Problemas (MEAAMaRP), Sala de Aula Invertida, Gamificação e o uso de Python, aos exemplos concretos desenvolvidos na intervenção. Esses quadros visam mostrar como os princípios teóricos se materializaram nas práticas, permitindo visualizar a coerência interna do planejamento e a intencionalidade pedagógica presentes em cada etapa da SD.

Com o intuito de explicitar, de forma integrada, as relações entre os referenciais teóricos adotados e as escolhas pedagógicas que estruturaram a sequência didática, elaboramos a Figura 5, que sintetiza as metodologias ativas mobilizadas e os princípios da Educação Matemática Realística (RME). O diagrama evidencia que cada metodologia (Resolução de Problemas, Sala de Aula Invertida, Gamificação, uso de Python e Interdisciplinaridade) não foi aplicada de maneira isolada, mas sim entrelaçada a elementos centrais da RME. Dessa forma, a figura permite visualizar como as diferentes abordagens pedagógicas convergem para um núcleo comum, no qual a Matemática é compreendida como uma atividade humana, construída progressivamente a partir de situações significativas e mediadas pelo diálogo e pela ação dos estudantes.

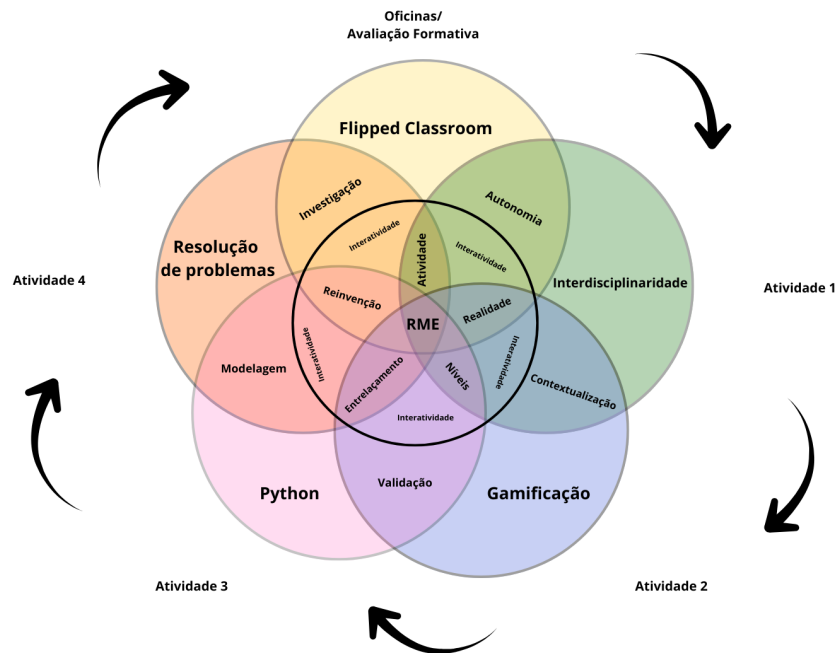
Quadro 3 – Síntese das metodologias ativas mobilizadas e suas aplicações na Sequência Didática

Metodologia Ativa	Fundamentos Teóricos	Aplicações Concretas na SD
Resolução de Problemas (MEAAMaRP)	Centrada na aprendizagem por meio de situações desafiadoras; promove a matematização horizontal e vertical; estimula a argumentação, a comparação de estratégias e a formalização progressiva.	Problema gerador envolvendo criptografia; análises em grupo; discussões coletivas; formalização das propriedades da multiplicação de matrizes; retomadas conceituais em novos problemas.
Sala de Aula Invertida (SAI)	Desloca a instrução direta para o estudo prévio; fortalece a autonomia e o protagonismo; amplia o tempo dedicado às tarefas de maior demanda cognitiva.	Criação de oficinas; estudo prévio de criptografia; encontro presencial voltado à resolução colaborativa, à análise de padrões, à experimentação e ao uso de tecnologias.
Gamificação	Integra mecânicas (pontos, medalhas), dinâmicas (cooperação, competição) e estética dos jogos para promover motivação, persistência e engajamento.	Trilha gamificada com níveis progressivos; quiz de verificação imediata; missões de decodificação; medalhas por estratégias criativas e colaborativas.
A interdisciplinaridade (Matemática + Criptografia)	Relaciona conceitos matemáticos a contextos reais e culturais; amplia o sentido e a relevância; favorece a resolução de problemas complexos.	Estudo de cifras com matrizes; leitura de situações reais de segurança digital; análise de chaves; interpretação de códigos e de erros de decodificação.
Pensamento Computacional e Python	Envolve decomposição, abstração, algoritmos e reconhecimento de padrões; programação como linguagem para modelar processos matemáticos.	Uso do Python para multiplicar matrizes, testar chaves, verificar resultados, explorar erros e comparar as soluções manuais e computacionais.

Fonte: Elaboração própria (2025).

A partir da leitura da Figura 5, torna-se possível compreender a coerência interna da nossa SD e a intencionalidade pedagógica presente em cada uma de suas etapas. As interseções entre as metodologias ativas e os princípios da RME revelam os processos de matematização mobilizados ao longo das atividades, desde a contextualização inicial e a modelagem de situações até a formalização e a validação conceitual. Observa-se, ainda, que o protagonismo discente, a autonomia, a investigação e a validação social do conhecimento surgem como elementos recorrentes, reforçando a ideia de que as metodologias ativas funcionaram como mediadoras do processo de reinvenção guiada. Essa leitura é um aprofundamento do quadro-síntese que apresentamos, no qual detalhamos como cada metodologia foi operacionalizada na prática, evidenciando suas contribuições específicas para o desenvolvimento do pensamento algébrico no contexto da sequência didática.

Figura 5 – Metodologias ativas e RME na SD



Fonte: Elaboração própria (2025).

5.5 O Papel das Sequências Didáticas

A utilização de sequências didáticas na Educação Matemática não apenas estrutura o processo de ensino, mas também cria um ambiente de aprendizagem que promove o engajamento ativo dos alunos. Para a Brasil (2018), as sequências didáticas são fundamentais para desenvolver competências e habilidades ao longo das etapas de ensino, o que possibilita uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, especialmente quando integrada à modelagem Matemática:

*os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade Matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. **Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos** para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o pensamento computacional. (Brasil, 2018, p. 264, grifo nosso)*

Ao verificar e analisar o conceito de Sequência Didática, Zabala (1998) destaca que uma sequência didática nada mais é do que um conjunto de atividades estruturadas, ordenadas e articuladas para a realização de alguns objetivos educacionais; estes, por sua vez, possuem um começo e um fim conhecidos tanto pelos alunos quanto pelo professor. Ainda de acordo com o autor, uma SD bem planejada deve garantir a progressão lógica dos conteúdos, facilitando

o aprendizado gradual e a compreensão integrada do conteúdo matemático. Além disso, ela promove a autonomia dos alunos na aplicação prática dos conhecimentos.

Dolz, Noverraz e Schneuwly (2011) conceituam a SD como um conjunto de atividades escolares organizadas de maneira sistemática, pautadas em torno de um gênero textual, oral ou escrito. Elas devem ser empregadas, como afirmam, em procedimentos pedagógicos com o intuito de ajudar os estudantes na compreensão de gêneros variados, capacitando o aluno a comunicar-se de uma forma adequada.

Corroborando com os conceitos abordados sobre SD, Araújo (2013) acredita que a SD é uma forma de o docente organizar suas atividades de ensino em torno de temáticas centrais. Estruturada em seções, a primeira é onde o professor apresenta a situação do estudo, ou seja, mostra detalhadamente os objetivos a serem cumpridos e os objetos de conhecimento. Após essa primeira sessão, de acordo com o autor, ocorre uma produção inicial (diagnóstica), o que permite analisar as habilidades já adquiridas ou os conhecimentos prévios dos estudantes. A partir disso, o trabalho com as SD é desenvolvido em oficinas ou módulos, com a quantidade variando conforme os objetivos do docente. O professor finaliza com uma avaliação somativa para analisar os resultados obtidos.

As SD possibilitam um ensino mais investigativo, pois, ao organizar os conteúdos de forma lógica e articulada, permitem que o professor promova oportunidades para que os alunos explorem e questionem os conceitos matemáticos, promovendo uma aprendizagem mais ativa e significativa. Além disso, a problematização e a contextualização dos conteúdos tornam o aprendizado mais relevante, uma vez que os alunos podem notar a aplicação prática da Matemática em diversos contextos da vida cotidiana (Batista; Oliveira; Rodrigues, 2016)

Neste sentido, as SD tornam os alunos protagonistas de seu aprendizado, permitindo a aplicação criativa do conhecimento matemático. Alinhadas às BNCC, essas práticas elevam a qualidade do ensino e, além disso, promovem uma aprendizagem significativa. Cabral (2017) reforça essa ideia ao afirmar que:

O processo de ensinar e aprender precisa, necessariamente, passar por essa dinâmica, qual seja, de se elaborar o cenário didático com a finalidade de levar os alunos a perceberem, ainda que intuitivamente, os padrões, as regularidades que possibilitam a configuração de modelos generalizantes. (Cabral, 2017, p. 41)

Embora as sequências didáticas sejam amplamente reconhecidas como uma abordagem eficaz no ensino da Matemática, seu uso requer cuidados específicos. Vieira e Ohira (2013), por exemplo, destaca a importância do planejamento, da aplicação e da avaliação ao longo de todo o processo. Assim, de acordo com Demarchi e Ashtiani (2024), no planejamento, o professor deve selecionar conteúdos relevantes para motivar os alunos. Durante a aplicação, é fundamental monitorar o progresso dos alunos e adaptar as atividades conforme necessário. E, no decorrer da aplicação, o professor deve avaliar o desempenho dos alunos em cada atividade de forma contínua; isso permite ajustes necessários para garantir uma aprendizagem ativa. Em outras palavras, uma avaliação constante e integrada ao ensino ajuda o professor a

ajustar o plano de ensino com base na eficácia dos conteúdos e das metodologias, promovendo um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e eficaz.

À luz das discussões apresentadas neste capítulo, compreendemos que as metodologias ativas analisadas não se configuram como recursos pontuais ou modismos pedagógicos, mas como estratégias teoricamente fundamentadas e coerentes com as demandas contemporâneas do ensino de Matemática no Ensino Médio. A Resolução de Problemas, a Sala de Aula Invertida (Flipped Classroom), a Gamificação, a Interdisciplinaridade e o uso do Python revelam-se complementares, pois compartilham princípios comuns, como o protagonismo discente, a investigação, a interação e a construção progressiva do conhecimento. Quando relacionadas à Educação Matemática Realística, essas metodologias favorecem processos de matematização horizontal e vertical.

Nesse contexto, torna-se evidente que a efetivação dessas metodologias depende de um planejamento intencional e de uma organização didática que considere tanto os objetivos matemáticos quanto as demandas cognitivas envolvidas em cada tarefa. É justamente nesse ponto que a Sequência Didática assume um papel central, ao permitir a articulação entre conteúdos de maneira progressiva, estratégias pedagógicas e formas de avaliação. Assim, no capítulo seguinte, apresentamos os procedimentos metodológicos desta pesquisa, descrevendo a construção da sequência didática desenvolvida, as tarefas que a compõem, bem como a categorização dessas tarefas em termos de objetivos, demandas cognitivas e potencial de matematização. Esse movimento metodológico busca demonstrar como os referenciais teóricos discutidos neste capítulo se materializaram em nossa prática pedagógica, sustentando as análises a serem aprofundadas posteriormente.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentaremos os aspectos metodológicos desta pesquisa, realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola localizada em Ourinhos, no interior de São Paulo. Com o objetivo de investigar o potencial das metodologias ativas e da Educação Matemática Realística (RME) na reestruturação do ensino da Álgebra, com ênfase em matrizes e suas operações, utiliza-se a criptografia como ferramenta interdisciplinar. Estruturamos a intervenção pedagógica em diferentes etapas, articulando atividades de avaliação formativa, oficinas de aprendizagem, sequência didática e aplicação de questionários diagnósticos e avaliativos.

6.1 Tipo de pesquisa e abordagem

Nossa pesquisa caracteriza-se como uma abordagem predominantemente qualitativa, com apoio em dados quantitativos de natureza descritiva, uma vez que busca compreender o impacto das metodologias ativas no ensino da Álgebra por meio da análise interpretativa dos registros produzidos pelos estudantes, relacionando-os aos indicadores numéricos simples que auxiliam na identificação de tendências e variações no desempenho discente.

O eixo qualitativo fundamenta-se na Análise Textual Discursiva (ATD), conforme os preceitos de Moraes e Galiuzzi (2011), possibilitando o exame aprofundado de diferentes materiais produzidos ao longo da intervenção pedagógica, tais como apresentações orais, registros escritos das oficinas, materiais didáticos elaborados pelos alunos e observações sistematizadas em diário de campo.

Segundo Moraes e Galiuzzi (2011), a ATD constitui-se como um processo de auto-organização e de construção de compreensões sobre o fenômeno investigado, no qual emergem novos entendimentos a partir do envolvimento construtivo, participativo e analítico do pesquisador. Os autores destacam que, na etapa de categorização, para que a análise seja consistente, as categorias devem ser pertinentes e diretamente relacionadas aos objetivos da pesquisa, o que favorece a compreensão dos fenômenos estudados. Essa abordagem permite identificar os saberes prévios dos estudantes, suas dificuldades iniciais, modos de compreensão e percepções acerca dos conteúdos algébricos, aspectos que serão discutidos por meio das categorias emergentes a serem apresentadas posteriormente.

Desse modo, a ATD tem como objetivo apresentar ideias, conceitos e compreensões construídas ao longo da investigação, por meio da elaboração de metatextos que atribuem novos sentidos aos dados analisados. Esses metatextos são organizados de forma coerente e estruturada a partir das categorias e subcategorias construídas durante a análise, constituindo, conforme destacam os autores, descrições e interpretações que representam um modo de teorização dos fenômenos investigados (Moraes; Galiuzzi, 2011, p. 32).

A partir das informações produzidas, dos dados construídos e das ações desenvolvidas no contexto investigado, a ATD serviu como subsídio para interpretar analiticamente os acontecimentos observados e para construir categorias de análise que contribuíssem para uma compre-

ensão mais aprofundada dos processos de ensino e aprendizagem da Álgebra, em consonância com os objetivos desta pesquisa, conforme apresentamos na seção de análise e discussão dos dados.

O aspecto quantitativo, por sua vez, assume caráter estritamente descritivo e foi desenvolvido com base na análise dos Questionários 2 e 3 (APÊNDICES B e C), que contemplam questões objetivas, dissertativas e de escala. Esses dados foram utilizados para avaliar a evolução do desempenho dos estudantes em relação a conteúdos como matrizes, operações algébricas, determinantes, matriz inversa e processos de codificação. As análises envolveram procedimentos simples, tais como o cálculo da média, da mediana, da dispersão e do número de acertos, permitindo a comparação dos resultados obtidos antes e após as intervenções pedagógicas.

A reaplicação de algumas questões permitiu identificar variações no desempenho dos estudantes ao longo do processo, oferecendo indícios de avanços conceituais e contribuindo para a compreensão da efetividade das metodologias ativas empregadas. Ressalta-se que não houve a utilização de estatística inferencial, uma vez que os dados quantitativos tiveram como finalidade mapear tendências e apoiar a interpretação qualitativa, em diálogo direto com as categorias emergentes da Análise Textual Discursiva.

Dessa forma, a relação entre a análise qualitativa e os dados quantitativos descritivos permitiu uma compreensão mais ampla do fenômeno investigado, sem atribuir aos dados numéricos um papel explicativo central, mas sim complementar, reforçando a interpretação dos processos de ensino e aprendizagem da Álgebra no Ensino Médio, a partir de práticas pedagógicas centradas no estudante.

6.2 Contexto escolar e sujeitos da pesquisa

O público-alvo desta pesquisa foi composto por estudantes do 2º ano do Ensino Médio de um colégio localizado no município de Ourinhos, no interior de São Paulo. A turma é composta por 14 alunos, com idades entre 15 e 16 anos. Para a realização dessas atividades, foram previamente proporcionados 08 (oito) encontros presenciais no colégio, durante o próprio turno, com duração de 2 (duas) aulas de 45 minutos cada.

Inicialmente, organizamos os estudantes em equipes predefinidas, de acordo com o nível de proficiência, de forma equilibrada, com o propósito de atuarem como protagonistas no processo de aprendizagem por meio da metodologia Flipped Classroom. Cada equipe ficou responsável pela elaboração e aplicação de oficinas didáticas sobre conteúdos de álgebra, como, por exemplo, operações básicas com matrizes, determinantes, matriz inversa, além de conceitos introdutórios de criptografia, codificação e decodificação, incluindo a Cifra de César e a Cifra de Hill. Apoiada nas lentes da RME, a intervenção inicial foi desenhada para que os estudantes atuassem como protagonistas de sua aprendizagem. Para isso, a dinâmica combinou a aprendizagem cooperativa com a metodologia Flipped Classroom, já que, com antecedência,

cada equipe em casa se preparava para que, em seguida, assumisse a responsabilidade pelas oficinas ofertada aos demais colegas, configurando também uma instrução entre pares.

Cada oficina, de acordo com as nossas instruções, deve conter uma apresentação teórica, além de um roteiro estruturado com objetivos, etapas e tempo estimado, bem como material de apoio com exercícios práticos, com duração máxima de 45 minutos por oficina, aplicada em duas sessões distintas. A professora-pesquisadora atuou como mediadora, oferecendo orientação contínua durante a preparação das oficinas e observando a execução das atividades pelos alunos.

6.3 Organização das Intervenções

O primeiro momento da intervenção consistiu em uma avaliação formativa inicial, realizada por meio da análise das oficinas construídas pelos próprios estudantes. Essa etapa teve como objetivos mapear o repertório matemático prévio da turma, identificar formas de compreender os conteúdos de álgebra e promover um ambiente de aprendizagem colaborativa. Todas as produções dos alunos, incluindo apresentações, roteiros e materiais didáticos, bem como observações e relatos informais, foram registradas em um diário de campo pela professora-pesquisadora, compondo parte do corpus de análise da pesquisa.

Em seguida, aplicamos os questionários digitais, divididos em três etapas. O Questionário 1 (Apêndice A) teve caráter avaliativo e buscou compreender a percepção dos estudantes sobre o planejamento, a execução e o impacto pedagógico das oficinas, investigando quais conceitos foram mais bem compreendidos, quais apresentaram dificuldades e como os alunos avaliaram seu próprio desempenho e o trabalho em equipe.

Após esse momento de avaliação formativa, foi aplicado o Questionário 2 (Apêndice B), de caráter diagnóstico, que se concentrou nos conhecimentos prévios dos alunos em Álgebra, com foco em matrizes, operações, determinantes, matriz inversa e codificação. Esse formulário foi desenvolvido com a finalidade de entender quais habilidades foram identificadas como fragilizadas, até então desconhecidas pelos alunos, além de verificar as percepções acerca das metodologias ativas, de modo a moldar a aplicação da sequência didática e amparar a professora-pesquisadora quanto aos níveis de tarefas propostas, considerando vários níveis de esforço cognitivo.

Após esses momentos formativos e diagnósticos, aplicamos a sequência didática elaborada especialmente para reestruturar o ensino de Álgebra nesse contexto do ensino médio, constituída por quatro atividades desenvolvidas por meio de tarefas Matemáticas envolvendo diferentes metodologias ativas, utilizando os princípios da RME, focadas nas habilidades algébricas, matrizes e suas operações, que foram trabalhadas ao longo de quatro encontros semanais. Nesse momento de aplicação, as intervenções pedagógicas moldavam-se em diferentes contextos e atividades, tendo como temática central a criptografia. O interessante da nossa SD é que sua estrutura permite várias formas de aplicação em diferentes ordens, pois mescla metodologias ativas distintas e abordagens da EMR que valorizam a experimentação dos alunos.

Além disso, as tarefas que compõem cada atividade da SD foram pensadas para atender aos níveis de demanda cognitiva, conforme proposto por Stein e Smith (1998). Durante suas pesquisas, as autoras evidenciaram quatro tipos de demandas: a memorização, os procedimentos sem conexão com significados, os procedimentos com conexão com significados e o fazer Matemática. Também os classificaram de acordo com as demandas cognitivas, considerando os dois primeiros de baixa demanda cognitiva e os dois últimos de alta demanda cognitiva, conforme mostrado na tabela 4 e na figura 6.

Quadro 4 – Níveis de Demandas Cognitivas

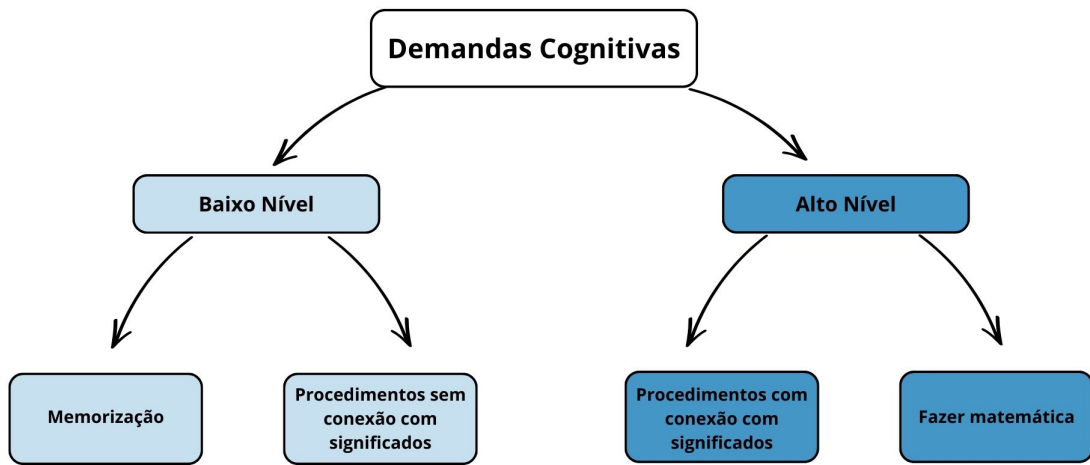
Nível	Tipo de Tarefa	Características
Nível Baixo	Memorização	Envolve a reprodução de fatos, regras, fórmulas ou definições. São tarefas que não exigem compreensão conceitual e não se relacionam a procedimentos generalizáveis.
Nível Baixo	Procedimentos sem conexões com significado	São tarefas predominantemente algorítmicas, com foco na execução mecânica de passos conhecidos. Exigem demanda cognitiva limitada e não estabelecem relações com os conceitos subjacentes ao procedimento.
Nível Alto	Procedimentos com conexões com significado	Requerem a aplicação de procedimentos articulados às ideias conceituais. Envolve a compreensão de relações, justificativas e conexões entre etapas, o que favorece o desenvolvimento conceitual.
Nível Alto	Fazer Matemática	Demandam pensamento complexo e não algorítmico. Exigem a criação de estratégias, a exploração de padrões, a tomada de decisões e o automonitoramento, promovendo uma compreensão profunda das estruturas Matemáticas.

Fonte: Adaptado e traduzido de Stein e Smith (1998).

Após a intervenção pedagógica, aplicamos o Questionário 3 (Apêndice C), composto por algumas questões reaplicadas do Questionário 2 (Apêndice B), com o intuito de avaliar a proficiência dos estudantes e as mudanças nos níveis de compreensão, engajamento e interesse. Todos os questionários foram aplicados de forma anônima e digital, utilizando os notebooks da escola, e sua participação foi voluntária, em consonância com os princípios éticos de pesquisa com seres humanos.

No acompanhamento da intervenção, incluímos observações sistemáticas, registros em diário de campo e análises dos materiais produzidos pelos estudantes, o que nos permitiu avaliar tanto o engajamento quanto a apropriação conceitual dos conteúdos. Ressaltamos que a intervenção buscou superar a desmotivação frequentemente observada no ensino de álgebra por meio de atividades contextualizadas, colaborativas e desafiadoras. Esperamos que essa abordagem, ao articular teoria, prática, tecnologia e protagonismo estudantil, contribua para

Figura 6 – Demandas Cognitivas de tarefas



Fonte: Elaboração própria (2025).

fortalecer o interesse pela Matemática, ampliar a autonomia intelectual dos alunos e fornecer subsídios concretos para inovações pedagógicas no ensino da Álgebra no Ensino Médio.

Na próxima seção, apresentaremos a estrutura da sequência didática desenvolvida pela professora-pesquisadora, delineando cada tarefa Matemática composta e suas respectivas demandas cognitivas, conforme descritas por Stein e Smith (1998). Segundo os autores, a demanda cognitiva de uma tarefa Matemática está diretamente relacionada ao tipo de raciocínio aplicado na sua resolução. Isso significa que os alunos podem se deparar com diferentes demandas ao longo de uma sequência didática, como, por exemplo, tarefas de memorização, conexões com outros conteúdos ou até mesmo tarefas que os fazem pensar e os estimulam de maneira não habitual.

6.4 Elaboração da Sequência Didática e Categorização das tarefas

A sequência didática desenvolvida abordou conteúdos de matrizes e suas operações, além de sistemas lineares, por meio de atividades diversificadas e de maneira interdisciplinar com a criptografia. Ao longo da SD, foram utilizadas, em cada atividade, tarefas cujas demandas cognitivas eram diversificadas, atendendo a todos os alunos de forma completa, além de utilizar diferentes metodologias em cada uma das atividades da SD. Além disso, a estrutura desta SD baseou-se nos princípios da Educação Matemática Realística.

6.4.1 Atividade 1: Por que proteger informações?

A primeira atividade da SD: *“Por que proteger informações?”* explorou as senhas pessoais dos alunos, propondo a construção de um mapa mental sobre criptografia de ponta a ponta, tipos de dados protegidos, bem como o tipo de Matemática envolvida no processo de segurança da informação e as limitações dessa segurança. Essa atividade foi desenvolvida com a finalidade de introduzir o conteúdo de maneira interdisciplinar, em que a criptografia foi uma ferramenta que serviu como apoio para contextualizar o conceito de matrizes dentro do cenário atual de segurança digital e, é claro, trazendo todo o sentido da Álgebra para os alunos, pois está associado à realidade em que vivem diariamente.

Caracterização das tarefas

As tarefas da Atividade 1 foram constituídas como de alta demanda cognitiva, podendo ser classificadas como Nível 3 (tarefas que requerem planejamento, justificativa, uso de evidências de várias fontes e tomada de decisão crítica em contextos reais), ou seja, Procedimentos com Conexões com significado, conforme evidenciado no quadro 4, segundo a taxonomia de Stein e Smith (1998). A compreensão conceitual, no momento em que a professora-pesquisadora questiona *“o que é senha forte e dados pessoais”*, e por ter aplicação em um contexto real, torna esse nível muito visível, já que os alunos precisam pensar em como explicar, por meio de um infográfico, por quanto tempo um computador levaria para quebrar uma senha, por exemplo. Além disso, envolve a análise e a avaliação de evidências, como sites de teste de senhas, violações de dados e comparações entre fontes.

A experimentação de testar as senhas pessoais torna a tarefa ainda mais próxima da realidade dos alunos. Além da construção de argumentos e da tomada de decisão ao debater se é confiável enviar dados por aplicativo de mensagem/e-mail, o planejamento e a organização para apresentar a discussão em 15 minutos tornam a tarefa ainda mais adequada a realidade dos alunos, instigando-os a pensar criticamente, usando a Matemática como base teórica para justificar a segurança.

Uma sugestão de adaptação dessa tarefa para um professor que queira utilizá-la em outra série ou em um contexto diferente dos alunos participantes desta pesquisa seria reduzi-la para o nível 2 ou 1, ao solicitar apenas explicações conceituais básicas, como *“o que é uma senha forte”* ou a execução de uma tarefa repetitiva (repetição de passos para criar senhas), sem exigir justificativas ou debates. Assim, essa tarefa teria um baixo nível de demanda cognitiva, podendo ser encaixada em outros contextos na sala de aula. É importante destacar que, durante as aulas de Matemática, o professor pode utilizar tarefas de diferentes demandas cognitivas, dependendo do contexto, do cenário, da idade ou do objetivo que se espera atingir com a tarefa. Cabe ao discente realizar as adaptações necessárias.

A Atividade 1 foi dividida em três tarefas, e os alunos foram organizados em duplas. A atividade foi iniciada com a leitura orientada de um trecho do texto *“A Importância de Senhas*

Fortes e de Uma Boa Gestão de Senhas”, do Instituto Brasileiro de Cibersegurança, no qual foram discutidas práticas e recomendações para a criação de senhas seguras.

ATIVIDADE 1 da SD: POR QUE PROTEGER INFORMAÇÕES?

Leia o trecho do texto: “**A Importância de Senhas Fortes e de Uma Boa Gestão de Senhas**” do IBSEC (Instituto Brasileiro de Cybersegurança):

Senhas fortes são essenciais para qualquer site ou conta que você utilize. Senhas longas e complexas podem ser frustrantes, mas podem fazer toda a diferença na prevenção do roubo de seus dados.

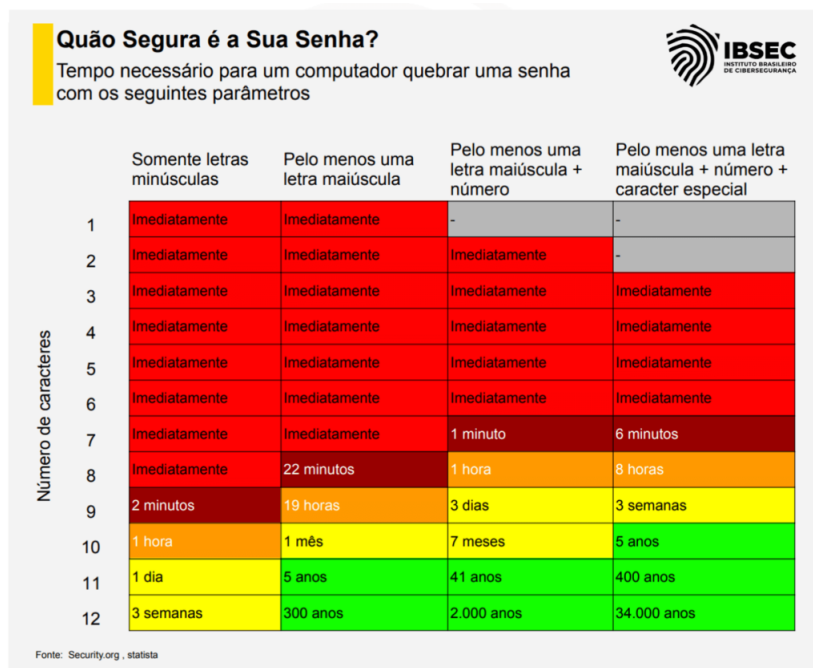
Um infográfico que explique quanto tempo um computador levaria para quebrar sua senha. A melhor prática é criar uma senha que utilize pelo menos uma letra maiúscula, um número e um símbolo. Além disso, ela deve ter no mínimo 9 caracteres de comprimento, mas quanto mais longa, melhor.

Se você não tem certeza se criou uma senha forte, existem ferramentas online que podem ajudar. Os dois sites abaixo permitem que você teste a força de sua senha. Eles também verificam se seus dados foram publicados em alguma violação de dados.

<https://nordpass.com/secure-password/> e <https://password.kaspersky.com/>

Texto completo disponível em: <https://ibsec.com.br/a-importancia-de-senhas-fortes-e-de-uma-boa-gestao-de-senhas/> Acesso em 12 de maio de 2025.

Figura 7 – Segurança de uma Senha



Fonte: Instituto Brasileiro de Cibersegurança (2025).

Tarefa 1: Discussão inicial

Em duplas, os alunos foram instigados a refletir sobre a fragilidade de suas senhas pessoais. Com base neste texto, realizamos uma discussão inicial de aproximadamente 15 minutos. Esse momento teve caráter diagnóstico e formativo, permitindo identificar as concepções intuitivas dos alunos, suas percepções de risco e suas experiências prévias relacionadas à segurança digital.

O que é uma senha forte? O que são dados pessoais?

Você confia no envio de dados pelo WhatsApp ou e-mail? Explique o porquê.

Tarefa 2: Criptografia de ponta a ponta

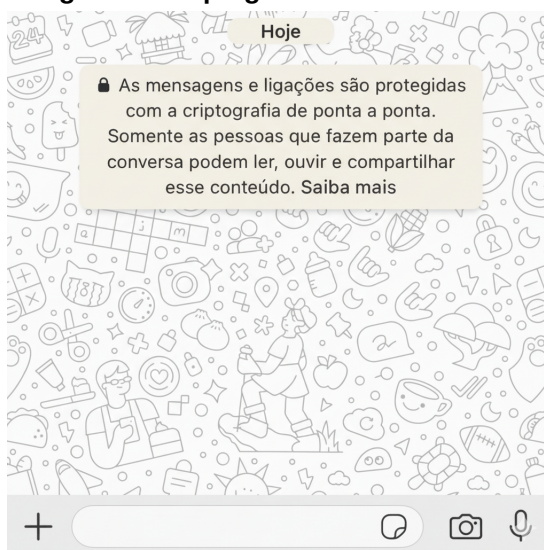
Na segunda tarefa, os alunos discutiram a criptografia de ponta a ponta. A partir da observação de uma imagem ilustrativa do funcionamento desse tipo de criptografia, eles foram provocados a refletir e a questionar a segurança real. As respostas foram registradas coletivamente em um mural virtual (Padlet), possibilitando a socialização das ideias, a comparação de diferentes pontos de vista e a construção coletiva do conhecimento.

Em duplas, respondam: *“Quando você envia uma mensagem no WhatsApp, quem pode ler essa mensagem além de você e da pessoa que a recebe?”* Insiram suas respostas no PADLET acessando o QR Code ou o link: <https://padlet.com/tatielen1/whatsapp-e-a-seguran-a-5gelblrf129m17w3>.

Tarefa 3: Pesquisa Guiada

Em seguida, os alunos realizaram uma pesquisa dirigida na qual foram convidados a elaborar um mapa mental com o tema central "Criptografia de ponta a ponta". Nesse mapa, os alunos deveriam responder aos seguintes questionamentos:

Figura 8 – Criptografia de Ponta a Ponta



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Figura 9 – QR Code do Padlet



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

1. O que significa “criptografia de ponta a ponta”? Explique com as palavras de vocês.
2. Quais dados são protegidos?
3. Que tipo de Matemática está envolvida? (chaves públicas e privadas, RSA, curvas elípticas) Explique de maneira simples e didática.
4. Quais são as limitações dessa segurança?

As orientações da professora pesquisadora enfatizaram a organização das ideias, o uso de cores e uma linguagem acessível, uma vez que os mapas seriam discutidos posteriormente. A elaboração desse mapa configurou-se como um recurso pedagógico fundamental para a sistematização das informações, permitindo aos alunos visualizar relações entre conceitos tecnológicos e matemáticos.

Ainda que de forma introdutória e não formalizada, esse momento possibilitou perceber que a segurança da informação se apoia em estruturas Matemáticas, especialmente algébricas, preparando o terreno conceitual para o estudo posterior de matrizes e suas operações. Dessa forma, a Atividade 1 cumpriu o papel de problematizar o tema da criptografia, promover o protagonismo discente e atribuir significado ao estudo da Álgebra, ao mostrar sua aplicação em contextos atuais e socialmente relevantes, alinhando-se aos pressupostos das metodologias ativas e da Educação Matemática Realística.

6.4.2 Atividade 2: Agência de Espionagem Escolar

A segunda atividade da SD, intitulada “*Agência de Espionagem Escolar: decifrando a senha do cofre*”, utilizou a gamificação como estratégia para aprofundar a compreensão de operações com matrizes, determinantes e lógica de codificação. Os alunos foram colocados em um cenário investigativo, no qual precisavam solucionar problemas envolvendo matrizes a fim de encontrar pistas que, ao serem interpretadas e organizadas, revelariam o próximo local a seguir. As mensagens foram criptografadas utilizando a Cifra de César e, a cada decodificação, os alunos se deparavam com uma chave de codificação diferente. Essa abordagem promoveu uma modificação nos conceitos algébricos ao inseri-los em uma situação-problema concreta e com um propósito comunicativo claro, elevando o engajamento e o protagonismo dos estudantes.

A atividade foi composta por três tarefas principais, cada uma com objetivos pedagógicos distintos. Na Tarefa 1, os alunos receberam a narrativa da missão e precisaram compreender o enredo e o funcionamento geral da dinâmica. Na Tarefa 2, as equipes saíram em busca das pistas codificadas nos diferentes ambientes da escola, recolhendo as matrizes e registrando as informações. Na Tarefa 3, os grupos reuniram as pistas coletadas e realizaram operações com matrizes para decodificar as mensagens, calcular determinantes, quando necessário, e identificar a senha final.

Na sala de aula teórica, cada dupla recebeu um envelope com um problema matricial. Caso conseguissem resolver corretamente, ganhariam um enigma contendo uma dica criptografada por uma chave numérica, que indicaria para onde deveriam ir, buscando, assim, o próximo envelope. A direção, a secretaria e a coordenação do Colégio auxiliaram na distribuição dos envelopes aos alunos no momento de sua chegada aos espaços pré-definidos.

Após encontrar todos os envelopes, os alunos foram deslocados até o laboratório, um espaço de interação onde as mesas são dispostas de forma integrada, em equipes, seguindo os preceitos das metodologias ativas. Lá, a professora-pesquisadora os esperava e entregava o desafio final, composto a partir da lei de formação até a matriz inversa. Esse desafio precisava ser resolvido corretamente, gerando uma senha para abrir o cofre secreto. A atividade, além do aprendizado construído, foi muito prazerosa, pois os alunos exploraram todos os espaços escolares, saíram da sala de aula tradicional e experimentaram o novo.

Caracterização da tarefa

As tarefas da Atividade 2 da SD foram construídas sem se limitar a um único conceito, abrangendo várias etapas e operações distintas que exigem que o estudante combine e aplique múltiplos procedimentos matemáticos para alcançar a solução final. Nesse sentido, elas são consideradas tarefas de alta demanda cognitiva, conforme Stein e Smith (1998).

A primeira tarefa da atividade 2 envolve a decodificação de mensagens utilizando a Cifra de César e a resolução de problemas envolvendo operações com matrizes. Embora a primeira seja relativamente simples, ela exige mais do que a simples substituição de letras, pois solicita que os alunos compreendam o princípio da cifra, entendendo o processo inverso da codificação.

Assim, ela se encaixa no **Nível 3 (procedimento com conexão com o significado)** de acordo com Stein e Smith (1998), já que, embora o aluno siga um procedimento (subtrair a chave do valor numérico da letra), o processo não é mecânico. Eles precisam entender a relação entre as letras e os números, além da lógica de deslocamento cíclico, para que possam aplicar a decodificação, já que o alfabeto possui apenas 26 letras e, com os enigmas, precisam ultrapassar esse limite, indo além da aritmética.

Já a segunda tarefa, o cálculo de operações com Matrizes e a busca física das pistas, encaixa-se de maneira híbrida entre os níveis e pode ser classificada como **Nível 2 (Procedimentos sem conexão com significado)**, caso se limite à execução mecânica de uma orientação dada. Entretanto, quando os estudantes organizam estratégias de cooperação, discutem rotas, dividem tarefas e inferem pistas a partir do contexto, ocorre uma elevação para o **Nível 3**, devido à tomada de decisão, à articulação de informações e à resolução de situações não lineares. Como já foi mencionado anteriormente, essa tarefa foi pensada de maneira intencional pela professora-pesquisadora, mesclando os níveis da taxonomia de Stein e Smith (1998) para que todos os alunos se sintam integrados no ambiente de aprendizagem, podendo juntos construir os conhecimentos e fortalecer as habilidades algébricas.

Cabe destacar que tais características não surgiram de forma incidental. Estrutturamos as tarefas de modo a integrar diferentes níveis da taxonomia de Stein e Smith (1998), garantindo não apenas acessibilidade aos estudantes com diferentes níveis de proficiência, mas também favorecendo oportunidades de avanço cognitivo. Dessa forma, a atividade estimula o pensamento flexível, o uso de raciocínios variados em contextos distintos e a mobilização de procedimentos associados à resolução de problemas, fortalecendo habilidades fundamentais ao pensamento algébrico.

ATIVIDADE 2 da SD: AGÊNCIA DE ESPIONAGEM ESCOLAR

Bom dia, meus queridos alunos. Sei que não é bem assim que imaginavam, mas sim! Eu sou uma **Agente secreta!!!** Especificamente, sou diretora de uma agência chamada *Agência Escolar de Comunicação Secreta* (AECS). Ninguém sabe ainda, mas o mundo está em risco, e vocês, meus agentes (ops, alunos), precisam me ajudar a trocar informações secretas de forma segura para evitar que dados vazem para espiões e para abrir o cofre com as informações sigilosas. A segurança da comunicação depende de uma técnica antiga, porém ainda valiosa para compreender os princípios modernos: a **Cifra de César**.

Tarefa 1: Apresentação da Missão

Cada dupla de alunos terá que encontrar um código formado pelas letras escondidas na escola para decodificá-lo. Essa mensagem terá que ser decodificada utilizando a tabela da Cifra de César.

Passo a passo de como utilizar a Cifra de César nos enigmas

Quadro 9 – Cifra de César

Letra	Número	Letra	Número	Letra	Número
A	0	K	10	U	20
B	1	L	11	V	21
C	2	M	12	W	22
D	3	N	13	X	23
E	4	O	14	Y	24
F	5	P	15	Z	25
G	6	Q	16		
H	7	R	17		
I	8	S	18		
J	9	T	19		

Fonte: Elaboração própria (2025).

1. **Transforme as letras em números.** Use a tabela: $A = 0, B = 1, C = 2, \dots, Z = 25$.

Exemplo: a palavra “PAZ”:

$$P = 15, A = 0, Z = 25.$$

2. **Some a chave secreta.** Escolha um número como chave de segurança. Por exemplo, chave = +3.

$$P = 15 \rightarrow 15 + 3 = 18,$$

$$A = 0 \rightarrow 0 + 3 = 3,$$

$$Z = 25 \rightarrow 25 + 3 = 28.$$

Atenção: o alfabeto vai só até 25! Se o número ultrapassar, recomece do zero.

3. **Converta os novos números em letras.**

$$18 = S, 3 = D, 28 = C.$$

Resultado final cifrado: **SDC**.

Exemplo de questão (Equipe 1)

Q4. (Charada) Eu sou quadrada, não sou identidade, mas se me multiplico por mim mesma, continuo igual. Quem sou?

- a) Matriz identidade
- b) Matriz idempotente

c) Matriz nula

d) Matriz triangular

Exemplo de mensagem codificada com a dica de onde as duplas devem ir (QUADRA):

Mensagem cifrada (+2) que os alunos receberam:

Vgppjq gurcçq rctc eqttgt g rwnct, Qpfg c dqnc iquvc fg
swkect. Swcn é q nwict swg xqeê xck gpeqpvtct?

Mensagem decodificada:

Tenho espaço para correr e pular, Onde a bola gosta de quicar. Qual é o lugar que você vai encontrar?

Leis de formação das Matrizes que estavam escondidas nos envelopes, necessárias para o desafio final:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3}, \text{ com } a_{ij} = i + 2j.$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3}, \text{ com } b_{ij} = 2i - j.$$

$$C = (c_{ij})_{3 \times 3}, \text{ com:}$$

$$\begin{cases} c_{ij} = 1 & \text{se } i = j, \\ c_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Tarefa 2: Hora da Decodificação!

Problema: Missão Secreta – Decifrando a Senha do Cofre

A agente secreta Tati recebeu três mensagens codificadas na forma de matrizes A, B e C, cada uma de tamanho 3×3 . A senha do cofre está escondida na diagonal principal da matriz final. As matrizes são definidas por leis de formação recebidas na missão. A agente precisa seguir os passos:

1. Somar $A + B = D$,
2. Subtrair C de $D = E$,
3. Multiplicar E por um escalar $k = 2$, $F = 2E$,
4. Verificar se F é simétrica. Se não for, calcule $G = F + F^t$ para obter uma matriz simétrica.
5. A senha secreta são os números da diagonal principal da matriz final F ou G .

Qual é a senha que abre o cofre?

6.4.3 Atividade 3: Gerando códigos com Python

A terceira atividade da sequência didática, intitulada “*Gerando códigos com Python*”, teve como objetivo articular os conceitos algébricos de multiplicação de matrizes, determinantes e criptografia que os alunos trabalharam até então, utilizando a linguagem de programação Python como ferramenta de validação e experimentação Matemática. A proposta aproximou os estudantes de um contexto tecnológico presente na cultura digital, buscando promover a compreensão de como a Matemática opera no ambiente computacional, especialmente nos mecanismos de codificação e decodificação de mensagens.

Essa atividade foi organizada em quatro tarefas principais. Na Tarefa 1, os alunos compararam os resultados da multiplicação de matrizes realizada manualmente com os obtidos pelo Python, refletindo sobre a confiabilidade e a funcionalidade do uso do computador nesse processo. Na Tarefa 2, os estudantes modificaram os valores das matrizes iniciais e testaram novamente os códigos, construindo argumentos sobre a não comutatividade da multiplicação matricial. Trabalhando diretamente com criptografia, na Tarefa 3, os alunos transformaram mensagens em números, utilizando uma matriz-chave para codificá-las com o apoio do Python. Finalizando, na Tarefa 4, calcularam os determinantes manualmente e compararam-os aos resultados do código, analisando o papel do determinante na inversibilidade das matrizes e sua relação com a possibilidade de decifrar mensagens.

Caracterização da tarefa

As tarefas da Atividade 3 podem ser classificadas predominantemente como de **alta demanda cognitiva**, com destaque para o **Nível 4 (Fazer Matemática)**, conforme a taxonomia de Stein e Smith (1998). Na Tarefa 1, os estudantes precisaram mobilizar seus conhecimentos prévios, comparar representações, justificar os resultados e interpretar as diferenças entre o procedimento manual e o computacional. Essa tarefa situa-se no **Nível 3 (Procedimentos com conexões significativas)**, pois exige a articulação entre estratégias, a interpretação de resultados e a verbalização de justificativas.

Já a Tarefa 2 exige que o aluno investigue propriedades Matemáticas, explore novos exemplos e reflita sobre as implicações da ordem das multiplicações. Ao comparar o resultado de $A.B$ e $B.A$ os alunos refletem sobre uma propriedade não trivial da Álgebra Linear, caracterizando a tarefa como **Nível 4 (Fazer Matemática)**, pois demanda elaboração, generalização e construção argumentativa, algo que exige deles todo o potencial matemático investigativo.

Na Tarefa 3, relacionada à criptografia matricial, os estudantes realizaram a conversão de letras em números, construindo uma matriz-mensagem; em seguida, aplicaram uma matriz-chave e analisaram o resultado no ambiente digital, utilizando a linguagem Python. Essa etapa envolve a resolução de problemas, a tomada de decisão, a criação de hipóteses, a validação de resultados e a articulação entre a linguagem Matemática e a linguagem de programação. Por envolver interpretação, autoria e intencionalidade, a tarefa também se enquadra no **Nível 4**.

A Tarefa 4, ao propor o cálculo manual de determinantes e a comparação com os resultados do Python, seguida de reflexão sobre a relação entre determinante e inversibilidade, caracteriza-se também como uma tarefa de **Nível 4**, pois exige compreensão conceitual, argumentação Matemática e conexão com o contexto aplicado (criptografia).

Para justificar a classificação de alta demanda cognitiva, destaca-se que os alunos não apenas executaram procedimentos, mas também produziram significados, compararam estratégias, interpretaram resultados, generalizaram as conclusões e utilizaram a Matemática como uma ferramenta de validação e explicação. A autonomia na manipulação das tarefas para modificar valores, explorar novas mensagens e testar hipóteses amplia ainda mais o caráter investigativo da tarefa.

Uma sugestão de adaptação dessa atividade para docentes que desejam aplicá-la com menor demanda cognitiva seria disponibilizar os códigos prontos apenas para execução, sem exigir reflexão comparativa, justificativa ou criação autoral, pedindo apenas a verificação, ou ainda utilizar o Python como uma "**prova real**" de alguma tarefa já trabalhada em sala de aula. Outra possibilidade seria retirar a etapa de adaptação das matrizes e solicitar apenas a execução do script e a escrita do resultado, o que reduziria a tarefa ao **Nível 2 (Procedimentos sem conexão com o significado)**. No caso de estudantes com menor familiaridade com a tecnologia, poderia-se ainda fornecer as mensagens e suas matrizes já prontas, transformando a atividade em mera reprodução ou preenchimento, o que a aproxima do **Nível 1**.

Assim como nas atividades anteriores, o papel da professora-pesquisadora foi fundamental para manter a tarefa em alta demanda, pois mediações inadequadas, explicações antecipadas ou a redução de escolhas podem transformar a atividade em uma simples repetição de passos. A versão aplicada nesta pesquisa foi planejada para promover protagonismo, exploração conceitual, experimentação tecnológica e raciocínio matemático com finalidade prática, preservando o caráter investigativo e significativo da aprendizagem

ATIVIDADE 3 da SD: GERANDO CÓDIGOS COM PYTHON

Você já aprendeu a multiplicar matrizes no caderno. Mas como seria se pedíssemos ao computador para fazer o mesmo cálculo? Hoje, vamos usar o Python, uma linguagem de programação simples, para verificar as multiplicações de matrizes. Para usar o Python, acesse o site: <https://colab.research.google.com/> Clique em "Novo Notebook" e digite/cole os códigos abaixo.

Na Tarefa 1, os alunos realizaram, inicialmente, a multiplicação de duas matrizes previamente fornecidas manualmente, registrando no caderno todo o procedimento envolvido no cálculo. Em seguida, acessaram o ambiente Google Colab e executaram um código em Python que realizava a mesma multiplicação matricial.

Durante a realização da tarefa, a professora-pesquisadora mediou discussões sobre possíveis erros de cálculo manual, a importância da organização das operações e a utilidade do computador como instrumento de verificação e validação Matemática.

Figura 10 – Código em Python

```
import numpy as np

# Criando duas matrizes
A = np.array([[2, 1],
              [0, 3]])

B = np.array([[1, 4],
              [2, 5]])

# Multiplicação
C = np.dot(A, B)

print("Matriz A:")
print(A)
print("Matriz B:")
print(B)
print("Resultado da multiplicação A x B:")
print(C)
```

Fonte: Elaboração própria (2025).

Tarefa 1: Explorando Python

Faça a multiplicação $A \times B$ nesta folha, explicando o passo a passo. O resultado foi o mesmo que o Python mostrou? Explique.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

O objetivo desta tarefa foi possibilitar a comparação entre os resultados obtidos manualmente e aqueles gerados pelo computador, levando os estudantes a refletirem sobre a confiabilidade do uso de ferramentas computacionais na Matemática.

Tarefa 2: Criando sua própria matriz

Na Tarefa 2, os alunos foram incentivados a ajustar os valores das matrizes iniciais A e B , e a criar suas próprias matrizes. Após essa modificação, executaram novamente o código em Python para calcular os produtos, registrando e comparando os resultados.

Matriz A que eu usei:

Matriz B que eu usei:

Resultado em Python de $A \times B$:

Resultado em Python de $B \times A$:

Essa tarefa teve como objetivo levar os estudantes a investigar, de forma exploratória, a propriedade da não comutatividade da multiplicação de matrizes. O uso do Python permitiu ampliar o número de testes realizados em um curto espaço de tempo, favorecendo a generalização das conclusões e a compreensão conceitual dessa propriedade algébrica, que muitas vezes é apresentada de forma apenas expositiva no ensino tradicional

Tarefa 3: Criptografia com Python

A Tarefa 3 introduziu a criptografia matricial, relacionando os conceitos algébricos com a codificação e à decodificação de mensagens que os alunos já tinham estudado em outras

Figura 11 – Código em Python da Questão 3

```
import numpy as np

# Mensagem "AMOR"
# A=0, M=12, O=14, R=17
mensagem = np.array([[0, 12],
                    [14, 17]])

# Matriz-chave (escolhida pela professora)
chave = np.array([[2, 1],
                 [1, 1]])

# Multiplicação: mensagem x chave
codigo = np.dot(mensagem, chave)

print("Mensagem original (em números):")
print(mensagem)
print("Mensagem codificada (em números):")
print(codigo)
```

Fonte: Elaboração própria (2025).

atividades. Inicialmente, os alunos executaram um código em Python que transformava uma mensagem em números, organizava esses valores em uma matriz-mensagem e realizava a multiplicação por uma matriz-chave, gerando uma matriz codificada.

Em seguida, organizados em duplas, os estudantes escolheram novas mensagens, respeitando o tamanho adequado para a formação de matrizes quadradas, converteram as letras em números conforme a correspondência alfabética e construíram suas próprias matrizes-mensagem. Utilizando o Python, multiplicaram essas matrizes pela matriz-chave e analisaram os códigos secretos encontrados.

Na criptografia, podemos transformar uma mensagem em números e, depois, multiplicá-la por uma matriz-chave. O resultado é um código secreto! Digite/copiar esse código no Google Colab, um serviço gratuito para escrever e executar códigos em Python no navegador.

Qual foi a mensagem codificada que o Python gerou?

Em duplas, escolham uma nova mensagem com no máximo 4 letras.

Transformem as letras em números ($A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$). Monte uma matriz de mensagens com esses números. Usem o Python para multiplicar pela mesma matriz-chave.

Escreva abaixo o código secreto (a matriz final):

Explore novas palavras de tamanhos n^2 , por exemplo, 9, 16, ... e descreva abaixo:

Essa tarefa permitiu aos alunos compreender, de forma prática, como a Matemática está presente nos processos de criptografia digital, além de explorar a relação entre o tamanho da mensagem, a dimensão das matrizes e a complexidade do código gerado.

Tarefa 4: Determinantes

Na Tarefa 4, os alunos retomaram o conceito de determinantes, calculando manualmente o determinante de matrizes previamente propostas. Em seguida, utilizaram Python para verificar os resultados obtidos, realizando a comparação entre o cálculo manual e computacional. Sejam A e B ;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule, à mão, os determinantes das matrizes A e B :

Agora vamos verificar se o Python faz os mesmos cálculos. Digite no Google Colab o seguinte código:

Figura 12 – Cálculo de determinante com Python

```
import numpy as np

# Matriz 2x2
A = np.array([[2, 1],
              [3, 4]])

# Matriz 3x3
B = np.array([[1, 2, 3],
              [0, 1, 4],
              [5, 6, 0]])

# Determinantes
det_A = np.linalg.det(A)
det_B = np.linalg.det(B)

print("Determinante de A:", det_A)
print("Determinante de B:", det_B)
```

Fonte: Elaboração própria (2025).

Compare os resultados: o que você calculou no caderno é igual ao que o Python mostrou?

A partir dessas comparações, a professora-pesquisadora conduziu uma discussão sobre o papel do determinante na criptografia, destacando que uma matriz-chave só pode ser utilizada de forma segura quando seu determinante é diferente de zero, condição necessária à existência de matriz inversa. Os alunos analisaram exemplos de matrizes com determinante nulo e refletiram sobre a impossibilidade de descriptografar mensagens nesses casos.

Na criptografia com matrizes (como a que usamos para gerar códigos secretos), a **matriz-chave** só funciona se o seu determinante for diferente de zero. Isso porque, **quando o determinante é zero, a matriz não tem inversa** e, assim, seria impossível descriptografar a mensagem. Se a matriz-chave fosse:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Qual seria o determinante?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Essa matriz poderia ser usada como chave de criptografia?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Por que é importante que a matriz-chave tenha determinante diferente de 0?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Essa tarefa teve como objetivo atribuir significado ao cálculo de determinantes, frequentemente visto pelos alunos como um procedimento mecânico, mostrando sua relevância em contextos aplicados.

Tarefa 5: Reflexão

Por fim, na última tarefa da Atividade 3, os alunos refletiram sobre todo o processo desenvolvido ao longo da atividade, respondendo a questões abertas relacionadas às vantagens

do uso do Python em relação ao cálculo manual, o que acontece quando trocamos a matriz-chave na segurança da criptografia e também nas dificuldades encontradas ao decifrar uma mensagem codificada.

Qual é a vantagem de usar Python em vez de calcular tudo no papel?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Se trocarmos a matriz-chave, o código secreto muda? Por quê?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

O que você acha que seria mais difícil para um espião: descobrir a mensagem só olhando a matriz codificada ou multiplicar as matrizes manualmente?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Nessa etapa, buscamos estimular a argumentação, a síntese dos conhecimentos construídos e a percepção da Matemática como uma ferramenta para a resolução de problemas reais. As respostas dos alunos forneceram indícios importantes sobre a compreensão conceitual alcançada e subsidiaram a análise qualitativa dos dados da nossa pesquisa.

6.4.4 Atividade 4: A Fábrica de Alimentos

Sendo desenvolvida para aprofundar ainda mais o potencial algébrico dos estudantes, a Atividade 4 utilizou a metodologia Ensino–Avaliação–Aprendizagem através da resolução de problemas, seguindo os dez passos conforme descritos por Allevato e Onuchic (2021), desafiando os alunos a resolver questões sobre matrizes e sistemas lineares e introduzindo novos

conceitos de forma contextualizada. Intitulada “*A fábrica de alimentos*”, essa atividade da SD foi estruturada a partir de um problema gerador envolvendo uma pequena fábrica de alimentos que produz três tipos de produtos: barra de cereal, iogurte proteico e mix de castanhas. Os dados fornecidos permitiam ao estudante, de modo geral, organizar informações em equações e sistemas lineares, possibilitando a interpretação da situação real e a conexão direta com conteúdos matemáticos, como matrizes, sistemas lineares e noções de lucro.

Na Tarefa 1, os alunos precisavam organizar os dados do problema gerador de modo que ficassem mais claros e fáceis de interpretar. Já na Tarefa 2, o objetivo era descobrir qual era o preço unitário de cada produto (barra de cereal, iogurte proteico e mix de castanhas), não estando evidente o modo de resolução, até porque a professora-pesquisadora iria introduzir e formalizar um conteúdo algébrico que ainda não havia sido abordado até então: Sistemas Lineares 3×3 . Na Tarefa 3, os alunos precisavam encontrar combinações lineares, ou seja, combinações de compra de produtos cujo preço total fosse 55 reais. Essa era outra questão aberta a inúmeros modos de resolução, por meio da investigação Matemática. Por outro lado, a Tarefa 4 exigia dos estudantes uma compreensão sistemática, calculando o lucro total ao longo de três dias, considerando os custos necessários à produção dos produtos.

Finalizando a Atividade 4 da SD, a Tarefa 5 é a décima etapa de proposição de novos problemas, conforme descrita na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas Allevato e Onuchic (2021), após a formalização e o desenvolvimento da metodologia com a turma. Essa atividade não restringe as maneiras de criar um problema, permitindo que o aluno utilize diferentes estratégias, habilidades e conteúdos dentre os que foram construídos durante a aula.

Problema Gerador

Uma pequena fábrica de alimentos produz três tipos de produtos: **Barra de cereais**, **logurte proteico** e **Mix de castanhas**. Para um controle interno, a empresa registrou as vendas em três dias seguidos e as receitas totais:

- **Segunda-feira:** Foram vendidos 5 barras de cereais, 2 iogurtes proteicos e 1 mix de castanhas. A receita total foi de R\$30,00.
- **Terça-feira:** Foram vendidos 3 barras de cereais, 4 iogurtes proteicos e 2 mixes de castanhas. A receita total foi de R\$46,00.
- **Quarta-feira:** Foram vendidos 4 barras de cereais, 1 iogurte proteico e 3 mixes de castanhas. A receita total foi de R\$43,00.

Como você organizaria os dados do problema para facilitar a interpretação? Explique bem isso!

Qual é o preço unitário de cada produto?

A gerência da fábrica deseja estabelecer uma meta de receita de R\$55,00 para a próxima quinta-feira. Dê um ou mais exemplos de combinações de vendas (números de barras de cereais, iogurtes e mix de castanhas) que atingiriam essa meta. Existe apenas uma resposta possível? Explique seu raciocínio.

Considerando que o custo de produção de cada item é:

- Barra de cereais: R\$1,50
- Iogurte proteico: R\$3,00
- Mix de castanhas: R\$6,00

Com base nos preços que você descobriu, qual foi o lucro total da fábrica em cada um dos três dias?

Agora é a sua vez! Crie um novo problema envolvendo os conceitos que você aprendeu sobre matrizes ou sistemas lineares.

<hr/> <hr/> <hr/>

Caracterização da tarefa

Essa atividade foi desenvolvida e organizada em diferentes tarefas, cada uma com um objetivo pedagógico específico e distinto. Na Tarefa 1, os alunos deveriam organizar os dados do problema para facilitar a interpretação. Esse momento inicial já exigia dos estudantes a leitura e a sistematização da situação, convertendo as informações em representações Matemáticas, como tabelas ou sistemas de equações. Por essa razão, essa tarefa foi caracterizada como de alta demanda cognitiva, podendo ser classificada como **Nível 3** (tarefas que utilizam procedimentos com conexões), já que envolve a interpretação do texto e a estruturação de um sistema de equações ou de qualquer outra forma de organização, sem restringir a resolução à apenas memorização ou repetição, por exemplo.

Na Tarefa 2, aparentemente, os alunos precisaram determinar o preço unitário de cada produto. Neste caso, o nível de exigência foi reduzido, pois bastava aplicar um procedimento algébrico conhecido para resolver o sistema linear. Embora, à primeira vista, a Tarefa 2 pudesse ser classificada como **Nível 2**, por exigir apenas a aplicação de um procedimento algébrico para a resolução de um sistema linear, sua classificação foi revista em função da metodologia adotada. Como o conteúdo ainda não havia sido previamente formalizado pelo professor, os alunos precisaram interpretar a situação-problema, modelá-la matematicamente, mobilizar conhecimentos prévios e atribuir significado aos resultados obtidos. O procedimento, nesse contexto, não se configurou como mera aplicação mecânica de um algoritmo, mas como parte de um processo de construção e compreensão conceitual. Desse modo, ao articular contexto, modelagem e formalização, a tarefa passou a envolver procedimentos com conexões, sendo, portanto, classificada como **Nível 3**.

Corroborando com o princípio de Stein e Smith (1998) e analisando as demandas cognitivas, a Tarefa 3 ampliou a exploração ao propor que os alunos determinassem combinações de vendas que atingissem uma meta de receita de R\$ 55,00, questionando, ainda, se havia apenas uma resposta possível. Esse momento exigiu que os estudantes refletissem sobre a multiplicidade de soluções, analisassem a estrutura do sistema e justificassem seu raciocínio, o que caracteriza, novamente, um nível mais elevado de demanda cognitiva. Portanto, essa tarefa foi classificada como **Nível 3 (procedimentos com conexões)**, por envolver raciocínio crítico e articulação entre Matemática e contexto real.

Na Tarefa 4, os estudantes calcularam o lucro da fábrica em cada um dos três dias, integrando os preços unitários obtidos aos custos de produção fornecidos. A articulação de informações e a interpretação do resultado na realidade da fábrica tornaram essa tarefa também de **Nível 3 (procedimentos com conexões)**, pois exigiu que o aluno conectasse conceitos matemáticos a uma situação prática.

Por fim, na Tarefa 5, os alunos foram desafiados a criar um novo problema que envolvesse os conceitos estudados sobre matrizes ou sistemas lineares. Essa etapa demandou uma compreensão conceitual profunda e autonomia na formulação de situações-problema, exigindo criatividade e generalização Matemática. Nesse sentido, essa tarefa foi classificada como **Nível 4 (fazer Matemática)**, uma vez que não havia indicação prévia do procedimento a ser utilizado, pelo contrário, exigia do estudante a mobilização autônoma de conhecimentos para construir um problema inédito.

Portanto, a Atividade 4 pode ser caracterizada como uma sequência investigativa que inicia em níveis intermediários de demanda cognitiva (tarefas de organização e de resolução algorítmica) e evolui progressivamente até o nível de **fazer Matemática**. Essa progressão permite ao estudante vivenciar diferentes dimensões do pensamento matemático, articulando leitura, interpretação, resolução e criação de problemas no contexto da álgebra. A Tabela 5 a seguir apresenta uma síntese da caracterização realizada em cada uma das atividades construídas para a SD, bem como os níveis de demanda cognitiva identificados, de maneira geral, considerando todas as tarefas que compõem cada atividade.

Quadro 5 – Síntese das atividades e níveis de demanda cognitiva segundo Stein e Smith (1998)

Atividade	Metodologia Utilizada	Demanda Cognitiva	Níveis Identificados
1: Por que proteger informações?	Investigação guiada; produção colaborativa (mapa mental)	Alta demanda	Níveis 3 e 4 (com momentos de nível 1)
2: Agência de Espionagem Escolar / Cifra de César	Gamificação; resolução colaborativa de desafios; aprendizagem baseada em jogos	Alta demanda	Níveis 3 e 4 (com momentos de nível 2)
3: Gerando códigos com Python	Aprendizagem por investigação; computação desplugada e plugada; uso de tecnologia	Alta demanda	Predominância do nível 4 (com trechos de nível 3)
4: Resolução de Problemas com matrizes e sistemas lineares	Ensino–Aprendizagem–Avaliação pela Resolução de Problemas	Muito alta demanda	Predominância do nível 4

Fonte: Elaboração própria (2025).

Não podemos deixar de analisar o processo de matematização dentro da SD, já que é um processo central da abordagem da RME, que se manifesta de duas formas: a matematização horizontal, na qual os alunos transformam problemas de contextos reais ou imaginários

em representações Matemáticas, e a matematização vertical, que envolve o desenvolvimento de novos conceitos e formalizações dentro da própria Matemática (Ferreira; Buriasco, 2015). As atividades propostas nesta SD buscam justamente essa progressão, começando pela organização de situações do cotidiano e, em seguida, aprofundando as propriedades e os modelos matemáticos.

Outros pilares da RME também estão presentes nas tarefas da SD, como, por exemplo, a reinvenção guiada e os modelos emergentes, que foram fundamentais para o desenvolvimento dessas tarefas pela professora-pesquisadora. A reinvenção guiada refletiu o papel da professora como orientadora que estimula os alunos a redescobrirem a Matemática, partindo de suas estratégias informais rumo a soluções mais formais (Ferreira; Buriasco, 2021; Marino, 2017).

Os modelos que surgiram, por sua vez, são representações e ferramentas utilizadas (como tabelas, diagramas e, no nosso caso, a programação em Python), que servem como uma ponte entre a compreensão intuitiva e o conhecimento matemático formal Ferreira e Buriasco (2023). Essa abordagem se alinha perfeitamente com a utilização de metodologias ativas, pois o protagonismo do aluno na resolução de problemas autênticos e a interação colaborativa são os motores que impulsionam o processo de aprendizagem e a construção de um entendimento mais profundo em relação a toda a estrutura da álgebra.

A tabela abaixo apresenta uma síntese das principais características da RME identificadas na construção das atividades que compõem a Sequência Didática, bem como a conexão percebida com a prática pedagógica.

6.5 Instrumentos de coleta de dados: registros, observações e questionários

Para compreender, de maneira rigorosa e sensível, o processo de aprendizagem desencadeado pela proposta que desenvolvemos, organizamos a coleta de dados com base em três instrumentos complementares: registros de observação, diário de campo e questionários mistos. A escolha por esses instrumentos está diretamente relacionada ao caráter qualitativo e quantitativo da pesquisa, bem como aos princípios da Educação Matemática Realística e às metodologias ativas que orientaram toda a intervenção. Assim, buscamos criar um conjunto de evidências que permitisse acompanhar tanto os processos de aprendizagem quanto os resultados obtidos pelos alunos.

O diário de campo constituiu-se como um dos elementos centrais de observação. Nele, registramos momentos de interação, dúvidas recorrentes, estratégias espontâneas surgidas durante as tarefas, modos de organização das equipes, falas significativas e indícios de compreensão ou resistência dos estudantes. Esses registros foram fundamentais para documentar aspectos da aprendizagem que não constam nas respostas finais, mas que revelam percursos, hesitações, reformulações e negociações conceituais, elementos fundamentais para uma análise orientada pela ATD, que valoriza o movimento interpretativo e a construção progressiva de significados. As anotações também permitiram observar como os princípios da RME, especial-

Quadro 6 – Síntese das atividades e sua relação com as características da RME

Atividade	Características da RME	Conexão com a Prática Pedagógica
1: Por que proteger informações?	Matematização Horizontal (organização de dados reais); Contexto Realístico (segurança digital); Princípio da Atividade (aprender fazendo).	Favorece o papel do professor como mediador, estimulando investigação, argumentação e discussões coletivas, em vez da transmissão direta.
2: Agência de Espionagem Escolar / Cifra de César	Contexto Fantástico (narrativa de espionagem); Matematização Progressiva (do informal ao formal); Princípio da Interatividade (cooperação e negociação de significados).	A gamificação intensifica o engajamento; o trabalho em grupo apoia a construção colaborativa de estratégias e promove autonomia investigativa.
3: Gerando códigos com Python	Matematização Vertical (formalização e generalização); Contexto Computacional (uso de Python); Princípio da Orientação (o professor guia sem fornecer respostas).	A tecnologia atua como “âncora conceitual”, permitindo testar hipóteses, validar operações e comparar soluções manuais e automatizadas.
4: Resolução de Problemas com matrizes e sistemas lineares	Matematização Progressiva (do problema para a formalização); Contexto Real (modelo de fábrica de alimentos); Reinvenção Guiada (produção de justificativas durante a resolução).	Estimula que os alunos se tornem formuladores de problemas, mobilizando a compreensão profunda e aproximando-os da Matemática como atividade humana.

Fonte: Elaboração própria (2025).

mente a interatividade, a reinvenção guiada e a matematização, surgiram naturalmente ao longo do trabalho dos grupos.

Além dos registros escritos, as observações sistemáticas desempenharam um papel importante na compreensão de como os estudantes se envolveram nas atividades da sequência didática. Durante as oficinas e tarefas, acompanhamos atentamente as trocas entre colegas, as estratégias de organização das duplas, as justificativas apresentadas e a forma como lidavam com os desafios propostos. Em muitos momentos, a postura dos alunos evidenciou que o problema deixava de ser apenas um enunciado a ser resolvido para se tornar um objeto de investigação. Essas observações, articuladas ao diário de campo, possibilitaram uma leitura mais sensível do processo de construção do pensamento algébrico, especialmente em situações guiadas, colaborativas ou investigativas, dimensões que seriam difíceis de captar apenas por meio de respostas escritas.

Como terceiro instrumento, utilizamos três questionários mistos (compostos por questões objetivas, dissertativas, rubricas avaliativas e itens de escala) aplicados em diferentes momentos da intervenção. Cada questionário teve um propósito específico e se articulou à etapa correspondente da sequência didática. O Questionário 1 buscou registrar a percepção dos estudantes sobre a experiência das oficinas elaboradas por eles mesmos, permitindo identificar

aspectos como o envolvimento, a compreensão, as dificuldades iniciais e a qualidade das interações entre as equipes. Já o Questionário 2 teve caráter diagnóstico e investigou o conhecimento prévio dos alunos sobre matrizes, operações, determinantes, matriz inversa e codificação, além de levantar suas percepções sobre metodologias ativas e suas expectativas em relação ao estudo da álgebra.

O Questionário 3 foi aplicado após a intervenção e retomou alguns itens do Questionário 2, a fim de possibilitar uma análise comparativa dos resultados. Essa reaplicação permitiu observar indícios de evolução conceitual, identificar habilidades que permaneceram frágeis e avaliar o impacto da sequência didática na compreensão dos conteúdos trabalhados. A análise dos questionários 2 e 3, além de dialogar com os dados qualitativos obtidos por meio de observações e do diário de campo, compõe a parte quantitativa da pesquisa, oferecendo indicadores objetivos sobre os avanços e as dificuldades dos estudantes. Essa integração entre diferentes tipos de dados é coerente com a abordagem mista adotada, permitindo maior profundidade na interpretação e maior consistência na validação dos resultados.

Entendemos que, em pesquisas que envolvem adolescentes, a espontaneidade das respostas depende de um ambiente de confiança e da garantia de que não haverá qualquer forma de julgamento. Ainda que anônimos, os questionários forneceram informações valiosas sobre como os estudantes reconhecem seus próprios processos de aprendizagem, suas percepções sobre as metodologias utilizadas e seu envolvimento com os desafios propostos.

A conjugação dos três instrumentos: observação sistemática, diário de campo e questionários mistos resultou em um corpus rico, diversificado e adequado aos propósitos desta investigação. Enquanto os registros qualitativos permitiram compreender as dinâmicas internas da sala, a construção de estratégias e os modos como os estudantes se relacionaram com as tarefas, os questionários complementaram essa análise ao fornecer dados objetivos sobre a compreensão conceitual e o impacto efetivo da intervenção. Dessa forma, os instrumentos de coleta não apenas documentam o percurso realizado, mas também sustentam a análise que apresentarei no capítulo seguinte, articulando teoria, prática e reflexão à luz da RME e das metodologias ativas adotadas.

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Apresentamos, neste capítulo, a análise dos dados obtidos ao longo da intervenção pedagógica da SD, articulando os registros escritos, as observações sistemáticas, os materiais produzidos pelos estudantes e as respostas aos questionários aplicados ao longo do desenvolvimento da pesquisa. A interpretação dos dados foi orientada pela Análise Textual Discursiva (ATD), conforme proposta por Moraes e Galiazzi (2011). O processo foi desenvolvido de forma recursiva e sistemática, unindo momentos de desconstrução, organização e reconstrução teórica dos dados. As etapas foram assim operacionalizadas:

1. Unitarização:

Realizamos, inicialmente, uma leitura detalhada dos registros escritos, dos questionários, das produções Matemáticas e do diário de campo, destacando trechos que expressavam percepções, estratégias, dificuldades e modos de compreender a atividade Matemática. Esses fragmentos foram tratados como unidades de significado, preservando a intencionalidade do discurso dos estudantes. Ao longo desse processo, voltamos diversas vezes aos materiais, refinando, ampliando e reorganizando as unidades à medida que surgiam novos sentidos.

2. Categorização

As unidades de significado foram agrupadas, de forma provisória e aberta, em conjuntos de maior abrangência, originando categorias emergentes. Essa etapa não se deu de forma linear, mas em ciclos sucessivos de análise, nos quais as categorias foram renomeadas, unidas, subdivididas ou reconfiguradas à medida que as leituras avançavam e as relações estabelecidas entre os dados se consolidavam. Esse movimento resultou em redes de sentidos que expressam aspectos centrais da aprendizagem, das estratégias utilizadas pelos estudantes e das relações estabelecidas com as tarefas da SD.

3. Produção de metatextos

A partir das categorias consolidadas, elaboramos metatextos interpretativos que unem os sentidos identificados aos referenciais teóricos da pesquisa, especialmente aos princípios da Educação Matemática Realística (RME) e à taxonomia de demandas cognitivas de Stein et al. (1998). Esses metatextos não constituem meras descrições dos dados, mas representam uma reconstrução compreensiva e interpretativa, buscando explicitar movimentos de matematização horizontal e vertical, surgimento de modelos, formas de engajamento e processos de reinvenção guiada mobilizados pelos estudantes.

Essa tríplice movimentação entre os processos da ATD (unitarização, categorização e produção de metatextos) orienta toda a análise apresentada nos eixos a seguir. As tabelas

incluídas ao longo do capítulo fazem parte do processo de categorização e têm a função de síntese organizadora entre dados, categorias e interpretações produzidas. Assim, cada eixo analítico representa um movimento de reconstrução teórica sustentado nos pressupostos metodológicos da ATD.

A discussão dos dados está organizada em três eixos complementares. O primeiro eixo reúne as evidências qualitativas provenientes das oficinas iniciais, das interações observadas e dos registros do diário de campo, destacando como os alunos mobilizaram saberes prévios, negociaram significados e construíram representações próprias antes da formalização dos conceitos algébricos. O segundo eixo trata da análise dos resultados do Questionário 2, mostrando os conhecimentos prévios, as percepções e os pontos de fragilidade conceitual dos alunos. Por fim, no terceiro eixo, analisamos as produções Matemáticas desenvolvidas ao longo da sequência didática, relacionando-as às demandas cognitivas de cada tarefa e aos princípios da RME que se manifestaram na prática.

Ao organizar esta análise, buscamos compreender de forma abrangente como os alunos deram sentido às atividades propostas, de que maneira enfrentaram os desafios impostos pela criptografia e pelas operações algébricas, e como o trabalho colaborativo e investigativo favoreceu a construção de significados matemáticos mais sólidos. Dessa forma, este capítulo tem como propósito evidenciar os movimentos de aprendizagem observados, as dificuldades que surgiram e as potencialidades do uso integrado de metodologias ativas e da RME para uma possível ressignificação do ensino de Álgebra no Ensino Médio.

7.1 Eixo 1: Avaliação das Oficinas: percepções, envolvimento e indicadores iniciais de aprendizagem

A análise do Questionário 1, aplicado após as oficinas propostas e conduzidas pelos próprios estudantes, permitiu compreender como esse primeiro momento da intervenção contribuiu para identificar saberes prévios, modos de organização, engajamento e indícios iniciais de compreensão conceitual. A partir da leitura integrada das respostas, do diário de campo e das observações registradas, surgiram categorias que expressam não apenas a opinião dos alunos sobre a experiência, mas também elementos estruturantes do pensamento algébrico e das interações promovidas pelos princípios da Educação Matemática Realística.

7.1.1 Percepção geral das oficinas: Autoavaliação

A análise do Questionário 1 revela um conjunto de percepções bastante consistente entre os estudantes, sobretudo quanto ao valor formativo das oficinas elaboradas e aplicadas pelas próprias equipes. O instrumento, estruturado como uma rubrica avaliativa de 0 a 7 pontos, permitiu que os alunos realizassem tanto uma autoavaliação quanto uma avaliação do trabalho do grupo, além de registrar comentários espontâneos que reforçam o caráter reflexivo dessa

etapa inicial da intervenção. Esse movimento de avaliação crítica, tanto de si quanto do coletivo, evidencia um processo de metacognição que se alinha diretamente ao princípio da atividade da RME, ao reconhecer o aluno como agente de sua própria aprendizagem.

De maneira geral, todos os estudantes afirmaram ter considerado as oficinas *“muito interessantes”* e relevantes para compreender os conteúdos de Matrizes e Criptografia. O Aluno A, por exemplo, avaliou sua equipe com nota 7 e destacou que *“nos esforçamos e conseguimos explicar bem cada parte, mesmo quando tivemos que reorganizar rapidamente nossa apresentação”*. Esse tipo de comentário indica não apenas engajamento, mas um entendimento claro de que ensinar exige reorganizar ideias e antecipar dificuldades, o que reforça o papel da matematização horizontal presente nesse momento: ao explicar para o outro, o estudante é levado a sistematizar conceitos que antes estavam dispersos.

O Aluno B, embora tenha atribuído nota máxima à equipe, reconheceu fragilidades: *“merecemos 7 porque trabalhamos bem, mas ficamos um pouco confusos na parte prática”*. Observações como essas mostram que o aluno identifica os limites e as potencialidades do grupo, aspecto fundamental nos processos colaborativos característicos das metodologias ativas. Já o Aluno C, ao justificar a nota 6 que atribuiu a si mesmo, afirmou: *“acho que mereço 6, pois deixei de ajudar em algumas partes e poderia ter participado mais das explicações”*. A sinceridade desse comentário evidencia a dimensão ética e reflexiva que se desenvolve nas atividades de coautoria, uma vez que o estudante analisa sua própria participação no processo.

Outro comentário significativo foi feito pelo Aluno D, que avaliou sua equipe com nota 7, mas destacou: *“fizemos uma confusão na parte prática, mas conseguimos nos organizar e explicar novamente, acho que isso ajudou a turma a entender melhor”*. Esse episódio relata um momento típico de reinvenção guiada: ao se depararem com um erro, os estudantes reorganizaram a apresentação e reconstruíram o caminho conceitual necessário para conduzir a oficina, movimentando-se entre representações informais e formais, o que caracteriza a matematização vertical.

Já o Aluno E escreveu: *“a parte que explicamos sobre criptografia foi a mais difícil, mas acho que deu para entender porque ensaiamos antes”*. Esse trecho evidencia a consciência do estudante sobre o esforço cognitivo necessário para explicar um conteúdo novo e reforça a importância da preparação prévia, elemento essencial na metodologia de sala de aula invertida que fundamentou este primeiro momento da intervenção.

A autoavaliação por meio da rubrica também evidenciou que os estudantes compreenderam a responsabilidade de conduzir uma oficina. A maioria atribuiu notas entre 6 e 7 à própria equipe, justificando suas escolhas com argumentos que revelam processos de organização, debate interno, negociação conceitual e revisão do material produzido. Esses elementos são centrais na construção do pensamento algébrico, sobretudo porque envolvem a mobilização de estratégias, o confronto entre diferentes formas de representar e a tomada de decisão, aspectos que marcaram a experiência dos grupos durante a elaboração das oficinas.

Do ponto de vista pedagógico, os comentários reforçam que a atividade permitiu que os estudantes transitassem entre diferentes formas de matematização: ao revisar o conteúdo

para preparar a oficina, atuaram no plano vertical; ao observar como os colegas reagem à explicação, transitaram novamente para a matematização horizontal, reconstruindo exemplos, reformulando explicações e adequando a linguagem. Esse movimento dialético (característico da RME) ficou evidente nos registros e nas falas, que demonstram a apropriação gradual dos conceitos trabalhados.

A autoavaliação realizada pelos estudantes revelou maturidade e consciência crítica sobre o próprio desempenho. Muitos reconhecem que poderiam ter se organizado melhor, que a explicação poderia ter sido mais clara ou que a distribuição de papéis na equipe poderia ter sido mais equilibrada. Essas reflexões vão ao encontro do princípio da orientação, pois evidenciam que o aluno passa a assumir responsabilidade pelo próprio aprendizado e pela construção coletiva do conhecimento.

Além disso, vários alunos afirmaram que, ao assistirem às oficinas dos colegas, perceberam diferentes formas de abordar o mesmo conteúdo. Essa percepção reforça a ideia de que o ambiente criado favoreceu o desenvolvimento de modelos emergentes, uma vez que os estudantes transitaram por representações variadas (tabelas, esquemas, construções próprias, exercícios autorais) que contribuíram para estruturar a compreensão do conteúdo.

De maneira geral, as respostas associadas ao papel docente demonstram que a experiência das oficinas funcionou como uma poderosa prática reflexiva, permitindo que os estudantes compreendessem, em profundidade, elementos centrais do trabalho pedagógico: planejamento, domínio conceitual, clareza, escuta, mediação, reformulação, observação e responsabilidade em relação ao outro. Para a equipe da pesquisa, esses comentários foram significativos, pois demonstraram que a intervenção não só favoreceu o aprendizado de Matemática, mas também despertou nos alunos uma percepção mais humanizada, complexa e realista sobre o que significa ensinar Matemática. A aprendizagem não se limitou ao conteúdo algébrico, envolveu também a compreensão da ação docente como uma prática intelectual, ética e relacional.

7.1.2 Contribuições para a aprendizagem

As oficinas foram avaliadas pelos estudantes como um espaço que possibilitou ampliar a compreensão de conteúdos relacionados a matrizes, determinantes e noções introdutórias de criptografia. Essa percepção aparece tanto nas respostas diretas quanto no modo como os alunos justificam suas notas para cada equipe. Identificamos, por exemplo, comentários que apontam melhorias na leitura de tabelas, no entendimento da lei de formação, no domínio das operações matriciais e na maior familiaridade com a lógica dos processos de codificação.

Esse conjunto de indicativos dialoga diretamente com o objetivo pedagógico da intervenção: permitir que os alunos mobilizem conhecimentos prévios, articulem informações e construam significados progressivamente. De acordo com Stein e Smith (1998), quando os estudantes precisam explicar, justificar ou reorganizar conteúdos para ensinar os colegas, transitam entre tarefas de *procedimentos com conexão* e momentos de *fazer Matemática*, especialmente

quando são desafiados a criar materiais, problemas e exemplos. Os resultados das respostas mostram exatamente esse movimento ascendente.

Para além da autoavaliação das equipas, muitos estudantes refletiram sobre o papel que o professor desempenha em processos de aprendizagem mais ativos e dinâmicos. As falas revelam não apenas como eles compreendem a função do docente em um ambiente de metodologias ativas, mas também como percebem essa atuação quando assumem, ainda que provisoriamente, o lugar de quem ensina. Essas percepções ajudam a iluminar, sob o olhar dos próprios alunos, a transformação da relação pedagógica que pretendemos promover com a abordagem adotada.

O Aluno A, por exemplo, ao justificar a nota que atribuiu à própria equipa, afirmou: *“Agora eu entendo por que o professor insiste que a gente explique com calma. É difícil pensar na hora e organizar tudo para os outros entenderem.”* Essa fala mostra uma compreensão concreta da complexidade do trabalho docente: ensinar não é apenas transmitir, mas organizar ideias, prever dúvidas e construir caminhos acessíveis para que o outro compreenda. É um indicativo claro de que experienciar o papel de mediador favoreceu uma percepção mais profunda do trabalho pedagógico, reforçando um dos pilares centrais da RME, o princípio da orientação: o professor não impõe procedimentos, mas orienta um percurso.

O Aluno C também reforçou essa percepção ao escrever: *“Quando a gente foi explicar, percebi que alguns colegas ficaram confusos e precisei repetir. A professora faz isso toda hora e eu nunca tinha parado para pensar.”* Aqui aparece, de forma muito natural, a noção de interatividade como processo e não apenas como participação, mas como ajuste constante do discurso, reformulação e escuta ativa. O estudante identifica que explicar não é um monólogo, mas um diálogo, e que a compreensão do outro exige atenção e responsividade. Essa consciência é um traço característico de práticas fundamentadas na RME, nas quais o professor precisa acompanhar as estratégias informais dos alunos e ajustá-las para conduzir à matematização mais formal.

O Aluno F destacou outro aspecto: *“A gente estudou bastante antes da oficina porque dava medo de falar errado. A professora faz parecer fácil, mas agora eu vi como ela precisa saber o conteúdo e ainda explicar claro.”* A reflexão evidencia que, ao vivenciar o papel docente, o aluno percebe que a clareza não é um produto espontâneo, mas resultado de estudo, preparo e intencionalidade. O reconhecimento da necessidade de domínio conceitual reforça a ideia de que o professor atua como uma ponte entre diferentes níveis de formalidade, articulando o conhecimento matemático com a linguagem acessível aos estudantes, justamente o movimento de matematização vertical, quando ideias informais vão sendo transformadas em estruturas conceituais mais robustas.

O Aluno H acrescentou uma dimensão ainda mais importante: *“A parte mais difícil foi ajudar os colegas quando eles perguntaram. A professora sempre faz isso, vai de mesa em mesa. Agora eu entendi que ensinar não é só falar lá na frente”.* Essa fala sintetiza um ponto essencial das metodologias ativas: o professor não é apenas apresentador de conteúdos, mas também mediador das interações. Ele se desloca, observa, intervém quando necessário, solicita

justificativas, questiona estratégias e ajuda o pensamento do aluno a avançar. Ao assumir essa postura, mesmo de forma parcial e controlada, os estudantes perceberam que grande parte da prática docente ocorre no acompanhamento próximo e não apenas na exposição.

Outro comentário relevante veio do Aluno B, que disse: *“Percebi que a professora não dá a resposta. Ela pergunta outra coisa pra gente pensar. Eu tentei fazer igual na hora da oficina.”* A resposta revela um entendimento claro da lógica das metodologias ativas e da RME: orientar não é fornecer soluções, e sim promover caminhos investigativos. Esse aluno reconhece, ainda que intuitivamente, a importância das perguntas orientadoras e da reinvenção guiada, que permitem que o estudante avance, por conta própria, em seu processo de compreensão.

7.1.3 Dificuldades identificadas

Embora a maior parte dos estudantes tenha avaliado positivamente as oficinas, o conjunto das respostas do Questionário 1, articulado aos registros do diário de campo, revelou um conjunto importante de dificuldades que surgiram durante a preparação e condução das atividades. Esses indícios não apontam apenas para fragilidades conceituais, mas também para dimensões metacognitivas e organizacionais que influenciaram diretamente a forma como cada equipe estruturou sua explicação e dialogou com os colegas.

Uma das dificuldades mais recorrentes refere-se à compreensão do determinante de matrizes. Vários alunos mencionaram, tanto nas respostas abertas quanto nas conversas informais observadas durante as oficinas, que *“sabiam fazer a conta”* quando acompanhavam o passo a passo no quadro, mas que sentiam insegurança ao tentar reproduzir a operação sozinhos. Essa dificuldade também ficou evidente quando alguns grupos, ao apresentarem exemplos próprios, hesitavam ou acabavam recorrendo a métodos mecânicos, sem articular o significado do determinante em um processo mais amplo de resolução. Na perspectiva de Stein e Smith (1998), trata-se de momentos em que tarefas inicialmente planejadas para alta demanda cognitiva acabaram sendo reduzidas pelos próprios estudantes a níveis de memorização ou procedimentos sem conexão, revelando que a formalização conceitual ainda não estava consolidada.

Outra dificuldade identificada foi a organização do raciocínio durante a explicação. Em vários episódios relatados no diário de campo, observei que as equipes, ao iniciarem a apresentação, se perdiam na ordem dos conteúdos, alternavam exemplos sem coerência ou se confundiam ao justificar etapas intermediárias. Esse comportamento apareceu nas falas dos próprios estudantes, como quando o Aluno B afirmou que *“a parte prática ficou confusa”*, ou quando o Aluno D relatou que *“precisamos reorganizar tudo no meio da apresentação porque percebemos que ninguém estava entendendo”*. Esses registros ajudam a compreender que, embora dominassem partes isoladas dos procedimentos, ainda estavam desenvolvendo a capacidade de estruturar argumentos matemáticos completos, habilidade essencial para a matematização vertical proposta pela RME.

A questão do tempo também se mostrou uma dificuldade significativa. Diversos estudantes afirmaram que tiveram *“pouco tempo para ensaiar”*, *“menos tempo do que o esperado para explicar tudo”* ou que *“a equipe se apressou para não estourar o tempo”*. Esses relatos evidenciam que a experiência ultrapassou a simples gestão temporal, mobilizando uma percepção mais ampla sobre a importância do planejamento na prática docente. Ensaiar, antecipar dúvidas e estimar o tempo necessário para cada etapa da explicação são dimensões constitutivas da profissionalidade do professor. Embora essa reflexão não configurasse um objetivo central da proposta, ela surgiu como um desdobramento formativo da atividade, contribuindo para que os estudantes percebessem a complexidade envolvida no ato de ensinar.

Por fim, muitos estudantes mencionaram insegurança ao elaborar exemplos e exercícios próprios. Alguns afirmaram que *“não sabiam se o exercício estava certo”*, outros relataram medo de propor exemplos que os colegas não conseguissem resolver. Essa dificuldade é crucial, pois revela que criar tarefas exige uma mobilização conceitual muito superior à simples execução de procedimentos. Do ponto de vista da RME, trata-se de um momento essencial de reinvenção guiada: ao criar seus próprios exemplos, os estudantes transitam entre estratégias informais, experimentações e tentativas de formalização, ainda que nem sempre com total segurança. Esse movimento é justamente o espaço onde emergem tensões produtivas para a aprendizagem, e foi a partir dele que direcionei as escolhas fundamentais da sequência didática aplicada posteriormente.

De modo geral, as dificuldades identificadas nesta etapa inicial não representam falhas, mas sim indicadores importantes do estágio de desenvolvimento conceitual dos estudantes. Essas evidências apoiaram diretamente o planejamento da sequência didática, permitindo selecionar tarefas que explorassem de forma intencional os conceitos que se mostraram frágeis, ao mesmo tempo em que ampliavam a complexidade dos desafios propostos. Assim, as oficinas não apenas revelaram o que os alunos sabiam, mas, sobretudo, o que ainda precisavam construir, cumprindo plenamente seu papel dentro da lógica da investigação guiada e nos processos progressivos de matematização que orientam a Educação Matemática Realística.

7.1.4 Síntese interpretativa do eixo

Os dados do Questionário 1 revelam que as oficinas desempenham um papel fundamental na intervenção: atuam como etapas exploratórias, diagnósticas e formativas. Essa etapa inicial permitiu mapear o repertório conceitual dos estudantes, compreender suas dificuldades e observar como cada equipe se organizava para explicar e justificar ideias Matemáticas. O conjunto das respostas revelou indícios claros de engajamento, cooperação e surgimento de estratégias próprias, elementos centrais tanto das metodologias ativas quanto da Educação Matemática Realística.

Do ponto de vista analítico, a leitura que realizei permite afirmar que as oficinas serviram como um primeiro movimento de matematização horizontal, evidenciando que os alunos mobilizaram experiências e conhecimentos prévios para organizar os conteúdos da Álgebra. Embora

tenham surgido dificuldades, especialmente no tratamento formal dos conceitos, esses registros foram essenciais para orientar a construção e aplicação da sequência didática, etapa na qual os processos de matematização vertical se tornariam mais robustos.

Em síntese, os dados analisados neste eixo revelam que as oficinas criaram um espaço de aprendizagem colaborativa, interpretativa e ativa, possibilitando que os estudantes se reconhecessem como protagonistas do processo. Esse movimento inicial sustentou as etapas posteriores da intervenção e contribuiu diretamente para o fortalecimento do pensamento algébrico na turma.

Para aprofundar a organização das unidades discursivas identificadas no Questionário 1, elaboramos uma síntese que reúne as falas representativas dos estudantes, as categorias emergentes da ATD e os metatextos interpretativos construídos a partir delas. Essa sistematização permite visualizar como as percepções dos alunos se conectam aos movimentos de aprendizagem observados durante as oficinas, bem como aos princípios da RME e às dimensões formativas das metodologias ativas.

A leitura integrada do Quadro 7 mostra que as percepções dos estudantes não se limitaram a avaliações pontuais das oficinas, mas revelaram processos cognitivos e interativos mais amplos. As falas mostram que os alunos reconheceram a complexidade do trabalho docente, valorizaram a interatividade, revisitaram os conteúdos e desenvolveram estratégias próprias de organização e de explicação. Esses elementos, ao serem categorizados e interpretados, permitiram-me identificar indícios claros de matematização horizontal e vertical, bem como modelos que serviram de apoio à compreensão conceitual. Assim, a tabela funciona como um mapa analítico que orienta o desenvolvimento do metatexto do eixo, articulando os dados qualitativos às bases teóricas da RME e às metodologias ativas que estruturaram a intervenção.

7.2 Eixo 2: Análise do Questionário Diagnóstico: conhecimentos prévios, percepções e pontos de fragilidade conceitual

O Questionário 2, aplicado antes do início formal da sequência didática, teve o objetivo de identificar o repertório conceitual dos estudantes em relação aos conteúdos de Matrizes, operações matriciais, determinantes, matriz inversa e noções iniciais de codificação. Além disso, esse instrumento buscou mapear percepções sobre metodologias ativas, sentimentos em relação à aprendizagem da álgebra e expectativas diante das atividades planejadas. Os resultados produzidos pelos alunos revelaram um conjunto consistente de indícios que permite compreender tanto as potencialidades quanto as fragilidades conceituais que orientaram a construção da intervenção pedagógica.

A análise do Questionário 2 foi estruturada em duas dimensões complementares: (i) o desempenho matemático, observando como os estudantes lidaram com itens de diferentes níveis de demanda cognitiva; e (ii) as percepções registradas nas respostas abertas, que revelam expectativas, inseguranças e modos de compreender a própria aprendizagem. A união desses dois conjuntos de dados permitiu desenvolver categorias analíticas à luz da ATD, relacionando-

Quadro 7 – Cruzamento entre percepções dos estudantes, categorias emergentes da ATD e metatextos interpretativos

Percepções dos estudantes (Questionário 1)	Categorias emergentes da ATD	Metatextos interpretativos
<i>“Agora eu entendo por que o professor insiste que a gente explique com calma.” (Aluno A)</i>	Reconhecimento da complexidade do ensinar	Os estudantes passam a perceber que a prática docente envolve planejamento, antecipação de dúvidas e organização cognitiva, elementos antes invisíveis para eles.
<i>“Quando fomos explicar, alguns colegas ficaram confusos, então precisei repetir.” (Aluno C)</i>	Interatividade e ajuste do discurso	A explicação revela-se um processo dialógico e adaptativo, evidenciando o princípio da interatividade da RME e o ajuste constante da linguagem.
<i>“A professora não dá a resposta; ela pergunta outra coisa pra gente pensar.” (Aluno B)</i>	Mediação orientadora	O aluno reconhece que a mediação pedagógica intencional estimula a investigação e a autonomia, alinhando-se à reinvenção guiada da RME.
<i>“Estudamos bastante porque dava medo de falar errado. Agora vejo como a professora precisa saber o conteúdo e explicar claro.” (Aluno F)</i>	Consciência da necessidade de domínio conceitual	Ensinar requer domínio matemático e clareza comunicativa, mostrando que a docência exige preparo intelectual, e não improvisado.
<i>“A parte mais difícil foi ajudar na hora das dúvidas. A professora faz isso sempre e eu não via.” (Aluno H)</i>	Docência como acompanhamento e suporte	O estudante reconhece que ensinar envolve circular, observar estratégias e orientar o raciocínio do outro, e não apenas expor conteúdo.
<i>“Fizemos confusão, mas depois reorganizamos a explicação e deu certo.” (Aluno D)</i>	Reconstrução de estratégias e autonomia	A reorganização revela um movimento de matematização horizontal seguido de verticalização, caracterizando um processo central da RME.
<i>“A parte prática foi difícil, ficamos perdidos no começo.” (Aluno B)</i>	Dificuldades de formalização	O aluno evidencia fragilidades conceituais e uma transição entre estratégias informais e modelos formais, o que justifica a necessidade da SD.
<i>“A explicação dos colegas me ajudou a entender de um jeito diferente.” (Aluno E)</i>	Modelos emergentes e diversidade de representações	A comparação de abordagens distintas favorece a construção de modelos emergentes e amplia a compreensão conceitual.

Fonte: Elaboração própria (2025).

as aos princípios da Educação Matemática Realística (RME) e às demandas cognitivas de Stein e Smith (1998).

7.2.1 Desempenho conceitual e padrões das respostas

As questões objetivas e dissertativas do Questionário 2 evidenciam que os estudantes possuíam um conhecimento inicial fragmentado sobre matrizes e operações básicas. A maioria dos alunos mostrou familiaridade com o reconhecimento de uma matriz pela ordem e pela disposição de linhas e colunas, mas apresentou dificuldades quando o item exigia raciocínio mais elaborado, especialmente em questões envolvendo a multiplicação de matrizes, o cálculo do determinante e a compreensão do papel do determinante na inversibilidade. Esse aspecto se evidenciou nas respostas, nas quais os estudantes recorriam a procedimentos memorizados, muitas vezes incompletos ou desconectados entre si, o que indica que os conceitos fundamentais não estavam consolidados.

Um padrão recorrente nas respostas foi a tentativa de “aplicar a conta” sem justificar, interpretar ou relacionar as etapas entre si. Na taxonomia de Stein e Smith (1998), esse movimento caracteriza tarefas de *procedimentos sem conexão*, evidenciando que, embora alguns alunos se lembrem do algoritmo, não conseguem articular seu significado conceitual. A ausência dessa articulação era especialmente visível em itens que solicitavam explicações escritas, nos quais muitos estudantes deixaram a resposta em branco ou apresentaram justificativas vagas, como “*porque a conta dá isso*” ou “*é assim que faz*”. Essas respostas indicaram que os estudantes estavam distantes da etapa de matematização vertical, ainda operando com base em estratégias informais ou parcialmente memorizadas.

Outro ponto importante refere-se ao cálculo do determinante de matrizes 2×2 e 3×3 . Em diversos casos, observamos que os estudantes aplicavam corretamente apenas a primeira parte do procedimento, mas se perdiam ao combinar termos ou ao interpretar o resultado. Isso se repetiu nas justificativas, revelando que o significado do determinante, enquanto medida de transformação, condição de invertibilidade ou um objeto matemático com propriedades próprias, ainda não estava presente no repertório da turma. Essa fragilidade conceitual foi importante para a estruturação da sequência didática, especialmente das atividades que buscavam reduzir a mecanização e fortalecer o pensamento relacional.

Quanto à multiplicação de matrizes, a dificuldade foi ainda maior. Muitos estudantes tentaram multiplicar termo a termo, confundindo a multiplicação de matrizes com a multiplicação escalar, o que expressa uma compreensão superficial do objeto matemático. Esse equívoco é comum em turmas do Ensino Médio, mas aqui serviu como um indicador preciso do ponto de partida para nossas ações pedagógicas. A Matemática realizada pelos estudantes ainda se concentrava em níveis de baixa demanda cognitiva, com pouca interpretação e quase nenhuma mobilização de estratégias flexíveis, o que justificou a escolha por atividades de alta demanda cognitiva ao longo da SD, visando justamente promover transições para níveis mais elevados de raciocínio.

7.2.2 Percepções iniciais sobre a Álgebra e metodologias ativas

Além das questões Matemáticas, o Questionário 2 incluiu itens abertos que permitiram analisar como os estudantes percebiam o próprio processo de aprendizagem, suas expectativas em relação à sequência didática e suas experiências anteriores com o ensino de Álgebra. As respostas revelaram sentimentos mistos: enquanto alguns alunos demonstraram entusiasmo pela temática da criptografia, outros expressaram insegurança e até desmotivação, especialmente pela imagem de que a álgebra seria um conteúdo difícil ou distante da realidade.

O Aluno A, por exemplo, afirmou: *“Nunca entendi muito bem matrizes, mas acho interessante aprender com criptografia.”* Essa fala revela tanto uma fragilidade conceitual quanto uma motivação potencializada pela escolha temática, mostrando a importância de contextos realísticos que conectam a Matemática à experiência vivida, conforme propõe a RME.

O Aluno C registrou: *“Tenho dificuldade em seguir os passos das contas, me perco fácil, mas gosto quando a atividade é prática.”* A fala indica que a dificuldade não se restringe ao conceito, mas envolve a organização do raciocínio e a autonomia (aspectos diretamente relacionados ao princípio da atividade). A fala também reforça a necessidade de tarefas que promovam a experimentação e a reconstrução de estratégias.

Já o Aluno F destacou: *“Acho legal usar tecnologia, porque ajuda a conferir se fiz certo.”* Essa percepção mostra abertura para o uso de ambientes digitais como suporte à matematização, algo que se confirmou posteriormente nas atividades com Python. A tecnologia surge aqui como um modelo alternativo, oferecendo apoio para transitar entre representações informais e formais. Por outro lado, o Aluno H escreveu: *“Álgebra me confunde porque muda muita coisa. Preferia algo mais devagar.”* Essa fala expressa uma demanda por mediações mais claras, alinhadas ao princípio da orientação da RME. Também indica que, antes da intervenção, a Álgebra era percebida como um campo abstrato, distante e pouco acessível, justamente o cenário que busquei ressignificar com a SD.

7.2.3 Índícios de matematização horizontal

A análise do Questionário 2 também revelou que, apesar das dificuldades, os estudantes mobilizaram alguns conhecimentos prévios que serviram de ponto de partida para a intervenção. Em questões que exigiam a interpretação de tabelas, as relações entre entradas de matrizes ou a leitura de informações estruturadas, os estudantes apresentaram maior segurança. Em termos da RME, esses momentos refletem processos iniciais de matematização horizontal, nos quais o aluno reorganiza elementos familiares em representações Matemáticas mais estruturadas. Esses indícios foram essenciais para orientar a construção das atividades: percebi que havia espaço para transformar as estratégias informais dos alunos em caminhos de formalização por meio da reinvenção guiada. Essa é justamente a lógica da SD proposta: criar situações-problema conectadas ao cotidiano e, ao mesmo tempo, suficientemente desafiadoras para promover a evolução do pensamento matemático.

7.2.4 Metatextos interpretativos da ATD no Eixo 2

A partir das unidades de significado identificadas nas respostas ao Questionário 2, elaboramos metatextos interpretativos que auxiliam na compreensão dos modos como os estudantes se relacionavam com os conteúdos algébricos antes da intervenção. Esses metatextos, produzidos a partir do processo de unitarização e categorização da ATD, mostram que o conhecimento inicial da turma estava fragmentado, sustentado por procedimentos memorizados, incompletos ou parcialmente compreendidos. A recorrência de expressões como *“acho que é assim”*, *“não lembro direito”*, *“me confundo no meio”*, ou, ainda, *“sei a fórmula, mas não sei explicar”*, revela que a maior parte dos estudantes operava predominantemente em níveis baixos de demanda cognitiva, conforme a taxonomia de Stein e Smith (1998), situando-se entre tarefas de memorização e procedimentos sem conexão.

Uma interpretação inicial, baseada nos dados, refere-se à ausência de significado conceitual nas respostas envolvendo determinantes e a multiplicação de matrizes. Os alunos demonstraram conhecer partes do algoritmo, mas não conseguiam relacionar as etapas nem justificar a finalidade do procedimento. Esse distanciamento entre execução e compreensão expressa um quadro típico de matematização interrompida, em que o estudante manipula símbolos sem atribuir significados às operações realizadas. Na perspectiva da RME, esse comportamento indica que os alunos ainda não desenvolveram modelos capazes de sustentar a passagem para níveis mais formais do pensamento algébrico.

O metatexto interpretativo relevante diz respeito aos sentimentos expressos em relação à álgebra. Muitos estudantes associaram essa área à dificuldade, à confusão e ao medo de errar, revelando uma dimensão afetiva que impacta diretamente o engajamento e o desempenho. Comentários como *“Álgebra me deixa nervoso”*, *“é muita coisa para lembrar”*, ou *“não entendo quando muda o jeito”* sinalizam percepções que atuam como barreiras internas à construção do raciocínio matemático. Entretanto, essas dificuldades não surgem como resistência pura. Ao lado da insegurança, surgem indícios de abertura, curiosidade e desejo de compreender, especialmente quando a temática da criptografia é mencionada. Esse contraste mostra que, embora conceitualmente fragilizados, os estudantes estavam em posição favorável para experimentar movimentos de reinvenção guiada, desde que inseridos em tarefas desafiadoras, contextualizadas e cuidadosamente mediadas.

A análise também revelou que os alunos já mobilizavam alguns elementos da matematização horizontal, principalmente em questões que envolviam a interpretação de tabelas, a organização de informações ou o reconhecimento de estruturas matriciais. Esses indícios, mesmo que incipientes, funcionam como sementes conceituais que poderiam ser desenvolvidas ao longo da sequência didática. A SD, portanto, foi planejada para transformar essas representações iniciais, ainda informais e desarticuladas, em modelos progressivamente mais formais, seguindo o princípio da matematização vertical.

Finalmente, os metatextos mostram que o Questionário 2, mais do que apontar lacunas, permitiu compreender o “ponto de partida epistemológico” dos estudantes, um cenário

marcado por conhecimentos dispersos, insegurança afetiva, falta de argumentação e procedimentos automatizados, mas também por abertura, interesse e disposição para aprender em ambientes colaborativos e investigativos. Essa leitura foi essencial para orientar as escolhas didáticas que estruturaram a intervenção, garantindo que cada tarefa da sequência didática dialogasse diretamente com as necessidades conceituais e afetivas evidenciadas pelos alunos na etapa diagnóstica.

A leitura das respostas abertas do Questionário 2 permitiu identificar um conjunto de percepções que dialogam diretamente com a literatura sobre metodologias ativas e com os princípios da RME. Muitos estudantes reconhecem que aprendem melhor quando participam de atividades práticas e têm a oportunidade de manipular exemplos, discutir com colegas ou utilizar tecnologias como apoio. Um exemplo dessa percepção aparece na fala do Aluno F: *“Acho legal usar tecnologia, porque ajuda a conferir se fiz certo”*, revelando a compreensão do ambiente digital como um modelo emergente que apoia a transição entre estratégias informais e formalizações Matemáticas mais estruturadas.

Outros estudantes destacam que o modo como a mediação docente é realizada influencia diretamente sua compreensão. O Aluno C afirmou que *“as aulas da professora Tati são maravilhosas, ela tem muita paciência”*, enquanto o Aluno B observou que *“a professora explica super bem, ótima professora, só é meio rápido”*. Essas falas evidenciam que os estudantes reconhecem o papel da orientação e percebem a clareza, a calma e a mediação intencional. Ao mesmo tempo, apontam a necessidade de ritmos mais compatíveis com o tempo necessário à reinvenção guiada.

As dificuldades conceituais também surgem de forma consistente nos relatos, especialmente no que diz respeito às operações matriciais e à organização do pensamento algébrico. O Aluno B escreveu: *“Tenho algumas dificuldades em todas as opções, mas principalmente nas expressões algébricas”*, enquanto o Aluno D afirmou sentir *“dificuldade em todos os conteúdos, principalmente trigonometria e matrizes”*. Essas falas reforçam que, antes da intervenção, os estudantes operavam majoritariamente com procedimentos sem conexão, sem articular propriedades, justificativas ou significados, o que confirma a necessidade de propor situações de aprendizagem baseadas em problemas e em matematização progressiva.

Além disso, o interesse associado ao uso da criptografia aparece como um elemento motivador, como demonstra o Aluno A ao afirmar: *“Nunca entendi muito bem matrizes, mas acho interessante aprender com criptografia”*. Essa expectativa positiva reforça a pertinência da escolha de contextos realísticos da SD, confirmando que temas significativos podem funcionar como porta de entrada para reorganizar conhecimentos e promover o engajamento cognitivo.

Esses elementos, ao serem analisados pela ATD, formaram unidades de sentido que se agruparam em três categorias principais: (i) abertura às metodologias ativas e ao aprender-fazendo; (ii) reconhecimento da mediação docente como fator determinante para a compreensão; e (iii) fragilidades conceituais profundas no campo da Álgebra. Os metatextos interpretativos decorrentes desse processo evidenciam que os estudantes estavam em uma etapa inicial de matematização horizontal, com estratégias dispersas e pouco sistematizadas, o que fun-

damentou a necessidade de uma sequência didática capaz de promover transições reais para níveis mais complexos de pensamento algébrico.

7.2.5 Síntese interpretativa do eixo

A análise mostra que os estudantes iniciaram a intervenção com um conjunto significativo de fragilidades conceituais, principalmente relacionadas à compreensão de operações matriciais, determinantes e inversibilidade. Esses resultados justificaram a escolha de tarefas de alta demanda cognitiva, planejadas para promover uma transição gradual dos procedimentos mecânicos para um raciocínio matemático mais elaborado.

Do ponto de vista qualitativo, as percepções dos alunos reforçam que a escolha da criptografia como eixo integrador foi decisiva para mobilizar o interesse e o engajamento. As falas revelam expectativas positivas, reconhecimento das dificuldades e abertura a novas formas de aprender, alinhando-se às perspectivas da RME, que valorizam a Matemática como atividade humana e conectada à realidade. Assim, o Questionário 2 cumpriu seu papel tanto diagnóstico quanto formativo, pois apontou lacunas conceituais, revelou percepções importantes sobre o ensino da Álgebra e forneceu subsídios centrais para o planejamento da sequência didática que compôs o núcleo da intervenção.

Em conjunto, essas unidades de sentido mostram que os estudantes se encontravam em um estágio inicial de matematização, articulando conhecimentos dispersos e pouco sistematizados, mas demonstrando uma abertura investigativa suficiente para que a sequência didática pudesse operar como um movimento de reinvenção guiada. Esse quadro confirma que a intervenção não se iniciou em um vazio conceitual, mas em um território marcado simultaneamente por fragilidades e potencialidades. A partir desse diagnóstico inicial, a sequência didática foi planejada para transformar as estratégias informais observadas e potencializar o desenvolvimento de modelos emergentes que sustentassem a formalização posterior. No eixo seguinte, analisamos as produções Matemáticas geradas ao longo das tarefas da SD, explicitando como os movimentos de matematização ganharam forma nas resoluções apresentadas pelos estudantes.

7.3 Eixo 3: Análise da Sequência Didática, evidências de aprendizagem, evolução conceitual e mobilização de estratégias

A sequência didática desenvolvida ao longo da intervenção constituiu o núcleo estruturante deste trabalho, articulando metodologias ativas, princípios da Educação Matemática Realística (RME) e tarefas de diferentes níveis de demanda cognitiva, conforme descrito por Stein e Smith (1998). A análise deste eixo apresenta como os estudantes mobilizaram estratégias, construíram significados e avançaram conceitualmente a partir das quatro atividades aplicadas,

Quadro 8 – Cruzamento entre percepções dos estudantes, categorias emergentes da ATD e metatextos interpretativos (Eixo 2)

Percepções dos estudantes (Questionário 2)	Categorias emergentes da ATD	Metatextos interpretativos
<i>“Nunca entendi muito bem matrizes, mas acho interessante aprender com criptografia.”</i> (Aluno A)	Interesse motivado pelo contexto	O estudante reconhece suas dificuldades, mas demonstra abertura para aprender quando o conteúdo é apresentado em situações realísticas, alinhando-se à RME.
<i>“Tenho dificuldade em seguir os passos das contas, me perco fácil.”</i> (Aluno C)	Fragilidade na organização do raciocínio	A resposta revela a ausência de estruturas internas para conectar procedimentos, indicando que o aluno opera em níveis baixos de demanda cognitiva (Stein et al., 1998).
<i>“Acho legal usar tecnologia, ajuda a conferir se fiz certo.”</i> (Aluno F)	Tecnologia como modelo emergente	A fala mostra que o estudante percebe os recursos digitais como apoio para validar estratégias, favorecendo a transição entre representações informais e formais.
<i>“Álgebra me confunde porque muda muita coisa. Preferia algo mais devagar.”</i> (Aluno H)	Insegurança conceitual e afetiva	Demonstra que a percepção da Álgebra como difícil está ligada ao ritmo e à falta de mediação clara, reforçando a necessidade do princípio da orientação na RME.
<i>“Tenho algumas dificuldades em todas as opções, principalmente expressões algébricas.”</i> (Aluno B)	Falta de domínio dos fundamentos	Expressa fragilidades gerais na base algébrica, indicando que o estudante opera com memorização fragmentada e não com compreensão relacional.
<i>“Se a explicação for prática, eu entendo melhor.”</i> (Aluno C)	Preferência por atividades investigativas	Mostra que o aluno aprende melhor em ambientes que favorecem a manipulação, a experimentação e a construção ativa – pilares das metodologias ativas.
<i>“Não lembro direito como faz multiplicação de matrizes.”</i> (Aluno D)	Conhecimento procedimental incompleto	Indica matematização interrompida: o estudante lembra partes do algoritmo, mas não compreende sua lógica, o que impede a formalização (RME).
<i>“A parte de determinante sempre me confunde.”</i> (Aluno E)	Ausência de significado conceitual	O determinante aparece como um cálculo mecânico, sem interpretação, o que evidencia a necessidade de atividades que promovam modelos emergentes.

Fonte: Elaboração própria (2025).

observando tanto os registros escritos quanto as interações em sala, o diário de campo e as produções Matemáticas.

A leitura interpretativa foi orientada pela Análise Textual Discursiva, permitindo acompanhar processos de reorganização conceitual, surgimento de modelos e estratégias informais que evoluíram para formalizações mais robustas, além de indícios claros de matematização horizontal e vertical. Este eixo, portanto, mostra como os estudantes se engajaram com situações contextualizadas, como articularam conceitos de Matrizes e Criptografia e de que forma os diferentes tipos de tarefas influenciaram o desenvolvimento de suas compreensões algébricas.

Diante do exposto, organizamos a discussão em quatro partes: (i) análise da Atividade 1 e das estratégias iniciais de contextualização e investigação; (ii) análise da Atividade 2 e das evidências de pensamento relacional em tarefas gamificadas; (iii) análise da Atividade 3, com foco no uso da tecnologia e na articulação entre procedimentos manuais e computacionais; e (iv) análise da Atividade 4 e do papel da resolução de problemas na consolidação das estruturas formais da Álgebra.

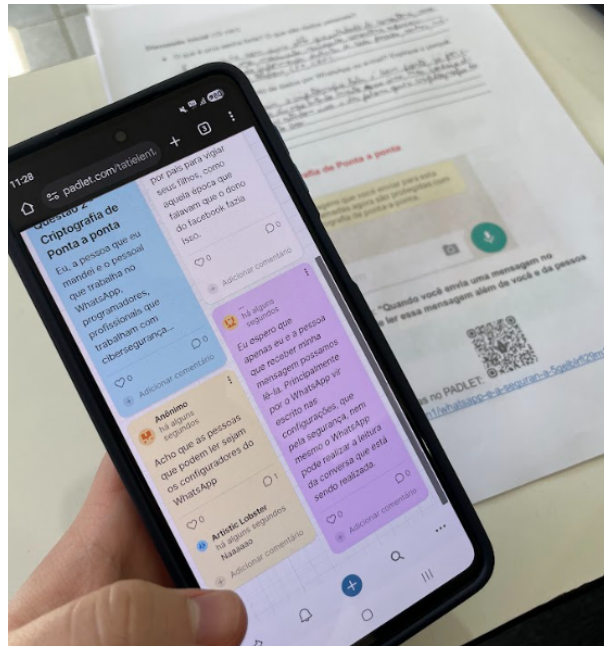
7.3.1 Análise da Atividade 1

A Atividade 1 inaugurou a sequência didática, funcionando como um primeiro movimento de inserção dos estudantes em um contexto realístico relacionado à segurança digital, ao uso cotidiano de senhas e às percepções sobre criptografia de ponta a ponta. Embora ainda não envolvesse procedimentos algébricos formais, essa atividade cumpriu um papel decisivo na lógica da RME, pois possibilitou que os alunos mobilizassem conhecimentos prévios, construíssem significados iniciais e expressassem concepções espontâneas sobre proteção de dados e privacidade, elementos que, posteriormente, seriam reorganizados nos processos de matematização horizontal e vertical.

A análise das respostas escritas na folha da *ATIVIDADE 1: Por que proteger informações?*, articulada às interações registradas no Padlet e aos registros do diário de campo, permitiu identificar um conjunto diversificado de unidades de significado relacionadas à compreensão inicial sobre segurança digital, ao funcionamento das senhas e aos limites da criptografia utilizada em aplicativos como o WhatsApp. Esses fragmentos, destacados no processo de unitarização, foram agrupados em categorias emergentes que expressam a forma como os estudantes interpretam, explicam e justificam fenômenos que envolvem tecnologia, risco e Matemática.

As respostas dos alunos revelam concepções ainda intuitivas sobre segurança digital, fortemente ancoradas em experiências pessoais, em vivências de vulnerabilidade ou em narrativas presentes no cotidiano escolar e na mídia. Embora tais concepções possam, em uma perspectiva tradicional, ser interpretadas como imprecisas ou pouco sistematizadas, na abordagem da RME elas assumem um papel formativo central. Longe de representarem limitações, configuram-se como pontos de partida legítimos para os processos de matematização, pois evidenciam modelos espontâneos que podem ser progressivamente reelaborados e transformados em estruturas conceituais mais robustas ao longo das atividades posteriores.

Figura 13 – Alunos realizando a Atividade 1



Fonte: Elaboração própria (2025).

Quadro 9 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 1

Unidades de Significado (exemplos)	Categoria Emergente	Metatexto Interpretativo
<i>“Senha forte é uma senha difícil acesso”; “não pode ter nome nem data”; “precisa de letra maiúscula e símbolo.”</i>	Concepções intuitivas de segurança	Os alunos mobilizam conhecimentos do senso comum para definir segurança, com base em regras práticas e experiências anteriores, revelando modelos iniciais que podem sustentar processos de matematização.
<i>“Não confio no WhatsApp porque já tive meus dados transferidos”; “você pode ser hackeado a qualquer hora”; “e-mail dá medo.”</i>	Percepção de vulnerabilidade e desconfiança	A experiência pessoal funciona como critério epistemológico, produzindo interpretações afetivas que influenciam a compreensão de mecanismos matemáticos de proteção.
<i>“Acho que o WhatsApp lê as mensagens”; “a IA fica vendo tudo”; “um robô parecido com a nuvem lê as conversas.”</i>	Confusão entre criptografia, vigilância e tecnologia	Os estudantes misturam conceitos técnicos e representações populares, revelando compreensão fragmentada sobre criptografia e apontando entradas para a reinvenção guiada.
<i>“O WhatsApp é seguro porque ativo a configuração”; “seguro porque mando mensagem para mim mesma”; “as redes sociais sabem tudo.”</i>	Senso comum como modelo explicativo inicial	As explicações se baseiam em vivências cotidianas, caracterizando a etapa inicial de matematização horizontal.

Fonte: Elaboração própria (2025).

As imagens do Padlet (Figuras 13-14) sintetizam visualmente o caráter exploratório e coletivo da Atividade 1. As contribuições ali registradas evidenciam que os estudantes mobiliza-

Figura 14 – Padlet construído pela turma

Brave Dragonfly há 4 meses
Acredito que sim, pois o aplicativo é público e muitas pessoas cuidam dele, além de existir alguns aplicativos de "controle", normalmente usado por pais para vigiar seus filhos, como aquela época que falavam que o dono do facebook fazia isso.

Artistic Lobster há 4 meses
Controle dos pais 🚫👁️

Reliable Centipede há 4 meses
Questão 2 - Criptografia de Ponta a Ponta
Ninguém deve ter acesso à conversas privadas. Possivelmente possam ter acesso ao método de criptografia, mas não às chaves que são usadas para criptografiação

anônimo há 4 meses
Parte 2: Criptografia de Ponta a ponta
11:27
663 **luxe by beca** Conta comercial
qua., 23 de jul.
As mensagens e ligações são protegidas com a criptografia de ponta a ponta. Somente as pessoas que fazem parte da conversa podem ler, ouvir e compartilhar esse conteúdo. Saiba mais

Brave Dragonfly há 4 meses
creio que sim, por que controle de pais é um bom exemplo de ver as mensagens além dos envolvidos. Para mim mais de uma pessoa pode SIM ver as mensagens

... há 4 meses
Eu espero que apenas eu e a pessoa que receber minha mensagem possamos lê-la. Principalmente por o WhatsApp vir escrito nas configurações, que pela segurança, nem mesmo o WhatsApp pode realizar a leitura da conversa que está sendo realizada.

... há 4 meses
Eu acredito que seja um robô parecido com a função "nuvem" onde as mensagens ficam gravadas.

... há 4 meses
Eu acho que a IA, pois ela está entre os nossos contatos do WhatsApp, sabendo de tudo.

... há 4 meses
Eu acho que as redes sociais, inclusive o CHAT GPT. Ele sempre sabe!

... há 4 meses
As redes sociais, principalmente IA.

Fonte: Elaboração própria (2025).

ram hipóteses espontâneas sobre quem teria acesso às mensagens enviadas pelo WhatsApp, oscilando entre explicações técnicas, percepções afetivas e interpretações de senso comum. Observamos respostas como *"ninguém"*, *"os pais têm controle"*, *"a IA vê"*, *"um robô parecido com a nuvem lê"* e diversas representações icônicas de vigilância digital. Esses enunciados revelam a coexistência de concepções fragmentadas, porém ricas em intencionalidade, o que forma um campo discursivo heterogêneo. Na perspectiva da ATD, esse conjunto de manifestações constitui um núcleo importante de unidades de significado, pois permite identificar tensões, contradições e modelos imaginários que antecedem a construção de conhecimentos matemáticos mais formais. Do ponto de vista da RME, o Padlet evidencia o surgimento de modelos iniciais e a negociação de significados em ambiente colaborativo, caracterizando um movimento claro de matematização horizontal que se tornará mais robusto ao longo da sequência didática.

O surgimento dessas categorias revela uma paisagem conceitual marcada por percepções ainda frágeis, porém ricas em potencial investigativo. A primeira categoria evidencia que os estudantes já possuem critérios para identificar senhas fracas ou fortes, embora fundamentados em regras práticas e não em modelos matemáticos relacionados à análise combinatória ou ao espaço de busca. Esse aspecto é fundamental para a lógica da RME, pois permite transformar regras empíricas em estruturas formais ao longo das atividades subsequentes, especialmente quando forem introduzidos conceitos de codificação e operações matriciais.

A segunda categoria indica que as percepções afetivas, o medo de vazamentos, a insegurança em relação aos e-mails e a desconfiança em relação aos aplicativos compõem uma parte importante do campo de significação do estudante. Reconhecer essa dimensão é central para compreendermos a aprendizagem da Matemática em contextos tecnológicos, que não ocorre apenas pela via cognitiva, mas também pelas vias experiencial e emocional.

A terceira categoria, que reúne falas que confundem criptografia com monitoramento ou inteligência artificial, destaca-se por apresentar *erros produtivos* no sentido da ATD, pois revela pontos de tensão cognitiva que, ao serem trabalhados, podem gerar reorganizações conceituais significativas. Esses equívocos funcionam como indicadores da necessidade de introduzir, nas atividades seguintes, modelos matemáticos formais relacionados a chaves públicas, privadas e operações não comutativas.

A quarta categoria evidencia que muitos estudantes interpretam a segurança digital com base em raciocínios de senso comum, tomando decisões por analogia ou pela repetição de discursos circulantes nas redes sociais. A lógica da RME permite que tais estruturas espontâneas sirvam de ponto de partida para processos de matematização vertical, que reorganizam essas concepções com base em relações Matemáticas mais formais.

As interações no Padlet ampliaram os dados qualitativos, permitindo observar como os alunos negociam significados coletivamente. Comentários como "*Controle dos pais*", "*Ninguém*", "*Acho que a IA vê*", "*Nãããooo*" ou "*imagens de robôs e nuvens*" acrescentam camadas discursivas que não constam nas respostas escritas. Tais elementos revelam que os estudantes constroem compreensões híbridas, combinando elementos técnicos, culturais e afetivos.

A leitura dessas categorias, construídas a partir das respostas escritas e das interações no Padlet, evidencia que os estudantes chegaram à sequência didática mobilizando modelos espontâneos, por vezes fragmentados, mas ricos em significados prévios. Para compreender de forma mais ampla como esses modelos foram organizados e expressos pelos grupos, torna-se importante observar também as produções visuais elaboradas na etapa de pesquisa direcionada. Os mapas mentais produzidos em dupla não apenas reforçam as unidades de significado identificadas na análise textual, como também revelam modos particulares de sintetizar informações, selecionar elementos considerados essenciais e articular explicações iniciais sobre criptografia. Assim, a leitura desses mapas amplia o entendimento sobre o ponto de partida conceitual da turma, oferecendo indícios valiosos sobre como os estudantes estruturam e re-presentam suas ideias antes dos movimentos de matematização formal que ocorrerão nas atividades seguintes.

Em síntese, a **Atividade 1** revela que os estudantes chegam à sequência didática com um repertório heterogêneo de concepções sobre segurança digital, permeado por intuições, medos e conhecimentos fragmentados. Tais concepções constituem o ponto de partida para a reinvenção guiada proposta pela RME. A partir delas, será possível construir modelos matemáticos mais robustos ao longo da sequência, evidenciando como operações algébricas e sistemas criptográficos garantem ou limitam a proteção de informações.

A produção dos mapas mentais acrescentou novas camadas interpretativas à análise da Atividade 1, uma vez que tornou visível a forma como os estudantes organizam e selecionam as informações ao serem convidados a sintetizar o tema da criptografia de ponta a ponta. Embora orientados por perguntas diretas, os mapas revelam muito mais do que respostas pontuais: mostram como os alunos constroem modelos explicativos iniciais, mobilizam repertórios cultu-

rais e produzem sentidos próprios para fenômenos tecnológicos que, posteriormente, seriam revisitados no processo de matematização.

Figura 15 – Mapa mental produzido por uma das duplas



Fonte: Elaboração própria (2025).

De modo geral, os mapas mentais elaborados em duplas evidenciaram quatro núcleos recorrentes, a definição de criptografia, os tipos de dados protegidos, a Matemática envolvida e as limitações do processo. No entanto, a maneira como esses tópicos foram representados revela nuances importantes. Nas definições, por exemplo, é marcante a presença de metáforas associadas à ideia de proteção física, como *“funciona como um cadeado digital”* ou *“só quem tem a chave consegue abrir”*, o que demonstra que os estudantes usaram imagens concretas para explicar uma estrutura Matemática abstrata. Na lógica da RME, essas metáforas constituem modelos informais potentes que, mais adiante, podem ser reorganizados em direção a modelos mais formais, especialmente quando forem introduzidos conceitos de chave pública, chave privada e operações não comutativas.

A seção sobre dados protegidos também revela um interessante movimento de ampliação conceitual. Embora as respostas esperadas incluíssem mensagens, fotos e documentos, alguns grupos adicionaram elementos como localização, transações bancárias e arquivos enviados na nuvem, indicando que acionam experiências digitais reais para atribuir sentido ao tema. Esse movimento alinha-se ao princípio da atividade, pois evidencia que a aprendizagem surge da interação entre vivências cotidianas e novos conceitos.

A parte dedicada à Matemática envolvida foi, talvez, a que mais evidenciou a presença de modelos híbridos. Os alunos mencionam RSA, curvas elípticas e chaves públicas e privadas, mas ainda o fazem por meio de explicações metafóricas ou parcializadas, como *“desenhos matemáticos que formam curvas”* ou *“números gigantes que dificultam quebrar o código”*. Es-

Figura 16 – Mapa mental com explicações metafóricas



Fonte: Elaboração própria (2025).

As formulações, conforme mostradas na Figura 16, longe de representarem erros no sentido tradicional, configuram-se como erros produtivos que revelam pontos a serem retomados na reinvenção guiada. Elas mostram que os estudantes já começaram a identificar alguma relação entre Matemática e criptografia, ainda que de maneira bem inicial, o que caracteriza um estágio primário de matematização horizontal.

As limitações da criptografia, por sua vez, foram descritas de maneira surpreendentemente crítica. Os alunos mencionam desde os riscos associados a vírus e invasões diretas no dispositivo até vulnerabilidades relacionadas à exposição de metadados, como horários de envio e contatos envolvidos. Algumas duplas ainda destacaram que nenhum sistema é capaz de impedir que o próprio usuário compartilhe a mensagem ou faça capturas de tela. Essa postura mais analítica revela que, mesmo antes da abordagem formal dos conteúdos algébricos, os estudantes já conseguem construir interpretações mais amplas sobre segurança digital, demonstrando autonomia interpretativa e capacidade de estabelecer relações entre tecnologia, risco e comportamento humano.

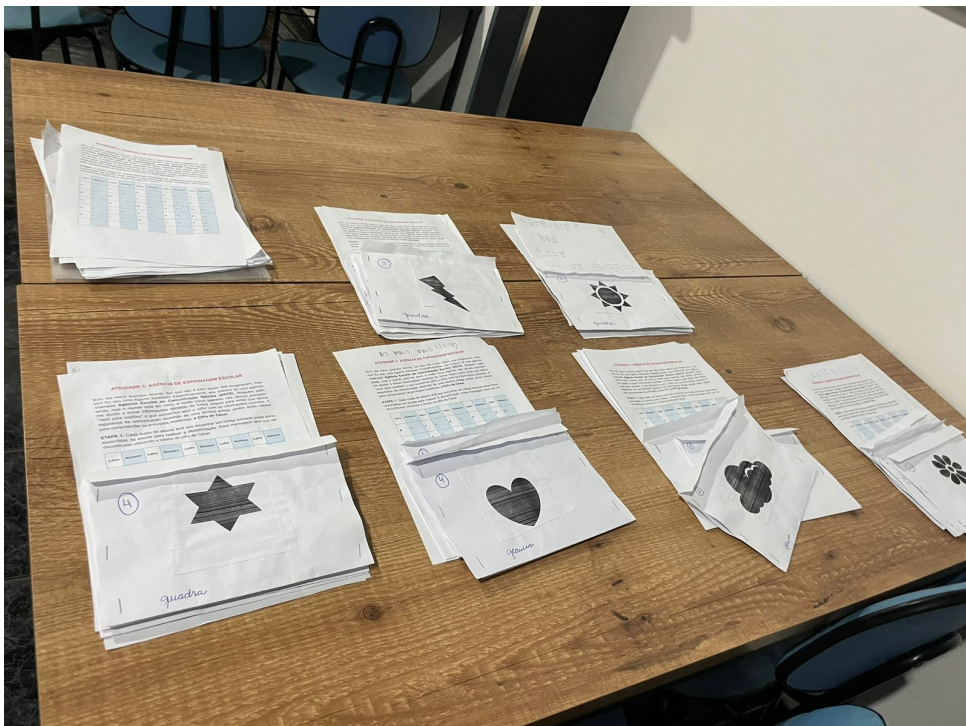
A análise dos mapas mentais, portanto, reforça as categorias previamente identificadas e amplia a compreensão do ponto de partida epistemológico dos estudantes. Em síntese, os mapas mentais confirmam que a Atividade 1 cumpriu seu papel investigativo e introdutório ao mobilizar conhecimentos prévios, despertar curiosidade e provocar interpretações múltiplas, ela estabeleceu as bases conceituais e afetivas para que as etapas seguintes da sequência didática pudessem promover avanços reais na compreensão Matemática dos estudantes, conforme esperado por nós durante a construção e elaboração da SD.

A leitura integrada das concepções expressas na Atividade 1, tanto nas respostas escritas quanto nos mapas mentais, mostra que os estudantes mobilizaram um amplo conjunto de conhecimentos prévios, percepções intuitivas e modelos espontâneos sobre segurança digital e criptografia. Com esse panorama inicial, vamos avançar para a Atividade 2, planejada como um movimento de aprofundamento, no qual os estudantes seriam desafiados a operar em contextos gamificados que exigem maior coordenação entre estratégias, argumentação e análise. Assim, se a Atividade 1 permitiu mapear sentidos e construir significados iniciais, a Atividade 2 inaugura um novo patamar de demanda cognitiva, favorecendo a transição de modelos informais para estruturas mais articuladas de pensamento matemático na Álgebra.

7.3.2 Análise da Atividade 2

A Atividade 2 representou um momento decisivo da nossa sequência didática, pois colocou os estudantes diante de um desafio investigativo que unia, de forma integrada, elementos de criptografia, operações matriciais e resolução colaborativa de problemas. Diferentemente da Atividade 1, que foi extremamente exploratória, esta etapa exigiu ações sistemáticas de cálculo, tomada de decisão, comparação de resultados e verificação de coerência, constituindo um movimento claro de transição entre a matematização horizontal e vertical, conforme os princípios da RME. O caráter lúdico e investigativo da caça ao tesouro funcionou como um mobilizador de engajamento, permitindo observar indícios significativos de autonomia, raciocínio estratégico e coordenação de procedimentos.

Figura 17 – Envelopes do Caça ao Tesouro



Fonte: Elaboração própria (2025).

Os primeiros momentos da Atividade 2 foram marcados por um intenso processo de investigação e mobilização de conhecimentos prévios, no qual cada dupla recebeu um envelope com mensagens criptografadas a serem decodificadas pela Cifra de César. Ao se depararem com o desafio, os estudantes rapidamente recorreram a estratégias de tentativa, comparação entre padrões e raciocínio lógico para deslocar letras, identificar regularidades e reconstruir o texto original. Esse processo evidencia um claro movimento de matematização horizontal, no qual os estudantes, apoiados em conhecimentos espontâneos sobre códigos e na experiência adquirida na Atividade 1, reorganizaram informações, formularam hipóteses e testaram possibilidades até obterem mensagens compreensíveis. A cifra funcionou, portanto, como uma ponte interdisciplinar entre Matemática e Criptografia, permitindo que operações simples de translação no alfabeto fossem imediatamente ressignificadas como procedimentos matemáticos inseridos em uma narrativa investigativa.

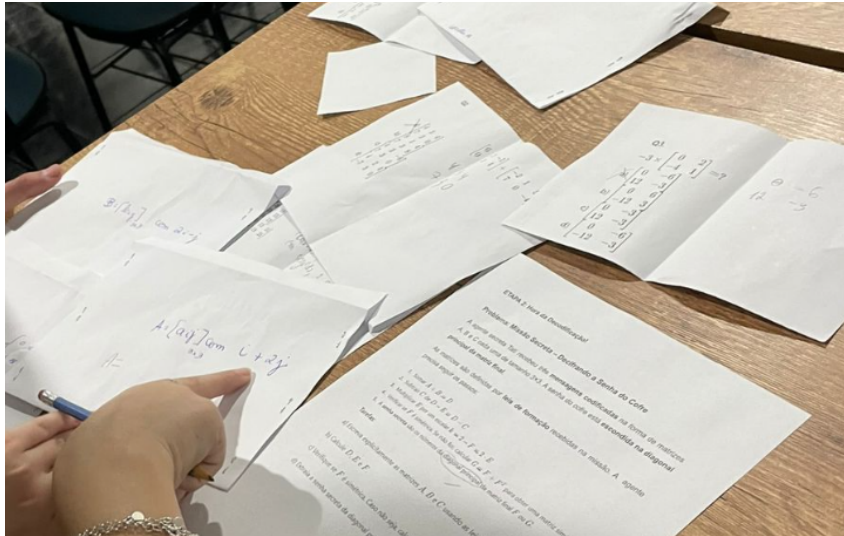
À medida que as duplas decodificavam as mensagens e avançavam pelos diferentes espaços da escola, sala de aula, quadra, secretaria, sala da direção, a caça ao tesouro assumiu um caráter dinâmico. O deslocamento físico entre os ambientes, associado à necessidade de interpretar corretamente cada pista para localizar o próximo envelope, ampliou o envolvimento dos estudantes. A Matemática deixou de se apresentar como um conjunto de operações isoladas e passou a integrar uma situação-problema que exigia lógica, precisão e comunicação entre os membros da dupla. Esse percurso investigativo reforçou o princípio da atividade ao permitir que os alunos experimentassem a Matemática como prática viva, contextualizada e funcional, atribuindo sentido às operações realizadas e reconhecendo a criptografia como ferramenta concreta para resolver desafios reais no contexto da narrativa proposta.

O percurso da atividade revelou, inicialmente, um desafio inesperado, pois as duplas demoraram a perceber que as leis de formação das matrizes estavam impressas no verso dos envelopes encontrados na busca. Esse episódio, embora pareça apenas uma questão operacional, mostrou como os estudantes precisavam reorganizar constantemente suas estratégias diante de situações abertas. Essa reorganização caracteriza, na perspectiva da ATD, um momento de tensão produtiva, no qual os alunos reconhecem lacunas, reorientam suas ações e passam a operar com maior intencionalidade.

Uma vez iniciadas as operações matriciais no laboratório, foi possível observar trajetórias distintas entre as duplas. A primeira dupla, composta por estudantes com maior familiaridade com os conteúdos matemáticos, rapidamente compreendeu a lógica da decodificação e chegou à senha correta, demonstrando fluidez no uso das operações de soma, subtração, multiplicação por escalar e identificação de simetria.

Outras duplas, porém, apresentaram erros específicos que revelaram seu modo de compreender a Matemática envolvida. Uma dupla não inverteu corretamente o sinal da diagonal secundária; outra errou um cálculo inicial que impactou toda a construção da matriz; outra ainda confundiu o conceito de simetria com a ideia de números opostos, produzindo uma matriz incorreta. Do ponto de vista qualitativo, tais erros não se configuram como falhas isoladas, mas

Figura 18 – Encontrando as leis de formação



Fonte: Elaboração própria (2025).

como expressões de modelos parciais de compreensão, que se tornam visíveis justamente em tarefas de alta demanda cognitiva.

Surpreendentemente, as duas últimas duplas, compostas por estudantes que expressam maiores dificuldades em Matemática e que costumam realizar cálculos com mais cautela, conseguiram, por meio de persistência e conferência sistemática dos procedimentos, chegar à senha correta. Esse resultado reforça a hipótese de que tarefas bem estruturadas, desafiadoras e contextualizadas podem favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático, mesmo entre alunos que historicamente se percebem pouco competentes nesse campo. O caráter motivador da narrativa investigativa contribuiu para sustentar o esforço cognitivo prolongado dessas alunas, evidenciando o papel do engajamento como componente essencial da aprendizagem.

As falas registradas no diário de campo, *“vamos, nós precisamos ganhar essa caça ao tesouro”*, *“nossa, a professora podia dar mais aulas assim”* e *“meu Deus, será que acertei a senha?”* revelam uma dimensão afetiva que se articula ao processo cognitivo. O desejo de superar o desafio, a ansiedade produtiva diante dos cálculos e a satisfação em compreender o enigma reforçam que o engajamento não foi apenas instrumental, mas genuíno. Na perspectiva da RME, essas manifestações indicam que a Matemática se tornou significativa por estar vinculada a uma situação realística e desafiadora, na qual o erro fazia parte do processo e a verificação coletiva era central.

Do ponto de vista da aprendizagem, observamos no diário de bordo que essa atividade mobilizou conhecimentos produzidos anteriormente nas oficinas pelos próprios alunos, tanto na participação quanto na elaboração. Os alunos começaram a atribuir significado às operações matriciais ao perceberem sua função na decodificação da senha, conectando Matemática e criptografia de forma interdisciplinar. Conceitos como matriz transposta, simetria e leis de formação deixaram de ser meros procedimentos e passaram a desempenhar um papel explicativo na situação-problema, caracterizando um avanço importante na matematização vertical.

O momento de socialização final, antes da divulgação da equipe vencedora, também se mostrou formativo. Ao comparar os resultados e perceber que três duplas haviam chegado ao mesmo número, os estudantes iniciaram espontaneamente um processo de revisão coletiva dos cálculos. Essa etapa foi particularmente rica: cada grupo passou a identificar onde errou, explicar suas estratégias e reconhecer inconsistências. Houve reformulação de procedimentos, conferência mútua e explicações entre pares, elementos que, segundo Stein e Smith (1998), caracterizam tarefas de fazer Matemática, nas quais o aluno revisita ideias, justifica decisões e busca coerência interna.

A partir das observações registradas no diário de campo, das falas espontâneas dos estudantes durante a caça ao tesouro e das produções Matemáticas obtidas ao final da atividade, foi possível identificar um conjunto consistente de unidades de significado relacionadas às estratégias utilizadas, às dificuldades enfrentadas e aos modos de mobilização conceitual que surgiram ao longo do desafio. Essas unidades, após o processo de unitarização e categorização, organizaram-se em categorias que revelam como os estudantes articularam conhecimentos prévios, raciocínio lógico, operações matriciais e noções iniciais de criptografia para concluir a tarefa. O quadro a seguir sintetiza esse movimento, reunindo exemplos representativos das falas dos alunos, as categorias emergentes e os metatextos interpretativos construídos a partir da ATD, permitindo visualizar como a atividade promoveu avanços significativos nos processos de aprendizagem e na compreensão das relações entre Matemática e Criptografia.

Por fim, os comentários emocionados dos estudantes, como *“essa é uma aula que vou levar para sempre, nunca vou me esquecer”*, reforçam o impacto formativo da atividade. A Atividade 2 não apenas permitiu observar o desenvolvimento conceitual, mas também promoveu experiências positivas de aprendizagem Matemática, fortalecendo a autoconfiança dos alunos e ressignificando seu vínculo com a disciplina.

Assim, a Atividade 2 evidenciou avanços relevantes na mobilização de estratégias, na compreensão conceitual e na articulação da Matemática e do contexto. Os registros mostram que os estudantes conseguiram, em diferentes níveis, operar com modelos emergentes, reorganizar procedimentos e participar ativamente de um processo investigativo. A caça ao tesouro cumpriu, portanto, um papel estruturante na sequência didática, consolidando elementos essenciais para que os movimentos de matematização se tornassem mais robustos nas atividades subsequentes.

A vivacidade do percurso investigativo que observamos nesta atividade também evidenciou que os estudantes estavam preparados para transitar para desafios de maior complexidade conceitual e tecnológica. O modo como mobilizaram estratégias próprias, revisaram os procedimentos, compararam resultados entre si e entre as duplas e reconheceram os erros como parte do processo formativo mostrou que já haviam desenvolvido uma postura investigativa que ultrapassava a simples execução de algoritmos.

Esse amadurecimento abriu caminho para a próxima atividade da SD, a Atividade 3, na qual a introdução do Python não apenas ampliou as possibilidades de representação e validação dos cálculos, mas também convidou os estudantes a estabelecer novas relações entre

Quadro 10 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 2

Unidades de Significado (exemplos)	Categoria Emergente	Metatexto Interpretativo
<i>“Vamos, nós precisamos ganhar essa caça ao tesouro!”</i>	Engajamento motivado pela narrativa	A competição e o enigma funcionam como motores de envolvimento cognitivo, ampliando a disposição dos estudantes para mobilizar conhecimentos matemáticos de forma ativa.
<i>“Nossa, a professora podia dar mais aulas assim.”</i>	Valorização da abordagem investigativa	A fala revela que a contextualização e o caráter lúdico favorecem o sentido atribuído à Matemática, fortalecendo o princípio da atividade da RME.
<i>“Meu Deus, será que acertei a senha?”</i>	Ansiedade produtiva e verificação	O aluno expressa tensão cognitiva típica de tarefas de alta demanda, indicando apropriação do processo de conferência e de validação dos resultados.
<i>Dificuldade em localizar as leis de formação no verso dos envelopes</i>	Reorganização de estratégias	A necessidade de reinterpretar pistas e reorganizar ações evidencia momentos de matematização horizontal, em que o estudante ajusta seu percurso investigativo.
<i>Erros na diagonal secundária; cálculo incorreto inicial; confusão entre matriz simétrica e números opostos</i>	Erros produtivos	As dificuldades funcionam como indicadores de modelos parciais de compreensão, permitindo identificar fragilidades conceituais e orientar a reinvenção guiada.
<i>Duplas com maior dificuldade realizando os cálculos com calma e chegando à senha correta</i>	Persistência e fortalecimento da autonomia	O resultado revela que tarefas contextualizadas podem sustentar o esforço prolongado e favorecer avanços mesmo entre estudantes que se percebem com baixo desempenho.
<i>Discussão coletiva e revisão mútua dos cálculos entre as duplas</i>	Interatividade e validação social	O confronto entre estratégias e a conferência colaborativa reforçam o papel do diálogo na construção conceitual, alinhando-se ao princípio da interatividade da RME.

Fonte: Elaboração própria (2025).

algoritmos matemáticos e procedimentos computacionais, inaugurando um novo patamar de abstração e de diálogo entre diferentes linguagens.

7.3.3 Análise da Atividade 3

A Atividade 3 representou, na nossa sequência didática, o momento em que os estudantes passaram a transitar explicitamente entre os procedimentos manuais e o ambiente computacional, organizando o que haviam construído nas Atividades 1 e 2 com o pensamento

Figura 19 – Explorando o Python no Google Colab

Questão 1: Explorando Python

Faça a multiplicação $A \times B$ nesta folha explicando o passo a passo. O resultado foi o mesmo que o Python mostrou? Explique.

Resposta:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2+2 & 8+5 \\ 0+6 & 0+15 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

R: Sim, deu o mesmo valor na programação, realizando a multiplicação correta.

Fonte: Elaboração própria (2025).

computacional e a lógica de programação. Essa atividade introduziu uma nova linguagem, o *Python*, que atuou simultaneamente como ferramenta de validação, de exploração e de ampliação conceitual. Assim, além de realizar operações matriciais, os estudantes puderam observar como o computador processa algoritmos, como organiza estruturas Matemáticas e como implementa, de forma automatizada, regras que eles próprios haviam executado manualmente nas etapas anteriores.

Desde o primeiro contato com o código no Google Colab, observamos um movimento de curiosidade e comparação entre os processos realizados à mão e o resultado fornecido pelo Python. Na questão 1, quando multiplicaram matrizes no ambiente computacional, a maior parte dos estudantes reagiu com entusiasmo ao perceber a rapidez e a precisão dos resultados. Comentários como *"é mais prático e rápido"*, *"não tem chance de dar errado"* ou *"reduz erros humanos"* evidenciam não apenas o reconhecimento da eficiência da ferramenta, mas também um deslocamento epistêmico importante: os alunos passaram a considerar o código como um meio legítimo de conferência, reforçando a Matemática como um sistema de regras que pode ser reproduzido tanto pelo pensamento humano quanto por um algoritmo.

Esse deslocamento articula-se às categorias emergentes das atividades anteriores. Se, na Atividade 1, observamos concepções intuitivas sobre segurança e uma forte presença de metáforas e modelos espontâneos, na Atividade 2 os estudantes já mobilizavam estratégias estruturadas para resolver problemas reais. Agora, na Atividade 3, vemos um passo adicional, a incorporação da tecnologia como parte do processo matemático, ampliando os significados atribuídos às operações e favorecendo uma compreensão mais profunda de suas propriedades.

A questão 2 aprofundou essa articulação, pois os alunos criaram suas próprias matrizes e testaram a multiplicação em Python. Esse momento foi particularmente rico porque deu visibilidade às estruturas internas das matrizes. Os estudantes perceberam, durante a exploração, que certas dimensões não permitiam a multiplicação, que apenas matrizes quadradas possuem

1. Qual foi a **mensagem codificada** que o Python gerou?

12	12	→	M	M
15	31		J	F

2. Em duplas, escolham uma **nova mensagem** (máximo 4 letras).

- Transformem as letras em números (A=0, B=1, ..., Z=25).
- Montem uma matriz **mensagem** com esses números.
- Usem o Python para multiplicar pela **mesma matriz-chave**.

Escrevam abaixo o **código secreto** (a matriz final):

24	19	→	Y	T
28	16		C	Q

Explore novas palavras de tamanhos n^2 , por exemplo 9, 16... e descreva abaixo:

$$\begin{bmatrix} 17 & 4 & 19 \\ 0 & 17 & 3 \\ 0 & 3 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 38 & 40 \\ 17 & 20 \\ 3 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} m & v \\ R & v \\ D & R \end{bmatrix}$$

↳ Retardado
↳ Matriz 3x3
↳ mudança da chave

Figura 20 – Criptografando com Python

Fonte: Elaboração própria (2025).

determinante e que pequenas alterações nas entradas modificavam profundamente a codificação. Esses achados, que surgiram da experimentação, configuram um movimento investigativo que vai além da execução mecânica e evidencia uma demanda cognitiva elevada, conforme caracterizado por Stein e Smith (1998). Ao testarem possibilidades e compararem resultados, os alunos acessaram propriedades estruturais que muitas vezes não aparecem de forma tão explícita em tarefas tradicionais.

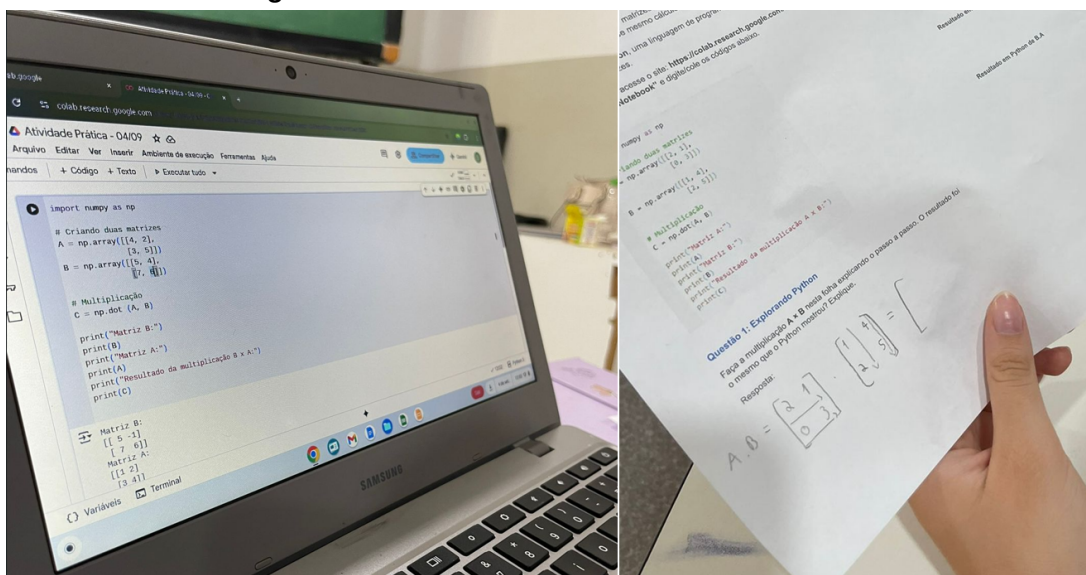
A questão 3 foi o ponto de maior integração entre Matemática e criptografia. Alguns alunos utilizaram a própria folha para escrever o alfabeto e conseguiram realizar a mensagem em números. Nesse primeiro momento da questão, a maioria das duplas relacionou-se à Atividade 2 do caça ao tesouro, retomando a Cifra de César e a criptografia. Além disso, ao organizarem palavras em estruturas quadradas, discutiram o significado de n^2 e relacionaram a codificação à multiplicação por uma matriz-chave, os estudantes ampliaram a compreensão do funcionamento da criptografia por matrizes. Foi interessante observar que algumas duplas relacionaram o formato quadrado a jogos como *Sudoku*, evidenciando que recorreram a modelos informais para dar sentido às estruturas algébricas. Nesse momento, alguns alunos travaram em relação à informação n^2 , mas logo associaram a matriz e conseguiram continuar a atividade.

A compreensão da necessidade de uma matriz-chave possuir um determinante diferente de zero apareceu fortemente nas respostas dos estudantes, que apontaram argumentações como “para poder decodificar”, “para garantir que a mensagem faça sentido” ou ainda “porque só assim tem inversa”. Esses enunciados mostram que os estudantes não apenas identificaram

a condição algébrica, mas também compreenderam sua função no sistema criptográfico, revelando uma compreensão funcional da álgebra. Trata-se de um avanço expressivo em relação às concepções iniciais da Atividade 1 e mesmo às estratégias operatórias da Atividade 2, pois agora a Matemática aparece como parte constitutiva do problema, e não apenas como uma ferramenta de resolução.

Por fim, a questão 5, voltada à reflexão sobre a experiência com programação, revelou um aspecto metacognitivo importante. Os estudantes reconheceram que a tecnologia acelera processos, reduz erros e aumenta a segurança. No entanto, também mencionaram que o programador precisa saber o que está fazendo, o que sugere uma compreensão implícita de que a Matemática permanece o núcleo estruturante do algoritmo. Essa percepção reforça a ligação entre diferentes linguagens e modos de representação, ampliando a autonomia conceitual dos alunos.

Figura 21 – Alunos realizando a Atividade 3 da SD



Fonte: Elaboração própria (2025).

A partir das falas, das interações registradas no diário de campo e das produções em Python, identificamos um conjunto de categorias emergentes que sintetizam o movimento conceitual desta atividade. O quadro a seguir reúne as principais unidades de significado, suas categorias interpretativas e o metatexto correspondente.

Essa atividade representou um momento muito importante de ampliação conceitual na nossa SD. Se, na Atividade 1, observamos o surgimento de modelos intuitivos e, na Atividade 2, a mobilização de estratégias em um contexto gamificado, nessa atividade, testemunhamos a consolidação desses modelos por meio da programação, que operou como uma ponte entre o raciocínio manual e o raciocínio algorítmico. Esse processo permitiu que os estudantes compreendessem a Matemática tanto em sua dimensão operacional quanto em sua dimensão estrutural, favorecendo a articulação entre a linguagem natural, a linguagem algébrica e a linguagem computacional.

Quadro 11 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 3

Unidades de Significado (exemplos)	Categoria Emergente	Metatexto Interpretativo
Expressões que destacam rapidez, precisão e redução de erros	Tecnologia como ferramenta de validação	O uso do Python é reconhecido como meio de conferir cálculos e aumentar a confiabilidade dos resultados, funcionando como extensão cognitiva dos estudantes.
Afirmações de que a troca da matriz-chave altera toda a codificação	Compreensão funcional da matriz-chave	Os estudantes identificam que a estrutura algébrica da matriz influencia diretamente a criptografia, reconhecendo relações importantes para a matemática vertical.
Associações espontâneas com formatos conhecidos, como Sudoku, ou com a necessidade de compatibilidade entre matrizes	Modelos informais como apoio interpretativo	Os estudantes utilizam referenciais visuais e culturais para compreender dimensões, organização e condições de multiplicação, evidenciando a construção de significados.
Justificativas que relacionam determinante não nulo à possibilidade de decodificar mensagens	Entendimento da inversibilidade	A propriedade algébrica passa a ter um sentido funcional, compreendida como condição indispensável para a operação criptográfica.
Dificuldade inicial em interpretar o significado de n^2 e reorganização das estratégias durante a tarefa	Tensão produtiva e reorganização conceitual	As dúvidas e os impasses iniciais impulsionam revisões de pensamento, favorecendo a construção progressiva de conceitos por meio da exploração computacional.

Fonte: Elaboração própria (2025).

7.3.4 Análise da Atividade 4

A Atividade 4 marcou o encerramento da sequência didática e constituiu um momento de muita aprendizagem, pois uniu a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por resolução de problemas, conforme proposta por Allevato e Onuchic (2021), à consolidação dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares trabalhados nas atividades anteriores. Ao propor uma situação contextualizada envolvendo a análise da produção e das vendas de uma fábrica, os estudantes foram convidados a mobilizar diferentes formas de representação Matemática, escolher estratégias, confrontar procedimentos e justificar resultados, promovendo um movimento claro de matematização, tanto horizontal quanto vertical.

Para preservar o caráter ético da pesquisa e garantir o anonimato dos participantes, nesta atividade, adotamos um sistema de identificação baseado em letras. Cada estudante recebeu, aleatoriamente, uma letra do alfabeto no início da aula, o que permitiu formar duplas e um trio, sem qualquer associação direta à identidade real dos alunos. Assim, organizamos as equipes como **BA**, **GM**, **IJ**, **KH**, **LF** e o trio **CDE**. Essa estratégia permitiu a confidencialidade e a integridade dos participantes. Além disso, essa forma de nomeação contribuiu para tornar

a análise mais clara e objetiva, permitindo identificar padrões e contrastes entre as estratégias mobilizadas por cada grupo sem expor os estudantes individualmente.

Iniciamos seguindo rigorosamente as dez etapas metodológicas da Resolução de Problemas. Após a leitura individual, cada dupla assumiu, no item a) da atividade, a tarefa de organizar os dados do enunciado da maneira que julgasse mais adequada. Esse primeiro movimento revelou um aspecto extremamente rico da atividade, pois identificamos uma diversidade de modelos elaborados pelas duplas. Enquanto alguns estudantes estruturaram as informações em tabelas, buscando clareza visual, outros optaram por organizar os dados em matrizes 3×3 , evidenciando já uma leitura algébrica da situação. Houve ainda quem montasse quadros, utilizasse fileiras de descrições textuais ou recorresse diretamente à linguagem dos sistemas lineares. Essa pluralidade de representações mostra que os estudantes, ao longo da sequência didática, internalizaram não apenas conteúdos, mas também modos de “fazer Matemática”, escolhendo representações adequadas aos seus próprios modos de compreender a situação.

Figura 22 – Representações do item a do problema gerador



Fonte: Elaboração própria (2025).

A escrita dos estudantes reforça essa interpretação. As produções revelam que a escolha dos modelos de representação não foi aleatória, mas fundamentada em critérios próprios de organização e significado. A dupla **BA**, por exemplo, registrou que “organizamos em tabela, pois é mais fácil visualizar as informações”, enquanto a dupla **GM** afirmou que “organizamos em matriz porque vemos a quantidade de cada produto nos dias”. Já o trio **CDE** destacou que “preferimos imagens, facilita a compreensão”, evidenciando uma busca intencional por recursos gráficos que lhes permitissem estruturar e interpretar melhor o problema. Esses registros

Figura 23 – Resolução ítem b da dupla IJ

b. Qual o preço unitário de cada produto?

$$\begin{cases} 5b + 2i + m = 30 \\ 3b + 4i + 2m = 46 \\ 4b + i + 3m = 43 \end{cases}$$

$5b + 2i + m = 30 \cdot 3 \rightarrow 15b + 6i + 3m = 90$
 $3b + 4i + 2m = 46 \cdot 5 \rightarrow 15b + 20i + 10m = 230$
 $\rightarrow -14i - 7m = -140$
 $14i + 7m = 140$

$5b + 2i + m = 30 \cdot 4 \rightarrow 20b + 8i + 4m = 120$
 $4b + i + 3m = 43 \cdot 5 \rightarrow 20b + 5i + 15m = 215$
 $\rightarrow -3i + 11m = 95$

$5b + 2i + m = 30$
 $14i + 7m = 140$
 $175m = 1750$
 $\frac{1750}{175} = m \rightarrow 10$

$5b + 2 \cdot 5 + 10 = 30 \rightarrow 5b + 10 = 20 \rightarrow 5b = 10 \rightarrow b = 2$
 $5b = 30 - 10 - 10 \rightarrow 10 \rightarrow b = 2$

$14i + 7 \cdot 10 = 140$
 $14i + 70 = 140$
 $14i = 140 - 70$
 $i = \frac{70}{14} \rightarrow 5$

$m = 10$
 $i = 5$
 $b = 2$

Fonte: Elaboração própria (2025).

mostram que os estudantes não apenas dominaram diferentes formas de representação, mas também as selecionaram com intencionalidade, o que demonstra o amadurecimento progressivo da postura investigativa construída ao longo da sequência didática. Antes de iniciar qualquer cálculo, eles precisaram interpretar, selecionar, estruturar e justificar seus procedimentos, um movimento que caracteriza, de forma exemplar, a matematização horizontal em direção à vertical.

No item b) do problema gerador, que solicitava a determinação do preço unitário de cada produto, surgiu um conjunto ainda mais expressivo de estratégias. A diversidade de caminhos percorridos demonstra como cada dupla mobilizou conhecimentos prévios, mesclou métodos formais e acionou intuições Matemáticas para resolver a tarefa.

A dupla **FL** registrou: “mix = 10, iogurte = 5 e barra = 2, fizemos por lógica”, evidenciando um raciocínio combinatório coerente, ainda que não baseado em métodos algébricos tradicionais. A dupla **KH**, por sua vez, relatou: “comecei o escalonamento, mas não consegui terminar”, revelando domínio parcial do método, porém, dificuldade na execução completa. Já a dupla **BA** destacou: “não sei o método que me levaria ao preço unitário”, o que evidencia fragilidades conceituais que se tornaram visíveis justamente pela natureza aberta da tarefa. Em contraste, as duplas **GM**, **IJ** e o trio **CDE** optaram por métodos mais estruturados, como substituição ou escalonamento, demonstrando maior familiaridade com a resolução de sistemas. A figura 23 evidencia a resolução por escalonamento feita pela dupla **IJ**, mostrando como eles estruturaram a álgebra para a solução do problema.

Essa coexistência de abordagens indica que os estudantes operaram em diferentes níveis de formalização. Parte da turma já transitava com segurança por técnicas algébricas consolidadas, enquanto outros se apoiavam em raciocínios intuitivos, porém alinhados ao sentido da

tarefa. Essa heterogeneidade é valiosa do ponto de vista didático, pois evidencia tanto avanços quanto necessidades de reinvenção guiada no processo de construção conceitual.

Figura 24 – Resoluções do item c do problema gerador

Dupla IJ

Existe mais de uma resposta, como 5 mix de castanha mais 1 iogurte proteico, ou 11 iogurtes proteicos, ou 25 barras de cereal com 1 iogurte proteico etc.

Dupla KH

$11y = 55$. Ao vender 11 iogurtes, a empresa fatura um receita de 55.

E outro exemplo mais elaborado pode ser: $5x + 3y + 3z = 55$
Somei os valores que encontrei.

Dupla LF

Comparar 5 barras, 5 iogurtes e 2 mix.
valor 55,00

$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{30}$	$20 + 25 + 10 = 55$.
30	25	20	

não, existem diversas formas diferentes para fazer chegar ao resultado

Fonte: Elaboração própria (2025).

O item c), que explorava possíveis combinações que totalizassem **R\$ 55,00**, evidenciou avanços importantes no desenvolvimento do raciocínio algébrico da turma. A dupla **LF**, por exemplo, afirmou que "não existe uma única solução, há infinitas combinações", enquanto a dupla **KH** registrou tentativas de modelagem, como $11y = 55$, e avançou para expressões mais estruturadas, como $5x + 3y + 3z = 55$, demonstrando compreensão das relações entre as variáveis, como mostra a Figura 24. Essas produções mostram que os estudantes começaram a reconhecer a existência de múltiplas soluções em sistemas e a explorar condições de compatibilidade entre quantidades, o que representa um avanço conceitual relevante no campo da álgebra. Mesmo não formalizando ainda, esses alunos do Ensino Médio estavam explorando as combinações lineares, fundamentais para a existência e a resolução de equações diofantinas lineares da forma $ax + by = c$, em que a , b e c são inteiros, e procuravam soluções inteiras para x e y , exatamente a equação à qual muitos chegaram. E esse foi um dos conteúdos da disciplina de Aritmética ofertada pelo PROFMAT.

Já o item d) solicitou o cálculo do lucro, conectando o raciocínio algébrico à interpretação de dados, à proporcionalidade e à tomada de decisão. Neste momento, observamos uma diversidade significativa nas estratégias e nos graus de formalização adotados pelas equipes. A dupla **IJ** conseguiu relacionar corretamente custo e receita e, de maneira bem organizada, chegou ao lucro total da fábrica, evidenciando domínio das operações envolvidas. A equipe **KH** também alcançou a resposta correta e apresentou uma desenvoltura notável ao recorrer

Figura 25 – Resolução do item d da dupla LF

- d. Considerando que o custo de produção de cada item é:
- Barra de cereal: R\$1,50 - 2,0
 - iogurte proteico: R\$3,00 - 5,0
 - Mix de castanhas: R\$6,00 - 50,00
- Com base nos preços que você descobriu, qual foi o lucro total da fábrica em cada um dos três dias?

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira
$1,50 \cdot 5 = 7,50$ $2 \cdot 3 = 6$ $3 \cdot 6 = 6$ <hr/> $2 \cdot 5 = 10$ $3 \cdot 10 = 30$ <hr/> 30 $- 19$ <hr/> $11,50$ de lucro.	$3 \cdot 33 = 3,50$ $4 \cdot 3 = 12$ $2 \cdot 6 = 12$ <hr/> $3 \cdot 2 = 6$ $4 \cdot 5 = 20$ $2 \cdot 10 = 20$ <hr/> 46 $- 27$ <hr/> $19,50$ de lucro.	$4 \cdot 3,5 = 9,5$ $5 \cdot 3 = 3$ $3 \cdot 6 = 18$ <hr/> $4 \cdot 6 = 24$ $5 \cdot 5 = 5$ $3 \cdot 10 = 30$ <hr/> 59 $- 25$ <hr/> $34,50$ lucro

Fonte: Elaboração própria (2025).

a equações diofantinas para justificar o raciocínio, demonstrando uma compreensão profunda das relações numéricas do problema. A dupla **LF** igualmente obteve êxito, utilizando como referência os valores determinados no item (b), o que evidencia coerência interna na construção do resultado e do pensamento algébrico, conforme vemos na Figura 25.

O trio **CDE** iniciou o cálculo, mas, por não ter concluído o item (b), não conseguiu finalizar o problema. Ainda assim, tentaram avançar com base na lógica e na atribuição de valores que julgavam possíveis, o que revela esforço interpretativo, mesmo sem domínio completo das informações necessárias. Já as duplas **BA** e **GM** não conseguiram concluir a tarefa, pois não chegaram a um valor unitário para os produtos. No entanto, suas falas "*se a gente soubesse o preço dos produtos, conseguiríamos fazer*" indicam que compreenderam a relação estrutural entre custo e lucro, mesmo sem que esse vínculo tivesse sido explicitado previamente em aula. Esse conjunto de manifestações reforça que, ainda diante das dificuldades, os estudantes operaram de modo consciente, recorrendo a partes do enunciado e reconhecendo dependências conceituais essenciais para resolver o problema.

Esse cenário mostrou-se necessário para a socialização coletiva, etapa fundamental da metodologia de Resolução de Problemas. Ao levar suas soluções à lousa, cada dupla não apenas apresentava um resultado, mas também reconstruía seu percurso, explicitando decisões, justificativas e seus próprios modos de organizar a informação. Esse momento permitiu-nos observar, com maior nitidez, como utilizavam os conceitos matemáticos para argumentar e validar suas escolhas.

A comparação entre estratégias tornou-se, então, um ponto alto da aula, pois as diferenças nas representações, métodos e interpretações revelaram vantagens, limites e até certa

elegância nas soluções produzidas. Como professora-pesquisadora, foi nesse diálogo que pude perceber com mais clareza como a Álgebra vinha sendo construída ao longo da sequência didática e como, nesta atividade, se consolidava de forma significativa. Já não lidávamos com estudantes repetindo procedimentos, mas com sujeitos que pensavam matematicamente, articulavam ideias e justificavam seus caminhos, demonstrando autonomia e motivação para resolver o problema proposto.

Após a plenária, avançamos para o momento de sistematização, etapa central na metodologia, em que as diferentes estratégias apresentadas pelos grupos são discutidas, comparadas e organizadas coletivamente. Nesse diálogo, escolhemos, junto aos estudantes, o modelo de representação que se mostrou mais eficiente para interpretar e resolver o problema, o que evidenciou, de forma muito clara, o quanto a sequência didática havia ampliado sua capacidade de transitar entre tabelas, matrizes, sistemas lineares e diferentes leituras numéricas da situação. Esse processo de escolha não foi apenas técnico, foi formativo, pois permitiu que os alunos nos mostrassem critérios de clareza, economia de passos e coerência Matemática, demonstrando maturidade na argumentação.

A partir dessa consolidação coletiva, introduzimos formalmente o método de Cramer, associando-o às necessidades que surgiram da resolução de sistemas lineares de ordem três apresentados na tarefa. Embora a maior parte da turma não tivesse contato prévio com esse procedimento, observamos uma rápida incorporação do método às justificativas e aos cálculos realizados, indicando que a introdução ocorreu em um momento de alta pertinência cognitiva, em que os estudantes já tinham sentido a demanda por sistematizar um procedimento novo.

O impacto desse momento tornou-se ainda mais evidente dias depois, quando, durante uma avaliação somativa institucional da escola, diversos alunos recorreram espontaneamente ao método de Cramer para resolver sistemas semelhantes. Esse movimento mostra que a aprendizagem não se restringiu ao contexto da atividade, mas consolidou-se como uma ferramenta integradora ao repertório dos estudantes, sinalizando apropriação genuína e não mera reprodução mecânica de algoritmos.

A etapa final da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação pela Resolução de Problemas (a décima etapa) prevê que, após a formalização coletiva, os estudantes criem seus próprios problemas, evidenciando autonomia, compreensão conceitual e capacidade de transpor o conhecimento para novos contextos. Após a consolidação dos conteúdos da Atividade 4, dedicamos duas aulas exclusivamente a essa produção individual, com o intuito de observar como os alunos reinterpretariam a Álgebra resignificada ao longo da SD. Os problemas elaborados revelaram não apenas domínio técnico, mas também criatividade, leitura Matemática do cotidiano e ampliação expressiva da capacidade de modelagem.

Entre os doze problemas criados, identificamos uma diversidade de temas e estruturas algébricas: uma **fábrica de embalagens** que exigia multiplicação de matrizes; uma **banca de vendas** modelada por sistemas lineares 3×3 ; situações envolvendo **preços de alimentos**, tratadas com sistemas 2×2 ; problemas de **lucro e organização de dados em tabelas**, cuja re-

Figura 26 – Problema elaborado pelo aluno C

Letra:

C

Agora é a sua vez! Crie um novo problema envolvendo os conceitos que você aprendeu sobre matrizes ou sistemas lineares.

① Uma empresa de arquitetura, possui em seu projeto dois modelos de casa, a moderna e a luxuosa. Cada modelo possui uma quantidade específica de três tipos de latas de tinta para fazer a pintura da casa, tinta A, B e C, para que assim, possa ter uma organização na produção, como está logo abaixo:

Tipos de latas de tinta usadas em cada modelo		
	Moderna	Luxuosa
Tinta A	2 latas	1 lata
Tinta B	4 latas	3 latas
Tinta C	1 lata	2 latas

Diante disso, siga abaixo a tabela que descreve a quantidade dos dois modelos de casas que foram construídas ao longo das meses:

Quantidade de modelos de casas construídas em cada mês				
	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Luxuosa	10	10	20	30
Moderna	30	20	30	50

Qual a quantidade de tinta B usada nas dois modelos de casas no mês de novembro, especificamente?

Fonte: Elaboração própria (2025).

solução previa multiplicação matricial; e até modelagens de **órbitas de astros**, com um sistema linear complexo criado por um aluno envolvido na Olimpíada Brasileira de Astronomia.

Outros estudantes apresentaram problemas sobre papelarias, arquitetura, animais de estimação, empresas de maquiagem, agricultura e metas de vendas, utilizando escalonamento, substituição, operações com matrizes e análise de lucro. O problema exposto na Figura 26 foi um dos que se destacaram por se encaixar em uma tarefa de alta demanda cognitiva, mostrando que esse aluno C conseguiu chegar ao nível de fazer Matemática, de acordo com a RME.

Essa variedade evidencia um movimento claro de matematização horizontal e vertical, pois os estudantes não apenas aplicaram conteúdos da SD, mas também os reorganizaram

em novos cenários, atribuindo significado próprio às estruturas algébricas. Observamos problemas de níveis distintos de complexidade, alguns simples e diretos, outros elaborados e tecnicamente sofisticados, mostrando que cada aluno mobilizou sua compreensão de forma autoral. Além disso, muitos recorreram espontaneamente à multiplicação de matrizes, à interpretação de determinantes e ao uso de sistemas lineares, demonstrando que tais conceitos haviam sido efetivamente incorporados ao seu repertório matemático. Essa etapa final reforçou que a SD promoveu não apenas a aprendizagem procedimental, mas também o desenvolvimento de uma postura investigativa, criativa e autônoma diante da Álgebra.

A análise da Atividade 4, realizada à luz da Análise Textual Discursiva, evidenciou um conjunto expressivo de reorganizações conceituais, mobilização de estratégias e ampliação da autonomia Matemática dos estudantes. Como essa atividade foi estruturada segundo as dez etapas da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, observamos o surgimento de unidades de significado que não se limitam aos procedimentos algébricos, mas revelam modos de pensar, justificar e interpretar situações reais mediadas por Matrizes e Sistemas Lineares. O processo de unitarização mostrou que cada dupla operou a partir de modelos próprios, construídos ao longo da sequência didática, resultando em representações diversas e motivadas por critérios de funcionalidade e compreensão.

Ao observar as produções escritas, as falas espontâneas e as resoluções apresentadas na lousa, pudemos identificar que os estudantes transitaram por diferentes níveis de demanda cognitiva, conforme proposto por Stein e Smith (1998). Em muitos momentos, os alunos mobilizaram procedimentos com conexões significativas (Nível 3), sobretudo ao interpretar o problema gerador, organizar os dados e justificar as escolhas de representação. Em outros momentos, especialmente ao resolver sistemas por substituição, lógica ou escalonamento, observamos indícios de *fazer Matemática* (Nível 4). Essas diferentes abordagens confirmam que a atividade sustentou tarefas de alta demanda cognitiva e promoveu avanços importantes na matematização horizontal e vertical, conforme previsto pelos princípios da RME. Além disso, o percurso desta atividade permitiu que os alunos associassem conhecimentos algébricos a contextos reais, o que se tornou muito evidente nas justificativas relacionadas aos preços unitários, ao cálculo do lucro e à criação de novos problemas.

Como professora-pesquisadora, pude acompanhar de perto cada uma dessas movimentações conceituais e perceber o quanto a mediação desempenhou um papel central para garantir a validade pedagógica das metodologias ativas adotadas e sua articulação com os princípios da RME. Em diversos momentos, minha intervenção não foi a de apresentar soluções, mas a de provocar perguntas, apoiar reorganizações, incentivar comparações e favorecer a explicitação de raciocínios. Ao atuar como mediadora, asseguramos que os estudantes permanecessem protagonistas do processo, construindo significados próprios, justificando escolhas e identificando relações Matemáticas cada vez mais sofisticadas.

Essa postura intencional sustentou a complexidade cognitiva das tarefas, evitou reduções procedimentais e manteve o foco na compreensão conceitual, permitindo que a Resolução de Problemas se consolidasse como uma possível metodologia para a ressignificação da

Quadro 12 – Categorias emergentes da ATD na Atividade 4

Unidades de Significado (exemplos)	Categoria Emergente	Metatexto Interpretativo
Organizamos em tabela porque facilita a visualização (BA); Usamos matriz para ver as quantidades por dia (IJ); Preferimos imagens, fica mais fácil entender (CDE).	Diversidade de modelos de representação	Os estudantes selecionam representações segundo critérios de funcionalidade e de significado próprio, indicando autonomia na escolha de ferramentas Matemáticas e maturidade na etapa de matematização horizontal.
Fiz por lógica (KH); Começamos o escalonamento, mas não terminamos (LF); Tentamos substituição, mas não lembrávamos tudo (GM).	Pluralidade estratégica e diferentes níveis de formalização	A coexistência de estratégias revela trajetórias distintas de formalização algébrica e diferentes níveis de avanço rumo à matematização vertical.
Não sei qual método leva ao preço unitário (BA); Sem saber o preço, não conseguimos continuar (GM).	Lacunas procedimentais e consciência das próprias dificuldades	As falas evidenciam consciência metacognitiva e reconhecimento de dependências conceituais necessárias à progressão da resolução.
Existem infinitas combinações (KH); $11y = 55$ (LF); $5x + 3y + 3z = 55$ (IJ).	Construção do raciocínio algébrico e múltiplas soluções	Os estudantes incorporam a ideia de compatibilidade algébrica e multiplicidade de soluções, indicando avanço conceitual em sistemas lineares.
Dupla IJ chegando ao lucro total; Dupla KH utilizando equações diofantinas; Dupla LF relacionando itens do enunciado.	Associação entre álgebra e interpretação financeira	A articulação entre custos, receitas e expressões algébricas amplia a compreensão das relações Matemáticas aplicadas a contextos reais.
Se soubéssemos o preço, conseguiríamos fazer (BA, GM).	Reconhecimento de dependências conceituais	Os estudantes demonstram compreender a lógica estrutural do problema, reconhecendo as etapas necessárias para a conclusão.
Problemas criados envolvendo arquitetura, astronomia, papelaria, cinema, vendas e agricultura.	Autonomia criativa e modelagem Matemática	A criação de novos problemas revela a internalização da lógica algébrica e a capacidade de transposição para contextos diversos.
Resoluções levadas à lousa, argumentações coletivas e comparação entre métodos.	Interatividade e validação social do conhecimento	A socialização das estratégias evidencia o desenvolvimento da argumentação Matemática e a consolidação da aprendizagem coletiva.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Álgebra. Assim, as categorias emergentes apresentadas a seguir sintetizam esse processo formativo e destacam as principais aprendizagens construídas pelos alunos ao longo da Atividade 4.

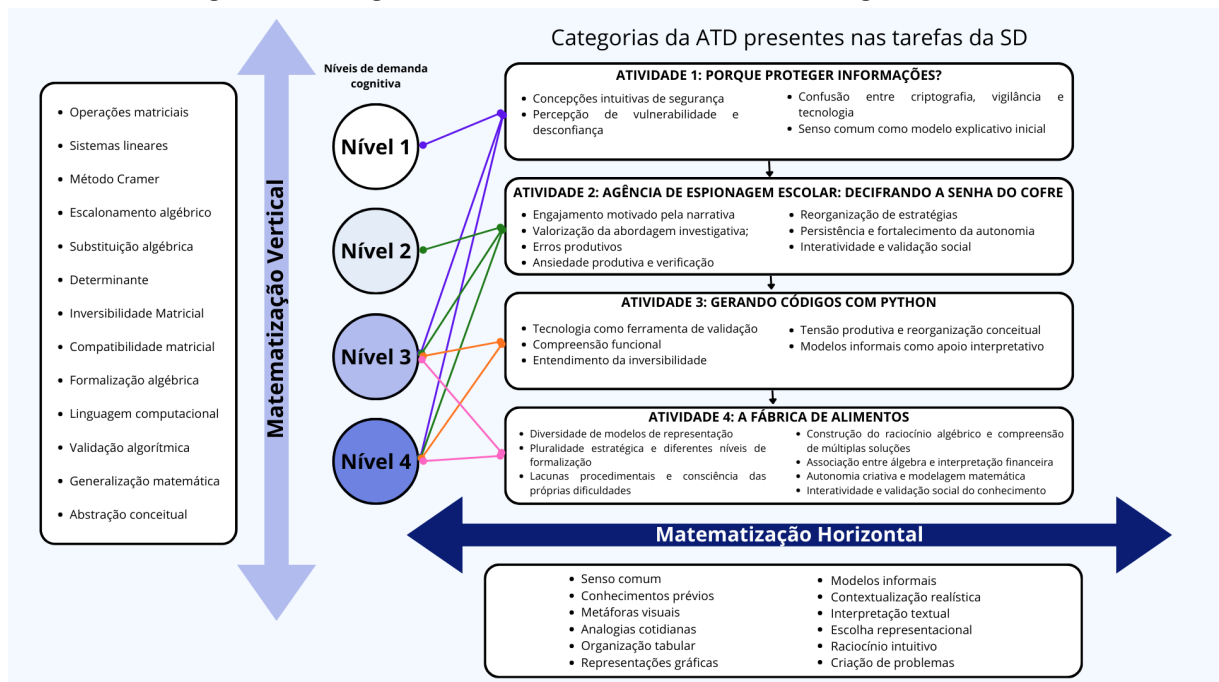
Com o objetivo de sintetizar e relacionar os principais movimentos analíticos identificados ao longo da nossa Análise Textual Discursiva, elaboramos uma representação gráfica que

integra as quatro atividades da sequência didática, os níveis de demanda cognitiva das tarefas e os processos de matematização horizontal e vertical mobilizados pelos estudantes. Essa visualização não tem a função de reduzir a complexidade da análise, mas de torná-la inteligível como um percurso progressivo realizado por etapas, separadas por tarefas de diferentes níveis dentro da SD, nas quais diferentes dimensões da aprendizagem algébrica se interconectam e se fortalecem mutuamente.

A construção desse diagrama apoia-se diretamente nos pressupostos da RME, especialmente na compreensão de que a aprendizagem Matemática ocorre por meio de movimentos contínuos entre contextos significativos, modelos informais e estruturas formais. Ao longo da nossa sequência didática, foi possível observar que os estudantes não avançaram de forma linear, mas sim por meio de idas e vindas entre níveis de demanda cognitiva, retomadas conceituais e reorganizações de estratégias, o que justifica a representação por meio de setas interligadas.

Além disso, o diagrama dialoga com a taxonomia de demandas cognitivas de Stein e Smith (1998), evidenciando que cada atividade da SD mobilizou predominantemente determinados níveis de demanda, sem, contudo, restringir os estudantes a um único patamar. Ao contrário, as tarefas foram planejadas e vivenciadas de modo a sustentar a complexidade cognitiva, favorecendo transições entre procedimentos com conexão e momentos de *fazer Matemática*, especialmente nas Atividades 3 e 4.

Figura 27 – Diagrama relacionando ATD, demandas cognitivas e RME



Fonte: Elaboração própria (2025).

Como já dissemos em nossa categorização de tarefas no Capítulo 6, cada tarefa pode ser adaptada às demandas cognitivas de acordo com a manipulação e a ação docente durante a aplicação e desenvolvimento dessas tarefas; entretanto, nosso diagrama mostra exatamente

como foi a relação em nossa experiência de ensino e aprendizagem. Assim, a figura a seguir sintetiza o Capítulo 7, relacionando os resultados empíricos da ATD, os referenciais teóricos da RME e a progressão das aprendizagens algébricas observadas ao longo da sequência didática. A leitura integrada da Figura 27 permite compreender a sequência didática como um percurso de aprendizagem, no qual as atividades não se encerram em si mesmas, mas se alimentam conceitualmente entre si.

Dessa forma, o diagrama sintetiza não apenas a progressão conceitual observada, mas também o papel central da mediação docente ao longo de todo o processo. Como professora-pesquisadora, atuei de forma intencional para sustentar a complexidade das tarefas, evitar reduções procedimentais e favorecer a reinvenção guiada, assegurando coerência entre as metodologias ativas adotadas e os princípios da RME. Essa relação foi fundamental para garantir a validade pedagógica da intervenção e promover uma ressignificação efetiva do ensino de Álgebra no Ensino Médio.

7.4 Análise quantitativa dos dados

Nesta seção apresentamos a análise quantitativa descritiva dos dados obtidos a partir dos Questionários 2 (diagnóstico) e 3 (pós-intervenção), considerando exclusivamente as questões que se repetiram em ambos os instrumentos. O objetivo dessa análise não é estabelecer generalizações estatísticas, mas observar variações no desempenho dos estudantes antes e após o desenvolvimento da sequência didática, de modo a complementar e dialogar com as análises qualitativas apresentadas nos eixos anteriores.

A comparação entre os dois questionários permite identificar como os estudantes responderam a questões relacionadas a conteúdos centrais da sequência, tais como determinante de matrizes, identificação de elementos, leitura e interpretação de matrizes, condições de existência de operações matriciais e aplicação de matrizes em situações-problema contextualizadas. As Tabelas 11 e 12 apresentam o número absoluto de acertos por questão no Questionário Diagnóstico (Q2) e no Questionário Pós-intervenção (Q3), respectivamente.

Os dados do Questionário Diagnóstico indicam um desempenho inicial marcado por grande heterogeneidade. Observamos um maior número de acertos em questões que exigiam reconhecimento direto ou procedimentos mais familiares, como a leitura de matrizes e a determinação de variáveis em expressões algébricas. Em contrapartida, questões que demandavam maior ligação conceitual, como o cálculo de determinantes, a identificação precisa de elementos e a aplicação de matrizes em contextos mais complexos, apresentaram baixo número de acertos, confirmando as fragilidades conceituais já discutidas qualitativamente no Eixo 2.

Ao observar os dados do Questionário Pós-intervenção, notamos um aumento no número de acertos em todas as questões. Esse crescimento é especialmente evidente em itens que, no diagnóstico, haviam apresentado desempenho mais baixo, como determinante de matrizes, identificação de elementos e questões contextualizadas. Esse resultado sugere que os

Quadro 11 – Frequência de acertos por questão no Questionário Diagnóstico (Q2)

Questão	Nº de acertos
Determinante de matriz	3
Elemento de uma matriz $A(i,j)$	2
Análise de afirmativas (V/F) a partir de matriz de temperaturas	3
Condições de existência de operações matriciais	2
Leitura e interpretação de matriz	7
Soma de elementos de uma matriz com lei de formação	4
Determinação de variáveis em contexto algébrico	9
Aplicação de matrizes em situação-problema contextualizada	3

Fonte: Elaboração própria (2025).

Quadro 12 – Frequência de acertos por questão no Questionário Pós-intervenção (Q3)

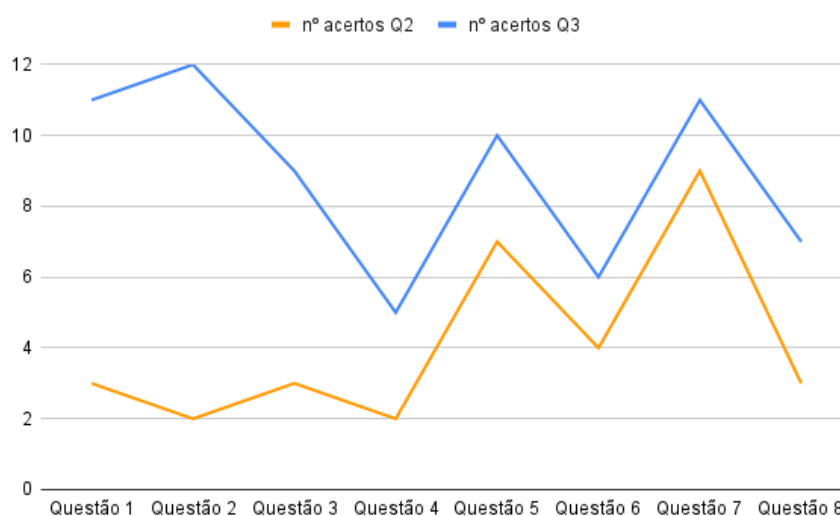
Questão	Nº de acertos
Determinante de matriz	11
Elemento de uma matriz $A(i,j)$	12
Análise de afirmativas (V/F) a partir de matriz de temperaturas	9
Condições de existência de operações matriciais	5
Leitura e interpretação de matriz	10
Soma de elementos de uma matriz com lei de formação	6
Determinação de variáveis em contexto algébrico	11
Aplicação de matrizes em situação-problema contextualizada	7

Fonte: Elaboração própria (2025).

estudantes passaram a operar com maior segurança conceitual e a estabelecer relações mais consistentes entre procedimentos e significados matemáticos ao longo da sequência didática.

Com o intuito de visualizar, de forma integrada, a variação no desempenho dos estudantes entre o momento diagnóstico e o pós-intervenção, apresentamos, no Gráfico 1, um gráfico de linhas que compara o número de acertos por questão nos Questionários Q2 e Q3. Esse tipo de representação permite observar, de forma mais imediata, o comportamento dos dados ao longo das diferentes questões analisadas, evidenciando tendências gerais de crescimento, estabilidade ou variação no desempenho, sem recorrer a inferências estatísticas.

Para sintetizar essa comparação, foram calculadas medidas descritivas simples considerando o conjunto de acertos por questão em cada momento avaliativo. No Questionário Diagnóstico (Q2), a média de acertos foi de 4,125, com mediana de 3, indicando que metade das questões apresentou três ou menos acertos. No Questionário Pós-intervenção (Q3), a média

Gráfico 1 – Frequência de acertos: Q2 x Q3

Fonte: Elaboração própria (2025).

elevou-se para 8,875 e a mediana para 9,5, indicando um deslocamento expressivo do desempenho para patamares de acerto e de domínio conceitual algébrico.

Quadro 13 – Comparação descritiva entre os resultados do Questionário Diagnóstico (Q2) e o Questionário Pós-intervenção (Q3)

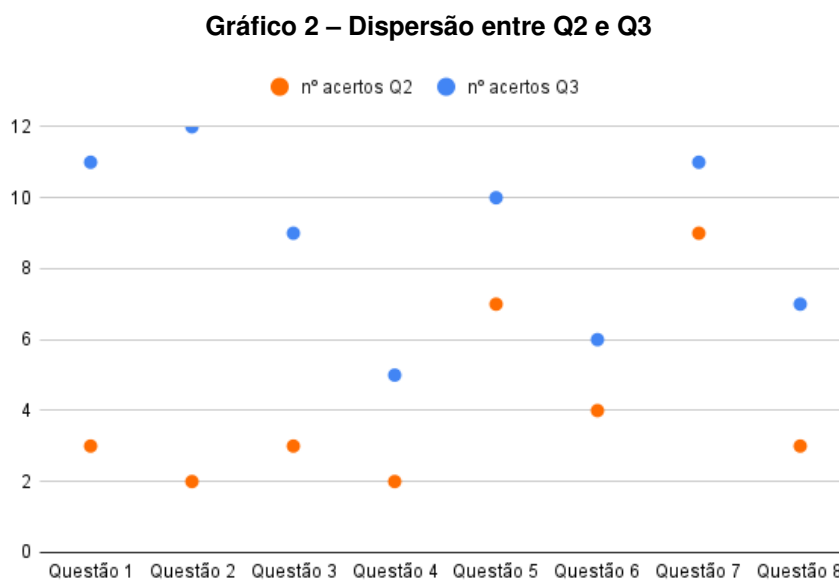
Métrica Estatística	Q2	Q3
Média de acertos	4,13	8,88
Mediana	3	9,5
Amplitude	7	7
Desvio padrão	2,15	1,67
Coefficiente de variação (%)	51,99	18,78
Número total de acertos	33	71

Fonte: Elaboração própria (2025).

Em relação à dispersão, a amplitude manteve-se constante nos dois questionários, com valor igual a 7. No entanto, essa constância não indica estagnação, mas sim um reposicionamento do conjunto de dados, uma vez que, no diagnóstico, os acertos se concentravam em valores mais baixos, enquanto, no pós-intervenção, passaram a se distribuir em faixas mais elevadas, indicando um avanço global na apropriação dos conteúdos trabalhados.

Outro aspecto particularmente relevante dessa comparação descritiva refere-se ao comportamento do coeficiente de variação. No Questionário Diagnóstico (Q2), o valor de 51,99% indica elevada dispersão relativa dos acertos, revelando um grupo heterogêneo, com desempenhos bastante desiguais entre os estudantes. Já no Questionário Pós-intervenção (Q3), o coeficiente de variação reduz-se para 18,78%, evidenciando uma diminuição significativa da variabilidade relativa dos resultados.

Essa redução sugere que, além do aumento no número médio de acertos, houve uma maior homogeneização do desempenho do grupo, indicando que a aprendizagem promovida pela sequência didática não se concentrou em poucos estudantes, mas se distribuiu de forma mais equilibrada entre os participantes. O Gráfico 2 apresenta o gráfico de dispersão que relaciona, para cada questão analisada, o número de acertos no Questionário Diagnóstico (Q2) e no Questionário Pós-intervenção (Q3).



Fonte: Elaboração própria (2025).

Sob a perspectiva pedagógica, esse comportamento aponta para um processo de aprendizagem mais inclusivo, no qual diferentes perfis de estudantes avançaram em direção a níveis semelhantes de domínio conceitual. Esses resultados quantitativos corroboram as análises qualitativas desenvolvidas ao longo do capítulo, especialmente quanto à consolidação de conceitos algébricos e à ampliação da capacidade dos estudantes de interpretar, justificar e aplicar operações com matrizes em diferentes contextos. Assim, os dados numéricos servem de apoio à interpretação qualitativa, reforçando os indícios de que a sequência didática contribuiu para uma reorganização conceitual mais consistente no ensino e na aprendizagem da álgebra.

Com o objetivo de tornar essa conexão mais explícita, apresentamos a seguir um quadro-síntese que ilustra a relação entre a ATD, a RME, as metodologias ativas e as evidências quantitativas analisadas. Esse quadro-síntese reforça que a análise quantitativa não se configura como um eixo independente, mas como um elemento de sustentação e validação das interpretações construídas pela ATD ao longo do processo investigativo.

7.4.1 Limites e escolhas metodológicas da análise quantitativa

Nesta pesquisa, a análise quantitativa dos dados foi conduzida a partir de uma abordagem descritiva, assumida de forma intencional e coerente com os objetivos investigativos do estudo. Optamos por não realizar procedimentos de estatística inferencial, uma vez que o foco

Quadro 13 – Relação entre ATD, RME, metodologias ativas e evidências quantitativas

Eixos da ATD	Categorias / Metatextos Interpretativos	Princípios da RME	Evidências Quantitativas (Q2 → Q3)	Interpretação Integrada
Conhecimentos prévios e fragilidades conceituais	Procedimentos mecânicos, insegurança conceitual, dificuldade de justificar	Matematização horizontal; uso de modelos informais	Baixo número de acertos em determinante, identificação de elementos e aplicações contextualizadas no Q2	Os dados quantitativos confirmam o ponto de partida identificado pela ATD: conhecimentos fragmentados e pouco conceituais.
Engajamento e reconstrução de estratégias	Erros produtivos, reorganização de procedimentos, persistência	Atividade; interatividade; reinvenção guiada	Aumento consistente de acertos nas questões inicialmente mais frágeis	O crescimento dos acertos dialoga com o surgimento de estratégias mais estruturadas, observadas nas tarefas investigativas.
Construção de significados algébricos	Compreensão funcional de determinante, matriz-chave e inversibilidade	Matematização vertical; modelos emergentes	Elevação da média e da mediana; redução do coeficiente de variação	A consolidação conceitual identificada qualitativamente reflete-se na maior estabilidade dos resultados no pós-intervenção.
Autonomia e aplicação em novos contextos	Justificativas escritas, criação de problemas, argumentação Matemática	Orientação; realidade como fonte de sentido	Crescimento nos acertos em questões contextualizadas	Os dados quantitativos reforçam que os estudantes passaram a aplicar a álgebra de forma mais consciente e contextualizada.
Síntese formativa da SD	Ressignificação da Álgebra e do papel do estudante	Integração RME + metodologias ativas	Deslocamento global do desempenho para faixas mais altas	A análise quantitativa funciona como evidência complementar da reorganização conceitual descrita pela ATD.

Fonte: Elaboração própria (2025).

da investigação não esteve na generalização de resultados para uma população mais ampla, mas na compreensão dos processos de aprendizagem mobilizados pelos estudantes ao longo do desenvolvimento da sequência didática.

Os dados quantitativos tiveram, portanto, a função de complementar e sustentar as análises qualitativas realizadas por meio da ATD, oferecendo indicadores numéricos que possibilitam observar variações no desempenho, padrões de resposta e movimentos de reorganização conceitual antes e após a intervenção pedagógica. Nesse sentido, os resultados estatísticos não são tratados como evidências isoladas, mas como elementos que dialogam com as categorias emergentes, os metatextos interpretativos e as evidências qualitativas construídas ao longo do capítulo.

Essa escolha metodológica alinha-se a pesquisas em Educação Matemática que privilegiam a análise de processos, significados e trajetórias de aprendizagem, especialmente em contextos educacionais específicos e com grupos delimitados de participantes. Assim, a ausên-

cia de inferência estatística não configura uma limitação do estudo, mas uma decisão coerente com a natureza qualitativa da pesquisa e com o objetivo de compreender, de forma aprofundada, como os estudantes ressignificam conceitos algébricos a partir de propostas didáticas fundamentadas na Educação Matemática Realística e em metodologias ativas.

Concluimos que os resultados apresentados neste capítulo indicam que a sequência didática possibilitou aos estudantes transitar de modelos intuitivos e fragmentados para estruturas algébricas mais formais, confirmando o potencial das metodologias ativas e da Educação Matemática Realística como caminhos viáveis para o desenvolvimento e aprimoramento tanto do pensamento algébrico quanto do ensino da Álgebra.

8 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Ao longo desta pesquisa, buscamos compreender como diferentes metodologias ativas, em especial a Resolução de Problemas (MEAAMaRP), a Sala de Aula Invertida, a gamificação e o uso de Python, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Médio. Os resultados apresentados demonstraram avanços importantes no engajamento dos estudantes, na compreensão de conceitos algébricos e na mobilização de diferentes estratégias de resolução, indicando que a abordagem adotada dialoga de forma consistente com os princípios da Educação Matemática Realística.

Os registros produzidos durante a Sequência Didática, assim como as percepções expressas nos questionários, revelam que a combinação entre metodologias ativas e o uso de tecnologias, como a linguagem Python, contribuiu para um ambiente mais dinâmico, capaz de apoiar tanto a formalização Matemática quanto a exploração intuitiva de ideias. Esses achados reforçam o potencial pedagógico da proposta e sua pertinência diante das demandas contemporâneas impostas à Educação Básica.

Entretanto, reconhecemos que os resultados desta pesquisa apontam para possibilidades de aprofundamento que extrapolam o escopo do nosso trabalho. Uma perspectiva futura relevante consiste em realizar uma análise estatística inferencial comparativa entre o Questionário 2 (diagnóstico) e o Questionário 3 (pós-intervenção), com o objetivo de investigar, com maior precisão, as trajetórias individuais de aprendizagem dos estudantes. A aplicação de testes estatísticos adequados permitiria verificar a significância das diferenças observadas por meio de medidas como o valor-p dos testes de hipótese e de proporção, bem como estimar o tamanho do efeito das intervenções pedagógicas propostas. Tal abordagem possibilitaria identificar, com maior rigor, quais obstáculos conceituais foram superados, quais permaneceram e em que medida as metodologias ativas e os princípios da Educação Matemática Realística impactaram o desenvolvimento das habilidades algébricas ao longo da sequência didática.

Esse tipo de análise poderia contribuir para a consolidação de indicadores mais robustos de aprendizagem, para a validação quantitativa dos resultados obtidos e para o refinamento de futuras intervenções pedagógicas, ampliando o diálogo entre abordagens qualitativas interpretativas e métodos estatísticos inferenciais no campo da Educação Matemática. Ressalta-se, contudo, que tal aprofundamento demandaria um desenho metodológico específico, com amostra ampliada e controle mais rigoroso das variáveis, o que reforça seu caráter de continuidade investigativa.

Além disso, pesquisas futuras podem ampliar o escopo das atividades envolvendo Python, especialmente por meio da criação de rotinas computacionais que facilitem a visualização de propriedades algébricas, como transformações matriciais, operações elementares e interpretação geométrica de sistemas lineares. Outra possibilidade consiste em aprofundar o estudo das relações entre gamificação e álgebra, produzindo instrumentos avaliativos gamificados ou trilhas de aprendizagem voltadas à exploração de estruturas algébricas mais complexas. Estes desdobramentos podem contribuir de maneira significativa para o campo da Educação

Matemática, especialmente no que se refere à formação de estudantes críticos, criativos e capazes de transitar entre diferentes representações Matemáticas.

Também consideramos relevante desenvolver investigações que explorem a formação continuada de professores, uma vez que a implementação consistente de metodologias ativas requer segurança conceitual, domínio didático e apropriação das bases teóricas que sustentam práticas investigativas. Estudos que articulem a formação docente, o RME e as tecnologias digitais podem fortalecer o repertório pedagógico dos professores e ampliar o alcance das propostas apresentadas e do trabalho.

Em síntese, esta pesquisa reafirma a concepção do ensino da Matemática como um processo dinâmico, investigativo e culturalmente situado. Ao integrar problemas significativos, ambientes colaborativos e o uso crítico de tecnologias digitais, o estudo contribui para a construção de práticas pedagógicas que valorizam a diversidade dos estudantes e a Matemática como instrumento de interpretação e transformação da realidade. Longe de encerrar o debate, os resultados aqui apresentados ampliam o horizonte de possibilidades para novas investigações e práticas docentes comprometidas com uma educação mais crítica e humana.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? *In: ONUCHIC, L. R. et al. (Ed.). Resolução de Problemas: teoria e prática*. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial 2021. p. 37–57.
- ALSAWAIER, R. S. The effect of gamification on motivation and engagement. **International Journal of Information and Learning Technology**, v. 35, n. 1, p. 56–79, 2018.
- AMICO, L. B.; MORAES, L.; PRÁ, M. Gamificação como metodologia ativa para o ensino de matemática. **Revista Thema**, v. 14, n. 2, p. 1–15, 2017.
- ARAÚJO, A. S. d. **Algoritmo e Pensamento Computacional: Python como ponte entre Matemática e Programação no Ensino Médio**. 2025. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do Maranhão São Luís-MA 2025.
- ARAUJO, S. T. **Reflexões sobre o ensino de álgebra nos anos finais do ensino fundamental**. Campinas: Autores Associados, 2008.
- ARAÚJO, D. L. O que é (e como faz) sequência didática? **Entrepalavras**, v. 3, n. 1, p. 322–322, 2013. Disponível em: <http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/view/148>.
- ARTIGUE, M.; BLOMHOJ, M. Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. **ZDM Mathematics Education**, Springer v. 45, p. 797–810, 2013.
- ASHTIANI, A. M.; DEMARCHI, T. Computational thinking with python in mathematics education: Interdisciplinary connections and challenges in the new high school curriculum. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Brasília v. 15, n. 2, p. 1–19, maio 2025. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/4463>.
- BAIG, M. I.; YADEGARIDEHKORDI, E. Flipped classroom in higher education: a systematic literature review and research challenges. **International Journal of Educational Technology in Higher Education**, v. 20, n. 61, 2023.
- BATISTA, C. R.; OLIVEIRA, E. J.; RODRIGUES, F. S. Sequência didática – ponderações teórico-metodológicas. *In: ANAIS DO XVIII ENDIPE*. 2016, Cuiabá. **Anais [...]** Cuiabá: UFMT, 2016. Disponível em: http://www.ufmt.br/endipec2016/downloads/233_9937_37285.pdf.
- BELLAVER, E. H. **Ferramentas para avaliação em metodologias ativas**. Caçador, SC: EdUNIARP, 2019. 40 p. ISBN 978-85-54118-32-7.
- BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de Aula Invertida: Uma Metodologia Ativa de Aprendizagem**. Rio de Janeiro: LTC, 2018. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–443, 2005.
- BOALER, J. Ability and mathematics: the mindset revolution that is reshaping education. **Forum**, v. 56, n. 1, p. 143–152, 2014.
- BOLDRINI, J. L. *et al.* **Álgebra Linear**. 3ª. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986. Bibliografia. Direitos autorais anteriores: 1984, 1980, 1978. Desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

BORGES, T. S.; ALENCAR, G. Metodologias ativas na promoção da formação crítica do estudante: o uso das metodologias ativas como recurso didático na formação crítica do estudante do ensino superior. **Cairu em Revista**, Salvador v. 3, n. 4, p. 119–143, 2014.

BORTOLETE, J. C.; BICUDO, M. A. V. O pensar algébrico explicitado na bncc sob análise. **Bolema**, v. 38,, p. e230285, 2024. ISSN 1980-4415.

BORTOLETE, J. C.; GUARANHA, M. F.; OLIVEIRA, V. O pensamento algébrico na base nacional comum curricular: reflexões e alternativas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo v. 24, n. 2,, 2022. Número especial: Filosofia da Educação Matemática. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/56387>.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRACKMANN, C. **Computacional: Educação em Computação**, . 2025. Disponível em: <https://www.computacional.com.br/educacao-basica>.

BRAGA, E. S. O. Resolução de problemas no ensino da matemática: algumas considerações. **Revista Educacional Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, n. 1, p. 1–21, 2020.

BRANDÃO, T. L. A.; BATISTA, V. M. O.; GUARNIZ, R. P. T. Uma perspectiva interdisciplinar entre a matemática e a computação. **Nexus: Revista de Extensão do IFAM**, , n. 14, p. 36–46, 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**, . 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

Brasil. **Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996: Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**, . 1996. Diário Oficial da União, Brasília, 23 dez. 1996. LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/70320/65.pdf>.

Brasil. **PCN + Ensino Médio: orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, DF: MEC/-Semtec, 2002. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: apresentação dos temas transversais, ética**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental (SEF).

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental (SEF).

Brasil. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**, . 2017. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 17 fev. 2017. Seção 1, p. 1. Altera as Leis nºs 9.394/1996, 11.494/2007, a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452/1943, e o Decreto-Lei nº 236/1967; revoga a Lei nº 11.161/2005; institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm.

BURIASCO, R. L. C. d.; SILVA, G. d. S. e. Aspectos da educação matemática realística. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1–15, 2017. Disponível em: <https://saber.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/18559>.

BÁSICA, B. M. da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de E. **Resolução CNE/CEB n.º 2, de 30 de janeiro de 2012: Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**, . 2012. Diário Oficial da União, Brasília, 06 fev. 2012. DCNEM – Atualizadas pela Resolução CNE/CEB nº 3/2018. Disponível em: https://anec.org.br/wp-content/uploads/2020/02/004_2018_DCNEM.pdf.

CABRAL, N. F. **Sequências Didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM-PA, 2017.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa v. 16, n. 2, p. 81–118, 2007.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. L.; BRIZUELA, B. M. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 2, p. 87–115, 2006.

CARVALHO, R.; SANTIAGO, S. Aprendizagem baseada em jogos: possibilidades pedagógicas. *In*: BACICH, L.; MORAN, J. (Ed.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**. Porto Alegre: Penso 2015. p. 78–95.

CASTILHO, E.; SARAIVA, G.; NOGUEIRA, L. Trilhas gamificadas como estratégia de aprendizagem em matemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 18, n. 1, p. 45–66, 2020.

CHO, H. J. *et al.* Active learning through flipped classroom in mechanical engineering: improving students' perception of learning and performance. **International Journal of STEM Education**, v. 8, n. 46,, 2021.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 171–188, 2018.

COELHO JOICE SANTOS E AGUIAR, C. R. M. d. O desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais: possibilidades e desafios. **Revista Brasileira de Educação em Matemática**, v. 23, n. 59, p. 85–102, 2018.

De Lange, J. **Framework for Classroom Assessment in Mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DEMARCHI, T.; ASHTIANI, A. M. Modelagem matemática: uma proposta de sequência didática para o ensino das funções exponenciais no ensino médio. *In*: ANAIS DO X EPMEM. 2024, Cornélio Procópio, PR. **Anais [...]** Cornélio Procópio, PR: SBEM-PR, 2024. ISSN: 2674-7707. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epmemx/anais.php>.

DEMARCHI, T.; ASHTIANI, A. M.; GONÇALVES, R. Ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas: um relato interdisciplinar entre lei dos cossenos e termodinâmica no ensino médio. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, [S. l.] v. 9, n. 1,, 2025. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/49353>.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. *In*: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Ed.). **Gêneros orais e escritos na escola**. 3. ed. Campinas: Mercado de Letras 2011. p. 81–108.

DOORMAN, M. **Modelling Motion: From Trace Graph to Differential Equation**. 2005. Tese (Doutorado) — Utrecht University 2005.

DRIJVERS, P. Students encountering obstacles using a cas. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, s.l. v. 5,, p. 189–209, 2000.

DRIJVERS, P. Students encountering obstacles using a cas, ,,,. 2003.

- FERREIRA, C. T. **Metacognição e aprendizagem significativa em matemática**. Campinas: Papirus, 2003.
- FERREIRA, M. C. N. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise dos documentos curriculares nacionais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo v. 8, n. 5, p. 16–34, 2018. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/1247>.
- FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. d. Enunciados de tarefas de matemática baseados na perspectiva da educação matemática realística. **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 452–472, 2015.
- FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. d. Tarefas de matemática à luz da educação matemática realística. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, v. 10, n. 22, p. 8–31, 2021.
- FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. d. Tarefas não-rotineiras de matemática: o que podem revelar? **PARADIGMA**, v. 44, n. 5, p. 287–307, 2023.
- FERRETTI, C. J. A reforma do ensino médio e sua questionável concepção de qualidade da educação. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 93, p. 25–42, maio 2018.
- FIGUEIRA, E. **A matemática na formação do professor: reflexões e práticas**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- FIORENTINI, D.; MIGUEL, M. A. V. B.; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas v. 7, n. 1, p. 79–91, 1993.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. M.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP v. 4, n. 1, p. 78–91, 2016. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384>.
- FREIRE, S. R. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2011. Tese (Tese (Doutorado em Educação Brasileira)) — Universidade Federal do Ceará Fortaleza 2011.
- FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.
- FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, Springer v. 3, n. 3-4, p. 413–435, 1971.
- FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.
- FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.
- FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 1-2, p. 3–8, 1968.
- GARCIA, V. C.; NORONHA, A. M. Plataformização da educação na rede estadual de são paulo: a perspectiva dos estudantes do ensino médio. **Contraponto: Discussões Científicas e Pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, Londrina v. 6, n. 10, p. 89–104, jul. 2025.

- GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul Porto Alegre 2008. Disponível em: <https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto+Completo-0.pdf>.
- GONÇALVES, M.; RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M. Princípios de orientação para investigar a própria prática: um modelo para professores da educação básica. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 26, n. 2, p. 128–159, 2024. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/62664>.
- GORINI, A. d. L. **Pensamento algébrico: dificuldades, possibilidades e estratégias no ensino fundamental**. Campinas: Autores Associados, 2021.
- GRACIANI, K. D. A Álgebra e a compreensão das letras no ensino fundamental: significados e desafios na aprendizagem. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo v. 18, n. 3, p. 45–62, 2020.
- GRAVEMEIJER, K. Rme theory and mathematics teacher education. *In*: TIROSH, D.; WOOD, T. (Ed.). **Tools and Processes in Mathematics Teacher Education**. Rotterdam: Sense 2008. 1.
- GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from a learning design perspective. *In*: AKKER, J. Van den *et al.* (Ed.). **Educational Design Research**. [S.l.]: Routledge 2006. p. 17–51.
- GRAVEMEIJER, K.; DOORMAN, M. Context problems in realistic mathematics education, „„. 1999.
- GRAVEMEIJER, K.; TERWEL, J. Hans freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777–796, 2000.
- GUERIN, C. S. **Percepção dos professores sobre o uso da tecnologia no ensino e aprendizagem da Geração Z**. 2020. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Ensino)) — Universidade Estadual do Oeste do Paraná Foz do Iguaçu 2020.
- HEUVEL-PANHUIZEN, M. Van den. Utrecht University **Mathematics education in the Netherlands: A guided tour**. Utrecht, 2000. Freudenthal Institute CD-ROM for ICME 9.
- HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, 2009. CD-ROM.
- JUNGES, V. d. C. *et al.* Sala de aula invertida e gamificação como ferramentas para a melhoria da aprendizagem matemática. **Redin**, v. 12, n. 2, p. 54–73, 2023.
- JUNGES, V. d. C. *et al.* Sala de aula invertida e gamificação como ferramentas para a melhoria da aprendizagem matemática. **Redin**, v. 12, n. 2, p. 54–73, 2023.
- KAPP, K. M. **The Gamification of Learning and Instruction: Game-based Methods and Strategies for Training and Education**. San Francisco: Wiley, 2012.
- KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139–151, 2004.
- KWON, O. N. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. *In*: PROCEEDINGS OF THE 2ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS (AT THE UNDERGRADUATE LEVEL). 2002, New York. **Anais [...]** New York: John Wiley, 2002.
- LINS, R.; GIMENEZ, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século xxi. *In*: **Educação Matemática: fundamentos e reflexões**. Campinas: Papirus 2001.
- MA, L. **Saber e ensinar: Matemática elementar**. Lisboa: Gradiva, 2009.

MARINO, C. A. **Na minha casa tem matemática: uma proposta didática à luz da educação matemática realística**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina 2017.

MARQUES, H. R. *et al.* Inovação no ensino: uma revisão sistemática das metodologias ativas de ensino-aprendizagem. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)**, v. 26, n. 3, p. 718–741, set. 2021.

MARTINS, A. C. d. J. **Ensino-aprendizagem-avaliação de álgebra no sétimo ano do ensino fundamental através da resolução de problemas: Um caminho didático-pedagógico em uma escola pública estadual do Maranhão**. 2024. 148 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Gestão de Ensino da Educação Básica)) — Universidade Federal do Maranhão São Luís 2024.

MAZUR, E. Farewell, lecture? **Science**, v. 323,, p. 50–51, 2009.

MELLO, C. d. C. B.; ALVES, R. O.; LEMOS, S. M. A. Metodologias de ensino e formação na área da saúde: revisão de literatura. **Revista CEFAC**, v. 16, n. 6, p. 2015–2028, nov. 2014.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de Cálculo**. 2014. 275 p. Tese (Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)) — Universidade Estadual de Londrina Londrina 2014.

MENEZES, N. N. C. **Introdução à programação com Python: algoritmos e lógica de programação para iniciantes**. 3. ed. São Paulo: Novatec, 2019. 328 p.

MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3.º ano de escolaridade do ensino básico. *In*: GUIMARÃES, C.; REIS, P. (Ed.). **Professores e infâncias: estudos e experiências**. São Paulo: Junqueira Marin 2011. p. 201–223.

MESTRE, C. M. M. V. O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino. **Tese (Doutorado) – Universidade de Lisboa**, „, 2014.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A álgebra no ensino fundamental: Por quê? para quê? como? **Revista Zetetiké**, UNICAMP Campinas v. 1, n. 1, p. 31–46, 1992.

MIRANDA, J. G. J.; CARNEIRO, M. C. Filosofia da tecnologia e educação: um estudo sobre os efeitos da plataformização do ensino. *In*: ANAIS DA XXI REUNIÃO TÉCNICA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA. 2024, Bauru, SP. **Anais [...]** Bauru, SP: UNESP, 2024. p. 42.

MORA, J. F. **Diccionario de Filosofía**. Buenos Aires: Sudamericana, 1971.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2011. (Coleção Educação em Ciências).

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, L.; MORAN, J. (Ed.). **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso 2018. p. 2–25.

NACHTIGALL, C.; ABRAHÃO, M. H. M. B. Sala de aula invertida, autoeficácia e motivação: reflexões a partir de uma experiência na formação de professores de matemática. **BOLEMA**, v. 39, n. e240168,, 2025.

NELISSEN, J.; TREFFERS, A. Marco de enseñanza. *In*: HEUVEL-PANHUIZEN, M. Van den (Ed.). **Los niños aprenden matemáticas**. México: Correo del Maestro 2010. p. 389–416.

NETO, J. D.; DEMARCHI, T. Análise do pensamento algébrico em livros didáticos do ensino fundamental. **Arquivos do Mudi**, v. 26, n. 1, p. 92–107, 2022.

NÓVOA, A. Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente. **Cadernos de Pesquisa**, v. 47, n. 166, p. 1106–1133, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/198053144843>.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Ed.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez 2004. p. 213–231.

PASSOS, A. Q.; BURIASCO, R. L. C. d.; SOARES, M. T. C. Ideias de van hiele e educação matemática realística: algumas aproximações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática v. 33, n. 65, p. 1533–1548, Sep 2019. ISSN 0103-636X. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a26>.

PINARGOTE-ZAMBRANO, J. J.; LINO-CALLE, V. A.; VERA-ALMEIDA, B. J. Python in teaching mathematics for remedial students in higher education. **Journal Scientific MQR Investigar**, v. 8, n. 3, p. 3966–3989, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.3.2024.3966-3989>.

PIRONEL, M. **Avaliação para a aprendizagem: metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em Ação**. 2019. Tese (Tese (Doutorado em Educação Matemática)) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas Rio Claro 2019. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/182132>.

PONTE, J. P. O desenvolvimento do pensamento algébrico: perspectivas curriculares e investigação. *In*: BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Coletânea de artigos sobre Educação Matemática**. Brasília: Ministério da Educação 2005. p. 13–33.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. [S.l.]: Ministério da Educação, Portugal. Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), 2009.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 1. ed. São Paulo: Editora Bertrand Brasil, 1995.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research in Mathematics Education**, v. 12, n. 2, p. 1–19, 2010.

RODRIGUES, I. C.; PIRES, C. M. C. Um mapeamento de teses e dissertações que abordam o ensino e a aprendizagem da álgebra no ensino fundamental no brasil. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 2, 2017.

RUSSELL, S. J.; SCHIFTER, D.; BASTABLE, V. Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. *In*: CAI, J.; KNUTH, E. (Ed.). **Early Algebraization**. New York: Springer 2011. p. 43–69.

SANTAELLA, L. A aprendizagem ubíqua substitui a educação formal? **Revista de Computação e Tecnologia**, v. 2, n. 1, p. 17–22, 2010.

SANTIAGO, S. A.; CARVALHO, H. F. Estratégia de ensino: Aprenda em sala de aula. **Revista de Ensino de Bioquímica**, v. 16, n. 1, p. 51–73, 2018.

SANTOS, . Resolução de problemas como estratégia de ensino-aprendizagem de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 25, p. 111–124, 2022.

- SANTOS, A. A. d. **A construção do pensamento algébrico na escola básica: uma abordagem metacognitiva**. 2021. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Rio Claro 2021.
- SANTOS, F. **A análise da produção escrita do aluno como estratégia de ensino: implicações para o ensino e aprendizagem da matemática**. 2014. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)) — Universidade Estadual Paulista Rio Claro 2014.
- SANTOS, J. F. d.; MENEZES, I. F. d. Between facilities and learning: Connecting computational thinking and mathematical skills through python programming. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 15, n. 3, p. 1–19, 2025.
- SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo Vitória, ES 2007. Dissertação de Mestrado.
- SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children’s ideas to classroom practice**. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.
- SEABRA, A. D. *et al.* Metodologias ativas como instrumento de formação acadêmica e científica no ensino em ciências do movimento. **Educação e Pesquisa**, v. 49,, p. e255299, 2023.
- SILVA, A. A. d. R.; DIDIER, M. Â. C.; BONFIM, S. C. Construção de modelos matemáticos com o python: uma motivação para o estudo de cálculo diferencial e lógica matemática. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 1–24, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.16811>.
- SILVA, G. d. S. e. Educação matemática realística: notas históricas e teóricas. **Educação Matemática em Revista**, v. 29, n. 82, p. 1–16, mar. 2024. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/3400>.
- SILVA, G. d. S. e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)) — Universidade Estadual de Londrina Londrina 2015.
- SILVA, G. S. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. Tese (Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)) — Universidade Estadual de Londrina Londrina 2018.
- SILVA, M. B. d.; ALLEVATO, N. S. G. Argumentação e prova no trabalho com parábola através da resolução de problemas. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2024. **Anais [...] [s.n.]**, 2024. p. 1–11. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/384>.
- SORTISSO, A. F. Considerações iniciais de uma professora em formação sobre o ensino de álgebra. **Revista da Graduação**, Rio Grande do Sul v. 4, n. 2, p. 1–11, 2011. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/10090/7120>.
- STEIN, M.; SMITH, M. Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 5, p. 344–350, 1998.
- São Paulo. **Currículo Paulista: etapa ensino médio**. São Paulo: SEDUC, 2020. 300 p. Organização: Secretaria da Educação, Coordenadoria Pedagógica; União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo (UNDIME). Inclui bibliografia. ISBN 978-65-89101-02-4. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>.

TREFFERS, A. Meeting innumeracy at primary school. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22., p. 333–352, 1991.

TREFFERS, A. **Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction — The Wiskobas Project**. Dordrecht: Springer Dordrecht, 1987.

USISKIN, Z. Should algebra be taught to all students? *In*: NCTM. **The Ideas of Algebra, K–12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics 1994. p. 4–19.

VALENTE, J. A. **Blended Learning e as mudanças no ensino**. São Paulo: Mídias Digitais, 2014.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. Reform under attack – forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? no way! *In*: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Ed.). PROCEEDINGS OF THE 33RD ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA. 2010, Fremantle. **Anais [...]** Fremantle: MERGA, 2010.

Van Hiele, P. M. **Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education**. New York: Academic Press, 1986.

VIEIRA, L. F. **A Álgebra como vilão do 7º ano do ensino fundamental: proposta de jogo para desmistificar essa ideia**. 2024. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora Juiz de Fora 2024. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

'Area de concentração: Ensino de Matemática.

VIEIRA, S. A.; OHIRA, M. A. **Sequência didática para o ensino de briófitas**, . 2013. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uenp_cien_artigo_shirlei_aparecida_vieira.pdf. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uenp_cien_artigo_shirlei_aparecida_vieira.pdf.

WERBACH, K.; HUNTER, D. **For the Win: How Game Thinking Can Revolutionize Your Business**. Philadelphia: Wharton Digital Press, 2014.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZAINUDDIN, Z. *et al.* The impact of gamification on learning and motivation: A systematic review. **Computers & Education**, v. 151., p. 103819, 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário Avaliativo – Momento Inicial

Questionário 1 - Avaliação Geral da Oficina

(Favor não se identificar)

— PODE DEIXAR DE RESPONDER QUAISQUER PERGUNTAS —

Projeto de Pesquisa: *Entre Matrizes e Códigos: Uma Sequência Didática Baseada em Demandas Cognitivas para a Ressignificação do Ensino de Álgebra*

Pesquisadores:

Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani – UTFPR (Orientador)

Professora Tatielen Demarchi

Você achou a oficina (do seu grupo ou dos demais) interessante?

Sim, muito interessante Sim, interessante Não achei tão interessante Não achei interessante

Você acha que a oficina contribuiu para melhorar seu entendimento sobre matrizes e criptografia?

Sim, muito Sim, parcialmente Não percebi diferenças

Qual nível de compreensão você acha que atingiu após a oficina, considerando que nunca tinha ouvido falar nesse conteúdo?

Ótimo Bom Regular Insuficiente

Trabalho em Equipe e Metodologia

A divisão de responsabilidades no seu grupo funcionou bem?

Sim, todos participaram igualmente
 Sim, mas poderia melhorar
 Não, houve muita desigualdade
 Não, não funcionou

Você acha que a apresentação e a explicação para a turma foram claras e coerentes?

- Sim, todos entenderam facilmente
- Sim, mas poderia ser mais clara
- Não, muitos não entenderam
- Não sei responder

Você acha que elaborar e aplicar uma oficina para a turma ajudou no seu entendimento do conteúdo?

- Sim, muito
- Sim, parcialmente
- Não percebi mudanças

Se tivesse que aplicar novamente uma oficina desse tipo, o que poderia melhorar no seu planejamento e execução?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Conteúdo Abordado

Qual conceito de matrizes ou criptografia foi mais fácil de entender? Por quê?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Qual conceito de matrizes ou criptografia foi mais difícil de entender? Por quê?

O quanto você se preparou ou estudou para essa avaliação formativa?

Qual foi a parte da oficina (elaboração ou apresentação) que você mais gostou? Por quê?

Se pudesse sugerir mudanças para tornar as próximas oficinas mais atrativas e proveitosas, o que sugeriria?

Notas e Feedback

Que nota você daria para você mesmo e para o seu desempenho nessa avaliação?

Escala de 1 a 5, em que 1 representa o menor nível e 5 o maior nível.

1 2 3 4 5

Que nota você daria para a sua equipe e o trabalho desenvolvido?

1 2 3 4 5

Deixe aqui o seu comentário sobre a sua equipe e qual nota você acha que merece, considerando estudos, dedicação, participação e colaboração:

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

APÊNDICE B – Questionário Diagnóstico – Pré-intervenção

Questionário 2 (Diagnóstico)

(Favor não se identificar)

— PODE DEIXAR DE RESPONDER QUAISQUER PERGUNTAS —

Projeto de Pesquisa: *Entre Matrizes e Códigos: Uma Sequência Didática Baseada em Demandas Cognitivas para a Ressignificação do Ensino de Álgebra*

Pesquisadores:

Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani – UTFPR (Orientador)

Professora Tatielen Demarchi

1. Como você avalia seu interesse pelas aulas de Matemática até o momento?

Muito interessado Interessado Pouco interessado Desinteressado

2. Você saberia explicar o que é a Álgebra e quais conteúdos ela abordou até o momento no Ensino Médio?

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

3. Você acredita que aprende melhor quando a matemática é trabalhada com situações práticas ou do cotidiano?

Sim Não Indiferente

4. Você acredita que a Álgebra pode ser usada em situações reais, como no mundo digital ou na tecnologia?

Sim Não

Se sim, cite um exemplo (se souber):

<hr/> <hr/> <hr/>

5. Você já ouviu falar sobre criptografia?

Sim Já ouvi, mas não sei o que é Não

6. Na sua opinião, o que é criptografia?

<hr/> <hr/> <hr/>

7. Você já trabalhou com matrizes em matemática?

Sim Não Não tenho certeza

8. Você sabe realizar alguma operação com matrizes?

Sim Não

Se sim, quais?

Soma

Multiplicação por escalar

Multiplicação de matrizes

Determinantes

Inversa

9. Você acredita que compreender como as matrizes funcionam pode ajudar a entender o mundo digital (imagens, mensagens, dados etc.)?

Sim Não Não sei

10. Você considera que os conteúdos de Álgebra aprendidos em sala de aula têm relação com sua vida cotidiana?

Sempre Às vezes Quase nada Nunca

Explique:

<hr/> <hr/> <hr/>

11. Como você se sente em relação à resolução de problemas mais abertos e desafiadores em matemática?

Muito confortável Confortável Um pouco inseguro Muito inseguro

Explique:

<hr/> <hr/> <hr/>

12. Você considera interessante aprender matemática por meio de uma metodologia diferente da tradicional?

Sim Não Indiferente

Explique como isso poderia afetar sua aprendizagem:

<hr/> <hr/> <hr/>

13. Você acredita que compreender bem os conteúdos de Álgebra pode ajudar na preparação para o vestibular e a universidade?

Sim Não Não sei

14. Como você avalia sua motivação atual nas aulas de matemática?

- Alta Média Baixa

Explique:

<hr/> <hr/> <hr/>

15. Você já trabalhou em equipe ou em dupla para resolver problemas matemáticos?

- Sim, e gosto muito
 Sim, mas prefiro trabalhar sozinho(a)
 Nunca trabalhei assim

16. Se tivesse que explicar para alguém o que são matrizes, o que você diria?

<hr/> <hr/> <hr/>

17. Qual a sua expectativa em relação às próximas aulas que envolverão matrizes e codificação de mensagens?

- Muito alta Boa Neutra Baixa

18. Você já pensou que a matemática pode ser usada para proteger informações ou criar códigos secretos?

- Sim Não Nunca pensei nisso

19. O que você acha da ideia de usar mensagens secretas (criptografia) como tema para aprender Álgebra?

- Muito interessante Interessante Pouco interessante Ruim

20. Você acha que conseguirá aprender mais sobre matrizes e Álgebra com essa nova proposta?

Sim Não Talvez

21. O que você espera aprender com esse projeto?

<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-bottom: 10px;"/> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-bottom: 10px;"/>

22. Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Qual é o determinante de A ?

1 0 -1 2 4

23. Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 5}$, com $a_{ij} = i + j$, qual é o elemento a_{23} ?

5 6 7 1 -1

24. A temperatura corporal de um paciente foi medida três vezes ao dia (manhã, tarde e noite), durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} representa a temperatura no instante i do dia j .

$$\begin{bmatrix} 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \end{bmatrix}$$

Julgue as afirmativas:

I — No momento a_{21} , a temperatura era 36,1.

II — As temperaturas em a_{33} e a_{21} são iguais.

III — No momento a_{35} , a temperatura era 39,2.

V – V – V

V – F – V

V – F – F

V – V – F

F – V – F

25. Se A é uma matriz 3×4 e B uma matriz $n \times m$, então:

existe $A + B$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$

existe AB se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$

existem AB e BA se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$

existem, iguais, $A + B$ e $B + A$ se, e somente se, $A = B$

existem, iguais, AB e BA se, e somente se, $A = B$

26. Sejam as matrizes A e B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se B^T é a matriz transposta de B , o elemento a_{22} de $(A + B^T)$ é:

2 4 6 8 10

27. Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i = j \\ 2i - 2j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A soma $a_{22} + a_{34}$ é:

- 2 0 2 4 6

28. O valor de x, y, z e t , respectivamente, é:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{bmatrix}$$

- 1, 1, 1 e 1
 1, -1, 2 e 1
 0, 1, 1 e 2
 -1, 1, -1 e 1
 1, -1, 2 e -1

29. Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fabricar três modelos de sapatos:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Escreva a matriz que representa o custo final de cada modelo de sapato e explique como você resolveu:

<hr/> <hr/> <hr/>

30. Em qual área da Matemática você apresenta maior dificuldade?

- Números e Álgebra
- Geometria e Medidas
- Trigonometria
- Probabilidade e Estatística

Explique, com suas próprias palavras, alguns conteúdos dentro dessa área que você não conseguiu assimilar ou que acredita que deveria se aprofundar:

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

APÊNDICE C – Questionário Avaliativo e Reflexivo – Pós-intervenção

Questionário 3 (Pós-intervenção)

(Favor não se identificar)

— PODE DEIXAR DE RESPONDER QUAISQUER PERGUNTAS —

Projeto de Pesquisa: *Entre Matrizes e Códigos: Uma Sequência Didática Baseada em Demandas Cognitivas para a Ressignificação do Ensino de Álgebra*

Pesquisadores:

Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani – UTFPR (Orientador)

Professora Tatielen Demarchi

1. Qual seria sua avaliação final sobre o uso das matrizes e da criptografia como ferramentas para o ensino da Álgebra?

Excelente Bom Razoável Ruim

2. Você acredita que aprendeu mais utilizando este novo modo de ensinar Matemática?

Sim Não Indiferente

3. Você ficou convencido(a) de que a Álgebra tem aplicações importantes no cotidiano e no mundo digital?

Sim Não

Explique o que você aprendeu sobre essas aplicações:

<hr/> <hr/> <hr/>

4. Você acha que compreender operações com matrizes ajudou a entender a ideia de codificação e decodificação de mensagens?

Sim Não

5. Você considera que os conteúdos de Álgebra trabalhados se relacionam com a realidade?

Sempre Às vezes Quase nada Nunca

6. O que achou das atividades envolvendo criptografia com matrizes?

Muito interessantes Interessantes Pouco interessantes Ruins

7. Você se sentiu mais motivado(a) nas aulas de Matemática durante a realização das atividades?

Sim Não

Explique o que mais gostou nesse modelo de aula:

<hr/> <hr/> <hr/>

8. Você considera interessante o uso de metodologias diferentes da tradicional para aprender Álgebra?

Sim Não Indiferente

9. Você acredita que foi mais fácil compreender conceitos algébricos por meio da proposta prática de codificação?

Sim Não Indiferente

10. Você acha que poderia aprender outros conteúdos de Matemática utilizando esse tipo de metodologia?

Sim Não

Justifique sua resposta:

11. Após essa experiência, como está seu interesse em buscar novos conhecimentos matemáticos?

Aumentou Diminuiu Continua o mesmo

12. Como você avalia o grau de complexidade das atividades com matrizes e criptografia?

Muito fácil Fácil Médio Difícil Muito difícil

13. Você ficou satisfeito(a) com os resultados que alcançou com esse projeto?

Sim Não Indiferente

14. O que mais chamou sua atenção durante as aulas e oficinas? (Pode marcar mais de uma alternativa)

Problemas propostos

Aplicação prática da Álgebra

Uso de mensagens secretas (criptografia)

Trabalho em grupo

Outros: _____

15. O que achou de trabalhar em equipe ou em duplas durante as atividades?

Gostei muito Gostei Não gostei Achei péssimo

16. Quais foram as maiores dificuldades que você enfrentou nesse projeto?

17. O que significou, para você, participar deste projeto?

18. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Qual é o determinante de A ?

1 0 -1 2 4

19. Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 5}$, com $a_{ij} = i + j$, qual é o elemento a_{23} ?

5 6 7 1 -1

20. A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia (manhã, tarde e noite), durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j .

$$\begin{bmatrix} 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \end{bmatrix}$$

Julgue as afirmativas a seguir em Verdadeiro (V) ou Falso (F):

I – No momento a_{21} , o paciente estava com temperatura de 36,1.

II – As temperaturas dos momentos a_{33} e a_{21} são iguais.

III – No momento a_{35} , a temperatura era de 39,2.

V – V – V V – F – V V – F – F V – V – F F – V – F

21. Se A é uma matriz 3×4 e B uma matriz $n \times m$, então:

existe $A + B$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$

existe AB se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$

existem AB e BA se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$

existem, iguais, $A + B$ e $B + A$ se, e somente se, $A = B$

existem, iguais, AB e BA se, e somente se, $A = B$

22. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se B^T é a matriz transposta de B , então o elemento a_{22} de $(A + B^T)$ é:

2 4 6 8 10

23. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i = j \\ 2i - 2j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A soma dos elementos $a_{22} + a_{34}$ é:

-2 0 2 4 6

24. O valor de x , y , z e t , respectivamente, é:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{bmatrix}$$

- 1, 1, 1 e 1
 1, -1, 2 e 1
 0, 1, 1 e 2
 -1, 1, -1 e 1
 1, -1, 2 e -1

25. Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fabricar três modelos de sapatos.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Escreva a matriz que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos e explique com suas palavras como resolveu:

26. Você acredita que a atividade com criptografia foi relevante para aprender Álgebra?

- Sim Não

Por quê?

27. Qual foi o maior aprendizado que você teve com este projeto?

28. Se tivesse que explicar para outra pessoa o que aprendeu sobre matrizes e criptografia, como faria?

29. Gostaria de aprender outros conteúdos de Matemática utilizando essa metodologia? Você acredita que ela poderia ser aplicada em outras disciplinas?

Sim Não

Justifique:

30. De maneira geral, como você avalia a experiência com matrizes, criptografia e Álgebra aplicada?

Excelente Boa Razoável Ruim

Deixe seu relato (feedback) final sobre o projeto:

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>
