



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR – ARRAIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LEONOR ALVES DE SANTANA CAMPOS PEREIRA

**RELATO DE EXPERIÊNCIA SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM EM UMA
ESCOLA NO DISTRITO FEDERAL: ELABORAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE
UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O USO DE CONTAS DE ÁGUA E ENERGIA
ELÉTRICA**

ARRAIAS-TO

2026

Leonor Alves de Santana Campos Pereira

**Relato de experiência sobre o ensino de Função Afim em uma escola no Distrito Federal:
Elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática com o uso de contas de água e
energia elétrica**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof^a. Dra. Gisele Detomazi Almeida

ARRAIAS-TO

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- P436r Pereira, Leonor Alves de Santana Campos.
Relato de experiência sobre o ensino de Função Afim em uma escola no Distrito Federal: Elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática com o uso de contas de água e energia elétrica. / Leonor Alves de Santana Campos Pereira. – Arraias, TO, 2026.
129 f.
- Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2026.
Orientadora : Gisele Detomazi Almeida
1. Função Afim. 2. Sequência Didática. 3. Relato de experiência. 4. Contas de água e energia elétrica. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LEONOR ALVES DE SANTANA CAMPOS PEREIRA

Relato de experiência sobre o ensino de Função Afim em uma escola no Distrito Federal:
Elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática com o uso de contas de água e energia elétrica

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof^ª. Dra. Gisele Detomazi Almeida

Data de aprovação: 17 de Abril de 2026.

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente
GISELE DETOMAZI ALMEIDA
Data: 07/05/2026 08:04:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida
Universidade Federal do Tocantins

UFT



Documento assinado digitalmente
RENATA MENDONÇA RODRIGUES VASCONCELO
Data: 07/05/2026 22:05:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Renata Mendonça Rodrigues
Vasconcelos
Universidade Federal de Goiás

UFG



Documento assinado digitalmente
JEFFERSON LUIS ARRUDA OLIVEIRA
Data: 07/05/2026 15:29:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jefferson Luís Arruda Oliveira
Universidade Federal do Tocantins

UFT

*Dedico este trabalho a meu esposo e a meus filhos,
que sempre me apoiaram nessa jornada.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder saúde, força e sabedoria ao longo de toda essa caminhada, sustentando-me nos momentos de cansaço e incertezas, permitindo que este trabalho fosse concluído.

Ao meu esposo e aos meus filhos, pelo amor, pela paciência e pelo apoio incondicional. A compreensão diante das ausências, o incentivo constante e o companheirismo diário foram fundamentais para que eu pudesse enfrentar os desafios desta etapa e seguir adiante com perseverança.

À minha prima Juliana Barros, por me apresentar ao programa de mestrado e por acreditar, desde o início, na importância dessa trajetória. Seu apoio e incentivo foram decisivos para que este projeto se tornasse realidade.

Ao meu irmão, Paulo José Alves de Santana, pelo apoio constante e pelas palavras de incentivo ao longo de todo o percurso, que contribuíram para fortalecer minha confiança e determinação.

À Dra Gisele, por aceitar ser minha orientadora, mesmo sem ter sido minha professora, por sua dedicação, paciência, pelas orientações precisas e pelo acompanhamento atento durante o desenvolvimento desta pesquisa. Sua postura ética, seu rigor acadêmico e sua disponibilidade foram essenciais para a construção deste trabalho.

Aos avaliadores desta pesquisa, Dra. Renata Mendonça Rodrigues Vasconcelos, Dr. Jefferson Luis Arruda Oliveira, por aceitarem compor a banca examinadora desta pesquisa.

Aos professores do programa de mestrado, pelas contribuições teóricas, pelas reflexões compartilhadas e pela formação acadêmica proporcionada, que ampliaram significativamente minha compreensão sobre a Educação Matemática e a prática docente.

Aos meus colegas de curso, que sempre estiveram ao meu lado, incentivando-me e apoiando minhas ideias ao longo desta trajetória.

À minha amiga Janaica, que sempre me acolheu em sua casa quando eu não tinha onde ficar, demonstrando generosidade e amizade.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo meu sincero agradecimento.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar as contribuições do uso de elementos do cotidiano para o ensino de funções polinomiais do primeiro grau no Ensino Médio, a partir da aplicação de uma sequência didática fundamentada na análise de contas de consumo de água e energia elétrica. A investigação caracteriza-se como qualitativa, de natureza aplicada, desenvolvida por meio de uma intervenção pedagógica realizada em turmas da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública do Distrito Federal. O estudo assume também características de relato de experiência, uma vez que analisa uma prática docente em contexto real de sala de aula. A sequência didática foi estruturada de modo a favorecer a interpretação de dados, a identificação de relações entre grandezas, a construção de modelos matemáticos e a formalização do conceito de função afim. Os resultados evidenciam que a utilização de situações do cotidiano, como as contas de consumo, contribui para uma aprendizagem mais significativa, ao possibilitar que os estudantes estabeleçam conexões entre conceitos matemáticos e situações concretas. Observou-se avanços na interpretação de tabelas, na compreensão da variação entre grandezas e na construção de expressões algébricas. Conclui-se que a organização do ensino por meio de uma sequência didática contextualizada constitui uma estratégia pedagógica relevante para o ensino de funções no Ensino Médio, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional.

Palavras-chave: Função afim. Sequência didática. Contextualização. Situações do cotidiano. Ensino de Matemática.

Resumo

This study aims to analyze the contributions of using everyday life elements to the teaching of first-degree polynomial functions in high school, based on the implementation of a didactic sequence structured around the analysis of water and electricity consumption bills. The research is characterized as qualitative and applied, developed through a pedagogical intervention carried out with first-year high school students in a public school in the Federal District, Brazil. It also assumes the characteristics of an experience report, as it analyzes a teaching practice in a real classroom context. The didactic sequence was designed to promote data interpretation, identification of relationships between variables, construction of mathematical models, and formalization of the concept of linear function. The results indicate that the use of everyday contexts, such as utility bills, contributes to more meaningful learning, enabling students to establish connections between mathematical concepts and real-life situations. Improvements were observed in the interpretation of tables, understanding of variation between quantities, and construction of algebraic expressions. It is concluded that organizing teaching through a contextualized didactic sequence is an effective pedagogical strategy for teaching functions in high school, fostering the development of algebraic and functional thinking.

Linear function. Didactic sequence. Contextualization. Everyday situations. Mathematics teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação do ordenado $(2, 3)$ no plano cartesiano.	24
Figura 2 – Representação gráfica de um conjunto de pares ordenados.	25
Figura 3 – Diagrama de correspondência da função $f(x) = 2x$	26
Figura 4 – Relação em que o elemento $1 \in A$ tem duas imagens.	26
Figura 5 – Relação em que o elemento $3 \in A$ não possui imagem em B	27
Figura 6 – Relação em que dois elementos de A têm a mesma imagem.	28
Figura 7 – Representação gráfica de f	35
Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$	37
Figura 9 – Exemplo de relação que representa uma função (teste da reta vertical).	38
Figura 10 – Exemplo de relação que não representa uma função.	38
Figura 11 – Gráfico da função com máximo em $x = 10$ e comportamento decrescente.	39
Figura 12 – Exemplo de função injetora.	41
Figura 13 – Exemplo de função sobrejetora.	41
Figura 14 – Exemplo de função bijetora.	42
Figura 15 – Gráfico da função linear $f(x) = 15x$, representada como reta contínua no primeiro quadrante.	47
Figura 16 – Gráfico de uma função linear $f(x) = 1,5x$	50
Figura 17 – Gráfico da função constante $f(x) = 4$	52
Figura 18 – Gráfico da função de crescimento $h(t) = 4 + 1,2t$	53
Figura 19 – Gráfico da função $f(x) = 2x - 4$ e sua raiz.	57
Figura 20 – Representação gráfica de uma função afim crescente e sua raiz.	58
Figura 21 – Representação gráfica de uma função afim decrescente e sua raiz.	59
Figura 22 – Gráfico da função definida por partes que representa a tarifa da corrida	62
Figura 23 – Entendendo a conta de água.	69
Figura 24 – Produção dos estudantes - Registro 1.	81
Figura 25 – Produção dos estudantes- Registro 2.	81
Figura 26 – Registro 3- Aluno- Análise das contas de luz.	84
Figura 27 – Registro 4 - Identificação de tarifas fixas na conta de luz.	86
Figura 28 – Registro 5 - Identificação de tarifas fixas na conta de água.	87
Figura 29 – Registro 6 - Formalização algébrica.	89
Figura 30 – Registro 7 - Formalização algébrica.	89
Figura 31 – Registro 8 - Conta de água da escola.	90
Figura 32 – Grupo de estudantes- imagem ilustrativa, gerada por IA	104
Figura 33 – Registro 1- Aluno- Atividade Inicial.	121
Figura 34 – Registro 2- Aluno- Análise das contas de luz.	122
Figura 35 – Registro 3- Aluno- Análise das contas de luz.	123
Figura 36 – Registro 4- Aluno- Análise das contas de água.	124
Figura 37 – Registro 5- Aluno- Análise das contas de água.	125

Figura 38 – Pratica 1	126
Figura 39 – Pratica 2	126
Figura 40 – Pratica	126
Figura 41 – Conta de luz.	127
Figura 42 – Conta de água.	128

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pares ordenados associados à relação $y = 2x$	24
Tabela 2 – Relação entre consumo de energia elétrica e valor da conta.	30
Tabela 3 – Valores da função $f(x) = 2x + 1$	36
Tabela 4 – Tabela de valores da função $f(x) = 15x$	46
Tabela 5 – Tabela de valores da função constante $f(x) = 4$	52
Tabela 6 – Valores da função $h(t) = 4 + 1,2t$	53
Tabela 7 – Tabela de valores da função $f(x) = 2x - 4$	57
Tabela 8 – Valores da função custo da corrida	61
Tabela 9 – Cobrança de água na modalidade residencial padrão	68
Tabela 10 – Cobrança de água na modalidade residencial social	68
Tabela 11 – Cobrança de água na modalidade residencial industrial e pública	68
Tabela 12 – Cobrança de água na modalidade paisagismo	69
Tabela 13 – Alinhamento entre as situações-problema, os conceitos matemáticos mobilizados e as habilidades da BNCC	70
Tabela 14 – Composição da cobrança da conta de energia elétrica	119
Tabela 15 – Conta de água – Residencial padrão	120

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEM 04	Centro de Ensino Médio 04.
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFT	Universidade Federal do Tocantins
SD	Sequência Didática
PHC	Pedagogia Histórico Crítica.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Referencial Teórico	17
2	A FUNÇÃO AFIM: DEFINIÇÕES, REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS E RESULTADOS	21
2.1	O Conceito de Relação, Função e suas Representações	22
2.1.1	Par ordenado e plano cartesiano	23
2.1.2	Representação de Funções por Diagramas de Correspondência	25
2.2	Funções Reais de Uma Variável Real	29
2.2.1	Estudo do domínio de uma função real	31
2.2.2	Imagem de uma função	33
2.2.3	O uso de tabelas para a construção de gráficos e análise de gráficos	35
2.3	Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras	40
2.3.1	Funções Monótonas	43
2.4	Função Afim	44
2.4.1	Função Linear	45
2.4.2	Função Linear Crescente ou Linear Decrescente	49
2.4.3	Função Afim	51
2.4.4	Gráfico da Função Afim: raízes ou zeros da função afim e análise do gráfico	56
2.4.4.1	Estudo do sinal por meio da análise gráfica	57
2.4.5	Determinação dos coeficientes de uma Função Afim a partir de dois pontos conhecidos	59
2.4.6	Funções Definidas por Partes	60
3	RELATO DE EXPERIÊNCIA	63
3.1	Como surgiu a ideia	64
3.2	Caracterização da intervenção pedagógica	65
3.3	Metodologia	66
3.4	Descrição das atividades	72
3.4.1	Situação-problema 1	72
3.4.2	Situação-problema 2	74
3.4.3	Situação-problema 3	75
3.4.4	Situação-problema 4	77
3.5	Análise dos Resultados	79
3.5.1	Análise da Situação-problema 1: diagnóstico inicial e ativação dos conhecimentos prévios	80
3.5.2	Análise da Situação-problema 2: critérios de cálculo e instrumentalização matemática	83

		13
3.5.3	Análise da Situação-problema 3: identificação de parcelas fixas e variáveis	85
3.5.4	Análise da Situação-problema 4: formalização algébrica e modelagem das relações funcionais	88
3.5.5	Procedimentos de análise dos dados à luz da pesquisa qualitativa	91
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL.	99
	APÊNDICE B – PLANEJAMENTO DE AULA: FUNÇÃO POLINOMIAL APLICADA ÀS CONTAS DE ÁGUA E LUZ.	113
	APÊNDICE C – MATERIAL DE APOIO UTILIZADO NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	117
	APÊNDICE D – ATIVIDADES DIRECIONADAS AOS ALUNOS	118
D.1	Atividade 1– Análise das Contas de Água e Luz.	118
D.2	Atividade 2– Análise das Contas de Água e Luz.	118
	APÊNDICE E – REGISTROS DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS.	121
	APÊNDICE F – REGISTROS FOTOGRÁFICOS.	126
	APÊNDICE G – REGISTRO DE DOIS EXEMPLOS DE CONTAS REAIS UTILIZADAS PELOS ALUNOS NA REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE.	127

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática na Educação Básica apresenta desafios que ultrapassam a simples transmissão de procedimentos e técnicas operatórias. Em sala de aula, professores frequentemente se deparam com questionamentos dos estudantes sobre a utilidade e a aplicação prática dos conteúdos matemáticos, especialmente quando apresentados de forma abstrata e desvinculada da realidade.

No currículo de Matemática, o conceito de função constitui um dos principais instrumentos para a interpretação de relações quantitativas presentes em diferentes contextos científicos, tecnológicos e sociais. Em particular, as Funções Afins, representam um dos primeiros modelos matemáticos formais apresentados aos estudantes para descrever relações lineares entre variáveis. Por meio dessas funções, torna-se possível compreender situações que envolvem crescimento ou decrescimento constante, interpretar gráficos, analisar tabelas de dados e construir expressões algébricas que representam relações entre grandezas.

A relevância desse objeto de conhecimento, é reforçada pelos documentos curriculares oficiais que orientam a Educação Básica brasileira. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que o ensino de Matemática deve favorecer o desenvolvimento de competências relacionadas à interpretação de fenômenos, à resolução de problemas e à utilização de diferentes representações matemáticas na análise de situações provenientes do cotidiano, das ciências e de diferentes áreas do conhecimento. Nesse contexto, o estudo das Funções Afins contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico, análise geométrica e conceituação de funções até mais gerais, permitindo que os estudantes compreendam relações de dependência entre variáveis e interpretem situações que envolvem variação entre grandezas.

Apesar de sua importância no currículo escolar, a aprendizagem do conceito de função tem sido apontada na literatura como um dos desafios recorrentes no ensino de Matemática. Diversos estudos indicam que muitos estudantes apresentam dificuldades. Segundo Lima (2010), a compreensão das funções exige a articulação entre diferentes formas de representação — algébrica, gráfica (geométrica) e tabular —, o que frequentemente constitui um obstáculo para os estudantes quando o conteúdo é trabalhado de forma fragmentada. De maneira semelhante, Nasser (2009) destaca que grande parte das dificuldades observadas na aprendizagem de funções está associada à limitada capacidade dos alunos de interpretar representações gráficas e relacioná-las às expressões algébricas correspondentes. Em muitos casos, tais dificuldades decorrem de abordagens pedagógicas centradas predominantemente na manipulação algébrica de fórmulas e na resolução mecânica de exercícios, o que pode limitar a construção de significados para os conceitos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Diante desse cenário, torna-se necessário investigar propostas pedagógicas que contribuam para tornar o ensino de funções mais significativo para os estudantes. Entre as possibilidades discutidas no campo da Educação Matemática, destaca-se a organização do ensino por meio de sequências didáticas, compreendidas como conjuntos estruturados de atividades

planejadas de forma progressiva e intencional, com o objetivo de favorecer a aprendizagem de determinados conteúdos. A utilização de sequências didáticas pode contribuir para organizar o processo de ensino-aprendizagem de maneira articulada, promovendo a construção gradual dos conceitos e favorecendo a mobilização de diferentes formas de representação matemática.

Considerando essas questões, esta pesquisa propõe o desenvolvimento e a aplicação de uma sequência didática voltada ao ensino de funções afins no Ensino Médio, tomando como ponto de partida a análise de contas de consumo de água e energia elétrica. Esses documentos, presentes no cotidiano das famílias, apresentam informações que relacionam consumo e valor a pagar, constituindo situações que envolvem relações de dependência entre grandezas e que podem ser interpretadas matematicamente. A análise dessas contas permite explorar conceitos associados às Funções Afins, como taxa de variação e representação gráfica, possibilitando que os estudantes estabeleçam conexões entre o conteúdo matemático e situações concretas de seu cotidiano.

Nesse contexto, a presente investigação é orientada pela seguinte questão de pesquisa:

De que maneira uma sequência didática, utilizando como instrumento as contas de água e energia elétrica, pode contribuir para o ensino de Funções Afins no Ensino Médio?

A partir dessa questão, define-se como objetivo geral desta pesquisa analisar de que maneira uma sequência didática, estruturada a partir da análise de contas de consumo de água e energia elétrica, pode contribuir para o ensino de funções afins no Ensino Médio.

Do ponto de vista metodológico, a presente pesquisa caracteriza-se como uma investigação de natureza qualitativa e aplicada, desenvolvida a partir de uma intervenção pedagógica realizada em quatro turmas da primeira série do Ensino Médio do Centro de Ensino Médio 04, localizado em Sobradinho, no Distrito Federal. A abordagem qualitativa possibilita compreender os processos de aprendizagem dos estudantes em seu contexto de ocorrência, considerando as produções realizadas, as estratégias mobilizadas na resolução das atividades propostas e os significados atribuídos pelos estudantes aos conceitos trabalhados ao longo do desenvolvimento da sequência didática voltada ao ensino de Funções Afins.

Diante de um trabalho minuciosamente planejado e do desenvolvimento em sala de aula da sequência didática construída, realizou-se intervenção na Escola supracitada, e com a intenção de descrever todas as etapas vivenciadas, o estudo assume também características de relato de experiência, uma vez que analisa uma prática pedagógica desenvolvida em contexto real de sala de aula, buscando compreender as contribuições dessa proposta didática para o ensino dessas funções para estudantes do Ensino Médio. Assim, a investigação busca compreender como a organização do ensino por meio de uma sequência didática pode favorecer a construção de significados para o conceito de função afim, e de seus casos particulares, no contexto do Ensino Médio.

Diante da ideia a ser desenvolvida, percebeu-se a necessidade de considerar uma perspectiva teórica que embasasse a didática adotada, tornando cada etapa uma importante

e intencional componente para o sucesso no processo de ensino e aprendizagem. Foi quando, adicionamos aos nossos estudos a teoria que envolve a Pedagogia-Histórico-Crítica (PHC), através de (GASPARIN, 2005), (GASPARIN, 2014), (SAVIANI, 1991), (SAVIANI, 2011) e (SAVIANI, 2021). Não houve tempo, nem pretensão, de entendermos a PHC tal qual um especialista, mas adotar a didática associada e suas etapas para que a intencionalidade gerasse aprendizado significativo na formação do cidadão crítico e que já possui experiências, como consideramos nossos estudantes desde o início do processo.

Desde o planejamento, sempre pensamos no perfil daqueles alunos que seriam envolvidos no processo, no perfil da escola e de atividades que pudessem a partir da realidade deles impulsionar o entendimento sobre funções afins. A Prática Social Inicial, posteriormente descrita aqui é uma necessidade para que o conteúdo faça sentido e que ao final o aluno perceba o porquê aprender aquilo, sem que as recorrentes perguntas sobre o objetivo de cada conteúdo estudado seja feita.

A realização destes processos iniciam com diálogos com a equipe pedagógica da escola, com a orientadora e principalmente com a experiência de anos em sala de aula da autora, associada ao intenso processo formativo vivido durante as disciplinas do mestrado em questão, o PROFMAT.

Diante deste processo de estudos intensos e convívio com profissionais e colegas com uma maturidade matemática antes menos expressiva, viu-se a necessidade de trazer o conteúdo adotado para este trabalho com a formalidade necessária para que este trabalho seja autoexplicativo e ainda, seja fonte de pesquisa para professores do ensino básico, tanto no sentido de conhecer o produto educacional criado, como para pesquisas sobre o assunto abordado.

O estudo de funções e ainda mais especificamente o estudo da Função Afim, surge com a intencionalidade de oferecer base para os estudantes no que seguirá em relação aos conceitos mais complexos que surgem como funções.

No que se refere à organização desta dissertação, o trabalho está estruturado em quatro capítulos, os quais se articulam de forma a apresentar o percurso teórico, conceitual e investigativo desenvolvido ao longo da pesquisa.

O Capítulo 1 apresenta a introdução da pesquisa e o referencial teórico que sustenta a investigação. Inicialmente, são discutidos aspectos relacionados ao ensino de funções no contexto da Educação Básica, destacando-se sua relevância para o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional. Em seguida, são abordadas as dificuldades de aprendizagem frequentemente apontadas na literatura e as contribuições da organização do ensino por meio de sequências didáticas para a construção de significados no processo de aprendizagem matemática.

O Capítulo 2 dedica-se à apresentação das definições e dos conceitos matemáticos que fundamentam o estudo das Funções Afins. Esse capítulo possui caráter formativo e busca tornar o trabalho autoexplicativo, oferecendo ao leitor uma base conceitual consistente sobre o conteúdo abordado na sequência didática. Nesse sentido, são discutidos conceitos, propriedades e

representações relacionadas às funções afins, de modo a possibilitar que professores interessados na proposta pedagógica desenvolvida nesta pesquisa possam compreender, de forma aprofundada, os fundamentos matemáticos que orientam as atividades propostas.

Ainda sobre o Capítulo 2, algumas relações são discutidas como o que conceitua uma Função Afim, e casos particulares destas funções, como as Funções Constantes e Lineares. Atentou-se também, para como os diferentes tipos de representações das funções podem auxiliar na compreensão dos alunos, como cada coeficiente no intervalo do domínio tem papel crucial para comportamentos e propriedades das funções, consequentemente nas soluções de problemas.

A relação de proporcionalidade e Funções Afins é apresentada como instrumento de associação deste e outros conteúdos tão comuns no cotidiano, trazendo assim clareza aos objetivos do estudo deste tipo de funções. Outras associações não foram apresentadas, pois não foram objeto deste trabalho, mas de antemão já sugerimos que o leitor faça um estudo sobre a relação entre Funções Afins e as Progressões Aritméticas.

Já o Capítulo 3 apresenta o relato de experiência decorrente da aplicação da sequência didática. Nesse capítulo, são descritas as etapas de desenvolvimento da sequência didática, bem como analisadas as produções dos estudantes e as estratégias mobilizadas na resolução das atividades propostas, buscando compreender as contribuições da proposta pedagógica para o ensino de Funções Afins.

Algumas situações que não foram alcançadas por motivos diversos são apresentados também no Capítulo 3. Entende-se que em um relato de experiências as adversidades e resultados que não foram atingidos, fazem parte do processo e merecem espaço para justificar dificuldades, alterações no planejamento e até mesmo respostas positivas que não eram esperadas.

Por fim, o Capítulo 4 reúne as considerações finais da pesquisa, retomando os objetivos do estudo e discutindo as principais contribuições da investigação para o ensino de funções afins no Ensino Médio, além de apontar possibilidades para o desenvolvimento de novas investigações relacionadas ao tema.

1.1 Referencial Teórico

Esta seção apresenta os referenciais teóricos que sustentam a proposta investigativa desenvolvida neste estudo, discutindo aspectos relacionados ao ensino de funções na Educação Básica, às dificuldades associadas à aprendizagem desse conteúdo e às contribuições da organização do trabalho pedagógico por meio de sequências didáticas.

No campo da Educação Matemática, o conceito de função é frequentemente apontado como um dos elementos centrais para a compreensão das relações de dependência entre grandezas e para a análise de fenômenos que envolvem variação. Nesse sentido, Lima (2010) destaca que o estudo das funções permite analisar como variações em uma grandeza influenciam outra, possibilitando identificar comportamentos como crescimento, decréscimo e constância.

Para que essa compreensão ocorra de forma consistente, torna-se necessário articular diferentes formas de representação matemática. Conforme ressaltam Stewart (2017) e Thomas, Weir e Hass (2018), a compreensão conceitual das funções envolve a coordenação entre representações algébrica, gráfica e numérica, permitindo interpretar relações entre variáveis em diferentes contextos.

No âmbito da Educação Básica, autores como Dante (2013) e Bianchini e Paccola (1996) destacam a importância de abordagens pedagógicas que priorizem a interpretação de situações-problema, a leitura de gráficos e a construção de significados antes da formalização algébrica. Segundo esses autores, o ensino de funções deve favorecer a compreensão da dependência entre variáveis, possibilitando que os estudantes interpretem fenômenos do cotidiano por meio de diferentes representações matemáticas.

No contexto das orientações curriculares brasileiras, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes para o ensino de Matemática no Ensino Médio, organizando o currículo em torno de competências e habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo da escolarização. No que se refere ao estudo de funções, o documento destaca a importância da utilização de conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações provenientes de diferentes contextos sociais, científicos e tecnológicos.

A competência específica EM13MAT01 estabelece que o ensino de Matemática deve propiciar aos estudantes utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (Brasil, 2018)

No âmbito específico das funções polinomiais do primeiro grau, a BNCC apresenta habilidades que orientam o desenvolvimento do pensamento funcional desde os anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

A habilidade EF09MA06 estabelece que os estudantes devem compreender as funções como relações de dependência entre duas variáveis e suas representações algébrica, gráfica e em tabela, identificando padrões de crescimento ou decréscimo. (Brasil, 2018)

No Ensino Médio, o documento orienta que os estudantes interpretem situações que envolvam a variação de grandezas por meio da análise de gráficos e da compreensão das taxas de variação.

A habilidade EM13MAT101 orienta que os estudantes devem interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação. (Brasil, 2018)

Essas orientações evidenciam a necessidade de desenvolver nos estudantes a capacidade de interpretar relações entre grandezas e compreender diferentes representações matemáticas. Em consonância com essas diretrizes, o Currículo em Movimento do Distrito Federal, Distrito Federal (2018), propõe que o ensino de Matemática promova a articulação entre conceitos formais e situações do cotidiano dos estudantes, compreendendo o estudo das funções como oportunidade para desenvolver habilidades de análise de variação, interpretação gráfica e argumentação matemática.

Apesar de sua relevância curricular e conceitual, a literatura aponta dificuldades recorrentes na aprendizagem de funções. Entre os principais desafios identificados, destacam-se a interpretação de gráficos, a compreensão do significado dos coeficientes presentes nas expressões algébricas e a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. Segundo Lima (2010), a compreensão do conceito de função exige a articulação entre diferentes representações matemáticas, o que frequentemente constitui um obstáculo para os estudantes quando o conteúdo é trabalhado de forma fragmentada. De maneira semelhante, Nasser (2009) aponta que muitos alunos apresentam dificuldades na leitura e interpretação de gráficos e na identificação das relações entre as representações algébricas e gráficas das funções.

Diante dessas constatações, torna-se necessário investir em propostas pedagógicas que organizem o ensino de forma articulada e progressiva, superando abordagens excessivamente procedimentais e favorecendo a construção de significados para os conceitos matemáticos.

Nesse contexto, a organização do trabalho pedagógico por meio de sequências didáticas apresenta-se como uma estratégia capaz de estruturar o processo de ensino-aprendizagem de forma coerente e intencional. Nesta pesquisa, compreende-se a sequência didática como um conjunto de atividades organizadas de maneira sistemática, com o objetivo de promover a aprendizagem dos conceitos de função afim de forma articulada e contextualizada. Ressalta-se, entretanto, que o presente estudo não tem como finalidade realizar um aprofundamento teórico sobre as diferentes concepções de sequência didática, utilizando esse instrumento principalmente como recurso para organizar o desenvolvimento das atividades propostas.

Nesse sentido, destacam-se as contribuições de autores que discutem a organização do trabalho pedagógico e a estruturação de atividades de ensino, como Dolz, Noverraz e Schneuwly (2011), Zabala (1998) e Costa, Gonçalves e Mariano (2024), que abordam diferentes perspectivas sobre a elaboração e utilização de sequências didáticas no contexto educacional.

No desenvolvimento da sequência didática proposta neste trabalho, adota-se como referencial a Pedagogia Histórico-Crítica, especialmente no que se refere à organização das etapas do processo de ensino-aprendizagem. Conforme sistematizado por Gasparin (2014), o trabalho pedagógico pode ser estruturado em cinco momentos: prática social inicial, problematização, instrumentalização, catarse e prática social final.

No contexto desta pesquisa, a prática social inicial é representada pela análise de contas de consumo de água e energia elétrica, documentos presentes no cotidiano dos estudantes e que

evidenciam relações de dependência entre grandezas. A problematização permite identificar as relações funcionais presentes nesses documentos, especialmente no comportamento do valor cobrado em diferentes faixas de consumo. Na etapa de instrumentalização, são desenvolvidos os conceitos matemáticos relacionados às funções afins, como taxa de variação, também conhecida como coeficiente angular, coeficiente linear e as diferentes formas de representação das funções.

A etapa de catarse possibilita que os estudantes utilizem os modelos matemáticos construídos para compreender os critérios de cobrança presentes nas contas analisadas, enquanto a prática social final favorece uma compreensão mais ampla das relações entre consumo e valor pago, permitindo a interpretação crítica dessas situações.

Dessa forma, as contas de água e energia elétrica assumem papel de instrumento mediador entre a realidade vivenciada pelos estudantes e o conhecimento matemático sistematizado, configurando situações favoráveis para o estudo das funções afins no Ensino Médio.

Assim, o foco deste trabalho reside no desenvolvimento, na aplicação e na análise de uma sequência didática estruturada para o ensino de funções afins, compreendendo essa sequência como elemento central na organização das atividades pedagógicas e na promoção de aprendizagens significativas relacionadas ao conceito de função.

2 A FUNÇÃO AFIM: DEFINIÇÕES, REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS E RESULTADOS

Neste capítulo, estão enunciadas definições, resultados e exemplos associados às funções, com destaque para as funções cujos gráficos são retas ou linhas poligonais. Ou seja, define-se Função Afim, e seus casos particulares como Função Constante, Função Linear e ainda funções definidas por partes onde em cada intervalo, as leis de formação são as funções anteriormente citadas. Além disso, resultados mais gerais sobre funções são apresentados para um melhor entendimento do leitor. Aborda-se também exemplos pensados e estrategicamente adotados para que haja continuidade nas explicações aos alunos, juntamente com resultados (teoremas e proposições) considerados fundamentais para o desenvolvimento dos objetos do conhecimento que constituem o foco matemático desta investigação.

Busca-se, por meio dessa abordagem, estabelecer uma base conceitual consistente que possibilite ao leitor compreender e utilizar se necessário, os conteúdos matemáticos mobilizados na sequência didática e que naturalmente são citados frequentemente ao longo do texto. Assim, além de subsidiar a leitura desta dissertação, a exposição teórica aqui apresentada pretende também servir como material teórico para professores que atuam no Ensino Médio e que desenvolvem o estudo de funções em sala de aula. Nesse sentido, procura-se tornar a dissertação autoexplicativa, apresentando os conceitos de forma progressiva e cuidadosamente estruturada. Com objetivo de favorecer uma compreensão conceitual e concreta, estabelecendo claramente as relações entre a variável e a imagem obtida associada a cada função.

Objetivando favorecer o entendimento e estabelecer uma sequência lógica e didática, optou-se por iniciar o capítulo com a definição geral de função e com o estudo do domínio das funções reais, destacando a importância da identificação dos valores admissíveis da variável independente. Em seguida, são introduzidas as noções de par ordenado e de plano cartesiano, que constituem a base para a compreensão das representações gráficas das funções. Somente após esse percurso inicial são abordadas outras formas de representação, como os diagramas de correspondência, buscando garantir maior clareza conceitual e coerência na progressão dos conteúdos apresentados.

A fundamentação conceitual desenvolvida ao longo deste capítulo apoia-se em autores que atuam no campo da Matemática, Educação Matemática e do ensino de Matemática, como: Bianchini e Paccola (1996), Dante (2008), Iezzi *et al.* (2013), Shenk (1991), Stewart (2017) e Thomas, Weir e Hass (2018). As contribuições desses autores orientam a abordagem adotada, especialmente no que se refere ao rigor conceitual, à valorização das múltiplas representações das funções e à preocupação com a compreensão didática dos conceitos matemáticos fundamentais.

2.1 O Conceito de Relação, Função e suas Representações

Uma função é formalmente definida como uma correspondência entre dois conjuntos, associando a cada elemento de um primeiro conjunto exatamente um elemento do outro conjunto (não necessariamente tais conjuntos são distintos). De modo geral, permite descrever situações em que uma quantidade depende de outra, possibilitando a análise de fenômenos que envolvem variação, crescimento e regularidade. Segundo Thomas, Weir e Hass (2018), uma função pode ser compreendida como uma regra que associa a cada elemento x de um conjunto D exatamente um elemento y de um conjunto C . De forma complementar, Stewart (2017) destaca que as funções constituem uma linguagem essencial da Matemática para descrever e prever comportamentos em diferentes contextos científicos e cotidianos. Antes de definirmos função formalmente, observe a seguir o que é uma Relação entre dois conjuntos.

Definição 1. *Uma Relação entre um conjunto A e um conjunto B é uma associação em pares onde o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence a B , a relação entre A e B , denotada por*

$$R : A \longrightarrow B.$$

Logo, o conjunto dos pares obtidos pela Relação R são da forma $\{(a,b); a \in A \text{ e } b \in B\}$. Como a ordem dos elementos dos pares é importante, pois representa de qual conjunto foi tomado cada elemento do par, tais elementos $\{(a,b)$ são denominados de par ordenado.

Exemplo 1. *Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$ o conjunto $R_1 = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2)\}$ representa uma relação entre elementos de A e B . Assim, como quando associamos o elemento de A ao elemento de B , que correspondem ao seu dobro obtendo-se assim, a relação R_2 dada por $R_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.*

Note que na relação R_2 todos elementos do conjunto A possuem um único correspondente em B , relações que satisfazem essa condições exercem importante papel na Matemática, são denominadas funções e formalmente definimos a seguir.

Definição 2. *Uma função definida de um conjunto A em um conjunto B é uma Relação entre A e B , denotada por*

$$f : A \longrightarrow B$$

tal que, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ associado a x , indicado por $y = f(x)$. O conjunto A é denominado domínio da função f e representado por $D(f)$ e o conjunto B é denominado contradomínio de f e representado por $CD(f)$.

Alguns autores usam notações distintas para domínio e contradomínio da f , mas para este texto serão estes os adotados.

Vale observar, que ao definir função são impostas condições de existência e unicidade de correspondentes apenas aos elementos do domínio. Claro que o contradomínio B tem

papel essencial para que tais correspondentes existam, porém os elementos de B podem ser correspondentes de elementos distintos de A , ou mesmo, nem possuírem correspondentes. Se houver então, imposições atribuídas ao contradomínio de uma função, surgem funções com propriedades importantes, como as funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas que serão definidas ao longo do trabalho.

Antes de um aprofundamento nos conceitos e resultados acerca das funções, faz-se necessário reforçar o entendimento do que é função ou apenas uma relação entre dois conjuntos. Para isso, é bastante eficiente o uso de representações visuais como os diagramas de correspondências ou de flechas e a representação gráfica de funções. Para tanto inicialmente, trataremos conjuntos com um número finito de elementos que são subconjuntos do conjunto dos Números Naturais ou ainda dos Números Inteiros.

2.1.1 Par ordenado e plano cartesiano

Para o estudo das funções e de suas diferentes formas de representação, faz-se necessário retomar algumas noções fundamentais da Matemática, em especial os conceitos de *par ordenado* e de *plano cartesiano*. Esses conceitos constituem a base para a compreensão das representações gráficas das funções e permitem estabelecer conexões mais concretas entre os conceitos e abordagens algébricas e geométricas.

Como já mencionado, um *par ordenado* é formado por dois elementos dispostos em ordem, onde o primeiro é tomado do primeiro conjunto e o segundo elemento do par é tomado do segundo conjunto da Relação. No caso de funções, o primeiro elemento é do domínio e o segundo do contradomínio de f . A ordem dos elementos é essencial, pois $(x, y) \neq (y, x)$, salvo em casos particulares. No contexto das funções, o par ordenado $(x, f(x))$ expressa a relação entre um valor da variável independente $x \in D(f)$ e o correspondente valor da variável dependente $f(x) \in CD(f)$, traduzindo matematicamente a ideia de dependência entre grandezas dos conjuntos relacionados.

Em geral, esses pares representam pontos de uma plano composto por todos pares da relação entre \mathbb{R} em \mathbb{R} , tal conjunto é denominado de *Plano Cartesiano*. Esses pares ordenados podem ser representados geometricamente no Plano Cartesiano, que é formado por dois eixos perpendiculares entre si: um deles é o eixo horizontal, denominado eixo das abscissas, e o eixo vertical, denominado eixo das ordenadas. Cada ponto do Plano Cartesiano é representado por um único par ordenado (x, y) , o que possibilita representar graficamente relações entre variáveis numéricas, de forma única.

Exemplo 2 (Representação de um par ordenado (x, y) no plano cartesiano). *Considere o par ordenado $(2, 3)$. Nesse par, o primeiro número indica a coordenada no eixo das abscissas (eixo x), enquanto o segundo número indica a coordenada no eixo das ordenadas (eixo y). Assim, o ponto $(2, 3)$ representa a relação entre $x = 2$ e $y = 3$. No plano cartesiano, esse par é representado por um ponto localizado na reta vertical que passa por $x = 2$ e intercepta a reta*

horizontal que passa por $y = 3$, como representado na Figura 1.

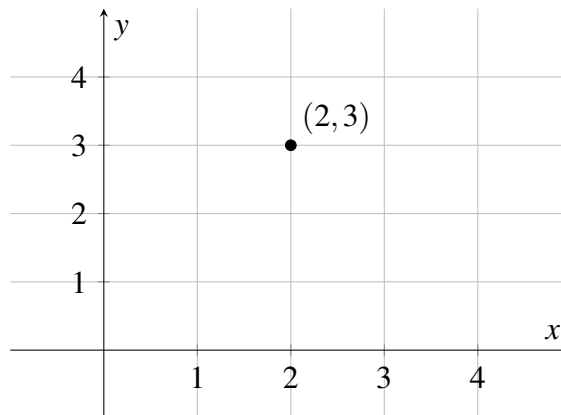


Figura 1 – Representação do ordenado $(2, 3)$ no plano cartesiano.

Fonte: Elaboração própria.

Observação importante: Todas as imagens, tabelas e gráficos cuja fonte for apresentada como "**Elaboração Própria**", foram elaboradas pela autora e geradas com o auxílio da Inteligência Artificial (GPT).

Exemplo 3 (Conjunto de pares ordenados no plano cartesiano). *Considere agora os pares ordenados $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$ e $(4, 8)$. Como na relação definida no Exemplo 1. Esses pares podem ser organizados em uma tabela e, posteriormente, representados no plano cartesiano.*

Tabela 1 – Pares ordenados associados à relação $y = 2x$

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

Fonte: Elaboração própria.

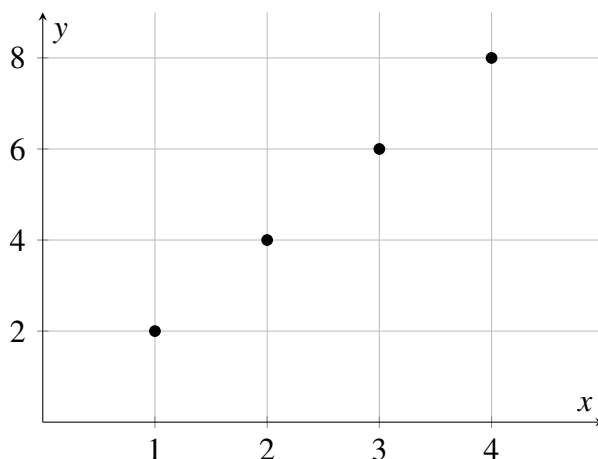


Figura 2 – Representação gráfica de um conjunto de pares ordenados.

Fonte: Elaboração própria.

Ao representar esses pares no plano cartesiano, observa-se que os pontos se alinham, sugerindo uma regularidade entre as variáveis envolvidas.

2.1.2 Representação de Funções por Diagramas de Correspondência

Podemos compreender o conceito de função utilizando os diagramas de correspondência, também conhecidos como *diagramas de flechas*. Nessa representação visual, cada elemento x do conjunto de partida, denominado domínio, é ligado por uma seta a um único elemento $y = f(x)$ do conjunto de chegada, denominado contradomínio, evidenciando graficamente a ideia de unicidade da relação estabelecida.

Segundo Caminha e Neto (2014), uma função pode ser entendida como uma lei de associação entre dois conjuntos, na qual cada elemento do domínio está vinculado a exatamente um elemento do contradomínio. De modo semelhante, Dante (2008) e Bianchini e Paccola (1996) destacam que o uso de diagramas de correspondência facilita a compreensão inicial do conceito de função, pois torna visível a noção de dependência e correspondência entre grandezas.

Essa forma de representação articula-se ainda ao que Duval (2003) denomina transição entre registros de representação semiótica, uma vez que possibilita a passagem do registro visual para o registro simbólico. Tal transição favorece uma aprendizagem mais significativa, ao ampliar a compreensão conceitual dos estudantes e permitir que o conceito de função seja compreendido para além de sua expressão algébrica.

Por meio dos diagramas de correspondência, também é possível observar que nem toda relação entre dois conjuntos pode ser considerada uma função. Para que uma correspondência seja classificada como função, é necessário que cada elemento do domínio esteja associado a um único elemento do contradomínio. Quando essa condição não é atendida, seja pela presença de múltiplas setas partindo de um mesmo elemento do domínio, seja pela ausência de imagem, representada por $Im(f)$, para algum de seus elementos, a relação deixa de caracterizar uma

função. A seguir, apresentam-se exemplos ilustrativos que evidenciam essas diferentes situações, pois eles favorecem a compreensão inicial da definição de função e da condição de unicidade da imagem.

Exemplo 4. Considere a função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 2x$, onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$. Dessa forma, $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $CD(f) = \{2, 4, 6\}$ e $Im(f) = \{2, 4, 6\}$.

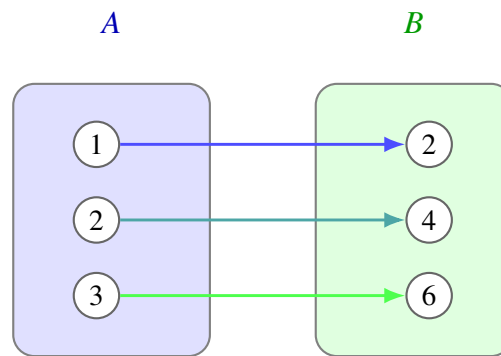


Figura 3 – Diagrama de correspondência da função $f(x) = 2x$.
Fonte: Elaboração própria.

Este tipo de representação possibilita visualizar a correspondência entre os conjuntos A e B , mostrando que cada elemento de A tem (existência) exatamente uma (única) imagem em B . Assim, o diagrama de flechas confirma-se como uma ferramenta poderosa para introduzir o conceito de função antes mesmo da formalização algébrica, favorecendo a transição do pensamento concreto para o abstrato.

Exemplo 5. Observe a relação representada no diagrama da figura 4

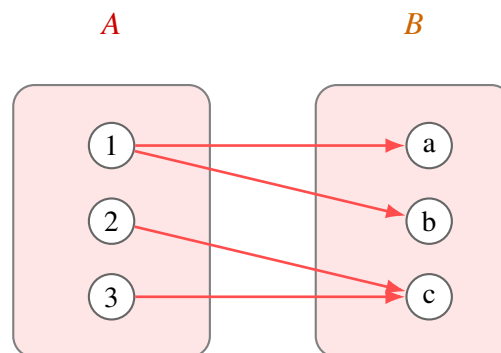


Figura 4 – Relação em que o elemento $1 \in A$ tem duas imagens.
Fonte: Elaboração própria.

Neste caso, o elemento 1 do conjunto A associa-se tanto ao elemento a pertencente a B quanto ao elemento b , o qual é diferente de a no conjunto B . Na relação, observa-se que o elemento 1 do conjunto domínio A está associado a dois elementos distintos do contradomínio B , a saber, a e b . Essa situação viola a definição de função, pois, quando um elemento do domínio está associado a dois ou mais elementos do contradomínio, a lei de associação deixa de ser unívoca e, portanto, a função não está bem definida.

Consequentemente, uma correspondência desse tipo não pode ser considerada uma função, uma vez que a definição exige que a cada elemento do domínio corresponda exatamente um único elemento do contradomínio. A presença de duas setas partindo do mesmo elemento do domínio caracteriza uma relação que invalida a condição de unicidade da imagem.

Exemplo 6. Observe a relação apresentada no diagrama Figura 5.

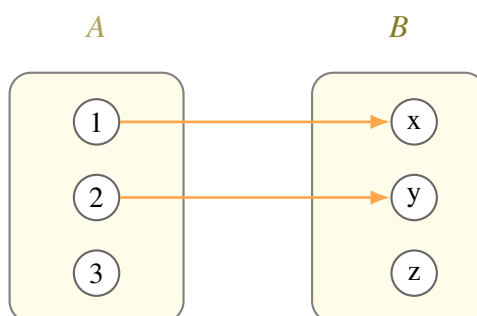


Figura 5 – Relação em que o elemento $3 \in A$ não possui imagem em B .

Fonte: *Elaboração própria.*

Na relação representada, observa-se que o elemento 3 do domínio não está associado a nenhum elemento do contradomínio. Nesse caso, a correspondência é incompleta, pois nem todos os elementos do domínio possuem um correspondente no contradomínio, ou seja, não possuem uma imagem. Essa situação também contraria a definição de função, uma vez que todo elemento do domínio deve necessariamente estar associado a um elemento do contradomínio. Quando existe pelo menos um elemento do domínio sem imagem, a relação deixa de satisfazer a condição de existência exigida na definição de função, não podendo, portanto, ser classificada como tal.

Sob um olhar didático, entende-se que exemplos como os dois últimos apresentados são necessários para melhor entender quando uma relação é uma função. Ou seja, contra-exemplos são essenciais para que o estudante entenda o que é função, a partir de uma relação que não é função. O exemplo a seguir infringe a outra condição que define funções.

Exemplo 7. Observe agora o diagrama apresentado na figura 6, que representa uma função onde $D(f) = \{1, 2, 3\}$, $CD(f) = \{p, q, r\}$ e $Im(f) = \{q, r\}$.

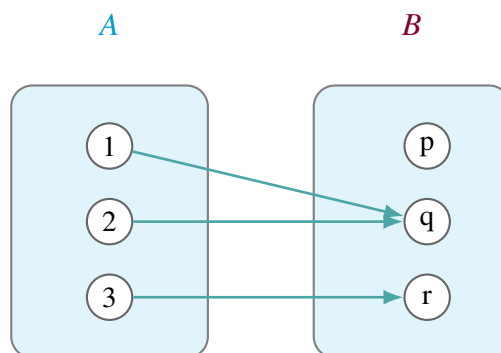


Figura 6 – Relação em que dois elementos de A têm a mesma imagem.

Fonte: *Elaboração própria.*

Cada elemento do domínio está associado a um único elemento do contradomínio. Observa-se, entretanto, que dois elementos distintos do domínio, no caso 1 e 2, possuem a mesma imagem q , isto é, $f(1) = f(2) = q$. O conjunto imagem está contido no contradomínio, como o elemento p nele representado não é imagem de nenhum elemento do domínio, vemos aqui uma situação em que $Im(f)$ é subconjunto próprio do $CD(f)$. Neste caso ainda temos uma função, pois isso não é condição para a relação ser função, porém é interessante registrar que nem todos elementos do $CD(f)$ são imagem de algum x . Sabe-se que essa é a ideia de sobrejetividade, que será definido ao decorrer do desenvolvimento do capítulo, deve-se em sala de aula atentar-se a exemplos sobre essas possibilidades, traz um melhor entendimento quando esse ou outros conceitos forem definidos formalmente.

Mais precisamente, diferentemente dos exemplos anteriores, essa relação define uma função, pois as condições necessárias para a existência de uma função são impostas sobre o domínio. Não há problema quando os elementos do contradomínio não satisfazem essas condições, quando satisfazem teremos funções especiais que são as funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Situação comum em diversas aplicações matemáticas e reforça a ideia de que a definição de função não exige que imagens sejam distintas, mas apenas que não haja ambiguidade na associação, temos que o conjunto imagem é um subconjunto próprio do contradomínio, o que não compromete a validade da função.

Os exemplos apresentados reforçam, de forma visual e conceitual, os princípios fundamentais que caracterizam uma função:

- A cada elemento do domínio deve corresponder um único elemento do contra domínio qual será chamado de imagem;
- Nem todos os elementos do contradomínio precisam necessariamente estar relacionado a um elemento do domínio, isto é, $Im(f) \subseteq CD(f)$;
- A coincidência de imagens associadas a elementos distintos do domínio é possível e não viola a definição de função, pois as regras impostas por essa definição são aplicadas apenas aos elementos do domínio.

Além dos diagramas de correspondência ou diagramas de flecha, uma das representações mais importantes é a representação gráfica no Plano Cartesiano, pois ela permite visualizar a relação entre a variável independente e a variável dependente, evidenciando propriedades que nem sempre são imediatamente perceptíveis na expressão algébrica, como a variação da função, por exemplo.

Antes, porém, de aprofundar essa análise, faz-se necessário estudar funções definidas em domínios contínuos, especialmente no Conjunto dos Números Reais, que será o foco principal deste trabalho. Quando A e B são subconjuntos do conjunto dos Números Reais (\mathbb{R}), as funções são denominadas de Funções Reais de Uma Variável Real e será melhor detalhada na próxima seção.

2.2 Funções Reais de Uma Variável Real

Nesta seção, encontram-se resultados gerais sobre Funções Reais de uma Variável Real e oferecendo elementos para o estudo das funções afim, que se enquadram nesta classificação.

Definição 3. *Uma função real de uma variável real é uma correspondência*

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

tal que, para todo $x \in A$, existe um único elemento $y \in B$ associado a x , indicado por $y = f(x)$. O conjunto A é o Domínio da Função f e representado por $D(f)$ e o conjunto B é o contradomínio de f e representado por $CD(f)$, e o subconjunto de elementos $y \in B$ tal que existe um $x \in A$ tal que $y = f(x)$ é o conjunto Imagem da Função, denotado por $Im(f)$.

Uma função está bem definida quando estão bem determinados três elementos fundamentais que a caracterizam: o domínio, o contradomínio e a lei de associação. Conforme destacam Caminha e Muniz Neto (2014), o estudo das funções deve envolver múltiplas representações: algébrica, gráfica e tabular, pois essa articulação favorece o desenvolvimento do raciocínio funcional e amplia a compreensão conceitual por parte dos estudantes.

Exemplo 8. *Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = 2x + 1.$$

Nesse caso, tanto o domínio quanto o contradomínio da função são o Conjunto dos Números Reais. A expressão $f(x) = 2x + 1$ representa a lei de formação da função, isto é, a regra que determina como cada elemento x do domínio é associado a um único elemento do contradomínio.

Em particular, ao substituir $x = 1$, obtém-se

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

De modo análogo, para $x = 5$, tem-se

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Esses cálculos exemplificam como a lei de formação estabelece a correspondência entre os valores do domínio e os valores da função. Mas, claro esta associação deve ser bem definida para todo elemento do domínio.

Para tornar o conceito de função mais significativo, é interessante quando este é relacionado a situações presentes no cotidiano dos estudantes. Um exemplo frequente refere-se ao cálculo do valor a ser pago pelo consumo de energia elétrica, em que o custo total depende diretamente da quantidade de energia consumida, medida em quilowatt-hora (kWh).

Exemplo 9. *Suponha que o valor cobrado por uma concessionária de energia elétrica seja composto por uma tarifa fixa de R\$ 20,00, acrescida de R\$ 0,80 por kWh consumido. Nessas condições, o valor total da conta de energia pode ser representado por uma função cuja lei de associação é uma expressão polinomial do primeiro grau em relação à variável x , sendo assim uma Função Afim, que será definida posteriormente.*

Seja x a quantidade de energia consumida, em kWh, e seja $C(x)$ o valor da conta, em reais. A relação entre essas grandezas pode ser expressa pela função

$$C(x) = 0,80x + 20.$$

A partir dessa expressão algébrica, é possível construir uma tabela de valores que relaciona diferentes quantidades de consumo ao respectivo valor a ser pago.

Tabela 2 – Relação entre consumo de energia elétrica e valor da conta.

Consumo de energia (kWh)	Valor da conta (R\$)
0	20,00
50	60,00
100	100,00
150	140,00
200	180,00

A análise da tabela permite observar que, à medida que o consumo de energia aumenta, o valor da conta cresce de forma regular. O termo constante da função representa o valor fixo cobrado independentemente do consumo, enquanto o coeficiente do termo x indica o acréscimo no valor da conta para cada quilowatt-hora adicional consumido. Essa interpretação contribui para que o estudante compreenda o significado dos elementos da função no contexto analisado. E ainda, fica evidente que nesta situação $D(x) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$ e $CD(x) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 20\}$.

No estudo das funções reais, o plano cartesiano permite visualizar o comportamento da função, identificar regularidades, analisar crescimento ou decréscimo, bem como reconhecer intervalos de domínio, contra-domínio e imagem. Assim, a representação gráfica de uma função deste tipo, pode ser feito no Plano Cartesiano obtendo-se uma reta(semirreta, no caso) cujos pontos são da forma $(x, c(x))$ associados aos valores de x no domínio considerado.

Definição 4. O Gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}.$$

A compreensão dessas noções é particularmente relevante no contexto desta pesquisa, que propõe o uso de situações do cotidiano para a construção e interpretação de modelos funcionais. Ao relacionar valores de consumo e custos, por exemplo, cada par de valores observado pode ser interpretado como um par ordenado, cuja representação gráfica auxilia na análise das relações envolvidas. Dessa forma, o plano cartesiano atua como um mediador entre a situação concreta e a formalização matemática, favorecendo a aprendizagem significativa do conceito de função.

2.2.1 Estudo do domínio de uma função real

O domínio de uma função reúne, portanto, todos os valores admissíveis da variável independente, ou seja os valores de $x \in D(f)$ tal que a lei de formação esteja bem definida. A identificação correta desse conjunto é uma etapa essencial no estudo das funções, pois condiciona todas as demais análises, como a determinação da imagem, o comportamento gráfico, o estudo do sinal e a interpretação de situações modeladas matematicamente.

Definição 5. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Denomina-se domínio da função f , e indica-se por $D(f)$, o conjunto de todos os valores reais x para os quais a expressão $f(x)$ está bem definida e possui significado matemático.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ está bem definida}\}.$$

A determinação do domínio é uma etapa fundamental no estudo das funções, pois condiciona todas as demais análises, como o comportamento gráfico, o estudo do sinal, a monotonicidade e a identificação da imagem. Conforme Lima (2010), o domínio não deve ser entendido apenas como um conjunto arbitrário, mas como um conjunto coerente com o contexto matemático ou fenomenológico que origina a função.

Em muitos casos, o domínio pode ser identificado a partir da própria expressão algébrica da função, observando-se restrições impostas por operações como divisão por zero, radiciação de índice par ou logaritmos. Em outras situações, como nas funções definidas graficamente ou por partes, o domínio é determinado pela análise do intervalo no qual a função está representada.

Do ponto de vista geométrico, o domínio de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde à projeção do gráfico da função sobre o eixo das abscissas. Assim, todos os valores de x para os quais existe um ponto do gráfico associado definem o domínio da função. Porém, se a lei de associação provém de uma situação específica, o contexto determina um domínio menor ainda que outros valores pudessem pertencer ao domínio. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 10. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x + 1.$$

Do ponto de vista algébrico, trata-se de uma função polinomial do primeiro grau, cuja expressão está definida para todo número real. Assim, se a função for considerada apenas sob o aspecto matemático, seu domínio é

$$D = D(f) = \mathbb{R}.$$

Entretanto, suponha agora que essa função seja utilizada para modelar uma situação em que x representa a quantidade de horas trabalhadas por um funcionário em determinado dia, e $f(x)$ representa o valor recebido em reais. Nesse contexto, não faz sentido considerar valores negativos para a variável x .

Dessa forma, embora a expressão algébrica esteja definida para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio da função deve ser restringido aos valores que possuem significado no problema considerado, isto é,

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}.$$

Conforme mencionado, esse exemplo evidencia que o domínio de uma função não é determinado apenas por sua expressão algébrica, mas também pelo contexto em que ela é aplicada. Assim, uma mesma função pode admitir diferentes domínios, conforme a interpretação atribuída à variável independente.

Exemplo 11. Considere a análise do domínio da função definida por

$$f(x) = \sqrt{2x + 1}.$$

Note que para que a expressão esteja definida no Conjunto dos Números Reais, é necessário que o radicando seja maior ou igual a zero. Assim, impõe-se a condição por meio da desigualdade

$$2x + 1 \geq 0.$$

Resolvendo a desigualdade, obtém-se

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

Logo, o domínio da função é dado por

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2} \right\}.$$

Aqui, ao envolver raízes de índice par, a determinação do domínio exige a análise das condições que garantem a existência da expressão algébrica no conjunto dos números reais.

Exemplo 12. Considere a análise do domínio função definida por

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1}.$$

Neste caso, a expressão algébrica apresenta uma divisão cujo denominador depende da variável x . Como a divisão por zero não é definida, é necessário excluir do domínio os valores que anulam o denominador. Assim, impõe-se a restrição $2x + 1 \neq 0$.

Resolvendo a inequação associada, tem-se

$$x \neq -\frac{1}{2}.$$

Portanto, o domínio da função é $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Observa-se que a restrição ao domínio decorre da impossibilidade de divisão por zero, sendo essa uma das situações mais recorrentes na análise de funções onde a variável surge no denominador.

Associado ao estudo do domínio, torna-se igualmente importante compreender os valores que a função pode assumir. Essa análise conduz também ao conceito de imagem da função, que descreve o conjunto de valores efetivamente produzidos pela lei de formação quando a variável independente percorre o domínio considerado.

2.2.2 Imagem de uma função

No contexto do ensino de funções, a identificação da imagem é fundamental para a interpretação de tabelas, gráficos e situações-problema, pois permite compreender quais valores a função pode ou não assumir dentro do contradomínio. Essa análise torna-se especialmente relevante em funções com domínio restrito ou definidas por partes, bem como na interpretação gráfica do comportamento funcional.

Definição 6. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Denomina-se imagem da função f , e indica-se por $\text{Im}(f)$, o conjunto de todos os valores reais y tais que existe ao menos um $x \in D$ para o qual $y = f(x)$. Em termos de conjuntos, tem-se*

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Associado ao domínio, a noção de imagem de uma função constitui um elemento central na compreensão do seu comportamento e pode ser identificada de maneira consistente em todas as formas de representação estudadas. Conforme definido anteriormente, a imagem de uma função corresponde ao conjunto de todos os valores assumidos pela variável dependente $f(x)$, quando x percorre o domínio considerado. Essa definição, embora formal, adquire significado mais claro quando analisada a partir das diferentes representações da função.

Na representação algébrica, a imagem é determinada pela análise da expressão que define a função, levando-se em conta as restrições do domínio e o comportamento da lei de formação. Em alguns casos, como nas funções afins, a imagem pode ser todo o conjunto dos números reais;

em outros, como nas funções definidas por raízes ou por partes, a imagem é naturalmente restrita pelos valores admissíveis de x . Considerando a função $f(x) = 2x + 1$ apresentada no Exemplo 1 com domínio $D(f) = \mathbb{R}$. Como se trata de uma função polinomial do primeiro grau, definida para todos os números reais, seus valores podem assumir qualquer número real. Logo, a imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Na representação tabular (ver por exemplo a Tabela 2) a imagem corresponde ao conjunto dos valores obtidos na coluna associada a $f(x)$ sendo dada por $Im(f) = \{20, 60, 100, 140, 180\}$. Cada linha da tabela representa um par ordenado $(0, 20)$, $(50, 60)$, $(100, 100)$, $(150, 140)$, e $(200, 180)$ e o conjunto de todos os valores listados para $f(x)$ fornece uma descrição em pontos isolados da imagem da função no intervalo considerado.

Nos diagramas de correspondência, ver Figura(6), a imagem é identificada como o subconjunto do contradomínio efetivamente atingido pelas setas que partem do domínio. Nem todos os elementos do contradomínio precisam, necessariamente, pertencer à imagem, o que reforça a distinção conceitual entre contradomínio e imagem, já discutida nos exemplos anteriores. Assim temos que a imagem corresponde a um subconjunto do contradomínio dada por $CD(f) = \{p, q, r\}$ e $Im(f) = \{q, r\}$.

Por fim, na representação gráfica, a imagem de uma função pode ser visualizada como a projeção do gráfico sobre o eixo das coordenadas Figura 7. Assim, todos os valores de y para os quais existe ao menos um ponto do gráfico associado a algum valor x do domínio compõem o conjunto imagem da função. Essa interpretação gráfica permite uma leitura global do comportamento funcional, facilitando a identificação de intervalos de crescimento, decréscimo, bem como de valores máximos e mínimos, quando existentes.

Dessa forma, a análise articulada das diferentes representações evidencia que o conceito de imagem não é um elemento isolado da definição, mas um aspecto fundamental que se manifesta de maneira complementar nas abordagens algébrica, tabular, gráfica e diagramática, contribuindo para uma compreensão mais ampla e significativa do conceito de função. Além dos casos já mencionados, podemos obter o domínio e a imagem de uma função por meio da análise de sua representação gráfica.

Exemplo 13. *A representação gráfica abaixo fornece informações sobre uma função f . Ainda que não se conheça a lei de formação de f , é possível obter o domínio e a imagem da função.*



Figura 7 – Representação gráfica de f .

Fonte: *Elaboração própria.*

Analisando a Figura 7, nota-se que

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 5\}$$

e

$$Im(f) = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 8\}.$$

Ainda, entende-se que existe uma oscilação no crescimento em intervalos específicos do domínio, situações como essa são comuns quando o gráfico representa situações reais, como por exemplo em pesquisas de variação de preços e de análise de consumo.

2.2.3 O uso de tabelas para a construção de gráficos e análise de gráficos

Uma das formas mais utilizadas para introduzir o estudo de funções no Ensino Básico é por meio das representações tabular e gráfica. Nesse processo, a relação funcional é inicialmente descrita pela associação entre valores da variável independente, representada geralmente pela variável x e da por e seus correspondentes valores da variável dependente, representada por $y = f(x)$, organizados em forma de tabela. Cada linha da tabela corresponde a um par ordenado $(x, f(x))$, que expressa a relação entre as grandezas envolvidas.

A partir desses pares ordenados, os pontos correspondentes podem ser representados no plano cartesiano, permitindo a construção do gráfico da função. Essa transição da tabela para o gráfico favorece a visualização do comportamento global da função e contribui para a compreensão das relações de variação entre as variáveis.

Em práticas escolares, é comum a escolha de valores inteiros próximos de zero para facilitar os cálculos e a construção das tabelas. No entanto, quando esse procedimento é realizado de forma mecânica, pode limitar a compreensão conceitual do estudante, restringindo-se à simples marcação de pontos. Por esse motivo, o trabalho com gráficos deve ir além da construção

técnica, buscando interpretar o significado das representações e o comportamento da função em diferentes contextos.

De modo geral, o gráfico de uma função é constituído pelo conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$, em que x pertence ao domínio da função. Cada ponto do gráfico representa, portanto, a associação entre um valor admissível da variável independente e o correspondente valor da função.

Segundo Dante (2008), o gráfico de uma função pode ser compreendido como a tradução geométrica da relação, pois expressa visualmente como uma grandeza varia em função de outra. Essa representação favorece a interpretação de fenômenos de crescimento, decréscimo, constância e variação, sendo especialmente relevante no ensino de funções no Ensino Médio.

De forma complementar, Bianchini e Paccola (1996) destacam que a análise gráfica permite identificar características essenciais das funções, como o comportamento, os intervalos de crescimento e decréscimo, bem como a existência de raízes. Para os autores, o gráfico estabelece um elo entre a linguagem algébrica e a compreensão intuitiva do comportamento funcional.

Do ponto de vista formal, Stewart (2017) define o gráfico de uma função f como o conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f)\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a relação funcional estabelecida pela lei de formação. Essa definição reforça que o gráfico não constitui apenas um recurso ilustrativo, mas uma representação matemática rigorosa da função.

Além disso, Lima (2010) ressalta que o gráfico possibilita uma leitura global do comportamento da função em seu domínio, permitindo compreender como variações em x influenciam os valores de $f(x)$. Essa abordagem contribui para o desenvolvimento do raciocínio funcional e para a articulação entre diferentes registros de representação matemática.

A seguir, apresenta-se um exemplo que ilustra a construção da tabela de valores e do gráfico de uma função polinomial do primeiro grau.

Exemplo 14. *Faça a representação gráfica da função dado por $f(x) = 2x + 1$, considerando os valores representados na tabela.*

Tabela 3 – Valores da função $f(x) = 2x + 1$

x	$f(x)$
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Fonte: Elaboração própria.

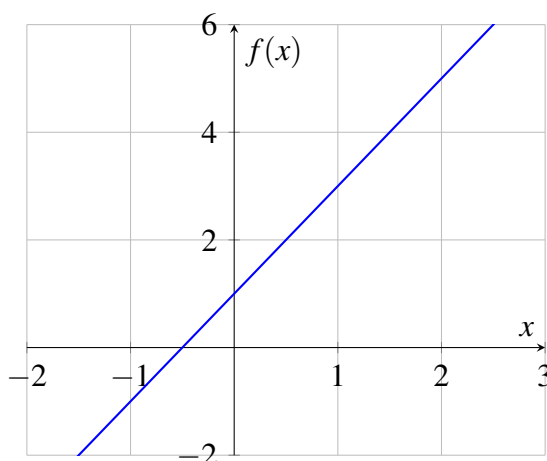


Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Fonte: Elaboração própria.

A construção de tabelas e gráficos, como ilustrado no exemplo da função $f(x) = 2x + 1$, desempenha papel fundamental na compreensão das relações entre variáveis e no reconhecimento de padrões de variação presentes em diferentes situações do cotidiano. Essas representações permitem ao estudante transitar entre diferentes registros semióticos, fortalecendo a compreensão conceitual do conceito de função.

Além dos diagramas de correspondência, a análise gráfica constitui uma forma privilegiada de representação das funções, pois permite verificar, de maneira visual, se uma determinada relação satisfaz a definição de função. Conforme essa definição, a cada valor da variável independente deve corresponder um único valor da variável dependente. Para realizar essa verificação graficamente, utiliza-se o *teste da reta vertical*, que consiste em observar se alguma reta vertical intercepta o gráfico em mais de um ponto. Caso isso ocorra, a relação não representa uma função. Assim, se toda reta vertical interceptar o gráfico em, no máximo, um ponto, a relação satisfaz a definição de função real de variável real.

A seguir, são apresentados dois gráficos ilustrativos que permitem visualizar como o teste da reta vertical é aplicado.

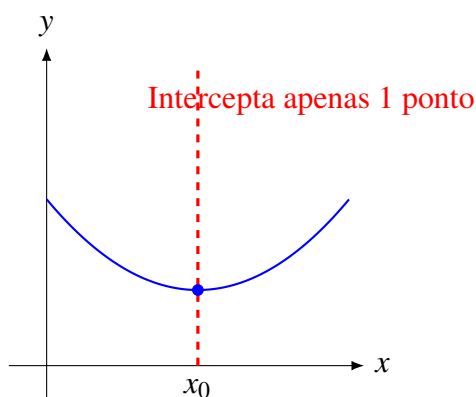


Figura 9 – Exemplo de relação que representa uma função (teste da reta vertical).

Fonte: Elaboração própria.

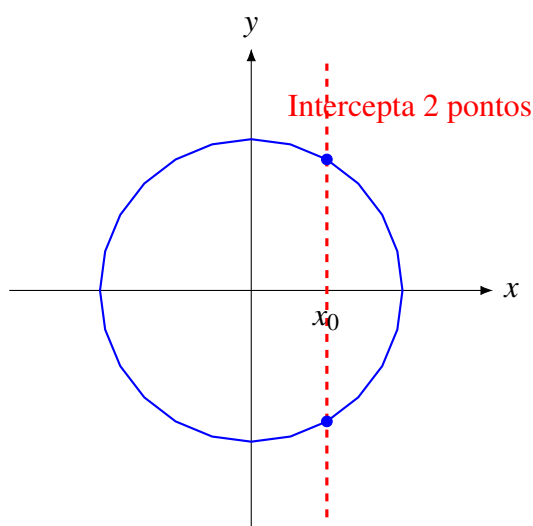


Figura 10 – Exemplo de relação que não representa uma função.

Fonte: Elaboração própria.

No gráfico da Figura 9, uma reta apenas foi traçada, mas a observação deve ser sobre todas as retas verticais, neste caso a representação gráfica é notavelmente de uma função. O que não acontece na Figura 10, a reta vertical tracejada é interceptada por dois pontos do gráfico, assim a unicidade da imagem de cada valor do domínio não é satisfeita. Logo, a representação não é de uma função.

Além de permitir a verificação da condição de unicidade exigida pela definição de função, a análise gráfica possibilita identificar diversas características, entre elas destacam-se os pontos de máximo e de mínimo, que correspondem, respectivamente, aos maiores e menores valores assumidos pela função em determinados intervalos do domínio.

Cabe destacar, entretanto, que tais propriedades não se manifestam no estudo das Funções Afins, uma vez que o gráfico desse tipo de função é uma reta, apresentando comportamento estritamente crescente ou decrescente, atingindo valores extremos apenas nas extremidades do

domínio. Ainda assim, a análise gráfica não se restringe a essa família de funções. Pelo contrário, ela constitui uma ferramenta ampla no estudo das funções em geral, sendo essencial para a compreensão de comportamentos mais complexos que serão encontrados em outras classes de funções.

Em situações práticas, a identificação de máximos e mínimos por meio de gráficos revela-se especialmente relevante. Por exemplo, ao analisar o custo total de produção em função da quantidade de itens fabricados, o gráfico pode indicar um ponto de custo mínimo, auxiliando na escolha da quantidade mais econômica a ser produzida. De forma análoga, em estudos relacionados ao consumo de recursos, como água ou energia elétrica, a análise gráfica pode evidenciar intervalos de consumo mais eficientes ou pontos a partir dos quais os custos se elevam de maneira mais acentuada.

Conforme destacam Bianchini e Paccola (1996) e Dante (2008), a interpretação gráfica permite ao estudante compreender a função como um modelo matemático capaz de descrever e analisar fenômenos reais, indo além da simples manipulação algébrica. Assim, mesmo quando aplicada a funções que não apresentam máximos ou mínimos, como as funções afins, a análise gráfica desempenha papel central na construção do raciocínio e na leitura crítica de situações modeladas matematicamente, como mostrado no exemplo

Exemplo 15. Considere a situação de uma empresa que produz camisetas para venda em um evento. O lucro obtido, em reais, em função da quantidade x de camisetas produzidas é dado pela função

$$L(x) = -2x^2 + 40x - 100,$$

em que x representa o número de camisetas produzidas.

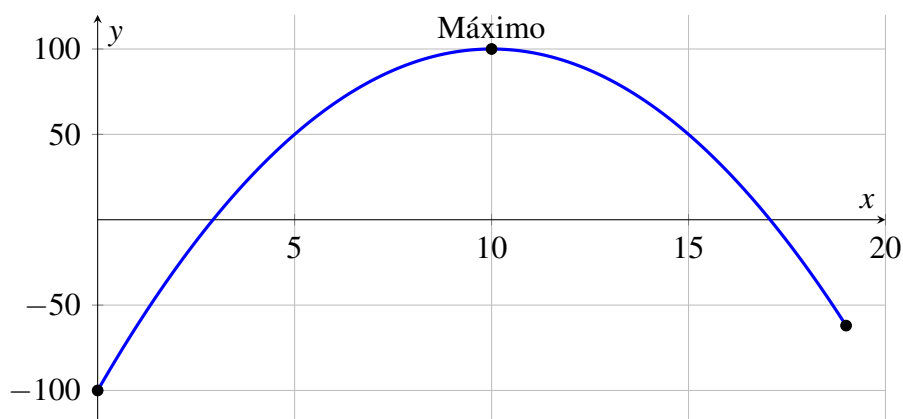


Figura 11 – Gráfico da função com máximo em $x = 10$ e comportamento decrescente.

Fonte: Elaboração própria.

Ao representar graficamente essa função no plano cartesiano, observa-se que seu gráfico possui a forma de uma parábola com concavidade voltada para baixo, forma atribuída ao gráficos das funções de segundo grau, isso indica que o lucro não cresce indefinidamente: existe uma quantidade de produção para a qual o lucro é máximo.

Observa-se, também que, à medida que a produção aumenta, o resultado cresce até atingir um valor máximo no ponto $x = 10$, que representa a quantidade de camisetas associada ao maior retorno possível. A partir desse ponto, o aumento da produção passa a provocar a redução do resultado, caracterizando um comportamento decrescente podendo gerar novamente um prejuízo à empresa.

Embora esse tipo de comportamento não ocorra no estudo das funções afins, cujo gráfico é sempre uma reta e não apresenta máximos ou mínimos, a análise gráfica das funções, de modo geral, permite identificar pontos de máximo e mínimo, fundamentais em diversos contextos de aplicação.

2.3 Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

No estudo das funções de uma forma geral, e em particular de funções reais com uma variável real, além da análise do domínio, da imagem e do comportamento gráfico, é fundamental compreender como os elementos do domínio se relacionam com os elementos do contradomínio. Nesse contexto, as noções de injetividade, sobrejetividade e bijetividade permitem classificar funções a partir do modo como essa correspondência ocorre. São propriedades importantes, que garantem por exemplo a unicidade em soluções de problemas associados às funções. Essas classificações podem ser analisadas tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico, sendo a leitura gráfica um recurso importante para favorecer a compreensão conceitual, especialmente no ensino médio.

Definição 7. *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Diz-se que f é injetora se, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$,*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo 16. *Considere a função definida por*

$$f(x) = x.$$

A função f deste exemplo é denominada de Função Identidade, pois leva um elemento nele mesmo, claro que neste caso o domínio da função deve ser um subconjunto do contradomínio. Além disso, note que $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$, portanto se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$, ou seja, f é injetiva.

Exemplo 17. *A injetividade pode ser compreendida melhor pelos alunos utilizando-se o diagrama de correspondência, como por exemplo na Figura 12, no qual se observa que elementos distintos do domínio estão associados a imagens distintas no contradomínio. Consequentemente, este diagrama representa uma função injetora. Ainda, observar exemplos de quando isso não acontece, como na Figura 6, contribui para a compreensão do que diferencia funções injetivas e não injetivas. Essa visualização em exemplos com conjuntos finitos, é uma importante ferramenta para compreender a relação de injetividade em funções com domínio e contradomínio infinitos.*

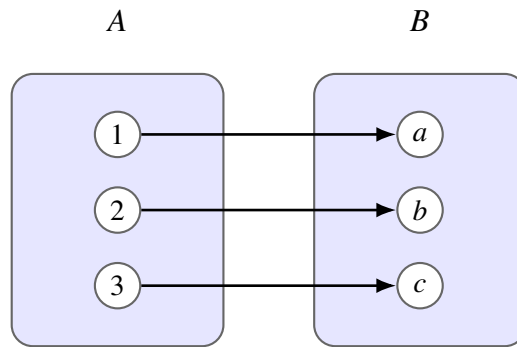


Figura 12 – Exemplo de função injetora.

Fonte: Elaboração própria.

Definição 8. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Diz-se que f é sobrejetora se, para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que

$$f(x) = y.$$

Isso significa que todo elemento do contradomínio é imagem de algum elemento do domínio. Ou seja, uma função sobrejetora é aquela cujo gráfico assume todos os valores de y pertencentes ao contradomínio considerado.

Exemplo 18. As funções cujas leis de associação são polinômios de primeiro grau, ou seja, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ são constantes, são funções sobrejetivas, pois para todo valor $y \in \mathbb{R}$ existe um x tal que $f(x) = y = ax + b$, para tanto, dado y basta tomarmos $x = \frac{y-b}{a}$.

Exemplo 19. Mais uma vez o diagrama de correspondência mostra-se importante para o entendimento do conceito de sobrejetividade. Neste caso, temos uma função sobrejetiva por os dois elementos pertencentes ao conjunto B são correspondentes de elementos de A.

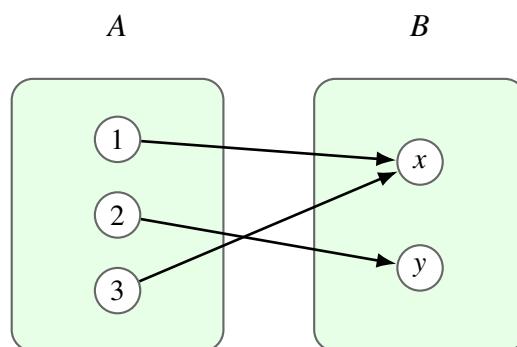


Figura 13 – Exemplo de função sobrejetora.

Fonte: Elaboração própria.

Os diagramas das Figuras 12 e 13, mostram que uma função pode ser injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, ou ser sobrejetora sem ser injetora. Ainda, é uma fato que a

função pode ser injetora sem ser sobrejetora, ou mesmo não trazer consigo nenhuma destas propriedades. Conclui-se que de uma forma geral, injetividade e sobrejetividade são propriedades independentes. Quando as duas acontecem simultaneamente, diz-se que f é uma bijeção (veja definição a seguir). Funções deste tipo, são de extrema importância para estudos matemáticos, pois garantem a existência de uma função inversa.

Definição 9. *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Diz-se que f é bijetora se for simultaneamente injetora e sobrejetora.*

Exemplo 20. *Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Essa função é injetora, pois valores distintos de x produzem imagens distintas, como já vimos e além disso, é sobrejetora, pois todo número real é imagem de algum elemento do domínio, no caso basta tomarmos $x = y$. Portanto, trata-se de uma função bijetora.*

Exemplo 21. *O diagrama neste exemplo, satisfaz as propriedades de injetividade e sobrejetividade, sendo então a representação de uma função bijetora.*

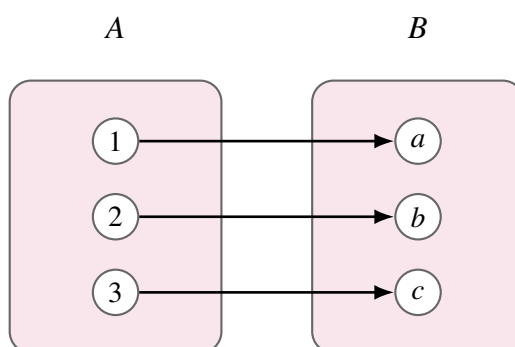


Figura 14 – Exemplo de função bijetora.

Fonte: Elaboração própria.

Ressalta-se que a classificação de uma função como injetora, sobrejetora ou bijetora depende da escolha do domínio e do contradomínio. Uma mesma expressão algébrica pode ou não apresentar essas propriedades, conforme os conjuntos considerados.

As propriedades de injetividade, sobrejetividade e bijetividade permitem analisar, de maneira mais aprofundada, a estrutura da correspondência estabelecida por uma função entre dois conjuntos. A compreensão dessas propriedades favorece a leitura algébrica e geométrica dos gráficos, além de contribuir para a análise crítica dos modelos empregados na representação de fenômenos reais. Nesse sentido, tais conceitos ampliam o entendimento do comportamento das funções, sem a necessidade, neste momento, de recorrer a construções mais avançadas, como funções inversas ou composições.

Os diagramas acima permitem visualizar, possibilitando o entendimento intuitivo, as diferenças entre funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, reforçando a compreensão das definições formais e estabelecendo uma ponte entre a representação simbólica e a leitura geométrica das funções.

Compreendidas as propriedades gerais das funções reais, em especial aquelas relacionadas ao domínio, à imagem e às classificações quanto à paridade, injetividade, sobrejetividade e bijetividade, retoma-se o estudo das Funções Polinomiais do Primeiro Grau. A partir desse ponto, a análise dessas funções passa a considerar de forma integrada suas características algébricas e geométricas, consolidando o entendimento das funções afins como modelos fundamentais para a interpretação de relações de dependência presentes em diferentes contextos matemáticos e aplicados.

Após a análise das propriedades gerais das funções reais, torna-se possível direcionar o estudo para classes específicas de funções que desempenham papel central no ensino da Matemática. Entre os tipos de funções polinomiais de primeiro grau, vamos considerar as funções lineares e afins, cuja estrutura algébrica simples e interpretação geométrica direta permitem modelar diversas situações presentes no cotidiano, constituindo o foco principal desta investigação.

2.3.1 Funções Monótonas

Antes de definir Funções Lineares e Afins, que são os principais objetos explorados neste trabalho, segue a definição de funções monótonas, em particular destacamos de funções crescentes e decrescentes. O caso da Função Constante será tratado como Função Afim, porém sem perder generalidade nosso interesse maior está nas funções que apresentam taxa de variação positiva ou negativa.

Definição 10. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f apresenta comportamento monótono, ou simplesmente é monótona, quando há uma relação de ordem entre os valores de $f(x)$ conforme a variação de x em D . Mais precisamente*

(i) *f é crescente (ou estritamente crescente) em D se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, tem-se*

$$f(x_1) < f(x_2).$$

(ii) *f é não-decrescente em D se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, vale*

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

(iii) *f é decrescente (ou estritamente decrescente) em D se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, verifica-se*

$$f(x_1) > f(x_2).$$

(iv) *f é não-crescente em D se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, tem-se*

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Teorema 1. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona injetiva, então f é crescente ou decrescente.*

Demonstração. De fato, suponhamos que f seja monótona injetiva, assim dados $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$ pela injetividade, conseqüentemente $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$, portanto crescente ou decrescente, respectivamente. \square

2.4 Função Afim

Após o estudo das funções reais em seus aspectos gerais, direciona-se agora a análise aos casos particulares de funções que desempenham papel central no ensino básico e na modelagem de situações do cotidiano: Funções Afins e seus casos particulares.

A definição de Função Afim, abrange as funções Polinomiais de Primeiro Grau e também a Função Constante. Dentre as Funções Polinomiais de Primeiro Grau destacamos as Funções Lineares, que se caracteriza pelas relações de proporcionalidade cujos resultados posteriormente são estendidos à toda Função Afim, abrangendo uma gama maior de funções. Isto justifica a ordem de apresentação aqui ser inicialmente de Função Linear, um caso particular de funções que se caracterizam com afins e passam pela origem.

Essas funções caracterizam-se por relações de dependência em que a variação entre as grandezas ocorre de maneira constante, o que permite descrevê-las por meio de expressões algébricas simples e interpretar seu comportamento de forma geométrica, por meio de retas no plano cartesiano. Nesse contexto, a representação algébrica assume papel fundamental, pois sintetiza a relações que que possibilitam generalizações, previsões e análises precisas.

Segundo Lima (2010), a força da linguagem algébrica reside na capacidade de condensar, em poucas operações, relações matemáticas que descrevem padrões de variação. De modo complementar, Stewart (2017) e Thomas, Weir e Hass (2018) destacam que representar uma função por uma fórmula consiste em explicitar a regra que associa a cada elemento do domínio um único valor da imagem. Assim, se f é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , sua representação algébrica pode ser expressa genericamente por $f(x)$, sendo esta uma expressão algébrica envolvendo a variável x .

Nesta perspectiva, a fórmula ou lei de associação, ainda chamada lei de formação da função, permite realizar operações internas ao registro simbólico, como simplificações, substituições e transformações estruturais. Conforme Duval (2003), tais procedimentos caracterizam o processo de tratamento, isto é, a manipulação de informações dentro do mesmo tipo de representação semiótica. O domínio dessa representação é fundamental para que o estudante compreenda como os modelos funcionais são construídos e utilizados para descrever fenômenos reais.

Autores como Shenk (1991) e Bianchini e Paccola (1996) ressaltam que a expressão algébrica auxilia no desenvolvimento da capacidade de abstração, generalização e interpretação simbólica. Esses elementos são fundamentais para o estudo de funções, pois permitem deduzir propriedades como crescimento, zeros, variação e comportamento da imagem em relação ao

domínio. Assim, retomando o exemplo anteriormente apresentado, a expressão algébrica permite calcular a imagem de valores específicos do domínio, como já ilustrado na tabela e no gráfico correspondentes. No entanto, nem todas as funções são inicialmente apresentadas por uma fórmula explícita, o que torna fundamental a análise gráfica e a definição cuidadosa do domínio. A fórmula matemática permite calcular rapidamente a imagem de cada valor do domínio, como já apresentado na Tabela 1 e seu respectivo gráfico. Contudo temos que algumas função apresentam suas próprias características merecendo assim uma definição própria.

Definição 11. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Afim quando admite a forma*

$$f(x) = ax + b,$$

em que a e b são números reais. Quando a ou b são iguais a zero, alguns casos particulares importantes das Funções Afins surgem: Função Constante e Função Linear. O coeficiente a representa a taxa de variação da função, como no caso das funções lineares, também denominado coeficiente angular, enquanto b é o coeficiente linear e corresponde ao valor de $f(x)$ quando $x = 0$.

Esta definição será retomada, por conveniência trataremos primeiro do caso onde f é uma Função Linear.

2.4.1 Função Linear

A Função Linear expressa a relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, evidenciando como as variações da variável independente x produzem variações proporcionais na variável dependente $f(x)$. Nessa relação, a razão entre as variações permanece constante, característica fundamental desse tipo de função, o que permite sua formalização matemática conforme a definição a seguir.

Definição 12. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita linear se, para todos $c, x \in \mathbb{R}$,*

$$f(cx) = cf(x).$$

Essa condição formaliza matematicamente a proporcionalidade direta, onde sempre que a variável independente x é multiplicada por uma constante c , o valor da função também é multiplicado por esse mesmo fator. Definindo-se $a = f(1)$, obtém-se a lei de formação geral

$$f(x) = ax,$$

em que a é a constante de proporcionalidade ou coeficiente de variação. O gráfico de uma Função Linear é uma reta que passa pela origem, crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.

O fato de $f(x) = ax$ passar pela origem, ou seja, $(0,0)$ é um ponto pertencente ao seu gráfico, é uma característica extremamente importante deste tipo de função. Sendo assim, deve ser um objetivo no ensino de Funções Lineares, que os estudantes associem retas que passam pela origem com a lei de formação desse tipo de função.

Exemplo 22. Considere que, em uma oficina de costura, o pagamento semanal de uma costureira é proporcional à quantidade de peças produzidas. Sabe-se que

- ao produzir 10 peças, ela recebe R\$ 150,00;
- ao produzir 20 peças, ela recebe R\$ 300,00.

Como o pagamento é diretamente proporcional ao número de peças produzidas, podemos modelar a situação descrita, por meio de uma função linear da forma $f(x) = ax$, onde x representa a quantidade de peças.

A partir da informação $f(10) = 150$, temos

$$a = \frac{150}{10} = 15.$$

Portanto, a lei de formação é $f(x) = 15x$.

Isso indica que a costureira recebe R\$ 15,00 por peça produzida. Veja a tabela que representa o valor pago na produção 5, 10, 15 ou 20 na tabela a seguir.

Tabela 4 – Tabela de valores da função $f(x) = 15x$.

Peças (x)	Pagamento ($f(x)$)
5	75
10	150
15	225
20	300

Fonte: Elaboração própria.

O gráfico da função obtida na situação relatada, foi construído considerando a função obtida em um domínio contínuo ou seja o gráfico é da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$.

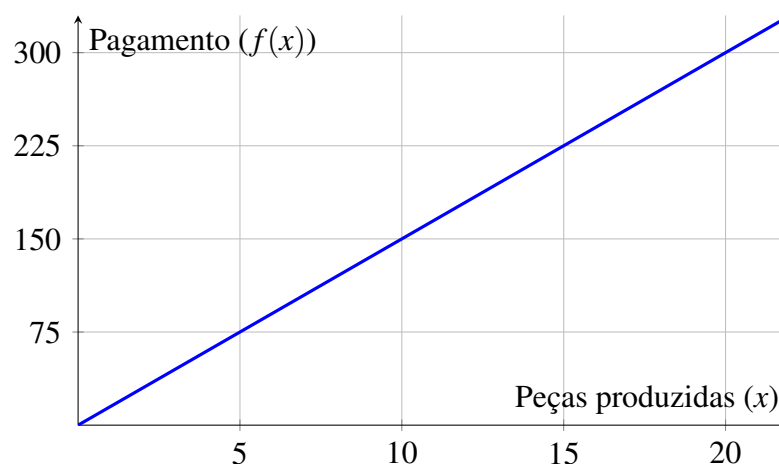


Figura 15 – Gráfico da função linear $f(x) = 15x$, representada como reta contínua no primeiro quadrante.

Fonte: Elaboração própria.

A função obtida, $f(x) = 15x$, expressa uma relação de proporcionalidade direta, característica fundamental das funções lineares. O coeficiente 15 representa o valor pago por peça produzida, e o gráfico, uma reta crescente que passa pela origem, evidencia essa proporcionalidade. A tabela reforça esse comportamento, permitindo observar que aumentos regulares na variável x geram aumentos proporcionais em $f(x)$.

Considerando que a principal característica da função linear é expressar a proporcionalidade direta entre duas grandezas, Lima (2010) apresenta um resultado fundamental para a formalização desse conceito, conhecido como Teorema Fundamental da Proporcionalidade, o qual é essencial para determinar se uma função é ou não linear. Aqui a demonstração será feita considerando f monótona crescente, mas de forma análoga prova-se se o mesmo resultado se f for decrescente. Assim o resultado pode ser enunciado de forma mais geral, sob a hipótese de f ser monótona injetiva.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. $f(nx) = n f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
2. Definindo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
3. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Será provado aqui que as seguintes implicações lógicas são verdadeiras

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1),$$

e conseqüentemente ficará provada a equivalência de (1), (2) e (3).

1. Prova de (1) \Rightarrow (2) Hipóteses: f é crescente; $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$; e $a = f(1)$.

(i) Note que $a > 0$. De fato, como

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0,$$

e sendo $1 > 0$, segue da monotonicidade

$$f(1) > f(0) \quad \Rightarrow \quad a > 0.$$

(ii) Agora será provado que $f(rx) = rf(x)$ para todo racional $r \in \mathbb{Q}$.

Seja $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$. Como $m = nr$, então

$$f(mx) = f(nr(x)) = nf(rx).$$

por outro lado, usando a hipótese (1)

$$f(mx) = mf(x)$$

assim

$$nf(rx) = mf(x) \quad \Rightarrow \quad f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

(iii) Finalmente tem-se que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, suponha por absurdo que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq ax$. Então $\frac{f(x)}{a} \neq x$. Como f é crescente e $a > 0$, existe $r \in \mathbb{Q}$ com

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

multiplicando por a

$$f(x) < ar$$

como já provado, $f(r) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Assim

$$f(r) < f(x),$$

o que contradiz o fato de $r < x$ e f ser crescente. Assim, $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Prova de (2) \Rightarrow (3) Se $f(x) = ax$, então

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y),$$

o que demonstra a aditividade.

3. Prova de (3) \Rightarrow (1). Assuma que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1$, a igualdade é trivial. Suponha que seja válido que, para algum $n > 1$

$$f(nx) = nf(x).$$

Então,

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Concluí-se, pelo Princípio da Indução Finita que

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 0$, então

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) - f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Daí, para $n \in \mathbb{Z}$ negativo, basta mostrar que

$$f(-nx) = f((-1)(nx)) = -f(nx), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas,

$$0 = f(0) = f((x) + (-x)) = f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Logo

$$f(-nx) = -f(nx).$$

Assim, o resultado obtido para $n \in \mathbb{N}$ implica no desejado para n negativo. Donde prova-se que (3) implica (1). \square

O Teorema formaliza matematicamente o Princípio da Proporcionalidade Direta, acréscimos iguais em x produzem acréscimos proporcionais em $f(x)$. Ele justifica a forma geral $f(x) = ax$ e fundamenta a construção das Funções Lineares no ensino básico.

2.4.2 Função Linear Crescente ou Linear Decrescente

O gráfico de uma Função Linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, como neste caso, temos $a \neq 0$ não é difícil entender que será crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$. De fato, note que se $a > 0$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, dados $x_1 < x_2$, onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ então $(x_2 - x_1) > 0$, de onde pode-se concluir que

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) > 0.$$

Logo, $f(x_1) < f(x_2)$ e assim, f é crescente. De forma análoga, considerando-se uma função linear com coeficiente $a < 0$, prova-se que f é decrescente.

Em resumo, tem-se

- se $a > 0$, a Função Linear é **crescente**;

- se $a < 0$, a Função Linear é **decrecente**.

Exemplo 23. A função real de uma variável real e linear, dada por $f(x) = 1,5x$ é uma reta que passa pela origem e é crescente. A representação gráfica a seguir demonstra como se dá o crescimento desta função.

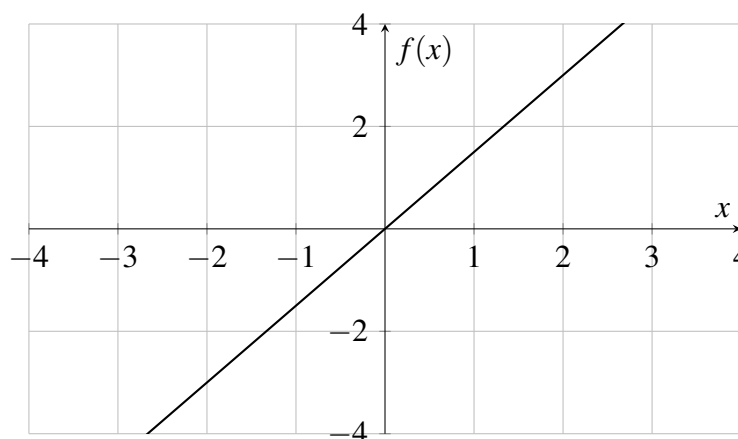


Figura 16 – Gráfico de uma função linear $f(x) = 1,5x$.

Fonte: Elaboração própria.

Conforme Lima (2010) e Caminha Muniz Neto (2020), a análise geométrica do gráfico favorece a compreensão intuitiva das ideias de crescimento e de proporcionalidade, fortalecendo o raciocínio funcional e a leitura de variações. Ao tratar-se de crescimento e decréscimo é comum em livros didáticos essa característica estar diretamente associada ao sinal do coeficiente angular da função no entanto esse conceito não é restrito às funções polinomiais de primeiro grau. De uma forma geral uma função crescente ou decrescente pode ser descritas e uma forma mais generalizada como já foi apresentado.

Diante das análises sobre crescimento e decréscimo das Funções Lineares e de sua lei de associação $f(x) = ax$, é oportuno destacar que o coeficiente a é comumente denominado de coeficiente angular, por alguns autores, mas hoje entende-se, que denominá-lo como taxa de crescimento, faz sentido para uma gama maior de funções lineares, quando estas são provenientes de alguma modelagem. Isto se confirma, considerando o Exemplo anterior onde $a = 1,5$ e a representa o valor de cada calça produzida por uma costureira.

Enquanto a função linear descreve relações de proporcionalidade direta, nas quais o gráfico passa necessariamente pela origem, muitas situações reais envolvem um valor inicial diferente de zero. Essas situações motivam a introdução da função afim, que amplia o conceito de linearidade ao incorporar um termo constante.

2.4.3 Função Afim

O estudo da função afim descreve uma ampla variedade de situações em que ocorre uma variação constante acrescida de um valor fixo. Ao combinar a proporcionalidade linear com a presença de um termo independente, a função afim possibilita a análise de relações de crescimento, a previsão de comportamentos e a interpretação de fenômenos presentes em diferentes contextos matemáticos e aplicados.

A definição de Função Afim, já fora supracitada, porém traremos ela novamente aqui, no intuito de se fazer uma análise mais completa de sua lei de associação. Assim, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita afim quando admite a forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes reais em relação à variável x . O caso onde $a \neq 0$ e $b = 0$, fornece as Funções Lineares. Agora se $a = 0$, ou seja, a taxa de variação é nula, então f é denominada de Função Constante.

Definição 13. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é constante se existe um número real c tal que

$$f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nesse tipo de função, a variável independente não exerce influência sobre o valor da função, pois qualquer variação em x não provoca alteração em $f(x)$. Ainda, as Funções Constantes são monótonas e neste caso, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, então

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Podendo ser classificadas, quanto à monotonicidade, como não-crescentes ou não-decrescentes também.

Podemos considerar as Funções Constantes como uma função Polinomial de grau zero, assim as funções afins são funções polinomiais de grau zero ou de grau um. A relação com as Funções Polinomiais do Primeiro Grau com a Função Constante é que ambas possuem como gráfico uma reta. Em particular, do ponto de vista geométrico, o gráfico de uma função constante é uma reta horizontal no plano cartesiano, paralela ao eixo das abscissas, interceptando o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$. Essa representação evidencia que a imagem da função é composta por um único valor, enquanto o domínio pode abranger um conjunto amplo de números reais.

Exemplo 24. Considere a função definida por

$$f(x) = 4.$$

Nesse caso, para qualquer valor real de x , o valor da função é sempre igual a 4. Assim, o domínio da função é \mathbb{R} e sua imagem é o conjunto $\{4\}$.

Tabela 5 – Tabela de valores da função constante $f(x) = 4$

x	$f(x)$
-2	4
0	4
2	4
4	4

Fonte: Elaboração própria.

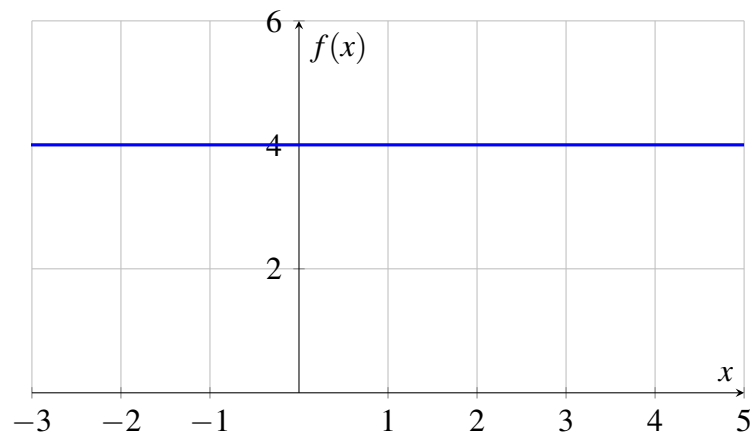


Figura 17 – Gráfico da função constante $f(x) = 4$.

Fonte: elaboração própria.

Observe agora um exemplo associado ao crescimento de uma planta, onde a função que a modela é Afim, com a e b não-nulos.

Exemplo 25. (*Crescimento de uma Planta*). Durante um experimento, a altura inicial de uma muda, no início das medições, era de 4 cm. Observou-se crescimento médio de 1,2 cm por dia. Note que: o modelo matemático que relaciona a altura da muda em relação ao dia em que foi plantada é dado por

$$h(t) = 4 + 1,2t$$

onde t é o tempo em dias e $h(t)$ a altura em centímetros e varia em relação à variável t . Assim como a tabela que representa seu crescimento em 0, 5, 10 e 20 dias após seu plantio, juntamente com sua representação gráfica são

Tabela 6 – Valores da função $h(t) = 4 + 1,2t$

t (dias)	$h(t)$ (cm)
0	4,0
5	10,0
10	16,0
20	28,0

Fonte: *Elaboração própria.*

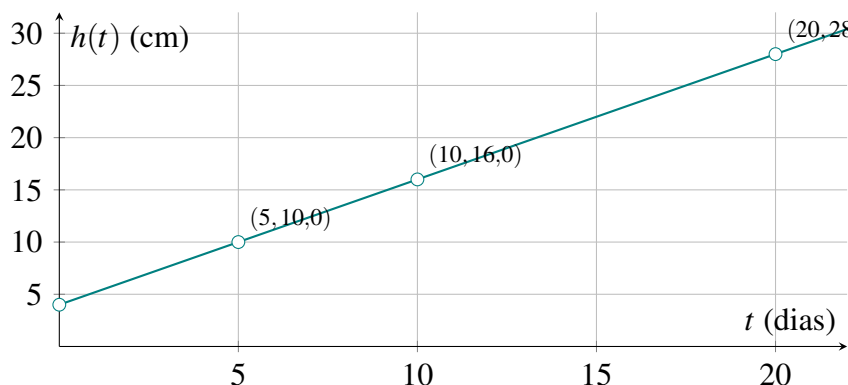


Figura 18 – Gráfico da função de crescimento $h(t) = 4 + 1,2t$.

Fonte: *Elaboração própria.*

Na situação-problema apresentada note que

- 1,2 representa a taxa de crescimento da planta;
- 4 corresponde ao coeficiente linear, isto é, ao valor da função $f(x)$ quando $x = 0$, ou no momento inicial de registros.

O gráfico de uma Função Afim é uma reta no plano cartesiano, que passa pela origem apenas no caso particular em que $b = 0$, situação que corresponde à Função Linear. Essa forma algébrica expressa uma correspondência em que a variação de $f(x)$ ocorre de maneira uniforme em relação à variação de x , característica que define o comportamento linear. Para Dante (2008), a Função Afim é um dos modelos matemáticos mais acessíveis para introduzir a ideia de dependência entre as variáveis, por aparecer frequentemente em situações do cotidiano, como custos fixos, tarifas e movimentos de velocidade constante. Já Bianchini e Paccola (1996) destaca que compreender a função afim é essencial para o estudo das demais funções, pois ela representa o primeiro contato do estudante com uma taxa de crescimento uniforme e com a interpretação geométrica do gráfico como uma reta.

Assim, além de sua definição algébrica, podemos caracterizar a Função Afim a partir de uma propriedade fundamental que relaciona o comportamento de seus elementos consecutivos. Essa propriedade é apresentada no teorema a seguir, acompanhado de sua respectiva demonstração.

Teorema 3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é uma Função Afim se, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, existir uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(h),$$

isto é, a diferença $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h e não do ponto x , então existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $a > 0$ se f é estritamente crescente e $a < 0$ se f é estritamente decrescente.

Demonstração. A demonstração do Teorema está organizada em etapas a fim de garantir maior clareza na apresentação. (i) Primeiramente, segue a prova da monotonicidade de φ . Para o caso onde f é constante a função não depende da variável e assim o resultado para $a = 0$ é imediato. Assim, a prova será concentrada no caso onde f é monótona crescente, e a demonstração para o caso decrescente segue por analogia.

Considerando então f uma função crescente, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Tomando-se $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tais que $h_1 < h_2$, segue que

$$h_1 < h_2 \Rightarrow h_1 + x < h_2 + x \Rightarrow f(h_1 + x) < f(h_2 + x)$$

logo,

$$f(h_1 + x) - f(h_2 + x) < 0. \tag{1}$$

Agora, consideremos h_1 e h_2 aplicados em φ , isto é

$$\varphi(h_1) = f(x+h_1) - f(x), \quad \varphi(h_2) = f(x+h_2) - f(x)$$

pela subtração das expressões acima, obtemos

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_2) = f(x+h_1) - f(x+h_2)$$

pela desigualdade (1), temos

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_2) < 0 \Rightarrow \varphi(h_1) < \varphi(h_2).$$

assim, podemos afirmar que φ é crescente.

(ii) Considerando $h = 0$, e que $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$, obtém-se

$$\varphi(0) = f(x+0) - f(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

o que indica que, $\varphi(0)$ não depende de x .

Agora, para algum $k \in \mathbb{R}$, temos

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x).$$

somando e subtraindo $f(x+k)$, obtemos

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)$$

associando as duas ultimas parcelas

$$\varphi(h+k) = (f(x+h+k) - f(x+k)) + (f(x+k) - f(x)),$$

logo,

$$\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Donde φ satisfaz a hipótese iii) do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

(iii) Pode-se concluir que tomando-se $a = \varphi(1)$, está provado que $\varphi(x) = ax$. Ou ainda, que

$$\varphi(h) = ah$$

substituindo em $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$, temos

$$f(x+h) - f(x) = ah$$

tomando $x = 0$, resulta em

$$f(0+h) - f(0) = ah \Rightarrow f(h) - f(0) = ah$$

assim, $f(h) = ah + f(0)$. Ou ainda,

$$f(x) = ax + f(0).$$

como $f(0)$ é uma constante real, podemos escrever

$$f(x) = ax + b,$$

onde $b = f(0)$. Assim, f é uma Função Afim, cuja expressão depende linearmente de h . \square

A proposição mostra que a Função Afim é unicamente determinada pela propriedade de que a diferença $f(x+h) - f(x)$ depende exclusivamente de h . Essa característica reflete a ideia de que sua variação é uniforme, e seu gráfico é uma reta no plano cartesiano. Assim, a função afim representa matematicamente todas as situações em que a taxa de variação é constante.

2.4.4 Gráfico da Função Afim: raízes ou zeros da função afim e análise do gráfico

Diante de tudo o que já foi exposto, temos que o gráfico de qualquer Função Afim é uma reta e que $f = ax + b$, onde a e b são números reais. Se $a = 0$, então $f = c$, onde c é uma constante real. Assim, f interceptará o eixo das abcissas, somente se $c = 0$, ou seja se $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tal função é denominada de Função Identicamente Nula, observe que apesar de ser constante, como neste caso $b = 0$, f é também uma função linear. Aqui todo ponto x no domínio é um zero ou raiz da função.

Definição 14. Denomina-se raiz ou zero da função o valor real $x_0 \in D(f)$ para o qual se verifica

$$f(x_0) = 0.$$

De uma forma geral, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim definida por

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0.$$

Determinar a raiz de uma função afim consiste, portanto, em resolver a equação

$$ax_0 + b = 0,$$

da qual se obtém

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Portanto, se $a \neq 0$ a raiz da Função Afim é dada por $x_0 = -\frac{b}{a}$. Este é um importante ponto da função, inclusive na construção de seu gráfico, pois esse ponto divide o domínio da função em dois intervalos distintos, nos quais a função assume sinais diferentes.

Exemplo 26. Considere a função afim definida por

$$f(x) = 2x - 4.$$

A raiz, ou zero da função, corresponde ao valor real de x para o qual $f(x) = 0$. Assim, para determinar a raiz da função, resolvemos a equação

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Portanto, a função possui uma única raiz, dada por $x_0 = 2$.

Do ponto de vista geométrico, essa raiz corresponde ao ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo das abcissas, isto é, o ponto $(2, 0)$. Assim, esse ponto divide o domínio da função em dois intervalos distintos, nos quais a função assume sinais diferentes. Considerando

que neste caso $a = 2 > 0$, segue que f é crescente. Observe a tabela e o gráfico a seguir, para uma análise mais detalhada.

Tabela 7 – Tabela de valores da função $f(x) = 2x - 4$.

x	$f(x)$
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	4

Fonte: Elaboração própria.

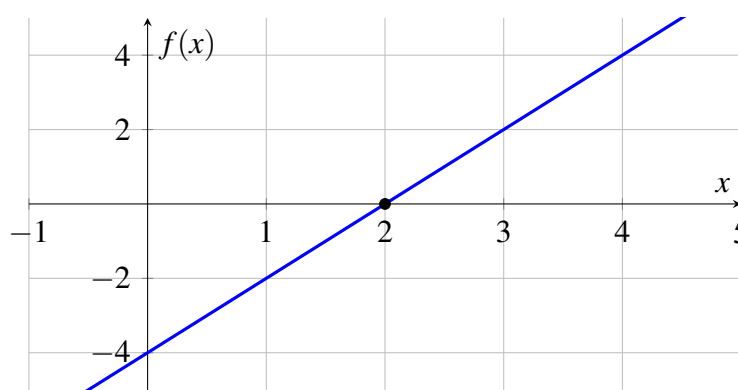


Figura 19 – Gráfico da função $f(x) = 2x - 4$ e sua raiz.

Fonte: Elaboração própria.

Como anteriormente mencionado, f é crescente e portanto para valores no domínio menores que 2, f assume valores menores que zero, ou seja negativos. E isto é claramente observado tanto na representação gráfica de f , quanto em relação aos valores escolhidos para a representação tabular. De modo análogo conclui-se que e valores positivos para $x > 2$. Esse comportamento confirma, do ponto de vista gráfico, o valor da raiz obtido por meio da resolução algébrica da equação $f(x) = 0$.

Caso a função fosse decrescente, o sinal da função seria invertido, o que será demonstrado mais a diante.

2.4.4.1 Estudo do sinal por meio da análise gráfica

Considere uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, e seja r sua raiz, isto é, o valor real tal que $f(r) = 0$. Do ponto de vista gráfico, a raiz corresponde ao ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas. A partir dessa interseção, é possível determinar o sinal da função em cada intervalo do domínio.

- Se a é positivo ($a > 0$), ou seja se em uma Função Afim a taxa de variação (coeficiente angular) é positivo, o gráfico da função é uma reta crescente e assim:

- f assume valores negativos para $x < r$, implica que $Im(f) \subset \mathbb{R}^-$ sempre que $x < r$;
- f se anula em $x = r$, isto é $f(r) = 0$, e
- f assume valores positivos para $x > r$, donde $Im(f) \subset \mathbb{R}^+$ sempre que $x > r$.

Observe o gráfico da Figura 20, a reta representa uma função afim crescente, com raiz igual $r = 2$ e consequentemente assume valores positivos se $x > 2$ e valores negativos se $x < 2$.

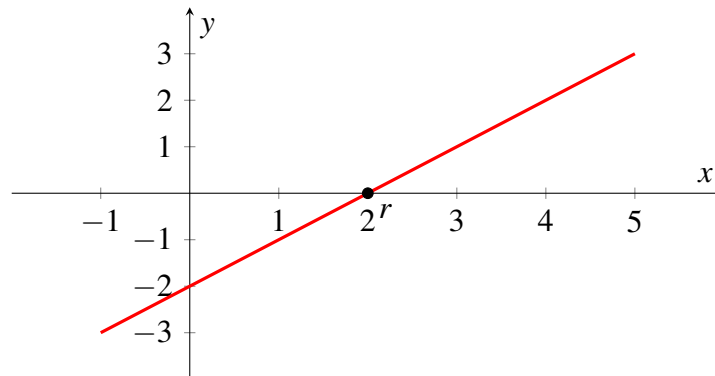


Figura 20 – Representação gráfica de uma função afim crescente e sua raiz.

Fonte: Elaboração própria.

Ainda que não seja fornecida a lei de associação de f , neste caso a representação gráfica fornece dois pontos da reta $(0, b) = (0, -2)$ e $(r, 0) = (2, 0)$. Estas informações são suficientes para a determinação dos coeficientes a e b , como veremos na próxima seção.

- Se a é negativo ($a < 0$), ou seja se em uma Função Afim a taxa de variação (coeficiente angular) é negativo, o gráfico da função é uma reta decrescente e assim:
 - f assume valores positivos para $x < r$, implica que $Im(f) \subset \mathbb{R}^+$ sempre que $x < r$;
 - f se anula em $x = r$, isto é $f(r) = 0$, e
 - f assume valores negativos para $x > r$, donde $Im(f) \subset \mathbb{R}^-$ sempre que $x > r$.

Observe o gráfico da Figura 21, a reta representa uma Função Afim decrescente, com raiz igual $r = 2$ e consequentemente assume valores positivos se $x < 2$ e valores negativos se $x > 2$.

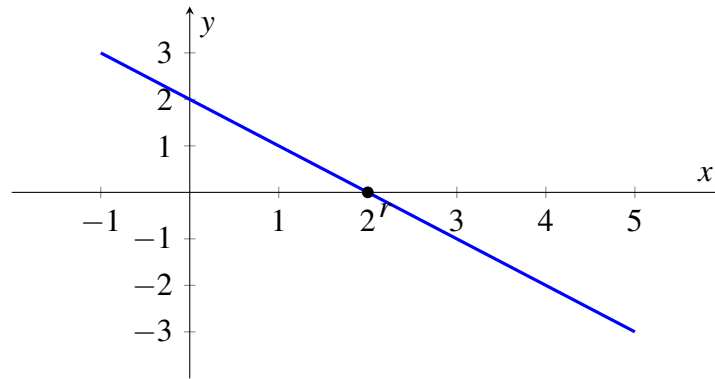


Figura 21 – Representação gráfica de uma função afim decrescente e sua raiz.

Fonte: Elaboração própria.

Novamente, ainda que não seja fornecida a lei de associação de f , neste caso a representação gráfica fornece dois pontos da reta $(0, b) = (0, 2)$ e $(r, 0) = (2, 0)$. Estas informações são suficientes para a determinação dos coeficientes a e b , como veremos a seguir.

Antes de entendermos como obter a lei de formação a partir de pontos do gráfico de uma Função Afim, segue o quadro síntese referente ao estudo de sinais da função afim.

Coeficiente a	Intervalo	Sinal de $f(x)$
$a > 0$	$x < r$	$f(x) < 0$
	$x = r$	$f(x) = 0$
	$x > r$	$f(x) > 0$
$a < 0$	$x < r$	$f(x) > 0$
	$x = r$	$f(x) = 0$
	$x > r$	$f(x) < 0$

2.4.5 Determinação dos coeficientes de uma Função Afim a partir de dois pontos conhecidos

Na seção anterior, mencionou-se que mesmo não conhecendo a lei de associação de uma Função Afim seria possível determiná-la conhecendo dois de seus pontos. Mais especificamente, considerando que o gráfico de uma Função Afim é sempre uma reta, dos Axiomas de Euclides, sabe-se que batam dois pontos distintos para que uma reta esteja bem definida. Veja o exemplo a seguir, antes que este cálculo seja generalizado.

Exemplo 27. No caso da função f representada na Figura 20, vimos que sua raiz é $r = 2$ o que nos fornece o ponto $(2, 0) \in Gr(f)$. Além disso, observou-se que a reta interceptou o eixo das ordenadas (eixo y) no ponto, $(0, -2)$, assim $f(0) = -2$ e assim, o coeficiente linear $b = -2$. Sabendo-se que f é afim e $b = 0$, então

$$f(x) = ax + b = ax - 2.$$

Substituindo-se as coordenadas do ponto $(2,0)$ na função, segue que

$$f(2) = a2 + b = 2a - 2 = 0,$$

e isolando-se a , segue que $a = 1$. Logo, a função representada na Figura 20 é

$$f(x) = x - 2.$$

Obter esta equação confirma as informações obtidas analisando a representação gráfica fornecida pela Figura 20, ou seja, f é crescente, sinais e raiz se confirma.

De modo análogo, obtém-se que a função representada na Figura 21 é $f(x) = -x + 2$. Uma função crescente, com raiz $r = 2$, $b = 2$ e $a = -1$.

De uma forma geral, conhecendo dois pontos do gráfico de uma Função Afim $f(x) = ax + b$. Digamos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sejam estes pontos, então temos $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Logo,

$$ax_1 + b = y_1$$

e

$$ax_2 + b = y_2,$$

o que nos fornece um sistema cuja solução são os coeficientes a e b . Destacamos a fórmula obtida para a taxa de variação a , que é também a inclinação da reta, é dada justamente pela razão entre a variação de y e a variação de x , entre os dois pontos. Isto é,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Para obtenção de b , basta substituir o valor de a obtido em umas das equações do sistema.

2.4.6 Funções Definidas por Partes

Embora a função afim seja capaz de modelar uma ampla variedade de situações com taxa de variação constante, nem todas as relações entre grandezas podem ser descritas por uma única expressão algébrica válida para todo o domínio. Assim essa seção apresenta esse tipo de função, ampliando a análise das funções reais e suas aplicações práticas.

Considerando a natureza desta proposta, faz-se necessário apresentar a definição das funções definidas por partes, uma vez que, no contexto da sequência didática desenvolvida, elas assumem papel relevante. Lima (2010) afirma que essas funções são úteis para representar fenômenos que mudam de regime conforme o contexto.

Definição 15. Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por partes quando

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in D_n, \end{cases}$$

onde cada $D_i \subset D(f) \subset \mathbb{R}$. De forma que a união disjunta de todos os intervalos $D_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ seja igual ao domínio da f .

Ao analisar o exemplo abaixo tem-se uma melhor percepção do funcionamento deste tipo de função.

Exemplo 28. *Um serviço de transporte por aplicativo adota a seguinte forma de cobrança: uma tarifa fixa de R\$ 5,00 para os primeiros 3 km percorridos e um valor adicional de R\$ 2,00 por quilômetro excedente. Essa situação pode ser representada por uma função definida por partes*

$$f(x) = \begin{cases} 5, & 0 < x \leq 3, \\ 5 + 2(x - 3), & x > 3. \end{cases}$$

A tabela abaixo apresenta alguns valores calculados da função

Tabela 8 – Valores da função custo da corrida

Distância (km)	Custo $f(x)$ (R\$)
1	5,00
2	5,00
3	5,00
4	7,00
5	9,00
6	11,00

Fonte: Elaboração própria.

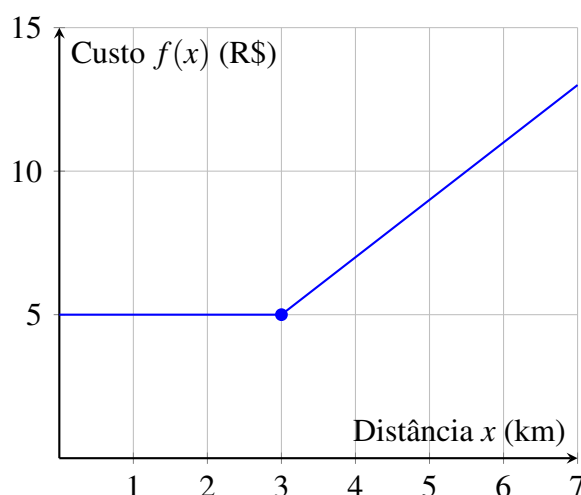


Figura 22 – Gráfico da função definida por partes que representa a tarifa da corrida

Fonte: Elaboração própria.

Note que as duas funções envolvidas na definição de f no exemplo possuem a mesma imagem no ponto $x = 3$, onde ocorre a mudança de lei de formação da primeira para a segunda função. Isto garante a continuidade da função, ainda que definida por partes. Além disso, as duas funções envolvidas são funções afins. Neste caso, f é uma Função Poligonal.

Definição 16. Uma função definida por partes é denominada de Função Poligonal se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é uma união de intervalos disjuntos, quando é uma função definida por partes de modo que a lei de formação é uma função afim em cada intervalo do domínio e que haja continuidade. Porém exige-se que não haja descontinuidade, assim $f_i(x_i) = f_{(i-1)}(x_i), \forall i \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, podemos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal. Um dos exemplos mais conhecidos das funções poligonais é a função modular.

Ao longo deste capítulo, foram apresentadas as principais definições e representações das funções reais, com ênfase especial nas funções afins, que constituem o eixo central desta pesquisa. Esses conceitos são fundamentais para a aplicação da sequência didática proposta, que utiliza as contas de água e de energia elétrica como instrumentos pedagógicos para o estudo de funções. No capítulo seguinte, apresenta-se o relato da implementação dessa experiência em sala de aula, bem como a análise dos resultados obtidos a partir dessa prática.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

A análise apresentada neste capítulo fundamenta-se nos dados produzidos durante a aplicação da sequência didática desenvolvida com estudantes da 1ª série do Ensino Médio, cujo objetivo foi investigar as contribuições do uso de situações reais, especificamente contas de água e de energia elétrica, para o ensino e a aprendizagem das funções afins.

Os dados analisados foram constituídos por diferentes tipos de registros produzidos ao longo da intervenção pedagógica, incluindo produções escritas dos estudantes, observações realizadas durante o desenvolvimento das atividades, interações estabelecidas em sala de aula e resoluções das situações-problema propostas na sequência didática.

Considerando a natureza qualitativa desta investigação, a análise não se orienta pela quantificação ou pela mensuração estatística dos resultados, mas pela interpretação dos processos de aprendizagem mobilizados pelos estudantes. Nesse sentido, busca-se compreender as estratégias utilizadas na resolução das atividades, os modos de representação empregados e os significados atribuídos aos conceitos matemáticos ao longo do desenvolvimento da sequência didática.

A interpretação dos dados foi conduzida à luz dos pressupostos teóricos que fundamentam esta pesquisa, considerando o contexto de realização das atividades e as condições concretas de sua implementação. Assim, procura-se evidenciar de que maneira as situações-problema propostas favoreceram a construção progressiva do pensamento funcional e a compreensão das relações de dependência entre grandezas, elementos centrais no estudo das funções afins.

Além disso, os resultados são analisados em articulação com as competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a área de Matemática e suas Tecnologias, especialmente aquelas relacionadas à interpretação de informações numéricas, à análise de relações entre grandezas, à construção de modelos matemáticos e à argumentação em linguagem matemática. Essa articulação permite situar a proposta pedagógica desenvolvida no contexto das orientações curriculares vigentes e refletir sobre suas possíveis contribuições para o ensino de funções no Ensino Médio.

Para fins de organização e clareza na exposição dos resultados, a análise foi estruturada a partir das quatro situações-problema que compuseram a sequência didática. Cada uma delas é apresentada e discutida individualmente, respeitando suas especificidades e seu papel no percurso formativo proposto. Busca-se, desse modo, evidenciar tanto as dificuldades iniciais apresentadas pelos estudantes quanto os avanços observados ao longo do desenvolvimento das atividades, compreendendo a sequência didática como um processo articulado e progressivo de construção do conhecimento matemático.

Nesse contexto, o relato de experiência apresentado neste capítulo busca evidenciar de que maneira a organização do ensino por meio da sequência didática proposta, fundamentada na análise de contas de água e de energia elétrica, contribuiu para o estudo das funções afins no

Ensino Médio. Dessa forma, procura-se compreender em que medida as atividades desenvolvidas favoreceram a interpretação das relações entre grandezas, a construção de representações matemáticas e a compreensão do conceito de função afim, em consonância com o problema de pesquisa que orienta esta investigação.

3.1 Como surgiu a ideia

A proposta desta pesquisa teve origem em experiências vivenciadas em sala de aula durante a realização de um curso de extensão voltado à qualificação profissional. Nesse contexto, ao ministrar aulas para turmas sob minha regência, foram observadas dificuldades recorrentes dos estudantes na aprendizagem de conteúdos relacionados ao estudo de funções, especialmente no que se refere às funções afins.

Essas dificuldades manifestavam-se tanto na compreensão conceitual dos conteúdos quanto no envolvimento dos estudantes com as atividades propostas. Frequentemente, durante as aulas, surgiam questionamentos como: “para que precisamos aprender isso?” ou “onde esse conteúdo será utilizado?”. Tais indagações evidenciavam a dificuldade dos alunos em estabelecer relações entre o conhecimento matemático escolar e situações concretas do cotidiano.

Diante dessa realidade, foi elaborada e aplicada uma atividade experimental que utilizava contas de água como recurso didático para o estudo das funções afins em turmas do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular. A atividade consistia na análise de valores reais presentes nas contas, na interpretação de tabelas e gráficos e na identificação das relações matemáticas envolvidas na estrutura de cobrança do consumo de água.

Os resultados dessa experiência inicial indicaram que o uso de documentos presentes no cotidiano dos estudantes pode favorecer maior envolvimento com as atividades propostas, além de contribuir para a compreensão das relações entre grandezas presentes nas situações analisadas. A partir dessas observações, surgiu o interesse em investigar de forma mais sistemática o potencial pedagógico dessa abordagem no ensino de funções.

Com base nessas reflexões iniciais, iniciou-se um processo de diálogo com a orientadora da pesquisa, com o objetivo de analisar a experiência realizada e discutir possibilidades de ampliação da proposta. As discussões concentraram-se na pertinência pedagógica da atividade, nas dificuldades de aprendizagem evidenciadas e na possibilidade de estruturar uma sequência didática mais ampla, fundamentada em situações reais que permitissem explorar o conceito de função afim de maneira contextualizada.

Durante esse processo de reflexão, foram consideradas diferentes possibilidades de instrumentos que pudessem ser utilizados como ponto de partida para a modelagem de situações do cotidiano, tais como a tabela do imposto de renda, dados relacionados ao funcionamento da escola, informações sobre programas sociais e estudos sobre viabilidade de instalação de energia solar. Essas possibilidades foram discutidas no âmbito acadêmico com o objetivo de avaliar seu

potencial didático e sua adequação ao contexto escolar.

Considerou-se também a necessidade de alinhar a proposta às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio algébrico, à interpretação de tabelas e gráficos e à aplicação da Matemática na análise de situações do cotidiano.

3.2 Caracterização da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica que fundamenta este relato de experiência foi realizada no Centro de Ensino Médio 04 de Sobradinho II, localizado no Distrito Federal, instituição pública que atende estudantes do Ensino Médio em período regular. A aplicação da sequência didática ocorreu em quatro turmas da 1ª série do Ensino Médio do turno matutino, envolvendo estudantes que se encontravam em processo inicial de estudo das funções no currículo escolar.

Durante esse processo, foram discutidas, inicialmente no âmbito acadêmico, diferentes possibilidades de instrumentos que poderiam ser utilizados como ponto de partida para a modelagem de situações do cotidiano, tais como a tabela do imposto de renda, estudos sobre a viabilidade de implementação de sistemas de energia solar, dados relacionados ao funcionamento da escola, informações referentes a programas sociais, como o Bolsa Família, e documentos presentes no cotidiano das famílias, como contas de água e de energia elétrica.

Posteriormente, foi realizada uma reunião com a coordenação pedagógica da escola e com os professores responsáveis pelas turmas participantes da pesquisa, com o objetivo de discutir a viabilidade pedagógica dessas propostas no contexto escolar. Durante essa reunião, foram analisadas as diferentes possibilidades apresentadas, considerando-se sua pertinência didática, sua relação com a realidade dos estudantes e possíveis implicações pedagógicas.

Após a discussão coletiva, alguns dos temas inicialmente sugeridos foram descartados. A utilização da tabela do imposto de renda e o estudo da viabilidade de implementação de sistemas de energia solar foram considerados pouco adequados ao contexto da comunidade escolar, uma vez que tais temas não faziam parte da realidade cotidiana da maioria dos estudantes.

Da mesma forma, optou-se por não utilizar dados relacionados ao Programa Bolsa Família. Embora reconhecido como um tema socialmente relevante, a equipe pedagógica considerou que sua utilização em sala de aula poderia expor ou constranger estudantes eventualmente beneficiários do programa, o que poderia comprometer o ambiente pedagógico.

Diante dessas considerações, ficou acordado entre o pesquisador, a coordenação pedagógica e os professores das turmas que a abordagem mais adequada seria a utilização de contas de água e de energia elétrica como instrumentos para o desenvolvimento da sequência didática. Esses documentos foram considerados apropriados por estarem presentes no cotidiano das famílias e por possibilitarem a análise de relações entre grandezas que podem ser modeladas matematicamente por meio de funções afins.

No contexto pedagógico da escola e considerando os recursos didáticos disponíveis para o ensino de Matemática, julgou-se pertinente observar também o material didático adotado pela instituição.

Embora o livro didático adotado pela instituição escolar, *Matemática: Ciência e Aplicações – Volume 1* (IEZZI et al., 2016), não tenha sido considerado no planejamento inicial da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa, em momento posterior realizou-se uma análise dos capítulos dedicados ao estudo de funções, com o objetivo de observar a abordagem metodológica adotada pelos autores e verificar em que medida essa organização didática poderia dialogar com a proposta pedagógica desenvolvida.

A análise dos capítulos 3 e 4 da obra evidencia que o estudo das funções é introduzido a partir da observação de relações entre grandezas presentes em situações contextualizadas, frequentemente representadas por meio de tabelas e gráficos, conduzindo gradualmente à formalização algébrica do conceito de função. Observa-se que essa organização didática pode favorecer o desenvolvimento do pensamento funcional e dialoga com a proposta da sequência didática aplicada nesta pesquisa, podendo o livro atuar como recurso complementar para o aprofundamento do estudo das funções afins no Ensino Médio. Para leitores interessados em explorar essa abordagem em materiais didáticos escolares, recomenda-se a consulta à obra de Iezzi *et al.* (2016).

3.3 Metodologia

Nesta seção descrevem-se as atividades planejadas e desenvolvidas da pesquisa, explicitando a natureza do estudo, o contexto de realização da investigação, os participantes envolvidos, os instrumentos utilizados e a organização da sequência didática aplicada. Busca-se, assim, sistematizar o percurso metodológico que fundamenta o relato da experiência pedagógica e a análise dos resultados apresentados nos capítulos subsequentes, conferindo rigor e transparência ao processo investigativo.

A pesquisa desenvolvida caracterizou-se por uma abordagem qualitativa, de natureza aplicada, uma vez que se inseriu no contexto escolar com o objetivo de investigar e refletir sobre práticas pedagógicas voltadas ao ensino de funções afins. Trata-se de uma investigação de caráter pedagógico, com características de pesquisa-intervenção, uma vez que o pesquisador atuou diretamente no planejamento, na implementação e no acompanhamento de uma sequência didática, buscando compreender os efeitos dessa intervenção no processo de aprendizagem dos estudantes.

O estudo foi realizado em uma escola pública da rede de ensino do Distrito Federal, envolvendo quatro turmas da 1ª série do Ensino Médio, no turno matutino. Os estudantes participantes apresentavam perfis heterogêneos quanto ao domínio de conteúdos matemáticos, especialmente no que se refere a conhecimentos algébricos e ao uso de operações com números decimais, aspecto considerado no planejamento das atividades. O pesquisador atuou como

mediador das atividades, não sendo o professor regente das turmas, condição considerada, posteriormente, na análise dos resultados, como uma possível limitação da investigação.

A produção dos dados ocorreu no contexto natural da sala de aula, durante a aplicação de uma sequência didática inicialmente planejada para ser desenvolvida em quatro aulas de 50 minutos cada, totalizando 200 minutos de intervenção pedagógica. Contudo, em decorrência de um período de greve na rede de ensino, com duração aproximada de 32 dias, a aplicação da sequência estendeu-se para seis aulas, totalizando 300 minutos. Esse fato implicou a reorganização do cronograma inicialmente previsto, mas não comprometeu o desenvolvimento das atividades propostas. Os dados analisados foram constituídos a partir das observações realizadas ao longo das atividades, das interações entre os estudantes e o mediador, bem como das produções desenvolvidas pelos alunos durante a resolução das situações-problema.

Os principais instrumentos metodológicos utilizados na pesquisa foram contas reais de água e de energia elétrica, bem como tabelas de cobrança elaboradas com base em pesquisas realizadas junto às companhias responsáveis pelo fornecimento desses serviços no Distrito Federal. Esses documentos, por estarem presentes no cotidiano dos estudantes e de suas famílias, possibilitaram a análise de dados concretos e situações reais. As contas serviram de base para a construção de tabelas e expressões algébricas, que orientaram o desenvolvimento das atividades e a formalização dos conceitos matemáticos trabalhados.

Com o objetivo de garantir a padronização das informações analisadas e possibilitar a validação dos cálculos realizados, foram elaboradas tabelas de referência a partir das contas de água e de energia elétrica utilizadas na prática pedagógica. Ressalta-se que os dados empregados na construção dessa sequência didática foram extraídos exclusivamente de documentos oficiais, obtidos nos canais de atendimento ao consumidor das empresas concessionárias de abastecimento de água e de energia elétrica do Distrito Federal. Essas tabelas sistematizaram as faixas de consumo, as tarifas aplicadas e os critérios de cobrança, servindo como suporte para a resolução das situações-problema e para a construção dos modelos matemáticos.

As tabelas e imagens apresentadas ao longo desta seção ilustram parte do material utilizado com os estudantes durante a aplicação da sequência didática. Todo o conjunto documental da pesquisa, assim como os materiais elaborados para a mediação pedagógica, encontra-se organizado nos apêndices e anexos desta dissertação.

Para a análise da conta de água, foi distribuída a cada estudante uma conta física, além da apresentação ilustrativa projetada em sala de aula.

Tabela 9 – Cobrança de água na modalidade residencial padrão

Residencial Padrão			
Tarifa fixa:		R\$ 10,18	
Faixa (m³)	Volume da faixa	Alíquota por m³	Valor (R\$)
0 a 7		3,76	
8 a 13		4,51	
14 a 20		8,94	
21 a 30		12,97	
31 a 45		19,45	
Acima de 45		25,28	

Fonte: Elaboração própria a partir de dados da concessionária de água.

Tabela 10 – Cobrança de água na modalidade residencial social

Residencial Social			
Tarifa fixa:		R\$ 5,09	
Faixa (m³)	Volume da faixa	Alíquota por m³	Valor da faixa (R\$)
0 a 7		1,88	
8 a 13		2,26	
14 a 20		4,48	
21 a 30		6,48	
31 a 45		19,45	
Acima de 45		25,28	

Fonte: Elaboração própria a partir de dados da concessionária de água.

Tabela 11 – Cobrança de água na modalidade residencial industrial e pública

Residencial Industrial e Pública			
Tarifa fixa:		R\$ 26,71	
Faixa (m³)	Volume da faixa	Alíquota por m³	Valor da faixa (R\$)
0 a 4		7,76	
5 a 7		9,70	
8 a 10		12,72	
11 a 40		15,52	
Acima de 40		18,31	

Fonte: Elaborada própria a partir de dados da concessionária de água.

Tabela 13 – Alinhamento entre as situações-problema, os conceitos matemáticos mobilizados e as habilidades da BNCC

Situação-problema	Foco da atividade	Conceitos matemáticos mobilizados	Competências e habilidades da BNCC
Situação-problema 1	Exploração inicial das contas de consumo.	Leitura e interpretação de dados.	EM13MAT01 / EM13MAT102
Situação-problema 2	Investigação do cálculo das contas.	Operações com números decimais e análise de tabelas.	EM13MAT01 / EM13MAT101
Situação-problema 3	Identificação de cobranças fixas e variáveis.	Proporcionalidade e análise de taxas.	EM13MAT01 / EM13MAT101
Situação-problema 4	Construção de modelos matemáticos.	Função afim e modelagem de grandezas.	EM13MAT01 / EM13MAT302

Fonte: Elaboração própria.

A Situação-problema 1 teve como objetivo promover o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes e a identificação das informações presentes nas contas de água e de energia elétrica. A Situação-problema 2 voltou-se à compreensão dos critérios de cálculo do valor cobrado, por meio da validação dos valores apresentados nas contas. A Situação-problema 3 possibilitou a distinção entre cobranças fixas e proporcionais ao consumo. Por fim, a Situação-problema 4 conduziu os estudantes à construção de expressões algébricas que representassem o valor pago em função do consumo, culminando na formalização do conceito de função afim e de funções definidas por partes.

Como desdobramento metodológico da Situação-problema 4, foi realizada uma atividade complementar envolvendo a análise do consumo mensal de água da escola. Inicialmente, os estudantes tiveram acesso apenas às informações referentes ao volume de água consumido, expresso em metros cúbicos, sem que fosse divulgado o valor efetivamente pago pela instituição. A partir desses dados, os alunos foram convidados a elaborar estimativas sobre o valor aproximado da conta mensal, mobilizando os conhecimentos construídos nas etapas anteriores da sequência didática.

Somente após esse primeiro momento de estimativa, os estudantes realizaram os cálculos correspondentes, utilizando as tabelas de referência e os modelos matemáticos previamente discutidos, com o objetivo de determinar o valor real da conta. Essa atividade teve como finalidade ampliar a contextualização da modelagem matemática, promovendo a aplicação dos conceitos trabalhados a uma situação de interesse coletivo e estimulando reflexões sobre o consumo e o uso consciente da água. As estimativas iniciais, os cálculos realizados, o valor final obtido e o debate subsequente constituíram dados relevantes para a análise apresentada no capítulo seguinte.

A organização da sequência didática considerou momentos de problematização,

instrumentalização e sistematização dos conceitos matemáticos, em consonância com a proposta pedagógica que fundamenta a pesquisa. No entanto, a análise dos efeitos dessas etapas no processo de aprendizagem dos estudantes é apresentada exclusivamente no capítulo de Análise dos Resultados, evitando-se antecipações interpretativas nesta seção metodológica.

Os procedimentos de análise dos dados basearam-se na leitura sistemática dos registros das atividades, na observação das interações em sala de aula e na análise das produções dos estudantes ao longo das situações-problema. Foram considerados aspectos como o nível de participação, as dificuldades recorrentes, os avanços na compreensão dos conceitos matemáticos e a capacidade de estabelecer relações entre os dados analisados e os modelos construídos. Esses critérios orientaram a interpretação dos resultados, apresentada de forma articulada ao referencial teórico no capítulo seguinte.

Dessa forma, o percurso metodológico adotado nesta pesquisa buscou assegurar coerência entre os objetivos propostos, os instrumentos utilizados e os procedimentos de análise desenvolvidos. A utilização de situações extraídas do cotidiano, mediadas por práticas de modelagem matemática, permitiu investigar de maneira sistemática as possibilidades de ensino das funções afins no contexto do Ensino Médio.

Aspectos contextuais da aplicação da sequência didática

Durante o desenvolvimento da sequência didática, alguns aspectos contextuais mostraram-se relevantes para a compreensão do percurso formativo vivenciado pelos estudantes e para a interpretação dos dados produzidos ao longo da investigação. Tais aspectos não se configuram como fragilidades do estudo, mas como elementos próprios da realidade escolar na qual a pesquisa foi desenvolvida, sendo explicitados com o intuito de assegurar maior clareza e rigor na análise dos resultados.

Um primeiro aspecto refere-se ao fato de a sequência didática ter sido aplicada em turmas nas quais o pesquisador não atuava como professor regente. Embora essa condição tenha possibilitado um olhar externo e reflexivo sobre a prática pedagógica desenvolvida, observou-se que, em determinados momentos, ela influenciou o nível de engajamento de parte dos estudantes nas atividades propostas. Alguns alunos demonstraram menor envolvimento, possivelmente por não associarem diretamente as atividades desenvolvidas à dinâmica avaliativa formal da disciplina. Tal situação evidencia a relevância do vínculo pedagógico estabelecido entre professor regente e turma, bem como a influência que a percepção do caráter avaliativo das atividades pode exercer sobre a participação dos estudantes.

Outro fator relevante diz respeito à interrupção do cronograma inicialmente planejado em decorrência de um período de greve dos professores da rede pública de ensino, com duração aproximada de 32 dias. Essa interrupção provocou uma descontinuidade no desenvolvimento da sequência didática, exigindo momentos de retomada conceitual e reorganização do tempo pedagógico previsto. Embora as atividades tenham sido concluídas conforme os objetivos

estabelecidos, a interrupção temporal pode ter influenciado o ritmo de desenvolvimento das atividades e a consolidação de alguns conceitos por parte dos estudantes.

Além disso, conforme relato da professora regente das turmas, observou-se que parte dos estudantes apresentava fragilidades significativas em pré-requisitos matemáticos esperados para a série, como o domínio de operações com números racionais, a leitura e interpretação de tabelas e a compreensão de grandezas. Essas dificuldades foram associadas, em grande medida, às lacunas de aprendizagem decorrentes do período de ensino remoto durante a pandemia da COVID-19, contexto que impactou de forma significativa o processo formativo de muitos estudantes da Educação Básica. Tais fragilidades demandaram intervenções pedagógicas adicionais ao longo da aplicação da sequência didática, especialmente nas situações que envolveram validação de cálculos e processos de generalização algébrica.

A explicitação desses elementos contextuais permite compreender que os dados produzidos ao longo da aplicação da sequência didática foram gerados em um cenário marcado por desafios institucionais, pedagógicos e formativos. Ao mesmo tempo, tais aspectos reforçam a importância de estratégias de ensino que mobilizem situações próximas à realidade dos estudantes, favorecendo o levantamento de conhecimentos prévios, o engajamento nas atividades propostas e a construção gradual do pensamento funcional.

3.4 Descrição das atividades

Nesta seção descrevem-se as atividades planejadas e desenvolvidas ao longo da aplicação da sequência didática, bem como os registros e observações decorrentes da prática em sala de aula. As atividades foram organizadas de forma sequencial, articulando o estudo das funções afins a situações extraídas do cotidiano dos estudantes, por meio do uso de contas de água e de energia elétrica como instrumentos pedagógicos. O desenvolvimento das ações buscou favorecer o levantamento de conhecimentos prévios, a análise dos dados apresentados e a construção gradual dos conceitos matemáticos envolvidos, em consonância com a proposta metodológica adotada.

A organização das situações-problema também considerou o alinhamento com as competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conforme explicitado em cada etapa da sequência didática.

3.4.1 Situação-problema 1

A Situação-problema 1 teve como finalidade promover o primeiro contato dos estudantes com os materiais que seriam utilizados ao longo da sequência didática, favorecendo o levantamento de conhecimentos prévios e a problematização inicial do tema. Para isso, foram apresentadas contas de água e de energia elétrica, distribuídas em sala de aula, permitindo que os alunos manuseassem os documentos e observassem livremente as informações neles contidas.

Em um primeiro momento, os estudantes foram convidados a responder, de forma oral e coletiva, aos seguintes questionamentos

- O que você sabe a respeito das contas apresentadas?
- Quais informações nelas contidas lhe são familiares?
- Enuncie o significado das informações identificadas.

Após esse momento inicial de exploração e discussão, o mediador apresentou um material complementar projetado em sala, elaborado a partir de documentos oficiais das concessionárias de água e de energia elétrica do Distrito Federal. Esse material continha exemplos de contas, tabelas tarifárias, trechos da legislação vigente e outros dados explicativos, com o objetivo de esclarecer as informações presentes nos documentos analisados anteriormente e ampliar a compreensão dos estudantes sobre a estrutura das cobranças. O material foi explorado coletivamente, com pausas para esclarecimentos, questionamentos e debates em sala de aula, conforme documentação apresentada nos anexos da dissertação.

Objetivo

Promover um debate inicial sobre os elementos presentes nas contas de água e de energia elétrica, incentivando os estudantes a mobilizar conhecimentos prévios, esclarecer dúvidas e ampliar sua compreensão sobre as informações e critérios de cobrança, por meio da mediação pedagógica e da análise de documentos oficiais.

Competência e habilidades da BNCC mobilizadas

A atividade dialoga com a competência específica EM13MAT01 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos.

No que se refere às habilidades, destaca-se a EM13MAT102, que orienta os estudantes a analisar informações apresentadas em tabelas, gráficos e registros numéricos divulgados em diferentes meios de comunicação, identificando e interpretando os dados presentes nesses documentos. Ao analisar contas de água e de energia elétrica, os estudantes mobilizam procedimentos de leitura e interpretação de informações numéricas presentes em documentos do cotidiano.

Resposta esperada

Esperava-se que os estudantes identificassem informações conhecidas, manifestassem dúvidas em relação aos elementos não compreendidos e passassem a reconhecer, com o apoio do material complementar, a finalidade das diferentes informações presentes nas contas, iniciando um processo investigativo sobre seu funcionamento.

Observação sobre a prática

Durante o desenvolvimento da atividade, os estudantes passaram a identificar espontaneamente informações como dados do consumidor, período de consumo, valores cobrados, categorias tarifárias e mensagens institucionais presentes nos documentos. O levantamento dessas informações ocorreu por meio de discussões coletivas, conduzidas pelo mediador, que registrava no quadro os principais elementos mencionados pelos alunos.

A apresentação do material complementar contribuiu para ampliar o debate, possibilitando a compreensão de termos técnicos, da existência de diferentes modalidades tarifárias e do papel da legislação na definição das formas de cobrança. Durante o desenvolvimento da atividade, observou-se que os estudantes passaram a identificar espontaneamente informações como dados do consumidor, período de consumo, valores cobrados e categorias tarifárias presentes nos documentos analisados.

Também foi possível identificar que a maioria dos alunos não compreendia, nesse momento inicial, como o valor final das contas era calculado, tampouco os critérios matemáticos envolvidos nesse processo. Além disso, observaram-se dificuldades relacionadas ao uso de operações com números decimais, aspecto registrado pelo mediador e considerado no planejamento das situações-problema seguintes da sequência didática.

3.4.2 Situação-problema 2

Na Situação-problema 2, deu-se continuidade à análise das contas de água e de energia elétrica, avançando da identificação inicial das informações para a investigação dos critérios utilizados no cálculo do valor final a ser pago pelo consumidor. Nessa etapa, os estudantes foram orientados a observar de forma mais sistemática a relação existente entre o consumo registrado e o valor cobrado nas faturas.

A atividade teve início a partir da leitura orientada das contas, retomando os elementos previamente identificados na Situação-problema 1, como consumo mensal, tarifas aplicadas e valores parciais. Em seguida, os estudantes foram convidados a analisar como essas informações se relacionavam entre si, buscando compreender o processo de cálculo do valor final apresentado nos documentos.

A atividade foi conduzida a partir do seguinte enunciado:

- Ao analisar a conta de água e de energia elétrica, identifique como foi calculado o valor a ser pago por este cliente.

Objetivo

Identificar o consumo mensal registrado na unidade consumidora e compreender o processo de cálculo do valor cobrado, validando as informações apresentadas nas contas de água e de energia elétrica.

Competência e habilidades da BNCC mobilizadas

Esta atividade articula-se à competência específica EM13MAT01 da BNCC, ao propor que os estudantes utilizem conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações relacionadas ao consumo de água e energia elétrica.

Entre as habilidades mobilizadas destaca-se a EM13MAT101, que orienta a interpretação de situações envolvendo a variação de grandezas. Ao investigar os critérios utilizados no cálculo das contas, os estudantes analisam relações entre consumo e valor cobrado, mobilizando procedimentos de cálculo e interpretação de dados apresentados em tabelas.

Resposta esperada

Esperava-se que os estudantes identificassem o consumo registrado no período analisado e o valor das tarifas aplicadas, realizassem as operações necessárias para o cálculo dos subtotais e do valor total a pagar e verificassem a coerência entre os valores obtidos e aqueles apresentados nas contas.

Para apoiar a realização da atividade e a validação dos cálculos efetuados, foram utilizadas tabelas de referência elaboradas a partir das contas de água e de energia elétrica empregadas na sequência didática. Essas tabelas sistematizam as faixas de consumo, as tarifas aplicadas e os valores unitários, servindo como suporte para a análise dos critérios de cobrança, conforme apresentadas (ver apêndice tabelas 14 e 15).

O uso das tabelas permitiu que os estudantes comparassem seus resultados com valores previamente organizados, favorecendo a compreensão da relação entre consumo, tarifa e valor final, além de auxiliar na identificação de possíveis erros de cálculo.

Observações sobre a prática

Durante a realização da atividade, constatou-se que a maioria dos estudantes desconhecia os critérios utilizados para o cálculo dos valores cobrados, apesar de manter contato frequente com esses documentos em seu cotidiano. Tornou-se necessária a intervenção do mediador para orientar a leitura das tabelas, esclarecer a aplicação das tarifas e explicitar a relação entre o consumo registrado e o valor final da conta.

Também foram observadas dificuldades na realização das operações aritméticas envolvidas, especialmente na multiplicação de números decimais. Em muitos casos, os estudantes recorreram ao uso da calculadora, o que demandou acompanhamento por parte do mediador, com o objetivo de garantir a compreensão dos procedimentos realizados. Apesar dessas dificuldades, houve participação ativa dos alunos na tentativa de validar os valores apresentados nas contas, com discussões coletivas acerca dos resultados obtidos e dos caminhos utilizados para chegar a eles.

3.4.3 Situação-problema 3

A Situação-problema 3 teve como objetivo ampliar a análise das contas de água e de energia elétrica, levando os estudantes a comparar os resultados obtidos na etapa anterior e a

identificar outros tipos de cobrança presentes nos documentos, como tarifas fixas de cobrança, tarifa de iluminação pública, tarifa de esgoto. Nessa fase da sequência didática, buscou-se evidenciar como estas cobranças são efetuadas e de que forma elas impactam no valor final.

Para seu desenvolvimento, os estudantes foram conduzidos a retomar os cálculos realizados na Situação-problema 2 e analisar, com maior atenção, as diferentes parcelas que compõem o valor total das contas. A identificação das cobranças fixas e proporcionais foi realizada com base nas informações organizadas nas tabelas de referência previamente disponibilizadas, as quais permitiram comparar valores e distinguir a natureza das diferentes tarifas (ver apêndice tabelas 14 e 15).

O enunciado proposto foi:

- Ao comparar os resultados obtidos na questão anterior, identifique outros tipos de cobrança presentes nas contas analisadas.

Objetivo

Levar os estudantes a identificar a existência de taxas adicionais nas contas de água e de energia elétrica, distinguindo cobranças fixas e cobranças proporcionais ao consumo.

Competência e habilidades da BNCC mobilizadas

A atividade relaciona-se à competência específica EM13MAT01 da BNCC, ao incentivar os estudantes a interpretar informações presentes em documentos do cotidiano e a analisar relações entre diferentes grandezas.

No âmbito das habilidades, destaca-se a EM13MAT101, que envolve a análise da variação entre grandezas em diferentes contextos. Ao distinguir cobranças fixas e cobranças proporcionais ao consumo, os estudantes ampliam a compreensão sobre as relações matemáticas presentes nas contas analisadas e sobre a composição do valor total cobrado.

Resposta esperada

Esperava-se que os estudantes identificassem, na conta de energia elétrica, cobranças como a contribuição de iluminação pública e, na conta de água, a tarifa fixa e a cobrança referente ao serviço de esgoto, reconhecendo que essas parcelas apresentam naturezas distintas em relação ao consumo.

Observações sobre a prática

Durante a realização da atividade, os estudantes identificaram que, na conta de água, há cobranças que independem diretamente do volume consumido, como a tarifa fixa, além da cobrança pelo serviço de esgoto, cujo valor está associado ao consumo de água. Na conta de energia elétrica, os alunos reconheceram a presença da contribuição de iluminação pública, compreendendo que essa cobrança não varia proporcionalmente ao consumo mensal.

Essas observações possibilitaram a distinção entre valores fixos e valores proporcionais,

ampliando a compreensão dos estudantes acerca da composição do valor total das contas analisadas. No entanto, foram novamente registradas dificuldades na realização de cálculos envolvendo números inteiros, percentuais e valores decimais, o que exigiu intervenções pontuais do mediador ao longo da atividade, especialmente para esclarecer a aplicação dos percentuais e a interpretação dos valores apresentados nas tabelas.

3.4.4 Situação-problema 4

Na Situação-problema 4, os estudantes foram conduzidos à formalização matemática das relações observadas nas etapas anteriores da sequência didática. A construção das expressões algébricas foi orientada pelos dados sistematizados nas tabelas de referência, utilizadas como instrumento metodológico para a organização das informações e para a generalização das relações observadas entre consumo e valor pago (ver Apêndice, Tabelas 14 e 15). O foco dessa atividade foi a construção de expressões algébricas que representassem o valor pago em função do consumo mensal, explicitando a relação entre as grandezas envolvidas.

Inicialmente, os estudantes retomaram as análises realizadas nas Situações-problema 2 e 3, nas quais foram identificadas as parcelas fixas e as parcelas proporcionais ao consumo presentes nas contas de água e de energia elétrica. Com base nessas informações, os alunos foram orientados a organizar os dados de forma a generalizar a relação entre consumo e valor pago, reconhecendo o consumo como variável independente e o valor cobrado como variável dependente.

O enunciado apresentado foi:

Utilize as tabelas apresentadas para obter a expressão matemática que representa o valor pago em função de x quilowatts-hora na conta de energia elétrica e em função de x metros cúbicos na conta de água.

Objetivo

Obter as leis de formação de funções afins que expressem as cobranças presentes nas contas analisadas, a partir da identificação das parcelas fixas e variáveis que compõem o valor final.

Competência e habilidades da BNCC mobilizadas

Esta etapa da sequência didática relaciona-se diretamente à competência específica EM13MAT01 da BNCC, ao propor que os estudantes utilizem conceitos matemáticos para modelar situações reais.

Destaca-se especialmente a habilidade EM13MAT302, que orienta a construção de modelos matemáticos empregando funções polinomiais de primeiro ou segundo grau para resolver problemas em diferentes contextos. Ao construir expressões algébricas que representam o valor pago em função do consumo, os estudantes mobilizam conceitos fundamentais do estudo das funções afins, interpretando as relações entre as grandezas envolvidas e formalizando

matematicamente essas relações.

Resposta esperada

Esperava-se que os estudantes construíssem modelos matemáticos a partir da análise dos dados apresentados, considerando a presença de tarifas fixas e variáveis. Para a conta de água, os modelos caracterizam uma função definida por partes, em função da existência de diferentes faixas de consumo. Para a conta de energia elétrica, esperava-se a construção de uma função afim simples.

Observações sobre a prática

Nessa etapa, observou-se que as atividades desenvolvidas anteriormente foram fundamentais para a realização da tarefa, pois possibilitaram aos estudantes, em sua grande maioria, compreender o funcionamento das contas e as relações entre as grandezas envolvidas. A construção das expressões algébricas ocorreu de forma progressiva, apresentando maior complexidade na modelagem da conta de água, em razão da existência de múltiplas faixas de consumo.

Durante a atividade, o mediador acompanhou a elaboração dos modelos, auxiliando os estudantes na organização das informações, na identificação das variáveis envolvidas e na escrita das expressões algébricas. A partir das expressões obtidas, foi apresentada aos alunos a definição formal de função afim, conforme Dante (2008), estabelecendo a relação entre a prática desenvolvida e o conteúdo matemático sistematizado.

Como etapa final da Situação-problema 4 e com a finalidade de validar a aprendizagem dos estudantes, foi proposta uma atividade complementar envolvendo o cálculo da conta real de consumo de água da escola. Inicialmente, os alunos tiveram acesso apenas ao volume total de água consumido pela instituição, expresso em metros cúbicos, sem que fosse divulgado o valor efetivamente pago. A partir desse dado, os estudantes foram convidados a estimar o valor aproximado da conta mensal da escola, utilizando os modelos matemáticos construídos anteriormente.

Para explicitar a articulação entre as atividades propostas, os conceitos matemáticos mobilizados e as orientações curriculares da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apresenta-se no Tabela 13 uma síntese do alinhamento pedagógico da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa.

Ao longo das quatro situações-problema descritas nesta seção, buscou-se organizar um percurso pedagógico que partisse da análise de situações concretas do cotidiano dos estudantes e conduzisse progressivamente à formalização matemática do conceito de função afim. As atividades foram estruturadas de modo a favorecer a mobilização de conhecimentos prévios, a interpretação de dados presentes em documentos reais, a realização de cálculos e a construção de modelos matemáticos capazes de representar as relações entre consumo e valor cobrado nas contas analisadas. A partir das interações estabelecidas em sala de aula, das produções escritas dos estudantes e das observações registradas durante a aplicação da sequência didática,

foram produzidos os dados que fundamentam a análise apresentada no capítulo seguinte, no qual se discutem os principais indícios de aprendizagem e as dificuldades observadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

3.5 Análise dos Resultados

A análise dos resultados desta pesquisa fundamenta-se nas observações realizadas durante a aplicação da sequência didática, nas interações estabelecidas entre os estudantes e o mediador, bem como nas produções desenvolvidas ao longo das situações-problema propostas. A interpretação desses dados busca compreender de que maneira a utilização de situações extraídas do cotidiano, mediadas pela análise de contas de água e de energia elétrica, contribuiu para o ensino e a aprendizagem das funções afins no Ensino Médio, em consonância com o problema de pesquisa que orienta esta investigação.

A interpretação dos dados foi conduzida à luz dos pressupostos da Pedagogia Histórico-Crítica, compreendendo o processo de ensino e aprendizagem como um movimento que parte da prática social dos estudantes, avança pela problematização e instrumentalização dos conhecimentos e culmina em um nível mais elaborado de compreensão da realidade. Nesse contexto, as contas de água e de energia elétrica foram utilizadas como instrumentos pedagógicos para aproximar o conteúdo matemático de situações concretas do cotidiano, favorecendo a construção de significados para o conceito de função afim.

Em consonância com a abordagem qualitativa adotada nesta pesquisa, a análise não se orienta pela mensuração estatística de resultados, mas pela compreensão dos processos de aprendizagem mobilizados ao longo da intervenção pedagógica, considerando as estratégias utilizadas pelos estudantes, as dificuldades evidenciadas e os significados atribuídos aos conceitos matemáticos trabalhados.

Para fins de organização e clareza expositiva, a análise foi estruturada a partir das quatro situações-problema que compuseram a sequência didática, permitindo acompanhar o percurso formativo desenvolvido ao longo das atividades. Cada situação é discutida à luz das competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente aquelas relacionadas à leitura e interpretação de dados, à análise da variação entre grandezas e à construção de modelos matemáticos em contextos reais.

Antes da análise individual das situações-problema, é importante destacar que as atividades que compuseram a sequência didática foram organizadas de forma progressiva, de modo a conduzir os estudantes da observação de informações presentes em documentos do cotidiano à formalização matemática das relações entre grandezas. Assim, a Situação-problema 1 teve caráter diagnóstico, voltado ao levantamento de conhecimentos prévios; a Situação-problema 2 concentrou-se na compreensão dos critérios de cálculo presentes nas contas analisadas; a Situação-problema 3 favoreceu a identificação de parcelas fixas e variáveis associadas ao consumo; e a Situação-problema 4 conduziu os estudantes à construção das expressões algébricas

que representam as relações funcionais observadas. Essa organização permitiu acompanhar o desenvolvimento gradual do pensamento funcional ao longo da sequência didática, aspecto que orienta a análise apresentada nas subseções seguintes.

3.5.1 Análise da Situação-problema 1: diagnóstico inicial e ativação dos conhecimentos prévios

A Situação-problema 1 teve como objetivo central valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes e promover a familiarização com documentos do cotidiano, especificamente as contas de água e de energia elétrica. Essa atividade configura-se como a etapa da prática social inicial, conforme os pressupostos da Pedagogia Histórico-Crítica, uma vez que parte da realidade concreta dos alunos, tomando como referência elementos presentes em seu cotidiano para desencadear o processo de ensino-aprendizagem.

Nessa etapa, buscou-se identificar quais informações os estudantes eram capazes de reconhecer, interpretar e mobilizar a partir da análise desses documentos. Assim, foram explorados elementos como: identificação do consumidor, endereço da unidade, período de consumo, datas de leitura e de vencimento, histórico de consumo, valores tarifários, taxas adicionais, tributos, bem como o valor total a pagar. Além disso, investigou-se a compreensão dos estudantes acerca das unidades de medida envolvidas, tais como metro cúbico (m^3), no caso da água, e quilowatt-hora (kWh), no caso da energia elétrica.

Do ponto de vista curricular, essa etapa dialoga com a competência EM13MAT01 da Base Nacional Comum Curricular, ao mobilizar conhecimentos matemáticos para interpretar situações em contextos reais. Em particular, destaca-se a habilidade EM13MAT102, relacionada à leitura, interpretação e análise de informações apresentadas em tabelas, registros numéricos e documentos do cotidiano.

No que se refere à dinâmica de participação, observou-se que, em um primeiro momento, o envolvimento dos estudantes foi pouco efetivo. Tal comportamento pode ser compreendido em função de dois fatores principais: o fato de a atividade não possuir caráter avaliativo formal e, portanto, não estar diretamente vinculada à atribuição de nota, bem como por não ter sido conduzida pelo professor regente da turma. Esses elementos parecem ter influenciado a postura inicial dos alunos, que se mostraram, em parte, desinteressados ou pouco participativos.

Entretanto, esse cenário foi gradativamente modificado ao longo da atividade. A mediação realizada, aliada ao incentivo à participação e à criação de um ambiente favorável ao diálogo, contribuiu para que os estudantes passassem a se envolver de forma mais ativa. À medida que o debate coletivo foi sendo instaurado, observou-se que alunos inicialmente menos engajados passaram a participar com maior frequência, apresentando opiniões, levantando questionamentos e interagindo com os colegas. Esse movimento evidencia o papel fundamental da mediação pedagógica na mobilização dos estudantes e no favorecimento de práticas discursivas em sala de aula.

As observações realizadas durante a atividade mostraram que os estudantes reconheciam diversos elementos constitutivos das contas, tais como dados do consumidor, período de consumo, datas de vencimento e valor final a pagar, conforme evidenciado nos registros apresentados nas Figuras 24 e 25 e que a situação 1 dialoga com a primeira fase da operacionalização da PHC, a prática social inicial, que valoriza o conhecimento prévio do aluno.

Esse reconhecimento indica que os alunos mantêm uma relação cotidiana com esses documentos, ainda que predominantemente operacional e pouco reflexiva.

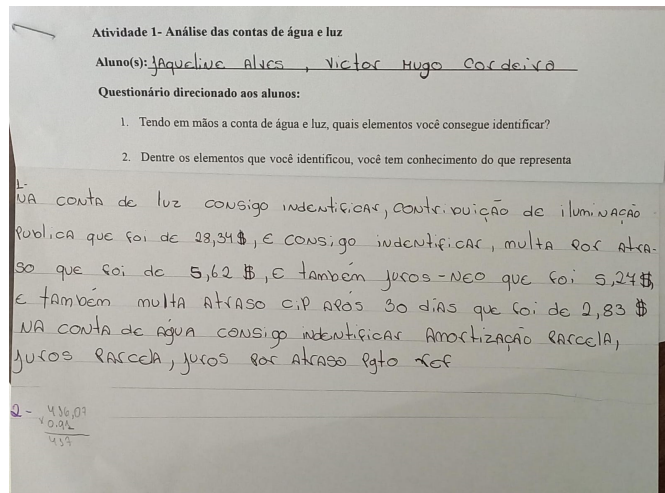


Figura 24 – Produção dos estudantes - Registro 1.

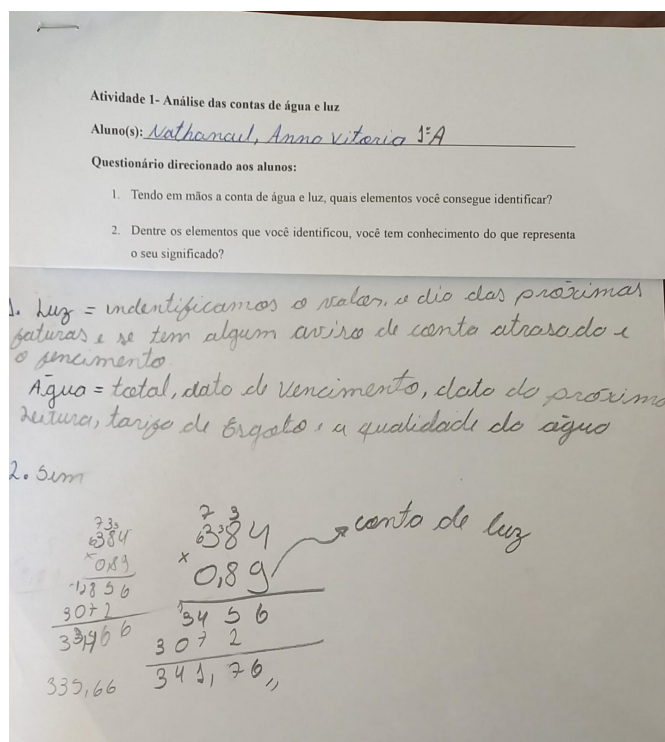


Figura 25 – Produção dos estudantes- Registro 2.

Entretanto, ao aprofundar a análise das produções e das falas dos estudantes,

foi possível identificar situações específicas que não foram compreendidas pelos alunos. Embora demonstrassem reconhecer diversos elementos presentes nas contas, evidenciou-se o desconhecimento quanto à forma de composição dos valores cobrados.

De maneira mais precisa, observou-se que os estudantes não conseguiam identificar como o valor final da fatura era calculado, tampouco compreendiam a relação entre o consumo registrado e o custo correspondente. Não foi evidenciada, por exemplo, a compreensão de que o valor cobrado resulta da combinação entre uma parcela fixa e outra variável, esta última dependente da quantidade consumida, expressa em unidades como metro cúbico (m^3) ou quilowatt-hora (kWh).

Além disso, verificou-se que os alunos não reconheciam a incidência de tarifas diferenciadas, taxas adicionais e tributos, nem conseguiam distinguir esses componentes no detalhamento da conta. Também não foi observada a capacidade de estabelecer relações matemáticas entre as grandezas envolvidas, como a proporcionalidade entre consumo e valor pago, ou mesmo identificar padrões de variação a partir do histórico de consumo apresentado nas faturas.

Esse conjunto de evidências indica que, embora os estudantes estejam familiarizados com o uso cotidiano desses documentos, essa familiaridade não se traduz em compreensão conceitual acerca de sua estrutura matemática. Tal constatação evidencia uma lacuna entre a prática social vivenciada e o conhecimento sistematizado, caracterizando um distanciamento que justifica a escolha desses documentos como ponto de partida para o ensino de funções afins.

Durante as discussões coletivas, observou-se participação ativa dos estudantes, com manifestações orais, questionamentos e formulação de hipóteses sobre o funcionamento das contas. Esse envolvimento indica que a problematização de situações concretas favoreceu o engajamento e o diálogo em sala de aula, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à comunicação matemática, à argumentação e à explicitação de ideias.

Ao mesmo tempo, as falas dos estudantes evidenciaram fragilidades conceituais relacionadas à interpretação de valores numéricos, ao entendimento de unidades de medida, como metro cúbico e quilowatt-hora, e ao domínio de operações básicas com números decimais. Essas dificuldades indicam a necessidade de aprofundamento de habilidades ligadas à compreensão de grandezas, ao uso de números racionais e à análise de relações entre variáveis, aspectos centrais para a construção do pensamento funcional no Ensino Médio.

Do ponto de vista formativo, essa etapa cumpriu um papel diagnóstico, ao possibilitar a identificação dos conhecimentos prévios e das principais dificuldades dos estudantes. A identificação dessas limitações não foi tratada como deficiência, mas como ponto de partida para a organização das etapas subsequentes da sequência didática, em consonância com os pressupostos da Pedagogia Histórico-Crítica.

Os dados coletados nessa etapa orientaram o planejamento das intervenções pedagógicas posteriores, especialmente aquelas voltadas à problematização das relações entre consumo e

custo, à distinção entre cobranças fixas e variáveis e à formalização das relações funcionais, assegurando a progressão conceitual necessária à compreensão da função afim.

Por fim, destaca-se que, a partir das evidências levantadas na prática social inicial, foram estruturadas situações de problematização com o objetivo de tensionar as compreensões dos estudantes acerca da relação entre consumo e custo, conduzindo-os à necessidade de construção de modelos matemáticos que representassem tais relações.

3.5.2 Análise da Situação-problema 2: critérios de cálculo e instrumentalização matemática

A Situação-problema 2 teve como objetivo aprofundar a análise iniciada na etapa anterior, direcionando o olhar dos estudantes para os critérios de cálculo presentes nas contas de água e de energia elétrica. Essa etapa corresponde ao momento da problematização, conforme os pressupostos da Pedagogia Histórico-Crítica, no qual os alunos são estimulados a identificar, explicitar e investigar o problema presente na realidade analisada, neste caso, compreender de que maneira são efetivamente calculados os valores cobrados nas contas.

Nesse contexto, a atividade foi estruturada de modo a levar os estudantes a questionar e analisar os dados anteriormente reconhecidos, deslocando-os de uma leitura descritiva para uma postura investigativa. O problema central colocado pode ser sintetizado na seguinte questão: como se estabelece a relação entre o consumo registrado e o valor final a pagar?

Do ponto de vista curricular, essa etapa mobiliza a competência EM13MAT01 da Base Nacional Comum Curricular, bem como a habilidade EM13MAT101, relacionada à interpretação de situações que envolvem variação entre grandezas. Ao analisar os critérios de cobrança, os estudantes foram levados a estabelecer relações entre consumo e custo, utilizando procedimentos matemáticos em um contexto significativo.

Para o desenvolvimento dessa etapa, os estudantes realizaram a Atividade 2, apresentada no Apêndice B.2, estruturada com base nas Tabelas 15 e 16. Essas tabelas organizaram informações como consumo em kWh, valor unitário da tarifa e valor total cobrado, favorecendo a leitura sistemática dos dados e a identificação de possíveis regularidades. Esse procedimento possibilitou a articulação entre diferentes registros de representação, como tabelas, valores numéricos e anotações algébricas iniciais.

Durante a realização da atividade, foi possível observar que os estudantes passaram a mobilizar conhecimentos aritméticos, especialmente a operação de multiplicação, na tentativa de compreender a composição dos valores apresentados nas contas. Em particular, muitos alunos buscaram verificar se o valor total poderia ser obtido a partir do produto entre a quantidade consumida e o valor unitário da tarifa, evidenciando um movimento inicial de modelagem da situação.

Entretanto, esse processo não ocorreu de forma imediata ou homogênea. As observações

indicaram que, embora os estudantes reconhecessem a existência de uma relação entre consumo e valor pago, muitos apresentaram dificuldades em operacionalizar essa relação. De modo mais específico, foi identificado que uma parcela significativa dos estudantes apresentava dificuldades na realização de operações com números decimais, especialmente na multiplicação e na organização dos cálculos. Diante dessa limitação, tornou-se necessária a intervenção do mediador, que atuou na retomada de procedimentos operatórios e na orientação quanto às estratégias adequadas para a resolução dessas operações, possibilitando a continuidade da atividade.

A Figura 26 apresenta registros dessas tentativas de operacionalização dos cálculos, evidenciando os primeiros movimentos dos estudantes na busca por compreender a relação entre as grandezas envolvidas. Tais registros revelam não apenas as dificuldades enfrentadas, mas também indicam avanços iniciais na organização do raciocínio matemático, caracterizando um momento de transição em que os alunos começam a mobilizar ferramentas matemáticas de forma mais estruturada. Esse movimento sinaliza a passagem da problematização para a etapa de instrumentalização, na qual se inicia a construção de um modelo matemático capaz de representar a situação analisada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS – UFT
Câmpus Universitário Professor Dr. Sérgio Jacintho Leonor – Arraias-TO

PROFMAT MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Mestranda: Leonor Alves de Santana Campos Pereira
Orientadora: Dra Giselle Detomazi de Almeida
Profa colaboradora: Eluceny Lacerda Lima
Alunos: *Marcos Vinícius e Wellington*
Data: 17/07/2025

Análise das contas de água e luz

1-Análise da conta de luz:
Com base nos dados coletados na conta de Luz, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente.

Composição da cobrança da conta de energia elétrica (elementos fundamentais)		
Quantidade medida em Kwh na unidade consumidora	Valor cobrado pelo kwh	Valor
404	0,85	343,40
contribuição de iluminação Pública Base do cálculo	Percentual adotado	46,40
Valor total apurado		389,80

Para composição da Contribuição de Iluminação Pública CPI, adotaremos uma taxa percentual de 13,5% sobre o valor apurado da unidade consumidora.

a) Considerando a observação de sua conta de luz qual o menor valor possível para essa cobrança?

Como kWh a 0,85 centavos

b) Com base no que foi exposto vamos escrever a lei formação que representa a cobrança de sua conta de luz

404 kWh a 0,85 centavos $F(x) = 0,85 \cdot x$

404	0,85	408
	0,85	2020
		3232
		34340

343,40	
46,40	
389,80	

343,40	
46,40	
389,80	

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)
Av. Jurandir de Sousa e Abreu, S/N, Seter Buriticaba | 77330-000 | Arraias-TO
(63) 3653-3409 | www.uft.edu.br/arraias | profmat_arraias@uft.edu.br

Figura 26 – Registro 3- Aluno- Análise das contas de luz.

Além disso, verificou-se que parte dos estudantes não considerava, inicialmente, a presença de outros componentes na composição da conta, como taxas fixas e encargos adicionais, o que levava a discrepâncias entre os valores calculados e aqueles apresentados nas faturas.

Esse descompasso atuou como elemento desencadeador de novas reflexões, levando os alunos a revisitar seus cálculos e a questionar os procedimentos adotados.

A análise dos registros produzidos pelos estudantes, como cálculos realizados, anotações e tentativas de validação dos resultados, evidencia esse movimento de construção do problema. Em alguns casos, observa-se a tentativa de organizar os dados de forma mais sistemática, enquanto em outros, percebe-se a formulação inicial de expressões que indicam uma aproximação com a ideia de generalização, ainda que de forma incipiente.

Apesar das dificuldades identificadas, os estudantes demonstraram interesse em confrontar os valores por eles obtidos com aqueles apresentados nas contas reais. Esse movimento favoreceu a participação nas discussões coletivas e contribuiu para o desenvolvimento de uma postura investigativa, na medida em que os alunos passaram a questionar a validade de seus próprios resultados e a buscar justificativas para as diferenças encontradas.

Do ponto de vista formativo, essa etapa desempenhou papel fundamental ao promover a explicitação do problema a ser resolvido e ao evidenciar a insuficiência de estratégias puramente aritméticas para explicar completamente a situação. Esse reconhecimento cria condições para a transição à etapa seguinte da Pedagogia Histórico-Crítica, a instrumentalização, na qual os estudantes serão conduzidos à apropriação de ferramentas matemáticas mais elaboradas, como a formalização da função afim.

As produção apresentada na Figura 26 constitui evidência desse processo de problematização, revelando tanto os avanços quanto as dificuldades enfrentadas.

Assim, a Situação-problema 2 consolidou-se como um momento importante da sequência didática, ao promover a transição entre a identificação inicial dos elementos presentes nas contas e a necessidade de compreender, de forma mais estruturada, as relações matemáticas que determinam os valores cobrados.

“Nesse sentido, a problematização consistiu em transformar um conhecimento cotidiano, inicialmente percebido de forma fragmentada, em um objeto de investigação, cuja compreensão demandou a superação de explicações empíricas e a busca por relações matemáticas mais sistematizadas.”

3.5.3 Análise da Situação-problema 3: identificação de parcelas fixas e variáveis

A Situação-problema 3 teve como objetivo aprofundar a análise dos critérios de cobrança presentes nas contas de água e de energia elétrica, direcionando o olhar dos estudantes para a distinção entre parcelas fixas e parcelas variáveis em função do consumo. Essa etapa representou um avanço no processo de instrumentalização, ao possibilitar a identificação de elementos estruturantes das funções afins a partir da análise de dados reais.

No exemplo apresentado na Figura 27, observa-se que o registro do estudante evidencia uma tentativa de explicitação da lei de formação associada à cobrança, ainda que de maneira não

formalizada. Nota-se a presença de termos relacionados à tarifa e a organização dos valores na tabela de composição, o que indica um movimento de sistematização do raciocínio matemático e uma aproximação com a estrutura algébrica subjacente.

Aluna colaboradora: Eluzeny Lacerda Lima
 Alunos: Victor Hugo Fabryella Santos
 Data: 16/07/2025

Análise das contas de água e luz

1-Análise da conta de luz:
 Com base nos dados coletados na conta de Luz, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente.

Composição da cobrança da conta de energia elétrica (elementos fundamentais)		
Quantidade medida em Kwh na unidade consumidora	Valor cobrado pelo kwh	Valor
453 KWH	0,86	389,08
contribuição de iluminação Pública Base do cálculo	Percentual adotado	
13,5% - 389,08		52,58
Valor total apurado		441,66

Para composição da Contribuição de Iluminação Pública CPI, adotaremos uma taxa percentual de 13,5% sobre o valor apurado da unidade consumidora.

a) Considerando a observação de sua conta de luz qual o menor valor possível para essa cobrança?

b) Com base no que foi exposto vamos escrever a lei formação que representa a cobrança de sua conta de luz

$$f(x) = 0,86x + Taxa$$

Figura 27 – Registro 4 - Identificação de tarifas fixas na conta de luz.

A análise desse registro permite observar que o estudante identifica corretamente a relação entre o consumo de energia elétrica e o valor cobrado, ao multiplicar a quantidade consumida (453 kWh) pelo valor unitário da tarifa R\$ 0,86, obtendo um valor aproximado de R\$ 389,08. Além disso, incorpora ao cálculo a contribuição de iluminação pública, determinada como um percentual adicional 13,5% sobre o valor do consumo, resultando em um acréscimo de aproximadamente R\$ 52,58.

Esse procedimento evidencia não apenas o domínio das operações aritméticas envolvidas, mas também a compreensão de que o valor total da conta é composto por diferentes parcelas, incluindo uma componente proporcional ao consumo e outra associada a encargos adicionais. Ademais, ao registrar uma expressão do tipo $f(x) = 0,86x + taxa$, o estudante demonstra uma aproximação significativa com a estrutura da função afim, indicando um avanço no processo de generalização.

Sob a perspectiva curricular, essa etapa relaciona-se ao desenvolvimento da habilidade EM13MAT101 da Base Nacional Comum Curricular, que envolve a análise da variação entre grandezas em diferentes contextos. A identificação de parcelas fixas e parcelas proporcionais ao consumo favoreceu a compreensão das relações entre variáveis, preparando os estudantes para a formalização das funções afins nas etapas subsequentes da sequência didática.

A diferenciação entre cobranças fixas e proporcionais ao consumo foi favorecida pela consulta às tabelas de referência utilizadas na prática pedagógica, que encontram-se em anexo no Apêndice C. A partir dessa análise, os alunos passaram a reconhecer que determinadas parcelas do valor total permanecem constantes, independentemente do volume consumido, enquanto outras variam de forma diretamente proporcional ao consumo registrado.

nesse contexto, uma transição relevante em direção à etapa de catarse, na qual o estudante passa a sintetizar os conhecimentos construídos, articulando a problematização inicial com os instrumentos matemáticos apropriados na fase de instrumentalização. Esse movimento se evidencia, especialmente, quando o aluno consegue expressar a relação entre consumo e valor pago por meio de uma lei de formação, ainda que em processo de formalização, indicando a construção de um modelo matemático capaz de representar a situação analisada.

3.5.4 Análise da Situação-problema 4: formalização algébrica e modelagem das relações funcionais

Sob a perspectiva da Pedagogia Histórico-Crítica, essa etapa corresponde a um nível mais elaborado do processo de ensino, caracterizando a transição da instrumentalização para a catarse, momento em que o estudante passa a sintetizar os conhecimentos construídos e a expressá-los de forma consciente e sistematizada. Nesse contexto, observa-se que os alunos passaram a reconhecer o consumo como variável independente e o valor cobrado como variável dependente, estabelecendo relações funcionais que articulam parcelas fixas e variáveis.

No que se refere às orientações da Base Nacional Comum Curricular, essa etapa mobiliza especialmente a habilidade EM13MAT302, que envolve a construção de modelos matemáticos por meio de funções polinomiais do primeiro grau para representar situações reais. A elaboração das expressões algébricas pelos estudantes constituiu um momento central da sequência didática, ao evidenciar a formalização das relações identificadas nas etapas anteriores.

A análise do registro apresentado na Figura 29 evidencia que o estudante foi capaz de organizar os dados da conta de água em uma estrutura tabular, identificando corretamente as faixas de consumo, os valores unitários e os respectivos custos associados. Observa-se que o aluno registra explicitamente a relação entre consumo e valor cobrado, indicando uma tentativa de generalização por meio de uma expressão algébrica do tipo $f(x)=ax+b$, ainda que com ajustes em processo de refinamento.

Com base nos dados coletados na conta de água, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente. Neste modelo utilizaremos uma conta residencial e uma pública (a conta de água da escola em que você estuda)

Residencial Padrão		Fixa R\$ 10,18	
Valor medido		13	
Faixa m ³	Volume da faixa	Aliquota preço por m ³	Valor da taxa em (R\$)
1 a 7	7	3,76	26,32
8 a 13	6	4,51	27,06
14 a 20		8,94	
21 a 30		12,97	
31 a 45		19,45	
acima de 45		25,28	
Tarifa variável de água			53,38
Tarifa variável de esgoto residencial padrão 100%			53,38
Tarifa fixa de água residencial padrão			10,18
Tarifa fixa de esgoto residencial padrão 100%			10,18
Total a pagar			127,12

a) Qual o menor valor a ser pago em sua conta de água?
10,18 R\$

b) Vamos escrever a lei de formação que representa a cobrança da conta de água que você está analisando.

$$F(x) = 3,76x + 13,76$$

$$F(x) = 4,51x + 13,76$$

Figura 29 – Registro 6 - Formalização algébrica.

Esse registro revela que o estudante já compreende a necessidade de representar a situação por meio de uma lei de formação, articulando os dados numéricos com uma estrutura algébrica. Tal evidência caracteriza um avanço significativo, pois demonstra a superação de uma abordagem exclusivamente aritmética em direção à modelagem matemática.

Na Figura 30, observa-se uma formalização ainda mais direta no contexto da conta de energia elétrica. O estudante registra uma expressão do tipo $f(x) = 0,87x +$ taxa de iluminação pública, evidenciando a compreensão de que o valor total da conta pode ser representado por uma função afim composta por uma parcela proporcional ao consumo e uma parcela fixa associada a encargos adicionais.

b) Com base no que foi exposto vamos escrever a lei formação que representa a cobrança de sua conta de luz

$$F(x) = 0,87x + \text{taxa de iluminação}$$

Figura 30 – Registro 7 - Formalização algébrica.

Esse tipo de registro indica que o estudante não apenas identifica os elementos constitutivos da função, mas também consegue expressar a relação funcional de forma sintética, evidenciando a consolidação do pensamento algébrico. Trata-se de um indicativo claro da catarse, na medida em que o aluno passa a compreender e explicitar o modelo matemático construído ao longo da sequência didática.

Durante esse processo, foram identificadas dificuldades na transição entre os registros numérico, tabular e algébrico, especialmente na generalização de padrões para a construção de expressões válidas em todo o domínio considerado. Essas dificuldades são esperadas nesse

nível de aprendizagem e reforçam a importância da mediação pedagógica na sistematização dos conhecimentos.

Como etapa complementar, foi proposta uma atividade de validação envolvendo o cálculo da conta real de água da escola. A análise do registro apresentado na Figura 31 evidencia que os estudantes mobilizaram os conhecimentos construídos ao longo da sequência didática para estimar e posteriormente calcular o valor da conta, organizando os dados em tabelas e realizando os cálculos necessários.

		989 m³	
faixa			
0 a 4	4	7,76	30,84
5 a 7	3	9,70	29,10
8 a 10	3	12,72	38,16
11 a 40	30	15,52	465,6
ótimo de 40	949	18,31	
tarifa A			S=
tarifa E			
fixa A			86,71
fixa E			26,71
Total			

2,21	
1836	989
1949	40
16379	949
7424+	
9+	

22	
7,76	15,52
14	30
30,84	80,00
29,10	465,6+
9,70	465,60
3	
29,10	
12,72	
3	
3816	

Figura 31 – Registro 8 - Conta de água da escola.

Observa-se, nesse registro, a organização das faixas de consumo, a aplicação das tarifas correspondentes e a realização de cálculos que culminam na obtenção de um valor final. Ainda que com algumas imprecisões operatórias, o procedimento adotado demonstra que os estudantes foram capazes de aplicar o modelo matemático em uma situação real, o que evidencia a internalização dos conceitos trabalhados.

O confronto entre os valores estimados e o valor real pago pela escola constituiu um momento relevante de validação dos modelos construídos, favorecendo a reflexão sobre a adequação dos procedimentos adotados e a consistência dos resultados obtidos.

A discussão coletiva dos resultados extrapolou o aspecto estritamente matemático, ao suscitar reflexões sobre o consumo consciente de água em um espaço coletivo, considerando fatores como número de usuários, práticas de uso e possíveis desperdícios. Nesse sentido,

o conhecimento matemático passou a ser mobilizado como instrumento de análise crítica da realidade.

Sob a ótica da Pedagogia Histórico-Crítica, essa etapa caracteriza o retorno à prática social, em um nível mais elaborado, no qual o conhecimento sistematizado é utilizado para interpretar, analisar e intervir na realidade, o que na PHC é definido como prática social final. Assim, a Situação-problema 4 consolida o momento da catarse, evidenciado pela capacidade dos estudantes de construir, interpretar e aplicar modelos matemáticos de forma consciente.

A análise desenvolvida ao longo das quatro situações-problema permite compreender o percurso formativo vivenciado pelos estudantes, evidenciando a passagem da identificação de informações em contextos cotidianos para a construção e formalização de modelos matemáticos que representam relações de dependência entre grandezas.

Os resultados indicam que a utilização de situações reais, mediadas pela análise de documentos do cotidiano, favoreceu o engajamento dos estudantes, a mobilização de conhecimentos prévios e o desenvolvimento do pensamento funcional. A articulação entre leitura, cálculo, interpretação e discussão coletiva contribuiu para atribuir significado aos conceitos matemáticos, especialmente no que se refere às funções afins.

Desse modo, o percurso estruturado à luz da Pedagogia Histórico-Crítica — partindo da prática social inicial, passando pela problematização e instrumentalização, culminando na catarse e prática social final — demonstrou-se eficaz na promoção de uma aprendizagem significativa, crítica e contextualizada, respondendo à questão de pesquisa que orienta esta investigação.

3.5.5 Procedimentos de análise dos dados à luz da pesquisa qualitativa

A análise dos dados desta pesquisa foi conduzida à luz dos pressupostos da abordagem qualitativa, considerando a natureza interpretativa das informações produzidas ao longo da aplicação da sequência didática. Nesse contexto, buscou-se compreender não apenas os resultados finais obtidos pelos estudantes, mas, sobretudo, o processo de construção do conhecimento matemático evidenciado em suas produções, registros escritos, falas e interações desenvolvidas durante as atividades.

A pesquisa qualitativa caracteriza-se pela valorização do contexto, da subjetividade e da interpretação dos fenômenos educacionais, permitindo ao pesquisador analisar os significados atribuídos pelos sujeitos às experiências vivenciadas. Dessa forma, os dados considerados nesta investigação foram constituídos por registros escritos dos estudantes, observações realizadas durante a aplicação das atividades, anotações dos alunos e imagens das produções desenvolvidas ao longo da sequência didática.

Destaca-se ainda que esta análise considerou como ponto de partida, as considerações feitas pela professora regente a respeito das dificuldades e características dos alunos envolvidos na aplicação da prática pedagógica, onde nos foi relatado que os estudantes ainda apresentavam

dificuldades decorrentes do período de ensino remoto emergencial vivenciado durante a pandemia, especialmente no que se refere à consolidação de conhecimentos matemáticos básicos. Esse contexto influenciou diretamente o desenvolvimento das atividades e foi considerado durante a interpretação dos dados produzidos.

Ressalta-se, ainda, que não foi possível realizar uma avaliação formal estruturada acerca da aplicação da sequência didática, em razão das condições pedagógicas e organizacionais do contexto investigado. Assim, a análise desenvolvida fundamentou-se principalmente na observação das falas dos estudantes, de seus registros escritos, da participação durante as discussões coletivas e da comparação entre os conhecimentos demonstrados no início e ao final da aplicação da sequência didática.

Como sugestão para a compreensão dos processos de análise em pesquisas qualitativas, indica-se a análise de conteúdo proposta por Bardin (2016), compreendida como um conjunto de técnicas voltadas à descrição, sistematização e interpretação de dados qualitativos. Segundo a autora, esse processo organiza-se em três etapas fundamentais: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

Nesse sentido, observam-se aproximações entre algumas ações realizadas durante a pesquisa e aspectos relacionados à etapa de pré-análise descrita por Bardin, especialmente nas discussões iniciais acerca do instrumento pedagógico a ser utilizado, levando-se em conta o perfil dos estudantes envolvidos na pesquisa. Assim como nas observações realizadas ao início da pesquisa, a prática social inicial, que refere-se a apresentação do objeto de estudo e a observação dos saberes já existentes do grupo, para a partir desse ponto se desenvolver os próximos passos que fazem parte da pré-análise.

Ao longo da aplicação da sequência didática, foram identificados elementos que dialogam com aspectos descritos por Bardin, especialmente no que se refere à observação das produções dos estudantes, das falas realizadas durante as discussões e da identificação de dificuldades e avanços relacionados à construção do pensamento funcional. Contudo, esse processo não foi formalmente sistematizado segundo protocolos de codificação e categorização, constituindo-se como uma análise interpretativa fundamentada nas observações realizadas.

Na verdade considera-se que não temos um único momento de pré-análise, observa-se outros pontos como: engajamento, participação, como ocorreu o envolvimento dos alunos e como a participação de alguns influenciou a participação de outros.

Ressalta-se, ainda, que os registros produzidos ao longo da pesquisa constituem um material significativo para futuras análises mais aprofundadas. Dessa forma, pretende-se posteriormente desenvolver uma sistematização desses dados à luz da análise de conteúdo de Bardin, organizando-os em formato de artigo científico, com o objetivo de ampliar a discussão acerca das potencialidades da sequência didática para o ensino de funções.

Entretanto a partir das observações e do tratamento do material produzido pelos alunos, foi possível identificar indícios de que a sequência didática contribuiu para o aprendizado

das funções afins, especialmente no que se refere à interpretação de situações-problema, à compreensão das relações entre grandezas, à análise das informações presentes nas contas de água e energia elétrica e à construção de expressões algébricas relacionadas a situações reais.

Ressalta-se que, em consonância com os pressupostos da pesquisa qualitativa, não se buscou a generalização dos resultados, mas sim a compreensão aprofundada do fenômeno investigado, considerando o contexto específico em que a pesquisa foi realizada. Dessa forma, os resultados apresentados refletem o processo de aprendizagem vivenciado pelos estudantes e permitem inferir a potencialidade da sequência didática como estratégia para o ensino de funções no Ensino Médio.

Como toda investigação de natureza qualitativa desenvolvida em contexto escolar real, esta pesquisa apresentou algumas limitações que devem ser consideradas na análise de seus resultados. Entre elas, destaca-se a presença de lacunas nos conhecimentos matemáticos básicos dos estudantes, possivelmente decorrentes do período de ensino remoto emergencial vivenciado durante a pandemia, o que impactou diretamente o desenvolvimento das atividades propostas e demandou intervenções pedagógicas adicionais. Soma-se a isso o fato de a aplicação da sequência didática ter sido conduzida por um mediador que não era o professor regente da turma, o que pode ter influenciado, especialmente nos momentos iniciais, o nível de engajamento e participação dos estudantes. Além disso, a pesquisa foi temporariamente interrompida em razão de uma greve, o que implicou a necessidade de reorganização do cronograma e adaptação das etapas da sequência didática após a retomada das atividades escolares. Tais fatores não invalidam os resultados obtidos, mas devem ser compreendidos como elementos constitutivos do contexto investigado.

Apesar dessas limitações, a pesquisa evidenciou importantes potencialidades no uso de sequências didáticas fundamentadas na Pedagogia Histórico-Crítica para o ensino de funções no Ensino Médio. A utilização de documentos do cotidiano, como contas de água e energia elétrica, mostrou-se uma estratégia eficaz para promover a contextualização do conhecimento matemático, favorecendo a mobilização dos conhecimentos prévios e atribuindo significado às atividades propostas. Observou-se que a organização do ensino em etapas articuladas — prática social inicial, problematização, instrumentalização e catarse — contribuiu para o desenvolvimento progressivo do pensamento funcional, possibilitando que os estudantes avançassem da interpretação de dados à construção e formalização de modelos matemáticos. Ademais, a proposta favoreceu o desenvolvimento de habilidades relacionadas à argumentação, à comunicação matemática e à análise crítica de situações reais, em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo investigar de que maneira o uso de situações presentes no cotidiano dos estudantes pode contribuir para o ensino e a aprendizagem das funções afins no Ensino Médio, tomando como instrumento pedagógico a análise de contas de consumo de água e de energia elétrica. Desenvolvida no âmbito de um mestrado profissional em Ensino de Matemática, a pesquisa buscou articular prática docente, investigação acadêmica e reflexão pedagógica em um contexto real de sala de aula, no qual documentos do cotidiano foram utilizados como ponto de partida para a compreensão das relações funcionais entre grandezas.

Os resultados obtidos indicam que a utilização de contas de consumo como recurso pedagógico favorece a atribuição de significado ao estudo das funções afins, ao permitir que os estudantes estabeleçam relações entre conceitos matemáticos e situações concretas de seu cotidiano. A análise das produções dos estudantes, das interações em sala de aula e das discussões coletivas evidenciou avanços progressivos na leitura e interpretação de tabelas, na validação de cálculos, na compreensão da variação entre grandezas e na construção de expressões algébricas associadas às funções afins.

O percurso formativo estruturado a partir das quatro situações-problema mostrou-se coerente e progressivo, permitindo acompanhar o movimento dos estudantes desde o reconhecimento inicial de informações presentes em documentos do cotidiano até a formalização matemática das relações funcionais envolvidas. À luz dos pressupostos da Pedagogia Histórico-Crítica, esse percurso evidenciou um movimento que partiu da prática social inicial, avançou pela problematização e instrumentalização dos conhecimentos e retornou à prática social em um nível mais elaborado de compreensão, integrando aspectos conceituais, procedimentais e formativos no ensino de Matemática.

Destaca-se, de modo particular, a atividade desenvolvida na Situação-problema 4, envolvendo o cálculo da conta real de consumo de água da escola. Essa etapa configurou-se como um momento de síntese e validação da aprendizagem, ao possibilitar que os estudantes aplicassem os conhecimentos construídos ao longo da sequência didática a uma situação concreta de interesse coletivo. Além de consolidar o conceito de função afim e de funções definidas por partes, essa atividade favoreceu reflexões sobre consumo consciente, responsabilidade coletiva e uso racional de recursos naturais, ampliando o papel formativo da Matemática para além da dimensão estritamente técnica.

Ao longo do desenvolvimento da sequência didática, evidenciou-se a centralidade do papel do professor como mediador do processo de aprendizagem. A atuação docente mostrou-se fundamental para orientar a leitura dos dados, problematizar as situações analisadas, auxiliar na validação dos cálculos e favorecer a transição entre diferentes registros de representação matemática. Essa mediação contribuiu para que os estudantes avançassem da execução de procedimentos para a compreensão conceitual das relações funcionais envolvidas, reforçando a importância de práticas pedagógicas intencionalmente planejadas e reflexivas.

A experiência desenvolvida em uma escola pública da rede de ensino do Distrito Federal reforça a relevância da proposta para contextos educacionais marcados pela heterogeneidade de perfis de aprendizagem e por desafios estruturais recorrentes. O uso de situações do cotidiano dos estudantes, como as contas de consumo e os dados institucionais da própria escola, mostrou-se uma alternativa viável para tornar o ensino de Matemática mais significativo, aproximando o conteúdo curricular da realidade vivenciada pelos alunos e favorecendo sua participação ativa nas atividades propostas.

Como resultado aplicado da presente pesquisa, foi desenvolvido um produto educacional apresentado em apêndice específico, consistente em uma sequência didática baseada na análise de situações do cotidiano para o ensino de funções afins. O material foi concebido de forma flexível e adaptável, possibilitando sua aplicação em diferentes contextos escolares e com variados conjuntos de dados, como contas de consumo, tabelas tributárias ou custos institucionais. Essa característica amplia seu potencial de uso por outros professores da Educação Básica e atende às finalidades do mestrado profissional, ao articular pesquisa acadêmica e prática docente.

Do ponto de vista pedagógico, esta pesquisa evidencia que a utilização de situações presentes no cotidiano dos estudantes pode constituir uma estratégia didática relevante para o ensino de funções afins no Ensino Médio. A análise de documentos reais, como contas de consumo de água e de energia elétrica, favorece a interpretação de dados, a compreensão das relações entre grandezas e a construção de representações algébricas associadas às funções. Ao aproximar o conteúdo matemático da realidade vivenciada pelos estudantes, essa abordagem contribui para atribuir significado ao estudo das funções, favorecendo o desenvolvimento do pensamento funcional e ampliando as possibilidades de construção de conhecimentos matemáticos em contextos escolares.

A organização dos apêndices permitiu documentar de maneira sistemática tanto a intervenção pedagógica realizada quanto o material didático produzido, conferindo transparência ao percurso metodológico adotado e fortalecendo a articulação entre teoria, prática e produto educacional. Os registros das produções dos estudantes constituem evidências empíricas que sustentam as análises apresentadas e possibilitam ao leitor compreender os processos de aprendizagem observados ao longo da sequência didática.

Assim, espera-se que esta investigação contribua para fortalecer práticas pedagógicas que aproximem o ensino de Matemática da realidade vivenciada pelos estudantes, reafirmando o papel da escola como espaço de construção de conhecimentos capazes de auxiliar na compreensão e na interpretação do mundo que os cerca.

Nesse percurso, destaca-se a relevância da formação proporcionada pelo Mestrado Profissional em Matemática, que contribuiu significativamente para o desenvolvimento acadêmico, profissional e pessoal da pesquisadora.

As disciplinas cursadas e as orientações recebidas ao longo do programa favoreceram o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos e pedagógicos, bem como a construção de

uma prática docente mais crítica, reflexiva e intencional.

O desenvolvimento da pesquisa possibilitou a articulação entre teoria e prática, promovendo a ressignificação das experiências docentes e ampliando as formas de planejar, conduzir e avaliar o ensino.

Assim, o mestrado configura-se como um processo formativo que impacta diretamente a prática profissional e a compreensão do papel da educação na formação dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática: versão alfa**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 1996. v. 1.
- Brasil. **Base nacional comum curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<https://basenacionalcomum.mec.gov.br>>.
- CAMINHA, A. C.; NETO, A. C. M. **Cálculo: funções de uma variável**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- COSTA, D. E.; GONÇALVES, T. O.; MARIANO, W. d. S. Construção e desenvolvimento de sequência didática investigativa (sdi): bases teóricas e metodológicas. **Revista Paradigma**, v. 45, n. 1, p. e2024011, 2024. Disponível em: <<https://www.revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1538>>.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008.
- _____. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 1. Ensino Médio.
- Distrito Federal. **Currículo em movimento da educação básica: ensino fundamental – anos finais**. Brasília: Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, 2018.
- DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Ed.). **Gêneros orais e escritos na escola**. 3. ed. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2011. p. 81–108.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista de Educação Matemática**, v. 11, n. 1, p. 55–73, 2003.
- GASPARIN, J. L. **Uma didática para a pedagogia histórico-crítica**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2005.
- _____. Pedagogia histórico-crítica: teoria sem prática? onde está o critério de verdade? **Germinal: Marxismo e Educação em Debate**, v. 5, n. 2, 2014. Disponível em: <<https://periodicos.ufba.br/index.php/revistagerminal/article/view/9701>>.
- IEZZI, G. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1.
- _____. **Fundamentos de matemática elementar: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva**. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.
- LIMA, E. L. **Fundamentos de cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- NASSER, L. **Dificuldades no ensino de funções: análise e propostas de intervenção**. São Paulo: Cortez, 2009.
- SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações**. Campinas: Autores Associados, 1991.
- _____. **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações**. 11. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

_____. Pedagogia histórico-crítica e pedagogia da libertação: aproximações e distanciamentos. **Germinal: Marxismo e Educação em Debate**, v. 13, n. 3, p. 170–176, 2021.

SHENK, A. **Cálculo e geometria analítica**. 6. ed. Rio de Janeiro: Campos, 1991.

STEWART, J. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. R. **Cálculo**. 14. ed. São Paulo: Pearson, 2018.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR – ARRAIAS
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT**

PRODUTO EDUCACIONAL**SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES A
PARTIR DA ANÁLISE DE CONTAS DE CONSUMO**

Autor: Leonor Alves de Santana Campos Pereira

Produto educacional apresentado como parte dos requisitos da pesquisa de Mestrado, vinculada à dissertação intitulada “Contribuições do uso de elementos do cotidiano para o ensino de funções polinomiais do primeiro grau: um relato de experiência a partir da aplicação de uma sequência didática no Ensino Médio”.

Ficha Técnica do Produto Educacional

- **Título do Produto Educacional:** Sequência Didática para o Ensino de Funções a partir da Análise de Contas de Consumo.
- **Autor:** Leonor Alves de Santana Campos Pereira.
- **Instituição:** Universidade Federal de Tocantins. Campus Universitário Dr. Sérgio Jacinto Leonor- Arraias
- **Programa:** PROFMAT.
- **Nível:** Mestrado.
- **Ano de elaboração:** 2026.
- **Área de conhecimento:** Educação Matemática.
- **Público-alvo:** Estudantes da segunda série do Ensino Médio.
- **Componente curricular:** Matemática.
- **Tema abordado:** Estudo de funções a partir da análise de situações do cotidiano.
- **Objetivo:** Propor uma sequência didática que possibilite a compreensão do conceito de função por meio da análise de dados presentes em contas de consumo de água e energia elétrica.
- **Tempo estimado de aplicação:** 6 aulas de aproximadamente 50 minutos, podendo ser estendida, conforme realidade da turma.
- **Recursos necessários:** contas de água e energia elétrica, calculadora, papel quadriculado, quadro ou projetor multimídia.
- **Produto vinculado à dissertação:** “Contribuições do uso de elementos do cotidiano para o ensino de funções polinomiais do primeiro grau: Um relato de experiência a partir da aplicação de uma sequência didática no Ensino Médio”.

Apresentação ao Professor

Prezado(a) professor(a),

Este produto educacional foi elaborado no contexto de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação, com o objetivo de contribuir para o ensino do conceito de função na Educação Básica.

A proposta apresentada neste material consiste em uma sequência didática que utiliza situações do cotidiano dos estudantes, especialmente informações presentes em contas de consumo de água e energia elétrica, como ponto de partida para a construção e interpretação de relações matemáticas.

A utilização de contextos reais busca favorecer uma aprendizagem mais significativa, permitindo que os estudantes reconheçam a presença da matemática em situações vivenciadas em seu cotidiano.

Neste material, o professor encontrará orientações para a aplicação da sequência didática, descrição detalhada das atividades propostas, sugestões de mediação pedagógica e possibilidades de avaliação da aprendizagem.

Espera-se que este produto educacional possa contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que valorizem a investigação, a interpretação e a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem da Matemática.

Desejamos que este material seja útil em sua prática pedagógica e que possa inspirar novas possibilidades de abordagem dos conceitos matemáticos em sala de aula.

Leonor Alves de Santana Campos Pereira

Sumário da Sequência Didática

Introdução	
Objetivos da Sequência Didática	
Objetivo Geral	
Objetivos Específicos	
Público-Alvo	
Materiais Necessários	
Organização da Sequência Didática	
Desenvolvimento da Sequência Didática	
Aula 1 – Introdução ao tema	
Aula 2 – Análise das contas	
Aula 3 – Construção do modelo matemático	
Aula 4 – Formalização da Lei de Formação	
Parte 1 – Conta de Energia Elétrica	
Parte 2 – Conta de Água	
Aula 5 – Representação gráfica	
Aula 6 – Sistematização e Aplicação	
Avaliação da Aprendizagem	
Considerações finais	
Referências	

Introdução

A sequência didática apresentada neste produto educacional foi desenvolvida no contexto do ensino de Matemática na Educação Básica, tendo como público-alvo estudantes da primeira série do Ensino Médio.

A proposta fundamenta-se na utilização de situações do cotidiano dos estudantes, especialmente aquelas relacionadas ao consumo de água e energia elétrica, como forma de promover a construção do conceito de função de maneira significativa.

Ao considerar dados reais presentes em contas de consumo, busca-se favorecer a interpretação de relações entre grandezas, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento matemático e da capacidade de análise crítica dos estudantes.

Destaca-se que a sequência didática proposta encontra-se alinhada às orientações da Base Nacional Comum Curricular, contemplando habilidades relacionadas à interpretação de situações do cotidiano, construção de modelos matemáticos, representação de funções e análise de diferentes formas de variação entre grandezas. Esse alinhamento evidencia a potencialidade da proposta para o desenvolvimento de aprendizagens significativas no contexto da Educação Básica.

Objetivos da Sequência Didática

Objetivo Geral

Promover a compreensão do conceito de função por meio da análise de situações reais relacionadas ao consumo de água e energia elétrica.

Objetivos Específicos

- analisar informações presentes em contas de consumo;
- identificar relações de dependência entre grandezas;
- interpretar dados numéricos em situações do cotidiano;
- construir representações matemáticas;
- desenvolver a argumentação matemática.

Público-Alvo

Este produto educacional destina-se a estudantes da primeira série do Ensino Médio, no componente curricular Matemática. A proposta pode ser adaptada para outras etapas da

Educação Básica, conforme o nível de conhecimento dos estudantes.



Figura 32 – Grupo de estudantes- imagem ilustrativa, gerada por IA

Materiais Necessários

Para o desenvolvimento da sequência didática, recomenda-se a utilização dos seguintes materiais:

- contas de água e energia elétrica;
- calculadora (opcional);
- quadro ou projetor;
- atividades impressas.

Organização da Sequência Didática

A sequência didática está estruturada para ser desenvolvida em aproximadamente seis aulas, com duração média de cinquenta minutos cada.

As atividades podem ser realizadas por meio de discussões coletivas, trabalho em grupo e momentos de sistematização conduzidos pelo professor.

Desenvolvimento da Sequência Didática

Aula 1 – Introdução ao tema

Orientação ao Professor

Inicie a aula promovendo uma discussão sobre o consumo de água e energia elétrica no cotidiano dos estudantes.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT101) Interpretar situações do cotidiano que envolvam relações entre grandezas.

Atividade para os Estudantes

Responda:

1. Você já observou uma conta de energia elétrica?
2. Quais informações aparecem nesse documento?

Aula 2 – Análise das contas

Orientação ao Professor

Organize os estudantes em grupos e distribua contas de consumo.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT101) e (EM13MAT102) Analisar e interpretar dados e relações entre variáveis em contextos reais.

Atividade para os Estudantes

1. Qual foi o consumo registrado?
2. Qual o valor pago?

Aula 3 – Construção do modelo matemático

Orientação ao Professor

Oriente os estudantes a organizar os dados em tabela, pois a organização dos dados em forma de tabela possibilita aos estudantes visualizar padrões e relações entre as grandezas envolvidas, constituindo um passo fundamental para a construção da lei de formação na etapa seguinte.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT102) Construir modelos matemáticos a partir da organização de dados em tabelas e identificação de padrões.

Atividade para os Estudantes

Utilizando os dados analisados anteriormente, complete a tabela abaixo.

Consumo	Valor cobrado

Aula 4 – Formalização da Lei de Formação

Nesta aula, os estudantes serão orientados a construir expressões algébricas capazes de representar a relação entre o consumo e o valor cobrado nas contas de energia elétrica e de água, reconhecendo diferentes formas de modelagem matemática.

Parte 1 – Conta de Energia Elétrica

Orientação ao Professor

Retome com os estudantes os dados organizados nas aulas anteriores, especialmente as tabelas que relacionam consumo e valor pago.

Oriente-os a observar que, no caso da energia elétrica, há um padrão de crescimento aproximadamente linear, permitindo modelar a situação por meio de uma função afim.

Conduza a construção coletiva de uma função do tipo:

$$f(x) = ax + b$$

destacando que:

- x representa o consumo de energia;
- a representa o valor cobrado por unidade consumida;
- b representa uma possível taxa fixa.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT301) Construir funções que representem relações entre grandezas e interpretar seus coeficientes no contexto do problema.

Atividade para os Estudantes

Com base nos dados analisados, responda:

1. É possível identificar um padrão entre o consumo de energia e o valor cobrado?
2. Construa uma lei de formação que represente essa relação.
3. Explique o significado dos coeficientes da função encontrada no contexto do problema.

Parte 2 – Conta de Água

Orientação ao Professor

Apresente aos estudantes que, diferentemente da energia elétrica, a cobrança de água pode variar conforme faixas de consumo.

Explique que, nesse caso, não é possível utilizar uma única expressão para todos os valores, sendo necessário definir a função por partes.

Oriente os estudantes a identificar os intervalos de consumo e as respectivas formas de cobrança, conduzindo à construção de uma função definida por partes.

Se necessário, apresente um modelo geral, destacando o significado de cada intervalo.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT302) Analisar funções em diferentes intervalos, interpretando comportamentos distintos e suas representações matemáticas.

Atividade para os Estudantes

Considere a seguinte forma de cobrança de água:

- até 10 m^3 : tarifa fixa de R\$ 30,00;
- de 11 a 20 m^3 : R\$ 3,00 por m^3 excedente;
- acima de 20 m^3 : R\$ 5,00 por m^3 excedente.

Responda:

1. Qual o valor a ser pago para um consumo de 8 m^3 ?
2. Qual o valor a ser pago para um consumo de 15 m^3 ?
3. Qual o valor a ser pago para um consumo de 25 m^3 ?
4. É possível representar essa situação por meio de uma única expressão?
5. Construa uma lei de formação que represente o valor a ser pago em função do consumo.

Orientação ao Professor

Após a atividade, sistematize com os estudantes a seguinte representação:

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 \leq x \leq 10 \\ 30 + 3(x - 10), & 10 < x \leq 20 \\ 30 + 3(10) + 5(x - 20), & x > 20 \end{cases}$$

Destaque que essa representação evidencia que diferentes intervalos de consumo possuem regras distintas de cobrança, caracterizando uma função definida por partes.

Aula 5 – Representação gráfica

Orientação ao Professor

Oriente a construção do gráfico.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT301) Representar funções por meio de gráficos e interpretar o comportamento das variáveis envolvidas.

Atividade para os Estudantes

Construa um gráfico relacionando consumo e valor.

Aula 6 – Sistematização e Aplicação no Contexto Escolar

Nesta aula, busca-se promover a sistematização dos conhecimentos construídos ao longo da sequência didática, bem como ampliar a discussão para situações reais do contexto escolar.

Orientação ao Professor

Retome com os estudantes os principais conceitos trabalhados ao longo das aulas, especialmente a construção da lei de formação e a interpretação das funções obtidas.

Como proposta de ampliação da atividade, sugere-se que o professor apresente aos estudantes o valor do consumo de água, em metros cúbicos (m^3), da unidade escolar em determinado período.

A partir dessa informação, incentive os estudantes a aplicar os modelos matemáticos construídos anteriormente para determinar o valor a ser pago pela instituição, considerando as regras de cobrança estudadas.

Durante a atividade, oriente os estudantes a explicitar os procedimentos utilizados e a interpretar os resultados obtidos.

Ao final, promova uma discussão sobre o consumo de água no ambiente escolar, destacando a importância do uso consciente desse recurso e incentivando os estudantes a refletirem sobre possíveis ações para a redução do consumo.

Habilidades da BNCC: (EM13MAT102) Aplicar modelos matemáticos em situações reais e analisar criticamente os resultados obtidos.

Atividade para os Estudantes

Considere o consumo de água da unidade escolar apresentado pelo professor.

Com base nesse valor, responda:

1. Qual é o valor que você considera que será cobrado e qual o valor real?
2. Apresente os cálculos realizados para determinar esse valor.
3. A função construída anteriormente representa adequadamente essa situação?
4. Que ações podem ser adotadas no ambiente escolar para reduzir o consumo de água?

Avaliação da Aprendizagem

A avaliação da aprendizagem será realizada de forma contínua, considerando o desenvolvimento dos estudantes ao longo de todas as etapas da sequência didática.

Nesse contexto, a avaliação não se limita à verificação de resultados finais, mas busca acompanhar o processo de construção do conhecimento, valorizando a participação, a interpretação e a capacidade de argumentação dos estudantes.

Durante a realização das atividades, o professor poderá observar:

- a participação dos estudantes nas discussões propostas;

- a capacidade de interpretar informações presentes em contas de consumo;
- a identificação de relações entre grandezas;
- a construção de tabelas e gráficos;
- a elaboração de leis de formação;
- a interpretação dos modelos matemáticos construídos.

Além disso, as atividades propostas ao longo da sequência didática podem ser utilizadas como instrumentos de avaliação, permitindo ao professor analisar o desenvolvimento individual e coletivo dos estudantes.

Como instrumento complementar, sugere-se que o professor proponha momentos de socialização das respostas, incentivando os estudantes a explicitar seus raciocínios e estratégias de resolução.

A avaliação também pode considerar a capacidade dos estudantes de aplicar os conhecimentos construídos em situações reais, como na análise do consumo de água da unidade escolar, bem como a reflexão sobre o uso consciente desse recurso.

Dessa forma, a avaliação assume caráter formativo, contribuindo para o acompanhamento do processo de aprendizagem e para a construção de conhecimentos significativos.

Considerações Finais

A sequência didática apresentada neste produto educacional buscou promover a compreensão do conceito de função a partir de situações do cotidiano dos estudantes, especialmente aquelas relacionadas ao consumo de água e energia elétrica.

Ao longo das atividades propostas, os estudantes foram conduzidos à análise de dados reais, à identificação de padrões e à construção de modelos matemáticos, favorecendo a compreensão das relações entre grandezas e a formalização de leis de formação.

Destaca-se que a utilização de contextos significativos contribui para a aproximação entre a Matemática escolar e a realidade dos estudantes, possibilitando o desenvolvimento de aprendizagens mais consistentes e contextualizadas.

Além disso, a proposta evidenciou a importância da mediação docente no processo de construção do conhecimento, especialmente na condução das discussões, na sistematização dos conceitos e na articulação entre as representações matemáticas.

O alinhamento com as habilidades da Base Nacional Comum Curricular reforça a pertinência da sequência didática no contexto da Educação Básica, contribuindo para o desenvolvimento de competências relacionadas à interpretação, modelagem e argumentação matemática.

Por fim, ressalta-se que a proposta pode ser adaptada a diferentes contextos educacionais, considerando as especificidades dos estudantes e da realidade escolar, ampliando suas possibilidades de aplicação e contribuindo para a qualificação do ensino de Matemática.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

GASPARIN, João Luiz. **Uma didática para a pedagogia histórico-crítica**. 5. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de matemática elementar: funções**. São Paulo: Atual, 2013.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações**. 11. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

APÊNDICE B – PLANEJAMENTO DE AULA: FUNÇÃO POLINOMIAL APLICADA ÀS CONTAS DE ÁGUA E LUZ

A finalidade deste apêndice é a documentação da intervenção pedagógica, tal como ela foi aplicada, servindo de dados para o relato de experiência e para a análise dos dados.

Escola: Centro de Ensino Médio 04 de Sobradinho II

Área: Matemática

Tema: Função Polinomial aplicada às Contas de Água e Luz

Duração: 4 aulas (200 minutos)

Ano/Série: 1º ano do Ensino Médio

Professoras: Leonor Alves de Santana Campos Pereira; Eluzeny Lacerda Lima

Justificativa

A proposta deste plano de aula tem como finalidade tornar o ensino de funções polinomiais mais significativo, contextualizado e socialmente relevante, por meio da utilização das contas de água e luz como instrumentos pedagógicos. Esses documentos fazem parte do cotidiano das famílias e apresentam dados reais que possibilitam a exploração de conceitos matemáticos a partir da leitura, interpretação e modelagem de situações concretas.

A análise das contas de consumo favorece o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes, ao permitir a compreensão de aspectos econômicos, sociais e ambientais relacionados ao uso consciente dos recursos naturais. Nesse sentido, o estudo das tarifas, impostos e faixas de consumo contribui para que o aluno reflita sobre seu papel como cidadão, articulando conhecimentos matemáticos com práticas responsáveis de consumo.

Ao utilizar situações reais como ponto de partida para o estudo das funções polinomiais, respeita-se o princípio da contextualização defendido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), promovendo o desenvolvimento de habilidades relacionadas à leitura e interpretação de informações quantitativas, à resolução de problemas e à tomada de decisões fundamentadas. Dessa forma, a Matemática deixa de ser compreendida apenas como um conjunto de procedimentos abstratos e passa a assumir seu papel como ferramenta essencial para a compreensão, análise e intervenção na realidade.

Objetivo geral

Compreender o conceito e a aplicação das funções polinomiais do 1º grau, a partir da análise de contas de consumo de água e luz, desenvolvendo habilidades de leitura, interpretação, modelagem matemática e resolução de problemas contextualizados.

Objetivo específico

- Identificar os elementos de uma função polinomial a partir da análise de tabelas e gráficos

extraídos de contas reais de água e luz;

- Construir modelos matemáticos que representem a relação entre consumo e valor cobrado;
- Interpretar o comportamento das funções polinomiais e de seus gráficos, analisando intervalos de crescimento;
- Valorizar a Matemática como ferramenta de compreensão da realidade social;
- Utilizar tecnologias digitais e recursos gráficos para representar e analisar funções.

Base legal

Nosso objeto de conhecimento é o estudo de Funções Polinomiais do 1º grau, e busca estabelecer como base legal a BNCC onde busca o desenvolvimento das seguintes habilidades.

- (EM13MAT101) Compreender e analisar funções polinomiais do 1º grau, utilizando suas representações algébricas e gráficas para modelar e resolver problemas significativos do cotidiano;
- (EM13MAT103) Utilizar e interpretar dados expressos em gráficos, tabelas e outras formas de organização, estabelecendo relações entre grandezas variáveis;
- (EM13MAT405) Analisar criticamente informações de natureza quantitativa veiculadas em diferentes contextos, especialmente nos âmbitos econômico, ambiental e social.

Conteúdos

- Análise de tabelas de consumo de água e energia elétrica;
- Função polinomial do 1º grau: conceito, elementos e representação gráfica;
- Modelagem matemática da lei de formação da função;
- Leitura e interpretação de gráficos;
- Coeficiente linear, coeficiente angular e estudo das raízes da função.

Metodologia

Primeiro Encontro – 2 aulas (100 minutos)

Os alunos serão organizados em duplas. Inicialmente, será realizado um diálogo orientado sobre o consumo residencial de água e energia elétrica. Em seguida, serão apresentadas contas

reais ou simuladas, promovendo uma discussão coletiva acerca dos elementos que compõem essas faturas e dos fatores que influenciam o valor final cobrado.

Para orientar o debate, será aplicado um questionário inicial com as seguintes questões:

1. Você já teve contato com as contas de água e luz de sua residência?
2. Ao observar essas contas, quais informações você consegue identificar?
3. Que conteúdos matemáticos você reconhece nas contas analisadas?

Também será apresentada a conta de água da própria unidade escolar, possibilitando a comparação entre consumo residencial e consumo público, bem como a reflexão sobre o papel social do aluno no uso consciente dos recursos naturais.

Segundo Encontro – 2 aulas (100 minutos)

No segundo encontro, busca-se aprofundar a compreensão do conceito de função e de suas aplicações, identificando as variáveis envolvidas, bem como a construção das representações algébrica e gráfica. Serão trabalhados os conceitos de variável independente, variável dependente, domínio, contradomínio e lei de formação.

As atividades incluem:

- Análise das tabelas de tarifas praticadas pelas concessionárias;
- Identificação das variáveis envolvidas no consumo e na cobrança;
- Elaboração de tabelas, gráficos e expressões algébricas;
- Discussão sobre os impactos do consumo no valor final da fatura;
- Validação coletiva dos modelos matemáticos construídos;
- Debate sobre consciência ambiental e sustentabilidade;
- Utilização de simuladores de consumo.

Recursos Didáticos

- Contas de consumo de água e energia elétrica;
- Quadro branco e marcadores;
- Calculadoras;
- Papel milimetrado;

- Acesso à internet.

Avaliação

A avaliação é um processo contínuo que deve ocorrer durante todo o processo de ensino, para que se possa entender se houve uma aprendizagem significativa, para isso alguns itens podem ser considerados:

- É importante que se avalie a participação do aluno nas discussões propostas, observando principalmente aquele aluno que não interage, buscando identificar qual sua dificuldade para a partir daí buscar subsídios que ajude-o a superará-la ;
- A organização e interpretação dos dados em tabelas e gráficos, favorecem a identificação de padrões e auxiliam o aluno na organização da ideias;
- A observação dos registros realizados pelos alunos, buscando a valorizar o conhecimento pre existente, além de lhe fornecer subsídios para a construção dos modelos matemáticos fornece avaliador meios de ajudá-lo na organização das ideias que dão suporte ao aluno para elaboração de modelos matemáticos adequados a situação problema trabalhada, pois é através da coerência nesses registros que temos a capacidade de compreender se o aluno de fato compreendeu o que está sendo registrado.
- Observar se o aluno foi capaz de interpretar os dados a ponto de ser capaz de fazer seu registro em tabelas e gráficos.

Mestranda: Leonor Alves de Santana Campos Pereira

Orientadora: Dra. Gisele Detomazi de Almeida

Professora Colaboradora: Eluzeny Lacerda Lima.

APÊNDICE C – MATERIAL DE APOIO UTILIZADO NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O presente apêndice apresenta o material didático utilizado durante a aplicação da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa, consistindo em um conjunto de slides elaborados com o objetivo de auxiliar a condução das aulas e a compreensão dos estudantes acerca da estrutura e da forma de cobrança das contas de água e de energia elétrica.

O material foi utilizado, especialmente, nos momentos iniciais da sequência, com a finalidade de introduzir os estudantes à leitura e interpretação das informações presentes nesses documentos do cotidiano. Por meio dos slides, foram explorados elementos como identificação de dados nas contas, análise das tarifas aplicadas, compreensão das faixas de consumo e discussão sobre os critérios de cobrança.

Além disso, o material contempla a apresentação de tabelas tarifárias e explicações acerca da organização das cobranças, possibilitando aos estudantes estabelecer relações entre o consumo e o valor pago, etapa fundamental para a construção das leis de formação das funções analisadas ao longo da sequência didática.

Destaca-se que a utilização desse recurso contribuiu para a mediação pedagógica, favorecendo a participação dos estudantes, a problematização das situações apresentadas e a construção progressiva dos conceitos matemáticos envolvidos.

O material completo encontra-se no link a seguir: Material de apoio. (<https://drive.google.com/file/d/1Hy0bhERkXOx0MEq8J4Ivq88Do7tbXXow/view?usp=sharing>)

APÊNDICE D – ATIVIDADES DIRECIONADAS AOS ALUNOS

Este apêndice tem por função apresentar as atividades impressas ou orientações trabalhadas com os alunos durante aplicação da intervenção.

D.1 Atividade 1– Análise das Contas de Água e Luz.

Escola: Centro de Ensino Médio 04 de Sobradinho II

Área: Matemática

Tema: Função Polinomial aplicada às Contas de Água e Luz

Duração: 4 aulas (200 minutos)

Ano/Série: 1º ano do Ensino Médio

Professoras: Leonor Alves de Santana Campos Pereira; Eluzeny Lacerda Lima

Estudo dirigido

1. Tendo em mãos a conta de água e luz, quais elementos você consegue identificar?
2. Dentre os elementos que você identificou, você tem conhecimento do que representa o seu significado?
3. Você consegue identificar algum conteúdo que já tenha estudado que possa utilizar tanto a conta de água ou luz para explicar seu funcionamento?
4. Coletar da conta de água qual o valor pago pelo metro cúbico de água consumido e enumerar todas as cobranças que incidem sobre o preço final.
5. Coletar da conta de luz qual o valor pago pelo kWh consumido e enumerar todas as cobranças que incidem sobre o preço final.

D.2 Atividade 2– Análise das Contas de Água e Luz.

Escola: Centro de Ensino Médio 04 de Sobradinho II

Área: Matemática

Tema: Função Polinomial aplicada às Contas de Água e Luz

Duração: 4 aulas (200 minutos)

Ano/Série: 1º ano do Ensino Médio

Professoras: Leonor Alves de Santana Campos Pereira; Eluzeny Lacerda Lima

Estudo dirigido

Com base na análise dos dados da conta de sua conta de luz identifique os valores: quantidade medida em Kwh na unidade consumidora e o valor cobrador pelo Kwh. Em seguida faça o que se pede:

Tabela 14 – Composição da cobrança da conta de energia elétrica

Composição da cobrança da conta de energia elétrica (elementos fundamentais)		
Quantidade medida em kWh na unidade consumidora	Valor cobrado pelo kWh	Valor
Contribuição de Iluminação Pública Base do cálculo	Percentual adotado	
Valor total apurado		

Para composição da Contribuição de Iluminação Pública (CPI), adotaremos uma taxa percentual de 13,5% sobre o valor apurado da unidade consumidora.

- a) Considerando a observação de sua conta de luz, existe um valor mínimo para cobrança qual o menor valor possível para essa cobrança?

- b) Com base no que foi exposto, vamos escrever a lei de formação que representa a cobrança de sua conta de luz.

Análise da conta de água

Com base nos dados coletados na conta de água, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente. Neste modelo, utilizaremos uma conta residencial e uma conta pública (a conta de água da escola em que você estuda).

Tabela 15 – Conta de água – Residencial padrão

Residencial Padrão Fixa R\$ 10,18			
Valor medido			
Faixa (m³)	Volume da faixa	Alíquota preço por m³	Valor da faixa (R\$)
1 a 7		3,76	
8 a 13		4,51	
14 a 20		8,94	
21 a 30		12,97	
31 a 45		19,45	
Acima de 45		25,28	
Tarifa variável de água			
Tarifa variável de esgoto residencial padrão (100%)			
Tarifa fixa de água residencial padrão			
Tarifa fixa de esgoto residencial padrão (100%)			
Total a pagar			

- a) Qual o menor valor a ser pago em sua conta de água?
- b) Vamos escrever a lei de formação que representa a cobrança da conta de água que você está analisando.

APÊNDICE E – REGISTROS DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS.

Esta seção se propõe a evidenciar os dados empíricos da pesquisa e dar suporte à análise dos resultados.

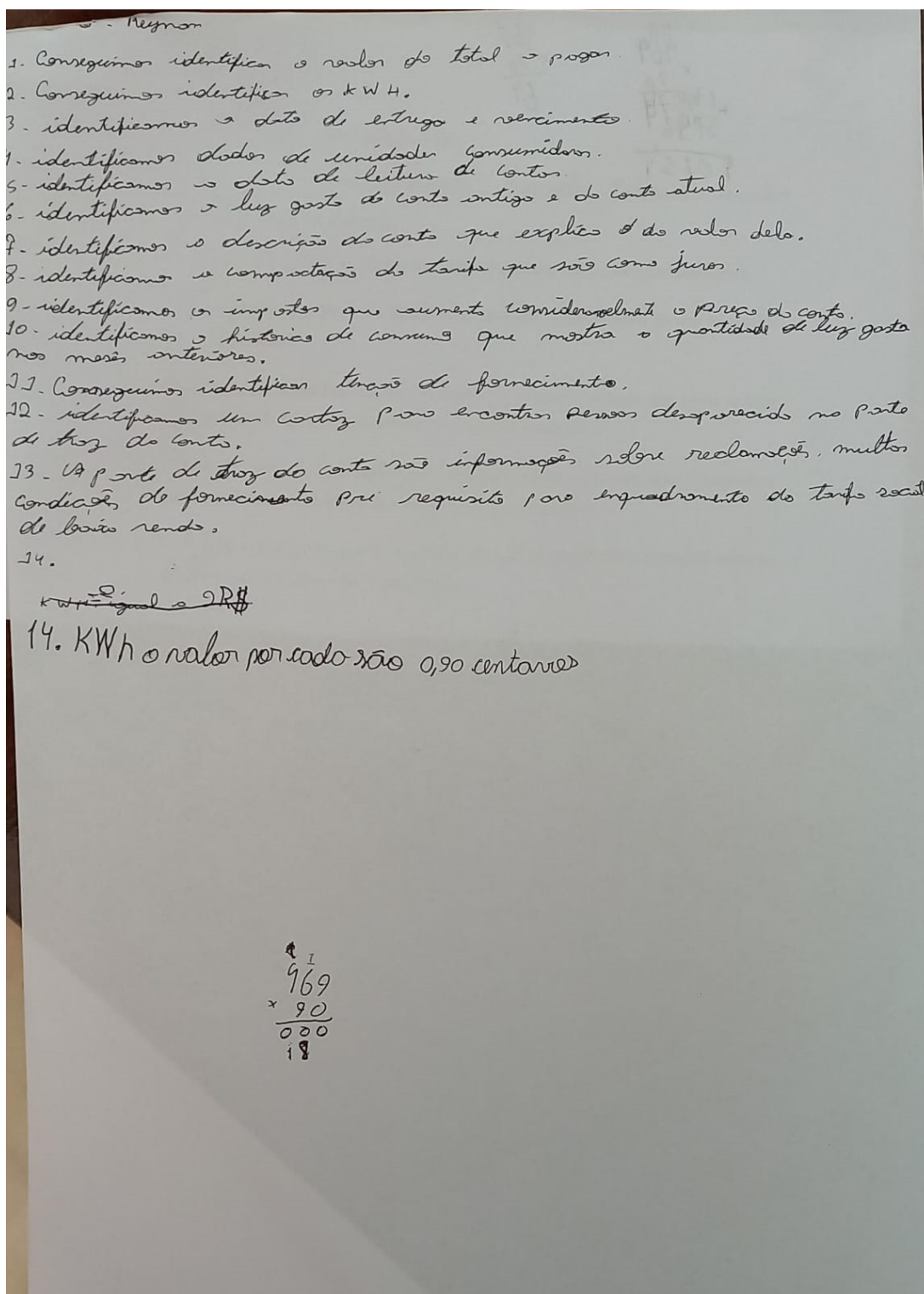




Figura 33 – Registro 1- Aluno- Atividade Inicial.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS – UFT
 Câmpus Universitário Professor Dr. Sérgio Jacintho Leonor – Arraias-TO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)



Mestranda: Leonor Alves de Santana Campos Pereira
 Orientadora: Dra Gisele Detomazi de Almeida
 Profa colaboradora: Elazeny Lacerda Lima
 Alunos: *Anderson, Tereza e Wellington*
 Data: 17/07/2025

Análise das contas de água e luz

1- Análise da conta de luz:
 Com base nos dados coletados na conta de Luz, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente.

Composição da cobrança da conta de energia elétrica (elementos fundamentais)		
Quantidade medida em Kwh na unidade consumidora	Valor cobrado pelo kwh	Valor
404	0,85	343,40
contribuição de iluminação Pública Base do cálculo	Percentual adotado	
		46,40
Valor total apurado		389,80

Para composição da Contribuição de Iluminação Pública CPI, adotaremos uma taxa percentual de 13,5% sobre o valor apurado da unidade consumidora.

a) Considerando a observação de sua conta de luz qual o menor valor possível para essa cobrança?

Cada kWh a 0,85 centavos

b) Com base no que foi exposto vamos escrever a lei formação que representa a cobrança de sua conta de luz.

$404 \text{ kWh} \times 0,85 = 343,40$ $F(x) = 0,85 \cdot X$

343,40
46,40
389,80


343,40
46,40
389,80

48,84
0,85
0,00
30,32
343,10


MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Av. Juraídes de Sena e Abreu, S/N, Setor Buritzinho | 77330-000 | Arraias-TO
 (63) 3653-3409 | www.uft.edu.br/arraias | profmat_arraias@uft.edu.br

Figura 34 – Registro 2- Aluno- Análise das contas de luz.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS – UFT
 Câmpus Universitário Professor Dr. Sérgio Jacintho Leonor – Arraias-TO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)



Mestranda: Leonor Alves de Santana Campos Pereira
 Orientadora: Dra Gisele Detomazi de Almeida
 Profa colaboradora: Eluzeny Lacerda Lima
 Alunos: Rhague M. Abreu, Pedro Luiz
 Data: 17/07/2025

Análise das contas de água e luz

1-Análise da conta de luz:
 Com base nos dados coletados na conta de Luz, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente.

Composição da cobrança da conta de energia elétrica (elementos fundamentais)		
Quantidade medida em Kwh na unidade consumidora	Valor cobrado pelo kwh	Valor
459	0,91	450,45
contribuição de iluminação Pública Base do cálculo	Percentual adotado	60,66
		511,11
Valor total apurado		

Para composição da Contribuição de Iluminação Pública CPI, adotaremos uma taxa percentual de 13,5% sobre o valor apurado da unidade consumidora.

a) Considerando a observação de sua conta de luz qual o menor valor possível para essa cobrança?

cada kWh → 0,91 em reais

b) Com base no que foi exposto vamos escrever a lei formação que representa a cobrança de sua conta de luz

$f(x) = ax + b$

$f(x) = 0,91x$

$f(459) = 0,91 \cdot 459 = 450,45$

$$\begin{array}{r} 13\% \\ 450,45 \\ \times 135 \\ \hline 1270240 \\ 135135 \\ \hline 6061095 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13\% \\ 450,45 \\ \times 135 \\ \hline 1270240 \\ 135135 \\ \hline 6061095 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13\% \\ 450,45 \\ \times 135 \\ \hline 1270240 \\ 135135 \\ \hline 6061095 \end{array}$$

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)
 Av. Juraildes de Sena e Abreu, S/N, Setor Buritizinho | 77330-000 | Arraias-TO
 (63) 3653-3409 | www.uft.edu.br/arraias | profmat_arraias@uft.edu.br

Figura 35 – Registro 3- Aluno- Análise das contas de luz.

2-Análise da conta de água:

Com base nos dados coletados na conta de água, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente. Neste modelo utilizaremos uma conta residencial e uma pública (a conta de água da escola em que você estuda

Residencial Padrão Fixa RS 10,18			
Valor medido			
Faixa m ³	Volume da faixa	Aliquota preço por m ³	Valor da fixa em (RS)
1 a 7		3,76	
8 a 13		4,51	
14 a 20		8,94	
21 a 30		12,97	
31 a 45		19,45	
acima de 45		25,28	
Tarifa variável de água - <i>Tarifa fixa de água</i>			
Tarifa variável ^{fixa} de esgoto residencial padrão 100%			
Tarifa fixa de água residencial padrão			
Tarifa fixa de esgoto residencial padrão 100%			
Total a pagar			

a) Qual o menor valor a ser pago em sua conta de água?

$$10,18 \times 2 = 20,36$$

b) Vamos escrever a lei de formação que representa a cobrança da conta de água que você está analisando.

1ª Faixa

$$f(x) = 3,76 \cdot x + 10,18 \quad x(2) \text{ para } 0 < x < 7$$

2ª Faixa

$$f(x) = 7 \cdot 3,76 + 4,51x + 10,18; \quad 8 < x < 13$$

$$= 26,32 + 4,51x + 10,18$$

$$f(x) = 4,51x + 36,50 \cdot x(2) - \text{Jpl. } 8 < x < 13$$

3ª Faixa

$$g(x) = 7 \cdot 3,76 + 6 \cdot 4,51 + 8,94 \cdot x$$

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Av. Juraides de Sena e Abreu, S/N, Setor Buntizinho | 77330-000 | Arraias-TO
(63) 3653-3409 | www.uft.edu.br/arraias | profmat_arraias@uft.edu.br

Figura 36 – Registro 4- Aluno- Análise das contas de água.

2-Análise da conta de água:

Com base nos dados coletados na conta de água, vamos preencher as tabelas abaixo e produzir um modelo matemático que melhor a represente. Neste modelo utilizaremos uma conta residencial e uma pública (a conta de água da escola em que você estuda

Residencial Padrão Fixa R\$ 10,18			
Valor medido			
Faixa m ³	Volume da faixa	Aliquota preço por m ³	Valor da fixa em (R\$)
1 a 7		3,76	
8 a 13		4,51	
14 a 20		8,94	
21 a 30		12,97	
31 a 45		19,45	
acima de 45		25,28	
Tarifa variável de água			
Tarifa variável de esgoto residencial padrão 100%			
Tarifa fixa de água residencial padrão			
Tarifa fixa de esgoto residencial padrão 100%			
Total a pagar			

a) Qual o menor valor a ser pago em sua conta de água?

R\$ 20,36

b) Vamos escrever a lei de formação que representa a cobrança da conta de água que você está analisando.

1ª faixa
 $f(x) = 3,76x + 10,18 \times (2)$ para $0 \leq x \leq 7$

2ª faixa
 $f(x) = 3,76 + 4,51x + 10,18$
 $= 26,32 + 4,51x + 10,18$
 $f(x) = 4,51 + 36,50 \times (2)$ p/ $8 \leq x \leq 13$

3ª faixa
 $f(x) = 3,76 + 6,4,51 + 8,94 \times x$
 $f(x) = 26,32 + 27,06 + 8,94 + 10,18$ p/ $14 \leq x \leq 20$
 $f(x) = 63,56 + 8,94x$ p/ $14 \leq x \leq 20$

8m³, 9m³, 10m³, 11m³, 12m³, 13m³
 7+1 7+2 7+3 7+4 7+5 7+5

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Av. Juraídes de Sena e Abreu, S/N, Setor Buritizinho | 77330-000 | Arraias-TO
 (63) 3653-3409 | www.uft.edu.br/arraias | profmat_arraias@uft.edu.br

Figura 37 – Registro 5- Aluno- Análise das contas de água.

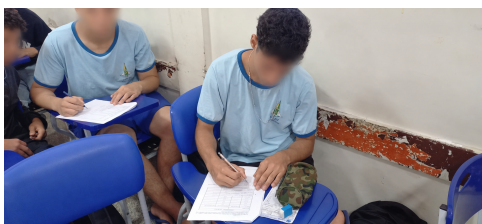
APÊNDICE F – REGISTROS FOTOGRÁFICOS.

Figura 38 – Pratica 1

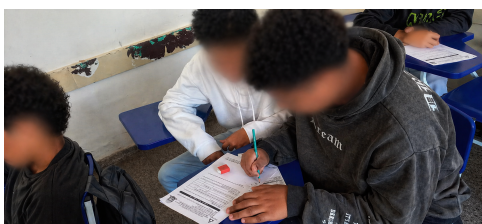


Figura 39 – Pratica 2

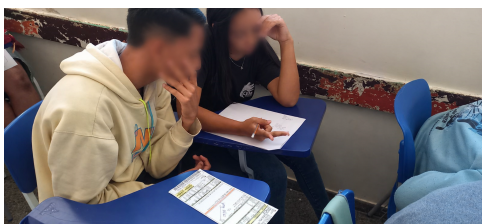



Figura 40 – Pratica



COMPANHIA DE SANEAMENTO AMBIENTAL DO DISTRITO FEDERAL
 Av. Sibipiruna, Lts. 13/21 - Águas Claras/DF - CEP 71.928-720
 Inscrição no CF/DF: 07.324.667/001-67
 CNPJ: 00.082.024/0001-37

COND. SOBRRADINHO II 26/09/2024 10:40
 71 071-400 1801 3285 1R 2 F BRAR1010107

INSCRIÇÃO	MÊS/ANO	VENCIMENTO	TOTAL A PAGAR
463332-6	09/2024	13/10/2024	166,49

NÚMERO	HIDRÔMETRO	DATA INSTALAÇÃO	CATEGORIA	IMÓVEL	UNIDADE DE CONSUMO	DATA PRÓXIMA LEITURA
VIEN010300	18043018	18/04/2018	RESIDENCIAL		1	20/10/2024

CONSUMOS ANTERIORES EM	DATA	LEITURA ANTERIOR	DATA	LEITURA ATUAL	CONSUMO FATURADO
27/08/2024		1349	26/09/2024	1364	15
08/24	07/24	06/24	05/24	04/24	03/24
16	13	9	11	8	30
02/24	01/24	12/23	11/23	10/23	09/23
28	15	26	21	21	24

FAIXAS DE CONSUMO (M³)	VOL. POR UNID. CONSUMO (M³)	NÚMERO DE UNID. CONSUMO	VOLUME TOTAL (M³)	PREÇO (M³) R\$	SUBTOTAL R\$
1 - 7	7	1	7	3,76	26,32
8 - 13	6	1	6	4,51	27,06
14 - 20	7	1	2	8,94	17,88

TARIFA VARIÁVEL DE ÁGUA RESIDENCIAL PADRÃO	71,26
TARIFA VARIÁVEL DE ESGOTO RESIDENCIAL PADRÃO 100%	71,26
TARIFA FIXA DE ÁGUA RESIDENCIAL PADRÃO	10,18
TARIFA FIXA DE ESGOTO RESIDENCIAL PADRÃO 100%	10,18
ACRESCIMO POR ATRASO PGTO REF 08/24	3,61

ECONOMIA DE ÁGUA* (LEI Nº 4.341/2004) NO MÊS (M³): _____ ACUMULADO NO ANO: _____ *CRÉDITOS SUJEITOS A ALTERAÇÕES.

INFORMAÇÕES IMPORTANTES


CONSTA 1 DÉBITO VENCIDO NO VALOR R\$ 180,76
 SUJEITO A CORTE A PARTIR DE 13/11/2024
 PROBLEMAS COM BEBIDA? ALCOÓLICOS ANONIMOS (61)3226-0091/3351-9644

COMPOSIÇÃO DA TARIFA – RESOLUÇÃO ADASA Nº 02/2022

ITENS	ÁGUA / ESGOTO	TRIBUTOS		DEBITOS	
		TRF	TRB	TRF	TRB
R\$	149,84	5,45	1,62	1,05	4,89
%	102,89	3,65	1,08	0,69	3,28

QUALIDADE DA ÁGUA DISTRIBUÍDA	PARÂMETROS						
	Nº DE AMOSTRAS	TURBIDEZ	COR	CLORO	FLÓR	COLF. TOTAIS	Escherichia coli
	MÍNIMO EXIGIDO	391	391	391	0	351	391
	REALIZADAS	427	426	427	0	427	427
QUE ATENDERAM A LEGISLAÇÃO	416	419	422	0	422	427	
CONCLUSÃO	AMOSTRAS ATENDERAM						

"Brasília - Patrimônio Cultural da Humanidade"




COMPROVANTE 26/09/2024 AUTENTICAÇÃO NO VERSO

INSCRIÇÃO MÊS/ANO ORIGEM VENCIMENTO VALOR

463332-6 09/2024 01 13/10/2024 166,49

PAGAMENTO DISPONÍVEL COM QR CODE PIX



826800000018 664900084636 332000000023 409011000013




Figura 42 – Conta de água.