



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RENATO PEREIRA GOMES

**O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E O RECONHECIMENTO DE PADRÕES:
UMA PROPOSTA COM A SEQUÊNCIA DE CONWAY ORDENADA.**

ARRAIAS-TO

2026

Renato Pereira Gomes

O Ensino de Sequências Numéricas e o Reconhecimento de Padrões: Uma Proposta com a Sequência de Conway Ordenada.

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário de Arraias, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa

ARRAIAS-TO

2026

<<https://sistemas.uft.edu.br/ficha/>>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- G633e Gomes, Renato Pereira.
O Ensino de Sequências Numéricas e o Reconhecimento de Padrões: Uma Proposta com a Sequência de Conway Ordenada. / Renato Pereira Gomes. – Arraias, TO, 2026.
97 f.
Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2026.
Orientador: Eudes Antonio da Costa
1. Sequência. 2. Padrão. 3. Sequência de Conway Ordenada. 4. Raciocínio Lógico. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

RENATO PEREIRA GOMES


O Ensino de Sequências Numéricas e o Reconhecimento de Padrões: Uma Proposta com a Sequência de Conway Ordenada.

Dissertação apresentada à UFT - Universidade Federal do Tocantins - Campus Universitário de Arraias, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), foi avaliado para a obtenção do título de Mestre e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.


Orientador Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa

Data de aprovação: 29 / 05 / 2026


Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **EUDES ANTONIO DA COSTA**
Data: 02/06/2026 16:27:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (Orientador)
Universidade Federal do Tocantins
UFT

Documento assinado digitalmente
 **RONALDO ANTONIO DOS SANTOS**
Data: 01/06/2026 23:22:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ronado Antônio dos Santos
Universidade Federal de Goiás
UFG

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO SOARES DE CARVALHO**
Data: 02/06/2026 14:59:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Soares de Carvalho
Universidade Federal do Tocantins
UFT

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. Nos momentos mais difíceis, de desânimo, de fadiga, a minha fé me manteve firme e perseverante para conseguir superar os desafios que foram surgindo no decorrer do curso.

Agradeço, com profunda gratidão, à minha família, que representa minha base moral e ética, minha principal referência de vida e meu porto seguro em todos os momentos. À minha esposa, Jordana Alves, minha companheira de vida, pelo amor, incentivo constante e apoio incondicional ao longo desta trajetória acadêmica. À minha mãe, Ivani Damascena, mulher humilde, dedicada e forte, cuja formação, ensinamentos e exemplo foram fundamentais para moldar quem sou hoje. Ao meu pai, José Pereira, cuja simplicidade, sabedoria e postura de vida sempre me inspiraram. Ao meu irmão, Cassio Damascena, exemplo de cuidado, força e perseverança, cuja presença e apoio como irmão mais velho são motivo de admiração e inspiração. Estendo também minha gratidão aos tios e primos, pelo incentivo constante, pelas palavras de apoio e por me motivarem a seguir crescendo e perseverando diante dos desafios.

Agradeço aos meus colegas de turma, que ao longo dessa trajetória se tornaram grandes amigos e companheiros de caminhada. A Dimas Pimentel, cuja dedicação e empenho sempre foram fonte de inspiração. A Jordan Tavares, por sua perspicácia e alegria contagiante, que tornaram os momentos mais leves. A Leonor, cuja disposição, intensidade e comprometimento despertam admiração em todos ao seu redor. A Renato Machado, meu xará, grande amigo e companheiro, que esteve presente nos bons e maus momentos, sempre oferecendo apoio, incentivo e amizade sincera. Sem dúvidas, a jornada até a conclusão deste curso tornou-se mais leve e significativa graças à presença de cada um de vocês.

Aos professores do curso, expresso minha mais sincera e eterna gratidão pelos ensinamentos, orientações e contribuições fundamentais para minha formação acadêmica e profissional. Em especial, ao Professor Dr. Fernando Carvalho, ao Professor Dr. Robson Mesquita, ao Professor Dr. Thiago Cavalcante, à Professora Dra. Alcione Marques e ao Professor Dr. Jéferson, cuja dedicação ao ensino e compartilhamento de conhecimentos foram essenciais ao longo desta jornada.

Por fim, e não menos importante, manifesto minha profunda gratidão ao meu orientador, Professor Dr. Eudes Antonio da Costa, por todos os ensinamentos, pela dedicação, paciência e compromisso durante a elaboração deste trabalho. Sua orientação, profissionalismo e exemplo de excelência acadêmica foram fonte constante de inspiração e aprendizado, contribuindo significativamente para minha formação e para a concretização desta pesquisa.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, o que concede maior prazer." (Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Este trabalho examina o ensino de sequências numéricas no Ensino Médio com foco no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade de reconhecimento de padrões, tendo como objeto central a Sequência de Conway Ordenada. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, com abordagem descritiva e exploratória, fundamentada na metodologia da Engenharia Didática, que orienta a concepção, experimentação e análise de uma "Proposta de Intervenção Pedagógica", em complemento, destacamos nosso Produto Educacional: "Sequência de Atividades: Contando Algarismos e Reconhecendo Padrões". O estudo tem como objetivo investigar estratégias didáticas que superem a abordagem tradicional no ensino de sequências pautada na memorização de fórmulas, incentivando os estudantes a observar regularidades, formular conjecturas e construir generalizações matemáticas. Para isso, foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência de atividades no Ensino Médio, estruturada nas fases da Engenharia Didática: análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori. Os resultados evidenciam que o uso da Sequência de Conway Ordenada como recurso didático favorece o engajamento dos estudantes, estimula a investigação e contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento lógico e analítico. Pela "Análise", observou-se que os discentes passaram a apresentar maior autonomia na resolução de problemas, bem como maior capacidade de argumentação e generalização. Conclui-se que a proposta didática apresentada constitui uma alternativa eficaz ao ensino mecanicista, promovendo aprendizagens mais significativas e alinhadas às orientações curriculares contemporâneas, ao valorizar a construção ativa do conhecimento matemático e o protagonismo do estudante no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Sequência. Padrão. Sequência de Conway Ordenada. Raciocínio Lógico.

ABSTRACT

This study examines the teaching of numerical sequences in High School, focusing on the development of logical reasoning and pattern recognition skills, with the Ordered Conway Sequence as its central object of study. It is a qualitative research with a descriptive and exploratory approach, grounded in the Didactic Engineering methodology, which guides the design, implementation, and analysis of a Pedagogical Intervention Proposal. In addition, the Educational Product entitled Activity Sequence: Counting Digits and Recognizing Patterns is highlighted. The study aims to investigate didactic strategies capable of overcoming the traditional approach to teaching sequences, which is often based on formula memorization, by encouraging students to observe regularities, formulate conjectures, and construct mathematical generalizations. To this end, a sequence of activities was designed, implemented, and analyzed in High School, structured according to the phases of Didactic Engineering: preliminary analysis, design and a priori analysis, experimentation, and a posteriori analysis. The results demonstrate that the use of the Ordered Conway Sequence as a didactic resource promotes student engagement, stimulates inquiry, and significantly contributes to the development of logical and analytical thinking. Through the analysis, it was observed that students developed greater autonomy in problem-solving, as well as enhanced abilities in argumentation and generalization. It is concluded that the didactic proposal presented constitutes an effective alternative to mechanistic teaching, fostering more meaningful learning experiences aligned with contemporary curricular guidelines, by valuing the active construction of mathematical knowledge and the student as protagonist in the learning process.

Keywords: Sequence. Standard. Ordered Conway Sequence. Logical Reasoning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – YBC 7289	40
Figura 2 – Números Triangulares	41
Figura 3 – Números Quadrados	42
Figura 4 – Números Pentagonais	42
Figura 5 – Visualização Geométrica	43
Figura 6 – Representação gráfica do problema que gerou a sequência de Fibonacci . . .	45
Figura 7 – Matemático John Horton Conway	47
Figura 8 – Atividade 1 - Questão 1.	79
Figura 9 – Atividade 1 - Questão 2	80
Figura 10 – Atividade 1 - Questão 3	80
Figura 11 – Atividade 1 - Questão 3, respondida de maneira alternativa	80
Figura 12 – Atividade 1 - Questão 2 com erro	81
Figura 13 – Atividade 2 - Questão 4	82
Figura 14 – Atividade 2 - Questão 4	82
Figura 15 – Atividade 2 - Questão 5	83
Figura 16 – Atividade 2 - Questão 5	83
Figura 17 – Atividade 2 - Questão 5	84
Figura 18 – Atividade 2 - Questão 6	84
Figura 19 – Atividade 3 - Questão 7	86
Figura 20 – Atividade 3 - Questão 7	86
Figura 21 – Atividade 4 - Questão 8	88
Figura 22 – Atividade 4 - Questão 9	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ED	Engenharia Didática
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TSD	Teoria da Situações Didáticas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa	13
1.2	Objetivo	14
1.3	Estrutura da Dissertação	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO: A ENGENHARIA DIDÁTICA E OS DOCUMENTOS NORMATIVOS	17
2.1	A Engenharia Didática como Metodologia de Ensino	17
2.1.1	A metodologia da Engenharia Didática: fases, princípios e procedimentos	18
2.2	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular e o pensamento crítico e matemático	22
2.2.1	A LDB e os fundamentos da formação do pensamento científico e matemático	23
2.2.2	Os Parâmetros Curriculares Nacionais e a consolidação de uma perspectiva investigativa	25
2.2.3	A Base Nacional Comum Curricular e o pensamento científico, crítico e criativo	28
2.2.4	Considerações sobre os documentos norteadores da educação brasileira e a Engenharia Didática	33
3	RECONHECIMENTO DE PADRÕES E A SEQUÊNCIA DE CONWAY ORDENADA	35
3.1	Reconhecimento de padrões, conjectura e estrutura algorítmica na formação do raciocínio lógico	35
3.2	A gênese histórica do conceito de sequência: da regularidade empírica à formalização funcional	40
3.3	Sequência de Conway ordenada	46
4	PROPOSTA DE INTERVENÇÃO	55
4.1	Proposta de atividade	55
4.1.1	Análise preliminar	56
4.1.2	Concepção e análise a priori	57
4.2	Produto Educacional	64
5	RESULTADOS E ANÁLISES	77
5.1	Experimentação	77
5.2	Análise a Posteriori e Validação	78
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	90

REFERÊNCIAS	92
APÊNDICE A - CÓDIGO NO PYTHON PARA GERAR OS TERMOS DA SEQUÊNCIA DE CONWAY ORDENADA	95

1 INTRODUÇÃO

As sequências (ou progressões) numéricas constituem um assunto que transcende a matemática pura, sendo uma ferramenta pedagógica relevante e fundamental em vários contextos ou componentes curriculares. O estudo de sequências numéricas remonta à necessidade humana de quantificar, contar e reconhecer padrões no mundo natural e em atividades práticas, como o comércio e a agricultura (BOYER, 1996). A sua importância reside no desenvolvimento do pensamento lógico e na sua vasta aplicação em diversas áreas da ciência e da tecnologia moderna (EVES, 2011).

Ao longo do tempo, o conceito de sequência numérica teve seu desenvolvimento no processo de notação e definição formal. Sequências e séries formam a base do cálculo, sendo usadas para definir funções, calcular limites e representar números peculiares e transcendentos, como o π , com alta precisão (ÁVILA, 2006). Além disso, com o avanço tecnológico, a segurança digital moderna, a exemplo dos métodos de criptografia, fundamentou-se fortemente na teoria dos números, nas propriedades de grandes números primos e na aritmética modular, áreas que estão intrinsecamente ligadas à compreensão de padrões numéricos (COUTINHO, 2009).

O estudo de sequências numéricas é de relevância, sendo portanto, abordado no Ensino Médio Brasileiro de modo a consolidar e aprofundar noções e conceitos de padrões e regularidades que, em geral, são introduzidos no Ensino Fundamental. Essa abordagem segue as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que preconiza a necessidade de conexão do conhecimento matemático com a realidade, a resolução de problemas, a modelagem matemática e o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico.

Contudo, a abordagem didática comumente adotada nas escolas muitas vezes se resume ao estudo das Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG) apresentando exemplos e fórmulas (expressões) prontas e acabadas. Assim, essa prática reduz o vasto campo das sequências numéricas a esses dois casos específicos, nos quais são apresentados algoritmos e fórmulas prontas, como a "fórmula do termo geral", limitando o estudante apenas a decorar e reproduzir procedimentos mecanicistas, em detrimento do raciocínio e da generalização (D'AMBROSIO, 1996; PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Nesse sentido, surge a seguinte pergunta: como abordar o estudo de sequências numéricas no Ensino Médio sem remeter apenas ao uso exclusivo de fórmulas e algoritmos, de modo a contribuir para o raciocínio lógico dos estudantes, estimulando-os a observar padrões e formular hipóteses, promovendo a análise, a generalização e a reflexão sobre o processo de descoberta de padrões existentes na "Sequência de Conway Ordenada"?

A presente pesquisa delimita-se ao estudo e à aplicação de uma proposta didática voltada ao ensino de sequências numéricas para estudantes do Ensino Médio, utilizando como objeto central de investigação a Sequência de Conway Ordenada, também conhecida como sequência "olhe e diga ordenada".

Quanto ao **alcance teórico**, o trabalho não pretende exaurir o estudo de todas as sequências (progressões) ou séries infinitas, nem aprofundar em demonstrações avançadas ou complexas de análise matemática ou teoria dos números. O foco recai sobre a identificação de padrões, a generalização de leis de formação e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, partindo de sequências não recursivas tradicionais para desafiar a independência de fórmulas pré-estabelecidas. No que se refere à **aplicação prática**, o escopo limita-se à implementação de uma sequência de atividades aplicada a discentes do Ensino Médio, preferencialmente do 2ª Série do Ensino Médio, em um Colégio Estadual localizado no município de Dianópolis-TO. O grupo participante foi composto por cerca de 80 a 90 estudantes, de acordo com a disponibilidade e consentimento institucional. O professor-pesquisador atuará tanto como mediador das atividades quanto como observador dos processos interativos e cognitivos dos estudantes durante as atividades.

1.1 Justificativa

O ensino de Matemática na educação básica, especialmente no que se refere ao estudo de sequências numéricas, tem sido tradicionalmente pautado por uma abordagem algorítmica, na qual o foco recai primordialmente sobre a memorização de fórmulas e a aplicação mecânica de procedimentos (D'AMBROSIO, 2018). Essa prática, ainda predominante nas salas de aula, gera um abandono da compreensão conceitual, do raciocínio lógico e da capacidade de generalização dos estudantes, competências essenciais indicadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

A BNCC (2018) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997) orientam que o ensino da Matemática deve estar pautado pela metodologia de resolução de problemas, modelagem e desenvolvimento do pensamento crítico e analítico, de modo que os estudantes sejam capazes de identificar regularidades, elaborar conjecturas e propor alguma resolução (BNCC, 2018). Nesse contexto, a simples apresentação de Progressões Aritméticas e Geométricas como modelos fechados limita a aprendizagem à reprodução de fórmulas, desestimulando a curiosidade e a capacidade investigativa ou de aprendizagem.

A proposta deste trabalho é abordar o ensino de sequências numéricas sob uma perspectiva investigativa e exploratória, com o uso da Sequência de Conway Ordenada como recurso didático. Essa sequência, que segue uma lógica autogerada e enigmática, permite que os estudantes descubram padrões, testem hipóteses e desenvolvam a autonomia intelectual na construção do conhecimento matemático.

Do ponto de vista da complexidade, a proposta exige planejamento e intermediações adequadas por parte do docente, pois envolve atividades de observação, análise e dedução, etapas que exigem do professor um papel ativo na condução do raciocínio dos discentes sem fornecer respostas prontas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013). No entanto, tal complexidade é justamente o que confere à proposta seu valor pedagógico, uma vez que ela desafia o estudante e

o envolve em processos cognitivos mais profundos, favorecendo o pensamento lógico.

A utilização da Sequência de Conway Ordenada possibilita a integração entre padrões numéricos, linguagens simbólicas e lógica, promovendo aprendizagens que ultrapassam o domínio dos números para alcançar habilidades cognitivas um pouco mais complexas, como análise, generalização e abstração (FREITAS, FERREIRA, HAASE, 2010). Observa-se, então, que essa proposta possui ampla aplicabilidade, podendo ser aplicada em atividades de matemática do ensino médio e em oficinas de raciocínio lógico.

A proposta aborda, portanto, o problema da fragmentação e superficialidade no ensino de sequências numéricas, substituindo a mecanização por atividades investigativas que valoriza e dá sentido ao conteúdo. A motivação central deste trabalho está em promover um ensino que instigue o interesse pela Matemática, fomente o raciocínio lógico e contribua para a formação de pensadores críticos e autônomos, preparados para os desafios do dia a dia.

1.2 Objetivo

A seguir, é apresentado um objetivo geral e quatro objetivos específicos que alicerçarão o desenvolvimento de todo o trabalho.

• Objetivo Geral

Investigar estratégias didáticas para o ensino de sequências numéricas no Ensino Médio que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio lógico e a descoberta de padrões pelos estudantes, sem o uso restrito de fórmulas e algoritmos promovendo a reflexão sobre o processo de descoberta de padrões existentes na Sequência de Conway Ordenada.

• Objetivos Específicos

- 1 Identificar limitações no uso exclusivo de fórmulas e algoritmos para a compreensão de sequências numéricas.
- 2 Explorar a Sequência de Conway como recurso didático para o desenvolvimento do pensamento lógico e analítico.
- 3 Propor uma metodologia de ensino que incentive os estudantes a observar padrões e formular hipóteses matemáticas.
- 4 Avaliar a contribuição dessa metodologia para a aprendizagem significativa e para o raciocínio lógico dos estudantes.

A pesquisa será de natureza qualitativa, pois busca compreender o processo de aprendizagem e raciocínio dos estudantes diante de uma proposta didática, não se limitando à mensuração numérica dos resultados, mas à interpretação dos significados e comportamentos

observados (MINAYO, 2017). Conforme abordado por Lakatos e Marconi (2005), a pesquisa qualitativa preocupa-se com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se no entendimento e na interpretação dos fenômenos estudados, além disso, a metodologia qualitativa considera a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, privilegiando os processos e as interações que dão origem aos fenômenos. Trata-se também de uma pesquisa aplicada, uma vez que visa solucionar um problema concreto do ensino de Matemática, a excessiva dependência de fórmulas e algoritmos no estudo de sequências numéricas, propondo uma intervenção pedagógica contextualizada (GIL, 2019).

O método adotado será o da pesquisa descritiva e exploratória, conforme enfatiza Marconi e Lakatos (2005) "as pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de uma população, fenômeno ou de relações entre variáveis" e "as pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato". Portanto, a pesquisa descritiva permitirá um estudo da metodologia de ensino da Engenharia Didática e das definições e propriedades da Sequência de Conway Ordenada. Já a abordagem exploratória favorecerá o desenvolvimento, a aplicação e a análise de uma sequência didática experimental, fundamentada na exploração da Sequência de Conway Ordenada, que servirá como recurso para fomentar o raciocínio lógico e a descoberta de padrões.

A estrutura metodológica adotará princípios da engenharia didática, conforme explorado por Vieira et al (2020), que se organiza em quatro fases principais: 1) Análise preliminar – estudo teórico e diagnóstico das dificuldades dos estudantes no aprendizado de sequências numéricas; 2) Concepção e análise a priori – elaboração da proposta didática envolvendo atividades com a Sequência de Conway; 3) Experimentação – aplicação da sequência didática em um grupo de estudantes do Ensino Médio; 4) Análise a posteriori e validação – interpretação dos resultados, avaliação do impacto da proposta e verificação da coerência entre os objetivos e os resultados obtidos.

1.3 Estrutura da Dissertação

Para facilitar a compreensão e o encadeamento das ideias, esta dissertação está organizada em cinco capítulos, além das Referências e do Apêndice, estruturados da seguinte forma:

O **Capítulo 1** compreende a Introdução do trabalho. Nele, foram apresentadas a contextualização e a relevância do tema, a justificativa da pesquisa e os objetivos gerais e específicos que norteiam o estudo, finalizando com a apresentação da estrutura geral do texto.

O **Capítulo 2** expõe o Referencial Teórico-Metodológico. O texto descreve a Engenharia Didática (ED) como metodologia central, detalhando suas fases e princípios para a pesquisa em ensino. Adicionalmente, realiza uma articulação rigorosa acerca do raciocínio lógico, analítico e investigativo. Ao final, é abordado e comentado os principais documentos normativos da Educação Básica Brasileira.

O **Capítulo 3** dedica-se ao embasamento cognitivo ou arcabouço conceitual e matemático do trabalho. O capítulo discute a importância do reconhecimento de padrões, da formulação de conjecturas e da estrutura algorítmica para a formação do raciocínio lógico. É apresentada uma gênese histórica do conceito de sequência e detalha-se o objeto matemático de investigação: a Sequência de Conway Ordenada.

O **Capítulo 4** apresenta a Proposta de Intervenção, destacando a proposta de intervenção pedagógica como **Produto Educacional**. Esse produto consiste em uma sequência de atividades elaborada para o Ensino Médio, estruturada nas fases de *análise preliminar* e *concepção e análise a priori* da ED. A intervenção foi idealizada para superar o ensino tradicionalmente mecanicista, substituindo a simples memorização de fórmulas por atividades que instiguem e incentivam os estudantes a agir como investigadores na descoberta de padrões e da lei de formação da "sequência que conta Algarismos".

O **Capítulo 5** é reservado aos Resultados e Análises. O capítulo relata a etapa de experimentação em sala de aula e realiza a *análise a posteriori*, confrontando-a com as hipóteses teóricas. Os resultados evidenciam que a sequência de Conway ordenou um grande engajamento por parte dos discentes e estimulou ativamente a investigação. Apontando que os estudantes adquiriram uma maior autonomia para a resolução de problemas, desenvolvendo uma capacidade mais elaborada de argumentação, dedução e generalização lógica, rompendo com a dependência de modelos matemáticos fechados.

O **Capítulo 6** dedica às Considerações Finais do estudo, apontando como a aplicação metodológica atendeu aos objetivos propostos e refletindo sobre as contribuições que o trabalho fornece para a formação do pensamento matemático e desenvolvimento do raciocínio lógico por meio da exploração de sequências numéricas.

Por fim, apresenta-se as **Referências** e um **Apêndice** contendo um algoritmo implementado na linguagem de programação Python. Esse código foi elaborado para simular a geração lógica dos termos da Sequência de Conway Ordenada, organizando e contando as frequências dos dígitos no próprio computador. O destaque do algoritmo reside em sua capacidade de interromper automaticamente a execução ao detectar que a sequência encontrou o seu termo que se repete infinitamente, ilustrando, por via computacional, o conceito matemático de ponto fixo explorado na pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO: A ENGENHARIA DIDÁTICA E OS DOCUMENTOS NORMATIVOS

Neste capítulo é apresentado e realizado um estudo a cerca da metodologia da Engenharia Didática (ED), suas etapas e princípios a serem desenvolvidos. Também é a realizado um levantamento de como é abordado o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento científico nos documentos norteadores da Educação Básica. As referências utilizadas são (ALMOULOU, 2007), (ALMOULOU, COLTINHO, 2008), (ALMOULOU, SILVA, 2012), (ARTIGUE, 1995), (ARTIGUE, 1998), (ARTIGUE, 2004), (BACHELARD, 1996), (BRASIL, 1996), (BRASIL, 1997), (BRASIL, 2018), (BROUSSEAU, 2008), (PAIS, 2011) e (VIEIRA, ALVES, CATARINO 2023).

2.1 A Engenharia Didática como Metodologia de Ensino

A Didática da Matemática (DM) desenvolveu-se na França a partir das décadas de 1960 e 1970, impulsionada por pesquisas que buscavam compreender o chamado triângulo didático: professor, estudante e saber. De acordo com Pais (2011, p. 11), a DM tem como objeto de estudo a elaboração de conceitos e teorias compatíveis com a especificidade do saber matemático escolar, mantendo vínculos com a prática pedagógica e com a pesquisa acadêmica.

Vieira, Alves e Catarino (2023) destacam que a ED surge nesse contexto como uma resposta à necessidade de analisar, de forma sistemática, as situações didáticas. A metodologia foi concebida para estudar os fenômenos que ocorrem em sala de aula, permitindo ao pesquisador compreender como os aprendentes constroem conhecimentos matemáticos diante de determinadas condições didáticas.

Artigue et al. (1995, p. 62) definem a ED como “um conjunto de sequências de atividades concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro”. Essa definição evidencia o caráter planejado e reflexivo da metodologia, que se distancia de práticas improvisadas ou exclusivamente intuitivas.

A ED apoia-se em três grandes dimensões analíticas: **epistemológica, cognitiva e didática**. Essas dimensões permitem ao pesquisador compreender o objeto matemático em estudo, os processos de aprendizagem dos estudantes e as condições de ensino nas quais esse objeto é mobilizado.

A **dimensão epistemológica** refere-se à análise histórica e conceitual do saber matemático. Segundo Artigue (1988)

A Engenharia Didática pode ser compreendida como uma forma de trabalho didático análoga à prática do engenheiro, que concebe, testa, ajusta e valida seus projetos a partir de fundamentos científicos e de uma análise rigorosa das condições reais de funcionamento do sistema didático (ARTIGUE, 1988, p. 284).

Ou seja, é fundamental compreender a gênese dos conceitos matemáticos, seus obstáculos epistemológicos e os processos de evolução que conduziram às formulações atuais. Nesse sentido, Bachelard (1996) ressalta que

o obstáculo epistemológico não é um erro ocasional, mas uma forma de conhecimento que, em determinado momento, foi eficaz e que, posteriormente, torna-se um entrave ao progresso do saber científico (BACHELARD, 1996, p. 17).

Aqui, há uma introdução a noção de obstáculo epistemológico, compreendido como um entrave ao avanço do conhecimento científico. Para o autor, tais obstáculos não devem ser ignorados, pois desempenham um papel fundamental na compreensão do desenvolvimento histórico do saber. Na ED, essa perspectiva permite identificar dificuldades conceituais que podem emergir no ensino. Vieira, Alves e Catarino (2023) ainda ressaltam que a análise epistemológica é indispensável para diferenciar o saber científico do saber a ensinar, orientando o processo de transposição didática.

A **dimensão cognitiva** está relacionada às características dos sujeitos aprendentes, considerando suas concepções prévias, estratégias de resolução e dificuldades recorrentes. De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), essa análise permite antecipar comportamentos dos estudantes diante das situações-problema propostas. Na perspectiva da ED, compreender os aspectos cognitivos dos discentes é essencial para a elaboração de situações didáticas que favoreçam a construção do conhecimento, respeitando o nível de desenvolvimento intelectual e as experiências anteriores dos sujeitos.

A **dimensão didática** diz respeito à organização do sistema de ensino, incluindo o papel do professor, os recursos utilizados e as interações estabelecidas em sala de aula. Para Pais (2011), essa dimensão envolve a análise das condições institucionais e pedagógicas que influenciam o ensino. Vieira, Alves e Catarino (2023) enfatizam que a articulação entre as dimensões epistemológica, cognitiva e didática é um dos principais diferenciais da ED, conferindo-lhe rigor metodológico e consistência teórica.

2.1.1 A metodologia da Engenharia Didática: fases, princípios e procedimentos

A ED configura-se como uma metodologia de pesquisa experimental de natureza qualitativa, desenvolvida no âmbito da DM, cujo objetivo central é a análise rigorosa dos fenômenos didáticos associados ao ensino e uma aprendizagem de conteúdos matemáticos. Diferentemente de metodologias descritivas ou meramente interpretativas, a ED pressupõe uma intervenção planejada no sistema didático, sustentada por referenciais teóricos sólidos e por um controle consciente das variáveis envolvidas.

Artigue (1988) destaca que a originalidade da ED reside no fato de que o pesquisador não se limita a observar práticas existentes, mas concebe, implementa e analisa dispositivos

didáticos específicos, com a finalidade explícita de produzir conhecimento científico sobre o funcionamento do ensino.

A Engenharia Didática caracteriza-se por um método experimental em situação real de ensino, no qual o pesquisador concebe sequências didáticas fundamentadas teoricamente, experimenta-as em sala de aula e analisa os efeitos dessas intervenções sobre os processos de aprendizagem (ARTIGUE, 1988, p. 285).

Essa perspectiva confere à ED um estatuto metodológico particular, situado entre a pesquisa empírica e a modelização teórica. A metodologia não busca a generalização estatística dos resultados, mas a compreensão aprofundada dos mecanismos didáticos que explicam a construção do conhecimento matemático em contextos específicos.

As **análises preliminares** constituem a base da pesquisa em ED. Nessa fase, o pesquisador realiza um estudo aprofundado do objeto matemático, do ensino usual e das concepções dos estudantes, bem como do contexto institucional em que a pesquisa será desenvolvida.

Segundo Almouloud e Silva (2012), essa etapa envolve uma análise epistemológica do conteúdo, uma análise didática das práticas correntes e uma análise cognitiva das dificuldades e estratégias recorrentes dos estudantes.

As análises preliminares permitem ao pesquisador compreender o funcionamento do sistema didático antes da intervenção, identificando restrições institucionais, obstáculos epistemológicos e concepções prévias dos alunos que influenciam o processo de aprendizagem (ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 67).

A análise epistemológica, inspirada na epistemologia histórica, busca identificar a gênese dos conceitos matemáticos, seus obstáculos e rupturas. Conforme Bachelard (1996), os obstáculos epistemológicos desempenham papel central na compreensão do desenvolvimento do conhecimento científico, sendo igualmente relevantes no ensino.

A etapa de **concepção e análise a priori** corresponde ao momento de elaboração das situações-problema que comporão a sequência didática. Nessa etapa, o pesquisador define explicitamente as variáveis didáticas e antecipa as possíveis estratégias, erros e dificuldades dos sujeitos aprendentes.

Almouloud (2007) ressalta que a análise a priori constitui o núcleo teórico da Engenharia Didática, pois é nela que se formulam as hipóteses didáticas que serão posteriormente confrontadas com os dados empíricos.

A análise a priori não é uma previsão intuitiva, mas uma antecipação fundamentada teoricamente das possíveis condutas dos alunos, considerando a estrutura do saber matemático e as condições didáticas da situação proposta (ALMOULOU, 2007, p. 91).

As variáveis didáticas podem ser classificadas como macrodidáticas, relacionadas à organização global da sequência, e microdidáticas, associadas às escolhas locais de cada situação. O controle dessas variáveis é essencial para garantir a coerência interna da pesquisa.

A **experimentação** corresponde à implementação da sequência didática no contexto real de ensino. Trata-se de uma fase central da Engenharia Didática, na qual o pesquisador observa as interações entre estudantes, professor e meio, registrando dados por meio de gravações, produções escritas, entrevistas e observações de aula.

Artigue et al. (1995) enfatizam que a experimentação não deve ser entendida como simples aplicação de um plano previamente definido, mas como um momento de produção de dados ricos sobre os fenômenos didáticos.

A experimentação é o momento em que as hipóteses formuladas na análise a priori são colocadas à prova, permitindo observar como os alunos se adaptam às situações propostas e quais conhecimentos são efetivamente mobilizados (ARTIGUE et al., 1995, p. 41).

Essa etapa exige do pesquisador uma postura reflexiva e rigorosa, uma vez que as decisões tomadas durante a experimentação podem influenciar diretamente nos resultados da pesquisa.

A **análise a posteriori** consiste na interpretação sistemática dos dados coletados durante a experimentação, confrontando-os com as hipóteses formuladas na análise a priori. Essa confrontação constitui o principal mecanismo de validação da ED.

Segundo Pais (2011), a validação em ED não se baseia em critérios estatísticos, mas na coerência entre teoria, metodologia e análise dos dados.

A validação em Engenharia Didática resulta da confrontação entre o que foi previsto na análise a priori e o que efetivamente ocorreu durante a experimentação, permitindo confirmar, refutar ou reformular as hipóteses didáticas iniciais (PAIS, 2011, p. 94).

Essa lógica de validação confere à ED um caráter iterativo, no qual os resultados de uma pesquisa podem orientar novas concepções e experimentações.

A ED distingue-se de outras abordagens metodológicas por assumir explicitamente o caráter experimental da pesquisa em Educação Matemática. Embora se desenvolva em contextos reais de ensino, a ED mantém um elevado grau de controle teórico e metodológico. Artigue (2004) argumenta que a força da ED reside justamente nessa articulação entre intervenção pedagógica e produção de conhecimento científico.

A Engenharia Didática constitui uma metodologia de pesquisa experimental adaptada à complexidade das situações de ensino, permitindo analisar os fenômenos didáticos sem reduzi-los à simplificação excessiva (ARTIGUE, 2004, p. 25).

Dessa forma, a ED consolida-se como um referencial metodológico robusto para investigações que buscam compreender, em profundidade, os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Um dos elementos centrais que conferem rigor metodológico à ED é o tratamento sistemático das variáveis didáticas. Essas variáveis correspondem aos elementos do meio didático que podem ser manipulados pelo pesquisador com a finalidade de provocar determinadas estratégias de resolução ou comportamentos cognitivos nos estudantes.

Brousseau (2008) destaca que o controle das variáveis didáticas não significa eliminar a complexidade da situação de ensino, mas organizá-la de modo que certos fenômenos possam emergir e ser analisados.

As variáveis didáticas são os parâmetros da situação que o pesquisador pode modificar deliberadamente para influenciar as estratégias dos alunos, sem que essas modificações sejam explicitamente percebidas como objeto de ensino (BROUSSEAU, 2008, p. 74).

Na ED, o controle dessas variáveis permite estabelecer relações de causalidade didática, ainda que em um contexto qualitativo. Essa característica distingue a ED de abordagens puramente interpretativas, nas quais o pesquisador se limita a descrever fenômenos observados.

O papel do pesquisador, nesse contexto, é o de um mediador consciente e reflexivo, que assume sua intervenção como parte constitutiva do método. Artigue (2004) enfatiza que a neutralidade absoluta é incompatível com a pesquisa didática, sendo necessário explicitar as escolhas realizadas.

Na Engenharia Didática, o pesquisador assume explicitamente sua função de interventor no sistema didático, buscando compreender os efeitos dessa intervenção por meio de um aparato teórico rigoroso (ARTIGUE, 2004, p. 27).

A questão da validação ocupa lugar central na ED, uma vez que essa metodologia não se apoia em procedimentos estatísticos tradicionais. A validade dos resultados decorre da coerência interna do dispositivo de pesquisa e da confrontação sistemática entre previsões teóricas e dados empíricos.

Segundo Almouloud e Silva (2012), a validação em ED é essencialmente teórica e metodológica, estando relacionada à consistência das análises realizadas ao longo das diferentes etapas da pesquisa. "A validade de uma pesquisa em ED não se fundamenta na repetição dos resultados, mas na solidez das análises e na pertinência das interpretações à luz do referencial teórico adotado"(ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 82).

Essa concepção de validação aproxima a ED de outras metodologias qualitativas rigorosas, ao mesmo tempo em que preserva sua especificidade experimental. A confrontação entre análise a priori e análise a posteriori constitui, nesse sentido, o principal critério de validade científica. Pais (2011) argumenta que esse procedimento permite compreender não apenas se

uma sequência didática “funciona”, mas por que e em que condições ela produz determinados efeitos.

A ED distingue-se de metodologias como o estudo de caso, a pesquisa-ação e a etnografia educacional, sobretudo pelo lugar central atribuído à concepção prévia das situações didáticas e ao controle das variáveis.

Enquanto o estudo de caso privilegia a descrição aprofundada de um contexto específico, a ED propõe a construção intencional de dispositivos didáticos com base em hipóteses teóricas explícitas. Da mesma forma, embora compartilhe com a pesquisa-ação o caráter interventivo, a ED não tem como objetivo principal a transformação imediata da prática, mas a produção de conhecimento didático.

Artigue (1988) ressalta que essa distinção não implica hierarquização entre metodologias, mas evidencia a especificidade da ED no campo da Didática da Matemática. "A Engenharia Didática não se confunde com uma simples inovação pedagógica ou com uma pesquisa-ação. Trata-se de um método de investigação que visa compreender os mecanismos didáticos subjacentes às situações de ensino"(ARTIGUE, 1988, p. 297).

Dessa forma, a ED consolida-se como uma metodologia particularmente adequada para uma investigação que busca analisar, de maneira aprofundada e teoricamente fundamentada, os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (1976), é frequentemente associada à Engenharia Didática como referencial teórico de ensino. A TSD concebe o conhecimento como resultado da interação do aprendente com uma situação-problema cuidadosamente planejada.

Segundo Brousseau (2008, p. 19) "uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio e um sistema educativo, com a finalidade de fazer adquirir um saber constituído ou em via de constituição. "nesse sentido, uma situação didática é caracterizada por um conjunto de relações estabelecidas entre estudante, professor e meio, com o objetivo de favorecer a aprendizagem de um determinado saber. Na Engenharia Didática, a TSD fornece subsídios teóricos para a concepção das situações-problema.

Vieira, Alves e Catarino (2023) evidenciam que a articulação entre ED e TSD potencializa a análise dos processos de ensino e aprendizagem, permitindo compreender não apenas os resultados, mas também os caminhos percorridos pelos sujeitos aprendentes.

2.2 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular e o pensamento crítico e matemático

A discussão acerca do desenvolvimento do pensamento científico e matemático ocupa posição central nas políticas educacionais brasileiras, especialmente a partir da segunda metade

do século XX, quando a educação passa a ser compreendida como direito social e condição para o exercício pleno da cidadania. Nesse contexto, o ensino de Matemática e de Ciências passa a ser progressivamente orientado por concepções que superam a mera transmissão de conteúdos e valorizam a formação de sujeitos capazes de pensar, investigar, argumentar e tomar decisões fundamentadas.

Documentos normativos como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB nº 9.394/1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e, mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), expressam, de formas distintas, uma concepção de educação voltada ao desenvolvimento de capacidades intelectuais complexas, entre as quais se destacam o pensamento científico e o pensamento matemático. Esses modos de pensar são entendidos como essenciais para a compreensão da realidade, para a participação social crítica e para a inserção no mundo do trabalho.

Do ponto de vista teórico, tais orientações dialogam de maneira significativa com a Didática da Matemática, especialmente com a ED, concebida por pesquisadores como Brousseau e Artigue como uma metodologia de pesquisa e de intervenção pedagógica fundamentada na análise rigorosa das situações de ensino e aprendizagem. Ao articular políticas curriculares e referenciais teórico-metodológicos da Didática da Matemática, torna-se possível compreender de forma mais aprofundada os desafios e as possibilidades de concretização do pensamento científico e matemático na escola.

2.2.1 A LDB e os fundamentos da formação do pensamento científico e matemático

A LDB, (Lei nº 9.394/1996) constitui o principal marco normativo da educação brasileira, definindo princípios, finalidades e diretrizes gerais que orientam todo o sistema educacional. Embora a LDB não apresente detalhamento curricular ou metodológico, seus dispositivos legais oferecem fundamentos sólidos para a compreensão da formação do pensamento científico e matemático ao longo da educação básica. Esses fundamentos aparecem de forma explícita e implícita em diversos artigos da lei, especialmente quando trata das finalidades da educação, dos princípios do ensino e dos objetivos das diferentes etapas da escolarização.

O artigo 2º da LDB estabelece a finalidade geral da educação nacional, definindo uma concepção ampla de formação humana. O texto legal afirma:

Art. 2º A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1996).

Essa formulação legal evidencia que a educação escolar não se limita à transmissão de conteúdos, mas visa ao desenvolvimento integral do sujeito. O pleno desenvolvimento do educando pressupõe a formação de capacidades cognitivas complexas, entre as quais se destacam o raciocínio lógico, a capacidade de análise, a argumentação e a autonomia intelectual, elementos

constitutivos tanto do pensamento científico quanto do pensamento matemático. Ao articular cidadania, trabalho e desenvolvimento humano, a LDB apregoa uma educação que forma sujeitos capazes de compreender a realidade, tomar decisões fundamentadas e intervir criticamente no mundo.

O artigo 3º da LDB explicita os princípios que regem o ensino no país, os quais são diretamente relacionados à construção do pensamento científico. O texto legal dispõe:

Art. 3º O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: I – igualdade de condições para o acesso e permanência na escola; II – liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber; III – pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas; [...] X – valorização da experiência extraescolar; XI – vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais (BRASIL, 1996).

A liberdade de aprender, ensinar e pesquisar constitui um princípio fundamental para a formação do pensamento científico, uma vez que a ciência se estrutura a partir do questionamento, da investigação e da produção de conhecimento. O pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas, por sua vez, favorece a construção do pensamento crítico, ao permitir o confronto de diferentes explicações, hipóteses e interpretações da realidade. Além disso, a valorização da experiência extraescolar reforça a necessidade de contextualizar os conhecimentos científicos e matemáticos, aproximando-os das práticas sociais vivenciadas pelos estudantes.

No que se refere às finalidades da educação básica, o artigo 22 da LDB estabelece:

Art. 22. A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, 1996).

Esse dispositivo legal reforça a centralidade da formação intelectual e cognitiva ao longo da educação básica. A formação comum indispensável mencionada no artigo inclui o domínio de conhecimentos e formas de pensamento que permitam ao estudante compreender fenômenos, resolver problemas e continuar aprendendo ao longo da vida. Nesse sentido, o pensamento científico e matemático assume papel estruturante, pois constitui base para a aprendizagem em diferentes áreas do conhecimento e para a progressão acadêmica.

No âmbito do ensino fundamental, o artigo 32 explicita objetivos diretamente relacionados à formação do pensamento matemático e científico. O texto legal afirma:

Art. 32. O ensino fundamental, com duração mínima de nove anos, obrigatório e gratuito na escola pública, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante: I – o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo; II – a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade; [...] (BRASIL, 1996).

O destaque conferido ao cálculo (quantificar, comparar e medir) deve ser compreendido como a apropriação de modos de pensar próprios da Matemática, incluindo o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a compreensão de relações quantitativas. Paralelamente, a ênfase na compreensão do ambiente natural e social aponta para a centralidade do ensino de Ciências na formação do pensamento científico, ao possibilitar que o estudante analise fenômenos, estabeleça relações e construa explicações fundamentadas.

No ensino médio, a LDB aprofunda essas diretrizes ao enfatizar o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. O artigo 35 estabelece:

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; [...] (BRASIL, 1996).

A referência explícita à autonomia intelectual e ao pensamento crítico evidencia o compromisso da LDB com a formação de sujeitos capazes de analisar informações, avaliar argumentos e produzir conhecimentos, competências intrinsecamente relacionadas ao pensamento científico e matemático.

Por fim, o artigo 36 reforça a importância da compreensão dos fundamentos científicos na formação dos estudantes do ensino médio:

Art. 36. Os currículos do ensino médio observarão o disposto na Seção I deste Capítulo e as seguintes diretrizes: I – destacarão a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; II – incluirão, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil; [...] (BRASIL, 1996).

Ao enfatizar a compreensão do significado da ciência e a obrigatoriedade do estudo da Matemática, a LDB reconhece o papel estruturante dessas áreas na formação intelectual do estudante. Assim, mesmo sem detalhar conteúdos ou metodologias, a lei estabelece fundamentos normativos claros que sustentam a formação do pensamento científico e matemático na educação básica brasileira.

2.2.2 Os Parâmetros Curriculares Nacionais e a consolidação de uma perspectiva investigativa

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), elaborados e publicados pelo Ministério da Educação na década de 1990, configuram-se como um marco histórico no processo de

reorganização curricular da educação básica brasileira. Produzidos em um contexto de redemocratização do país e de ampliação do debate educacional, os PCNs expressam uma concepção de ensino comprometida com a formação integral do estudante, superando modelos centrados na mera transmissão de conteúdos. Nesse sentido, o documento consolida, de modo explícito, uma perspectiva investigativa do ensino, particularmente no que se refere à Matemática e às Ciências Naturais, áreas diretamente relacionadas ao desenvolvimento do pensamento científico.

Desde suas primeiras formulações, os PCNs assumem que o conhecimento escolar não deve ser entendido como um conjunto de verdades prontas e acabadas, mas como uma construção histórica, social e cultural. Essa concepção aparece de forma recorrente ao longo do documento, quando se afirma que o ensino deve possibilitar ao estudante “compreender a origem, a transformação e o uso dos conhecimentos” (BRASIL, 1997). Tal posicionamento aproxima-se de uma visão investigativa do currículo, na qual aprender implica questionar, explorar, levantar hipóteses, testar ideias e argumentar sobre os resultados obtidos.

No caso específico da Matemática, os PCNs rompem com uma tradição fortemente marcada pelo ensino mecanicista e repetitivo, ao defenderem que essa área do conhecimento deve contribuir para o desenvolvimento de capacidades intelectuais amplas. O documento destaca que a Matemática escolar deve favorecer “o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentação, da criatividade e da autonomia intelectual” (BRASIL, 1997). Essa afirmação reforça a ideia de que aprender Matemática vai além da execução de procedimentos algorítmicos, envolvendo processos cognitivos complexos que se aproximam das práticas próprias da investigação científica.

Um dos trechos mais emblemáticos dos PCNs afirma que “aprender Matemática é aprender a pensar matematicamente” (BRASIL, 1997). Pensar matematicamente, segundo o próprio documento, envolve ações como formular problemas, levantar conjecturas, buscar estratégias de resolução, testar hipóteses, estabelecer relações, generalizar resultados e comunicar ideias de forma clara. Esses elementos são constitutivos de uma postura investigativa, na qual o estudante assume um papel ativo na elaboração ou construção do conhecimento, aproximando-se do modo como a Matemática é produzida no campo científico.

A centralidade atribuída à metodologia de resolução de problemas é um dos principais eixos pelos quais os PCNs consolidam essa perspectiva investigativa no ensino da Matemática. O documento enfatiza que situações problemas em matemática não devem ser utilizados apenas como exercícios de aplicação de conteúdos previamente ensinados, mas como situações problematizadas e desafiadoras capazes de mobilizar elaborações ou construções de novos conhecimentos. Nesse sentido, os PCNs afirmam que “a resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática” (BRASIL, 1997), indicando que é a partir do enfrentamento de situações problematizadas que os conceitos ganham significado para o estudante.

Essa concepção de resolução de problemas aproxima-se fortemente de abordagens didáticas investigativas, nas quais o erro, a tentativa e a reformulação de estratégias são

compreendidos como parte constitutiva do processo de aprendizagem. Os PCNs ressaltam que o professor deve criar situações em que os estudantes possam “experimentar, levantar hipóteses, confrontar procedimentos e discutir resultados” (BRASIL, 1997). Tal orientação reforça a ideia de sala de aula como um espaço de investigação, diálogo e construção coletiva do conhecimento matemático.

Além disso, os PCNs reconhecem explicitamente a importância da comunicação e da argumentação no ensino da Matemática. O documento destaca que os estudantes devem ser incentivados a explicar seus raciocínios, justificar procedimentos e defender pontos de vista, utilizando diferentes formas de linguagem. Segundo os PCNs, “comunicar-se matematicamente envolve interpretar, representar e expressar ideias, o que contribui para a organização do pensamento” (BRASIL, 1997). Essa valorização da argumentação é um elemento central de uma perspectiva investigativa, pois pressupõe a validação social do conhecimento construído.

Outro aspecto relevante presente nos PCNs é a valorização do conhecimento prévio dos estudantes como ponto de partida para a investigação e apreensão de novos procedimentos ou conceitos. Tanto na Matemática quanto nas Ciências Naturais, o documento destaca que o professor deve considerar as ideias, concepções e explicações que os estudantes já possuem sobre os fenômenos estudados. Segundo os PCNs, “o confronto entre as concepções dos alunos e os conhecimentos científicos é fundamental para a construção de aprendizagens significativas” (BRASIL, 1998). Esse princípio é coerente com uma perspectiva investigativa, pois reconhece o estudante como sujeito ativo do processo de aprendizagem.

Os PCNs também atribuem ao professor um papel fundamental na mediação das situações investigativas. Longe de ser um mero transmissor de conteúdos, o docente é concebido como um organizador de situações de aprendizagem, responsável por propor problemas, orientar investigações, estimular o debate e favorecer a sistematização dos conhecimentos construídos. O documento afirma que “cabe ao professor criar condições para que o aluno possa aprender a aprender” (BRASIL, 1997), o que implica promover a autonomia intelectual e a postura investigativa.

De modo geral, os PCNs consolidam uma concepção de ensino comprometida com o desenvolvimento do pensamento científico e investigativo, tanto na Matemática quanto nas Ciências Naturais. Ao enfatizarem a resolução de problemas, a investigação, a argumentação e a construção ativa do conhecimento, os PCNs oferecem fundamentos teóricos e metodológicos que sustentam práticas pedagógicas voltadas à formação de sujeitos críticos, autônomos e capazes de compreender e intervir na realidade.

Assim, ao analisar os PCNs sob a ótica da perspectiva investigativa, evidencia-se que esse documento não apenas orienta a organização dos conteúdos escolares, mas propõe uma mudança significativa na forma de conceber o ensino e a aprendizagem. Trata-se de um referencial que reafirma a escola como espaço de investigação, reflexão e produção de conhecimento, contribuindo de maneira decisiva para a consolidação de uma educação voltada ao desenvolvimento do pensamento científico e matemático.

2.2.3 A Base Nacional Comum Curricular e o pensamento científico, crítico e criativo

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constitui-se como um documento normativo que orienta a organização curricular da Educação Básica no Brasil, definindo aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas a todos os estudantes. Mais do que um rol de conteúdos, a BNCC apresenta uma concepção de educação comprometida com o desenvolvimento integral do sujeito, enfatizando capacidades cognitivas, socioemocionais, éticas e intelectuais. Nesse contexto, o pensamento científico, crítico e criativo ocupa lugar central, sendo compreendido como elemento estruturante do processo educativo e da formação cidadã.

Desde sua introdução, a BNCC explicita que a escola deve promover aprendizagens que possibilitem aos estudantes compreender, interpretar e intervir na realidade de maneira fundamentada. Tal perspectiva se materializa na definição das Competências Gerais da Educação Básica, nas quais se estabelece que os aprendentes devem:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (BRASIL, 2018, p. 9).

Esse excerto evidencia que a BNCC assume explicitamente o pensamento científico como prática formativa, articulando-o à curiosidade, à investigação e à criatividade. A ciência, nessa perspectiva, não é apresentada como um conjunto de verdades prontas, mas como um modo de pensar e agir diante dos fenômenos do mundo.

A BNCC compreende o pensamento científico como uma capacidade que se desenvolve a partir da vivência de situações problematizadoras, nas quais o estudante é convidado a observar, questionar, levantar hipóteses, analisar dados e construir explicações. Tal concepção perpassa diferentes áreas do conhecimento, sendo particularmente enfatizada nas áreas de Ciências da Natureza e Matemática.

No componente curricular de Matemática, a BNCC apregoa que o ensino deve contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento algébrico, geométrico, estatístico e probabilístico. A Matemática é apresentada como uma linguagem que permite interpretar, representar e resolver problemas em diferentes contextos. Segundo o documento:

A Matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentar, de representar e de modelar situações, favorecendo a compreensão e a atuação no mundo (BRASIL, 2018, p. 263).

Essa concepção reforça o papel da Matemática na formação do pensamento científico, uma vez que o estudante é convidado a analisar situações, estabelecer relações e validar conclusões. A resolução de problemas é destacada como eixo estruturante do ensino, possibilitando a mobilização de conhecimentos e a construção de significados.

A BNCC atribui especial importância à argumentação matemática, entendida como a capacidade de justificar procedimentos, explicar raciocínios e comunicar ideias de forma clara objetiva e coerente. O documento enfatiza que:

É fundamental que os estudantes sejam capazes de explicar seus procedimentos, justificar resultados e avaliar a adequação de diferentes estratégias (BRASIL, 2018, p. 267).

Essa ênfase na argumentação aproxima o ensino de Matemática das práticas científicas, nas quais a validação do conhecimento ocorre por meio do debate, da análise crítica e da confrontação de ideias. A BNCC (2018) reconhece que o erro constitui parte do processo de aprendizagem, sendo um elemento importante para a reflexão e o aprimoramento do pensamento.

Ao longo do documento, a BNCC (2018) evidencia que o pensamento científico, crítico e criativo não deve ser desenvolvido de forma fragmentada, mas de maneira integrada e articulada. Essas dimensões do pensamento se complementam, contribuindo para a formação de sujeitos autônomos, reflexivos e capazes de enfrentar desafios complexos.

A BNCC (2018) ainda reforça que a educação deve preparar os estudantes para lidar com situações inéditas, tomar decisões responsáveis e participar ativamente da sociedade. "A escola deve promover aprendizagens que possibilitem aos estudantes agir com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação" (BRASIL, 2018, p. 14). Essa orientação evidencia que o desenvolvimento do pensamento científico, crítico e criativo está diretamente associado à formação integral, ultrapassando os limites do desempenho acadêmico. Dessa forma, a BNCC (2018) consolida uma concepção de educação comprometida com o desenvolvimento do pensamento científico, crítico e criativo, ao valorizar a investigação, a argumentação, a criatividade e a contextualização do conhecimento. Ao explicitar tais dimensões como competências essenciais, a BNCC reafirma o papel da escola como espaço de construção do conhecimento e de formação cidadã.

O documento orienta práticas pedagógicas que reconhecem o estudante como sujeito ativo do processo educativo, capaz de pensar, questionar, criar e transformar a realidade. Assim, a BNCC estabelece bases sólidas para um ensino que ultrapassa a transmissão de conteúdos, promovendo uma educação voltada à compreensão crítica do mundo e à atuação consciente na sociedade contemporânea.

Para o Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 523) dispõe de cinco Competências Específicas para a Matemática, como aponta o quadro a seguir.

Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018 p.523)

Neste trabalho destaca-se as Competências Específicas 3 e 5 por se conectarem com os objetivos a serem alcançados. Essas competências reconhecem que a matemática começa na intuição e na experimentação, mas culmina na necessidade de uma justificativa ou prova. O discente aprende a diferença entre "parece verdade porque testei em três casos" e "é verdade porque pode ser demonstrado logicamente para todos os casos", entendendo quando uma demonstração formal é necessária. Juntas, elas garantem que o estudante do Ensino Médio não apenas "saiba fazer contas", mas entenda a matemática como uma ciência viva, lógica e profundamente conectada com a realidade.

Cada Competência Específica da BNCC (BRASIL, 2018) induz uma série de habilidades a serem desenvolvidas no estudantes. Essas habilidades possuem um código alfanumérico com a seguinte estrutura: etapa de ensino; ano escolar ou bloco de anos escolares; componente curricular e número da habilidade.

Sendo assim, o código da habilidade (**EM13MAT102**) refere-se ao ensino médio, da primeira a terceira séries, componente curricular de Matemática, primeira competência habilidade 2. A seguir é apresentado as habilidades referentes as competência específica 3 .

Habilidades da Competência Específica 3 de Matemática para o Ensino Médio

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.
(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Fonte: (BRASIL, 2018 p.528-529)

Dentre as habilidades da competência específica 3 de matemática para o Ensino Médio destaca-se para este trabalho a habilidade cujo código é **(EM13MAT310)**. Na elaboração da proposta de atividade, será essa habilidade a ser desenvolvida com os discentes.

Agora apresentamos as habilidades relacionadas a competência específica 5.

Habilidades da Competência Específica 5 de Matemática para o Ensino Médio

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Fonte: (BRASIL, 2018 p.533)

Dentre as habilidades da competência específica 5 de matemática para o Ensino Médio destaca-se para este trabalho a habilidade cujo código é **(EM13MAT507)**. Na elaboração da proposta de atividade, será essa habilidade a ser desenvolvida com os discentes. Apesar dessa habilidade se referir especificamente a Progressões Aritmética (PA), a parte de "dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" conecta-se perfeitamente com a proposta desse trabalho.

2.2.4 Considerações sobre os documentos norteadores da educação brasileira e a Engenharia Didática

A análise conjunta da LDB (1996), dos PCNs e da BNCC (2018) evidencia uma convergência em torno da ideia de que o ensino deve promover a construção ativa do conhecimento. Os documentos curriculares reconhecem implicitamente que o conhecimento matemático escolar não é uma simples reprodução do saber acadêmico, mas um saber adaptado às condições de ensino e às características dos aprendentes. A ED oferece instrumentos teóricos para analisar esse processo, permitindo compreender como os conteúdos são organizados, apresentados e apropriados pelos estudantes.

Nos três documentos supracitados, o professor é concebido como mediador do processo de aprendizagem, responsável por criar condições para que os estudantes desenvolvam autonomia intelectual e pensamento crítico. Essa concepção rompe com o modelo transmissivo de ensino e exige do docente uma postura reflexiva e investigativa.

A ED contribui para essa formação ao propor que o professor atue também como pesquisador de sua própria prática, analisando sistematicamente as situações de ensino, as respostas dos estudantes e os resultados das intervenções pedagógicas. Tal perspectiva está alinhada às exigências contemporâneas de profissionalização docente e de melhoria da qualidade do ensino.

A convergência entre LDB, PCNs, BNCC e DM aponta para a necessidade de práticas pedagógicas que privilegiem a compreensão conceitual, a investigação e a argumentação. Isso implica repensar metodologias tradicionais centradas na repetição de atividades, substituindo-as por abordagens que favoreçam a problematização e a construção coletiva do conhecimento.

As situações didáticas devem ser planejadas de modo a provocar conflitos cognitivos produtivos, estimulando os estudantes a mobilizar diferentes estratégias e a refletir sobre seus próprios processos de pensamento. A ED oferece um arcabouço teórico consistente para esse tipo de planejamento, articulando análise epistemológica, didática e pedagógica.

A análise da LDB, dos PCNs e da BNCC evidencia que o pensamento científico e matemático ocupa lugar central na educação básica brasileira, sendo concebido como elemento essencial à formação integral do sujeito. Esses documentos convergem ao defender uma educação que promova a autonomia intelectual, a capacidade investigativa e a argumentação fundamentada.

Ao estabelecer paralelos com a DM e, em particular, com a ED, observa-se que esse referencial teórico-metodológico oferece importantes contribuições para a concretização das orientações presentes nos documentos oficiais. Dessa forma, a articulação entre políticas curriculares e teorias didáticas mostra-se fundamental para o desenvolvimento efetivo do pensamento científico e matemático no contexto escolar.

3 RECONHECIMENTO DE PADRÕES E A SEQUÊNCIA DE CONWAY ORDENADA

Neste capítulo iremos evidenciar alguns dos principais conceitos relacionados ao reconhecimento de padrões, à formulação de conjecturas e ao desenvolvimento do pensamento algorítmico no contexto da Matemática, para isso, foi realizada uma revisão da literatura que fundamenta a base teórica desta pesquisa, com a intenção de investigar seu contexto histórico, suas aplicações e suas implicações no ensino, os quais podem ser consultados em (BARTON et.al, 2004), (BEZERRA, et al. 2025), (BRASIL, 2018), (CONWAY, 1987), (COSTA, CARVALHO, MESQUITA, 2022), (COSTA, SANTOS, 2019), (COSTA, SANTOS, 2023), (GAIRÍN, et al.2017), (MIKALEF, 2019), (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012) e (SARAIVA, 2024).

3.1 Reconhecimento de padrões, conjectura e estrutura algorítmica na formação do raciocínio lógico

A atividade de conjecturar ocupa posição estruturante na Matemática não apenas como motor do desenvolvimento histórico desta ciência, mas sobretudo como prática intelectual que promove o refinamento do raciocínio lógico e a capacidade de reconhecer padrões. Como destacam Costa e Santos (2019, p. 61) "A busca por padrões não é apenas um exercício escolar, mas uma constante que serve como um 'importante combustível no desenvolvimento da ciência', essa busca despertou um fascínio quase obsessivo em muitos matemáticos ao longo da história, exemplificado pela célebre afirmação de S. Ramanujan de que 'existem padrões em tudo'". Conjecturar implica observar regularidades, formular hipóteses explicativas, testá-las, submetê-las a contraexemplos e, finalmente, demonstrá-las ou refutá-las. Trata-se, portanto, de um processo que articula intuição, generalização e formalização. Essa perspectiva é fortemente amparada pela BNCC, que elenca como uma das competências específicas da Matemática o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes (BRASIL, 2018).

No editorial intitulado *O ofício matemático de conjecturar*, publicado na *Gazeta de Matemática*, o matemático português Paulo Saraiva explicita de maneira contundente essa centralidade ao afirmar que "formular e demonstrar conjecturas são tarefas centrais do labor matemático aos mais diversos níveis" (SARAIVA, 2024, p. 2). Essa afirmação, embora sintética, contém implicações profundas de que a conjectura não se restringe à matemática de fronteira, nem se limita à atividade de pesquisadores consagrados, ela atravessa todos os níveis de produção e aprendizagem matemática. Essa perspectiva revela que a conjectura não é etapa periférica da atividade matemática, mas condição de sua própria existência. Ao conjecturar, o sujeito matemático mobiliza estruturas cognitivas que sustentam o raciocínio dedutivo e a organização lógica do pensamento.

O reconhecimento de padrões constitui o momento inaugural da conjectura. Ao observar sequências numéricas, propriedades geométricas ou comportamentos algébricos recorrentes, o

estudante percebe regularidades que sugerem uma possível generalização. A BNCC corrobora a importância dessa etapa, especialmente em sua unidade temática de Álgebra, ao destacar que o trabalho com a identificação de regularidades em sequências é o alicerce para a construção do pensamento algébrico (BRASIL, 2018). Saraiva explicita essa dimensão ao afirmar que as conjecturas podem resultar “da constatação de regularidades ou padrões ao lidar com objetos matemáticos” (SARAIVA, 2024, p. 2)

Essa constatação é decisiva para compreender o papel formativo da conjectura. Reconhecer padrões exige: comparação sistemática de casos; identificação de invariantes; distinção entre coincidência e regularidade estrutural; formulação de generalizações provisórias. Esse movimento cognitivo constitui a base do raciocínio matemático. Antes de demonstrar, é preciso perceber relações. Antes de formalizar, é necessário suspeitar de uma estrutura subjacente. Assim, a conjectura emerge como síntese entre percepção empírica e abstração.

O processo de reconhecimento de padrões não é mecânico, ele exige organização lógica da informação disponível. O estudante precisa analisar exemplos, buscar relações internas e estabelecer critérios de validade. Essa prática fortalece a capacidade de inferência e estimula o pensamento estruturado.

A formulação de uma conjectura representa o momento em que o aprendiz ultrapassa o caso particular e propõe uma afirmação de validade geral. Trata-se de um salto lógico que exige argumentação implícita, ainda que não formalizada. Ao caracterizar as conjecturas como “proposições provisórias” (SARAIVA, 2024, p. 2), o autor destaca que a generalização nasce sustentada por indícios racionais, ainda que careça de demonstração.

Nesse ponto, o raciocínio lógico assume papel central. Conjecturar não significa apenas afirmar algo que “parece verdadeiro”, mas construir uma hipótese plausível a partir de evidências estruturadas. O estudante aprende a: justificar por que acredita na validade da regularidade observada; avaliar a consistência interna da hipótese; antecipar possíveis exceções. Essa atividade fortalece a argumentação e amplia a capacidade de organização do pensamento. A generalização deixa de ser mero palpite e passa a ser construção racional fundamentada em padrões identificados.

A importância da conjectura para o desenvolvimento do raciocínio lógico é explicitada por Saraiva ao afirmar que “tentar provar ou refutar uma conjectura implica seguramente desenvolver capacidades de pensamento crítico e de raciocínio lógico” (SARAIVA, 2024, p. 2). A tentativa de justificativa ou prova exige encadeamento dedutivo, análise de hipóteses e verificação de implicações.

Ao buscar demonstrar uma conjectura, o estudante testa a validade da generalização em novos casos, procura contraexemplos, organiza argumentos em sequência lógica, diferencia evidência empírica de prova formal. Esse processo consolida o raciocínio dedutivo, pois obriga o sujeito a justificar cada passo e a reconhecer a necessidade de coerência interna. O erro deixa de ser falha definitiva e passa a ser instrumento de refinamento lógico. Além disso, a possibilidade

de refutação é elemento essencial da formação crítica. Conjecturar implica aceitar que uma hipótese pode ser falsa. Essa abertura ao questionamento fortalece a postura investigativa e desenvolve uma maturidade intelectual.

No contexto educativo, a prática de conjecturar contribui decisivamente para a transição do pensamento intuitivo para o pensamento formal. Saraiva (2024, p. 2) ressalta que, ao longo do processo de exploração, o estudante aprende a enfrentar bloqueios e que o professor desempenha papel fundamental ao oferecer estímulos que favoreçam a persistência. Essa mediação é essencial para consolidar o raciocínio lógico. O autor ainda afirma que tais experiências contribuem “para a estruturação do pensamento, ao promover a passagem do raciocínio intuitivo para o formal” (SARAIVA, 2024, p. 2). Essa passagem é, essencialmente, um processo de organização lógica dedutiva de estudos progressivos. O estudante começa observando exemplos concretos, identifica padrões, formula conjecturas e, gradualmente, aprende a estruturá-las em linguagem matemática rigorosa.

Conjecturar, nesse sentido, funciona como ponte entre intuição e formalização. Esse movimento de formalização progressiva atende à premissa da BNCC de que o letramento matemático deve garantir aos estudantes a capacidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente (BRASIL, 2018). Sem essa etapa intermediária, a demonstração pode se tornar exercício mecânico, desprovido de significado. Com ela, a prova surge como necessidade lógica decorrente da hipótese formulada. Nesse contexto de letramento, as sequências numéricas muitas vezes apresentam inicialmente sob a forma de desafios ou brincadeiras. Costa e Santos (2019) argumentam que explorar a lei de formação dessas sequências é essencial para quebrar o senso comum de que a matemática é constituída apenas por “fórmulas sem significado”. Os autores ressaltam que “o que parece uma simples brincadeira ou um jogo pode nos conduzir a conclusões e aplicações importantes”, evidenciando que o raciocínio rigoroso frequentemente pode nascer da curiosidade lúdica.

A história da Matemática oferece inúmeros exemplos de conjecturas que impulsionaram avanços teóricos significativos. Ao mencionar o caso do Último Teorema de Fermat e o longo intervalo entre sua formulação e demonstração, Saraiva (2024, p. 2) evidencia que o enfrentamento de conjecturas exige persistência e rigor.

Embora o contexto escolar não reproduza a complexidade da pesquisa matemática de ponta, ele pode simular, em escala adequada, essa experiência intelectual. Ao trabalhar com situações (problemas - abertos) que incentivem a formulação de hipóteses, o professor estabelece condições para que o estudante desenvolva, rigor argumentativo, coerência lógica, capacidade de abstração, sensibilidade para identificar estruturas recorrentes. Essas competências são indissociáveis do raciocínio matemático formado/amadurecido.

A culminância desse processo é sintetizada por Saraiva ao afirmar que experiências que envolvam formulação, formalização e prova de conjecturas têm o potencial de levar o estudante “a pensar como um matemático” (SARAIVA, 2024, p. 2). Pensar como matemático significa reconhecer padrões, formular generalizações coerentes e buscar justificações rigorosas. Assim, a

conjectura, desenvolve a capacidade de identificar regularidades estruturais, exige organização lógica do pensamento, estimula a construção de argumentos dedutivos, promove autonomia intelectual e consolida o pensamento crítico.

Ao evidenciar a relação entre conjectura, raciocínio lógico e reconhecimento de padrões, compreende-se que sua inserção sistemática no ensino não é mero recurso didático, mas estratégia epistemologicamente coerente com a natureza da Matemática. Conjeturar é, portanto, mais do que antecipar uma prova, é aprender a estruturar o pensamento, a buscar coerência e a reconhecer que a Matemática se constrói a partir da interação dinâmica entre padrões observados e argumentos logicamente fundamentados.

Nesse sentido, Costa e Sousa (2023) no artigo *O algoritmo de Kaprekar na OBMEP* destacam a importância dos algoritmos para o desenvolvimento do pensamento computacional e algébrico. Segundo os autores, "um algoritmo é apresentado na forma de uma rotina com instruções ou procedimentos ordenados ou sequenciados com objetivo de executar uma atividade, ou, ainda, apresentar os passos para a resolução de algum problema"(Costa e Sousa, 2023, p. 46). Esse entendimento revela que o algoritmo constitui uma forma organizada de raciocínio, estruturada em decomposição, ordenação lógica e sistematização. A inserção dessas ideias dialoga diretamente com as inovações abordadas na BNCC, que ao introduzir o desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica, associando-o à capacidade de compreender, analisar e criar algoritmos para a resolução de problemas (BRASIL, 2018).

Portanto, os algoritmos matemáticos, quando explorados para além da repetição mecânica, tornam-se instrumentos poderosos. Na abordagem proposta por Costa e Sousa (2023) fica evidente que problemas oriundos de competições como a OBMEP podem ser ressignificados como oportunidades didáticas de alto valor formativo. O algoritmo deixa de ser apenas uma técnica e passa a constituir um campo de investigação, em que o estudante aprende a pensar matematicamente.

Em síntese, a importância dos algoritmos matemáticos reside em sua capacidade de articular procedimento e estrutura, cálculo e generalização, regularidade e prova. Ao explorar sistematicamente tais rotinas, cria-se um ambiente favorável ao desenvolvimento integrado do pensamento algébrico e computacional, consolidando a habilidade de reconhecer padrões e transformar observações em conhecimento matemático fundamentado.

Assim, reconhecimento de padrões, conjectura e algoritmo não configuram elementos isolados, mas dimensões interdependentes de uma mesma dinâmica epistemológica. Ao promover situações em que o estudante observa regularidades, formula hipóteses e estrutura procedimentos sistemáticos, o ensino da Matemática aproxima-se de sua própria natureza investigativa. Desse modo, consolida-se uma formação que ultrapassa a execução técnica e favorece a construção de um pensamento lógico, crítico e estruturalmente organizado.

Ao longo desta seção, evidenciou-se que o reconhecimento de padrões constitui o ponto de partida do raciocínio matemático, sendo a conjectura o mecanismo que transforma

regularidades percebidas em proposições de alcance geral. Como destaca Saraiva (2024), “formular e demonstrar conjecturas são tarefas centrais do labor matemático aos mais diversos níveis”, o que reforça que a atividade de conjecturar não é periférica, mas estruturante. Nesse movimento, o estudante aprende a organizar informações, identificar invariantes, justificar hipóteses e submeter afirmações à prova lógica, consolidando a transição do pensamento intuitivo para o pensamento formal.

Paralelamente, a inserção de algoritmos matemáticos, compreendidos não como meras rotinas mecânicas, mas como estruturas organizadas de raciocínio, amplia esse processo formativo. Como ressaltam Costa e Sousa (2023), o algoritmo envolve procedimentos ordenados que exigem decomposição, sequenciação e coerência lógica. Quando explorado em perspectiva investigativa, o algoritmo torna-se campo fértil para a identificação de padrões, a formulação de conjecturas e a generalização algébrica, articulando pensamento computacional e pensamento matemático.

A articulação entre *reconhecimento de padrões, conjectura e algoritmos* encontra, no estudo de sequências, um campo privilegiado de materialização didática e epistemológica. As sequências constituem, por natureza, estruturas organizadas segundo regularidades que se manifestam por meio de recorrências, progressões ou regras de formação. Ao observar os primeiros termos de uma sequência, o estudante é naturalmente conduzido a buscar padrões, identificar invariantes e propor hipóteses explicativas acerca da lei que rege sua construção. Esse movimento inicial já mobiliza o processo de conjecturação descrito anteriormente, a percepção de regularidades conduz à formulação de uma generalização provisória.

Portanto, o estudo de sequências sintetiza os elementos discutidos nesta seção: inicia-se com o reconhecimento de padrões, evolui para a formulação de conjecturas e culmina na explicitação de regras estruturadas que assumem caráter algorítmico. Desse modo, o ensino das sequências não se reduz à manipulação simbólica, mas configura-se como espaço privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstração e da compreensão da Matemática como ciência de estruturas e regularidades.

Um exemplo claro desse movimento de formalização progressiva é o estudo da "sequência que conta Algarismos", analisada por Costa e Santos (2019). O que se inicia como um desafio puramente empírico e investigativo para adivinhar o próximo termo da sequência, culmina na construção de uma rigorosa estrutura algorítmica. Para analisar o comportamento dessa sequência, os autores definem formalmente uma função e passam a investigar propriedades, como a identificação de órbitas, pontos fixos e pontos periódicos. Esse processo ilustra perfeitamente como o enfrentamento de um problema aberto leva o estudante a desenvolver coerência lógica e a organizar seu pensamento de maneira formal.

3.2 A gênese histórica do conceito de sequência: da regularidade empírica à formalização funcional

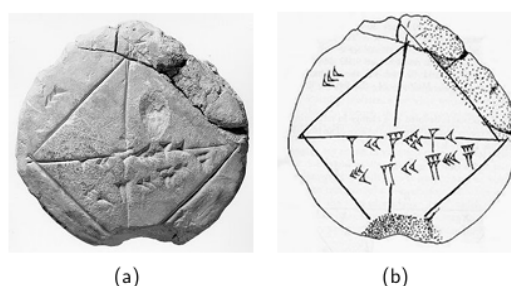
Compreender o surgimento histórico do conceito de sequência exige, antes de tudo, romper com a ilusória retrospectiva produzida pela forma como a matemática é tradicionalmente apresentada. Quando aprendemos que uma sequência é uma função $a_n = f(n)$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, temos a impressão de que esse objeto conceitual sempre existiu sob essa forma. Entretanto, como afirmam Roque e Pitombeira (2012) no livro *Tópicos de História da Matemática*, “há uma diferença crucial entre a ordem lógica da exposição [...] e a ordem da invenção”. Essa observação metodológica é decisiva, uma vez que a sequência não nasceu como função, ela emergiu de práticas concretas, de regularidades observadas e de padrões reiterados muito antes da formalização algébrica.

Os autores Roque e Pitombeira (2012) ressaltam que a matemática parece ter sido “escrita de trás para a frente”, pois as definições que hoje aparecem no início dos capítulos foram, historicamente, descobertas por último. Essa inversão histórica é particularmente evidente no caso das sequências. A formalização funcional é o ponto de chegada de um percurso que começou com listas numéricas, padrões geométricos e regras operatórias.

Nas civilizações antigas, especialmente na Babilônia, encontra-se registros que, embora não nomeados como sequências, constituem suas primeiras manifestações estruturais. A matemática babilônica era fortemente apoiada em tabelas numéricas. Essas tabelas funcionavam como repertórios organizados de valores recorrentes, muitas vezes associados a coeficientes utilizados em cálculos. Como descrevem Roque e Pitombeira (2012) ao tratar das “tabelas de coeficientes”, elas eram “tabletes de referência que continham números que ocorrem em vários tipos de problemas”. Tais listas não eram simples registros isolados, eram estruturas ordenadas de números organizados segundo uma regularidade operatória.

O célebre tablete YBC 7289, analisado por Roque e Pitombeira (2012), ilustra de forma concreta essa prática. Nele, a relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal aparece registrada por meio de valores sexagesimais organizados sistematicamente. Ainda que não haja ali uma “sequência” no sentido moderno, há um encadeamento regular de números que responde a um padrão geométrico. A regularidade precede a abstração.

Figura 1 – YBC 7289



Fonte: ROQUE, PITOMBEIRA (2012, p. 16)

Esse contexto reforça a sentença de que o conceito de sequência surge como organização prática da regularidade, não como objeto teórico. O pensamento algébrico ainda não existe, o que existe é a necessidade de repetir procedimentos e registrar resultados ordenadamente.

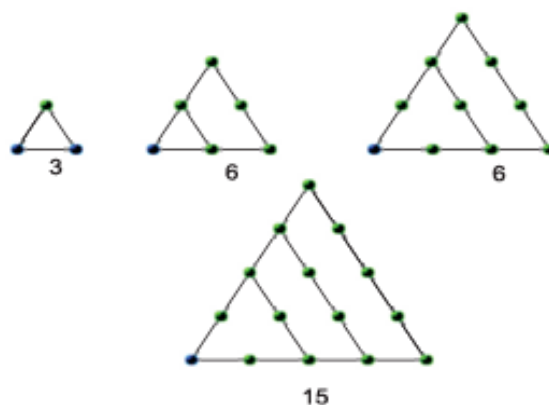
É na Grécia antiga que ocorre uma transformação qualitativa decisiva. Ao abordar a matemática pitagórica, Roque e Pitombeira (2012) enfatizam que a noção de número era profundamente concreta, vinculada à manipulação de configurações geométricas. A aritmética pitagórica era indutiva e baseada na evidência visual. Os "números figurados" constituem um exemplo paradigmático dessa concepção.

A concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem de números. Uma das características principais das coisas reside no fato de elas poderem ser organizadas e distinguidas. Sendo assim, as propriedades aritméticas das coisas constituem o seu ser propriamente dito, e o ser de todas as coisas é o número. (ROQUE, PITOMBEIRA. 2012, p. 54)

No trabalho intitulado de "*Uma nota sobre os números multifigurados quadrados nonagonais*" de Bezerra et al. (2025), é posto que "os números geométricos ou figurados são uma classe de números que podem ser representados utilizando pontos e quando arranjados de forma equidistantes, formam objetos geométricos". Essa representação geométrica possibilita compreender padrões numéricos de maneira intuitiva, uma vez que cada número corresponde à quantidade de pontos necessários para formar determinada figura geométrica. Nesse contexto, os números triangulares, quadrados e pentagonais representam exemplos clássicos dessa construção geométrica, sendo historicamente explorados na busca por regularidades e propriedades aritméticas.

Conforme Roque e Pitombeira (2012), os *Números Triangulares* são o primeiro exemplo de números figurados, nesse exemplo, os pontos formam figuras triangulares.

Figura 2 – Números Triangulares



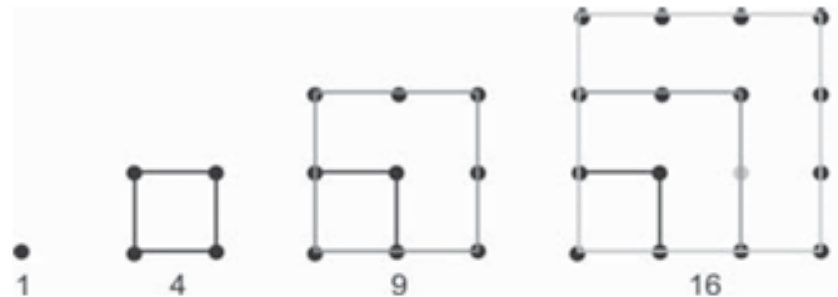
Fonte: ROQUE, PITOMBEIRA (2012, p. 55)

Os números triangulares apresentados na Figura 2 podem ser representados pelos Algarismos 1, 3, 6, 10, 15, ... com ordem $k = 1, 2, 3, 4, 5$ respectivamente, em que, na linguagem matemática atual se traduz em um PA (Progressão Aritmética). E um número triangular de ordem k é dado pela soma da PA que atualmente conhecemos como

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (3.1)$$

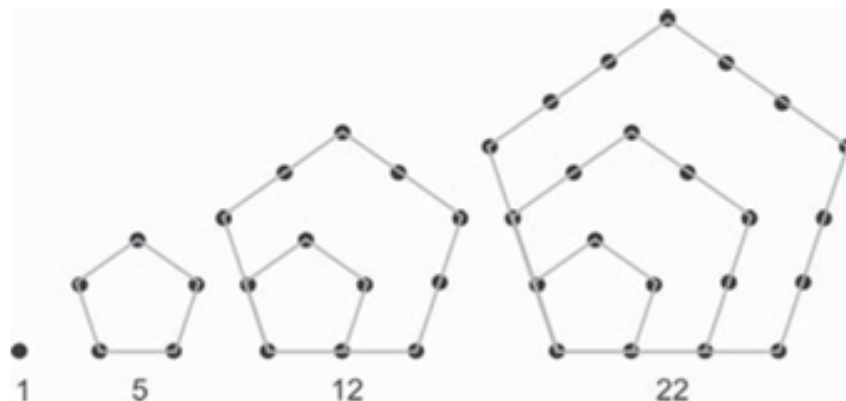
De forma semelhante, os pitagóricos analisaram outras estruturas como os *números quadrados* e *números pentagonais* como mostram as Figuras (3 e 4)

Figura 3 – Números Quadrados



Fonte: ROQUE, PITOMBEIRA (2012, p. 55)

Figura 4 – Números Pentagonais



Fonte: ROQUE, PITOMBEIRA (2012, p. 55)

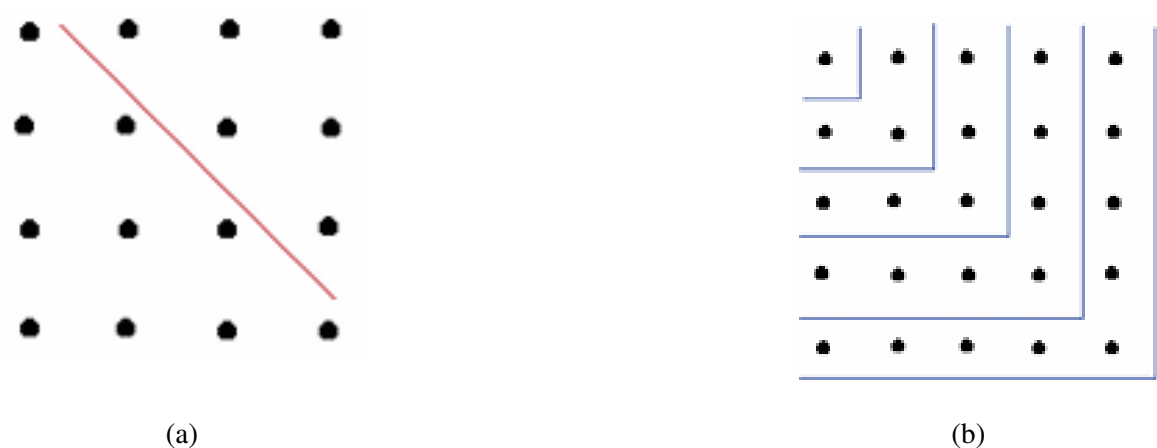
Os números triangulares, quadrados e pentagonais não eram inicialmente expressões algébricas, mas configurações de pontos organizados em forma de triângulo, quadrado e pentágono respectivamente. As Figuras (2, 3 e 4) mostram como dessas disposições visuais se extraíam generalizações aritméticas.

Destas configurações numéricas, os pitagóricos tiravam, de forma visual, diversas conclusões aritméticas como:

- a) Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos;
- b) É possível passar de um número quadrado ao número quadrado imediatamente maior adicionando-se a sequência dos números ímpares. (ROQUE, PITOMBEIRA. 2012, p. 55)

As duas proposições descritas acima podem ser visualmente descritas pela Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Visualização Geométrica



Fonte: ROQUE, PITOMBEIRA (2012, p. 56)

A partir da observação das imagens contidas na Figura 5, pode-se exprimir os enunciados em linguagem matemática atual. Do item (a), em que a representação geométrica é traduzida como "Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos" por Roque e Pitombeira (2012), observa-se o seguinte padrão:

$$\begin{aligned}
 2^2 &= 3 + 1 \\
 3^2 &= 6 + 3 \\
 4^2 &= 10 + 6 \\
 5^2 &= 15 + 10 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Conforme descrito em (3.1), as igualdades acima ficam:

$$\begin{aligned}
2^2 &= (2 + 1) + 1 \\
3^2 &= (3 + 2 + 1) + (2 + 1) \\
4^2 &= (4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) \\
5^2 &= (5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (4 + 3 + 2 + 1) \\
&\vdots \\
k^2 &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Analogamente, é possível traduzir a visualização geométrica contida na Figura 5, item (b), descrita como "É possível passar de um número quadrado ao número quadrado imediatamente maior adicionando-se a sequência dos números ímpares" por Roque e Pitombeira (2012), a qual fica na linguagem matemática atual como:

$$\begin{aligned}
1^2 + 3 &= 2^2 \\
2^2 + 5 &= 3^2 \\
3^2 + 7 &= 4^2 \\
4^2 + 9 &= 5^2 \\
&\vdots \\
k^2 + (2k + 1) &= (k + 1)^2
\end{aligned}$$

Roque e Pitombeira (2012) observam que “era possível obter, graficamente, generalizações sobre sequências de números”. Essa afirmação é crucial pois, a sequência nasce da visualização geométrica antes de nascer da álgebra. A regularidade é percebida na figura, a lei é intuída pela reorganização espacial. O que hoje expressamos como $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ era, naquele contexto, uma operação visual sobre diagramas.

É importante notar que, segundo Roque e Pitombeira (2012), “as demonstrações feitas pelos pitagóricos parecem ter se baseado na evidência visual fornecida pelos números figurados”. Isso significa que a sequência, nesse estágio, é uma estrutura percebida e manipulada, não formalmente definida. A generalização precede o simbolismo.

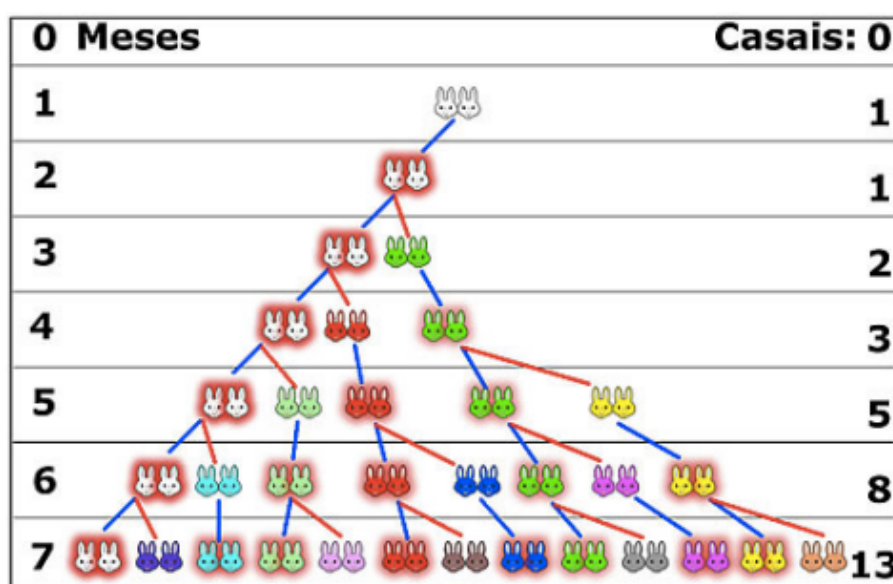
Durante a Idade Média, a matemática prática ligada ao comércio consolida um novo passo na evolução das regularidades numéricas. As chamadas “escolas de ábaco” ensinavam técnicas voltadas para juros simples e compostos, regra de três e partilhas. Nesse ambiente, as regularidades passam a ser expressas como regras operatórias. A repetição deixa de ser apenas visual e passa a ser verbalizada.

A *Sequência de Fibonacci* insere-se nesse contexto, com origem em um contexto histórico ligado ao desenvolvimento da matemática medieval europeia, especialmente às contribuições

do matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci. Segundo Mikalef (2019, p. 147-162), no século XIII, ao escrever sua obra *Liber Abaci* (1202), ele apresentou diversos problemas matemáticos envolvendo o sistema de numeração indo-arábico e métodos de cálculo mais eficientes que os algarismos romanos. Nesse contexto surge o famoso problema da reprodução de coelhos, que dá origem a essa famosa sequência numérica. Aqui aparece com clareza a ideia de produção iterativa: cada termo depende de operações anteriores. A noção de recursão começa a se delinear.

Historicamente, conforme aponta Mikalef (2019), a sequência aparece com um enunciado a qual se pergunta quantos pares de coelhos existiriam após um ano, considerando que cada casal gera um novo par a cada mês após atingir maturidade. A solução do problema revela um padrão de crescimento específico, como sugere a representação a seguir.

Figura 6 – Representação gráfica do problema que gerou a sequência de Fibonacci



Fonte: MIKALEF (2019, p. 149)

Colocando a quantidade de casais de coelhos em cada mês em sequência, obtêm-se

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

e de acordo com Mikalef (2019) "percebe-se que cada número, a partir do terceiro, se dá pela soma dos dois anteriores a ele ($1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5 \dots$). Essa é a propriedade mais importante da sucessão de Fibonacci."

No livro "O Liber Abbaci de Fibonacci: das matemáticas medievais para o ensino atual" (2025) de Marc Moyon e tradução de Iran Abreu Mendes e Lorena Mendes Cavalcante, é mencionado que o matemático Édouard Lucas (1842- 1891) afirma que a Sequência de Fibonacci "é para ele 'o primeiro exemplo de série recorrente' " evidenciando o papel pioneiro de Leonardo de Pisa na introdução de padrões matemáticos que transcenderam a sua época. Essa constatação de Édouard Lucas reforça que o Liber Abbaci vai muito além de um simples manual

aritmético voltado ao comércio mercantil europeu. O clássico problema da reprodução dos coelhos, abordado na Figura 6, não apenas ilustrou uma curiosidade matemática, mas inaugurou o estudo formal das relações de recorrência

No século XVIII, a análise matemática associa função à expressão analítica. Porém, como os autores destacam, essa concepção começa a ser questionada no século XIX. A principal transformação ocorre quando as propriedades das funções deixam de ser deduzidas de suas expressões e passam a defini-las “a priori” Roque e Pitombeira (2012). Essa mudança epistemológica é fundamental para a consolidação do conceito moderno de sequência.

A definição de função apresentada por Cauchy: “quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras” Roque e Pitombeira (2012), ainda pressupunha exemplos analíticos particulares. Contudo, com Dirichlet, a generalidade se amplia, não é necessário que exista uma expressão algébrica associando as variáveis. O requisito essencial passa a ser a univocidade: “para cada x temos somente um valor para y ” Roque e Pitombeira (2012).

Chegando assim, à definição de sequência apresentada na literatura atual: *Uma Sequência de Números Reais é uma função $x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ e \mathbb{R} é o conjunto dos Números Reais e para cada $n \in \mathbb{N}$ associamos o valor $x(n) \in \mathbb{R}$.*

Assim, a trajetória histórica pode ser reconstruída como um movimento progressivo de abstração. Inicialmente, listas ordenadas respondem a necessidades administrativas; em seguida, padrões geométricos produzem generalizações visuais; depois, regras operatórias permitem geração sistemática de termos; por fim, a noção de função abstrata incorpora a sequência como caso particular. Essa reconstrução tem implicações epistemológicas e educacionais profundas. Se a sequência nasceu do reconhecimento de regularidades, então o trabalho com padrões não é simplificação pedagógica, mas reconstituição histórica do próprio processo de formação do pensamento matemático.

A formalização moderna não apaga essa história, apenas a reorganiza. Como observam Roque e Pitombeira (2012), a matemática frequentemente oculta o contexto problemático de sua gênese. Recuperar essa gênese permite compreender que o pensamento algébrico emerge da capacidade de reconhecer e generalizar padrões.

3.3 Sequência de Conway ordenada

A Sequência de Conway surgiu de maneira curiosa e despreziosa, apresentada ao matemático John Horton Conway por um de seus estudantes como um enigma numérico. De acordo com o relato presente no artigo de Gairín, Manero, Muñoz e Oller (2017). Neste Conway afirmou que o desafio recebido era “O problema mais estúpido que você possa imaginar, que levou à resposta mais complicada que você possa imaginar.” (CONWAY apud GAIRÍN et al., 2017, p. E19). Esse enigma consistia apenas em prever o próximo termo de uma sucessão

iniciada por números aparentemente simples, como $\{1, 11, 21, 1211, \dots\}$ entre outros.

Figura 7 – Matemático John Horton Conway



Fonte: GAIRÍN et al. (2017, p. E19)

Conforme dito, “um aluno abordou Conway e o convidou a descobrir o próximo número da sequência” (GAIRÍN et al., 2017, p. E19), revelando que o matemático inicialmente não conseguiu deduzir a lógica por meio do qual os termos foram construídos. Só após diversas tentativas, o estudante explicou que cada número da sequência é gerado por uma descrição verbal do termo anterior: conta-se quantas vezes cada dígito aparece consecutivamente. Assim, o número 1 transforma-se em 11 (“um 1”), que se transforma em 21 (“dois 1”), que por sua vez gera 1211 (“um 2, um 1”), e assim por diante.

De maneira formal, os autores definem que a Sequência de Conway “consiste em olhar e falar, daí o seu nome” (GAIRÍN et al., 2017, p. E20), ou seja, cada termo surge da leitura e codificação do termo anterior. Mesmo sendo simples de explicar e gerar, a sequência possui propriedades matemáticas profundas, entre elas o fato de que seu crescimento é regido pela chamada Constante de Conway, aproximadamente igual a 1,303577269, conforme demonstrado pelo próprio matemático (CONWAY apud GAIRÍN et al., 2017).

Além da versão clássica, existe a *Sequência de Conway Ordenada*, uma variação na qual os dígitos são contados não pela ordem de aparição, mas pela ordem crescente (primeiro contam-se todos os 1, depois os 2, depois os 3 etc.). Essa versão apresenta um comportamento distinto, o qual será nosso principal objeto de estudo.

Em Costa; Carvalho e Mesquita (2022, p. 2) é apresentada a seguinte definição para a Sequência de Conway Ordenada:

Definição 1. Para gerar um elemento da sequência a partir do elemento anterior, leia os dígitos do elemento anterior em ordem crescente, contando e registrando o número de dígitos em grupos

do mesmo dígito.

Assim, se uma sequência desse tipo possui como termo inicial o algarismo 1, os demais termos prosseguem da seguinte forma: "1, um 1, dois 1, um 1 um 2, três 1 um 1..."ou seja,

$$1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, \dots$$

Para apresentar algumas propriedades da *Sequência de Conway Ordenada* denota-se uma função ϕ de tal maneira que a sequência

$$x_1, x_2 = \phi(x_1), x_3 = \phi(x_2), \dots, x_n = \phi(x_{n-1}),$$

seja construída por meio de um processo iterativo da *Sequência de Conway Ordenada*.

Em Costa; Carvalho e Mesquita (2022, p. 4) é apresentada a seguinte definição:

Definição 2. *Dado um número natural x com n algarismos representado por $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$, sejam $0 \leq x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} \dots < x_{n_k} \leq 9$ os algarismos distintos que aparecem em x e $p_j > 0$, $j = 1, \dots, k$ a quantidade de vezes que o algarismo x_{n_j} aparece na representação do número x . Definimos*

$$\phi(x) = p_1x_{n_1}p_2x_{n_2} \dots p_kx_{n_k}.$$

Exemplo 1. *Seja $x = 2115326668013$, note que $x_{n_1} = 0$, $x_{n_2} = 1$, $x_{n_3} = 2$, $x_{n_4} = 3$, $x_{n_5} = 5$, $x_{n_6} = 6$, $x_{n_7} = 8$ são os algarismos distintos de x , tem-se também que $p_0 = 1$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$, $p_5 = 1$, $p_6 = 3$, $p_8 = 1$; assim, a soma $p_0 + p_1 + \dots + p_8 = 13$ é a quantidade de algarismos em x . Conforme a Definição 2, tem-se $\phi(x) = 10312223153618$.*

Como destacado em Costa; Carvalho e Mesquita (2022), observe que a função $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, não é sobrejetora, pois não existe um $x \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(x) = 1$. Também não é injetora, pois para $x = 2552$ e $y = 5225$ temos $\phi(x) = \phi(y) = 2225$.

A partir de sucessivas interações da função ϕ se pode analisar o comportamento da *Sequência de Conway Ordenada*. Para tal, os conceitos de órbita, sequência periódica e ponto fixo são essenciais.

Definição 3. *a) Seja ϕ a aplicação da Sequência de Conway Ordenada. Para todo número natural x as interações de ϕ são dadas por:*

$$\phi^0(x) = x, \phi^1(x) = \phi(x), \dots, \phi^k(x) = \phi(\phi^{k-1}(x)); k \geq 2.$$

b) A órbita de um número x é dado pelo conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^k(x), \dots\}$$

Exemplo 2. Dado $x = 3$, sua órbita é dada por; $\phi(3) = 13$, $\phi^2(3) = 1113$, $\phi^3(3) = 3113$, $\phi^4(3) = 2123$, $\phi^5(3) = 112213$, $\phi^6(3) = 312213$, $\phi^7(3) = 212223$. $\phi^8(3) = 114213$, $\phi^9(3) = 31121314$, $\phi^{10}(3) = 41122314$, $\phi^{11}(3) = 31221324$, $\phi^{12}(3) = 21322314$, $\phi^{13}(3) = 21322314$, \dots , ou seja

$$\mathcal{O}(3) = \{3, 13, 1113, 3113, 2123, 112213, 312213, 212223, \\ 114213, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, \dots\}.$$

Note que $\phi^n(3) = \phi^{n-1}(3)$ para $n > 13$.

Ainda sobre a questão de órbita de um determinado elemento (termo) inicial x , Costa; Carvalho e Mesquita (2022) definem:

Definição 4. A órbita de x é:

- (a) *periódica*, ou que x é ponto periódico de ordem k , se para algum inteiro k , obtivermos $\phi^k(x) = \phi^i(x) \neq x$ e $\phi^{k+i}(x) = \phi^i(x)$, para todo $i < k$.
- (b) *eventualmente periódica de ordem k* se a órbita de x não é periódica, mas existe um natural n tal que a órbita de $\phi^n(x)$ é periódica de ordem k .

É importante observar que se x pertence a uma órbita de período k , todos os demais pontos da órbita de x possuirá período k .

Costa; Carvalho e Mesquita (2022) apresentam um exemplo muito interessante de dois números naturais que possuem uma propriedade incrível. Seja $x = 10714213141516172819$ e $u = 10812213241516271819$, note que $\phi(x) = u$ e $\phi(u) = x$. Então a órbita de x , ou a órbita de u , é periódica de ordem 2.

Embora Costa; Carvalho e Mesquita (2022) forneça um par notável com 20 algarismos (utilizando o dígito 0), é possível construir um par menor e igualmente fascinante com 12 algarismos, usando apenas os dígitos de 1 a 6.

Exemplo 3. Tome $x, y \in \mathbb{N}$ tal que $x = 314213241516$ e $y = 412223241516$. Também temos que $\phi(x) = y$ e $\phi(y) = x$, ou seja, a órbita de x ou de y é periódica de ordem 2.

Uma pergunta interessante é: Existem mais números com essa propriedade? Existe um processo analítico para encontrá-los?

A resposta para essa pergunta é: Sim, existe um processo analítico para encontrar números que geram uma órbita periódica de ordem 2.

O raciocínio para encontrar esses números não envolve tentativa e erro aleatória, mas sim a tradução da regra da Sequência de Conway Ordenada para um sistema de equações

fundamentado na frequência dos algarismos. Note que os números gerados nessa sequência assumem uma estrutura bem específica. Eles se tornam pares de "(quantidade) e (dígito)" como apontam Costa; Carvalho e Mesquita (2022) na Definição 2.

Assim, considere os números

$$x = a_1 1 a_2 2 a_3 3 \cdots a_n n \quad e \quad y = b_1 1 b_2 2 b_3 3 \cdots b_n n$$

com $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Vamos gerar o número y a partir de x . Lembre-se que x é composto pelos coeficientes a_i e pelos "rótulos" fixos (1,2,3...9). Como cada rótulo de 1 a 9 aparece exatamente uma vez na estrutura, nós já temos garantido um dígito de cada. Portanto, a quantidade total do dígito k dentro do número x será:

$$b_k = (\text{quantas vezes o número } k \text{ aparece entre os coeficientes } a) + 1.$$

Para que os números formem um ciclo de período 2, precisamos que a regra aplicada a y resulte de volta em x . Isso nos dá a regra inversa:

$$a_k = (\text{quantas vezes o número } k \text{ aparece entre os coeficientes } b) + 1$$

Além disso, como o número total de dígitos no nosso bloco de x é $2n$, a soma de todos os coeficientes a (e também a soma de todos os b) deve ser exatamente $2n$.

Exemplo 4. *Construiremos esse exemplo para $n = 6$, logo, queremos encontrar um conjunto de $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ que satisfaçam essa troca mútua.*

Sabemos que $n = 6$. A soma dos elementos tem que ser $2 \times 6 = 12$. Vamos construir o conjunto a a partir do conjunto b que escolhi: (4, 2, 2, 2, 1, 1). Se avaliarmos a frequência de cada dígito dentro desse conjunto a , temos:

- *O número 1 aparece 2 vezes (nas posições b_5 e b_6). Logo, $a_1 = 2 + 1 = 3$.*
- *O número 2 aparece 3 vezes (nas posições b_2, b_3, b_4). Logo, $a_2 = 3 + 1 = 4$.*
- *O número 3 não aparece. Logo, $a_3 = 0 + 1 = 1$.*
- *O número 4 aparece 1 vez (na posição b_1). Logo, $a_4 = 1 + 1 = 2$.*
- *O número 5 não aparece. Logo, $a_5 = 0 + 1 = 1$.*
- *O número 6 não aparece. Logo, $a_6 = 0 + 1 = 1$.*

Isso nos gera o conjunto $a = (3, 4, 1, 2, 1, 1)$. Agora, vamos fazer o teste reverso. Olhando para as frequências no conjunto a :

- O número 1 aparece 3 vezes (em a_3, a_5, a_6). Logo, $b_1 = 3 + 1 = 4$.
- O número 2 aparece 1 vez (a_4). Logo, $b_2 = 1 + 1 = 2$.
- O número 3 aparece 1 vez (a_1). Logo, $b_3 = 1 + 1 = 2$.
- O número 4 aparece 1 vez (a_2). Logo, $b_4 = 1 + 1 = 2$.
- Os números 5 e 6 não aparecem. Logo, $b_5 = 1$ e $b_6 = 1$.

Voltamos exatamente para o conjunto $b = (4, 2, 2, 2, 1, 1)$.

Juntando as listas com seus respectivos dígitos-rótulo (1 a 6), nascem os números:

- $x \rightarrow a_1 1 a_2 2 a_3 3 a_4 4 a_5 5 a_6 6 \rightarrow 314213241516$
- $y \rightarrow b_1 1 b_2 2 b_3 3 b_4 4 b_5 5 b_6 6 \rightarrow 412223241516$

Vamos tentar essa mesma estratégia para $n = 7$, então nossos conjuntos são $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$. Poderíamos encontrar um ciclo de ordem 2 para $n = 7$?

A resposta direta e fascinante a essa pergunta é: existem exatamente zero maneiras de organizar um conjunto b com $n = 7$ para gerar um ciclo de ordem 2. Pode parecer surpreendente que num universo de tantas combinações não exista sequer um par que fique a alternar entre si, mas a matemática por trás destas frequências cria uma "correnteza" da qual os números não conseguem escapar, nos levando a um resultado interessante.

Inicialmente, para $n = 7$, qualquer conjunto válido tem de ter a soma dos seus elementos igual a 14 (pois $2n = 14$). Isto significa que qualquer conjunto é, na verdade, uma partição do número 14 em 7 partes. Na matemática combinatória, existem apenas 15 maneiras (partições) de dividir o número 14 em 7 fatias inteiras positivas, as quais estão listadas a seguir.

Tabela 1 – Lista organizada das partições consideradas

Partição	Observação
	Começando com 8
(8, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	
	Começando com 7
(7, 2, 1, 1, 1, 1, 1)	
	Começando com 6
(6, 3, 1, 1, 1, 1, 1)	
(6, 2, 2, 1, 1, 1, 1)	
	Começando com 5
(5, 4, 1, 1, 1, 1, 1)	
(5, 3, 2, 1, 1, 1, 1)	Permutação pertence ao ciclo de ordem 3
(5, 2, 2, 2, 1, 1, 1)	Permutação pertence ao ciclo de ordem 3
	Começando com 4
(4, 4, 2, 1, 1, 1, 1)	Permutada integra o ciclo de ordem 3
(4, 3, 3, 1, 1, 1, 1)	
(4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)	Ponto fixo
(4, 2, 2, 2, 2, 1, 1)	
	Começando com 3
(3, 3, 3, 2, 1, 1, 1)	
(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)	
(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)	
	Começando com 2
(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	

A única partição que aponta para si mesma é a $(4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$. Mas será que podemos baralhar os números desta partição para criar um ciclo de ordem 2? Se tentarmos permutar a ordem (por exemplo, $b = (4, 2, 3, 2, 1, 1, 1)$ ou $b = (4, 2, 2, 3, 1, 1, 1)$), a regra fará com que o passo seguinte seja exatamente o ponto fixo ordenado $(4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$. Ou seja, qualquer permutação é imediatamente sugada para o ponto fixo e lá fica presa. Não há oscilação.

Já sabemos que ciclos de ordem 2 são impossíveis para $n = 7$. No entanto, ao mapear todas as 15 partições, descobrimos algo formidável. O sistema não permite que dois números fiquem a "jogar ping-pong", mas permite um jogo a três. Existe um ciclo de ordem 3 (um 3-ciclo) perfeitamente estável para $n = 7$.

Considerando agora o conjunto $a = (5, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$

Contamos as frequências no conjunto a :

- O 1 aparece 3 vezes \rightarrow Novo $b_1 = 4$
- O 2 aparece 3 vezes \rightarrow Novo $b_2 = 4$
- O 3 e 4 aparecem 0 vezes \rightarrow Novos $b_3 = 1, b_4 = 1$

- O 5 aparece 1 vez \rightarrow Novo $b_5 = 2$
- O 6 e 7 aparecem 0 vezes \rightarrow Novos $b_6 = 1, b_7 = 1$

O que gera o conjunto $b = (4, 4, 1, 1, 2, 1, 1)$. Contamos as frequências no conjunto b :

- O 1 aparece 4 vezes \rightarrow Novo $c_1 = 5$
- O 2 aparece 1 vez \rightarrow Novo $c_2 = 2$
- O 3 aparece 0 vezes \rightarrow Novo $c_3 = 1$
- O 4 aparece 2 vezes \rightarrow Novo $c_4 = 3$
- O 5, 6 e 7 aparecem 0 vezes \rightarrow Novos $c_5, c_6, c_7 = 1$

O que gera o conjunto $c = (5, 2, 1, 3, 1, 1, 1)$. Contamos as frequências no conjunto c :

- O 1 aparece 4 vezes \rightarrow Novo $a_1 = 5$
- O 2 aparece 1 vez \rightarrow Novo $a_2 = 2$
- O 3 aparece 1 vez \rightarrow Novo $a_3 = 2$
- O 4 aparece 0 vezes \rightarrow Novo $a_4 = 1$
- O 5 aparece 1 vez \rightarrow Novo $a_5 = 2$
- O 6 e 7 aparecem 0 vezes \rightarrow Novos $a_6, a_7 = 1$

O que gera de volta o conjunto $a = (5, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$.

Dessa maneira temos $x = 51222314251617$, $y = 41421314251617$ e $z = 51221334151617$ e $\phi(x) = y$, $\phi(y) = z$ e $\phi(z) = x$.

A Sequência de Conway Ordenada é um intrigante e divertido mistério. Conway (1987) utilizou a Tabela Periódica dos elementos químicos como uma metáfora brilhante para classificar, nomear e estudar o comportamento matemático da sua própria sequência numérica. Conway percebeu que, à medida que as cadeias numéricas crescem, elas podem ser divididas em partes mais pequenas ("sub-cadeias") que evoluem de forma totalmente independente, sem nunca interferirem com as partes adjacentes. Ele decidiu chamar a essas partes indivisíveis de "átomos" ou "elementos".

A tabela periódica apresentada por Conway (1987) mostra exatamente como cada elemento numérico decai para dar origem a compostos formados por outros elementos no passo seguinte. O autor "brinca" com a nomenclatura química para descrever a evolução dos números.

¹ Tradução: Assim, por exemplo, a última linha da Tabela Periódica diz-nos que Hidrogénio (H) é o nosso nome para a cadeia de dígitos 22, e que o elemento superior seguinte, Hélio (He), deriva para o composto ... Hf.Pa.H.Ca.Li 'Háfnio-Protactínio-Hidrogénio-Cálcio-Lítio'! Tradução Conway (1987, p. 176)

Em suma, Conway (1987) usou a Tabela Periódica como uma estrutura organizacional perfeitamente simétrica para mapear a "química" das cadeias de números que decaem e reagem de forma previsível no seu modelo matemático.

Em Barton et.al (2007), a Sequência de Conway Ordenada é usada para que estudantes explorem o comportamento de longo prazo (se a sequência termina em um valor constante ou se entra em ciclos periódicos) utilizando computação e provas matemáticas.

² No caso da segunda sequência [Conway], os alunos projetaram e escreveram o seu próprio programa de computador em C[...] Os alunos devem ser capazes de descobrir resultados gerais abstratos, considerar os seus dados, formar conjecturas com base nesses dados e, finalmente, provar alguns teoremas. Tradução Barton et.al (2007, p. 355)

Neste artigo, Barton et.al (2007) apresenta alguns resultados:

³ Existe uma dicotomia dependendo se a semente é menor ou igual a 4 ou maior que 4[...] Se $m \leq 4$, a sequência termina em 2, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 4. Se $m \geq 5$, a sequência termina em 3, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 4, 1, m. Tradução Barton et.al (2007, p. 355).

Em suma, essa aplicação da Sequência de Conway Ordenada evidencia como um problema lúdico de reconhecimento de padrões pode se expandir para uma investigação matemática profunda. Tal investigação envolve a transição da simples contagem empírica de dígitos para a definição formal de uma função com domínio nos inteiros, permitindo o estudo rigoroso de propriedades complexas, como órbitas, pontos fixos e periodicidade. Essa trajetória ilustra a articulação entre intuição, generalização algorítmica e formalização algébrica e demonstra, na prática, o valor das sequências numéricas no desenvolvimento e na estruturação do raciocínio lógico.

¹ "Thus, for example, the last line of the Periodic Table tells us that Hydrogen (H) is our name for the digit-string 22, and that the next higher element, Helium (He), derives to the compound ... Hf.Pa.H.Ca.Li 'Hafnium-Protactinium-Hydrogen-Calcium-Lithide'!"

² In the case of the second sequence [Conway], students designed and wrote their own computer program in C[...] Students should be able to discover abstract general results, consider their data, form conjectures based on that data, and finally prove some theorems.

³ There is a dichotomy depending on whether the seed is less than or equal to 4 or greater than 4[...] If $m \leq 4$, the sequence terminates at 2, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 4. If $m \geq 5$, the sequence terminates at 3, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 4, 1, m.

4 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Neste capítulo, é apresentado o produto educacional que constitui a intervenção pedagógica desta pesquisa. A estruturação das ações é orientada pela metodologia da Engenharia Didática, ancorando-se nas contribuições de Silva (2014). Seguindo esse referencial metodológico, o desenvolvimento da intervenção é minuciosamente delineado por meio das duas primeiras etapas fundamentais: análise preliminar; concepção e análise a priori. Por meio dessa sistematização estruturada, busca-se estabelecer um planejamento rigoroso que favoreça a observação, a aplicação prática e a validação das hipóteses pedagógicas diretamente no contexto da sala de aula.

4.1 Proposta de atividade

A concepção e a elaboração da sequência didática proposta neste trabalho fundamentam-se não apenas nos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, mas também nas diretrizes estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). O objetivo central das atividades desenvolvidas é promover um ambiente de investigação matemática que vá além da simples reprodução e aplicação de fórmulas fechadas, estimulando, em vez disso, o raciocínio lógico, a curiosidade e a autonomia intelectual do estudante.

Nesse sentido, a proposta de atividade está diretamente embasada pelas Competências Específicas 3 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio. A mobilização da Competência Específica 3 ocorre à medida que os discentes são desafiados a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar as situações-problema e construir modelos lógicos que expliquem a formação de novas sequências. Já a Competência Específica 5 atua como o eixo norteador desta intervenção, pois exige que os estudantes investiguem, formulem e testem conjecturas a partir da observação rigorosa de padrões numéricos, um processo cognitivo e prático indispensável para a compreensão e construção da Sequência de Conway Ordenada.

Afora essas competências, as atividades investigativas elaboradas encontram sólido respaldo na habilidade (EM13MAT310) e (EM13MAT507) da BNCC. Ao trabalhar com a decodificação, a contagem sistemática dos dígitos e os agrupamentos numéricos que dão origem aos sucessivos termos da sequência de Conway, os discentes são conduzidos a resolver e elaborar problemas de contagem recorrendo a estratégias próprias e diversificadas. Esse processo permite romper com a visão limitada das progressões aritméticas e geométricas tradicionais, desenvolvendo no estudante um raciocínio estruturado, essencial para a descoberta de regras de formação não triviais e para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Apoiada nesses pilares normativos e teóricos, a estruturação e implementação da sequência didática seguiu as fases propostas pela metodologia da ED, iniciando-se pelo mapeamento diagnóstico do contexto educacional. Essa abordagem favorece o planejamento

sistemático, a observação e a validação de hipóteses pedagógicas no contexto de aplicação em sala de aula. O estudo adota uma abordagem qualitativa, quantitativa e exploratória, priorizando a interpretação dos processos de aprendizagem e das estratégias desenvolvidas pelos estudantes.

4.1.1 Análise preliminar

Nesta primeira fase da Engenharia Didática, realizou-se um diagnóstico aprofundado acerca do objeto matemático em questão, a saber, as sequências numéricas e o reconhecimento de padrões, bem como das condições de seu ensino e aprendizagem no contexto do Ensino Médio. Esta etapa constituiu a fundamentação teórica e prática para a formulação da sequência de atividades, estruturando-se a partir de três dimensões essenciais: epistemológica, didática e cognitiva.

Do ponto de vista **epistemológico**, investigou-se a gênese e o desenvolvimento histórico do conceito de sequências numéricas. Observou-se que a busca por padrões nasce da necessidade empírica de quantificar e compreender regularidades, evoluindo, posteriormente, para a formalização algébrica. No entanto, a introdução da Sequência de Conway Ordenada demanda um retorno à fase investigativa e de conjectura. Ela exige que o estudante rompa com a dependência exclusiva de expressões algébricas fechadas e foque na decodificação lógica e na descrição dos termos.

Na dimensão **didática**, analisou-se o modelo pedagógico vigente nas salas de aula referentes ao objeto de sequências, o qual frequentemente se restringe ao estudo mecânico de Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG). Essa prática, altamente focada na memorização e na aplicação de fórmulas prontas, distancia-se das diretrizes de documentos oficiais como a BNCC (2018), que preconiza o letramento matemático, a resolução de problemas e a formação do pensamento científico, crítico e criativo. Verificando que a excessiva algoritmização obstrui a curiosidade e a autonomia intelectual dos discentes.

Por fim, no que tange à dimensão **cognitiva**, diagnosticou-se as principais concepções, estratégias e dificuldades que os estudantes costumam apresentar. Previu-se que, ao se depararem com problemas de periodicidade e com a Sequência de Conway Ordenada sem o auxílio de fórmulas padronizadas, os estudantes manifestariam obstáculos epistemológicos. Entre as dificuldades antecipadas, destacam-se a tentativa frustrada de aplicar operações aritméticas tradicionais, como adições ou multiplicações constantes, para encontrar o próximo termo e a confusão na decodificação da regra de contagem de dígitos da sequência.

Portanto, esta análise preliminar permitiu mapear as restrições institucionais e as barreiras cognitivas dos estudantes, evidenciando uma necessidade de intervenção pedagógica de caráter exploratório. Esse diagnóstico fundamentou diretamente as escolhas das variáveis didáticas e a concepção das situações-problema elaboradas na fase subsequente, garantindo que as atividades propostas conduzam gradativamente o discente no reconhecimento de padrões cíclicos até o raciocínio reverso exigido pela Sequência de Conway Ordenada.

4.1.2 Concepção e análise a priori

Nesta etapa, foi pensado quatro atividades que proporcionassem o desenvolvimento do reconhecimento de padrões, raciocínio lógico e a formulação e demonstração de conjecturas. Essas atividades estão embasadas no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM - 2023) mais especificamente na aula do Professor Dr. Eduardo Wagner, no livro "Padrões Numérico e Sequências" de Carvalho (2000), no trabalho de Rabello (2024) e nas atividades da Sequência de Conway Ordenada desenvolvidas por GAIRÍIN et al (2018).

ATIVIDADE 1

Questão 1	<p>Determine o padrão ou regularidade de cada item abaixo, em seguida, copie e complete cada uma das sequências seguindo esse padrão.</p> <p>a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, ____, ____, ____, ____, ...</p> <p>b) 31, 27, 23, 19, 15, ____, ____, ____, ...</p> <p>c) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, ____, ____, ____, ...</p> <p>d) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ...</p> <p>e) 2, 7, 9, 16, 25, 41, ____, ____, ____, ...</p> <p>f) 1, 8, 27, 64, ____, ____, ...</p>
Questão 2	(RABELLO, 2024, p. 64 - Adaptada) Se 1º de janeiro de 2026 foi uma Quinta-feira, que dia da semana foi 27/01/2026?
Questão 3	(RABELLO, 2024, p. 64 - Adaptada) Imagine que o dia de hoje seja um sábado, qual dia da semana será daqui a 40 dias?

Na **Questão 1**, é esperado que os estudantes consigam identificar o padrão numérico em cada uma das sequências e sendo capazes de descreverem as pistas do que os levou a identificar esses padrões. No entanto, é possível que os estudantes cometam alguns erros, como os previstos a seguir: no item a) Tentar aplicar uma lógica de multiplicação alternada em vez de perceber a adição de uma constante simples de 5 unidades a cada termo; no item b) como a sequência é decrescente, estudantes com dificuldade em subtração podem errar os cálculos ou inverter a lógica e somar 4 a partir do 15; no item c) identificar o início como uma sequência de Fibonacci padrão (soma de dois) e travar ao chegar no 9, já que $3 + 5 = 8$ (não 9). O estudante pode julgar que a questão está errada ou desistir por não testar a adição de três elementos; no item d) o erro mais comum aqui é a "pressa visual". Como a sequência termina com "4, 4", o estudante pode achar que já deve pular para o próximo número, preenchendo com "5, 5, 5..." ou "5, 5, 6, 6...", ignorando que o número 4 precisa aparecer quatro vezes no total; no item e) o estudante pode tentar encontrar uma diferença constante (como na letra A) e não conseguir, já que as diferenças

umentam (5, 2, 7, 9...); no item f) o estudante pode confundir com quadrados perfeitos (1, 4, 9, 16...) e tentar forçar essa lógica ou tentar encontrar o padrão pelas diferenças entre os números (7, 19, 37...) e se perder.

Na **Questão 2** é esperado que o estudante observe que o intervalo entre dia 1 e 27 é de 26 dias. Dividindo 26 por 7 (dias da semana), o quociente é 3 e o resto é 5. Avançando 5 dias a partir de quinta-feira, chegamos à terça-feira. Os possíveis erros é que o estudante pode usar o próprio número 27 para dividir por 7 (em vez da diferença, 26), encontrando o resto 6 e caindo na Quarta-feira. ou tentar fazer a contagem "no dedo" ou desenhando pauzinhos e se perder na contagem dos dias.

Na **Questão 3** é esperado que o estudante divida 40 por 7 (dias da semana), obtendo 5 semanas completas e sobra um resto de 5 dias, Sábado + 5 dias = Quinta-feira. Os possíveis erros é o estudante dividir 40 por 7, ver que o resultado (quociente) é 5 e tentar somar 5 por esse motivo, não entendendo que o que importa para o deslocamento dos dias da semana é o resto da divisão ou contar o dia de "hoje" como o dia 1 do prazo, o que faria a contagem terminar um dia antes do correto (erro comum de interpretação do termo "daqui a").

ATIVIDADE 2

Questão 4	(Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Carlos deverá realizar um tratamento tomando 1 comprimido por dia de certo remédio durante 60 dias. Se ele tomou o primeiro comprimido em uma segunda-feira, ele tomará o último comprimido em qual dia da semana?
Questão 5	(Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Certa máquina funciona todos os dias da semana e deve receber manutenção a cada 25 dias de uso. Um dia de manutenção da máquina é também um dia de trabalho. A máquina foi instalada, recebeu a manutenção inicial e começou a funcionar em uma terça-feira. Em que dia da semana ocorreu a 100ª manutenção?
Questão 6	(ENEM 2019 - Adaptada): Após o Fórum Nacional Contra a Pirataria (FNCP) incluir a linha de autopeças em campanha veiculada contra a falsificação, as agências fiscalizadoras divulgaram que os cinco principais produtos de autopeças falsificados são: rolamento, pastilha de freio, caixa de direção, catalisador e amortecedor. Após uma grande apreensão, as peças falsas foram cadastradas utilizando-se a codificação: 1: rolamento, 2: pastilha de freio, 3: caixa de direção, 4: catalisador e 5: amortecedor. Ao final obteve-se a sequência: 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... que apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de números. Essa sequência descreve a ordem em que os produtos apreendidos foram cadastrados. O 2025º item cadastrado foi um(a) ?

Na **Questão 4** é esperado que o estudante observe que tomando um comprimido na segunda-feira restarão 59 comprimidos a serem tomados, a semana possui 7 dias e o múltiplo de 7 mais próximo de 59 é o 56, então, serão 8 semanas completas mais 3 dias contando a partir de segunda-feira, resultando na resposta de que o último comprimido a ser tomado será em uma quinta-feira. Um erro esperado que os estudantes possam cometer é o de simplesmente dividir $60 \div 7$, obter quociente 8 e resto 4, e então somar 4 dias à segunda-feira (chegando à sexta-feira). O estudante esquece que a segunda-feira já é o **dia 1** do tratamento. Portanto, restam apenas 59 comprimidos para os dias seguintes. Uma interpretação correta envolve o avanço de 59 dias ($59 \div 7$ deixa resto 3, o que nos leva à quinta-feira).

Na **Questão 5** o estudante pode proceder observando que no intervalo entre a 1ª manutenção e a 100ª manutenção existe um intervalo de 99 manutenções, realizando a multiplicação $99 \cdot 25 = 2475$ para encontrar a quantidade de dias nesse intervalo de manutenções em seguida dividindo o resultado por 7 dias da semana, observando que $2475 = 7 \cdot 353 + 4$ e avançando quatro dias após a segunda-feira chegando ao resultado de que a 100ª manutenção foi realizada em um sábado.

Uma outra maneira que o estudante pode pensar para solucionar esta questão é procurar um padrão nos dias de realização de manutenção da máquina. Observando que $25 = 3 \cdot 7 + 4$, ou seja, três semanas e quatro dias, isso significa que se a primeira manutenção foi realizada na terça-feira, a segunda manutenção será realizada em um sábado. Seguindo assim, se organiza uma sequência das manutenções relacionando cada uma com o dia da semana que será realizada.

Manutenções	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Dias da semana	3ª	S	4ª	D	5ª	2ª	6ª	3ª	S	4ª	D	...

Como a semana tem 7 dias, a cada grupo de 7 dias de manutenção o padrão dos dias da semana se repete. Percebe-se, então que cada vez que o número da manutenção é múltiplo de 7 ela cai em uma sexta-feira. O múltiplo de 7 mais próximo de 100 é 98 e, portanto, a manutenção de número 98 será realizada em uma sexta-feira. Seguindo a sequência da tabela acima, a manutenção de número 100 será realizada em um sábado.

Um possível erro ou dificuldade que o estudante pode encontrar nessa questão é multiplicar $100 \cdot 25$ para achar o total de dias, sendo que o correto é entender que entre a 1ª e a 100ª manutenção existem 99 intervalos de 25 dias. O avanço no tempo é de $99 \cdot 25$ dias.

Na **Questão 6** é esperado que o estudante consiga identificar o padrão da organização das peças (5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4) observando que este padrão possui 8 elementos e efetuando a divisão de 2025 por 8 chegando ao resultado de que $2025 = 8 \cdot 253 + 1$ chegando ao resultado de em 2025 "cabem" 253 padrões completos mais um elemento do próximo padrão, chegando a conclusão de que o primeiro elemento do padrão é o 5 que representa o amortecedor.

Nesse caso o estudante pode prosseguir de maneira errônea da seguinte maneira:

- Identificação incorreta do tamanho do ciclo, sendo o padrão um movimento de "vai e vem":

5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4... e depois repete o 5.

- O estudante pode achar que o ciclo tem 5 elementos (porque os números vão de 1 a 5).
- Outros podem achar que o ciclo tem 9 elementos (contando a ida e a volta completa até o 5 (5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5), o que causa uma sobreposição do número 5 no próximo ciclo).

Outro possível equívoco é que mesmo o estudante identificando corretamente o ciclo, para resolver, ele divide 2025 pelo tamanho do ciclo (8). O cálculo $2025 \div 8$ deixa resto 1. Um erro muito comum de desatenção é o estudante ver o "resto 1" e responder que a peça é o "rolamento" (que tem o código 1), em vez de olhar para a 1ª posição da sequência (que é o número 5, amortecedor).

ATIVIDADE 3

Questão 7	<p>Dados os números em cada item, produza 20 termos da sequência de Conway Ordenada.</p> <p>a) 13</p> <p>b) 16</p> <p>c) 18</p> <p>Responda:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Analise cada sequência que você montou e diga: O número de dígitos em cada termo da sequência aumenta sempre? • Existe um número (ponto ou termo da sequência) em que, a partir daí, os termos se repetem? • Por que você acha que isso acontece?
------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Nessa atividade, para que os estudantes determinem os 20 termos, eles precisarão perceber que a sequência atinge um "ponto fixo" (um termo que descreve a si mesmo) bem antes do 20º termo. A partir desse ponto, o termo se repete indefinidamente. Como descrito na tabela abaixo:

13	16	18
1113	1116	1118
3113	3116	3118
2123	211316	211318
112213	31121316	31121318
312213	41122316	41122318
212223	3122131416	3122131418
114213	4122231416	4122231418
31121314	3132132416	3132132418
41122314	3122331416	3122331418
41122314	3122331416	3122331418
41122314	3122331416	3122331418
⋮	⋮	⋮

As respostas esperadas dos estudantes para as perguntas de análise são:

Ao questionar se os dígitos em cada termo aumenta sempre é esperado que os estudantes observem que não, o número de dígitos aumenta no começo, mas em vários momentos ele se mantém igual ao termo anterior (ex: de 1113 para 3113, ambos têm 4 dígitos) e, eventualmente, o tamanho para de crescer completamente quando a sequência estabiliza.

Referente ao ponto em que, a partir dele, os termos se repetem é esperado que os estudantes observem que sim. Na sequência do 13, isso acontece a partir do termo 21322314. Nas sequências do 16 e 18, acontece a partir de 3122331416 e 3122331418, respectivamente.

Ao questionar o motivo pelo qual os estudantes acham que os termos da Sequência de Conway Ordenada se repetem é esperado que os estudantes respondam que, como a sequência apenas conta a quantidade desses dígitos, ela não consegue criar números infinitamente grandes. Chega um momento em que a "frase matemática" descreve exatamente a si mesma (um número "autobiográfico"). Como o termo tem exatamente as quantidades que ele mesmo descreve, o próximo termo gerado será idêntico.

As possíveis dúvidas e erros a serem cometidos pelos estudantes na execução dessa atividade são:

- Erros Conceituais e de Interpretação:

Inversão de "Quantidade" e "Dígito": Um erro muito comum é escrever o dígito primeiro e a quantidade depois. Por exemplo, ao ler 13, o estudante conta "um número 1 e um número 3" e anota 1131 (escrevendo "1 um" e "3 um") em vez de 1113.

Falta de Ordenação na Contagem: O estudante pode contar os dígitos de forma aleatória à medida que os lê, gerando termos confusos como 1311 ou não agrupando todos os dígitos iguais de uma só vez.

- Erros de execução:

Erro de Contagem: Como as sequências chegam a ter 8 ou 10 dígitos rapidamente, é muito fácil o estudante contar um "2" a mais ou a menos. Um único erro no meio do processo muda completamente todos os termos subsequentes, impedindo-os de chegar ao ponto fixo.

Contar dígitos que não existem: Alguns estudantes podem ficar na dúvida se devem colocar um zero para dígitos ausentes (ex: ao ler 13, escrever 110213 indicando que há zero "2s"). A regra diz que apenas dígitos presentes são contados.

- Dúvidas comportamentais/atitudinais:

Frustração com os "20 termos": O enunciado pede para produzir 20 termos. Muitos estudantes podem se cansar ao chegar no 13º termo e perceber que estão apenas copiando o mesmo número várias vezes. Caso isso aconteça é importante usar isso como momento "Aha!". Quando eles perguntarem "Professor, a partir do 12º tá dando o mesmo número, eu preciso escrever até o 20?", o professor confirma e diz: "Excelente observação! Continue e veja como isso responde à próxima pergunta da folha."

ATIVIDADE 4

Questão 8	<p>Os números a seguir são termos da sequência de Conway Ordenada, em cada caso determine o que pode ser o termo anterior a ele.</p> <p>a) ..., 31123324</p> <p>b) ..., 32131425</p> <p>c) ..., 4132132415</p> <p>Em cada uma dos itens acima, existe mais de uma possibilidade para o termo anterior?</p> <p>Que pistas numéricas te ajudaram a descobrir o termo anterior?</p>
Questão 9	<p>Responda em poucas palavras;</p> <ul style="list-style-type: none"> • O que é diferente entre seguir uma fórmula e descobrir uma regra? • Como as sequências ordenadas nos ajudam a pensar matematicamente?

Nesta Atividade, o estudante precisa fazer a "engenharia reversa" da regra da Sequência de Conway Ordenada. A chave aqui é ler o número em pares de algarismos, onde o primeiro algarismo do par indica a *quantidade* e o segundo indica o *dígito*.

As respostas esperadas para a Questão 8 são:

- a) ..., 31123324

- Leitura em pares: 31, 12, 33, 24.
- Tradução: três 1s, um 2, três 3s, dois 4s.
- Termos possíveis (exemplos): 111233344 (organizado), ou 443332111, ou 123413413 (misturado).

b) ..., 32131425

- Leitura em pares: 32, 13, 14, 25.
- Tradução: três 2s, um 3, um 4, dois 5s.
- Termos possíveis (exemplos): 2223455 (organizado), ou 5543222, ou 2324255.

c) ..., 4132132415

- Leitura em pares: 41, 32, 13, 24, 15.
- Tradução: quatro 1s, três 2s, um 3, dois 4s, um 5.
- Termos possíveis (exemplos): 11112223445 (organizado), ou 54432221111.

Para as questões de análise, referente a existência de mais de uma possibilidade para o termo anterior é esperado que os estudantes observem que sim. Existe uma infinidade de possibilidades (na verdade, um número finito, mas grande, de permutações). Como a regra ordenada junta e conta todos os dígitos iguais do termo anterior, não importa a ordem em que eles estavam escritos originalmente. O termo 121 gera "dois 1s, um 2"(2112), e o termo 211 também gera "dois 1s, um 2"(2112).

No que diz respeito as pistas que ajudaram os estudantes a identificarem o termo anterior, uma resposta esperada é que há uma separação do número em blocos de dois dígitos (pares). O primeiro número do par sempre me dizia "quantos" e o segundo número me dizia "qual era" o algarismo.

As possíveis dúvidas e erros para a Questão 8 são:

- Inversão da lógica do par: O erro mais comum no processo reverso é o estudante ler o par "31" e achar que o termo anterior era "3" (um três) em vez de "111" (três uns). Eles podem se confundir entre qual dígito representa a frequência e qual representa o valor.
- Achar que existe apenas uma resposta correta: Muitos estudantes são treinados a buscar "A" resposta certa em matemática. Eles podem escrever apenas a versão ordenada (ex: 111233344) e, ao serem questionados se há outras possibilidades, responderem que "não", sem perceberem que a ordem original se perde ao aplicar a regra da contagem agrupada.
- Erros de adição/quantidade: Ao tentar criar um termo anterior desordenado (ex: 123413413), o estudante pode acabar colocando um "1" a mais ou esquecendo um "3", falhando em bater a quantidade exata exigida pelas pistas.

A questão 9 é uma questão aberta e discursiva. O objetivo não é uma resposta matematicamente rígida, mas avaliar se o estudante consegue expressar o que vivenciou. A questão que questiona a diferença entre seguir uma fórmula e descobrir uma regra é esperado respostas como: "Seguir uma fórmula é usar uma regra que alguém já te deu pronta (como uma receita ou colocar números num lugar marcado com letras). Descobrir uma regra é observar os padrões passo a passo, criar hipóteses, testar para ver se funciona e tentar entender a lógica por trás de como a sequência é construída."

E como as sequências nos ajudam a pensar matematicamente é esperado que os estudantes responda algo como: "Elas nos 'obrigam' a observar detalhes, reconhecer padrões, organizar dados e pensar fora da caixa (já que não envolvem somar ou multiplicar da forma tradicional, mas sim contar e descrever). Ajudam a desenvolver o raciocínio lógico e a argumentação."

Os possíveis equívocos na questão 9 é respostas rasas ou tautológicas: Estudantes podem dar respostas circulares como "A diferença é que a fórmula é uma fórmula e a regra é uma regra" ou "Ajuda a pensar matematicamente porque a gente faz matemática". O professor precisará intervir e fazer perguntas guiadas: "Mas o que você fez de diferente aqui comparado a quando usa a fórmula de Bhaskara, por exemplo?".

Pode haver frustração com a falta de cálculo tradicional: Alguns estudantes podem argumentar que "isso não é matemática de verdade" porque não envolveu as quatro operações tradicionais ou equações visíveis. É um ótimo momento para desmistificar a matemática apenas como "fazer contas" e focar na ciência dos padrões.

Por fim, com essas quatro atividades é esperado alcançar alguns resultados como: Promover a compreensão conceitual de sequências numéricas como construções dinâmicas; Estimular a autonomia investigativa e a capacidade de generalização matemática; Apresentar sequências ordenadas como fenômeno observável e previsível; Desenvolver o raciocínio lógico e reverso por meio da análise de padrões.

A seguir é apresentado o Produto Educacional ¹ dessa pesquisa, o qual se trata de uma proposta de uma Sequência de Atividades pensada e elaborada para ser realizada em quatro encontros com duração de 50 minutos cada. Nesta proposta está disposto as atividades para serem desenvolvidas em cada encontro, o embasamento da BNCC, os objetivos a serem alcançados, a descrição de cada um dos encontros propondo uma abordagem metodológica de como o professor pode prosseguir para realizar a introdução e desenvolvimento das atividades junto aos estudantes. Também é apresentado uma sugestão de como avaliar os estudantes pela resolução das atividades.

4.2 Produto Educacional

¹ O arquivo do Produto Educacional também será disponibilizado à parte para facilitar uma possível consulta e acesso, sem a necessidade de uma leitura desta dissertação.

Tema: Contando Algarismos e Descobrimdo Padrões

Ano Escolar: 2ª Série do Ensino Médio

Duração: 4 encontros de 50 minutos cada

HABILIDADE DA BNCC

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

(EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

OBJETIVOS

- Identificar e descrever padrões numéricos em sequências.
- Compreender a lei de formação da sequência que “conta algarismos”.
- Desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo, buscando regularidades.
- Relacionar a noção de padrão matemático com o conceito de função e com fenômenos observáveis.
- Estimular o pensamento algébrico, promovendo a análise, a generalização e a reflexão sobre o processo de descoberta.

METODOLOGIA

A proposta fundamenta-se nos pressupostos da Engenharia Didática, estruturando-se em quatro etapas articuladas entre si: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori com validação. Toda a organização das atividades foi pensada de modo a garantir progressão cognitiva, partindo da identificação de padrões simples até a investigação da Sequência de Conway Ordenada (“sequência que conta algarismos”).

1 - Análises Preliminares:

O objeto matemático central é o estudo de sequências numéricas e regularidades, com ênfase na identificação de padrões e na formulação de leis de formação. Parte-se do pressuposto de que a busca por padrões constitui um eixo estruturante do pensamento matemático, favorecendo processos de generalização, argumentação e validação.

Antecipam-se como dificuldades:

- Confusão entre regularidade e fórmula algébrica explícita;
- Tentativas de aplicar operações aritméticas tradicionais à sequência que “conta algarismos”;
- Dificuldade em compreender que a regra pode estar na descrição do termo anterior e não em uma operação direta.

As atividades dos Encontros 1 e 2 foram planejadas para consolidar a noção de padrão periódico, progressivo e cíclico (Questões 1 a 6), preparando cognitivamente os estudantes para o desafio investigativo do encontro 3 (Atividade 7) e para a reconstrução inversa da sequência no Encontro 4 (Questão 8).

2 - Concepção e Análise a Priori:

A sequência (1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, ...), será apresentada apenas na Aula 3, após os estudantes terem explorado:

- Sequências aritméticas e não aritméticas (Questão 1);
- Problemas de periodicidade envolvendo dias da semana (Questões 2, 3, 4 e 5);
- Padrões repetitivos estruturados em blocos (Questão 6).

Prevê-se que, diante da sequência misteriosa, os estudantes:

- Inicialmente tentem aplicar diferenças numéricas;
- Busquem regularidades na quantidade de dígitos;
- Percebam a repetição de agrupamentos;
- Formulem hipóteses descritivas antes de alcançar a regra correta.

A Questão 7 (produção de 20 termos a partir de números iniciais distintos) foi concebida para provocar análise estrutural da sequência, permitindo observar crescimento, regularidade interna e possíveis comportamentos repetitivos.

No Encontro 4, a Questão 8 (descoberta do termo anterior) introduz um nível mais elevado de abstração, exigindo raciocínio reverso e validação lógica. A Questão 9 promove sistematização conceitual e reflexão metacognitiva.

3 - Experimentação (Desenvolvimento das atividades)

A experimentação ocorre ao longo das quatro aulas, organizadas progressivamente:

- Encontro 1: identificação e descrição de padrões simples;

- Encontro 2: padrões cíclicos e contagem modular;
- Encontro 3: investigação da sequência de Conway Ordenada;
- Encontro 4: reconstrução inversa e reflexão conceitual.

Durante todas as aulas, os estudantes trabalham registrando hipóteses, estratégias e justificativas. O professor atua como mediador, incentivando argumentação, comparação de estratégias e validação coletiva.

4 - Análise a Posteriori e Validação:

Ao final de cada Encontro, o professor analisa:

- As estratégias utilizadas;
- A natureza dos erros;
- O nível de generalização alcançado;
- A capacidade de justificar resultados.

No Encontro 4, a sistematização final permite confrontar as previsões da análise a priori com os resultados efetivamente obtidos, verificando se houve compreensão da regra de formação e se os estudantes desenvolveram autonomia investigativa.

DESENVOLVIMENTO DOS ENCONTROS

Encontro 1: Reconhecimento e descrição de padrões

- **Introdução (5 min)**

Iniciar o encontro comentando com os estudantes o quanto saber visualizar e reconhecer padrões são de fundamental importância para resolver inúmeros problemas dos quais serão apresentados para os mesmos. O professor contextualiza a importância da identificação de padrões na Matemática e em situações cotidianas, destacando que reconhecer regularidades permite prever comportamentos e resolver problemas de forma mais eficiente.

- **Motivação (15 min)**

Como motivação pode apresentar aos estudantes as sequências abaixo, contendo algumas que são utilizadas no dia a dia e outras nem tanto. Após a apresentação, começar a questionar os estudantes sobre qual seria o próximo termo de cada sequência e como seria a descrição (Lei de Formação) das mesmas.

- a) domingo, segunda-feira, terça-feira, ...

- b) janeiro, fevereiro, março, ...
- c) 5, 10, 15, ...
- d) 2, 3, 5, ...
- e) 2, 10, 12, ...

Os estudantes identificam o próximo termo e descrevem verbalmente a regra de formação, distinguindo padrões linguísticos, aritméticos e estruturais.

- **Resolução de atividades (30 min):** Lembrando ao professor de auxiliar os estudantes sempre que necessário. (Questões em anexo).

Questão 1: Os estudantes identificam regularidades em sequências numéricas variadas (progressões, padrões alternados, padrões de repetição e potências), explicitando a lei de formação.

Questões 2 e 3: Problemas envolvendo dias da semana introduzem a ideia de periodicidade (módulo 7), ampliando a compreensão de padrões cíclicos. O professor estimula justificativas escritas e comparação de estratégias.

Encontro 2: Padrões cíclicos e organização em blocos

Como motivação para iniciar o segundo encontro, é apresentado a seguinte situação para os estudantes:

- **Problema 1 (20 min):** (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada)

O clube dos apaixonados por Pitágoras possui, em sua sede, um muro comprido onde foi desenhada a faixa decorativa que mostramos a seguir:

PITAGORASPITAGORASPITAGORASPITAG...

Faça os seguintes questionamentos aos estudantes:

- a) Qual a 20ª letra dessa faixa?
- b) Supondo que essa faixa tenha um comprimento grande, qual a 50ª letra dessa faixa?
- c) Qual a 101ª letra dessa faixa? Como você a descobriu? Existe uma maneira mais eficaz de se chegar ao resultado?

d) Qual a 400ª letra dessa faixa?

O problema da faixa “PITAGORAS...” explora repetição periódica de blocos. Os estudantes identificam o tamanho do bloco e utilizam divisão e resto para determinar letras em posições distantes (20ª, 50ª, 101ª, 400ª). Discute-se eficiência de estratégias.

- **Resolução de Questões (30 min)** Lembrando ao professor de auxiliar os estudantes sempre que necessário. (Atividades em anexo).

Questão 4: contagem modular aplicada a tratamento médico (ciclo semanal).

Questão 5: manutenção periódica a cada 25 dias (uso de divisão e resto).

Questão 6: identificação do bloco repetitivo na sequência do ENEM e determinação do 2025º termo.

A atividade consolida a ideia de periodicidade e organização estrutural em blocos.

Encontro 3: Investigação da Sequência que “Conta Algarismos”

- **introdução (10 min):**

Retomar o conceito de sequência numérica e lei de formação. o professor pede aos estudantes que apresentem exemplos de sequências numéricas que eles conheçam, P.A e P.G por exemplo. Em seguida, apresenta o seguinte desafio: "Será se existe uma sequência numérica que que não segue uma fórmula, uma lei de formação?". Apresentar três sequências simples (números primos, números com letra D e reflexos).

Além desse desafio, o professor pode fomentar a discussão com indagações como "Toda sequência precisa ter uma fórmula?" ou "Como poderíamos criar uma sequência que não possua uma fórmula fechada?". Com esses questionamentos se pretende obter dos estudantes possíveis hipóteses a respeito dessa sequência até então desconhecida.

- **Atividade principal- Descoberta do padrão (20 min):**

Apresentar a sequência misteriosa aos estudantes

1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, ...

Em seguida os estudantes:

- Propõem o próximo termo;
- Formulam hipóteses;

- Testam regularidades;
- Justificam suas conclusões.

Após discussão coletiva, sistematiza-se a regra: cada termo descreve a quantidade e o valor dos algarismos do termo anterior.

- **Resolução de atividades (30 min)** Lembrando ao professor de auxiliar os estudantes sempre que necessário. (Atividades em anexo).

Questão 7: Produção de 20 termos a partir de números iniciais distintos (13, 16, 18). Os estudantes analisam crescimento do número de dígitos e investigam possíveis repetições

Encontro 4: Análise estrutural e reconstrução inversa

- **Revisão (20 min)**

Retomada da regra da sequência e exemplos resolvidos coletivamente.

Questão 8: Determinação do termo anterior a termos dados. Explora-se raciocínio reverso, possibilidade de múltiplas soluções e necessidade de coerência estrutural.

Questão 9: Discussão metacognitiva:

- Diferença entre fórmula e regra;
- Importância da descoberta de padrões;
- Relação com pensamento matemático investigativo.

Encerramento destacando que nem toda regularidade é expressa por fórmula algébrica explícita, mas toda sequência matemática possui uma estrutura que pode ser descrita e validada.

RECURSOS DIDÁTICOS

- Quadro e pincéis;
- Folhas de atividade com as sequências iniciais;
- Folhas A4 e/ou projetor (para a socialização das descobertas utilizando o programa Python).

AVALIAÇÃO

A avaliação será processual, formativa e qualitativa, ocorrendo ao longo de todas as etapas da sequência didática. Ela será orientada tanto pelos objetivos matemáticos propostos quanto

pelos níveis de demanda cognitiva, considerando a progressão do raciocínio dos estudantes desde a identificação de padrões até a generalização e validação da regra da sequência de Conway Ordenada. A análise das produções será organizada em três níveis de desempenho cognitivo:

1- Nível de Reconhecimento e Reprodução

Neste nível, observa-se se o estudante:

- Identifica padrões simples em sequências aritméticas e cíclicas (Encontros 1 e 2);
- Aplica corretamente procedimentos de contagem modular;
- Reconhece a repetição de blocos em sequências periódicas;
- Determina termos próximos por continuidade direta.

Aqui predominam tarefas de identificação e aplicação de regularidades já discutidas.

2- Nível de Análise e Exploração

Neste nível, verifica-se se o estudante:

- Formula hipóteses sobre leis de formação não explícitas;
- Justifica estratégias utilizadas na determinação de termos distantes;
- Analisa crescimento do número de dígitos na sequência de Conway;
- Consegue explicar verbalmente a regra da sequência que “conta algarismos”.

As Questões 6 e 7 são especialmente relevantes para esse nível, pois exigem organização estrutural e argumentação.

3- Nível de Generalização e Argumentação

Neste nível, espera-se que o estudante:

- Valide hipóteses por meio de justificativas consistentes;
- Reconstrua termos anteriores a partir de análise estrutural (Questão 8);
- Reconheça a diferença entre fórmula fechada e regra descritiva;
- Explícite conexões entre padrão, função e estrutura matemática.

A Questão 8 constitui tarefa de alta demanda cognitiva, pois exige raciocínio reverso, análise combinatória implícita e validação lógica.

Instrumentos de Avaliação

A avaliação considerará:

- Registros escritos individuais e em grupo;
- Clareza e coerência das justificativas;
- Participação nas discussões coletivas;
- Capacidade de revisar hipóteses diante de contraexemplos;
- Produção reflexiva final (Questão 9).

Mais do que verificar acertos, busca-se analisar o percurso cognitivo do estudante, valorizando processos investigativos, autonomia intelectual e argumentação matemática.

CONCLUSÃO

A sequência didática proposta consolida-se como uma experimentação fundamentada na Engenharia Didática, concebida como metodologia de investigação e intervenção pedagógica. Ao estruturar o trabalho em análises preliminares, análise a priori, experimentação e análise a posteriori, a proposta permite não apenas aplicar uma atividade em sala, mas investigar sistematicamente seus efeitos sobre a aprendizagem.

O ordenamento das atividades foi cuidadosamente organizada para promover uma elevação gradual da demanda cognitiva: inicia-se com reconhecimento de padrões simples, avança para estruturas cíclicas e culmina na investigação da Sequência de Conway Ordenada, cuja regra não se apresenta por fórmula algébrica tradicional, mas por descrição estrutural.

Esse percurso evidencia um deslocamento do estudante da posição de executor de procedimentos para a de investigador matemático. Ao formular hipóteses, testar regularidades, argumentar e validar conclusões, o aprendente mobiliza competências essenciais ao pensamento matemático de alta complexidade.

A etapa de análise a posteriori permite confrontar as previsões da análise a priori com os resultados observados, verificando: As dificuldades efetivamente encontradas; O nível de generalização alcançado; A qualidade das argumentações produzidas; O grau de autonomia intelectual desenvolvido.

Assim, a Engenharia Didática não se restringe a um modelo organizacional, mas configura-se como um instrumento de produção de conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. A sequência de atividades proposta, ao explorar a construção e reconstrução de padrões na sequência que “conta algarismos”, favorece a consolidação do pensamento investigativo e reforça a compreensão de que a Matemática é uma ciência de estruturas, regularidades e argumentação.

Dessa forma, a proposta contribui não apenas para o domínio de conteúdos de sequências numéricas, mas para o desenvolvimento de competências cognitivas superiores, alinhadas à formação de um sujeito matematicamente crítico, autônomo e capaz de justificar suas próprias construções.

ATIVIDADE ENCONTRO 1

Questão 1- Determine o padrão ou regularidade de cada item abaixo, em seguida, copie e complete cada uma das sequências seguindo esse padrão.

a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, ____, ____, ____, ____, ...

b) 31, 27, 23, 19, 15, ____, ____, ____, ...

c) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, ____, ____, ____, ...

d) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ...

e) 2, 7, 9, 16, 25, 41, ____, ____, ____, ...

f) 1, 8, 27, 64, ____, ____, ...

Questão 2- (RABELLO, 2024, p. 64 - Adaptada) Se 1° de janeiro de 2026 foi uma Quinta-feira, que dia da semana foi 27/01/2026 ?

Questão 3- (RABELLO, 2024, p. 64 - Adaptada) Imagine que o dia de hoje seja um sábado, qual dia da semana será daqui a 40 dias?

ATIVIDADE ENCONTRO 2

Questão 4- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Carlos deverá realizar um tratamento tomando 1 comprimido por dia de certo remédio durante 60 dias. Se ele tomou o primeiro comprimido em uma segunda-feira, ele tomará o último comprimido em qual dia da semana?

Questão 5- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Certa máquina funciona todos os dias da semana e deve receber manutenção a cada 25 dias de uso. Um dia de manutenção da máquina é também um dia de trabalho. A máquina foi instalada, recebeu a manutenção inicial e começou a funcionar em uma terça-feira. Em que dia da semana ocorreu a 100ª manutenção?

Questão 6- (ENEM 2019 - Adaptada): Após o Fórum Nacional Contra a Pirataria (FNCP) incluir a linha de autopeças em campanha veiculada contra a falsificação, as agências fiscalizadoras divulgaram que os cinco principais produtos de autopeças falsificados são: rolamento, pastilha de freio, caixa de direção, catalisador e amortecedor.

Após uma grande apreensão, as peças falsas foram cadastradas utilizando-se a codificação: 1: rolamento, 2: pastilha de freio, 3: caixa de direção, 4: catalisador e 5: amortecedor.

Ao final obteve-se a sequência: 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... que apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de números. Essa sequência descreve a ordem em que os produtos apreendidos foram cadastrados. O 2025º item cadastrado foi um(a) ?

ATIVIDADE ENCONTRO 3

Questão 7- Dados os números em cada item, produza 20 termos da sequência de Conway Ordenada.

a) 13

b) 16

c) 18

Responda:

Analise cada sequência que você montou e diga: O número de dígitos em cada termo da sequência aumenta sempre?

Existe um número (ponto ou termo da sequência) em que, a partir daí, os termos se repetem?

Por que você acha que isso acontece?

ATIVIDADE ENCONTRO 4

Questão 8- Os números a seguir são termos da sequência de Conway Ordenada, em cada caso determine o que pode ser o termo anterior a ele.

a) \dots , 31123324

b) \dots , 32131425

c) \dots , 4132132415

Em cada uma dos itens acima, existe mais de uma possibilidade para o termo anterior?

Que pistas numéricas te ajudaram a descobrir o termo anterior?

Questão 9- Responda em poucas palavras;

O que é diferente entre seguir uma fórmula e descobrir uma regra?

Como as sequências ordenadas nos ajudam a pensar matematicamente?

5 RESULTADOS E ANÁLISES

Este capítulo apresenta tanto os resultados obtidos durante a aplicação da sequência didática elaborada à luz da metodologia da ED, quanto as análises realizadas a partir das produções dos estudantes. Inicialmente, descreve-se o processo de experimentação, evidenciando a organização das atividades, a mediação pedagógica e a participação dos discentes nas resoluções propostas. Em seguida, são discutidos os dados coletados na etapa de Análise a Posteriori e Validação, estabelecendo um confronto entre as hipóteses previstas na Análise a Priori e os resultados efetivamente observados. As análises buscam compreender como os estudantes mobilizaram o raciocínio lógico, identificaram padrões e formularam conjecturas matemáticas.

5.1 Experimentação

A Experimentação, descreve o momento em que o planejamento teórico elaborado na Análise a Priori é aplicado no contexto real de sala de aula. Esta etapa decorreu de forma presencial num colégio pertencente à rede estadual de ensino, situado no município de Dianópolis, na região Sudeste do estado do Tocantins, no qual estou como professor regente. O público-alvo da intervenção foi constituído por estudantes matriculados na 2.^a Série do Ensino Médio Regular, abrangendo três turmas distintas, o que resultou numa amostra de aproximadamente 90 participantes. Este volume de discentes revelou-se fundamental para garantir uma diversidade satisfatória de resoluções, raciocínios e dados para a investigação.

A intervenção foi estruturada num cronograma de quatro encontros presenciais, cada um com a duração de 50 minutos, tempo correspondente a uma aula escolar padrão. Esta organização temporal alinhou-se perfeitamente com a aplicação das quatro atividades progressivas desenhadas na fase de concepção da Engenharia Didática. Em termos de dinâmica em sala de aula e mediação pedagógica, as atividades adotaram uma abordagem expositiva e dialogada. O professor e investigador iniciava cada encontro com um momento de sensibilização, utilizando questões introdutórias e atividades de quebra-gelo para preparar o terreno cognitivo e instigar os estudantes a refletirem sobre lógicas e padrões antes mesmo da prática escrita.

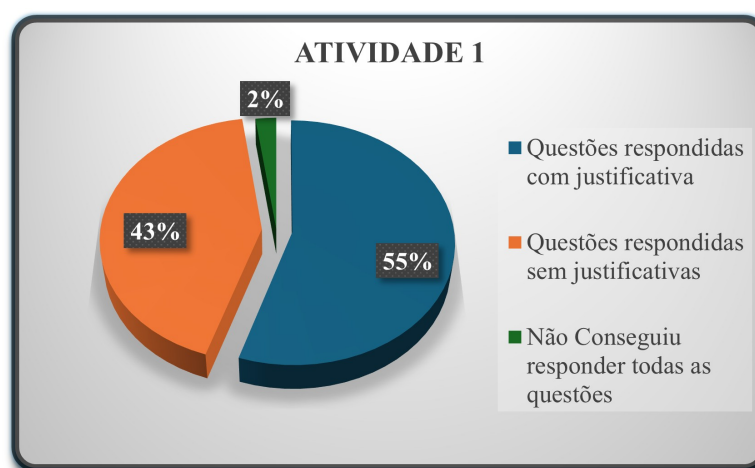
Após este aquecimento inicial, ocorria a entrega das folhas de atividades impressas, momento em que o protagonismo passava inteiramente para os estudantes. Estes eram desafiados a mobilizar o seu raciocínio lógico e a formular as suas próprias hipóteses para resolver os problemas propostos, como os desafios envolvendo calendários e a abstração da Sequência de Conway Ordenada. Durante esta fase de resolução ativa, o professor assumia um papel estritamente mediador e orientador. Circulando pela sala, prestava auxílio sem fornecer as respostas diretas, em vez disso, guiava os aprendentes por meio de perguntas reflexivas, ajudando-os a contornar eventuais frustrações e a formalizar corretamente os seus raciocínios matemáticos. Nesse ponto é importante destacar o trabalho cooperativo entre os estudantes, no qual buscavam se apoiar e se incentivar assumindo a responsabilidade por sua própria

aprendizagem e pela dos demais, como aponta CATARINO et al (2019).

Por fim, o encerramento de cada encontro culminava com a recolha rigorosa de todas as folhas de atividades produzidas. Estes registos físicos, contendo os acertos, as justificativas elaboradas e até mesmo os erros dos estudantes, constituíram o material empírico e documental essencial para fundamentar a etapa seguinte da metodologia, a Análise a Posteriori e Validação.

5.2 Análise a Posteriori e Validação

A Metodologia da Engenharia Didática pressupõe o confronto entre a **Análise a Priori**, onde as hipóteses de aprendizagem, os resultados esperados e os prováveis erros são previstos, e a **Análise a Posteriori**, onde os dados reais da aplicação são coletados e analisados, para realizar a validação da sequência didática. Abaixo, é apresentada a análise comparativa entre as subseções 4.1.2 e 4.1.4, estruturada por atividades.



Fonte: Autoria própria

Nessa atividade, esperava-se que os estudantes identificassem padrões numéricos nas sequências (Questão 1) e utilizassem cálculos de divisão por 7, focando no resto, para identificar dias da semana (Questões 2 e 3). Os erros previstos incluíam aplicar lógicas erradas para encontrar diferenças (como tentar multiplicar em vez de adicionar), ou errar os divisores e a contagem dos dias.

O gráfico mostram que 55% dos estudantes responderam todas as questões com justificativas. As imagens das produções (Figura 8) evidenciam que os estudantes conseguiram conjecturar o padrão, validá-lo e externalizar as descobertas por meio de justificativas, exatamente como planejado na etapa de concepção. Para problemas de calendário, a maioria raciocinou corretamente (Figuras 9 e 10), embora alguns tenham feito caminhos mais longos (Figura 11). A Engenharia Didática se valida também na previsão de erros, como a ocorrência de equívocos documentada na Questão 2 (Figura 12) confirmou as dificuldades operacionais e de interpretação que haviam sido antecipadas na análise a priori.

Figura 8 – Atividade 1 - Questão 1.

Atividade 1 - Determine o padrão ou regularidade de cada item abaixo, em seguida, copie e complete cada uma das sequências seguindo esse padrão.

a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, ...
 D: Sequência dos múltiplos de 5, cujo primeiro termo é 05.

b) 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, ...
 D: sequência decrescente, estando de quatro em quatro.

c) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 32, 58, 107, ...
 É a soma dos três termos anteriores para encontrar o próximo.

d) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, ...
 Se repete de acordo com o seu valor.

e) 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, 173, ...
 É a soma dos dois termos para encontrar o próximo.

f) 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...
 1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3
 São cubos perfeitos

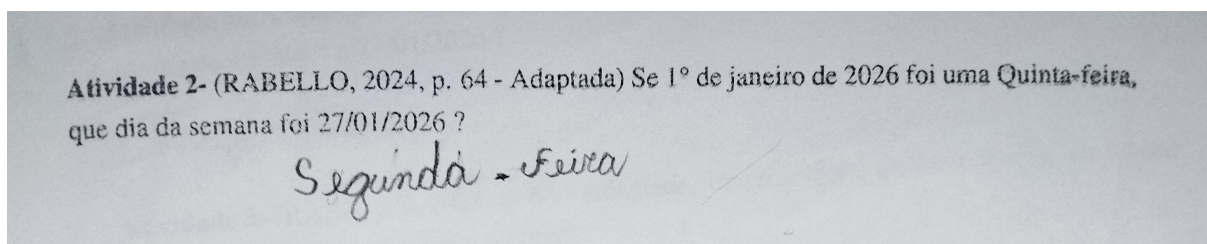
Dados da pesquisa

Na Figura 8 o estudante preencheu corretamente as lógicas das sequências (múltiplos, decrescentes, soma de termos anteriores, repetições, etc.) e escreveu uma justificativa clara: (ex: "Sequência dos múltiplos de 5").

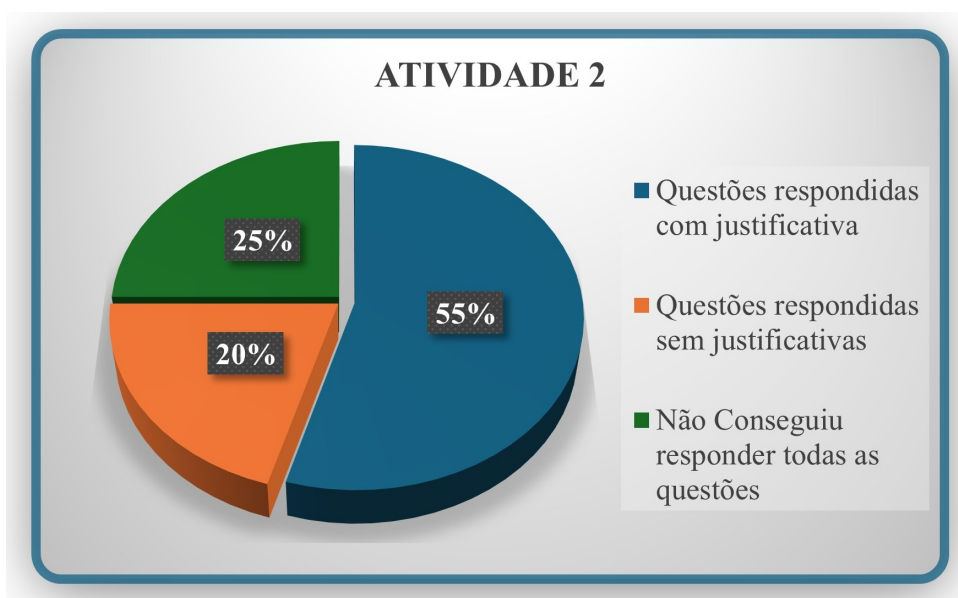
Nesse caso, o resultado atende perfeitamente ao comportamento esperado. Na análise prévia, era almejado que os estudantes não apenas completassem os números, mas descrevessem as pistas do que os levou a identificar esse padrão. O sucesso documentado na Figura 8 atesta que a dificuldade esperada, como a pressa visual ou erros de operações básicas, foi contornada por essa parcela da turma.

As Figuras 9 e 10 mostram produções nas quais os estudantes calcularam corretamente os problemas de calendário. Na Figura 10, por exemplo, nota-se a divisão formal ($40 \div 7 = 5$ com resto 5). A execução está exatamente alinhada à expectativa. A análise a priori estipulava que a operação ideal seria a de dividir o total de dias de deslocamento pelo número de dias da semana (7) e focar o avanço no resto da divisão, nesse caso, o avanço de 5 dias na Questão 2.

Figura 12 – Atividade 1 - Questão 2 com erro



Dados da pesquisa



Fonte: Autoria própria

Na ATIVIDADE 2 o nível de complexidade aumentou com situações como o tratamento de 60 dias (Questão 4), a 100^a manutenção a cada 25 dias (Questão 5) e o padrão de peças cadastradas (Questão 6). Previam-se erros clássicos como esquecer que o dia inicial conta como o 1º dia (Questão 4) ou multiplicar 100 por 25 para achar o total de dias, em vez de focar nos 99 intervalos (Questão 5).

O gráfico dessa atividade revelou um salto de 2% para 25% no número de estudantes que não conseguiram responder todas as questões, embora a taxa de resolução com justificativa tenha se mantido em 55%. As imagens (Figuras 13 e 14) mostram acertos na Questão 4, inclusive por meios alternativos e mais longos elaborados pelos estudantes. O ponto alto da validação das hipóteses de erros ocorreu na Questão 5, na qual poucos chegaram ao resultado correto e a maior parte dos estudantes cometeu exatamente o erro que já era esperado na etapa de concepção e análise a priori (ilustrado pela Figura 17). Na Questão 6, felizmente, a maioria conseguiu chegar à solução correta do padrão (Figura 18), alinhando-se à expectativa prévia.

Observa-se na Figura 13, uma resolução com cálculo direto semelhante ao modelo esperado, na Figura 14, um método mais longo feito pelo estudante. A comparação com fase da concepção é que ambas atestam que o estudante superou a "pegadinha" da questão. A hipótese

de erro da fase a priori era que eles simplesmente dividissem $60 \div 7$. O acerto mostra que eles lembraram da condição prévia estipulada de que a segunda-feira já conta como o 1º dia, restando apenas 59 dias para dividir por 7.

Figura 13 – Atividade 2 - Questão 4

Atividade 4- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Carlos deverá realizar um tratamento tomando 1 comprimido por dia de certo remédio durante 60 dias. Se ele tomou o primeiro comprimido em uma segunda-feira, ele tomará o último comprimido em qual dia da semana?

Quinta - Feira

O tratamento dura 60 dias e o primeiro comprimido é tomado no dia 1. O último será tomado 59 dias após o primeiro.

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 59} \\ \underline{56} \\ 3 \end{array}$$

Dados da pesquisa

Figura 14 – Atividade 2 - Questão 4

Atividade 4- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Carlos deverá realizar um tratamento tomando 1 comprimido por dia de certo remédio durante 60 dias. Se ele tomou o primeiro comprimido em uma segunda-feira, ele tomará o último comprimido em qual dia da semana?

Quinta Feira

D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S
	2	2	3	4	5	6	56	57	58	59	60	
7	8	9	10	11	12	13						
14	15	16	17	18	19	20						
21	22	23	24	25	26	27						
28	29	30	31	32	33	34						
35	36	37	38	39	40	41						
42	43	44	45	46	47	48						
49	50	51	52	53	54	55						

Dados da pesquisa

As Figuras 15 e 16 mostram os raros casos em que a 100ª manutenção da máquina a cada 25 dias foi resolvida perfeitamente (caindo num sábado). Esses estudantes executaram a visão ideal descrita a priori, descobriram que há 99 intervalos entre as manutenções, usando a multiplicação $99 \cdot 25$ ou padronização de tabelas, o que a análise a priori colocava como o ápice desejado para o raciocínio dessa questão.

Figura 15 – Atividade 2 - Questão 5

Atividade 5- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Certa máquina funciona todos os dias da semana e deve receber manutenção a cada 25 dias de uso. Um dia de manutenção da máquina é também um dia de trabalho. A máquina foi instalada, recebeu a manutenção inicial e começou a funcionar em uma terça-feira. Em que dia da semana ocorreu a 100ª manutenção?

$7 \times 14 = 98 = \text{sexta} + 2 \text{ manutenções} = \text{sábado}$

1ª Ter	8ª Ter
2ª Qua	9ª Qua
3ª Qui	10ª Qui
4ª Sex	11ª Sex
5ª Sab	12ª Sab
6ª Dom	13ª Dom
7ª Seg	14ª Seg
	15ª Ter
	16ª Qua

Dados da pesquisa

Figura 16 – Atividade 2 - Questão 5

Atividade 5- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Certa máquina funciona todos os dias da semana e deve receber manutenção a cada 25 dias de uso. Um dia de manutenção da máquina é também um dia de trabalho. A máquina foi instalada, recebeu a manutenção inicial e começou a funcionar em uma terça-feira. Em que dia da semana ocorreu a 100ª manutenção?

$100 - 1 = 99 \text{ intervalos}$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 1 \\ \hline 99 \\ \times 25 \\ \hline 495 \\ 1980 \\ \hline 2475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2475 \overline{) 10000} \\ \underline{24} \\ 75 \\ \underline{75} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \end{array}$$

terço → quarto (1)
quinto (2)
sexta (3)
sábado (4)
= sábado

Dados da pesquisa

A Figura 17 ilustra o equívoco que a maioria dos estudantes cometeram. Esta é uma das validações mais fortes da hipótese didática, a análise a priori profetizou exatamente o erro mostrado nesta figura, a dificuldade dos estudantes em entender os intervalos, levando-os a multiplicar 100 por 25 para achar o total de dias, em vez de focarem nos 99 intervalos (100 - 1).

Figura 17 – Atividade 2 - Questão 5

Atividade 5- (Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada) Certa máquina funciona todos os dias da semana e deve receber manutenção a cada 25 dias de uso. Um dia de manutenção da máquina é também um dia de trabalho. A máquina foi instalada, recebeu a manutenção inicial e começou a funcionar em uma terça-feira. Em que dia da semana ocorreu a 100ª manutenção?

$$100 \times 25 = 2500$$

$$\begin{array}{r} 2500 \cancel{0} \cancel{0} \cancel{0} \\ - 2499 \cancel{3} \cancel{5} \cancel{7} \\ \hline 1 \end{array}$$

A 100ª manutenção
ocorreu em uma Quarta

Dados da pesquisa

A Figura 18 exhibe que o estudante descobriu a repetição em blocos no padrão de 8 elementos como o esperado. A expectativa era que eles identificassem o padrão (de 5 até 4) que totaliza 8 dígitos e fizessem a divisão de $2025 \div 8$ para checar o resto 1. A figura valida que os estudantes contornaram as hipóteses de erros previstos, como errar o tamanho do ciclo ou marcar a resposta do "resto 1" mecanicamente como a peça número 1.

Figura 18 – Atividade 2 - Questão 6

Atividade 6- (ENEM 2019 - Adaptada): Após o Fórum Nacional Contra a Pirataria (FNCP) incluir a linha de autopeças em campanha veiculada contra a falsificação, as agências fiscalizadoras divulgaram que os cinco principais produtos de autopeças falsificados são: rolamento, pastilha de freio, caixa de direção, catalisador e amortecedor.

Após uma grande apreensão, as peças falsas foram cadastradas utilizando-se a codificação: 1: rolamento, 2: pastilha de freio, 3: caixa de direção, 4: catalisador e 5: amortecedor.

Ao final obteve-se a sequência: 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... que apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de números. Essa sequência descreve a ordem em que os produtos apreendidos foram cadastrados. O 2025º item cadastrado foi um(a) ?

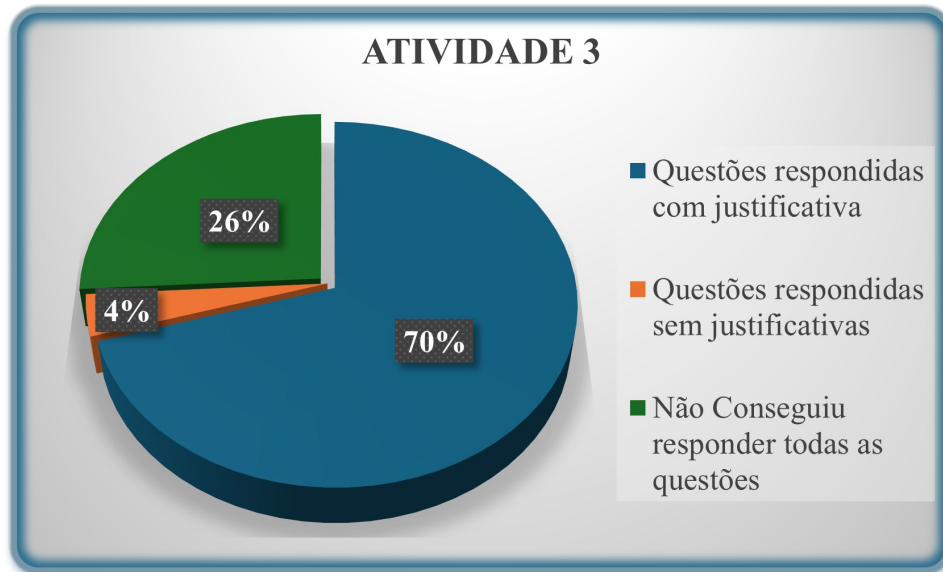
$$\begin{array}{r} 2025 \cancel{0} \cancel{0} \cancel{0} \\ - 253 \\ \hline 5 \end{array}$$

5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4

3º número do bloco

Resposta: 5

Dados da pesquisa



Fonte: Autoria própria

Para a produção da Sequência de Conway Ordenada (Questão 7), esperava-se que os estudantes percebessem que o número de dígitos não aumenta sempre e que a sequência atinge um ponto fixo, repetindo-se infinitamente. Erros conceituais e de execução, como inversão entre quantidade/dígito ou contagens desatentas, eram os principais obstáculos esperados.

A análise do gráfico demonstrou êxito, aproximadamente 70% dos estudantes não apenas completaram os termos propostos, como também justificaram seus resultados, corroborando com o esperado na Engenharia Didática (Figuras 19 e 20). O obstáculo encontrado foi de ordem argumentativa, na qual cerca de 26% dos estudantes falharam em justificar por que o comportamento de repetição ocorria, não conseguiram articular que a sequência passa a descrever a si mesma.

As Figuras 19 e 20 mostram os estudantes externalizando até o vigésimo termo as variações da Sequência de Conway que foram solicitados, apontando os seus padrões. Confirmam a superação das dificuldades estipuladas, as quais a análise a priori esperava que houvesse uma forte possibilidade de cansaço, de confusão de pares ordenados (escrever 1311 ao invés de 1113), e de erros de contagem de repetição contínua. As figuras mostram que a vasta maioria alcançou o "ponto fixo" de Conway perfeitamente e compreendeu que o dígito narra sua própria quantidade.

Figura 19 – Atividade 3 - Questão 7

Atividade 7- Dados os números em cada item, produza 20 termos da sequência de Conway Ordenada.

a) 13
 1113, 3113, 2123, 112213, 312213, 212223, 114213, 311213
 14, 31212314, 31222314, 21322314, 21322314, 21322314, 21322314
 14, 21322314, 21322314, 21322314, 21322314, 21322314, 21322314
 213223, 21322314

b) 16
 1116, 3116, 211316, 31121316, 41122316, 3122131416, 412223
 1416, 3122132416, 3122331416, 3122331416, 3122
 331416, 3122331416, 3122331416, 3122331416, 3122
 331416, 3122331416, 3122331416, 3122331416

c) 18
 1118, 3118, 211318, 31121318, 41122318, 3122131418, 41222314
 18, 3132132418, 3122321418, 3122321418, 3122321418, 31
 22331418, 3122331418, 3122331418, 3122331418, 3122331418
 3122331418, 3122331418, 3122331418, 3122331418, 3122331418

Resposta:

Dados da pesquisa

Figura 20 – Atividade 3 - Questão 7

Resposta:

Analisar cada sequência que você montou e diga: O número de dígitos em cada termo da sequência aumenta sempre?

Sim, os termos não ficando cada vez maiores, mas os dígitos podem crescer pouco ou ficar quase do mesmo tamanho.

Existe um número (ponto ou termo da sequência) em que, a partir daí, os termos se repetem?

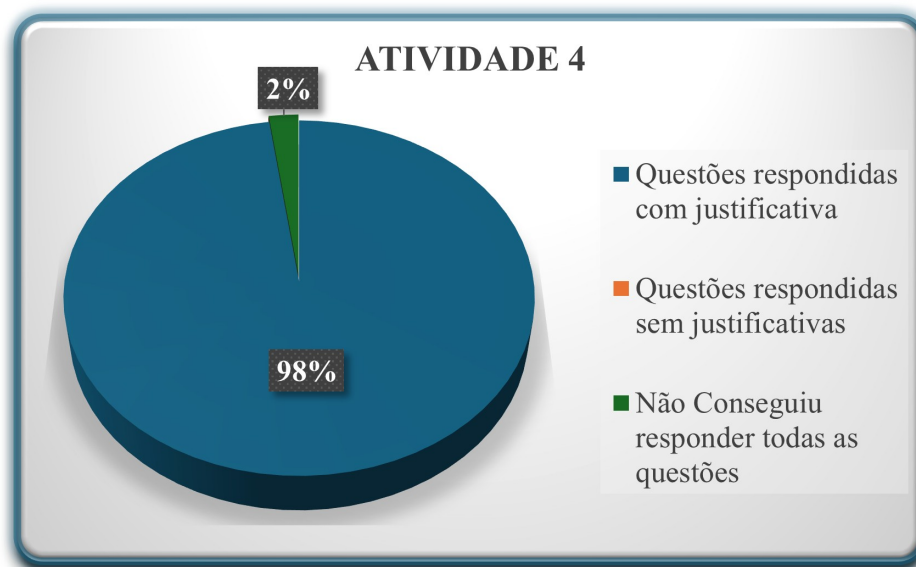
Não, na sequência de Conway os termos não entram em repetição.

Por que você acha que isso acontece?

Por que cada termo descreve o anterior. Como os padrões de número mudam, a descrição também muda, criando novas combinações de numeração, então a sequência continua crescendo sem repetir.

Dados da pesquisa

Por outro lado, cerca de 26% dos estudantes não conseguiram expressar uma justificativa do porque a Sequência de Conway Ordenada apresentava tal comportamento de que, a partir de um termo, os demais se repetem.



Fonte: Autoria própria

Aqui os estudantes deveriam fazer "engenharia reversa"(Questões 8). A análise a priori estipulava que eles percebessem a existência de múltiplas possibilidades para o termo anterior, desconstruindo a ideia de que a matemática sempre tem apenas uma resposta exata. O gráfico e análises desta etapa atestam uma aprovação notável, aproximadamente 98% dos estudantes responderam às questões externalizando justificativas bem elaboradas. As Figuras 21 e 22 comprovam que a internalização das definições da Sequência de Conway Ordenada se consolidou.

As Figuras 21 e 22 exibem escritas longas, estruturadas e reflexivas. Na Figura 21, eles decodificaram o número anterior pela engenharia reversa, na Figura 22, trouxeram um aspecto dissertativo expressando o "porquê" de a abstração ser importante. O resultado referenda a superação máxima dos problemas conceituais, a concepção a priori determinava que a meta final era o estudante perceber a quebra do dogma de "resposta única matemática" vendo que havia múltiplas combinações do termo anterior que resultariam na mesma sequência ordenada e não darem respostas tautológicas ou rasas. As figuras validam que as externalizações foram muito superiores, provando que descobrir uma regra e criar conjecturas fez um sentido prático no raciocínio deles.

Figura 21 – Atividade 4 - Questão 8

Atividade 8- Os números a seguir são termos da sequência de Conway Ordenada, em cada caso determine o que pode ser o termo anterior a ele.

a) ..., 31123324431213413 ou 111233344

b) ..., 32131425 2352452 ou 223455

c) ..., 4132132415 12412413125 ou 11112223445

- Em cada uma dos itens acima, existe mais de uma possibilidade para o termo anterior?

Com certeza, pois os números podem ser agrupados de maneira diferente

Que pistas numéricas te ajudaram a descobrir o termo anterior?

Separei os números em pares, quantidade e número.
Exo: 31 é um par, pois como você lê $31 = 333$

Dados da pesquisa

Figura 22 – Atividade 4 - Questão 9

Atividade 9- Responda em poucas palavras;

seguir
UMA
FÓRMULA

O que é diferente entre seguir uma fórmula e descobrir uma regra?

É como usar um manual de instrução para chegar ao resultado descobrir e analisar o problema e descobrir por conta própria a resposta

Como as sequências ordenadas nos ajudam a pensar matematicamente?

com um padrão organizado é mais fácil obter um resultado

Dados da pesquisa

As análises demonstram que as hipóteses levantadas na fase de Concepção e Análise a Priori foram efetivamente confirmadas pela Análise a Posteriori. A transição do obstáculo, na

qual erros mapeados na Questão 5 se tornaram reais, para o avanço extraordinário na Atividade 4, com 98% de assertividade na abstração, valida a sequência metodológica. Ela provou-se capaz de desenvolver satisfatoriamente o raciocínio lógico e a formulação de conjecturas pelos estudantes.

Conclui-se, portanto, que a aplicação da sequência didática fundamentada na ED possibilitou resultados significativos no desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade investigativa e da formulação de conjecturas matemáticas pelos estudantes. A análise das resoluções evidenciou que, mesmo diante de dificuldades e erros previamente previstos na Análise a Priori, os participantes conseguiram construir estratégias próprias, identificar padrões e justificar seus raciocínios de maneira progressivamente mais consistente. Além disso, a comparação entre as etapas de concepção e validação confirmou a eficácia da proposta metodológica, demonstrando que as atividades favoreceram não apenas a aprendizagem de conceitos matemáticos, mas também a autonomia intelectual e a reflexão crítica dos estudantes diante dos problemas apresentados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é uma componente curricular obrigatória em todos os níveis de Educação Básica no Brasil (Ensino Fundamental 1, Ensino Fundamental 2 e Ensino Médio), conforme apregoado nos documentos oficiais LDB (1996), PCN (1997) e BNCC (2018). Desempenha um papel importante na vida humana, uma vez que ajuda a desenvolver capacidades de raciocínio lógico, crítico e sistemático, conforme descrição de Competências e Habilidades delineadas na BNCC(2018).

É oportuno resgatar as reflexões de George Pólya no artigo *Dez Mandamentos para Professores*, mais especificamente no que diz respeito aos seus dois primeiros princípios: ter interesse pela matéria e conhecê-la. A implementação de propostas de ensino dinâmicas, como o trabalho com sequências numéricas e o reconhecimento de padrões aqui sugeridos, exige que o educador não apenas possua o domínio técnico e teórico da disciplina, mas que também cultive uma genuína paixão por ela. Afinal, de acordo com Pólya (1987), é justamente por meio da união entre o conhecimento sólido e o entusiasmo do professor que torna possível contagiar os estudantes, despertando neles a curiosidade e o verdadeiro interesse pela descoberta matemática.

Neste contexto, lembramos que um dos ramos essenciais da Matemática Discreta é a Aritmética (Teoria dos Números), que, por exemplo, ajuda-nos a quantificar ou contar coisas, estuda padrões e as relações entre os objetos que nos rodeiam. Dito isto, o desenvolvimento deste trabalho partiu da premissa de que a fundamentação sólida em Aritmética e Álgebra é indispensável para a prática docente e para a compreensão profunda da estrutura Matemática. Conforme salientam Araujo e Martinho (2025), essa área do conhecimento desempenha um papel central na formação do professor de Matemática, pois permite estabelecer conexões entre conceitos abstratos e aplicações práticas, consolidando o conhecimento sobre o conjunto dos números inteiros e suas propriedades. Sob essa ótica, esta dissertação buscou transpor esses fundamentos teóricos para o ambiente de sala de aula, utilizando o estudo de sequências como um elo entre a manipulação aritmética e a generalização algébrica.

A presente pesquisa teve como propósito central investigar e propor estratégias didáticas para o ensino de sequências numéricas no Ensino Médio, distanciando-se da abordagem que costuma restringir esse conteúdo à memorização de fórmulas de Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG), por exemplo. Para tal, o trabalho utilizou a Sequência de Conway Ordenada como recurso didático. Apoiada nos princípios metodológicos da Engenharia Didática, estruturada nas fases de análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori, a pesquisa propôs, elaborou e aplicou uma intervenção pedagógica de cunho investigativo com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em um Colégio Estadual no município de Dianópolis-TO.

A análise dos dados coletados durante a experimentação evidencia que os objetivos elencados, tanto gerais quanto específicos, foram atingidos. O trabalho demonstrou que é possível transmitir o objeto do conhecimento de sequências instigando os estudantes a elaborarem

conjecturas e reconhecerem padrões, sem que o professor forneça "respostas prontas". Na fase de análise a posteriori, os resultados apontam uma aprovação notável, aproximadamente 98% dos estudantes conseguiram responder às questões discursivas com justificativas bem elaboradas. As atividades permitiram que os discentes compreendessem as propriedades da sequência e realizassem processos de "engenharia reversa", promovendo o rompimento com o dogma da "resposta única" e fortalecendo a distinção cognitiva entre seguir uma fórmula e descobrir uma regra.

Esta dissertação oferece contribuições em diferentes dimensões: (1) Entrega uma sequência de atividades testada e validada que alinha a prática de sala de aula às exigências da BNCC, promovendo o letramento matemático e a resolução de problemas. (2) Comprova que o uso de lógicas matemáticas transcendem o domínio numérico raso e unicamente algorítmico, alcançando habilidades de construção, formalização e generalização do raciocínio. (3) Reafirma o potencial da ED como instrumento rigoroso de pesquisa, permitindo intervenções controladas e positivas em contextos reais de ensino.

Este trabalho situa-se na convergência entre a investigação matemática e a prática pedagógica, abordando o reconhecimento de padrões e conceitos da Sequência de Conway Ordenada, alinhando-se à metodologia da ED e às diretrizes dos documentos norteadores da Educação Básica Brasileira. Numa breve pesquisa no repositório do programa PROFMAT Campus Arraias - TO não foram encontrados trabalhos que se referissem à metodologia da ED ou se remetessem a TSD. Quando pesquisado por "sequências numéricas" o único resultado obtido foi o trabalho do discente Silva Filho (2020) que aborda este tema numa perspectiva de análise de convergência e divergência por exemplo, sem se remeter a reconhecimento de padrões especificamente.

A partir das reflexões geradas neste trabalho, pode-se pensar em possibilidades para extensão de Nível de Ensino como adaptar a proposta para os anos finais do Ensino Fundamental ou para cursos de Licenciatura em Matemática, reforçando a base de Aritmética e Álgebra dos futuros docentes.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. [S.l.]: São Paulo: Editora UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Queiroz e S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **REVEMAT**, v. 03, n. 1, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT**, v. 07, n. 2, 2012.
- ALVES, F. V. História da matemática: Os números figurais em 2d e 3d. **Conexões-Ciência e Tecnologia**, v. 06, n. 02, 2012.
- ARAUJO, L. T. de; MARTINHO, A. L. G. A importância da disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática. **Hipátia**, v. 10, n. 1, p. 44–54, 2025.
- ARTIGUE. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching sequences. in: Anna sierpinski; jeremy kilpatrick (org.). **Mathematics education as a research domain: a search for identity**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 27–39, 2004.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 09, n. 3, p. 281–308, 1988.
- ARTIGUE, M. A. Ingénierie didactique et ingénierie de formation. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 15, n. 1, p. 33–55, 1995.
- AVILA, G. **Cálculo das funções de múltiplas variáveis**. [S.l.]: 7. ed. Rio de Janeiro : LTC, 2006.
- BACHELARD, G. **La formation de l'esprit scientifique**. [S.l.]: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective. Paris: J. Vrin, 1996.
- BARTON, J. *et al.* Sequences for student investigation. **PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies**, p. 354–368, 2007.
- BEZERRA, F. H. C. *et al.* Uma nota sobre os números multifigurados quadrados nonagonais. **Intermaths**, v. 6, n. 1, p. 93–106, 2025.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. [S.l.]: Tradução de Elza Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.
- BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**: Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: [s.n.], 1996.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ministério da educação e do desporto. secretaria de educação fundamental. Brasília, 1997.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Edital nº 14, de 21 de março de 2019**: Exame nacional do ensino médio (enem) 2019. Brasília, DF, 2019. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impreso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 5 fevereiro 2026.

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2008.
- CARVALHO, M. C. C. e S. **Padrões Numéricos e Sequências**. São Paulo: Editora Moderna, 2000.
- CATARINO, P. *et al.* Cooperative learning on promoting creative thinking and mathematical creativity in higher education. **REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación**, Portugal, n. 17, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.15366/reice2019.17.3.001>>. Acesso em: 3 maio 2026.
- CONWAY, J. H. The weird and wonderful chemistry of radioactive decay. in: Open problems in communication and computation. **Springer**, p. 173–188, New York, NY, 1987.
- COSTA, E. A.; CARVALHO, F. S. de.; MESQUITA, E. G. da C. A finitude dos pontos periódicos da sequência de conway ordenada. **Ciência e Natura**, v. 44, n. 58, 2022.
- COSTA, E. A.; SANTOS, R. A. dos. Contando algarismos. **Revista da Olimpíada - IME - UFG**, n. 14, p. 61–74, 2019.
- COSTA, E. A.; SOUSA, K. C. V. de. O algoritmo de kaprekar na obmep. **Revista do Professor de Matemática**, n. 108, p. 46–53, 2023.
- COUTINHO, S. C. **Números inteiros e criptografia RSA**. [S.l.]: 2. ed. Rio de Janeiro : IMPA., 2009.
- D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. [S.l.]: Campinas, SP: Papyrus, 1996.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- FILHO, V. C. d. S. S. **Uma abordagem do estudo de sequências e séries numéricas na matemática do ensino médio**. 100 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Tocantins, Arraias, TO, 2020.
- FREITAS, N. L. de; FERREIRA, F. de O.; HAASE, V. G. Linguagem e matemática: estudo sobre relações entre habilidades cognitivas linguísticas e aritméticas. **Ciências e Cognição**, v. 15, n. 3, p. 111–125, 2010.
- GAIRÍIN, J. M. *et al.* La sucesión look and say. **Anais**, p. 16–24, Zaragoza: Universidad de Zaragoza, 2018.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. [S.l.]: 7. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2019.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. [S.l.]: 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.
- MIKALEF, L. A sequência de fibonacci. **Revista Resgates**, n. 09, p. 147–162, 2019.
- MINAYO, M. C. de S. Amostragem e saturação em pesquisa qualitativa: consensos e controvérsias. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 5, n. 7, p. 1–12, 2017.

MOYON, M. **O Liber Abbaci de Fibonacci**: das matemáticas medievais para o ensino atual. São Paulo: LF Editorial, 2025. Tradução da obra de Leonardo de Pisa. ISBN 978-65-5563-541-6.

OBMEP. **OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**. *Banco de Questões*. Rio de Janeiro: IMPA. Acessado em: 23 out. 2025. Disponível em: <www.obmep.org.br>

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. [S.l.]: 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. [S.l.]: 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Python**. 2026. Disponível em: <<https://www.python.org/>>.

PóLYA, G. Dez mandamentos para professores. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 10, 1987. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/10/2.htm>>. Acesso em: 7 março 2026.

REBELLO, I. de S. **Fórmulas de Zeller e Conway para a determinação de dias da semana**. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores, São Gonçalo, 2024.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SARAIVA, P. O ofício matemático de conjecturar. **Gazeta de Matemática**, n. 202, p. 2, 2024.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. **A ENGENHARIA DIDÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: o estudo da generalização e complexificação da Sequência de Padovan**. [S.l.]: Fortaleza-CE, IFCE, 2023.

VIEIRA, R. P. M. *et al.* Engenharia didática e uma investigação do processo de hibridização da sequência de fibonacci. **REnCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 1, 2020.

WAGNER, E. **Reconhecimento de Padrões**: Ppmmem - Julho de 2023. Rio de Janeiro, 2023. Disponível em: <<https://impa.br/programa/ppmmem-julho-de-2023/>>. Acesso em: 20 janeiro 2026.

APÊNDICE A - CÓDIGO NO PYTHON PARA GERAR OS TERMOS DA SEQUÊNCIA DE CONWAY ORDENADA

```
def proximo_termo(termo):  
  
    # Conta os digitos  
  
    from collections import Counter  
  
    contagem = Counter(termo)  
    # Ordena os digitos em ordem crescente resultado = ""  
  
    for digito in sorted(contagem.keys(), key=int):  
        resultado += str(contagem[digito]) + digito  
  
    return resultado  
  
def gerar_sequencia(n):  
  
    termo = "1"  
  
    sequencia = [termo]  
  
    for _ in range(n - 1):  
        termo = proximo_termo(termo)  
        sequencia.append(termo)  
  
    return sequencia  
  
# Exemplo: gerar os 10 primeiros termos  
  
seq = gerar_sequencia(20)  
  
print(seq)
```

Código que para no termo que se repete indicando sua posição e a quantidade de interações do ciclo.

```

from collections import Counter

def proximo_termo(termo):
    # Conta os digitos
    contagem = Counter(termo)
    # Ordena os digitos em ordem crescente
    resultado = ""
    for digito in sorted(contagem.keys(), key=int):
        resultado += str(contagem[digito]) + digito
    return resultado

def gerar_sequencia_com_ciclo():
    termo = "1"
    sequencia = [termo]
    vistos = {termo}

    while True:
        termo = proximo_termo(termo)

        if termo in vistos: # ciclo detectado
# COMANDO 1: Posicao em que o ciclo se inicia
# O metodo .index() busca a primeira vez que o termo apareceu
na lista
        posicao_inicio = sequencia.index(termo)

# COMANDO 2: Quantidade de interacoes (tamanho) do ciclo
# Subtraimos o tamanho total da sequencia ate o momento
pela posicao de inicio
        tamanho_ciclo = len(sequencia) - posicao_inicio

print(f"Ciclo detectado a partir do termo: {termo}")
print(f"-> Posicao de inicio do ciclo (indice): {posicao_inicio}")
print(f"-> Quantidade de interacoes do ciclo: {tamanho_ciclo}\n")
break

        sequencia.append(termo)
        vistos.add(termo)

```

```
# Retornamos as novas variaveis caso queira usa-las fora  
da funcao
```

```
return sequencia , posicao_inicio , tamanho_ciclo
```

```
# Exemplo de uso
```

```
seq , inicio , tamanho = gerar_sequencia_com_ciclo()
```

```
print("Sequencia_gerada_(antes_da_repeticao):")
```

```
print(seq)
```