



UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

BRUNO JOSÉ DE SÁ FERRAZ

**FÓRMULA DE SIMPSON: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO PARA O CÁLCULO
DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS NO ENSINO MÉDIO**

Juazeiro-BA

2025

BRUNO JOSÉ DE SÁ FERRAZ

**FÓRMULA DE SIMPSON: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO PARA O CÁLCULO
DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Universidade Federal do Vale do São Francisco –
Univasf, Campus Juazeiro-BA, como requisito para
obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva
Coorientador: Prof. Me. Mateus de Souza Galvão

Juazeiro-BA

2025

Ferraz, Bruno José de Sá

F381f Fórmula de Simpson: uma possibilidade de ensino para o cálculo de volume de sólidos geométricos no ensino médio / Bruno José de Sá Ferraz. – Juazeiro-PE, 2025.

77 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva.

Coorientador: Prof. Me. Mateus de Souza Galvão.

1. Fórmula de Simpson. 2. Ensino de matemática. 3. Sequência Didática. 4. Geometria. I. Silva, Alexandre Ramalho. II. Galvão. Mateus de Souza. III. Título. IV. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.07

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO


BRUNO JOSÉ DE SÁ FERRAZ

**FÓRMULA DE SIMPSON: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO PARA O CÁLCULO
DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS NO ENSINO MÉDIO**


Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Universidade Federal do Vale do São Francisco
– Univasf, Campus Juazeiro-BA, como requisito
para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: 19 de Dezembro de 2025.


Banca Examinadora

 Documento assinado digitalmente
ALEXANDRE RAMALHO SILVA
Data: 08/01/2026 18:46:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Orientador Dr. Alexandre Ramalho Silva – UNIVASF
Orientador

 Documento assinado digitalmente
MATEUS DE SOUZA GALVAO
Data: 07/01/2026 23:09:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Perito Criminal Me. Mateus de Souza Galvão
Coorientador

 Documento assinado digitalmente
JOSE MARCIO MACHADO DE BRITO
Data: 08/01/2026 00:54:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Marcio Machado de Brito – IFPI
Membro externo

 Documento assinado digitalmente
LUCILIA BATISTA DANTAS PEREIRA
Data: 08/01/2026 07:45:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira – UPE
Membro interno

FÓRMULA DE SIMPSON: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO PARA O CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS NO ENSINO MÉDIO

Bruno José de Sá Ferraz¹
Mateus de Souza Galvão²
Alexandre Ramalho Silva³

RESUMO

No Ensino Médio, o cálculo de volumes de sólidos geométricos tradicionalmente exige a memorização de diversas fórmulas, o que pode ocasionar maiores dificuldades para os discentes. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo investigar o uso da fórmula de Simpson como uma possibilidade de ensino no cálculo de volume de sólidos geométricos no 3º ano da referida etapa da Educação Básica. No referido trabalho, realizou-se uma pesquisa qualitativa, de natureza pesquisa-ação, em que foi desenvolvida uma Sequência Didática com 101 alunos do 3º ano do Ensino Médio. A Sequência foi organizada em três encontros, nos quais houve: revisão das fórmulas tradicionais, introdução e aplicação da fórmula de Simpson e, por fim, avaliação por meio de atividade e questionário. Os resultados da pesquisa indicaram que a maioria dos alunos (99) desconhecia a fórmula de Simpson previamente, mas este mesmo quantitativo a consideraram útil após a intervenção. Na atividade avaliativa, observou-se que os alunos tenderam a utilizá-la nas questões iniciais, com taxas de acerto equivalentes ou superiores ao método tradicional nos problemas finais. O questionário revelou aceitação total por parte dos discentes do material da abordagem, sendo que 78 alunos a consideraram mais fácil que as fórmulas variadas comumente empregadas. Com isso, concluiu-se que a fórmula de Simpson apresenta-se como uma ferramenta pedagógica viável e unificadora, com potencial para simplificar o ensino do cálculo de volumes, embora sua plena utilização possa demandar um tempo de exposição e de familiarização por parte dos estudantes superior ao inicialmente previsto no planejamento da Sequência Didática desenvolvida neste trabalho.

Palavras-chave: Ensino Médio; Fórmula de Simpson; Cálculo de Volume; Sólidos Geométricos; Sequência Didática.

¹ <http://lattes.cnpq.br/4811819475652883>.

² <http://lattes.cnpq.br/5513226030503227>.

³ <http://lattes.cnpq.br/0992237765811523>.

ABSTRACT

In high school, calculating the volumes of geometric solids traditionally requires memorizing several formulas, which can cause greater difficulties for students. In this sense, this work aims to investigate the use of Simpson's formula as a teaching possibility for calculating the volume of geometric solids in the 3rd year of this stage of Basic Education. This work involved qualitative research, of an action-research nature, in which a didactic sequence was developed with 101 students from the 3rd year of high school. The sequence was organized into three meetings, which included: a review of traditional formulas, the introduction and application of Simpson's formula, and finally, an evaluation through an activity and a questionnaire. The research results indicated that the majority of students (99) were previously unaware of Simpson's formula, but this same number considered it useful after the intervention. In the evaluative activity, it was observed that students tended to use it in the initial questions, with success rates equivalent to or higher than the traditional method in the final problems. The questionnaire revealed total acceptance of the approach's material by the students, with 78 students considering it easier than the various formulas commonly used. Therefore, it was concluded that Simpson's formula presents itself as a viable and unifying pedagogical tool, with the potential to simplify the teaching of volume calculation, although its full use may require a longer exposure and familiarization time for students than initially planned in the didactic sequence developed in this work.

Keywords: High School; Simpson's Rule; Volume Calculation; Geometric Solids; Didactic Sequence.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL	11
2.1 Desafios no Ensino da Geometria Espacial.....	13
2.2 Metodologias de ensino para geometria espacial	16
3. A FÓRMULA PRISMOIDAL E A FÓRMULA DE SIMPSON	19
3.1 Definição de prisma e fórmula prismoidal.....	19
3.2 Origem histórica da fórmula prismoidal	20
3.3 Demonstração da fórmula prismoidal	22
3.4 Thomas Simpson	24
3.5 A regra de Simpson.....	25
3.6 Aplicações da fórmula de Simpson	26
3.7 Fórmula de Simpson na RPM e na Avaliação Nacional – PROFMAT.....	28
3.7.1 Revista Professor de Matemática – RPM.....	28
3.7.2 Avaliação Nacional Geometria (MA13) – PROFMAT	29
4. METODOLOGIA	32
5. ANÁLISE, RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
5.1 Análise, resultados e discussão da resolução dos problemas propostos	35
5.1.1 Discussão dos resultados por questão dos problemas propostos	37
5.1.1.1 Análise questão 1.....	37
5.1.1.2 Análise questão 2.....	39
5.1.1.3 Análise questão 3.....	41
5.1.1.4 Análise questão 04.....	43
5.1.1.5 Análise questão 05.....	46
5.1.1.6 Análise questão 06.....	49
5.1.1.7 Análise questão 07.....	51
5.2 Análise, resultado e discussão dos questionários	53
5.2.1 Discussão dos resultados por item do questionário	53
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
REFERÊNCIAS	59
APÊNDICE A - SEQUÊNCIA DIDÁTICA	62
APÊNDICE B – LISTA DE EXEMPLOS (PRIMEIRO E SEGUNDO ENCONTRO) ...	67
APÊNDICE C - ATIVIDADE (TERCEIRO ENCONTRO)	71
APÊNDICE D - QUESTIONÁRIO.....	76

1. INTRODUÇÃO

A Educação no Brasil é um tema complexo e desafiador, com uma história marcada por avanços e dificuldades. Santos (2013) aponta que não existem dúvidas quanto aos avanços alcançados pela educação brasileira nos últimos anos, sobretudo após o conjunto de reformas ocorridas a partir dos anos de 1990, no entanto, muitos desafios seguem em aberto, como: acesso, permanência, infraestrutura precária, desigualdades socioeconômicas, formação continuada de professores, equidade e qualidade de ensino - aprendizagem.

Diante dessas adversidades e na busca por uma educação de qualidade e igualitária, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo central da educação básica brasileira, estabelece as aprendizagens essenciais para a formação estudantil. Sobre o ensino de Matemática, em específico o cálculo de áreas e volumes, Brasil (2018, p. 537) apresenta na habilidade EM13MAT504 a necessidade de “investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras”.

Nesse contexto, o ensino da geometria espacial é um pilar fundamental na formação educacional, pois oferece não apenas uma compreensão crucial das formas tridimensionais e suas inter-relações, como cultiva habilidades cognitivas essenciais. Segundo Calabria (2013), seus conceitos remontam a antiguidade, o desenvolvimento de civilizações e seu uso em atividades diárias como medições de terras e obras arquitetônicas.

O domínio da visualização e da manipulação de objetos espaciais fortalece a habilidade de solucionar problemas complexos, como os que envolve o cálculo de áreas e volumes, além de estimular a criatividade e a reflexão em várias áreas, em especial Física, Engenharia e Odontologia.

Estudos como o de Soares (2019), indicam que a ênfase excessiva na memorização de fórmulas matemáticas pode criar barreiras à aprendizagem. A associação direta de cada fórmula a um sólido geométrico específico, seja um prisma, uma pirâmide, seu tronco ou corpos redondos pode, muitas vezes, tornar a compreensão mais árdua para o aluno. Assim, torna-se necessário explorar alternativas pedagógicas que facilitem a construção do conhecimento matemático.

Nesse sentido, a fórmula de Simpson pode se apresentar como uma ferramenta valiosa a ser considerado no contexto da Educação Básica, especialmente no 3º ano do Ensino Médio, etapa na qual presume-se que os discentes já estejam familiarizados com as diversas fórmulas particulares para o cálculo de volume dos sólidos supracitados.

Na etapa de ensino mencionada, o cálculo de volumes pode ser um desafio para muitos discentes, pois requer a memorização de diversas fórmulas relacionadas aos sólidos geométricos, sejam eles prismas, pirâmides ou corpos redondos. O presente trabalho destaca-se como uma possível contribuição para o campo da Educação Matemática, pois pode simplificar o cálculo de volumes ao unificar diversas fórmulas particulares em uma única abordagem.

A princípio, a escolha do tema é oportuna, uma vez que os alunos frequentemente reclamam da quantidade de fórmulas apresentadas para o cálculo de inúmeros problemas na Educação Básica. Nesse sentido, Loureiro (2013) cita que os alunos indicam a falta de base no Ensino Fundamental e a necessidade de decorar fórmulas e regras como dificultadores para o aprendizado da Matemática.

Os professores da Educação Básica recorrentemente enfrentam o desafio de tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis e envolventes para os alunos. De acordo com Silva e Almeida (2019, p. 1) as “discussões em busca de novas metodologias que tornem o ensino da Matemática mais atraente e significativo têm sido incessantes”.

A fórmula de Simpson surge no cálculo de volumes como uma estratégia unificadora, capaz de despertar o interesse dos estudantes e transformar essa possibilidade em mais uma ferramenta adequada para o processo de ensino e aprendizagem. A necessidade de visualizar e interpretar a variação de figuras planas criadas pelo uso de seção média em sólidos e suas relações ou não com as bases existentes, faz com que o uso da fórmula de Simpson seja uma abordagem mais analítica e sistemática. Diante disso, este trabalho buscou responder à seguinte indagação: quais as contribuições advindas do uso da fórmula de Simpson para a compreensão e o ensino do cálculo do volume de sólidos geométricos por estudantes do 3º ano do Ensino Médio?

Com intuito de responder a indagação supracitada, esse estudo tem como objetivo geral investigar o uso da fórmula de Simpson como uma possibilidade de ensino para o cálculo de volume de sólidos geométricos, em turmas do 3º ano do

Ensino Médio. Para atingir esse objetivo, adotou-se os seguintes objetivos específicos: (1) compreender a construção teórica e as aplicações da fórmula de Simpson, (2) desenvolver e aplicar uma sequência didática que integre essa fórmula ao ensino de volumes, (3) analisar o desempenho e a receptividade dos alunos em relação a fórmula proposta e (4) identificar possíveis desafios e benefícios da utilização da fórmula de Simpson com estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos principais. Inicialmente a Seção 2 discute o ensino da Geometria Espacial no âmbito da Educação Básica, destacando sua importância para a formação cognitiva dos estudantes e para a compreensão de conceitos relacionados ao espaço tridimensional. São abordados os principais desafios enfrentados no processo de ensino-aprendizagem, como as dificuldades de visualização e a ênfase na memorização de fórmulas, bem como diferentes metodologias de ensino que buscam tornar esse conteúdo mais acessível, significativo e contextualizado.

Na Seção 3, apresenta-se a fundamentação teórica e matemática que sustenta a proposta didática desenvolvida neste trabalho, com destaque para a fórmula prismoidal e a regra de Simpson. São discutidos seus aspectos históricos, conceituais e matemáticos, bem como exemplos de aplicações e registros em materiais acadêmicos e avaliações, com o objetivo de fornecer o embasamento necessário para sua utilização no ensino do cálculo de volumes de sólidos geométricos.

A Seção 4 descreve a metodologia adotada na investigação, caracterizada como uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação. São apresentados o contexto da pesquisa, os sujeitos participantes, a organização da sequência didática aplicada em sala de aula e os instrumentos utilizados para a coleta de dados, evidenciando o caráter interventivo e formativo do estudo.

Por fim, a Seção 5 apresenta a análise, os resultados e a discussão dos dados obtidos a partir da aplicação da sequência didática, da resolução dos problemas propostos e dos questionários aplicados aos estudantes. Nessa seção, são analisados o desempenho dos alunos e suas percepções acerca do uso da fórmula de Simpson, buscando compreender as contribuições e os limites dessa abordagem no ensino do cálculo de volumes no Ensino Médio.

2. O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Os conceitos da Geometria Espacial permeiam o dia a dia, manifestando-se em elementos como residências, edifícios, símbolos presentes em bandeiras, embalagens de produtos e até nas famosas pirâmides do Egito. O aprendizado dessa área do conhecimento é fundamental para o desenvolvimento cognitivo do estudante, pois, ao explorar formas tridimensionais, relações espaciais e padrões geométricos, ele fortalece capacidades essenciais. Entre elas, destacam-se a habilidade de visualização espacial, a competência para resolver problemas e o aprimoramento do raciocínio lógico. Sobre a relevância desse ensino, Pereira (2011, p.16) provoca algumas reflexões, quais sejam:

Por que ensinar Geometria? Qual a importância em aprender-se Geometria? Talvez a resposta mais imediata fosse: a Geometria está em toda parte, visto que lidamos em nosso dia a dia com ideias de paralelismo, de congruência, de semelhança, de medição, de simetria, de área, de volume e muitas outras (p. 16).

A geometria nasceu da observação do mundo e da necessidade prática de organizá-lo. Desde as primeiras civilizações, os seres humanos buscaram compreender as formas, medir espaços e dominar técnicas de construção, transformando necessidades cotidianas em conhecimento sistematizado. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998, p.127) observam que, mesmo em períodos pré-históricos, regras para medir comprimentos, superfícies e volumes eram utilizadas, e a simetria já se destacava como um princípio estético e estrutural em seus desenhos e artefatos.

Para Calabria (2013), esse saber geométrico não era puramente teórico, ele resolvia problemas imediatos. A demarcação de terras para agricultura, o cálculo de impostos sobre colheitas, a logística de armazenamento em celeiros e a ambição de erguer monumentos duradouros, como as pirâmides, dependiam diretamente de conceitos geométricos.

Os estudos voltados a geometria desde os primórdios das civilizações humanas construíram e desenvolveram contribuições significativas na história. Esses conhecimentos foram incorporados à BNCC, cujo objetivo é desenvolver aprendizagens essenciais ao longo de etapas e modalidades da Educação Básica.

No ambiente escolar, a geometria assume um papel duplo e desafiador. Ela

exige que o aluno transite entre a abstração dos conceitos e sua materialização no mundo concreto. Essa dinâmica é fundamental para desenvolver um pensamento não apenas lógico, mas também crítico e analítico. Martins e Andrade (2011) destacam a geometria espacial como área de especial relevância prática, cujas aplicações oferecem possibilidades de desenvolvimento de competências no âmbito social e profissional.

O trabalho com construções geométricas, iniciado ainda no Ensino Fundamental, é a base para desenvolver a intuição espacial e o raciocínio dedutivo. Rogenski e Pedroso (2009) argumentam que essa prática é indispensável para a compreensão de tópicos avançados do Ensino Médio, como trigonometria e geometria analítica. Um ponto crucial levantado por estes autores é que a geometria espacial pode servir como uma ponte cognitiva, o que fornece significado concreto a conteúdos algébricos que, muitas vezes, são percebidos pelos alunos como excessivamente abstratos.

A geometria espacial, em uma de suas características fundamentais, coloca os estudantes diante do desafio de pensarem de forma abstrata e aplicarem conceitos matemáticos em situações do mundo real, dessa forma, desenvolve o aprimoramento do pensamento crítico e analítico. Para Martins e Andrade (2011, p.2) “a geometria espacial possibilita uma série de aplicações no cotidiano dos alunos além de desenvolver habilidades que lhe são exigidas no cotidiano social e profissional”.

A participação dos estudantes na construção da aprendizagem matemática ligada ao estudo da geometria espacial é de fundamental importância. Nesse sentido, de acordo com Costa e Esteves (2023, p.27) “a Geometria Espacial, por exemplo, está inserida em nosso cotidiano, mas, muitas vezes, não é percebida pelos estudantes por variados fatores”. Dentre estes, tem-se

processo intrínseco da construção axiomática da Geometria que dificulta a compreensão por parte dos alunos, outros fatores colaboram para essa visão de complexidade do estudo da geometria, como: forma de organização dos conteúdos nos livros didáticos, falhas no processo de formação dos professores sobre a temática, metodologias que favorecem apenas exposição oral e baixo uso de recursos tecnológicos (Costa; Esteves, 2023, p.25).

O estudo da geometria, apresenta-se proveitoso para que diferentes níveis sucessíveis de abstração possam ser desenvolvidos e alcançados. Deste modo, Pavanello (2012) pontua que o aprendizado em geometria se desenvolve por meio de

níveis progressivos de abstração. Inicialmente, o aluno identifica figuras geométricas de forma global, para depois começar a distinguir suas propriedades específicas. Em um estágio mais avançado, passa a estabelecer relações entre essas figuras e suas propriedades, organizando sequências lógicas em que cada afirmação depende da anterior. Esse processo finaliza um patamar de abstração no qual o estudante consegue trabalhar com os objetos e relações de forma puramente conceitual. Dessa forma, o percurso de aprendizagem evolui de um pensamento focalizado em objetos para um pensamento centrado em relações cada vez mais abstratas.

Por fim, fica evidente a necessidade do ensino da Geometria Espacial, sua importância perante o desenvolvimento das civilizações antigas e sua relação com as sociedades atuais. No entanto, sua aplicação em sala de aula gera desafios no ensino-aprendizagem, como os abordados na próxima subseção.

2.1 Desafios no Ensino da Geometria Espacial.

O ensino da Geometria Espacial no Ensino Médio enfrenta desafios profundos. Nesta etapa, o currículo introduz e exige o domínio de cálculos de área e volume de sólidos mais sofisticados, como pirâmides, cones e esferas.

Essa dificuldade de aprendizagem não é nova e já foram abordados no trabalho de Rogenski e Pedroso (2009). Os autores identificaram que a raiz do problema está na notória limitação dos alunos em visualizar e representar figuras tridimensionais, uma deficiência agravada pela fragilidade na compreensão dos conceitos geométricos fundamentais.

As fragilidades na interpretação de características de figuras planas e sólidos geométricos inviabilizam um desenvolvimento pleno e adequado da aprendizagem. Settimy e Bairral (2020) acrescentam que a visualização de sólidos geométricos é considerada uma habilidade importante do pensamento matemático, é um processo individual que não é inato e, portanto, precisa ser ensinado.

No ensino da Geometria Espacial, a adoção do ensino tradicional se prende a didática do uso incessante de diversas fórmulas voltadas ao cálculo de volumes, aulas muitas vezes auxiliadas apenas por livros que, em muitas ocasiões, não associam os problemas propostos a realidade do aluno. Conforme demonstrado no estudo de Soares (2019, p.28) “as dúvidas apresentadas pelos alunos no decorrer das aulas foram na ausência da distinção das fórmulas. Os alunos só conseguiam desenvolver

os cálculos quando o pesquisador mostrava qual fórmula utilizar”.

A distinção entre diversas fórmulas relacionada com um número elevado de sólidos geométricos, sejam prismas, pirâmides, troncos de pirâmides ou corpos redondos, dificulta a interpretação por parte dos estudantes. Na análise de um de seus problemas, Soares (2019, p.38) pontua que “a dificuldade na distinção das fórmulas foi em decorrência a falta de organização nas anotações do estudante, pois as fórmulas estavam escritas no caderno”.

A falta de organização é apenas um dos pontos, diversos estudantes possuem uma grave dificuldade na compreensão de conceitos básicos da matemática, isso se acentua com a necessidade de incorporar diversas fórmulas para um único conteúdo como o caso do cálculo de volumes. De acordo com a análise realizada por Soares (2019), as maiores dificuldades dos alunos no estudo de cálculo de volume e área estiveram relacionadas à falta de organização durante o desenvolvimento dos procedimentos, em que muitos estudantes se confundiram na escolha das fórmulas adequadas, na identificação correta dos valores e na substituição desses dados, o que comprometia o resultado dos cálculos.

Esses déficits de aprendizagem acabam por se perpetuar no cálculo de área e volume de sólidos geométricos. Para Rogenski e Pedroso (2009, p.5), quando os estudantes se deparam com a resolução dessas atividades

[...] realizam aqueles de aplicação direta e apresentam certa dificuldade em situações mais complexas, como no entendimento da sistematização. Nesse caso acompanham o raciocínio utilizado na realização das atividades, porém aplicá-lo em outra situação torna-se complicado (Rogenski e Pedroso, 2009, p.5).

Essas dificuldades parecem derivar de uma dupla separação: de um lado, a pouca articulação entre a geometria e outros eixos da matemática, como a álgebra e a aritmética, o que limita a compreensão de padrões e a aplicação de ferramentas mais gerais, e do outro, da fraca vinculação dos conceitos geométricos com situações reais e contextos significativos para o aluno, o que esvazia seu sentido prático e intuitivo.

Sem essas duas dimensões de significado, a teórico-relacional e a contextual, o ensino da geometria tende de fato, a reduzir-se a ilustrações desconectadas e exemplos repetitivos, nos quais propriedades e conceitos são memorizados, mas não verdadeiramente compreendidos.

Dificuldades na aprendizagem como as mencionadas anteriormente, prejudicam o desenvolvimento interpretativo do aluno quando este se depara com problemas que envolvem cálculos de áreas e volumes. Nesse sentido, Rogenski e Pedroso (2009) relatam que os alunos realizam essas atividades de maneira mecânica, constroem barreiras na resolução de problemas que exigem interpretação e não visualizam sua aplicação em novas situações propostas.

Em um estudo recente de Costa e Esteves (2023), apontou-se que muitos alunos ainda possuem dificuldades inerentes a simples percepção de figuras, essa singela dificuldade desencadeia uma série de problemas futuros relacionados ao cálculo de áreas e volume. Em suas análises com uma aluna, Costa e Esteves (2023, p.81) pontuam que

Mesmo no pós-teste sendo a mesma questão apresentada no pré-teste, ainda não conseguiu responder corretamente à questão, no entanto é possível que tivesse alguma ideia da resposta correta, haja vista que a projeção frontal do copo de café é um trapézio, mas mostra a fragilidade na percepção de diferenciar objetos planos de espaciais.

Esses dados alinhados, possibilitam uma interpretação mais detalhada, com informações sólidas, que facilitam o estudo comparativo em diferentes meios de análise e público, na construção de pontes e no desenvolvimento da educação matemática.

Segundo Pavanello (2012), as dificuldades de compreensão e utilização de representações geométricas persistem mesmo após a Educação Básica, refletindo uma fragilidade na formação de profissionais da área. Quando não superadas, tais deficiências perpetuam um ensino de baixa qualidade, afetando ainda mais a aprendizagem dos alunos. Essa realidade é reforçada pela prioridade dada ao ensino da álgebra em detrimento da geometria, especialmente a geometria espacial, limitando o desenvolvimento de diferentes tipos de aprendizagem.

Tais análises coincidem com as escolhas feitas por professores em sala de aula, quando dão ênfase ao ensino da álgebra e deixam de lado o ensino da geometria, especialmente a geometria espacial. Para Pavanello (2012, p.3)

[...] a prioridade dada, ainda recentemente, à álgebra, tanto na pesquisa como no ensino da matemática, acabou por desenvolver somente um tipo de pensamento. É necessário, portanto, restabelecer o equilíbrio, retomando-se o ensino da geometria (Pavanello, 2012, p.3).

Diante das fragilidades e desafios expostos, a busca por metodologias de ensino que procuram construir uma aprendizagem de qualidade diante do ensino da Geometria Espacial se revela uma consequência natural e necessária. A subsecção seguinte apresenta metodologias que visam superar as limitações discutidas anteriormente.

2.2 Metodologias de ensino para geometria espacial

O ensino de Geometria Espacial tem se renovado por meio de abordagens que vão desde a utilização de materiais concretos e modelos físicos até a integração de ferramentas digitais e estratégias baseadas em resolução de problemas. Essa variedade metodológica inclui, por exemplo, o trabalho com objetos manipuláveis, visualização e construções geométricas como destacado por Rogenski e Pedroso (2009), o uso de *softwares* de visualização tridimensional, explorado por Settimy e Bairral (2020), e a resolução de problemas de cunho prático, abordada por Martins e Andrade (2011). Tais caminhos mostram que a combinação de diferentes recursos, sejam eles tangíveis, tecnológicos ou situados em contextos reais, podem tornar o aprendizado mais acessível e significativo.

Com base em estudos desenvolvidos nas últimas décadas o ensino da geometria espacial tem sido revitalizado por metodologias ativas. Tais práticas colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, pois utilizam uma variedade de recursos, como materiais manipulativos e ferramentas tecnológicas para construir uma compreensão mais duradoura dos objetos espaciais.

Dessa maneira, o uso de materiais concretos e manipulativos vem demonstrando que o aluno quando diante de algo palpável e visual, consegue obter maior discernimento perante o conteúdo abordado e, portando, melhor aprendizagem. De acordo com Rogenski e Pedroso (2009), o uso de materiais concretos e representações visuais pelo aluno, auxiliam a construção de uma imagem mental do objeto, o que facilita a elaboração de esboços e modelos manuseáveis. Rogenski e Pedroso (2009, p.4) ainda acrescentam que “a exploração de diferentes materiais manuseáveis aguça a curiosidade e oportuniza o desenvolvimento da percepção sensorial”.

Partindo de situações do cotidiano, Rogenski e Pedroso (2009) utilizam informações presentes na natureza, nas artes e em outras disciplinas, para

desenvolver uma proposta de ensino que, com o auxílio de mídias tecnológicas, facilitou a visualização e a construção de conceitos geométricos. Os mesmos constataram que a aplicação dessa abordagem não apenas aumentou o interesse e a compreensão dos alunos em relação a conteúdos antes considerados difíceis, mas também permitiu que percebessem a matemática em seu cotidiano e desenvolvessem criatividade e criticidade, características fundamentais para intervir em sua realidade.

Martins e Andrade (2011) utilizaram em seu estudo a metodologia direcionada a resolução de problemas, variante didática no ensino da matemática. Essa metodologia ligada a geometria espacial possibilita que estudantes visualizem problemas ligados a seu cotidiano construindo e reforçando uma aprendizagem significativa.

É importante compreender que a matemática deve ser ensinada por meio da Resolução de Problemas. Quer dizer, tarefas ou atividades baseadas em resolução de problemas são o veículo pelo qual se pode desenvolver o currículo desejado. A aprendizagem é um resultado do processo de Resolução de Problemas (Van de Walle, 2009, p 58).

Ressalta-se que essa metodologia reflete a prática didática utilizada por décadas, no entanto, para um resultado satisfatório de aprendizagem é necessário que o professor ajuste suas atividades de modo que o estudante esteja interessado e participativo em todas as fases da explanação e resolução. De acordo com Martins e Andrade (2011), o ensino de geometria espacial deve propor situações reais que incentivem os alunos a construir seus conhecimentos por meio de materiais manipuláveis, substituindo exercícios prontos por desafios que promovam a participação ativa e o desenvolvimento do raciocínio.

No contexto das Tecnologias da Informação e Comunicação, o uso de *softwares* como o *GeoGebra* tem se tornado frequente em estudos realizados sobre novas práticas de ensino na geometria espacial. Em sua pesquisa, Settimy e Bairral (2020) investigaram como diferentes recursos didáticos, incluindo o *software GeoGebra*, contribuem para o desenvolvimento da capacidade de visualização em alunos do 6º ano do ensino fundamental. O estudo foi realizado em uma escola pública e envolveu o uso de materiais variados, como planificações, sólidos em acrílico, atividades com papel e lápis, além de um vídeo produzido no *GeoGebra*, com o objetivo de aprimorar o ensino de geometria espacial.

O estudo realizado por Settimy e Bairral (2020), buscou compreender as

dificuldades apresentadas por esses estudantes por meio de uma intervenção pedagógica. Constatou-se a necessidade de mais explorações voltadas ao raciocínio visual na matemática, sua percepção quanto as formas geométricas e suas ligações com os sólidos.

O estudo de Costa e Esteves (2023) demonstram que o uso de materiais concretos e do *software GeoGebra* potencializou a compreensão dos alunos em comparação com o método tradicional. Essa conclusão baseia-se na aplicação de pré e pós-testes, complementados por relatos dos estudantes.

Ao desenvolver sua pesquisa, Costa e Esteves (2023) conduziram um estudo por meio do uso da construção de sólidos geométricos e a utilização do *software GeoGebra* interligado com o uso do livro didático e sua explanação oral, buscou compreender se a utilização de diferentes metodologias de ensino proporciona as mesmas condições de ensino-aprendizagem.

A interface 3D do *GeoGebra*, aplicada na construção e visualização de sólidos geométricos, é apontada por Carvalho (2022) como um recurso didático que facilita o aprendizado do cálculo de volume. O autor argumenta que o *software* funciona como um mecanismo facilitador no processo de ensino, o que permite uma melhor visualização e representação de sólidos, com isso auxilia na compreensão de fundamentos teóricos já consolidados no Ensino Médio.

Em meio a uma educação tão desafiadora, faz-se necessário reinventar-se, buscar caminhos que auxiliem e facilitem o desenvolvimento da aprendizagem de matemática. Sendo assim, dentro do contexto do ensino de Geometria Espacial, a adoção da Fórmula de Simpson como estratégia unificadora para o cálculo de volumes no 3º ano do Ensino Médio visa reduzir a carga cognitiva associada à memorização de múltiplas fórmulas específicas. Essa proposta não substitui conceitos estruturantes, como o Princípio de Cavalieri ou as características dos diferentes sólidos geométricos, mas se apoia neles para oferecer um procedimento único e coerente em uma etapa escolar na qual tais fundamentos já se presumem consolidados. Assim, o foco desloca-se do acúmulo de regras para a aplicação consciente de um método geral.

3. A FÓRMULA PRISMOIDAL E A FÓRMULA DE SIMPSON

3.1 Definição de prismatoíde e fórmula prismoidal

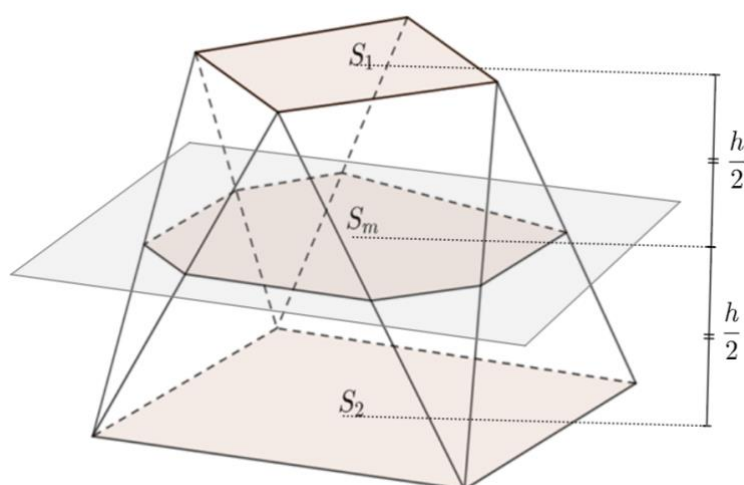
Um prismatoíde é um poliedro cujos vértices estão distribuídos em dois planos paralelos (Eves, 2011). As faces situadas nesses planos são as bases do sólido, enquanto as laterais podem ser triângulos, trapézios ou paralelogramos. A distância perpendicular entre os planos define sua altura. Quando as bases possuem o mesmo número de lados e as faces laterais são trapézios ou paralelogramos, o sólido recebe o nome de prismoíde. Caso essas bases sejam congruentes, o prismoíde se caracteriza como um prisma.

Para calcular o volume (V) de tal sólido pode-se utilizar a fórmula 1, conhecida como fórmula prismoidal, apresentada a seguir:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_m + S_2). \quad (1)$$

Na fórmula, h representa a altura, S_1 e S_2 representam as áreas das bases e S_m a área da seção média do prismatoíde, a qual corresponde para fins de aplicação da fórmula prismoidal, ao polígono obtido pela interseção do prismatoíde com um plano paralelo às bases, situado exatamente no ponto médio da altura do sólido. Em outras palavras, se o prismatoíde possui altura h , a seção média é tomada no plano paralelo às bases localizado a $h/2$, conforme ilustrado na figura 1:

Figura 1: prismatoíde com S_1 , S_2 e S_m em destaque.



Fonte: Elaboração própria.

3.2 Origem histórica da fórmula prismoidal

Entre os diversos textos atribuídos a Herão de Alexandria³, *A Métrica* ocupa posição central por reunir métodos sistemáticos para o cálculo de áreas e volumes de uma ampla variedade de figuras planas e sólidas. No Livro I da referida obra, a qual se divide em três livros, conforme Eves (2011), aborda-se da área de polígonos, círculos e seus segmentos, elipses, segmentos parabólicos e da superfície de cilindros, cones esferas e zonas esféricas. Em tal livro Herão apresenta a dedução da famosa fórmula que leva seu nome, a qual é utilizada para calcular a área de triângulo em função das medidas dos três lados.

Ainda de acordo com Eves (2011), o Livro II ocupa-se da mensuração de volumes de cones, cilindros, prismas, pirâmides, troncos de cones e de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros, os cinco sólidos regulares e alguns prismatoides. Para esse último tipo de sólidos, no referido livro, Herão apresenta como expressão para o volume de um prismatoide com bases retangulares orientadas semelhantemente cujos pares de dimensões a, b e c, d , a expressão

$$V = \left[\frac{(a+c)(b+d)}{4} + \frac{(a-c)(b-d)}{12} \right].$$

Sobre a referida fórmula, Eves (2011) solicita que o leitor de sua obra mostre que o resultado obtido para o referido volume do sólido é equivalente àquele dado pela expressão destacada em (1):

$$V = \frac{h(U + L + 4M)}{6}.$$

Em que U, L e M são, respectivamente, as áreas da base superior, da base inferior e da seção média, com h representando a medida da altura do sólido.

Um caso particular da fórmula Prismoidal, remete-se inicialmente e indiretamente a um papiro datado no Egito por volta de 1890 a.E.C⁴. Brown (2022) apresenta que esse papiro possui dois nomes: o primeiro referente ao do possível

³ De acordo com Eves (2011), “Ha muita controversia a respeito da época exata em que ele viveu, havendo estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C. Mais recentemente tem sido colocado na segunda metade do século I d.C.” (p. 205).

⁴ Significado: “antes da Era Comum”. Essa utilização no lugar de a.C. (“antes de Cristo”) tem o intuito de neutralizar conotações religiosas.

comprador que foi Golenischev (papiro de Golenischev), o qual o levou para Moscou em 1893 e, o segundo nome, remete-se ao local onde se encontra até os dias atuais, no caso, Moscou (papiro de Moscou).

Segundo Brown (2022), o papiro é constituído de 25 problemas matemáticos com suas devidas soluções, nos qual, o número 14, apresenta um problema sobre o volume de um tronco de pirâmide. O problema se resume ao cálculo de volume de uma pirâmide de base quadrada, cuja aresta da base maior mede 4, a aresta da base menor 2 e altura 6.

Em sua solução, o papiro apresenta os procedimentos necessários para sua resolução, como apresentado a seguir: “Você deve elevar ao quadrado a base⁵, multiplicar a base pelo topo, elevar ao quadrado o topo e adicionar tudo isso para resultar em 28. Então você deve multiplicar isso por um terço da altura para dar a resposta certa, 56”.

Ao escrever esses procedimentos por meio de uma fórmula, obtém-se:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2). \quad (2)$$

De acordo com Eves (2011, p. 75), “Nenhum outro exemplo inquestionavelmente genuíno dessa fórmula foi encontrado na matemática oriental antiga, e muitas conjecturas foram aventadas a respeito de como ela teria sido descoberta”. Ao se realizar um tratamento puramente algébrico para a fórmula (2) acima, pode-se encontrar a expressão equivalente em termos de fórmula prismoidal:

$$V = \frac{h}{6}(2a^2 + 2ab + 2b^2),$$

$$V = \frac{h}{6}[a^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + b^2].$$

Considera-se que $S_m = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, tem-se a expressão da fórmula prismoidal:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_m + S_2).$$

É importante ressaltar que, ao que parece, nem Herão no Livro II de A métrica e nem os problemas encontrados no que se denomina papiro de Moscou estavam buscando uma fórmula geral para o cálculo de volume de prismatoides, eram casos isolados, uma vez que os sólidos abordados em tais trabalhos são casos particulares

⁵ Observação: considera-se “base igual” como “aresta da base”; “topo igual” como “aresta da base superior”.

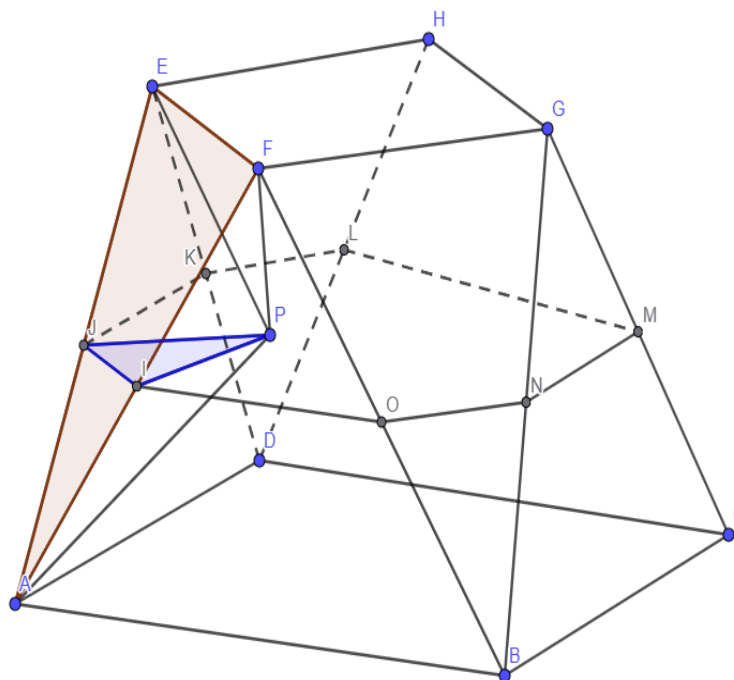
de prismatoides. A subseção (3.3) ilustra a obtenção da referida fórmula para o cálculo do seu volume.

3.3 Demonstração da fórmula prismoidal

Pode-se realizar a dedução da fórmula (1) de forma similar à realizada por Wagner (1998): toma-se um ponto P na seção equidistante das bases (S_m), com isso o poliedro (figura 2) pode ser decomposto nos seguintes sólidos

- Duas pirâmides de vértice P, sendo uma de base ABCD e outra de base EFGH;
- Um tetraedro de base AEF e vértice P (em destaque na figura 2);
- Um tetraedro de base ABF e vértice P;
- Um tetraedro de base BFG e vértice P;
- Um tetraedro de base BCG e vértice P;
- Uma pirâmide de base CDGH e vértice P;
- Um tetraedro de base DEH e vértice P.

Figura 2: prismatoide com destaque para o tetraedro AEFP.



Fonte: Elaboração própria.

O volume V do prismatoide será dado pela soma dos sólidos no qual foi decomposto. O volume da pirâmide de vértice P e base $ABCD$ é dado pela expressão $\frac{1}{3}S_1 \frac{h}{2} = \frac{1}{6}S_1 h$ e, analogamente, o volume da pirâmide de vértice P e base $EFGH$ por $\frac{1}{3}S_2 \frac{h}{2} = \frac{1}{6}S_2 h$.

Para o cálculo do volume do tetraedro de base AEF e vértice P ⁶, observa-se que o seu volume será dado por $\frac{1}{3}S(AEF)d$, em que d é a distância do ponto P ao plano que contém o triângulo AEF . Como J e I são pontos médios de AE e AF , respectivamente, é válida a seguinte relação entre as seguintes áreas: $S(AEF) = 4S(AIJ)$. Desse modo, pode-se reescrever a expressão para o volume de respectivo tetraedro como segue: $\frac{1}{3}S(AEF)d = \frac{1}{3}4S(AIJ)d$. No entanto $\frac{1}{3}S(AIJ)d$ representa o volume do tetraedro $AIJP$, o qual também pode ser reescrito como $\frac{1}{3}S(IJP) \frac{h}{2}$. Logo, o volume do tetraedro $AEFP$ será dado por: $\frac{4h}{6}S(IJP)$.

Os volumes dos outros sólidos não expressos anteriormente serão dados pela seguinte soma: $\frac{4h}{6}[S(IOP) + S(ONP) + S(MNP) + S(PMQ) + S(PQL) + S(PLK) + S(PJK)]$. Calculando o somatório do volume de todos os sólidos, chega-se no volume V : $V = \frac{1}{6}S_1 h + \frac{1}{6}S_2 h + \frac{4h}{6}[S(IJP) + S(IOP) + S(ONP) + S(MNP) + S(PMQ) + S(PQL) + S(PLK) + S(PJK)] = \frac{1}{6}S_1 h + \frac{1}{6}S_2 h + \frac{4h}{6}S_m = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_m + S_2)$.

Esse mesmo procedimento pode ser aplicado para outros prismatoides e o resultado será o mesmo. Nesse caso, utilizou-se do sólido da figura 2 apenas para facilitar a visualização. Embora a fórmula (1) tenha sido desenvolvida para o cálculo de volume de prismatoides, observa-se sua aplicação para o cálculo do volume de outros sólidos geométricos. Eves (2011), como forma de exercício para o leitor de sua obra, solicita que este mostre que a referida fórmula pode ser aplicada para prismatoides generalizados⁷ (inclusive por meio do cálculo integral), esfera, elipsoide e cunha cilíndrica. A possibilidade de empregar essa fórmula em sólidos distintos do prismatoide é conhecida como Regra de Simpson, conforme será detalhado nas subseções seguintes.

⁶ O cálculo do volume dos demais sólidos restantes é realizado de forma similar, sendo que, no caso da pirâmide de base $CDGH$ e vértice P , pode-se dividir o trapézio $CDGH$ em dois triângulos (CHG e CDH). Nesse caso, seja Q o ponto médio de CH .

⁷ Um prismatoide generalizado é um poliedro cujos vértices pertencem a um número finito de planos paralelos.

3.4 Thomas Simpson

Thomas Simpson (1710-1761) nasceu em Nuneaton, pequena cidade da Inglaterra. Filho de um tecelão, desenvolveu interesse nos estudos sobre algumas áreas da matemática, como: aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Simpson mudou-se para Londres entre os anos de 1735 e 1736 no qual trabalhou como tecelão e matemático. Blanco (2013, p.40) acrescenta que nesse período Simpson

Em sintonia com as correntes econômicas da época, a navegação e o comércio eram vistos como meios de progresso nacional e, portanto, impulsionaram o interesse pelo estudo da matemática. Uma prova evidente da crescente procura pela matemática pode ser encontrada na quantidade de periódicos matemáticos populares publicados na Grã-Bretanha do século XVIII, entre os quais O Diário das Senhoras se destacou (1704-1870). Os primeiros escritos matemáticos de Simpson foram publicados em O Diário das Senhoras, do qual se tornou editor em 1754. Ele também contribuiu para a miscelânea periódica A Revista do Cavalheiro em 1736-1738 e aos periódicos matemáticos O Diário do Cavalheiro em 1746 e o Diversos Curiosa Matemática em 1745-1746 (Blanco, 2013, p.40).

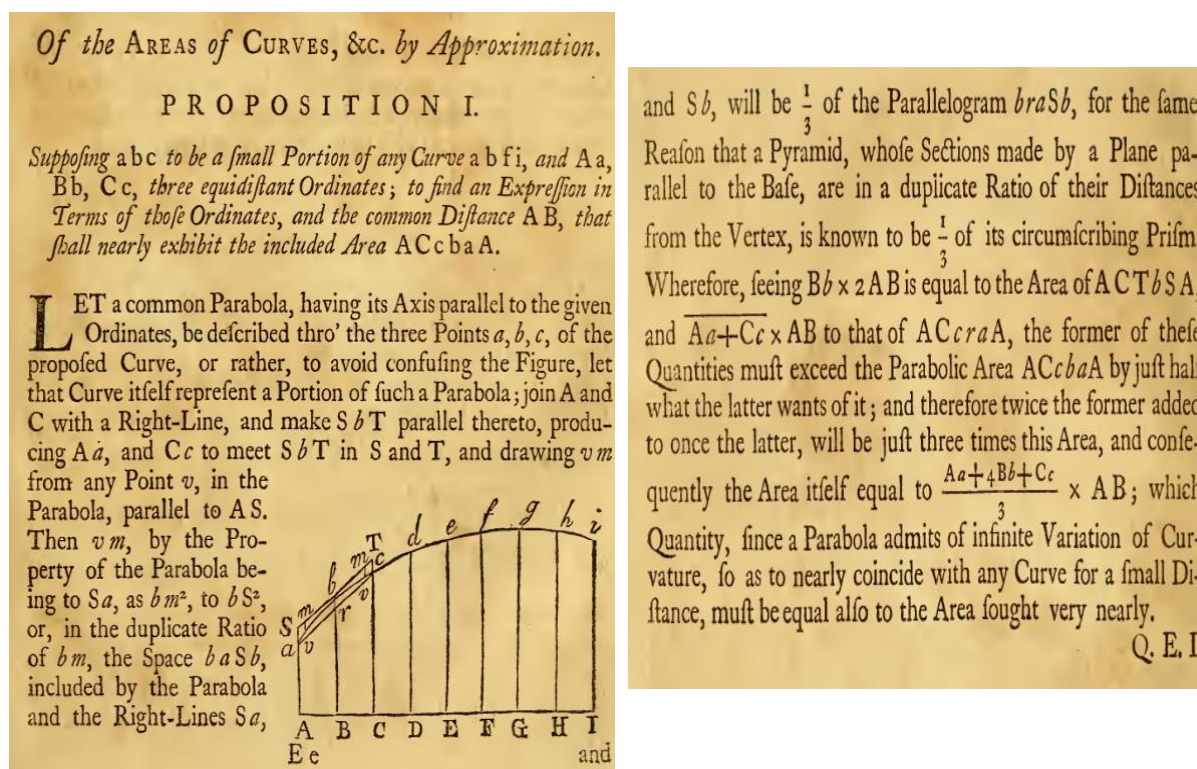
Em sua trajetória, Thomas Simpson se debruçou principalmente nas produções científicas. De acordo com Blanco (2013), suas obras podem ser divididas em dois grupos, o primeiro voltado a tratados e livros sobre alguns assuntos como: álgebra, geometria, trigonometria, além de assuntos relativamente novos, como o método das fluxões e de probabilidade. A maioria desses trabalhos estava relacionada à “matemática pura”, exceto um único trabalho sobre anuidades e seguros de vida, construído a partir de observações de 10 anos nas contas de mortalidade na cidade de Londres.

Em seu segundo grupo, Blanco (2013) cita que Simpson voltou-se as produções científicas, como artigos e ensaios sobre outras áreas de conhecimento, como: astronomia, artilharia, mecânica, além de temas analíticos como: somatório de séries, aproximação de áreas de curvas por meio de ordenadas equidistantes ou aproximação da solução de todos os tipos de equações algébricas por meio do método das fluxões. Seu método de integração numérica, consiste em agrupar três pontos consecutivos de uma curva e substituir o arco da curva que passa por esses três pontos por um arco de parábolas para calcular a área sobre a curva, como abordado na subseção seguinte.

3.5 A regra de Simpson

A Regra de Simpson foi publicada inicialmente na obra intitulada “Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix’d Mathematicks⁸” no ano de 1743. Na parte do texto denominado “Of the Areas of Curves, &c. by Approximation⁹”, Simpson apresenta como teorema (figura 3), o que atualmente conhecemos como um método para obtenção de aproximação para integrais definidas e possui relação algébrica com a fórmula prismoidal utilizada no cálculo do volume de prismatóides.

Figura 3: regra de Simpson em sua obra.



Fonte: Simpson (1743).

Como a área da seção transversal dos prismatóides varia segundo um polinômio de grau menor ou igual a três, a aplicação de tal regra conduz exatamente à fórmula prismoidal. O enunciado da regra de Simpson, de forma contemporânea, pode ser descrito como apresentado por Malvic *et al* (2014, p.4):

⁸ “Ensaio sobre diversos assuntos curiosos e úteis em matemática especulativa e mista” (tradução do próprio autor).

⁹ “Das Áreas das Curvas etc. Por Aproximação” (tradução do próprio autor).

Teorema: Se $f(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a três¹⁰, então

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (3)$$

Onde $f(a)$ representa o valor do integrando quando $x = a$, $f(b)$ quando $x = b$ e $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ quando x equivale ao ponto médio do intervalo $[a, b]$.

A relação entre a fórmula prismoidal e a regra de Simpson decorre do fato de que, ao analisar o volume de um prismatóide, a grandeza geométrica fundamental que varia ao longo da altura é a área da seção transversal $K(t)$. Para prismatóides, essa função é sempre um polinômio de grau menor ou igual a três, uma vez que a interseção do sólido com planos paralelos às bases produz polígonos cujas medidas variam de modo cúbico em relação à altura. Assim, o volume do sólido pode ser expresso pela integral definida

$$V = \int_0^h K(t)dt.$$

Como $K(t)$ é cúbica (ou de grau inferior), aplica-se exatamente o teorema enunciado anteriormente, segundo o qual a regra de Simpson fornece o valor exato da integral para qualquer polinômio de grau até três. Dessa forma, ao integrar $K(t)$ pela regra mencionada, obtém-se diretamente a fórmula prismoidal clássica.

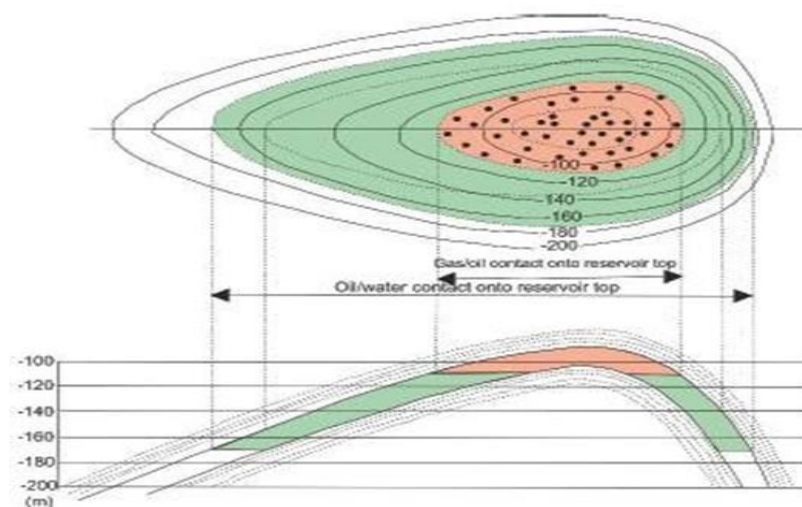
3.6 Aplicações da fórmula¹¹ de Simpson

A fórmula de Simpson pode ser utilizada para determinar desde sólidos conhecidos, como os apresentados geralmente na Educação Básica, bem como aqueles de geometria mais complexa, desde que não apresentem quebras irregulares repentinas e extensas (por exemplo, figura 4). Segundo Malvic *et al* (2014, p.6) no caso de sólidos irregulares, torna-se ideal a divisão do sólido em pequenas porções que se adequem as definições da fórmula, com um bom grau de precisão em seus resultados.

¹⁰ Supondo que a derivada de quarta ordem ($f^{(iv)}$) é contínua em $[a, b]$, pode-se mostrar que o resto dessa regra de Simpson satisfaz a expressão: $R_s = \frac{-h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$, com $\xi \in (a, b)$. Esse fato mostra que o resto para polinômios com grau menor ou igual a três será nulo, pois $f^{(iv)}(\xi) = 0$. Com isso, estabelece-se a igualdade para esses casos.

¹¹ Quando no texto houve a aplicação da regra de Simpson para o cálculo de volumes, tratou-se como fórmula de Simpson. A expressão Regra de Simpson foi empregada em contextos mais gerais do Cálculo Numérico.

Figura 4: Braquianticlina irregular com diferentes quedas nas margens.



Fonte: Malvić *et al* (2014).

A fórmula é utilizada principalmente em áreas da engenharia, como no cálculo de terraplanagem, volume de aterros na construção de estradas, reservatórios de hidrocarbonetos, anatomia dos dentes etc. Sua aplicação na construção de estradas e terraplanagem é destaca pelo estudo de Sayl (2009), ao qual mostra que maioria dos sólidos de terraplenagem obtidos a partir de dados de seções transversais se enquadram na classificação de prismóide. Para exemplificar Sayl (2009, p.5) mostrou que

Para utilizar a fórmula prismoidal é necessário conhecer a área AM do trecho intermediário entre as estações de $A1$ e $A2$. Isto é encontrado pelo cálculo usual após a média das alturas e larguras das duas seções finais. Obviamente, a área intermediária não é a média das áreas finais, pois não haveria diferença entre os resultados da fórmula da área final e da fórmula prismoidal (Sayl, 2009, p.5).

Quando se trata do cálculo de volume de um reservatório de hidrocarbonetos cuja estrutura está próxima de um anticlinal regular, o estudo de Malvic *et al* (2014) demonstra que a fórmula de Simpson é regularmente aplicada no cálculo destes problemas. Os resultados obtidos se tornam menos eficientes no caso de anticlinal muito irregular ou falhado, monoclinal dobrado e parte elevada de dobra reclinada, nestes casos é utilizado o cálculo simultâneo trapezoidal e Simpson.

Em estudos voltados a odontologia, em específico a anatomia dos dentes, a fórmula de Simpson auxilia no cálculo de volume e de suas alterações volumétricas. Conforme demonstrado no estudo de Knapp (1983, p.300)

O método de análise deste sólido foi aproximá-lo, seccionando-o em numerosos prismatóides paralelos com bases quadriláteras e faces laterais trapezoidais. Essas seções eram perpendiculares ao centróide do sólido. O volume de cada um desses prismatóides foi calculado pela equação padrão: $V = 1/6h(B_1 + 4M + B_2)$ onde B_1 era a área da base inferior, M a área da seção média, B_2 a área de a base superior e h a altura ou espessura do prismatóide. Ao calcular o volume do sólido, duas aproximações necessárias foram encontradas: A primeira era que os caminhos formados pelos movimentos eram curvas regulares sem mudanças abruptas. Esta suposição foi verificada traçando os valores de uma amostra representativa das curvas na faixa de interesse. A segunda suposição era que a base de cada um dos prismatóides era paralela. Com movimento curvo caminhos isso não é totalmente preciso, mas usando pequenos incrementos de h , as mudanças geradas eram de valor mensurável apenas na quarta casa decimal (Knapp, 1983, p.300).

Com tantas aplicações, em diferentes campos de estudo, a fórmula de Simpson revela-se uma ferramenta matemática poderosa e versátil. Seu uso transcende os limites da matemática, estende-se a áreas como Física, Engenharia, Odontologia, entre outras.

3.7 Fórmula de Simpson na RPM e na Avaliação Nacional – PROFMAT

A aplicação da fórmula de Simpson (ou até mesmo a fórmula prismoidal) no Brasil ainda é limitada, com poucos estudos dedicados a essa área. Entretanto, é possível encontrar recursos digitais que abordam o tema, como um artigo na Revista do Professor de Matemática (RPM), edição de número 36 publicada no ano 1998. Além disso, dois problemas foram destacados em contextos acadêmicos: um na disciplina de Geometria (MA13) do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), e outro durante o exame de qualificação nacional no ano de 2012.

3.7.1 Revista Professor de Matemática – RPM

A fórmula de Simpson acaba surgindo em algumas situações como a descrita por Wagner (1998), o qual descreve que foi abordado em uma cerimônia de premiação por um professor de matemática, ao qual questiona como encontrar o volume de certo poliedro.

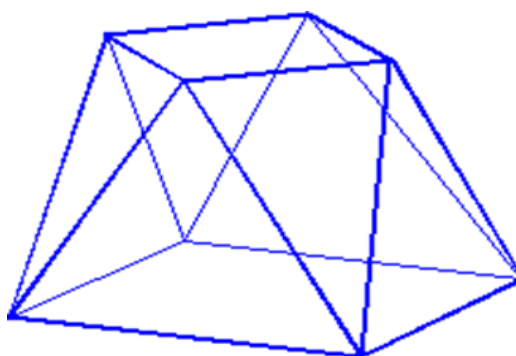
O problema é definido no trabalho do seguinte modo:

Um poliedro tem duas faces paralelas, que chamarei de bases. Essas bases são quadrados, mas os lados de uma não são paralelos aos lados da outra. Todas as outras faces, que chamarei de faces laterais, são triângulos. Conhecendo os lados das bases e a distância entre os planos das bases, é possível calcular o volume desse poliedro? (Wagner, 1998, p.1).

O Professor, diante da possível resposta do autor, questiona-o em mais dois pontos, sendo eles: “Se fizermos uma translação de uma das bases em um plano paralelo à outra, o volume se modifica? (...) Se uma das bases, mantendo-se em seu plano, girar em torno de seu centro, o volume se modifica?” (Wagner, 1998, p. 1).

O poliedro em questão é apresentado na figura 5.

Figura 5: poliedro do problema.



Fonte: Wagner (1998).

Observa-se que, em relação ao sólido da figura 5, suas bases são formadas por quadrados, além disso, estão em planos paralelos, mas que as arestas dos polígonos das bases não são respectivamente paralelas. Então surge a indagação posterior: como pode ser calculado o volume desse poliedro? Wagner (1998) descreve os procedimentos empregados para encontrar o resultado do cálculo do volume do sólido. Ao finalizar sua demonstração, ele esclarece que a fórmula usada para resolver esse problema foi concebida por Thomas Simpson.

3.7.2 Avaliação Nacional Geometria (MA13) – PROFMAT

Em buscas realizadas na memória de arquivos do PROFMAT, uma questão abordada em uma das avaliações ainda nacionais na disciplina de Geometria (MA13), apresentou um problema voltado ao cálculo de volume de um poliedro (prismatóide).

A questão mencionada está presente na segunda avaliação realizada no ano de 2012, cujo número de ordem da questão é a 5, como expressa a seguir:

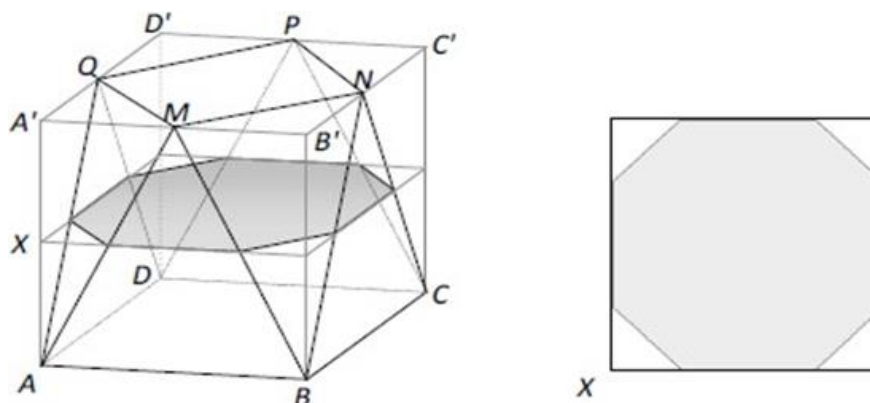
No cubo $ABCD A'B'C'D'$ de aresta a , os pontos M , N , P e Q são médios das arestas $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ e $A'D'$, respectivamente. Foram feitas as seções pelos planos AMQ , BNM , CPN e DPQ . Retirando-se os quatro tetraedros formados, resultou o poliedro P ilustrado na Figura 6. O poliedro P possui duas bases paralelas e faces laterais triangulares. Ele é um prismatóide.

a) Calcule o volume do poliedro P .

A questão acima mencionada traz em seu item (a) o cálculo de volume do sólido apresentado, aplicando-se métodos tradicionais de resolução, desenvolvidos na educação básica.

No item (b), o problema é definido como: calcule a área da seção média e calcule o volume de P usando a fórmula (1)

Figura 6: poliedro do problema.

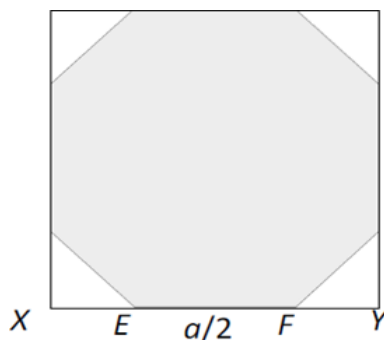


Fonte: 2ª Avaliação nacional (MA13) – 2012

Uma solução:

A seção média é obtida de um quadrado $XYZW$, congruente com $ABCD$ retirando-se quatro triângulos retângulos isósceles congruentes. O plano da seção média corta a aresta BB' do cubo em Y e corta as arestas MA e MB do poliedro P em E e F , respectivamente.

Figura 7: poliedro do problema.



Fonte: 2ª Avaliação nacional (MA13) – 2012

Note que $EF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, (já que a reta xy une pontos médios de lados dos triângulos AMB) e, conseqüentemente $XE = FY = \frac{a}{4}$. Assim, cada um dos pequenos triângulos retângulos tem área $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{32}$ e a área da seção média é $S_m = a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{32} = \frac{7a^2}{8}$.

Ao empregar a fórmula prismatóide:

$$V = \frac{a}{6} \left(a^2 + \frac{a^2}{2} + 4 \cdot \frac{7a^2}{8} \right) = \frac{a}{6} \left(a^2 + \frac{8a^2}{2} \right) = \frac{a}{6} (5a^2) = \frac{5a^3}{6}.$$

O que coincide com o resultado do item (a).

4. METODOLOGIA

Desenvolveu-se este estudo por meio de uma abordagem qualitativa de investigação. Tal opção se justifica pelo fato de que a pesquisa qualitativa, como apontado por Creswell (2007), permite ao investigador um mergulho profundo no fenômeno estudado, alcançando uma compreensão detalhada. Além disso, diante do problema que se pretende investigar, esta perspectiva mostra-se mais adequada, pois, conforme Bogdan e Bikken (1994), tem como característica fundamental o pesquisador atuar como instrumento principal, coletando dados diretamente no ambiente natural onde os fatos ocorrem.

Quanto ao tipo de investigação, optou-se pela pesquisa-ação. Esta escolha se deve à natureza do estudo, que envolve não apenas a observação, mas uma intervenção planejada na realidade. Fiorentini (2012, p. 78) esclarece que, nessa modalidade, "o participante da ação torna-se um pesquisador de sua própria prática, e o pesquisador, um participante que intervém nos rumos da ação, orientado pela pesquisa que realiza".

Ainda de acordo com Fiorentini (2012), a pesquisa-ação pode ser individual ou coletiva. Na perspectiva do trabalho em questão, foi individual, já que, exemplificativamente, pode-se configurar quando um professor desenvolve uma investigação sobre sua prática, ou seja, intervém intencionalmente e de forma planejada e, com isso, faz a coleta e a análise das informações.

Os sujeitos de pesquisa foram 101 alunos de classe média-baixa, com idades entre 16 e 18 anos de três turmas de 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Referência em Ensino Médio da cidade de Lagoa Grande-PE. Salienta-se que a escolha da turma foi definida por se tratar da última etapa do Ensino Básico, conseqüentemente os estudantes já vivenciaram as fórmulas tradicionais em anos anteriores de ensino, o que possibilita uma interpretação mais fidedigna das questões ao aplicar a sequência didática (Apêndice A).

Para Zabala (1998, p.18) sequência didática é definida como "Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Dessa forma, a sequência didática foi aplicada ao longo de três encontros, de 100 minutos cada, concentrados em uma única semana para evitar

interrupções. Essa organização teve como objetivo prevenir perdas no processo de ensino e aprendizagem.

No primeiro encontro, foi realizada uma revisão sistemática das fórmulas tradicionais abordadas na educação básica, como as relativas a prismas, pirâmides e corpos redondos. Recursos como projetor e folhas impressas foram utilizados, juntamente com um exemplo por sólido geométrico (APÊNDICE B), de modo que a sequência da aula foi utilizada para a resolução destes exemplos. No início, os estudantes se dedicaram à interpretação e resolução dos exemplos, enquanto o professor resolveu os sete exemplos no quadro, de modo a promover interação e esclarecer as dúvidas expressas pelos alunos.

No segundo encontro, os estudantes inicialmente foram apresentados à fórmula de Simpson e aos significados de seus termos, os quais foram demonstrados por meio de apresentação em projetor e distribuídos individualmente em forma impressa. Nessa etapa, os estudantes assistiram à resolução de todos os 7 exemplos (APÊNDICE B) por meio da fórmula de Simpson, fornecida ainda no primeiro encontro, permitindo-lhes perceber possíveis vantagens e sua capacidade de resolução.

A coleta de dados no terceiro encontro, se deu mediante a aplicação de uma atividade (APÊNDICE C) que contém sete problemas. Esses problemas foram elaborados a partir de similaridades com a lista de exemplos (APÊNDICE B). Foram selecionados considerando o grau de dificuldade, sua relevância em exames vestibulares no país e como representação de situações do cotidiano.

Após a aplicação da atividade (APÊNDICE C), foi realizada a aplicação de um questionário (APÊNDICE D) em sala de aula com 11 perguntas, em que 10 eram de múltipla escolha e uma dissertativa.

O instrumento buscou investigar, entre outros aspectos, o conhecimento prévio dos estudantes sobre a fórmula de Simpson e sua percepção quanto à sua aplicação no cálculo de volumes. As questões abordaram o material utilizado, o estado motivacional da turma e o possível impacto positivo da utilização da fórmula, assim como grau de complexidade da mesma em detrimento da comparação com as fórmulas tradicionais, a viabilidade de sua introdução em anos anteriores de ensino e o nível de dificuldades percebido frente aos problemas resolvidos (APÊNDICE B). Por fim, a questão dissertativa, concedeu espaço para comentários livres sobre a vivência durante toda sequência didática.

A análise dos dados se deu a partir da observação da escolha utilizada pelos

estudantes na resolução da atividade (APÊNDICE C), ao analisar individualmente quais fórmulas foram utilizadas, tradicionais (várias fórmulas) ou pela fórmula de Simpson, além da análise de acertos e erros em ambos os métodos de resolução. Além disso, buscou-se confrontar os resultados obtidos, com a finalidade de obter resultados mais sólidos, ao localizar as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a resolução dos 7 problemas.

5. ANÁLISE, RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a subseção 5.1, a subseção 5.2 apresenta a análise dos questionários aplicados aos alunos, examinando sua visão sobre a utilidade, acessibilidade e complexidade da fórmula de Simpson, bem como sua receptividade à abordagem como alternativa unificadora no ensino de volumes. Os dados são discutidos com base nas respostas tabuladas e em comentários dissertativos dos participantes.

5.1 Análise, resultados e discussão da resolução dos problemas propostos

A Sequência Didática incluiu sete problemas relacionados ao cálculo de volumes. Conforme as explicações e exemplos eram desenvolvidos em sala, ficou claro que os alunos tinham liberdade para escolher entre as fórmulas tradicionais ou a fórmula de Simpson em suas resoluções. Em suma, eles demonstraram entusiasmo na possibilidade da utilização de uma fórmula única para cálculo de volumes, o que permitiu uma maior atenção as explicações feitas durante a sequência didática.

Com a possibilidade de escolha de fórmulas tradicionais de resolução compreendidos e construídos por meio dos conhecimentos prévios, os alunos puderam escolher entre fórmulas tradicionais e a fórmula de Simpson. Com isso, foi possível identificar padrões de preferência na utilização de tal fórmula em parte dos sete problemas apresentados e, conseqüentemente, a possibilidade de adaptação à nova proposta.

Na tabela 1 são apresentados os dados relativos às escolhas dos estudantes, por questão, entre as fórmulas tradicionais de resolução e o emprego da fórmula de Simpson:

Tabela 1 – Escolha da fórmula de resolução de 101 estudantes.

Número da questão	Quantidade de alunos que responderam empregando as fórmulas tradicionais	Quantidade de alunos que responderam empregando a fórmula de Simpson	Quantidade de alunos que responderam sem apresentar cálculo	Quantidade de alunos que não responderam
01	15	48	37	01
02	23	39	37	02
03	16	42	41	02
04	31	18	47	05
05	23	22	-	56
06	33	15	47	06
07	14	13	56	18

Fonte: Dados da Pesquisa.

Os dados apresentados mostram que, nas três primeiras questões, a maioria dos alunos optou pelo uso da fórmula de Simpson. Essa escolha indica que, a utilização da fórmula pode estar relacionada ao que os discentes entendem como uma melhor visualização espacial dos problemas ou a situações mais familiares, questões que possibilitam relação com suas vivências ou problemas já resolvidos anteriormente relativamente iguais ou parecidos aos apresentados na atividade, o que possibilita verificar maior confiança na utilização da fórmula. Por outro lado, nas questões que exigiam maior abstração geométrica e capacidade de visualização espacial (questões 4, 5, 6 e 7), aumentou-se o número de alunos que recorreram às fórmulas tradicionais ou, em muitos casos, não chegaram a apresentar resolução.

A comparação do desempenho em termos de acertos por questão (tabela 2) sugere que a nova abordagem se mostrou equivalente e, em alguns casos, até mais preciso em relação às fórmulas tradicionais, especialmente nas questões 04 a 07. Isso reforça a hipótese de que uma fórmula unificada pode oferecer bons resultados sem comprometer a precisão, desde que os estudantes tenham tempo suficiente para assimilação e prática.

Tabela 2 – Número e percentual de acertos com base nas escolhas das fórmulas de resolução.

Número da questão	Quantidade de alunos que responderam corretamente empregando as fórmulas tradicionais	Quantidade de alunos que responderam corretamente empregando a fórmula de Simpson	Quantidade de alunos que marcaram alternativa correta sem apresentar cálculo
01	07 (46,66%)	20 (41,66%)	11 (29,72%)
02	09 (39,13%)	08 (20,51%)	09 (24,32%)
03	06 (37,5%)	14 (33,33%)	08 (19,51%)
04	06 (19,35%)	05 (27,77%)	06 (12,76%)
05	03 (13,04%)	07 (31,81%)	0 (0%)
06	15 (45,45%)	07 (46,66%)	06 (12,76%)
07	0 (0%)	01 (7,69%)	05 (8,92%)

Fonte: Dados da Pesquisa.

Um aspecto que merece destaque é o grande índice de não resolução na questão 5 (ver tabela 1), relacionada ao volume de uma pirâmide com base em sua secção média. O alto número de omissões sugere que a atividade demandava um nível de abstração além do esperado para a maioria da turma, situação coerente com as dificuldades de visualização espacial destacadas por Rogenski e Pedroso (2009).

Um outro aspecto relevante, são os percentuais de acertos com a utilização da fórmula de Simpson em comparação com fórmulas tradicionais nas questões 4, 5, 6 e 7. Nessas questões, apesar do número de escolhas pela fórmula de resolução ter sido maior para o método tradicional (ver tabela 2), os percentuais de acertos ficaram mais elevados para os estudantes que optaram pela abordagem alternativa (fórmula de Simpson), destaque para os percentuais das questões 4 e 5.

5.1.1 Discussão dos resultados por questão dos problemas propostos

5.1.1.1 Análise questão 1:

A primeira questão, retirada da avaliação de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) relativo ao ano de 2016, abordava o cálculo do volume de um silo formado pela combinação de um cilindro com um cone. Essa atividade foi

aplicada durante a etapa avaliativa da Sequência Didática (terceiro encontro) e tinha como objetivo observar a escolha da fórmula dos alunos e verificar seu desempenho.

O enunciado exigia a mobilização de conceitos de geometria espacial em um contexto prático, o que se aproxima da defesa de Soares (2019) de que a matemática deve estar relacionada a situações cotidianas significativas.

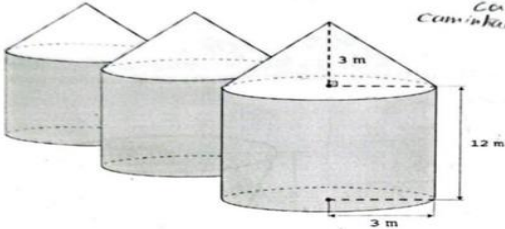
De acordo com os dados, 48 estudantes optaram por utilizar a fórmula de Simpson, dos quais 20 obtiveram êxito em obter a resposta correta para a primeira questão. A opção pelo método alternativo foi majoritária, revelando boa receptividade da turma. Esse resultado sugere que o uso de uma fórmula única, conforme argumentam Loureiro (2013) e Silva e Almeida (2019), pode contribuir para diminuir a sobrecarga cognitiva, tornando o raciocínio mais fluido.

Contudo, ainda que a sequência didática tenha sido organizada de forma sistemática, com a utilização de exemplos e diferentes métodos de resolução, uma expressiva parcela de alunos (aproximadamente 37%) não apresentou cálculos em suas escolhas, o que demonstra falta de conhecimentos prévios em sua formação básica ou falta de comprometimento nas resoluções dos problemas apresentados.

Figura 8 – Ilustração da resolução da questão número 01 por parte de um aluno.

ATIVIDADE (AULA 5 E 6)

1) (Enem 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A) 6. $h = 12$ $V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_m)$

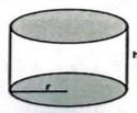
B) 16. $S_1 = \pi r^2$ $V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_m)$

C) 17. $S_2 = \pi r^2$ $V = \frac{h}{6}(2r^2 + 2r^2 + 4 \cdot 2r^2)$

~~X~~ 18. $S_m = \pi r^2$ $V = \frac{h}{6}(5r^2 + 4r^2)$

E) 21. $S_1 = 3 \cdot 3^2$ $V = \frac{h}{6}(54 + 108)$
 $S_2 = 27\pi^2$ $V = \frac{h}{6}(27 + 27 + 4 \cdot 27)$
 $S_m = \pi r^2$ $V = 2(162) = V = 324$

2) (Vunesp 2019) Analise o sólido geométrico da figura:



Handwritten calculations for question 2:

$h = 3$
 $S_1 = \pi r^2$
 $S_2 = 0$
 $S_m = \frac{\pi r^2}{4}$
 $S_1 = 3 \cdot 3^2$
 $S_2 = 27$
 $S_m = \frac{27}{4}$
 $V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_m)$
 $V = \frac{3}{6}(27 + 0 + 4 \cdot \frac{27}{4})$
 $V = 3(27 + 27)$
 $V = 3 \cdot 54$
 $V = 162$
 $S_m = \frac{27}{4}$ $S_m = 6,75$ $V = \frac{162}{6}$
 $V = 27 \text{ m}^3$

$324 \text{ m}^3 + 27 \text{ m}^3$
 $= 351 \text{ m}^3$
 $1 \text{ m} = 20 \text{ m}^3$
 $X = 351 \text{ m}^3$
 $X = \frac{351}{20}$
 $X = 17,55 \text{ viagens}$

A Figura 8, foi selecionada para ilustrar a resolução da Questão 1 por exemplificar de maneira clara e organizada um método de resolução adequado e consciente, adotado pelo aluno.

Em primeiro lugar, observa-se que o aluno interpretou corretamente o problema, ao identificar a composição do silo (cilindro + cone) e aplicando as fórmulas de volume de forma adequada, mediante a aproximação $\pi = 3$ conforme orientado. No entanto, o aspecto mais relevante apresentado na imagem é a utilização explícita da fórmula de Simpson, método exposto na sequência didática, aplicado intencionalmente para o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Isso demonstra uma interpretação clara por parte do aluno.

Além disso, a resolução finaliza com uma regra de três simples e bem estruturada, relacionando o volume total do silo com a capacidade do caminhão (20 m³), o que evidencia a habilidade do aluno em transitar entre diferentes etapas do problema da geometria à proporcionalidade.

Dessa forma, a imagem foi escolhida por representar um caso de aplicação da fórmula consciente, em que o aluno não se limitou em sua resolução, mas combinou ferramentas matemáticas de modo coerente, a assegurar acerto e clareza na resposta final.

5.1.1.2 Análise questão 2:

Os resultados da Questão 2 oferecem um retrato revelador dos desafios e potencialidades da inserção da fórmula de Simpson no ensino de Geometria Espacial. O sólido geométrico apresentado (cilindro), demandava dos alunos não apenas a aplicação de um método de resolução, mas primordialmente a capacidade de interpretar a figura e identificar a estratégia de cálculo mais adequada.

O primeiro dado significativo é a preferência dos alunos pela fórmula de Simpson, utilizada por 39 dos 101 respondentes, contra 23 que recorreram ao método tradicional. Esse fato sugere que a proposta de uma fórmula única, capaz de abranger diferentes sólidos, ressoou positivamente em um segmento significativo das turmas.

Parece ter havido um reconhecimento prático da vantagem apontada na simplificação do processo de cálculo pela redução da necessidade de memorização de múltiplas fórmulas específicas. Essa adesão corrobora com a ideia de Soares (2019), o excesso de fórmulas pode ser um entrave à aprendizagem. A fórmula de

Uma análise mais detalhada da resolução do aluno (ver Figura 09) revela que o seu erro principal não está na compreensão do sólido ou na aplicação da fórmula de Simpson, mas sim em uma etapa final: a conversão de unidades. O raciocínio do aluno demonstra que ele seguiu os passos metodológicos ensinados, porém negligenciou um aspecto fundamental da resolução de problemas. Ele identificou corretamente que se trata de um cilindro e, seguindo a lógica da fórmula de Simpson, reconheceu que a área da base S_1 , S_2 e S é πr^2 .

Os cálculos numéricos foram apresentados corretamente, no entanto houve a negligência e conseqüentemente o erro na conversão das unidades de medida. O problema surgiu quando o aluno não converteu o volume de cm^3 para m^3 , como exigiam as alternativas da questão.

Este exemplo evidencia que o erro cometido é de natureza distinta e anterior à proposta do trabalho: diz respeito a uma habilidade geral de resolução de problemas a verificação da coerência e conversão de unidades de medida que precisa ser trabalhada transversalmente em conteúdos matemáticos.

5.1.1.3 Análise questão 3:

Dos 58 alunos que realizaram cálculos, 72,4% optaram por utilizar a fórmula de Simpson, enquanto 27,6% recorreram às fórmulas tradicionais. Esse expressivo número de adoção já sinaliza uma receptividade considerável à abordagem alternativa, possivelmente influenciada pela proposta de simplificação e redução de fórmulas distintas, conforme apresentado anteriormente.

No entanto, a eficiência da utilização da fórmula não se estima apenas pela preferência de uso, mas também pela taxa de acerto. Entre os que utilizaram a fórmula de Simpson, 33,3% obtiveram a resposta correta. Já no grupo que optou pelas fórmulas tradicionais, 37,5% obtiveram êxito na resolução. Embora a diferença não seja elevada em relação ao percentual de acertos, verifica-se que a fórmula de Simpson foi escolhida em quantitativo maior pelos discentes.

Essa relativa equivalência nos acertos pode ser entendida por meio das discussões apresentadas no referencial teórico. A fórmula de Simpson exige a compreensão prévia de conceitos como área da seção média (S_m), que nem sempre são de domínio imediato dos alunos. Como destacado por Malvic *et al.* (2014), a aplicação da fórmula pressupõe a capacidade de identificar corretamente as bases e

a seção transversal intermediária, o que demanda um nível de abstração e visualização espacial que pode não estar totalmente consolidado no ensino médio.

Por outro lado, o fato de a fórmula ter sido utilizada pela maioria dos alunos que tentou resolver a questão sugere que ela oferece uma estrutura metodológica clara e atrativa. Isso corrobora a ideia, apresentada na justificativa do trabalho, de que a redução de múltiplas fórmulas a uma única expressão pode diminuir a carga cognitiva associada à memorização, conforme apontado por Loureiro (2013) e Silva e Almeida (2019).

Vale ressaltar ainda que a curta exposição à fórmula, apenas duas aulas dedicadas à sua explanação e aplicação, pode ter limitado a consolidação dela. Como observado na metodologia, a sequência didática foi aplicada em um intervalo concentrado de tempo, o que, embora evite perdas no processo, pode não ser suficiente para a assimilação completa da fórmula de Simpson.

Figura 10 – Ilustração da resolução da questão número 03 por parte de um aluno.

3) (ENEM 2021) Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração.

$\pi = 3$
 $S_1 = 3 \cdot 5^2 = 75 \text{ cm}^2$
 $S_2 = 3 \cdot 4^2 = 48 \text{ cm}^2$
 $S_3 = 3 \cdot 3,5^2 = 36,75 \text{ cm}^2$
 $V = \frac{3 \cdot (75 + 4 \cdot 48 + 36,75)}{6} \cdot 12$
 $V = \frac{3 \cdot (75 + 192 + 36,75)}{6} \cdot 12$
 $V = \frac{3 \cdot 303,75}{6} \cdot 12$
 $V = 3 \cdot 366,75$
 $V = 1100,25$
 $V = 732 \text{ cm}^3$

Sabe-se que $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base). Utilize 3 como aproximação para π .

Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

- A) 216
- B) 408
- C) 732
- D) 2 196
- E) 2 928

A Figura 10 foi selecionada para ilustrar a resolução da questão 3 por constituir uma amostra completa da aplicação bem-sucedida da fórmula de Simpson para volumes. A análise do processo resolutivo evidencia a assimilação adequada da fórmula por parte do aluno, conforme detalhado a seguir.

O aluno inicia a resolução pela correta identificação do sólido como um tronco de cone, e de seus dados apresentados no enunciado: diâmetro superior (10 cm), diâmetro inferior (8 cm) e altura (12 cm). A conversão dos diâmetros em raios (5 cm e 4 cm), respectivamente, e a utilização da aproximação $\pi = 3$ demonstram compreensão dos requisitos para resolução do problema.

A metodologia de resolução foi feita em etapas, primeiramente com os cálculos das áreas S_1 , S_2 e S_m . Após resolução prévia, os resultados foram substituídos na fórmula de Simpson, em seguida foram realizadas as demais etapas de adição, multiplicação e divisão, até que se chegasse ao resultado em cm^3 .

A correta conversão do resultado para mililitros (732 ml) e a marcação da alternativa correspondente completam o processo. Esta resolução demonstra não apenas domínio do uso da fórmula, mas também a capacidade de interpretação do aluno diante do problema proposto. A ausência de erros em qualquer etapa, particularmente no cálculo da seção média, elemento de interpretação e resolução mais complexo confirma a eficácia da abordagem alternativa adotada.

5.1.1.4 Análise questão 04:

A Questão 4 representou um ponto de mudança significativo no perfil de respostas dos estudantes, o que marcou uma transição clara da amostra do estudo. Enquanto nas três primeiras questões a fórmula de Simpson havia sido majoritariamente escolhida, nesta questão observou-se uma inversão marcante: apenas 17,8% do total de alunos optaram pela abordagem alternativa, contra 30,7% que recorreram às fórmulas tradicionais. Essa redistribuição nas preferências parece refletir o aumento da complexidade interpretativa inerente ao problema proposto, que demandava não apenas a aplicação mecânica de fórmulas, mas sobretudo a capacidade interpretativa.

O dado mais revelador, contudo, emerge da análise comparativa de desempenho entre os grupos. Entre os 18 estudantes que empregaram a fórmula de Simpson, 5 obtiveram sucesso em suas resoluções, correspondendo a uma taxa de

acerto de 27,77%. Já no grupo que utilizou às fórmulas tradicionais, apenas 6 dos 31 alunos alcançaram a resposta correta, equivalendo a 19,35% de eficácia. Essa diferença percentual, ainda que modesta em termos absolutos, adquire relevância teórica quando contextualizada: ela sugere que, para o segmento de alunos que conseguiu assimilar adequadamente a fórmula de Simpson, ela se mostrou uma ferramenta particularmente apropriada mesmo em cenários de maior interpretação ou relação com situações cotidianas.

Paralelamente, chama atenção o quantitativo de 47 alunos (46,5% da amostra) que, embora tenham entregado a questão com resposta, não apresentaram quaisquer registros de cálculo. Esta omissão processual pode ser interpretada por meio das discussões de Rogenski e Pedroso (2009) sobre as dificuldades de visualização espacial no ensino de geometria. É possível que muitos estudantes tenham conseguido compreender superficialmente a configuração do sólido, mas encontrado obstáculos quando da tentativa de operacionalizar esta compreensão em termos matemáticos formais.

A resolução bem-sucedida por meio da fórmula de Simpson na Questão 4 demandava, fundamentalmente, a correta identificação das áreas das bases (S_1 e S_2) e da seção média (S_m), o que por sua vez requeria uma compreensão conceitual sólida sobre a geometria do objeto.

Figura 11 – Ilustração da resolução da questão número 04 por parte de um aluno.

4) (ENEM 2022) Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

A) 2 $1p = 50$
 B) 3 $H = 2h = 2$
 C) 6 $S_1 = 0$
 D) 12 $S_2 = 0$
~~X~~ 24 $S_m = 1\pi r^2$
 $S_m = \pi r^2$

$V = \frac{4(S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m)}{6}$
 $V = \frac{4(0 + 0 + 4\pi)}{6}$
 $V = \frac{8\pi}{3}$
 $V = \frac{4\pi \cdot 3,14}{3} = \frac{12,56}{3} = 4,18$

$H = 2,2 = 2,4$
 $S_1 = 0$
 $S_2 = 0$
 $S_m = 4\pi$
 $V = \frac{4(0 + 0 + 16\pi)}{6}$
 $V = \frac{12 \cdot 16\pi}{3}$
 $V = 32\pi$
 $\frac{32 \cdot 3,14}{3} = 100,48$
 $V = 33,4$
 $33,4 \cdot 150 = 5010$
 possívelmente 5010

5) (IFRN - modificada) Um dos mistérios da humanidade consiste em saber como as

A Figura 11 foi selecionada para ilustrar a resolução do problema em questão foi criteriosamente escolhida por representar um caso exemplar de aplicação consciente e organizada da fórmula de Simpson, além de evidenciar tanto as potencialidades quanto os limites inerentes ao processo de transição para uma nova fórmula matemática.

Observa-se, em primeiro lugar, que o estudante demonstrou pleno domínio da estrutura conceitual da fórmula de Simpson, organizando de forma clara e sistemática os dados do problema. Um ponto notável foi a correta interpretação geométrica ao atribuir valor zero às áreas S_1 e S_2 , reconhecendo que, no cálculo do volume da esfera por este método, as "bases" se reduzem a pontos. De forma complementar, identificou com precisão a seção média (S_m) como a área do círculo máximo da esfera, calculando-a adequadamente em função do diâmetro fornecido, conforme a relação $S_m = \pi r^2$.

A resolução foi estruturada em duas etapas distintas, correspondentes aos cenários de raio 1 e raio 2, respectivamente. Em ambos os casos, o aluno aplicou corretamente a substituição dos valores na fórmula de Simpson, desenvolvendo os cálculos de forma coerente e sequencial. No entanto, optou por utilizar $\pi = 3,14$ em suas operações, ainda que tal aproximação não fosse explicitamente solicitada no enunciado da questão. Essa escolha, embora válida, introduziu pequenas imprecisões nos resultados intermediários.

Na primeira esfera com raio $r = 1$, o volume calculado foi de 4,18, o que representa uma aproximação da dízima periódica resultante da divisão de 12,56 (volume real) por 3. Na segunda esfera com raio $r = 2$, o valor encontrado foi 33,4, igualmente uma aproximação do quociente 100,48/3.

Em um segundo momento, o estudante demonstrou capacidade de articulação entre conceitos geométricos e situações práticas, ao multiplicar os volumes obtidos pelas quantidades correspondentes de docinhos (50 e 150 unidades). Essa transição evidencia uma compreensão integral do problema, que exigia não apenas o cálculo volumétrico, mas sua contextualização em um cenário real de produção.

O passo final, a divisão do volume total (5010) pelo volume inicial de produção (209), revelou um raciocínio lógico e estruturado, culminando no resultado aproximado de 24. A discreta divergência em relação ao valor teórico exato (aproximadamente 23,97) não compromete a validade do processo, mas ilustra de maneira exemplar como escolhas de arredondamento em etapas intermediárias podem propagar-se ao

resultado encontrado. Essa evidência, longe de representar uma falha, constitui uma oportunidade didática valiosa para discutir com os alunos a importância do controle de aproximações em cálculos em série.

A imagem foi, portanto, selecionada por sintetizar múltiplas dimensões do processo de aprendizagem: a compreensão conceitual da fórmula de Simpson, a capacidade de organização, a articulação entre teoria e contexto, e mesmo os deslizes inerentes ao manuseio de aproximações numéricas. Ela representa não um ideal de perfeição matemática, mas um retrato autêntico e pedagogicamente rico do engajamento discente com uma nova possibilidade de resolução de problemas.

5.1.1.5 Análise questão 05:

A Questão 5 configura-se como um marco significativo na progressão de complexidade da sequência didática, revelando desafios substantivos no processo de aprendizagem dos estudantes. Os dados quantitativos expostos nas Tabelas 1 e 2 oferecem um panorama esclarecedor sobre os padrões de comportamento e capacidade metodológica manifestados pelos alunos em questões abertas.

Conforme os dados apresentados na Tabela 1, constata-se que esta questão mostrou o mais elevado índice de omissão entre todas as atividades propostas, com 56 alunos (55,4% da amostra) não apresentando qualquer tentativa de resolução. Esta situação, por si só, merece destaque, pois sugere que a natureza do problema, relacionado ao cálculo do volume de uma pirâmide a partir de sua seção média, sendo esta a única a não possuir múltiplas alternativas (aberta) representou um obstáculo cognitivo considerável para mais da metade dos estudantes. Tal dificuldade encontra ligação nas observações de Rogenski e Pedroso (2009) sobre os desafios inerentes à visualização espacial de sólidos geométricos.

Entre os 45 alunos que desenvolveram a resolução, a distribuição apresentou relativo equilíbrio quantitativo: 23 optaram pelas fórmulas tradicionais, enquanto 22 recorreram à fórmula de Simpson. Contudo, a análise dos resultados de acerto revela uma disparidade notável. Conforme os dados da Tabela 2, apenas 13,04% dos alunos que utilizaram abordagens tradicionais alcançaram a resposta correta, em contraste com 31,81% de alunos que obtiveram sucesso mediante a aplicação da fórmula de Simpson.

Esta significativa diferença percentual, na qual a taxa de acerto da fórmula

alternativa mais que duplicou a das fórmulas tradicionais, sugere que a estrutura unificadora da fórmula de Simpson pode ser uma alternativa importante para abordar problemas abertos.

O número elevado de alunos que deixou a questão em branco (56) parece indicar que muitos alunos não conseguiram sequer iniciar o processo de interpretação geométrica do problema. Esta dificuldade inicial de compreensão conceitual pode estar associada à carência de habilidades de visualização tridimensional, conforme discutido por Settimy e Bairral (2020), que enfatizam a necessidade de um ensino sistemático destas competências.

Por outro lado, o desempenho relativamente superior dos alunos que empregaram a fórmula de Simpson sugere que esta abordagem pode funcionar como um organizador prévio do pensamento espacial, fornecendo uma estrutura mental que guia o raciocínio geométrico mesmo quando a visualização completa do sólido não está totalmente consolidada. Esta interpretação corrobora com as afirmações de Loureiro (2013) e Silva e Almeida (2019) sobre o potencial da simplificação procedimental para reduzir a carga cognitiva em problemas complexos.

A Questão 5 revela as limitações ainda presentes no desenvolvimento das habilidades de visualização espacial dos alunos, por outro lado, sugere que a fórmula de Simpson pode constituir-se uma ferramenta promissora para superar estas mesmas limitações, oferecendo um caminho metodológico alternativo que parece facilitar a abordagem de problemas geométricos.

A relativa equivalência numérica na escolha metodológica (23 versus 22) combinada com a significativa diferença no sucesso obtido (13,04% versus 31,81%) constitui um dos achados mais relevantes de toda a análise, pois indica que, mesmo com tempo limitado de exposição à nova ferramenta, os estudantes que a assimilaram conseguiram aplicá-la com notável eficácia em um contexto de questão aberta.

O resultado apresentado reforça a viabilidade da proposta alternativa de cálculo de volume de sólidos geométricos no Ensino Médio, enquanto ressalta a necessidade de investimentos mais consistentes na Educação, como por exemplo no desenvolvimento por parte dos alunos das habilidades básicas da Geometria Espacial, que na BNCC estão expressas como, entre outras, as competências de resolver problemas EM13MAT309 e investigar processos de obtenção de volumes EM13MAT504. Tal desenvolvimento está relacionado ao destino de recursos que chegam à Educação, tais como na formação continuada de professores, materiais

manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica, para que tais habilidades sejam efetivamente consolidadas.

Figura 12 – Ilustração da resolução da questão número 05 por parte de um aluno.

5) (IFRN - modificada) Um dos mistérios da humanidade consiste em saber como as pirâmides, como as do Sol e da Lua, foram construídas por civilizações que não tinham o aporte tecnológico que há na atualidade. Qual volume para se construir, em argila, uma escultura maciça com formato de pirâmide, com 15 m de altura, se a área da seção média é igual a 25 m²?

$S_1 = 100 \text{ m}^2$
 $S_2 = 0$
 $S_m = 25 \text{ m}^2$
 $h = 15 \text{ m}$

$V = 15 \cdot \frac{(100 + 0 + 4 \cdot 25)}{6}$
 $V = 15 \cdot \frac{200}{6} \Rightarrow V = 3000$
 $V = 500 \text{ m}^3$

6) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo

Fonte: Dados da Pesquisa.

A resolução ilustrada pela Figura 12 em referência foi selecionada por constituir um exemplo de aplicação correta da fórmula de Simpson a um problema de considerável complexidade geométrica. O registro evidencia que o aluno não se limitou a uma aplicação mecânica da fórmula, mas demonstrou uma compreensão das relações geométricas inerentes ao sólido em análise, uma pirâmide analisada por meio de sua seção média.

Um dos pontos mais significativos da resolução reside na correta identificação da relação de proporcionalidade entre a área da base inferior (S_1) e a área da seção média (S_m). O aluno percebeu com importância que S_1 corresponde a $4S_m$, e, uma vez que o enunciado fornecia $S_m = 25 \text{ m}^2$, deduziu corretamente que $S_1 = 100 \text{ m}^2$. Este raciocínio demonstra que o aluno compreendeu as propriedades apresentadas na sequência didática.

Adicionalmente, o estudante revelou clareza ao atribuir valor zero à área da base superior (S_2), reconhecendo que, no vértice da pirâmide, a área se reduz a um ponto. Esta interpretação está em perfeita consonância com os princípios de aplicação da fórmula de Simpson para sólidos que se afinam em uma extremidade, demonstrando que o aluno internalizou a lógica ao método, superando sua mera memorização.

A etapa de substituição dos valores na fórmula foi executada com precisão, o desenvolvimento do cálculo seguiu uma sequência lógica e organizada, culminando no resultado correto de 500 m^3 . A clareza expositiva e a ausência de erros

procedimentais reforçam o domínio no processo de resolução por parte do aluno.

A imagem foi escolhida, portanto, por representar um caso de como a fórmula de Simpson, quando compreendida em sua essência conceitual, pode servir como ferramenta adequada para a resolução de problemas análogos que demandam uma abordagem diferente da simples substituição de valores em sua fórmula.

5.1.1.6 Análise questão 06:

Os dados da Tabela 1 referentes à questão 06 indicam uma preferência pelos métodos tradicionais, com 33 estudantes (32,7% da amostra) optando por esta abordagem, contra apenas 15 alunos (14,9%) que utilizaram a fórmula de Simpson.

Um dado que merece atenção refere-se ao quantitativo de 47 alunos (46,5%) que apresentaram resposta sem demonstrar os cálculos correspondentes. Este percentual elevado pode indicar tanto dificuldades na organização do pensamento matemático quanto possíveis limitações na compreensão conceitual do sólido geométrico em questão. Tal fato encontra respaldo nas observações de Soares (2019) sobre os desafios inerentes à transposição do raciocínio espacial para a linguagem matemática formal.

Os resultados de acerto, conforme apresentados na Tabela 2, revelam uma situação notável: a taxa de sucesso foi quase idêntica entre as duas abordagens metodológicas. Entre os 33 estudantes que utilizaram métodos tradicionais, 15 obtiveram a resposta correta, correspondendo a 45,45% de eficácia. No grupo que optou pela fórmula de Simpson, 7 dos 15 alunos alcançaram o resultado esperado, equivalendo a 46,66% de acertos. Esta equivalência percentual, com diferença inferior a 1,5 pontos percentuais, constitui um achado significativo para a análise comparativa das abordagens.

A proximidade nos índices de acerto sugere que, para os estudantes que conseguiram compreender adequadamente as características do sólido e engajar-se em sua resolução, ambas maneiras distintas de resolução se mostraram igualmente apropriadas. Este resultado colabora com a visão de Loureiro (2013) sobre a validade de diferentes caminhos resolutivos, desde que fundamentados em compreensão conceitual.

Enquanto nas questões iniciais existiu predominância da escolha da fórmula de Simpson, no entanto com percentual de assertivas maior para o método tradicional

(questões 1,2 e 3), as questões 4 e 5 observava-se certa vantagem da fórmula de Simpson em termos de taxa de acerto, este item específico demonstrou que ambas as formas foram escolhidas pelos estudantes.

O fato de 6 alunos (12,76%) terem assinalado a alternativa correta sem apresentar cálculos, conforme apresentado na Tabela 2, pode indicar diferentes interpretações: desde a utilização de raciocínio lógico até possíveis dificuldades na sistematização do processo resolutivo. Esta constatação reforça a importância de se trabalhar não apenas a aplicação de fórmulas, mas também o desenvolvimento da capacidade de explicitação do raciocínio geométrico, conforme defendido por Settimy e Bairral (2020).

Figura 13 – Ilustração da resolução da questão número 06 por parte de um aluno.

6) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.

Handwritten student solution for question 6:

$S_m = a^2$
 $S_1 = 12^2$
 $S_1 = 144$
 $S_2 = 144$
 $H = 12 \text{ cm}$
 $V = 12(144 + 144 + 4 \cdot 144) / 6$
 $V = 12(288 + 576) / 6$
 $V = 12(864) / 6$
 $V = 10368 / 6$
 $V = 1728 \text{ cm}^3$

$S_m = a^2$
 $S_m = 8^2$
 $S_m = 64 \text{ cm}^2$
 $S_1 = 64 \text{ cm}^2$
 $S_2 = 64 \text{ cm}^2$
 $H = 8 \text{ cm}$
 $V = 8(64 + 64 + 4 \cdot 64) / 6$
 $V = 8(128 + 256) / 6$
 $V = 8(384) / 6$
 $V = 3072 / 6$
 $V = 512 \text{ cm}^3$

$V_t = M - m$
 $V_t = 1728 - 512$
 $V_t =$

$V_T = 1216 \text{ cm}^3$

Fonte: Dados da Pesquisa.

A escolha de resolução selecionado para representação da Questão 6 demonstra compreensão tanto da figura geométrica quanto na fórmula de Simpson empregada para sua resolução. A análise do material evidencia que o aluno desenvolveu corretamente a questão, articulando conceitos geométricos com a aplicação da fórmula de Simpson de maneira particularmente adequada.

O aspecto mais significativo da resolução reside na visualização da configuração espacial do problema. O aluno identificou corretamente que se tratava de determinar o volume de um sólido composto por dois cubos concêntricos, sendo o volume desejado equivalente à diferença entre o volume do cubo externo e o volume do cubo interno. Esta interpretação demonstra capacidade de abstração geométrica e compreensão tridimensional do objeto, habilidades frequentemente desafiadoras no

ensino de geometria espacial no Ensino Médio.

Outro elemento que merece destaque é o reconhecimento das propriedades específicas dos cubos enquanto sólidos geométricos. O aluno percebeu que, por se tratar de um poliedro regular, as áreas das bases e da secção média mantinham relações de igualdade em cada cubo considerado isoladamente. Esta compreensão vai além da simples aplicação de fórmulas, revelando conhecimento das características dos sólidos regulares.

Inicialmente, o estudante aplicou a fórmula de Simpson separadamente para cada cubo, substituindo corretamente os valores correspondentes às dimensões fornecidas. Em seguida, realizou a operação de subtração entre os volumes obtidos, determinando o volume final do sólido oco como 1216 cm^3 .

5.1.1.7 Análise questão 07:

Os dados referentes à sétima questão revelam um panorama distinto em relação aos demais itens da sequência didática. A Tabela 1 indica que este problema apresentou índices significativos de não resolução: 18 alunos (17,8%) deixaram a questão em branco, enquanto 56 estudantes (55,4%) apresentaram resposta sem demonstrar os cálculos correspondentes.

A análise das respostas entre os estudantes que tentaram a resolução mostra relativo equilíbrio: 14 alunos optaram por fórmulas tradicionais, enquanto 13 recorreram à fórmula de Simpson. Contudo, os resultados de acerto apresentados na Tabela 2 revelam desafios comuns em ambas. Apenas um educando (7,69%) que utilizou a fórmula alternativa alcançou a resposta correta, enquanto nenhum dos que empregaram as fórmulas tradicionais obteve sucesso.

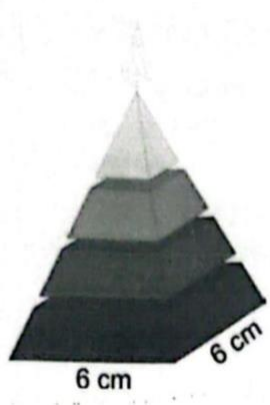
Estes resultados devem ser interpretados considerando o contexto específico da aplicação. Como sétima questão de uma sequência relativamente extensa, é plausível supor que fatores como fadiga cognitiva e diminuição da atenção tenham influenciado o engajamento dos estudantes.

A complexidade geométrica intrínseca do problema também merece consideração. Como última questão da sequência, é provável que esta atividade apresentasse um nível de interpretação superior, demandando habilidades de visualização espacial e raciocínio um pouco mais abstrato.

O percentual de respostas sem cálculo (55,4%) pode refletir não apenas

dificuldades conceituais, mas também limitações temporais ou mesmo estratégias de resolução mental que não foram escritas.

Figura 14 – Ilustração da resolução da questão número 07 por parte de um aluno.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

A) 156 cm³ $S_1 = 6^2 \rightarrow 36$ $V = \frac{H(S_1 + S_2 + 4 \cdot S_m)}{6}$

B) 189 cm³ $S_2 = 0$ $V = \frac{9(36 + 0 + 36)}{6}$

C) 192 cm³ $S_m = \frac{S_1}{4} \rightarrow 18$ $V = \frac{988}{6} \rightarrow 165$

D) 216 cm³

E) 540 cm³

Fonte: Dados da Pesquisa.

A resolução do aluno selecionado para a sétima questão merece maior atenção. Essa resolução destaca-se como único exemplo em que o emprego da fórmula de Simpson, mesmo apresentando inconsistências em seu desenvolvimento, resultou na identificação da alternativa correta.

O aluno iniciou sua resolução demonstrando familiaridade com a fórmula e identificando o valor correto para S_1 . Contudo, a trajetória resolutiva subsequente indica uma provável transferência inadequada de estratégias de resolução provavelmente alinhada a metodologia de resolução aplicada a questão anterior. É possível identificar uma provável tentativa de calcular o volume da pirâmide maior sem avançar para o cálculo complementar do volume da pirâmide menor, etapa indispensável para a solução completa.

Um dos desvios mais relevantes ocorreu durante o cálculo da seção média S_m .

Apesar de ter reconhecido S_1 como 36, o aluno registrou o quociente de $S_1/4$ como 18, quando o resultado exato seria 9. Esta imprecisão aponta para dificuldades em operações matemáticas básicas que vão além da mera aplicação da fórmula.

O processo de substituição dos valores na fórmula foi realizado com aparente cuidado, porém um novo equívoco surgiu na multiplicação 19×72 , com o apontamento de 988 em vez de 1368. A combinação desses erros levou à determinação de um volume de 165 cm^3 para a pirâmide maior, divergindo do valor correto de 228 cm^3 .

A escolha dessa resolução justifica-se por ilustrar a complexidade inerente aos processos de avaliação em matemática. O exemplo evidencia que a identificação da resposta correta nem sempre corresponde a compreensão do conteúdo, alertando para a necessidade de valorizar não apenas o produto final, mas todo o percurso de pensamento desenvolvido pelo aluno. Paralelamente, a resolução demonstra que o estudante internalizou aspectos importantes da fórmula de Simpson, ainda que requeira aprimoramento em sua execução operatória e de resolução de problemas.

5.2 Análise, resultado e discussão dos questionários

O presente questionário, composto por 10 questões de múltipla escolha e uma questão dissertativa, foi aplicado em sala de aula com o objetivo de investigar a experiência de aprendizagem que envolveram a fórmula de Simpson. Conforme proposto no planejamento da atividade, as perguntas buscaram compreender desde o conhecimento prévio dos alunos sobre a fórmula, sua visão quanto à aplicação no cálculo de volumes, a qualidade do material utilizado, o estado motivacional durante a sequência didática, o impacto na compreensão de geometria, até a comparação da fórmula de Simpson em relação às fórmulas tradicionais e a possibilidade de sua adoção nos anos iniciais do Ensino Médio. A análise a seguir detalha os resultados obtidos, refletindo a visão dos participantes sobre essa nova possibilidade.

5.2.1 Discussão dos resultados por item do questionário.

A análise do item 01 do questionário revela um dado significativo: a maioria dos alunos (99 em um total de 101 discentes) desconhecia a fórmula de Simpson antes

de participar da sequência didática. Este resultado evidencia que se tratava de um conceito novo para o grupo, em que a minoria que já possuía conhecimento do conteúdo (apenas 2 participantes) pode representar estudantes com formação matemática mais avançada ou que tiveram contato prévio com o tema em outros contextos de aprendizagem.

Os resultados do item 02 demonstram uma aceitação expressiva da utilidade da fórmula de Simpson para o cálculo de volume de sólidos geométricos, com 99 votos favoráveis em relação a 2 contrários. Esta aprovação sugere que os participantes conseguiram visualizar vantagens na utilização desta fórmula. Essa quase unanimidade na visualização de utilidade comprova a ideia de Silva e Almeida (2019) de que é preciso buscar metodologias que tornem o ensino da Matemática mais atraente e significativo.

No item 03, observa-se um raro consenso entre todos os 101 participantes, que classificaram unanimemente o material utilizado como acessível e útil. Esta avaliação positiva reflete um cuidadoso trabalho de preparação dos recursos didáticos, incluindo slides, materiais impressos e exercícios. A acessibilidade do material é particularmente importante em contextos de aprendizagem diversificados, pois garante que alunos com diferentes níveis de habilidade e aprendizagem possam acompanhar o conteúdo sem barreiras adicionais. A utilidade percebida também indica que os materiais foram adequadamente alinhados com os objetivos de aprendizagem propostos.

Os dados sobre motivação (item 04) revelam um panorama mais complexo: enquanto 56 participantes declararam-se motivados, 35 expressaram incerteza e 10 admitiram falta de motivação. Essa indecisão (35), reflete os desafios do ensino da geometria, no qual a desmotivação de parte dos alunos pode estar relacionada à dificuldade de visualização espacial, problema historicamente presente no ensino de geometria, conforme apontado por Rogenski e Pedroso (2009). Já os 10 discentes que informaram estar desmotivados representam um desafio pedagógico que merece atenção específica, possivelmente relacionado a fatores como dificuldades de aprendizagem prévias ou falta de identificação com a disciplina.

A visão sobre o impacto positivo da sequência didática (item 05) no entendimento de geometria e cálculo de volume foi majoritária (64 participantes). Os 29 que manifestaram incerteza e os 8 que não perceberam melhoria representam um segmento que possivelmente necessitaria de abordagens complementares ou tempo

adicional de assimilação. Esta variação nas respostas pode refletir diferenças nos conhecimentos prévios ou nos estilos de aprendizagem. O resultado positivo da maioria, no entanto, valida a eficácia geral da fórmula de Simpson no contexto adotado.

A divisão de opiniões nesta questão (item 08) é particularmente reveladora: 78 participantes consideraram a fórmula de Simpson mais fácil, indo de encontro a crítica de Loureiro (2013) sobre a necessidade de decorar fórmulas e regras como dificultadores para o aprendizado. Desses, 23 a julgaram mais complexa, o que pode estar relacionado a alguns fatores, incluindo familiaridade com abstrações matemáticas, experiência anterior com cálculo de volumes e preferências individuais por fórmulas de resolução de problemas.

A predominância da visão de facilidade sugere que, para a maioria, a unificação do cálculo de volumes sob uma única fórmula representa uma simplificação em comparação com a necessidade de memorizar múltiplas fórmulas específicas.

No (item 07), dos 23 participantes que consideraram a fórmula mais complexa, 20 atribuíram esta visão ao hábito com as fórmulas tradicionais. Isso ilustra a dificuldade de mudança de paradigma no ensino da matemática, confirmando a observação de Soares (2019) sobre como os alunos tendem a depender de fórmulas específicas para cada sólido. Este dado é especialmente significativo, pois indica que a resistência à mudança representa uma barreira importante na adoção de diferentes ferramentas matemáticas. Os 3 alunos que não associaram a complexidade aos hábitos anteriores podem estar enfrentando dificuldades conceituais específicas com a própria estrutura da fórmula.

O apoio à substituição das fórmulas tradicionais apresentado no (item 08) pela fórmula de Simpson nos anos iniciais do Ensino Médio (96 a favor, 5 contra), sugere que os alunos conseguiram visualizar vantagens na unificação do ensino de volumes. A minoria contrária pode representar visões mais conservadoras sobre o ensino de matemática ou preocupações com possíveis dificuldades futuras.

No (item 09), entre os 5 alunos que se opuseram à substituição das fórmulas tradicionais, 3 ainda assim reconheceram que a mudança poderia trazer melhorias na aprendizagem. Os 2 que não visualizam qualquer melhoria podem representar visões mais radicais.

No (item 10) foi expressa a visão majoritária (78 alunos) de que as questões respondidas com auxílio do professor possuíam o mesmo nível de dificuldade das

questões da avaliação final indica uma progressão adequada e coerente no desafio cognitivo proposto. Os 20 que consideraram as questões iniciais mais difíceis podem ter experimentado uma curva de aprendizagem mais acentuada, caracterizada pela necessidade de maior esforço cognitivo nas etapas iniciais para compreensão dos conceitos, seguida de um progresso mais estável ao longo da sequência didática. Por sua vez, os 3 alunos que as julgaram mais fáceis possivelmente já possuíam familiaridade com os conceitos abordados. Esta distribuição sugere um bom equilíbrio na progressão da complexidade das atividades ao longo da sequência didática.

Figura 15 – Ilustração da resolução da questão número 11 por parte de um aluno.

11) Caso seja pertinente, acrescente algum comentário sobre a vivência da sequência didática.

A sequência didática seria mais útil se fosse introduzida no 1º ano, pois a gente teria mais facilidade para usar a fórmula de Simpson. Mesmo assim, achei incrível.

Fonte: Dados da Pesquisa.

O aluno reconhece o potencial da fórmula para a aprendizagem, mas sugere que seu aproveitamento poderia ser ainda maior se ela fosse introduzida já no primeiro ano do Ensino Médio. Essa visão indica que o estudante visualiza a fórmula de Simpson não apenas como um conteúdo a ser aprendido, mas como um recurso que poderia facilitar a compreensão de geometria ao longo de toda a trajetória escolar.

A justificativa: "pois a gente teria mais facilidade para usar a fórmula de Simpson", sugere que ela é vista como acessível e aplicável, mesmo para estudantes em fase inicial de formação. O aluno parece acreditar que a familiaridade precoce com a fórmula permitiria uma aplicação mais natural e consolidada em problemas envolvendo volume. Apesar de considerar que o momento ideal de introdução seria anterior, o comentário final: "Mesmo assim, achei incrível", reforça uma impressão muito positiva da experiência. Essa fala transmite entusiasmo e valorização da sequência didática.

Esse relato colabora a visão identificada em outras respostas, de que a fórmula de Simpson tem potencial para ser adotada como uma possibilidade unificadora no ensino de volumes, capaz de simplificar e integrar conceitos que, tradicionalmente, são apresentados de forma fragmentada ao longo dos anos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação surgiu de uma experiência em sala de aula, motivada pela observação constante da dificuldade que os alunos do Ensino Médio enfrentam ao lidar com inúmeras fórmulas para cálculo de volume. A partir desse contexto, o objetivo geral do trabalho foi alcançado, na medida em que a aplicação da fórmula de Simpson se revelou uma possibilidade real para o ensino do cálculo de volume de sólidos geométricos no 3º ano do Ensino Médio. Ao longo do desenvolvimento da pesquisa, também foi possível atender aos objetivos específicos, uma vez que se discutiram os aspectos teóricos da fórmula, se construiu e aplicou uma sequência didática e se analisaram as resoluções e percepções dos estudantes, permitindo identificar limites e contribuições dessa abordagem ao contexto escolar.

A análise dos resultados permitem destacar alguns achados centrais. Em primeiro lugar, a fórmula bem recebida pelos discentes, que a consideraram útil e, para 77% deles, mais fácil que o conjunto de fórmulas isoladas. Em termos de desempenho, a fórmula mostrou-se tão eficaz quanto as fórmulas tradicionais, com vantagens perceptíveis em problemas que exigiam maior abstração, como atestaram as taxas de acerto nas questões 4 e 5. A principal limitação identificada não reside na fórmula em si, mas em déficits de visualização espacial dos alunos e em uma certa resistência gerada pelo hábito consolidado com o uso de várias fórmulas.

Diante do exposto, conclui-se que a fórmula de Simpson configura-se viável e com potencial unificador para o ensino de volumes no Ensino Médio. Ela pode atuar como um organizador conceitual que reduz a carga cognitiva associada à memorização, desde que sua implementação seja acompanhada de estratégias que desenvolvam a visão geométrica tridimensional.

Perspectivas para investigações futuras surgem naturalmente deste estudo. Recomenda-se a aplicação de sequências didáticas mais longas para observar os efeitos de uma familiarização prolongada. O uso de recursos de visualização 3D, como *softwares* de geometria dinâmica, pode ser apontado como um complemento quase essencial para superar as dificuldades de abstração espacial, pois há a possibilidade de desenvolver a Sequência Didática apresentada nesse trabalho em combinação com variadas metodologias de ensino, como as apresentadas na subseção 2.2.

Ademais, a construção histórica da expressão que se conhece como fórmula

prismoidal, a apresentação dos prismas e pirâmides como tipos de prismatoides, além da própria história relacionada ao surgimento da referida fórmula, são temas possivelmente viáveis para serem abordados no Ensino Médio com o intuito de enriquecer o ensino de Geometria Espacial.

Por fim, os benefícios de uma fórmula unificadora não precisam se limitar ao Ensino Médio. Uma outra possibilidade seria a introdução da fórmula de Simpson em cursos de nivelamento ou nas disciplinas iniciais de graduação em áreas como Engenharia e Ciências Exatas. Muitos universitários demonstram dificuldades em problemas de geometria espacial nas disciplinas de Cálculo. Oferecer essa fórmula como uma opção poderia diminuir essa lacuna, funcionando como uma ponte entre o conhecimento da Educação Básica e as demandas do Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

- BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. Dados Qualitativos. In BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação** - uma introdução à teorias e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. P.147- 202.
- BLANCO, M. **Thomas Simpson**: Tecendo fluxões na Londres do século XVIII. 2013. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086013000438?via%3Di+hub>. Acesso em: 25 nov.2023.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/> . Acesso em 31 de out. 2025.
- BROWN, K. **Geometry**. Publicação independente, 2002. Disponível em: https://www.amazon.com/dp/B0BR987GCP?ref=ast_sto_dp. Acesso em: 06 ago. 2025.
- CALABRIA, A. R. **A Geometria fora da Grécia**. Revista do Professor de Matemática, n.81, p.5-9, 2013. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/81/rpm1.html>. Acesso em: 25 out. 2025.
- CARVALHO, S. S. **O Cálculo de Volume de Sólidos Geométricos Utilizando como Ferramenta Auxiliar o Geogebra 3d**. 2022. Disponível em: https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/4994/6/TCC_CalculoVolumeSolidos.pdf. Acesso em: 15 ago. 2025.
- COSTA, J. S.; ESTEVES, E. M. **Estratégias Inovadoras para o Ensino de Geometria Espacial na Educação Básica**: comparação com a metodologia tradicional de aula expositiva. 2023. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171056361. Acesso em: 15 set. 2025.
- CURY, C. R. J. **Direito à Educação**: direito à igualdade, direito à diferença. In: Cadernos de Pesquisa. Fundação Carlos Chagas. São Paulo: Autores Associados, N. 116, p. 245-262, jun. 2002.
- CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre. Editora: Artmed. 2ª, 2007.
- EVES, HOWARD. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3ª ed. rev- Campinas –SP: Autores Associados, 2012- (Coleção formação de professores).
- KNAPP, J. G. **Computer graphic representation of mandibular movements in three dimensions**: the method. Journal of Oral Rehabilitation, v. 10, n. 4, p. 295–305, 1983. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1365-2842.1983.tb00124.x>. Acesso em: 6 jul. 2025.

LOUREIRO, V. **Dificuldades na aprendizagem da Matemática**: um estudo com alunos do Ensino Médio. 2013. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Espírito Santo. Espírito Santo.

MALVIC, Tomislav *et al.* **Numerical Integration in Volume Calculation of Irregular Anticlines**. 2014. Disponível em: https://hrcak.srce.hr/134973?utm_source=chatgpt.com. Acesso em: 6 jan. 2025.

MARTINS, E. B.; ANDRADE, S. **Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial**: uma aplicação da metodologia de resolução de problemas. 2011. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/970>. Acesso em: 22 jul. 2025.

PAVANELLO, R. M. **Por que Ensinar /Aprender Geometria?**. 2012. Disponível em: <https://encurtador.com.br/sCV26>. Acesso em: 01 jun. 2025.

PEREIRA, L. R. P. **Proposta Didática para Aplicação Prática do Ensino da Geometria Espacial**. 2011. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/31568?utm_source=chatgpt.com. Acesso em: 16 mai. 2025.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica**: realidade e possibilidades. 2009. Disponível em: https://livrozilla.com/doc/1221845/o-ensino-da-geometria-na-educa%C3%A7%C3%A1o-b%C3%A1sica--realidade?utm_source=chatgpt.com. Acesso em: 05 mai. 2025.

SANTOS, J. B. **Avanços e Desafios da Educação Brasileira na Atualidade**: uma reflexão a partir das contribuições de hannoun e a educação infantil como uma aposta *enactante*. 2013. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgiclfindmkaj/https://www.anpae.org.br/simposio26/1comunicacoes/JoedsonBritodosSantos-ComunicacaoOral-int.pdf?utm_source=chatgpt.com. Acesso em: 21 fev. 2025.

SAYL, K. N. **Surveying 2**. University of Ambar, 2009. Disponível em: <https://www.uoanbar.edu.iq/eStoreImages/Bank/2548.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2025.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. **Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial**. v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3219/2530>. Acesso em: 12 mar. 2025.

SILVA, N. R.; ALMEIDA, J. J. P. **Modelagem Matemática**: uma alternativa metodológica para o ensino básico. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/330922047_Modelagem_matematica_uma_alternativa_metodologica_para_o_ensino_basico. Acesso em: 20 out. 2025.

SIMPSON, Thomas. *Essays on several curious and useful subjects, in speculative and mix'd mathematicks: illustrated by a variety of examples*. London: J. Nourse, 1740.

SOARES, Y. G. P. **O Ensino da Geometria em Espaços Formais e não Formais Através de Material Concreto**. 2019. Disponível em: https://www.oasisbr.ibict.br/vufind/Record/UEA_926a12ab7528a576af0bf08960b264cc?utm_source=chatgpt.com . Acesso em: 05 abr. 2025.

TAVARES, L. C. M.; SANTOS, M. L. **A Geometria no Ensino Médio**: uma sequência didática utilizando a fotografia, os ambientes não formais de ensino e os objetos virtuais de aprendizagem. 2016. Disponível em: <http://www.bdt.d.ueg.br/handle/tede/462>. Acesso em: 25 abr. 2025.

VAN de WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tad. Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

VUELMA, C. A. **Uma Experiência para o Ensino de Geometria Espacial**. 2010. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/31586?utm_source=chatgpt.com . Acesso em: 11 fev. 2025.

WAGNER, E.. **Um volume complicado**. Revista do professor de matemática, v. 1, p. 12-15, 1998. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/36/7.htm>. Acesso em: 06 fev. 2025.

ZABALA, A. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A - SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tema: Fórmula de Simpson como uma abordagem alternativa para o cálculo de volume de sólidos geométricos.

Objetivo Geral da sequência didática: Apresentar aos alunos do ensino básico às ideias principais da fórmula de Simpson como uma ferramenta alternativa no cálculo de volumes de sólidos geométricos.

Duração: 6 aulas

Aula 1 e 2: Revisão das fórmulas tradicionais utilizadas no cálculo de volume.

Objetivo da aula: Revisar a utilização das fórmulas tradicionalmente utilizadas para o cálculo de volume de sólidos, tais como: prismas, pirâmides, troncos de pirâmides, cones, troncos de cones e esfera.

Recursos professor: Pincel, quadro-branco, *datashow*, régua, lista de exemplos impressa com uma questão por sólido geométrico (APÊNDICE B).

Recursos alunos: Caneta, lápis, borracha e lista de exemplos impressa entregue pelo professor.

Atividades:

É fundamental destacar que o professor inicialmente deve começar a abordar as características iniciais dos sólidos, como o formato de suas faces e as propriedades inerentes a esses objetos tridimensionais, que podem ser classificados como poliedros ou corpos redondos. Os sólidos que serão estudados durante a aula incluem os prismas (cubo e paralelepípedo), as pirâmides (de base quadrada), o tronco de pirâmide (de base quadrada), a esfera, o cilindro, o cone, o tronco de cone.

Após essa primeira etapa, é importante explicar a relevância do cálculo de volumes na resolução de problemas do mundo real. Isso pode ser feito por meio da resolução de exemplos práticos que demonstram como esse conceito está relacionado a situações do cotidiano, presente na lista de exemplos (APÊNDICE B). Além disso, é essencial apresentar as fórmulas tradicionais de acordo com o sólido geométrico abordado na atividade impressa.

Aula 3 e 4: Introdução e aplicação da “Fórmula de Simpson”

Objetivo da aula: Familiarizar os alunos com a fórmula de Simpson e suas aplicações no cálculo de volume de sólidos geométricos.

Recursos professor: Pincel, quadro-branco, régua, *datashow*, lista de exemplos impressa com uma questão por sólido geométrico.

Recursos alunos: Caneta, lápis, borracha e lista de exemplos impressa entregue pelo professor.

Atividades:

Após as duas primeiras aulas, o professor discorrerá sobre a importância do cálculo de volumes na geometria e iniciará as etapas da utilização da fórmula de Simpson como uma abordagem alternativa ao cálculo tradicional de volumes, com explicações sobre suas distinções. No entanto, ela pode ser utilizada para o cálculo do volume dos demais sólidos apresentados em tal nível de ensino, fomentando assim, que a vantagem da utilização da fórmula de Simpson, didaticamente, é que por meio de uma única fórmula o aluno pode calcular o volume dos sólidos geralmente abordados na educação básica.

1ª etapa:

Inicialmente, faz-se necessário que o professor apresente o significado dos termos presentes na fórmula

$$V = \frac{H(S_1 + S_2 + 4S_M)}{6}$$

quais sejam:

V representa o Volume do sólido

H representa a Altura do sólido

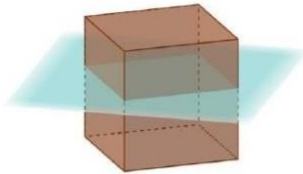
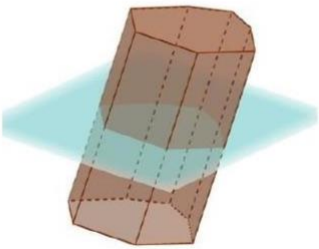
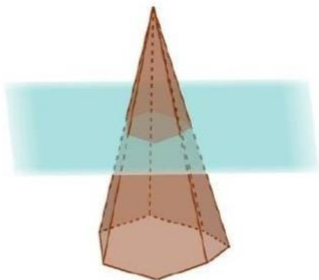
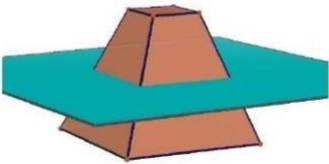
S₁ representa a Área da base inferior

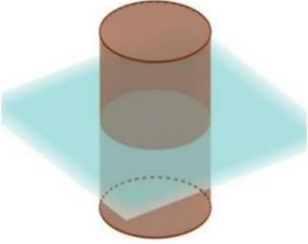
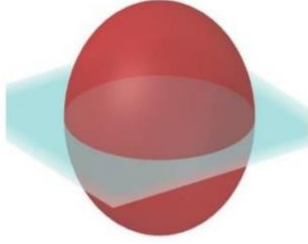
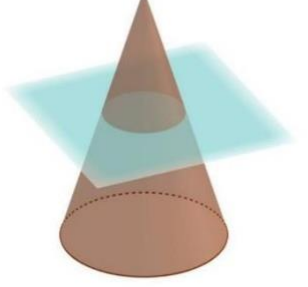
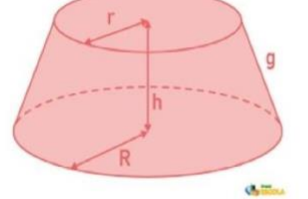
S₂ representa a Área da base superior

S_M representa a Área da seção média

2ª etapa:

Didaticamente, o professor deverá relacionar essas definições com as características individuais de cada sólido, apresentando-as da seguinte forma:

	SÓLIDO	ILUSTRAÇÃO	H	S_1	S_2	S_M	VOLUME
POLIEDROS	CUBO		a	a^2	a^2	a^2	$V = \frac{6a^3}{6} = a^3$
	PRISMA		H	Ab	Ab	Ab	$V = \frac{H(Ab + Ab + 4Ab)}{6}$ $V = \frac{H(6Ab)}{6}$ $V = Ab \cdot H$
	PIRÂMIDE		H	Ab	0	$\frac{Ab}{4}$	$V = \frac{H(Ab + Ab)}{6}$ $V = \frac{H(2Ab)}{6}$ $V = \frac{Ab \cdot H}{3}$
	TRONCO DE PIRÂMIDE		H	a^2	b^2	$(\frac{a+b}{2})^2$	$V = \frac{H(2a^2 + 2b^2 + 2ab)}{6}$ $V = \frac{2H(a^2 + b^2 + ab)}{6}$ $V = \frac{H(a^2 + b^2 + ab)}{3}$
OBSERVAÇÕES		S_2 : Em pirâmides, por não possuir área da base superior, o valor considerado será zero. S_M : Em pirâmides, a área da seção média, sempre será $\frac{1}{4}$ da área da base. S_M : No tronco de pirâmide, a e b são os lados da base maior e menor.					

	SÓLIDO	ILUSTRAÇÃO	H	S_1	S_2	S_M	VOLUME
CORPOS REDONDOS	CILINDRO		H	πr^2	πr^2	πr^2	$V = \frac{H(\pi r^2 + \pi r^2 + 4\pi r^2)}{6}$ $V = \frac{H(6\pi r^2)}{6} = \pi r^2 H$
	ESFERA		2r	0	0	πr^2	$V = \frac{2r(0 + 0 + 4\pi r^2)}{6}$ $V = \frac{8\pi r^3}{6} = \frac{4\pi r^3}{3}$
	CONE		H	πr^2	0	$\frac{\pi r^2}{4}$	$V = \frac{H(\pi r^2 + 0 + 4\left(\frac{\pi r^2}{4}\right))}{6}$ $V = \frac{H(\pi r^2 + \pi r^2)}{6}$ $V = \frac{H(2\pi r^2)}{6}$ $V = \frac{\pi r^2}{3} H$
	TRONCO DE CONE		H	πR^2	πr^2	$\pi \left(\frac{R+r}{2}\right)^2$	$V = \frac{H(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi \left(\frac{R+r}{2}\right)^2)}{6}$ $V = \frac{2\pi(R^2 + r^2 + Rr)H}{6}$ $V = \frac{H\pi(R^2 + r^2 + Rr)}{3}$
OBSERVAÇÕES		S_1 : Em esferas, por não possuir área da base inferior, o valor considerado será zero. S_2 : Em cones e esferas, por não possuir área da base superior, o valor considerado será zero. S_M : Em cones, a área da seção média, sempre será $\frac{1}{4}$ da área da base.					

3ª etapa:

Após concluir a apresentação das definições da fórmula de Simpson e suas relações com sólidos geométricos, o professor deve iniciar a resolução da lista de exemplos entregue aos alunos nas aulas 1 e 2 (APÊNDICE B) por meio da fórmula de Simpson.

Aula 5 e 6: Avaliação e Questionário

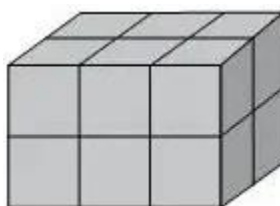
Objetivo da aula: Avaliar o entendimento dos alunos sobre as contribuições da fórmula de Simpson.

Atividades:

Será realizado uma avaliação com problemas de cálculo de volumes, analisando qual método escolhido na resolução pelos alunos: tradicional ou a fórmula de Simpson. Além disso, será aplicado um questionário (APÊNDICE D)

APÊNDICE B – LISTA DE EXEMPLOS (PRIMEIRO E SEGUNDO ENCONTRO)

1) (SAP SP — VUNESP 2011). Os produtos de uma empresa são embalados em caixas cúbicas, com 20 cm de aresta. Para transporte, essas embalagens são agrupadas, formando um bloco retangular, conforme mostrado na figura. Sabe-se que 60 desses blocos preenchem totalmente o compartimento de carga do veículo utilizado para o seu transporte. Pode-se concluir, então, que o volume máximo, em metros cúbicos, transportado por esse veículo é



- A) 4,96.
- B) 5,76.
- C) 7,25.
- D) 8,76.
- E) 9,60.

2) (PUC-RS) Em uma pirâmide quadrangular regular, a secção feita a 3 dm do vértice tem área igual a 45 dm^2 . Calcular o volume da pirâmide, sabendo que a sua altura é de 6 dm.

3) (Faap) Sabendo-se que uma lata de azeite cilíndrica tem 8 cm de diâmetro e 18,5 cm de altura e ainda que nela vem marcando o conteúdo 900 ml, o volume de ar contido na lata “cheia” e “fechada” é: (Adote $\pi = 3,14$)

- A) 29,44 ml
- B) 10,0 ml
- C) 15,60 ml

D) 21,72 ml

E) 35,50 ml

4) (UEMA) O Complexo Deodoro, que engloba as praças Deodoro, Pantheon e as alamedas Gomes de Castro e Silva Maia, no Centro de São Luís, passou por uma grande reforma. Foram colocadas esferas como objeto de decoração, conforme imagem a seguir.



Em matemática, chamamos de esfera de centro O e raio R o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio R e ainda que seu volume é calculado como sendo quatro terços do valor de π multiplicado pelo cubo do raio da esfera. (use $\pi = 3,14$).

O raio de uma das esferas é de, aproximadamente, 20 cm e todas as esferas são iguais.

O volume, em centímetros cúbicos, correspondente a 10 dessas esferas, é igual a, aproximadamente,

A) 33.933,34

B) 16.746,67

C) 334.933,33

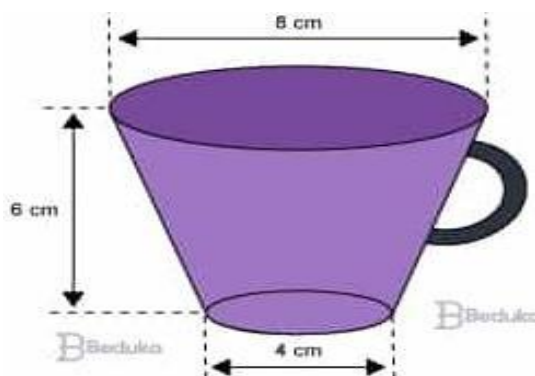
D) 188.400,00

E) 18.840,00

5) (UFAM PSC) Um copo de sorvete é um cone de 10cm de altura e 4cm de diâmetro na base. Um sorveteiro coloca no copo duas bolas de sorvete com formato esférico e que possui diâmetro de 4 cm. Se o sorvete derreter dentro do cone, então:

- A) Haverá transbordamento de $8\pi \text{ cm}^3$ de sorvete.
 B) Não haverá transbordamento e ainda sobrarão espaço no copo para $8\pi \text{ cm}^3$ de sorvete.
 C) Não haverá transbordamento, pois os dois sólidos possuem o mesmo volume.
 D) Haverá transbordamento de $10\pi \text{ cm}^3$ de sorvete.
 E) Não haverá transbordamento e ainda sobrarão espaço no copo para $10\pi \text{ cm}^3$ de sorvete.

6) (Mackenzie) Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura. Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é:



- A) 168 cm^3 .
 B) 172 cm^3 .
 C) 166 cm^3 .
 D) 176 cm^3 .
 E) 164 cm^3 .

7) (Site: fuvestibular) Em São Paulo, no Parque do Ibirapuera, há um monumento de concreto chamado de Obelisco aos Heróis de 1032, uma homenagem aos que morreram na Revolução Constitucionalista de 1932. Esse monumento tem a forma de um tronco de pirâmide de base quadrada e tem 72m de altura. Suas bases possuem arestas de 9m e 7m.

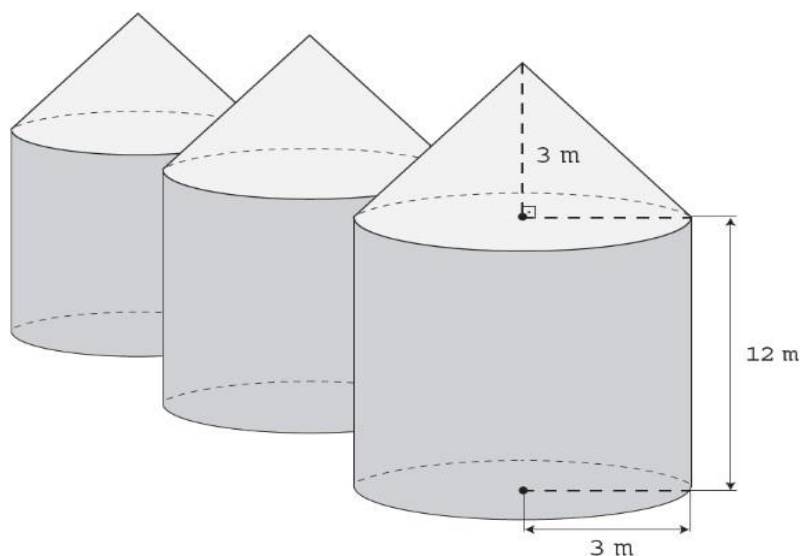
Determine o custo de concreto utilizado na construção do Obelisco sabendo que o preço do metro cúbico de concreto utilizado na obra é de R\$ 250,00.



- A) R\$ 800.000,00.
- B) R\$ 1.000.000,00.
- C) R\$ 1.158.000,00.
- D) R\$ 1.500.000,00.
- E) R\$ 2.200.000,00.

APÊNDICE C - ATIVIDADE (TERCEIRO ENCONTRO)

1) (Enem 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

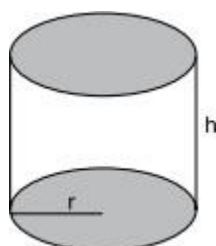


Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- A) 6.
- B) 16.
- C) 17.
- D) 18.
- E) 21.

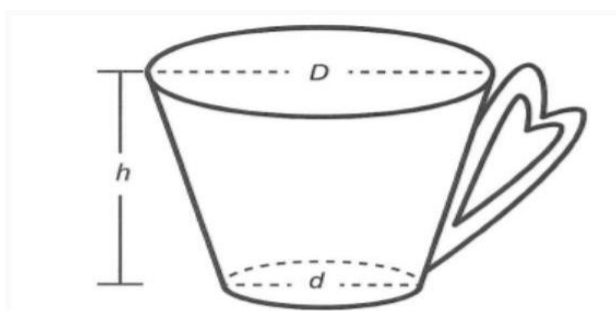
2) (Vunesp 2019) Analise o sólido geométrico da figura:



Se $h = 48$ cm e $r = 17$ cm, esse sólido tem volume igual a: (use $\pi = 3,14$)

- A) $0,082$ m³.
- B) $0,068$ m³.
- C) $0,123$ m³.
- D) $0,044$ m³.
- E) $0,246$ m³.

3) (ENEM 2021) Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração.



Sabe-se que $1\text{cm}^3 = 1$ mL e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base). Utilize 3 como aproximação para π .

Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

- A) 216
- B) 408
- C) 732
- D) 2 196
- E) 2 928

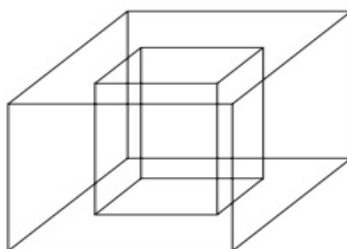
4) (ENEM 2022) Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

- A) 2
- B) 3
- C) 6
- D) 12
- E) 24

5) (IFRN - modificada) Um dos mistérios da humanidade consiste em saber como as pirâmides, como as do Sol e da Lua, foram construídas por civilizações que não tinham o aporte tecnológico que há na atualidade. Qual volume para se construir, em argila, uma escultura maciça com formato de pirâmide, com 15 m de altura, se a área da seção média é igual a 25 m^2 ?

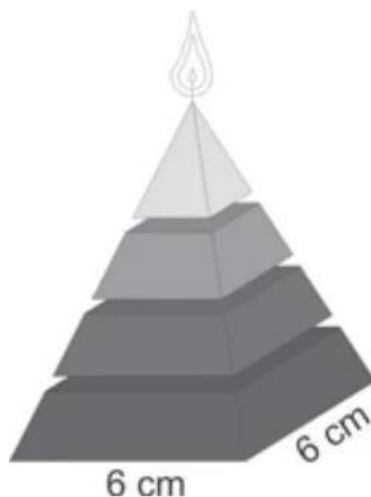
6) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

- A) 12 cm^3
- B) 64 cm^3
- C) 96 cm^3
- D) 1216 cm^3

7) (ENEM 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- A) 156 cm^3
- B) 189 cm^3

C) 192 cm^3

D) 216 cm^3

E) 540 cm^3

APÊNDICE D - QUESTIONÁRIO

- 1) Você já conhecia a fórmula de Simpson antes de participar da sequência didática?
 - a) Sim
 - b) Não

- 2) Você acredita que a fórmula de Simpson é uma abordagem útil para o cálculo de volume de sólidos geométricos?
 - a) Sim
 - b) Não

- 3) O material utilizado na sequência didática (slides, cópias de material, exercícios etc.) foi acessível e útil?
 - a) Sim
 - b) Não

- 4) Você estava motivado para participar da sequência didática?
 - a) Sim
 - b) Não
 - c) Não tenho certeza

- 5) Você sentiu que a sequência didática teve um impacto positivo no seu entendimento de geometria e no cálculo de volume?
 - a) Sim
 - b) Não
 - c) Não tenho certeza

- 6) Para você, a fórmula de Simpson é uma abordagem que possibilita o cálculo de volume de sólidos geométricos de forma mais fácil ou aumenta a sua complexidade?
 - a) Mais fácil
 - b) Maior complexidade

- 7) Caso tenha marcado o item (b) na questão anterior, você acredita que essa maior complexidade se deve ao fato de já estar acostumado com abordagem tradicional, aprendendo diversas fórmulas diferentes para cada tipo de sólido?
 - a) Sim
 - b) Não

- 8) Você acredita que essa abordagem (fórmula de Simpson), poderia substituir nos anos iniciais do Ensino Médio, as inúmeras fórmulas tradicionalmente adotadas nas aulas?
 - a) Sim
 - b) Não

9) Caso tenha marcado o item (b) na questão anterior, você acredita que essa substituição ocasionaria melhorias na aprendizagem, oferecendo a possibilidade de resolver problemas de maior complexidade?

- a) Sim
- b) Não

10) Na sua opinião, as questões abordadas na primeira etapa, que foram respondidas pelo professor, possuíam nível: abaixo, igual ou acima das questões abordadas na avaliação final respondida sem auxílio do professor?

- a) Nível abaixo
- b) Mesmo nível
- c) Nível acima

11) Caso seja pertinente, acrescente algum comentário sobre a vivência da sequência didática.
