

Araken Jessé da Silva Amaral

***Geometria Esférica e Cartografia: uma proposta de
estudo e atividades para o ensino médio***

Niterói – RJ

Junho / 2014

Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Araken Jessé da Silva Amaral

Geometria Esférica e Cartografia: uma proposta de estudo e atividades para o ensino médio

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:

Lhaylla dos Santos Crissaff

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Junho / 2014

Trabalho de conclusão de curso sob o título “*Geometria Esférica e Cartografia: uma proposta de estudo e atividades para o ensino médio*”, defendida por Araken Jessé da Silva Amaral e aprovada em 24 de junho de 2014, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Lhaylla dos Santos Crissaff
Doutora em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Marcelo Ferreira Farias
Doutor em Matemática pela UFRJ

Miriam del Milagro Abdon
Doutora em Matemática pelo IMPA

À minha esposa Priscilla Guez.

Agradecimentos

À minha esposa, pelo carinho, apoio e paciência nos momentos em que estive ocupado.

Aos meus pais, meus irmãos e meus sobrinhos, pelo carinho e apoio.

À minha orientadora Lhaylla Crissaff, pela sua dedicação, incentivo e paciência.

Aos pais e irmã de minha esposa.

Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo.

“E quem desta maneira andar irá caminhar direito.” (Pedro Nunes)

Resumo

No presente trabalho, inicialmente, trataremos da geometria euclidiana que fora sistematizada pelo matemático Euclides a partir de cinco conceitos primitivos, os postulados. Também abordaremos algumas tentativas frustradas da demonstração do quinto postulado a partir dos quatro anteriores e o conseqüente surgimento das geometrias não euclidianas. A seguir, apresentaremos conceitos básicos da geometria esférica comparando-os com os da geometria euclidiana. Além disso, tais conceitos serão utilizados para desenvolvermos elementos da cartografia.

A partir do pressuposto que as geometrias não euclidianas têm sido pouco exploradas e até mesmo não mencionadas no ensino básico, finalizaremos este estudo propondo atividades que possam contribuir com aprendizado geométrico do aluno do ensino médio, salientando que é possível desenvolver conceitos de geometrias não euclidianas nesse nível de ensino. Desta forma, as atividades sugeridas visam desenvolver conceitos da geometria esférica, de forma que os alunos possam perceber sua aplicação e importância no mundo real através de uma abordagem interdisciplinar com a Geografia. Para o desenvolvimento das atividades, foi adotado o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio geométrico como fundamentação teórica.

Palavras-chave: geometria não euclidiana; geometria esférica; cartografia; modelo de van Hiele.

Abstract

The present work, initially, will deal with euclidean geometry which was systematized by the mathematician Euclid and based on five primitive concepts, the postulates. We also discuss some frustrated attempts to demonstration of fifth postulate using the four previous, and the consequent emergence of non-Euclidean geometries. Below, we will present the basic concepts of spherical geometry compared with the basic concepts of euclidean geometry. Moreover, these concepts will be used to develop elements of cartography.

Assuming that non-euclidean geometries have been little explored and even not mentioned in basic education, this study will conclude proposing activities that may contribute to student's geometric apprenticeship in high school, emphasizing that is possible to develop concepts of non-euclidean geometries on that level of education. Thus, the suggested activities aim to develop concepts of spherical geometry, in way that the students can realize their importance and application in the real world through an interdisciplinary approach with the Geography. For development of activities, was adopted the van Hiele model for the development of geometric thought which was used as theoretical foundation.

Keywords: non-Euclidean geometry; spherical geometry; cartography; van Hiele model.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 13
2	Panorama Histórico	p. 16
2.1	Girolamo Saccheri (1667 - 1733)	p. 21
2.2	Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)	p. 23
2.3	Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)	p. 24
2.4	Johann Bolyai (1802 - 1860)	p. 25
2.5	Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793 - 1856)	p. 26
2.6	Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)	p. 27
3	Geometria Esférica	p. 29
3.1	Introdução	p. 29
3.2	Geometria Esférica	p. 30
4	Cartografia	p. 38
4.1	História da Cartografia	p. 38
4.2	Projeções Cartográficas	p. 42
4.2.1	Projeção de Mercator	p. 47
4.2.2	Projeção de Peters	p. 48
4.3	Escalas	p. 48
4.4	Coordenadas Geográficas	p. 49

4.4.1	Paralelos e Meridianos	p. 49
4.4.2	Latitude e longitude de um ponto sobre a superfície terrestre	p. 50
4.4.3	Fuso Horário	p. 51
4.5	Coordenadas cartesianas no Espaço	p. 52
4.6	Relação entre coordenadas cartesianas e geográficas	p. 54
5	Proposta Didática	p. 56
5.1	Introdução	p. 56
5.2	Modelo de van Hiele	p. 57
5.3	Atividades	p. 59
6	Considerações Finais	p. 68
	Referências	p. 70

Lista de Figuras

2.1	Parte de uma página da primeira edição impressa de <i>Os Elementos</i> de Euclides, feita em Veneza em 1482.	p. 17
2.2	Estátua de Euclides no Museu de História Natural da Universidade de Oxford.	p. 18
2.3	John Playfair.	p. 20
2.4	Demonstração do Postulado de Playfair a partir do postulado das paralelas.	p. 20
2.5	Demonstração do postulado das paralelas a partir do postulado de Playfair.	p. 21
2.6	Quadrilátero de Saccheri.	p. 22
2.7	Carl Friedrich Gauss.	p. 25
2.8	Johann Bolyai.	p. 26
2.9	Nicolai Ivanovich Lobachevski.	p. 27
2.10	Georg Friedrich Bernhard Riemann.	p. 28
3.1	Esfera de centro O e raio r	p. 30
3.2	Círculos determinados pela interseção de dois planos e uma esfera.	p. 30
3.3	Linha do Equador e um meridiano.	p. 31
3.4	Círculos máximos contendo os antípodas A e B	p. 31
3.5	Arco de círculo máximo determinado por A e B	p. 32
3.6	Ângulo AOB correspondente ao menor arco AB	p. 32
3.7	Ângulo esférico.	p. 33
3.8	Triângulos esféricos.	p. 34
3.9	Triângulo ABC e seu antípoda $A'B'C'$	p. 35
3.10	Seis fusos esféricos cobrindo a esfera.	p. 35

4.1	Representação do mapa-múndi segundo Anaximandro de Mileto e Hecateu de Mileto, respectivamente.	p. 39
4.2	Esquema do método utilizado por Eratóstenes.	p. 40
4.3	Mapa de Ptolomeu.	p. 40
4.4	Tábua de Peutinger.	p. 41
4.5	Gerard Mercator.	p. 41
4.6	Mapa-múndi de Mercator de 1569.	p. 42
4.7	Casca de laranja.	p. 43
4.8	Esquema de uma projeção geométrica em uma superfície cilíndrica.	p. 44
4.9	Projeções gnômica, estereográfica e ortográfica respectivamente, em uma superfície plana.	p. 44
4.10	Superfície de projeção plana e polar.	p. 45
4.11	Superfície de projeção cilíndrica.	p. 45
4.12	Projeções cilíndricas normal, transversa e oblíqua, respectivamente.	p. 46
4.13	Superfície de projeção cônica.	p. 46
4.14	Mapa-múndi segundo projeção de Peters.	p. 48
4.15	Escala Gráfica.	p. 49
4.16	Linhas de latitude e longitude.	p. 51
4.17	Fusos horários - Terra vista do Pólo Norte.	p. 52
4.18	Fusos horários no mundo em 2013.	p. 52
4.19	Sistema OXYZ.	p. 53
4.20	Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas geográficas.	p. 54
5.1	Cortes na esfera.	p. 59
5.2	Círculos.	p. 60
5.3	Arco de círculo máximo.	p. 60
5.4	Globo terrestre.	p. 61
5.5	Círculo máximo no globo terrestre.	p. 62

5.6	Arco de círculo máximo no globo terrestre.	p. 62
5.7	Círculo máximo no globo terrestre e uma reta no mapa-múndi.	p. 63
5.8	Círculos máximos no globo terrestre.	p. 64

1 *Introdução*

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais ([6]), a importância da geometria no currículo da Matemática na educação básica se justifica pelo fato dos seus conceitos possibilitarem que o aluno desenvolva uma forma especial de raciocinar, entender e representar o mundo que o cerca. Como na geometria é possível explorar diversos problemas relacionados ao mundo real, acreditamos que o aluno possa desenvolver um interesse espontâneo por estudá-la.

Situações cotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno. (BRASIL, 1998, p.122)

Somos frequentemente questionados pelos alunos sobre a utilidade ou aplicação de determinado tópico de Matemática em suas vidas. Estes questionamentos levam os professores de Matemática a refletir sobre a escolha de estratégias adequadas para abordar os conteúdos relativos a cada ano escolar, de forma com que o aluno os perceba relevantes em seu dia-a-dia.

Ainda que situações do cotidiano sejam importantes para a compreensão dos assuntos nas aulas de Matemática, cabe ressaltar que esse procedimento não deve ser empregado como única referência na inserção de novos assuntos, conforme orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais que citamos a seguir:

[...] não se deve perder de vista as características especulativo, estético não imediatamente pragmático do conhecimento matemático sem os quais se perde parte de sua natureza. Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o permanente apelo das aplicações às mais variadas atividades humanas, das mais simples na vida cotidiana, às mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da Matemática. A indissociabilidade desses dois aspectos fica evidenciada pelos inúmeros exemplos de belas construções abstratas originadas em problemas aplicados e, por outro lado, de surpreendentes aplicações encontradas para as mais puras especulações. (BRASIL, 1998, p. 24)

No que se refere à geometria, Pavanello apud Crescenti ([9]) ressalta que, historicamente em nosso país, ela sempre foi deixada de lado em detrimento à álgebra e à aritmética. De fato, temos percebido que tópicos de geometria geralmente são pouco explorados e, quando explorados, ocorrem através da reprodução de procedimentos e pela transmissão de um conjunto de resultados prontos. Tal abordagem pode fazer com que o aluno não perceba que muitos deles foram obtidos a partir da busca humana por soluções de problemas práticos ou decorrentes da natureza.

Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 24)

Ainda que a importância da geometria euclidiana seja indiscutível em diversas áreas do conhecimento e na resolução de problemas cotidianos, o aperfeiçoamento das tecnologias de observação do universo mostrou sua insuficiência para resolver alguns problemas do mundo científico, como os relacionados a grandes distâncias e a Teoria da Relatividade desenvolvida por Albert Einstein, na qual a geometria espacial utilizada é uma geometria não euclidiana. Entretanto, ainda é comum que surja o questionamento: “Para que servem as geometrias não euclidianas?”.

Também diante desta questão, ao final de 2006, a Secretaria Estadual de Educação do estado do Paraná divulgou as Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica, nas quais estão os conteúdos estruturantes para o ensino básico. Em relação à geometria, tais diretrizes propõem, dentre outros tópicos, noções de geometrias não euclidianas tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

[...] Perceba a necessidade das geometrias não-euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; Compreenda a necessidade das geometrias não euclidianas para o avanço das teorias científicas; Articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; Conheça os conceitos básicos da Geometria Elíptica, Hiperbólica e Fractal. (PARANÁ, 1998, p. 81)

No Estado do Rio de Janeiro, por exemplo, não encontramos tópicos de geometrias não euclidianas para o ensino básico nos currículos mínimos propostos pela Secretaria Estadual de Educação. Podemos perceber que geralmente essas geometrias não são ao menos citadas na maioria dos livros didáticos. Além disso, ressaltamos a dificuldade dos professores em abordar tais geometrias, decorrente também do fato de que os cursos de formação de professores,

em geral, não as contemplarem em suas estruturas curriculares ([22]). No entanto, aqui não ingressaremos nessa discussão.

Acreditamos que explorar tópicos de geometria não euclidiana no ensino básico, em particular a geometria esférica, pode favorecer o aprendizado geométrico do aluno já que ela se faz presente em sua vida diária, conforme veremos nos próximos capítulos. Porém, esse cenário não é o mais comum.

Neste trabalho propomos uma abordagem interdisciplinar da geometria esférica, com o intuito de promover uma relação de saberes inerentes a essa geometria e à Geografia. Este trabalho está dividido como se segue.

No segundo capítulo, trataremos da sistematização da geometria euclidiana a partir de cinco conceitos primitivos denominados postulados estabelecidos na obra de Euclides, *Os Elementos*. Apresentaremos ainda um histórico sobre algumas tentativas de demonstração do quinto postulado, que ocupou vários matemáticos ao longo dos séculos e motivou o surgimento de novas geometrias.

O terceiro capítulo trata da geometria esférica, que é uma geometria não euclidiana por não satisfazer a todos os postulados euclidianos. Além disso, evidenciaremos diferenças entre seus elementos e da geometria euclidiana.

No quarto capítulo, recorreremos à cartografia com o intuito de ressaltar a necessidade da geometria esférica na resolução de problemas relacionados a grandes distâncias. Ainda neste capítulo, faremos um histórico sobre o estudo dos mapas, evidenciando dificuldades de representar o globo terrestre em um plano por meio das projeções cartográficas.

O quinto capítulo é constituído de uma sequência de atividades acerca da geometria esférica, mostrando sua conexão com a Geografia. Nestas atividades, utilizaremos elementos da geometria esférica para definir elementos básicos de cartografia, bem como os utilizaremos para resolver problemas simples de localização e navegação. Em tais atividades, utilizaremos como referencial teórico o modelo de van Hiele para desenvolvimento do raciocínio geométrico.

2 *Panorama Histórico*

Desde os primeiros dias da civilização, a produção do conhecimento matemático tem influenciado o desenvolvimento da humanidade. Assim, com o decorrer dos anos, o homem tomou posse deste conhecimento para resolver os problemas do seu cotidiano e continua desenvolvendo-o conforme suas necessidades. Como parte desta ciência, acredita-se que o saber geométrico surge a partir das ideias extraídas da natureza e na busca por alternativas de sobrevivência em diferentes lugares do planeta por povos distintos. Registros bibliográficos evidenciam o conhecimento da Matemática já no Antigo Egito, na Babilônia, na Índia e na Grécia por volta de 3000 a.C.. Entretanto, para Barbosa ([4]) podemos estabelecer o ponto inicial da geometria sob a forma como a conhecemos, na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu *Os Elementos* (por volta do ano 300 a.C.).

Após a morte do rei Alexandre (356 a.C. - 323 a.C.) da Macedônia, conhecido como O Grande, o seu império foi repartido entre três dos seus líderes militares. Um desses líderes foi o General Ptolomeu I (366 a.C. - 283 a.C.), ao qual coube o Egito e escolheu Alexandria como sua capital.

Após começar a governar, Ptolomeu I iniciou a construção da Universidade de Alexandria, que foi a primeira instituição nos moldes que conhecemos hoje. Por volta do ano 300 a.C., a universidade abriu suas portas e manteve suas atividades até o século VII d.C. A Universidade de Alexandria era bem provida de recursos, contendo salas de aula, laboratórios, jardins e outras instalações, como sua biblioteca que era bem equipada e por muito tempo foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo. Assim, Alexandria ficou conhecida como a mais notável metrópole intelectual por quase um milênio.

Com o objetivo de montar uma equipe de intelectuais na universidade, Ptolomeu I recorreu a Atenas convidando, dentre outros, o matemático Euclides, escolhido para chefiar o departamento de Matemática. Pouco se sabe sobre as origens desse notável matemático. Acredita-se que ele seja oriundo de Atenas e sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Para Eves ([11]), “*é desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a persona-*

lidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor” (p.167).

Euclides de Alexandria, assim conhecido por ter ensinado Matemática em Alexandria, escreveu várias obras científicas acerca do conhecimento geométrico de sua época, entre elas a mais famosa é *Os Elementos*, que foi uma obra que sistematizou todo o conhecimento matemático da época. Segundo Eves ([11]), é provável que *Os Elementos* sejam uma compilação de trabalhos anteriores, reunindo proposições já conhecidas e até demonstradas pelos predecessores de Euclides, e muitas outras demonstradas e aperfeiçoadas pelo próprio Euclides. Entretanto, uma das características que diferencia *Os Elementos* das obras anteriores é a formalidade utilizada na exposição do seu conteúdo. Devido a tal característica, Eves ([11]) diz que *Os Elementos* tornaram-se o protótipo da Matemática Moderna. Nele as demonstrações das proposições são realizadas de forma lógica e dedutiva, a partir de poucas afirmações previamente estabelecidas (axiomas e postulados). Nesse sentido, Coutinho ([8]) considera a geometria de Euclides como a primeira teoria matemática a ser axiomatizada.



Figura 2.1: Parte de uma página da primeira edição impressa de *Os Elementos* de Euclides, feita em Veneza em 1482. Fonte: [24].

Os Elementos não é apenas um compêndio de todo o conhecimento geométrico, trata-se de um texto que engloba toda a Matemática elementar já estudada até a época. Essa famosa obra de Euclides é dividida em treze livros, cuja organização, segundo Silva ([21]) é feita da forma a seguir. Os livros I e II apresentam grande parte dos primeiros conceitos, noções comuns, postulados e os primeiros resultados da geometria. No primeiro livro são apresentadas 23 definições, 9 noções comuns e 5 postulados. Já no segundo livro, são apresentados conceitos da álgebra geométrica. No livro III, Euclides trata do círculo; no livro IV, discute-se a construção de certos polígonos regulares; no livro V, Euclides apresenta a teoria das proporções de Eudoxo; no livro VI, a semelhança de figuras; nos livros VII, VIII e IX, a teoria dos números. Já nos livros X, XI, XII e XIII são abordadas a incomensurabilidade e a geometria espacial.

A primeira impressão da obra de Euclides foi feita em Veneza em 1482 (figura 2.1). Calcula-

se que desde então, pelo menos mil edições foram publicadas. *Os Elementos* constituem não só a mais antiga e importante obra matemática grega a chegar até nós, mas também uma das mais influentes de todos os tempos. Segundo Boyer([5]),

Talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas edições, e certamente nenhuma obra matemática teve influência comparável à de *Os Elementos* de Euclides. Como é apropriado o nome que os sucessores de Euclides lhe deram, “O Elementador!” (BOYER, 1974, p.87)

De acordo com Eves ([11]), provavelmente devido a mudanças ou acréscimos feitos por editores, não se sabe com exatidão quais foram os axiomas e postulados adotados por Euclides em sua versão. Entretanto, este mesmo autor salienta que há evidências de que Euclides distinguia os axiomas dos postulados, assumindo os axiomas como suposições comuns a todas as ciências, enquanto os postulados eram entendidos como suposições peculiares a uma ciência particular. A seguir serão listados cinco axiomas e os cinco postulados de Euclides segundo esse mesmo autor.



Figura 2.2: Estátua de Euclides no Museu de História Natural da Universidade de Oxford. Fonte: [25].

Axiomas:

- Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
- Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.
- Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
- O todo é maior do que a parte.

Postulados:

- É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
- É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.
- É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Com esses axiomas e postulados, Euclides construiu toda a geometria hoje denominada *euclidiana*, que tradicionalmente encontramos no ensino básico. Esse matemático era conhecido pela sua habilidade ao se expor e a sua capacidade de ensinar, o que para Boyer ([5]) foi a chave do seu sucesso.

O quinto postulado, também conhecido como o postulado das paralelas, se tornou o principal alvo de críticas da geometria euclidiana, já que após a sua elaboração surgiram várias tentativas de demonstrar a sua não validade ou até mesmo demonstrá-lo a partir dos primeiros postulados, o que o excluiria da lista de conceitos primitivos promovendo-o a um teorema da geometria euclidiana. Segundo Eves([11]),

As tentativas de provar o postulado das paralelas como um teorema a partir dos restantes nove “axiomas” e “postulados” ocuparam os geômetras por mais de 2000 anos e culminaram em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da matemática moderna. Foram dadas muitas “demonstrações” do postulado mas, cedo ou tarde, mostrou-se que cada uma baseava-se numa suposição tácita equivalente a ele. (EVES, 2011, p.539)

A partir das várias tentativas de demonstrar o quinto postulados de Euclides, surgiram muitas afirmações equivalentes a ele. Dessas afirmações, a mais conhecida é a elaborada pelo matemático escocês John Playfair (1748 - 1819). Esse matemático substituiu o quinto postulado de Euclides por outro de formulação mais simples e que leva o seu nome, ainda que tal formulação já tivesse sido enunciada pelo filósofo grego Proclo de Licia (412 - 485). Assim, Playfair diz que por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada. A seguir, vamos provar que esta formulação é equivalente ao quinto postulado de Euclides. Para demonstrar esse resultado, iremos utilizar a proposição 27 do livro I de *Os Elementos*

que afirma que se uma linha reta, cortando outras duas linhas retas, determinar ângulos alternos congruentes, então as linhas retas são paralelas entre si.



Figura 2.3: John Playfair. Fonte: Wikipedia.

Primeiramente, vamos deduzir a afirmação de Playfair tomando como hipótese os postulados de Euclides. Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Tracemos uma reta t , perpendicular a r que contenha o ponto P . Tracemos uma reta s perpendicular a t que contenha o ponto P (veja figura 2.4). Pela proposição 27 de Euclides, as retas r e s são paralelas. Portanto, existe uma reta s paralela à reta r passando por P .

Para provarmos a unicidade da reta s , suponhamos que exista outra reta paralela à reta r passando por P , a qual denotaremos por s' . Esta reta forma um ângulo agudo com t . Portanto, pelo quinto postulado de Euclides, concluímos que s' intercepta r , que é um absurdo. Assim, a reta s é a única paralela à reta r que contém o ponto P .

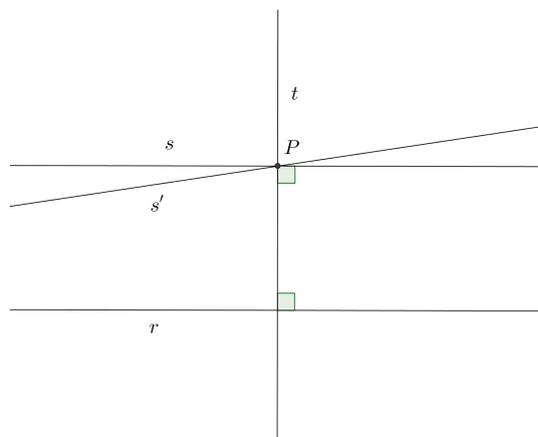


Figura 2.4: Demonstração do Postulado de Playfair a partir do postulado das paralelas.

Agora, provaremos o postulado das paralelas tomando como hipótese os quatro primeiros postulados de Euclides e o axioma de Playfair.

Sejam r e s duas retas tais que ao traçarmos uma reta t intersectando-as, esta última faça ângulos colaterais internos α e β com r e s , respectivamente, de forma que $\alpha + \beta$ seja menor do que dois ângulos retos. Seja P o ponto de interseção de s e t . Tracemos pelo ponto P uma reta s' formando um ângulo β' com a reta t tal que $\alpha + \beta'$ seja igual a dois ângulos retos (veja figura 2.5). Pela proposição 27 de Os Elementos, a reta s' é paralela à reta r . Como as retas s e s' são distintas e, pelo axioma de Playfair, s' é a única reta paralela a reta r passando pelo ponto P , temos que as retas r e s não são paralelas. Portanto, r e s se intersectam.

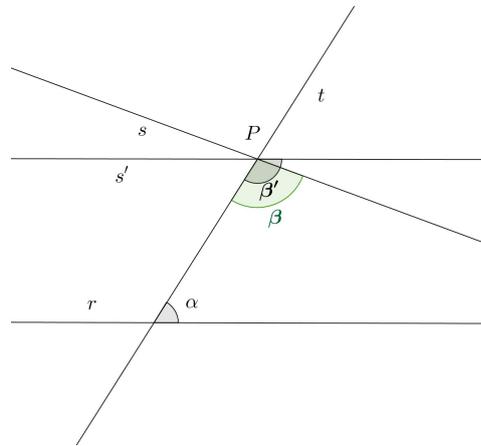


Figura 2.5: Demonstração do postulado das paralelas a partir do postulado de Playfair.

Durante muito tempo, matemáticos se empenharam na busca da demonstração do polêmico quinto postulado a partir dos quatro anteriores. Ainda que essa pretensão não tivesse sido alcançada, muitos deles não só estudaram intimamente a geometria euclidiana e aprofundaram seus conhecimentos dela, como também inauguraram bases de novas geometrias, que viriam a ser denominadas *geometrias não euclidianas*, tão consistentes quanto às da geometria euclidiana.

De acordo com Barbosa ([4]), ao longo dos séculos as tentativas de provar o quinto postulado contaram com a participação de praticamente todos os grandes nomes da Matemática que viveram até o século XIX. Nas próximas seções deste capítulo, serão tratadas as colaborações de alguns desses matemáticos.

2.1 Girolamo Saccheri (1667 - 1733)

Para Eves ([11]), a primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas só foi publicada em 1773 e seu autor é o jesuíta italiano Girolamo Saccheri. Nascido em San Remo, hoje Itália, Saccheri ensinava em colégios de sua ordem. Partidário das demonstrações pela

redução ao absurdo, Saccheri publicou os primeiros estudos direcionados à análise crítica da estrutura da geometria de Euclides. Ele foi um dos precursores das geometrias não euclidianas e criador do famoso quadrilátero que leva seu nome.

Deve-se a este matemático uma das mais conceituadas investigações sobre o postulado das paralelas. Admitindo os quatro primeiros postulados como verdadeiro e negando o último, ele pretendia obter resultados absurdos ou contraditórios que confirmariam a necessidade da existência do polêmico quinto postulado. Com esse objetivo, Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$, cujos ângulos dos vértices A e B são retos e os segmentos AD e BC têm o mesmo comprimento. Este quadrilátero ficou conhecido com *Quadrilátero de Saccheri*.

Inicialmente, traçando as diagonais AC e BD e usando teoremas simples de congruência, que se encontram entre as proposições iniciais de Euclides, Saccheri mostrou sem grandes dificuldades que os ângulos dos vértices C e D são congruentes, sendo eles agudos, retos ou obtusos.



Figura 2.6: Quadrilátero de Saccheri.

Ao supor que os ângulos dos vértices C e D fossem agudos ou obtusos, Saccheri esperava encontrar um absurdo, e assim estabelecer por raciocínio indireto que a hipótese dos ângulos dos vértices C e D serem retos fosse uma consequência necessária dos quatro primeiros postulados de Euclides. Assumindo a infinitude da reta, Saccheri imediatamente eliminou a hipótese do ângulo obtuso, mas o caso referente à hipótese do ângulo agudo mostrou-se muito mais difícil. Ainda acreditando nesse projeto, ele passou a demonstrar teoremas após teoremas, mas não encontrava nenhuma falha lógica.

Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada geometria não euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. (EVES, 2011, p.540)

Podemos dizer que Saccheri obteve, inconscientemente, consequências de uma geometria que negasse o quinto postulado sem, contudo, ser inconsistente.

Saccheri deixou de fazer o que teria sido sem dúvida a descoberta mais importante do século dezoito – a geometria não euclidiana. Assim seu nome permaneceu desconhecido por mais um século, pois a importância de sua obra não foi reconhecida pelos que o seguiram. (BOYER, 1974 , p.321)

No ano em que morreu, Saccheri publicou um livro chamado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides com toda falha retirada, tradução nossa). Seu trabalho recebeu pouca consideração de seus colegas e imediatamente foi esquecido. Somente em 1889, seu trabalho foi retomado pelo seu conterrâneo Eugênio Beltrami. Trinta e três anos após a publicação da obra de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert escreveu uma investigação semelhante à dele que, porém, só foi publicada depois de sua morte.

2.2 Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)

Assim como Saccheri, esse matemático suíço também tentou provar o quinto postulado e não obteve resultado satisfatório. Entretanto, Lambert parece ter tido consciência de não ter conseguido e, assim ele escreveu:

Provas do postulado de Euclides podem ser levadas até um ponto tal que aparentemente só falta uma bagatela. Mas uma análise cuidadosa mostra que nessa aparente bagatela está no cerne da questão; usualmente ela contém ou a proposição que se quer provar ou um postulado equivalente a ele. (LAMBERT apud BOYER, 1974, p.340)

Numa tentativa de completar o que Saccheri tentara, uma prova de que negar o postulado das paralelas de Euclides leva a uma contradição, Lambert adotou como ponto de partida um quadrilátero com três ângulos retos, hoje conhecido como *Quadrilátero de Lambert*. Então, considerando que o quarto ângulo pode ser agudo, reto ou obtuso, ele obteve como consequência que a soma dos ângulos internos de um triângulo seria respectivamente menor que, igual a ou maior que dois ângulos retos.

De posse dessas hipóteses, ele mostrou que quando a soma excede ou é menor que dois ângulos retos, ela é proporcional à área do triângulo. No caso do ângulo obtuso, tem-se uma situação semelhante a um teorema da geometria esférica, que apresentaremos mais adiante. Quanto ao caso agudo, ele imaginou que tal hipótese se enquadraria em uma geometria sobre uma nova superfície. Em 1868, Eugênio Beltrami mostrou que Lambert estava certo em sua conjectura sobre a existência dessa nova superfície, hoje denominada pseudoesfera. Como Saccheri, Lambert conseguiu eliminar a hipótese do ângulo obtuso ao assumir a infinitude da reta, bem como nada conseguiu concluir a respeito do caso agudo.

De acordo com Boyer ([5]), Lambert foi quem mais perto chegou da verdade sem descobrir as geometrias não euclidianas.

2.3 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Além de ter contribuído em diversas áreas da ciência, este matemático alemão foi o primeiro a ter pleno conhecimento da possibilidade de abordar o problema do quinto postulado de uma maneira nova. Por volta de 1831, ele chegou à concepção de uma geometria independente do quinto postulado de Euclides depois de vinte anos de tentativas esporádicas de prová-lo.

Nem todos os resultados de Gauss foram conhecidos durante a sua vida. Sua ideia a respeito da possibilidade de uma geometria alternativa confrontava-se com a teoria do espaço, criada pelo filósofo alemão Emmanuel Kant (1724-1804). Naquela época, o pensamento filosófico dominante era fortemente influenciado pela teoria kantiana, que era alicerçada pela geometria euclidiana tida naquele momento como verdade absoluta.

A teoria kantiana sustentava que o espaço é uma estrutura já existente no espírito humano, e que os postulados da geometria euclidiana são juízos a priori impostos ao espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio consistente sobre o espaço.” (EVES, 2011, p.545)

Segundo Silva ([21]), a filosofia de Kant havia sido tomada pela Igreja Romana e devido à Inquisição, qualquer posição contrária à filosofia dominante poderia ser arriscada. Portanto, é compreensível que Gauss tenha sido prudente ao não compartilhar todas as suas ideias perante a comunidade científica.

Durante anos de estudos em Gottingen, Gauss manteve amizade com o húngaro Wolfgang Bolyai (1775-1856), um matemático muito talentoso. Entretanto, foi seu filho, Johann Bolyai (1802-1860), quem progrediu diante do problema do quinto postulado de Euclides. Gauss e Wolfgang mantiveram contato por correspondência durante um longo tempo e frequentemente discutiam sobre o postulado das paralelas.

Wolfgang desistiu de tentar prová-lo em desespero e se Gauss tivesse desenvolvido e publicado suas ideias sobre o postulado das paralelas, ele seria saudado como o inventor da geometria não-euclidiana, mas o silêncio sobre o assunto teve como resultado que o crédito coube a outros. (BOYER, 1974, p.383)

Acredita-se que Gauss tenha sido o maior matemático de sua época. Não só por ter sido um dos primeiros a perceber a impossibilidade de demonstrar o quinto postulado, como também o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides.



Figura 2.7: Carl Friedrich Gauss. Fonte: Wikipedia.

2.4 Johann Bolyai (1802 - 1860)

Filho de Wolfgang Bolyai, Johann foi um oficial húngaro do exército que se mostrou ainda jovem interessado pela Matemática, dedicando-se também ao problema do postulado das paralelas. Quando seu pai, que passara boa parte da sua vida tentando provar o quinto postulado descobriu que seu próprio filho estava empenhado no problema, o escreveu:

Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso também pode tomar todo o seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida! (BOLYAI apud BOYER, 1974, p.397)

Por volta de 1820, Johann começou a obter resultados relevantes ao substituir o quinto postulado por uma afirmação contrária. Ao negar o quinto postulado, considerando a formulação de Playfair, dois casos foram considerados:

- (1) não existe reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dessa reta;
- (2) existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta.

Esse matemático dedicou-se ao segundo caso e a geometria na qual esse caso é válido é atualmente chamada de *geometria hiperbólica*. Ao substituir o postulado das paralelas por (1), tem-se a *geometria elíptica*. Partindo da hipótese (2), Johann desenvolveu o que chamou de *Ciência Absoluta do Espaço*. Suas reflexões foram enviadas ao seu pai que as publicou em 1832 na forma de um apêndice de uma obra que tinha concluído, *O Tentamen*, na qual Wolfgang apresentava uma tentativa de fundamentar rigorosa e sistematicamente a geometria, a aritmética, e a álgebra. Em 1831, Wolfgang enviou uma carta a Gauss desejando saber sua opinião sobre os estudos do seu filho. Quando, em 1832, Gauss tomou conhecimento do trabalho de Johann, escreveu uma carta a Wolfgang dizendo que quase tudo que Johann havia descoberto, ele já sabia.



Figura 2.8: Johann Bolyai. Fonte: [26].

2.5 Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793 - 1856)

Na mesma época de Johann, o matemático russo Lobachevski também desenvolveu uma geometria ao negar o quinto postulado. Entretanto, não temendo o impacto que suas descobertas pudessem causar diante de uma teoria aceita como absoluta, Lobachevski publicou em 1829, originalmente em russo, o artigo *On the Principles of Geometry* (Princípios da Geometria, tradução nossa) que, para Boyer ([5]) marca oficialmente o nascimento das geometrias não euclidianas. Convencido de que o quinto postulado de Euclides não pudesse ser provado a partir dos quatro primeiros e com a divulgação do artigo de 1829, Lobachevski tornou-se o primeiro matemático a divulgar uma geometria construída sobre uma hipótese em conflito direto com a do postulado das paralelas. Assim, compartilhando da formulação de Playfair, Lobachevski sugeriu a existência de mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dessa reta. Mesmo sua geometria sendo logicamente válida, ela parecia tão contrária ao senso comum que o próprio Lobachevski a denominou *geometria imaginária*.

A criação da geometria de Lobachevsky não só libertou a geometria como também teve um efeito semelhante com a matemática como um todo. A matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos. A criação das geometrias não euclidianas, punccionando uma crença tradicional e rompendo com um hábito de pensamento secular, desferiu um golpe duro no ponto de vista da verdade absoluta em matemática. (EVES, 2011, p.545)

Com o intuito de possibilitar a leitura de sua obra por um público maior, Lobachevski publicou em 1840 um livro em alemão intitulado *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Investigações geométricas sobre a teoria de linhas paralelas, tradução nossa). Mais tarde, em 1855, ele escreveu em francês uma obra intitulada *Pangéométrie ou Précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles* (Geometria específica

baseada em uma teoria geral e rigorosa do paralelo, tradução nossa), na qual continha os resultados de sua pesquisa. Embora Lobachevsky não tivesse vivido para ver o reconhecimento do seu trabalho, hoje a geometria não euclidiana desenvolvida por ele costuma ser chamada de geometria de Lobachevsky.



Figura 2.9: Nicolai Ivanovich Lobachevski. Fonte: [27].

2.6 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Filho de um pastor luterano, Riemann foi educado em condições muito modestas. Iniciou seus estudos matemáticos em Berlim e deu continuidade em Gottingen, onde obteve seu doutorado com uma tese sobre teoria das funções de variável complexa, sob a orientação de Gauss, de quem lhe rendeu elogios sobre a sua originalidade.

Riemann contribuiu para a Matemática em muitos aspectos, sobretudo no que diz respeito ao rigor. Ele influenciou no desenvolvimento de vários ramos da Matemática, como o estudo das funções e na geometria, deixando grandes contribuições para as gerações futuras.

Em 1854, Riemann foi nomeado professor na universidade de Gottingen. Como parte de seu trabalho para conseguir esta habilitação, ele apresentou uma conferência na qual propôs a geometria elíptica. Além disso, ele publicou um artigo chamado *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Nas hipóteses que se encontram as bases da Geometria, tradução nossa), que para Eves ([11]), “*de todos os artigos comparáveis a esse em tamanho, nenhum se mostrou mais rico em implicações em toda a história*” (p.614). Esse notável matemático desenvolveu o que hoje é conhecido como *espaço de Riemann* e a geometria desse espaço, a *geometria riemanniana*. Assim, ele construiu uma família de geometrias na qual a euclidiana é apenas um caso particular.

Riemann ofereceu novos instrumentos necessários para implementar seus conceitos e levar a Matemática em novas direções. Apesar de não ter elaborado sozinho a geometria que carrega

o seu nome, ele proporcionou que o seu conhecimento geométrico fosse levado para a corrente dominante do pensamento matemático. Seus conhecimentos também proporcionaram importantes contribuições para a física, em particular para a teoria geral da relatividade, publicada em 1915 pelo físico alemão Albert Einstein (1879 - 1955).



Figura 2.10: Georg Friedrich Bernhard Riemann. Fonte: Wikipedia.

Pode-se dizer que Gauss, Bolyai, Lobachevsky, e Riemann tiveram um papel fundamental no desenvolvimento das geometrias não euclidianas, possibilitando bases para que novos sistemas geométricos fossem implantados. Segundo Eves ([11]), as três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann foram denominadas em 1871 pelo matemático alemão Félix Klein (1849 - 1925) de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente.

Segundo Eves ([11]) *“a consequência imediata da descoberta de geometrias não euclidianas consistentes internamente foi, é claro, a solução final do secular problema do postulado das paralelas”* (p.544). Ao mostrar que esse postulado não podia ser provado a partir dos anteriores, matemáticos romperam com o caráter autoevidente e inquestionável, que fora associado à geometria de Euclides desde os tempos dos antigos gregos.

A existência das geometrias não euclidianas mostrou a necessidade de se argumentar com rigor e foi esse mesmo pensamento que dominou boa parte da Matemática durante o início do século XX, permitindo a criação de princípios com maior grau de abstração. Foi nessa época que a geometria euclidiana foi analisada e fundamentada pelo matemático alemão Hilbert (1862 - 1943) de modo a evitar as falhas que nela se encontravam.

3 *Geometria Esférica*

3.1 Introdução

Após perceber a impossibilidade de provar o quinto postulado de Euclides com base nos quatro postulados anteriores, alguns matemáticos desenvolveram novas geometrias ao considerarem um sistema axiomático que incluísse uma alternativa ao postulado das paralelas. O desenvolvimento das novas geometrias, as quais foram denominadas geometrias não euclidianas, provocou consequências muito importantes no pensamento matemático, sobretudo no que diz respeito aos fundamentos da geometria no fim do século XIX.

A geometria que apresentaremos neste capítulo é denominada *geometria esférica*. Conforme veremos, ela também é conhecida como uma geometria não euclidiana por não satisfazer a todos os postulados de Euclides.

Ainda que seja considerada uma geometria não euclidiana, estudos relacionados à geometria esférica são realizados há muito tempo por notáveis astrônomos e matemáticos, como o grego Hiparco (190 a.C. - 126 a.C.), e continuaram a serem desenvolvidos no decorrer dos séculos por outros estudiosos como Copérnico (1473 - 1543), Viète (1540 - 1603), Girard (1595-1632) e Euler (1707 - 1783). Entretanto, de acordo com Silva ([21]), a obra *Sphaerica* do matemático e astrônomo Menelaus de Alexandria (70 - 140) é considerada o primeiro trabalho sobre geometria esférica. Em sua obra, Menelaus apresentou elementos da geometria esférica aplicando-os em problemas relacionados à astronomia, bem como tratou de temas relacionados aos triângulos esféricos, sobre os quais falaremos adiante.

Além de sua importância nos estudos relacionados à astronomia, o desenvolvimento da geometria esférica proporcionou a expansão de outros ramos da ciência, como a cartografia e a navegação. Neste capítulo, apresentaremos conceitos básicos desta geometria e faremos comparações com a geometria euclidiana.

3.2 Geometria Esférica

Definição 1 Sejam O um ponto e r um número real positivo. Denomina-se esfera de centro O e raio r o conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância entre O e P é igual a r .

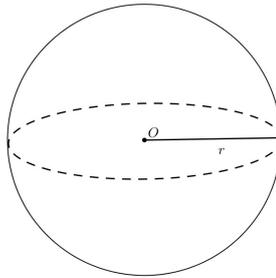


Figura 3.1: Esfera de centro O e raio r .

Ao traçar um plano cortando uma esfera de centro O , pode-se notar que a sua interseção com essa esfera é um ponto ou um círculo. No primeiro caso, dizemos que o plano é tangente à esfera no ponto de interseção. Enquanto no segundo caso, o plano é dito ser secante à esfera. Pode-se observar na figura 3.1 que este círculo será o de maior raio quando o plano passar pelo centro da esfera. Para maiores detalhes, ver [17].

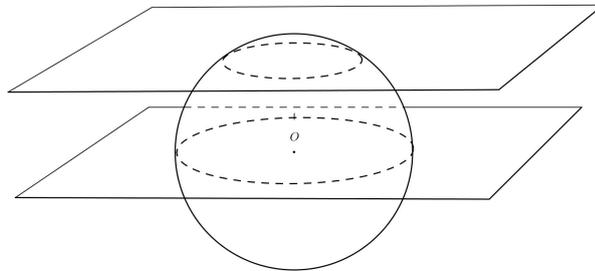


Figura 3.2: Círculos determinados pela interseção de dois planos e uma esfera.

Definição 2 O círculo obtido pela interseção de uma esfera com um plano contendo o seu centro é denominado círculo máximo.

Podemos notar que o raio do círculo máximo tem a mesma medida do raio da esfera. Geograficamente, um exemplo de círculo máximo é a linha do Equador, já os paralelos (com exceção da própria linha do Equador) não são círculos máximos e os meridianos são semicírculos máximos (figura 3.3). Voltaremos a tratar este assunto no próximo capítulo.

Os círculos máximos na geometria esférica são equivalentes às retas da geometria euclidiana.



Figura 3.3: Linha do Equador e um meridiano. Fonte: [3].

Definição 3 *Dois pontos diametralmente opostos sobre um círculo máximo são chamados antípodas.*

Sejam A e B dois pontos distintos sobre uma esfera de centro O e raio r . Se os pontos A e B não são antípodas, então A , B e O não são colineares. Logo, eles determinam um único plano cuja interseção com a esfera determinará um único círculo máximo. Por outro lado, se os pontos A e B são antípodas, então A , B e O são colineares. Assim, eles determinam infinitos planos cujas interseções com a esfera determinam uma infinidade de círculos máximos, conforme ilustra a figura 3.4.

Assim, podemos perceber que na geometria esférica dois pontos distintos podem determinar mais de um círculo máximo, desde que tais pontos sejam antípodas. Dessa forma, considerando que os círculos máximos na geometria esférica são equivalentes às retas na geometria euclidiana, já podemos perceber uma diferença fundamental entre essas duas geometrias, pois na geometria euclidiana, por dois pontos distintos passa apenas uma reta.

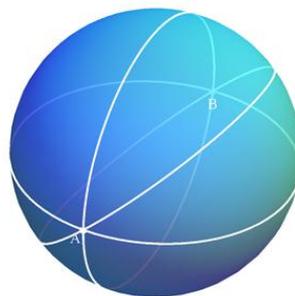


Figura 3.4: Círculos máximos contendo os antípodas A e B . Fonte: [3].

Definição 4 *Dados dois pontos distintos sobre uma esfera, eles dividem o círculo máximo que os contém em duas porções denominadas arcos.*

O menor arco definido por dois pontos de um círculo máximo possui um papel análogo ao dos segmentos de reta na geometria euclidiana.

Definição 5 A distância entre dois pontos distintos sobre uma esfera é o comprimento do menor arco determinado por eles.

Pode-se notar que, caso dois pontos sejam antípodas, a distância entre esses pontos é o comprimento de um semicírculo máximo por eles determinado.

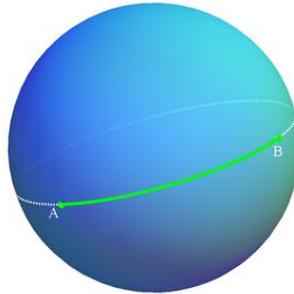


Figura 3.5: Arco de círculo máximo determinado por A e B . Fonte: [3].

Considere uma esfera de centro em O e raio r . Sabendo que o círculo máximo está contido em um plano, a distância entre dois pontos A e B , que são as extremidades de um arco de círculo máximo determinado por um ângulo α em radianos, pode ser calculada pela fórmula:

$$d(A,B) = \alpha \cdot r.$$

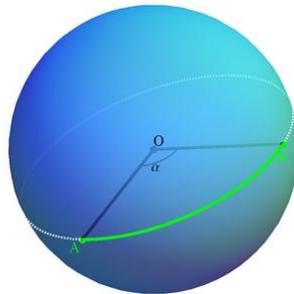


Figura 3.6: Ângulo AOB correspondente ao menor arco AB . Fonte: [3].

De fato, o círculo C que contém os pontos A e B possui comprimento igual a $2\pi r$. Para calcular o comprimento do arco do círculo C determinado pelo ângulo α , basta aplicar uma regra de três simples para que tenhamos a fórmula, uma vez que o comprimento de um arco é proporcional ao ângulo que o define.

Podemos observar que, no globo terrestre, um avião que segue sem escalas um voo de uma cidade a outra segue uma trajetória que corresponde a um arco de círculo máximo com extremidades nessas duas cidades. Assim, distância a ser percorrida por esse avião pode ser obtida fazendo o produto do raio da Terra com o ângulo que define o arco por ele percorrido.

Definição 6 O ângulo formado por dois círculos máximos é denominado *ângulo esférico*. Qualquer um dos pontos antípodas onde esses círculos máximos se intersectam pode ser designado o vértice do ângulo e os arcos de círculo máximo são os lados do ângulo. Sua medida é dada pela medida do ângulo formado pelas retas tangentes a tais círculos no ponto de interseção.

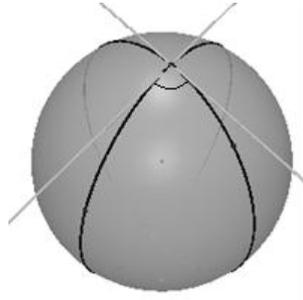


Figura 3.7: Ângulo esférico. Fonte: [3].

Vamos agora relembrar uma definição da geometria euclidiana. Sejam α e β dois planos secantes. Ao traçarmos um plano γ perpendicular à reta de interseção de α e β , os planos α e β intersectam γ segundo as retas u e v , respectivamente. A medida do ângulo entre os planos α e β é igual à medida do ângulo entre as retas u e v . Este fato será utilizado na demonstração da proposição a seguir.

Proposição 7 A medida de um ângulo esférico equivale à medida do ângulo formado pelos planos que contêm os lados do ângulo.

Prova: Sejam r e s as retas tangentes a dois círculos máximos em um dos pontos de interseção entre eles. Denotemos por α e β os planos que contêm cada um desses círculos máximos e por t a reta de interseção desses planos que passa pelo centro da esfera. Como t é perpendicular às retas r e s no ponto de interseção (pela propriedade das retas tangentes serem perpendiculares ao diâmetro no ponto de tangência), temos que t é perpendicular ao plano determinado pelas retas r e s . Assim, obtemos um plano perpendicular à reta t , que corta os planos α e β segundo as retas r e s , respectivamente. Portanto, pela definição que citamos anteriormente, a medida do ângulo entre os planos α e β é igual à medida do ângulo entre as retas r e s .

Definição 8 Dois círculos máximos se intersectam em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, sendo cada uma delas delimitadas por semicírculos máximos. Estas regiões são denominadas *fusos esféricos*. Os arcos que limitam essas regiões são chamados *lados do fuso* e os pontos de interseção dos círculos máximos que contêm esses arcos são denominados *vértices do fuso*.

Definição 9 O ângulo de um fuso esférico é o ângulo formado pelos círculos máximos que constituem os lados desse fuso.

Considerando a área de uma esfera de raio r como $4\pi r^2$ (uma demonstração pode ser vista em [17]) e o fato da área de um fuso ser proporcional ao seu ângulo, podemos concluir que a área de um fuso que possui ângulo α , dado em radianos, é $2\alpha r^2$. Para isso, basta que apliquemos uma regra de três simples.

Definição 10 Considere três pontos A , B e C distintos de uma esfera que não estejam sobre um mesmo círculo máximo. A figura delimitada pelos arcos de círculo máximo que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico. Os pontos A , B e C são os vértices do triângulo esférico e os arcos definidos por A e B , A e C , B e C são chamados lados do triângulo esférico.

Podemos observar que, diferentemente da geometria euclidiana, dados três pontos distintos sobre a esfera é possível obter mais de um triângulo esférico com vértices nestes pontos. Na figura 3.8, podemos observar dois triângulos esféricos, sendo um deles pintado de verde e outro de azul, determinados pelos mesmos vértices.



Figura 3.8: Triângulos esféricos. Fonte: [3].

Definição 11 O triângulo esférico definido pelos pontos antípodas dos vértices de um triângulo esférico é denominado triângulo antípoda.

Na figura 3.9, ABC é um triângulo esférico e $A'B'C'$ é o seu triângulo antípoda. É possível mostrar que um triângulo e seu antípoda possuem a mesma área. Uma demonstração para este fato pode ser vista em [16].

O teorema que apresentaremos a seguir é conhecido como Teorema de Girard e foi demonstrado em 1629 pelo matemático francês Albert Girard. A partir dele poderemos ver que, ao contrário da geometria euclidiana, na geometria esférica é possível obter triângulos com diferentes somas das medidas dos ângulos internos.

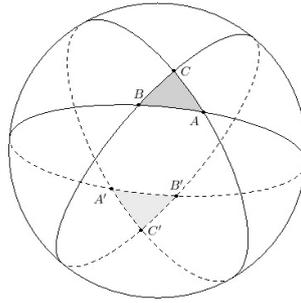


Figura 3.9: Triângulo ABC e seu antípoda $A'B'C'$. Fonte: [3].

Teorema 12 *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° .*

Prova: Para demonstrar este teorema, consideraremos em uma esfera centrado em O e raio r . Considere um triângulo esférico T que possui área A_T , vértices A , B e C e ângulos internos α , β e γ , dados em radianos. Temos então duas possibilidades:

- (1) T está contido em uma semiesfera;
- (2) T não está contido em uma semiesfera.

Demonstração de (1):

Note que o triângulo T define seis fusos esféricos disjuntos dois a dois, sendo os seus lados constituídos pelos círculos máximos determinados pelos vértices de T . Além disso, cada ângulo interno do triângulo T coincide com o ângulo de dois fusos que foram definidos pelos mesmos círculos máximos. Portanto, é possível cobrir toda a esfera utilizando os seis fusos esféricos determinados por A , B e C .

Também é possível notar que três desses seis fusos contêm o interior do triângulo T , enquanto os outros três fusos contêm o interior do triângulo antípoda do triângulo T , conforme figura 3.10.

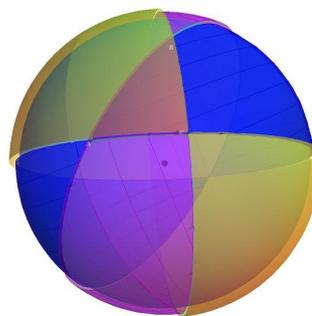


Figura 3.10: Seis fusos esféricos cobrindo a esfera. Fonte: [3].

Dessa forma, a soma das áreas dos seis fusos esféricos é igual à área da esfera acrescida do

dobro da área do triângulo esférico e do dobro da área do seu triângulo antípoda. Como a área de um triângulo esférico e de seu triângulo antípoda são iguais, temos:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 2 \cdot 2A_T.$$

Assim, já que $r \neq 0$, obtemos que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{r^2}.$$

Como $\frac{A_T}{r^2} > 0$, concluímos que a soma dos ângulos internos de T é maior que 180° .

Demonstração de (2):

Considere agora que o triângulo esférico T não está contido em uma semiesfera. Neste caso, os seus lados e vértices definem outro triângulo contido em uma semiesfera, que denominaremos de triângulo complementar T_C do triângulo T , cujos ângulos internos em radianos dos vértices A , B e C serão denotados por a , b e c , respectivamente, e sua área por A_{T_C} . Desta forma, podemos concluir que $A_{T_C} + A_T = 4\pi r^2$.

Daí, utilizando a fórmula obtida no caso anterior temos

$$A_T + (a + b + c - \pi)r^2 = 4\pi r^2.$$

Sabendo que $a = 2\pi - \alpha$, $b = 2\pi - \beta$ e $c = 2\pi - \gamma$, concluímos que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{r^2}.$$

Analogamente ao caso anterior, podemos concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico que não está contido em uma semiesfera é maior que 180° .

A partir da fórmula de Girard é possível relacionar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico com a medida da sua área. Por essa relação, verificaremos a existência de um valor mínimo para tal soma, bem como um valor máximo.

Para prosseguir, consideraremos em uma esfera de raio r os dois possíveis casos para um triângulo esférico T de área A_T e ângulos internos α , β e γ (em radianos):

- (1) T está contido em uma semiesfera;
- (2) T não está contido em uma semiesfera.

No caso (1), temos pelo teorema de Girard que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Além disso, como T está

contido em uma semiesfera, então $A_T < 2\pi r^2$. Daí,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{r^2} < \pi + \frac{2\pi r^2}{r^2} = 3\pi.$$

Portanto, $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.

No caso (2), temos $A_T > 2\pi r^2$. Daí,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{r^2} > \pi + \frac{2\pi r^2}{r^2} = 3\pi.$$

Além disso, $A_T < 4\pi r^2$. Daí,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{r^2} < \pi + \frac{4\pi r^2}{r^2} = 5\pi.$$

Portanto, $3\pi < \alpha + \beta + \gamma < 5\pi$.

Definição 13 *A quantidade em que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico excede 180° (ou π rad) é chamada excesso esférico ou excesso angular.*

Resulta do teorema de Girard que a área de um triângulo esférico pode ser obtida ao efetuarmos o produto do excesso esférico com o quadrado do raio da esfera no qual ele está inserido.

No caso da geometria euclidiana, o excesso esférico é igual a zero.

Outros resultados da geometria esférica podem ser encontrados em [8] e [1].

4 *Cartografia*

4.1 **História da Cartografia**

Os mapas são as mais antigas representações do pensamento geográfico. Registros mostram que eles existiam há muito tempo em várias civilizações da antiguidade, como os sumérios, egípcios, gregos e romanos. Inicialmente, os mapas eram feitos de madeira, esculpidos ou até pintados sobre pele de animais. Além de possibilitar a demarcação dos territórios habitáveis ou de caça, os mapas serviam como uma ferramenta essencial à orientação e localização.

Segundo Fitz ([12]), a provável origem da palavra mapa é cartaginesa (civilização da antiguidade que se desenvolveu na Bacia do Mediterrâneo entre o fim do século IX a.C. e meados do século II a.C.), com o significado de “toalha de mesa”. De acordo com esse mesmo autor, essa associação pode ter derivado das conversas entre comerciantes, que desenhando os mapas sobre as toalhas, indicavam rotas, caminhos, localidades e outras informações que auxiliassem seus negócios.

A cartografia (do grego *chartis* = mapa e *graphein* = escrita) é a ciência que trata da produção e estudo dos mapas. Essa ciência foi sendo aprimorada em função das necessidades humanas ao longo dos tempos, conforme veremos a seguir.

Os mapas foram muito utilizados pelos antigos gregos. Essa civilização se destacou no desenvolvimento da cartografia por ter sido a primeira a lançar uma base científica fruto da observação. Deve-se a ela os conceitos elementares da cartografia atual como a concepção da esfericidade terrestre, a noção de polos e círculos máximos da Terra, a ideia de latitude e longitude e o desenvolvimento das primeiras projeções cartográficas. Alguns nomes como Anaximandro de Mileto (610 a.C. - 547 a.C.) e Hecateu de Mileto (546 a.C. - 480 a.C.), discípulos do filósofo e matemático Tales de Mileto (623 a.C - 556 a.C.), destacaram-se na antiga cartografia grega.

Anaximandro de Mileto foi autor de um importante mapa-múndi de sua época, representado segundo um círculo achatado onde estavam Europa, Ásia e África circundadas por um oceano.

Hecateu de Mileto deu prosseguimento à obra de Anaximandro fazendo algumas alterações em seu mapa, conforme podemos ver na figura 4.1, e elaborou o tratado mais antigo de Geografia denominado *Periegesis*.

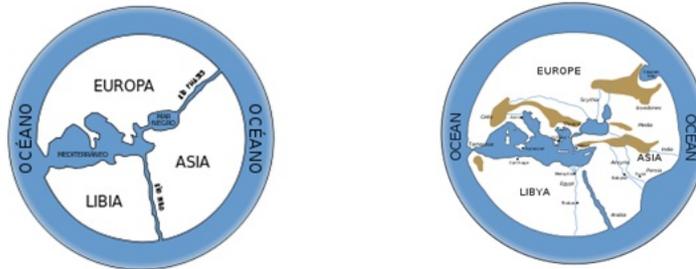


Figura 4.1: Representação do mapa-múndi segundo Anaximandro de Mileto e Hecateu de Mileto, respectivamente. Fonte: Wikipedia.

Ainda que a figura 4.1 mostre que notáveis pensadores da antiguidade imaginassem a Terra como uma superfície plana, outros já imaginavam a Terra de formato esférico e até mesmo buscavam formas de calcular a sua circunferência. Pitágoras (571 a.C. - 496 a.C.), era um matemático e filósofo grego que defendia a esfericidade da Terra.

Entretanto, calcular tal circunferência com relativa precisão só foi possível no ano 200 a.C. pelo filósofo grego Eratóstenes (276 a.C. - 194 a.C.). Este sábio, não dispondo de instrumentos adequados, estimou a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, colocando uma estaca vertical em cada uma dessas cidades e observando que ao meio-dia de 21 de junho, enquanto a estaca fincada na primeira cidade não apresentava sombra, a da segunda cidade apresentava uma sombra projetada no solo. Ele também percebeu que em Alexandria, essa sombra projetada apresentava os raios solares inclinados em relação à estaca vertical de aproximadamente $\frac{1}{50}$ de circunferência, ou seja, $7^{\circ} 12'$. A partir disso, sabendo que 1 estádio, que era uma unidade de medida utilizada na Roma antiga, equivale a $185m$, ele calculou a distância entre as duas cidades em 5.000 estádios, o que equivale a aproximadamente $925.000m$. Se a distância entre as duas cidades é de 5.000 estádios e a inclinação dos raios solares é de $7^{\circ} 12'$, por uma regra de três simples, ele concluiu que a medida da circunferência terrestre era de 250.000 estádios, ou seja, cerca de $46.250.000m$.

É notória a sua boa aproximação já que a circunferência terrestre mede aproximadamente $41.700.000m$. Na verdade, o erro de 10% aproximadamente cometido por Eratóstenes deveu-se a dois fatores: Siena não estava localizada sobre o mesmo meridiano que Alexandria e a distância real entre as duas cidades era de cerca de 4.500 estádios (pouco mais de $830.000m$).

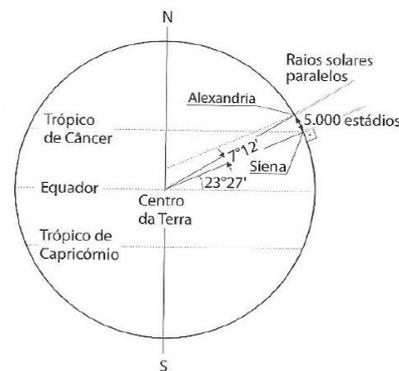


Figura 4.2: Esquema do método utilizado por Eratóstenes. Fonte: [12].

Ainda no período clássico, ressalta-se a criação de um sistema de coordenadas geográficas de latitude e longitude pelo astrônomo grego Hiparco (190 a.C. - 120 a.C.) amparado pela Matemática e pela observação de astros celestes.

Geographia, um dos trabalhos mais importantes da cartografia na era clássica, foi escrita pelo matemático e astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (90 - 168). Esta obra possui oito volumes contendo as coordenadas de pelo menos 8000 lugares, sendo a maioria calculada pelo próprio autor. No último volume, ele fornece indicações para a confecção de um mapa-múndi e ainda discute alguns pontos fundamentais da cartografia. Apesar da importância dos estudos de Ptolomeu para o desenvolvimento da cartografia, a sua obra permaneceu desconhecida por séculos. Na figura a seguir, podemos ver um mapa de Ptolomeu reconstruído de *Geographia*, de 150 d.C. aproximadamente.



Figura 4.3: Mapa de Ptolomeu. Fonte: Wikipedia.

Os romanos também já utilizavam mapas para representar regiões menores e rotas comerciais e militares. Um exemplo é a *Tábua de Peutinger*, um mapa feito no século V de 6 metros de comprimento por 30 centímetros de largura representando caminhos do Império Romano. De acordo com alguns historiadores, a Tábua de Peutinger, que se encontra na Biblioteca Nacional

de Viena, é uma cópia do mapa original.

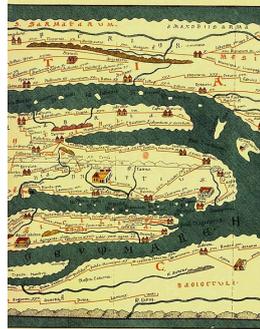


Figura 4.4: Tábua de Peutinger. Fonte: [28].

Na Idade Média, em particular entre os séculos V e XV, a cartografia passou por um significativo retrocesso, devido às crenças de que a Terra teria a forma de um disco plano com abismos e monstros marinhos em seu contorno, conforme apresentam alguns mapas da época. Em uma época em que a religião influenciava as ciências, os árabes tornaram-se os principais responsáveis pela confecção de mapas, que eram elaborados propositalmente sem exatidão. Foram eles os responsáveis por levar a bússola para o ocidente propiciando mecanismos necessários ao desenvolvimento das cartas de navegação.

Com o fim da Idade Média, foi reiniciada na Europa a busca pelo conhecimento em torno da cartografia. Parte deste conhecimento vinha sendo preservado, principalmente, pelos árabes e foi retomado nas principais discussões científicas na época das grandes navegações, quando se inicia a Idade Moderna.

A descoberta do continente americano no século XV deu início à corrida de mapeamento do novo mundo. Foi neste período que Gerard Mercator (1512 - 1594), matemático e geógrafo holandês, criou o sistema de projeção cartográfica que leva o seu nome, utilizando-o pela primeira vez em 1569 na preparação de mapas para uso dos navegadores.



Figura 4.5: Gerard Mercator. Fonte: Wikipedia.

O projeto de mapa-múndi de Mercator foi concluído e publicado em 1569 na forma de um planisfério medindo 250cm x 128cm. Este mapa-múndi foi intitulado *Nova e aumentada descrição da Terra, corrigida para uso em navegação*, o que mostra que a sua criação teve como objetivo apresentar o conhecimento da Geografia do mundo de sua época e servir de contribuição aos marinheiros. Mercator elaborou uma série de obras sob o título geral de *Atlas* e seu legado ainda tem influência em nosso dia-a-dia.

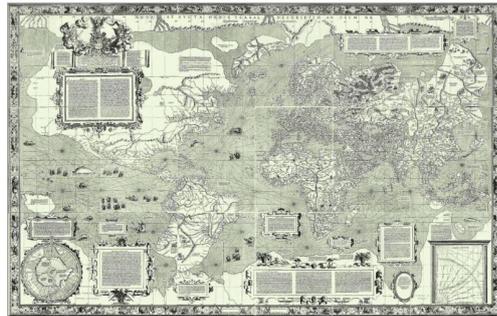


Figura 4.6: Mapa-múndi de Mercator de 1569. Fonte: [29].

Na Idade Moderna algumas nações europeias continuaram produzindo representações cartográficas, sobretudo por conta de suas práticas colonialistas. Assim, elas elaboraram a cartografia terrestre dos territórios conquistados, como do Brasil, bem como a produção das cartas náuticas necessárias a navegação marítima.

Os estudos cartográficos do século XX estão ligados, sobretudo, ao desenvolvimento da geopolítica. Alguns eventos como a guerra fria e a corrida espacial impulsionaram as pesquisas ligadas ao mapeamento sistemático de todo o planeta com a utilização de tecnologias, como as imagens de satélite e o computador. Atualmente, uma das tendências marcantes da cartografia é a substituição do mapa analógico pelo mapa digital, que são elaborados por softwares cada vez mais modernos e dão maior precisão aos locais representados.

4.2 Projeções Cartográficas

Desde o princípio da cartografia, um dos grandes problemas enfrentados para uma boa representação cartográfica diz respeito à forma da Terra. Em virtude dela possuir uma superfície aproximadamente esférica e sendo um mapa uma representação plana, não há condições físicas de se transformar as características superficiais do planeta em um plano sem que hajam deformações. Tal situação pode ser evidenciada através da casca de uma laranja cortada, como na figura 4.7, que não pode ser “completamente planificada”.



Figura 4.7: Casca de laranja. Fonte: [30].

As projeções cartográficas são ferramentas utilizadas na cartografia para representar uma superfície curva sobre um plano. Nesse sentido, a confecção de um mapa consiste em fazer corresponder a cada ponto da Terra, um único ponto no mapa. Essa correspondência é obtida utilizando-se os sistemas de projeções cartográficas que podem ser entendidos como funções que relacionam cada ponto de uma superfície de referência a um único ponto de uma superfície de projeção.

Cada projeção possui um conjunto de propriedades que a torna adequada para determinados fins, ainda que não exista uma projeção que possa atender plenamente todas as condições desejadas. Desta forma, as projeções cartográficas podem ser classificadas de acordo com diferentes metodologias que buscam um melhor ajuste da superfície a ser representada.

São conhecidos mais de 200 tipos de projeções cartográficas, desde as primeiras conquistas da cartografia atribuídas a Eratóstenes, passando por Mercator até os nossos dias. Cada uma delas possui características próprias, desenvolvidas para atender a uma finalidade específica. A seguir, apresentaremos as classificações das projeções cartográficas de acordo com alguns parâmetros considerados relevantes. Para maiores detalhes dos diversos tipos de projeção, ver [13].

Quanto ao processo de construção, as projeções cartográficas podem ser denominadas geométricas ou analíticas. As geométricas são fundamentadas em princípios geométricos projetivos e são obtidas em decorrência da interseção de um feixe de luz com uma superfície de projeção. Tal feixe de luz é emitido por uma fonte, denominada *ponto de vista*, e passa por pontos da superfície que será projetada. Já as projeções analíticas são aquelas baseadas em relações matemáticas. Este tipo de projeção não possui ponto de vista.

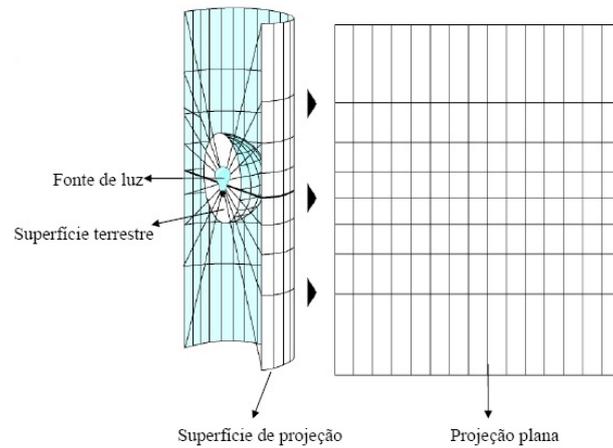


Figura 4.8: Esquema de uma projeção geométrica em uma superfície cilíndrica. Fonte: [31].

De acordo com a localização do ponto de vista, as projeções geométricas podem ser subdivididas em:

- gnômica ou central: quando o ponto de vista está situado no centro da esfera.
- estereográfica: quando o ponto de vista se localiza na extremidade diametralmente oposta à superfície de projeção.
- ortográfica: quando o ponto de vista se situa no infinito.

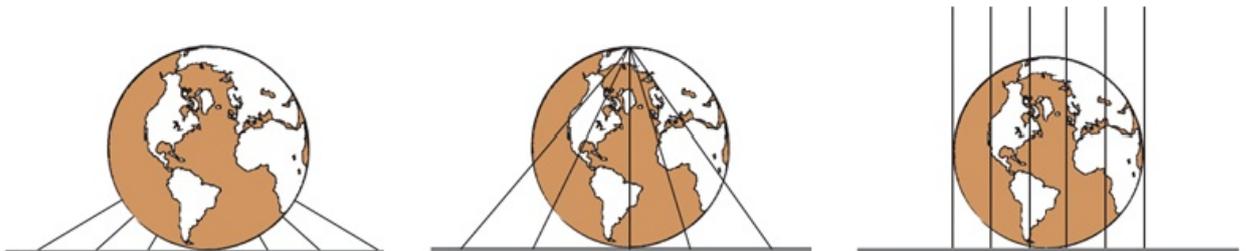


Figura 4.9: Projeções gnômica, estereográfica e ortográfica respectivamente, em uma superfície plana. Fonte: [7].

Outra importante classificação das projeções cartográficas é quanto à superfície de projeção utilizada. Assim, elas podem ser classificadas como:

- plana ou azimutal: quando a superfície de projeção é um plano.

Tais projeções podem ser de três tipos: polar, quando o centro da superfície de projeção coincide com um polo; equatorial, quando o centro da superfície de projeção se situa na linha do equador terrestre; ou oblíqua, quando está em qualquer outra posição.

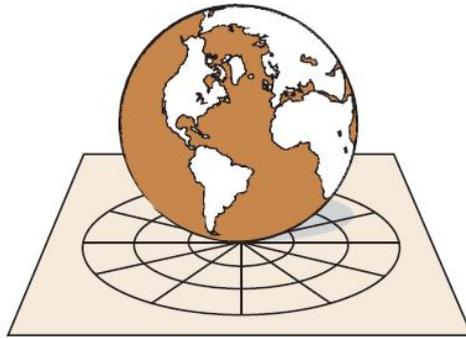


Figura 4.10: Superfície de projeção plana e polar. Fonte: [7].

- cilíndrica: quando a superfície de projeção é um cilindro.

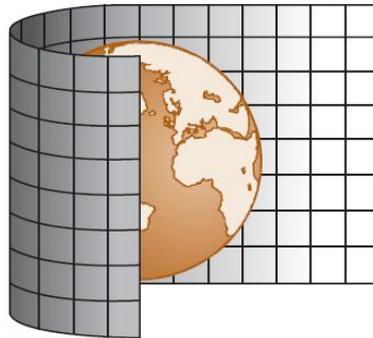


Figura 4.11: Superfície de projeção cilíndrica. Fonte: [7].

Dependendo da posição do cilindro em relação ao globo terrestre, as projeções cilíndricas podem ser subdivididas em: normal ou equatorial, quando o eixo do cilindro coincide com o eixo de rotação terrestre; transversa, quando o eixo do cilindro se encontra perpendicular em relação ao eixo de rotação terrestre; ou oblíqua, quando o eixo do cilindro está inclinado em relação ao eixo de rotação terrestre.

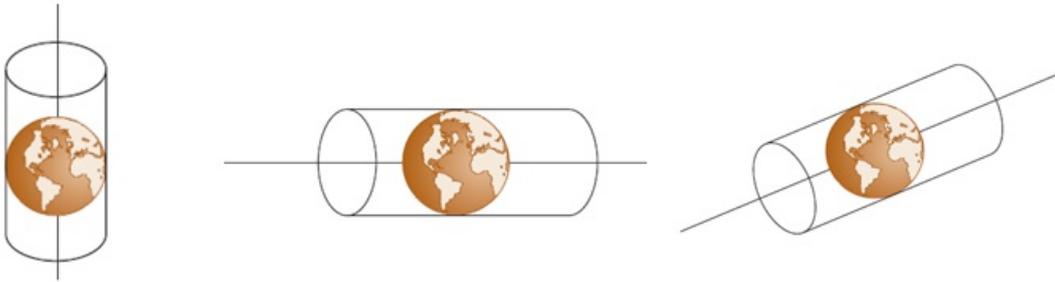


Figura 4.12: Projeções cilíndricas normal, transversa e oblíqua, respectivamente. Fonte: [7].

Mapas de projeções cilíndricas são frequentemente utilizados em livros didáticos. Esse tipo de projeção possui a propriedade de deformar as superfícies de alta latitude, mantendo o formato das superfícies de baixa latitude e dimensões próximas do real. Nela, a Groelândia, por exemplo, parece ter um território maior que o território da Austrália, mas na verdade é três vezes menor.

As projeções cilíndricas mais conhecidas são as de Mercator, já mencionada anteriormente, e a de Peters (1916-2002), cartógrafo e historiador alemão. Embora ambas sejam do mesmo tipo de projeção, elas apresentam diferenças. Falaremos adiante sobre tais projeções.

- cônica: quando a superfície de projeção é um cone.

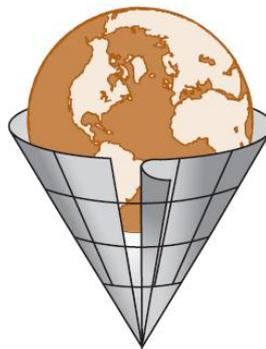


Figura 4.13: Superfície de projeção cônica. Fonte: [7].

Dependendo da posição do cone em relação ao globo terrestre, as projeções cônicas podem ser subdivididas em: normal, quando o eixo do cone coincide com o eixo de rotação terrestre; transversa, quando o eixo do cone se encontra perpendicular em relação ao eixo de rotação terrestre ou; oblíqua, quando o eixo do cone está inclinado em relação ao eixo de rotação terrestre.

- poliédrica: quando se utilizam vários planos de projeção que, reunidos, formam um poliedro.

Quanto à situação da superfície de projeção, as projeções cartográficas podem ser classificadas como:

- tangente: quando a superfície de projeção tangencia a esfera em um ponto (planas) ou em uma linha (cilíndrica ou cônica).
- secante: quando a superfície de projeção corta a esfera em uma linha (planas) ou em duas linhas (cilíndrica ou cônica).

As projeções cartográficas ainda podem ser classificadas de acordo com as propriedades conservadas na superfície de projeção. Em [13], encontramos as seguintes classificações:

- Equidistantes: as que não apresentam deformações lineares para algumas linhas em especial, isto é, os comprimentos são representados em escala uniforme.
- Conformes: representam sem deformação, todos os ângulos em torno de quaisquer pontos, e decorrentes dessa propriedade, não deformam pequenas regiões.
- Equivalentes: têm a propriedade de não alterarem as áreas, conservando assim, uma relação constante com as suas correspondentes na superfície da Terra. Seja qual for a porção representada num mapa, ela conserva a mesma relação com a área de todo o mapa.
- Afiláticas: não possui nenhuma das propriedades dos outros tipos, isto é, equivalência, conformidade e equidistância, ou seja, as projeções em que as áreas, os ângulos e os comprimentos não são conservados.

4.2.1 Projeção de Mercator

A Projeção de Mercator, desenvolvida no século XVI e utilizada até hoje, possibilitou um enorme avanço na cartografia de sua época. Foi a primeira na Era Moderna que conseguiu representar o globo esférico terrestre em um plano, contribuindo assim para a expansão marítima europeia e a descoberta de novos continentes. Ela é uma projeção cilíndrica, equatorial e conforme.

Essa projeção tornou-se apropriada para a navegação marítima, uma vez que nela as direções podem ser desenhadas em linha reta. Entretanto, essa projeção apresenta uma deformação excessiva das regiões de alta latitude. É notável que as áreas polares e temperadas são representadas com relativo exagero, como o fato mencionado da Groelândia parecer maior que a Austrália e o fato de que a Europa possui um tamanho exagerado, enquanto a África torna-se bastante reduzida.

4.2.2 Projeção de Peters

A Projeção de Peters, criada pelo cartógrafo escocês James Gall (1808-1895), em 1885, e retomada na segunda metade do século XX por Arno Peters, é uma projeção cartográfica cilíndrica e equivalente. Frequentemente esta projeção é chamada de “terceiro-mundista” por ampliar as área das regiões do sul, cuja maioria dos países é subdesenvolvida, e diminuir as áreas dos países do norte, de maioria desenvolvida, além de centralizar no mapa o continente africano. Ao contrário da projeção de Mercator, esse tipo de projeção visa criar uma representação mais próxima da realidade em relação às áreas, o que muitas vezes acaba distorcendo suas formas. Nessa projeção, os países e continentes situados em baixas latitudes ficam alongados no sentido Norte - Sul, enquanto os situados em altas latitudes ficam expandidos no sentido Leste - Oeste, como pode ser observado na figura 4.14.



Figura 4.14: Mapa-múndi segundo projeção de Peters. Fonte: [32].

Conforme mencionamos, não existe uma representação plana perfeita para a superfície da Terra e, assim, cada tipo de projeção cartográfica apresenta vantagens e limitações. Cada tipo de projeção atende a uma necessidade diferente, cabendo ao usuário decidir qual é a mais adequada.

4.3 Escalas

Escala é uma relação matemática entre a distância entre dois pontos representados no mapa e sua distância real. A seguir, apresentaremos as principais características das escalas numéricas, gráficas e nominais.

A escala numérica é representada por uma fração, por exemplo $\frac{1}{50.000}$, ou razão, por exemplo 1 : 50.000. Neste exemplo, o número 1 representa a unidade, designando a distância medida no mapa, enquanto o número 50.000 representa a distância real. Esta é a forma mais utilizada

em mapas impressos. Em ambos os casos a leitura é feita da forma: a escala é de um para cinquenta mil, isto é, cada unidade no mapa corresponde a cinquenta mil unidades na realidade.

A partir das informações contidas em uma escala numérica, pode-se calcular as distâncias entre quaisquer localidades por meio da equação $D = n \cdot d$, onde D representa a distância real, n representa o segundo número da escala e d a distância medida no mapa. Como exemplo, consideremos uma distância de 22cm em um mapa, sendo $1 : 50.000$ sua escala. Assim, na realidade, a distância considerada será:

$$D = 50.000 \cdot 22\text{cm} = 1.100.000\text{cm} = 11\text{Km}.$$

A escala gráfica é representada por uma barra (régua) graduada, contendo subdivisões denominadas talões. Cada talão apresenta a relação de seu comprimento com seu valor correspondente na realidade, indicado sob a forma numérica. Trata-se de uma barra com duas porções: a principal, desenhada do zero para a direita, e a fracionária, do zero para a esquerda, que corresponde ao talão da fração principal subdividido em dez partes iguais.

A escala gráfica também nos permite realizar transformações de dimensões gráficas em dimensões reais. Para isso basta que tomemos no mapa a distância que pretendemos medir e após transportamos essa distância para a escala gráfica, observar o resultado obtido.



Figura 4.15: Escala Gráfica. Fonte: [33].

A escala nominal é apresentada por uma igualdade entre o valor representado no mapa e seu correspondente na realidade. Utilizando o exemplo para escala numérica, na escala nominal seria $1\text{cm} = 50.000\text{cm}$. Neste caso, a leitura é feita da forma: um centímetro corresponde a cinquenta mil centímetros.

4.4 Coordenadas Geográficas

4.4.1 Paralelos e Meridianos

O movimento de rotação da Terra se processa em torno de um eixo imaginário denominado eixo de rotação. Os pontos de interseção desse eixo com a superfície terrestre são chamados Polos Norte e Sul geográficos.

Os paralelos geográficos são os círculos obtidos pela interseção da superfície terrestre com planos perpendiculares ao eixo de rotação. A linha do Equador é o paralelo geográfico que resulta da interseção da superfície da Terra com o plano que contém o seu centro e é perpendicular ao seu eixo de rotação. A linha do Equador divide a superfície da Terra em dois hemisférios: o Hemisfério Norte, que contém o Pólo Norte e o Hemisfério Sul, que contém o Pólo Sul. Conforme veremos a seguir, este paralelo é a referência para a medição da latitude de um ponto na superfície terrestre.

O termo meridiano vem do latim *meridies*, que significa linha que une os lugares que têm o meio-dia ao mesmo tempo. Nesse sentido, um meridiano geográfico é um semicírculo máximo perpendicular à linha do Equador. Cada meridiano possui seu antimeridiano, isto é, um meridiano oposto que, junto com ele, forma um círculo máximo.

O meridiano que passa sobre a região de Greenwich, nos arredores de Londres, é conhecido como meridiano de Greenwich. Convencionou-se que esse meridiano divide o globo terrestre em oriente e ocidente. A seguir, veremos que esse mesmo meridiano, definido como primeiro meridiano, é a referência para a medição da longitude de um ponto na superfície terrestre além de estabelecer a relação entre as horas em qualquer ponto da superfície terrestre, determinando os fusos horários.

4.4.2 Latitude e longitude de um ponto sobre a superfície terrestre

Com o intuito de localizar um ponto sobre a superfície terrestre, foi criado um sistema de referência e posicionamento denominado *Sistema de Coordenadas Geográficas*. Neste sistema, cada ponto da superfície terrestre é identificado pela interseção de um meridiano com um paralelo e suas coordenadas são chamadas latitude e longitude.

A latitude de um ponto P é a medida em graus do arco de meridiano que passa pelo ponto P, situado entre o paralelo que contém P e a linha do Equador. Ela é medida de 0 a 90° no sentido norte (N) ou de 0 a 90° no sentido sul (S). É comum atribuir sinal positivo para latitudes ao norte e negativos para latitudes ao sul.

A longitude de um ponto P é a medida em graus do arco de paralelo que passa pelo ponto P, situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. Ela é medida de 0 a 180° no sentido leste (E) ou de 0 a 180° no sentido oeste (W), podendo-se atribuir sinal positivo para longitudes ao leste e negativo para longitudes ao oeste.

Afim de exemplificar, vamos considerar o caso do município de Niterói, no estado do Rio de Janeiro. Segundo [2], consultado no dia 03/01/2014, esse município situa-se nas coordenadas

de latitude $22^{\circ} 53' S$ (lê-se: 22 graus e cinquenta e três minutos ao sul do equador) ou ainda $-22^{\circ} 53'$ e longitude $43^{\circ} 06' 13'' W$ (lê-se: quarenta e três graus, seis minutos e treze segundos a oeste de Greenwich) ou ainda $-43^{\circ} 06' 13''$.

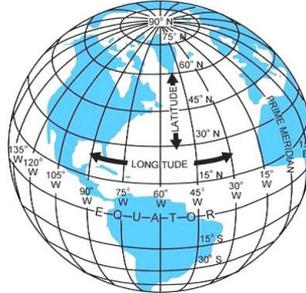


Figura 4.16: Linhas de latitude e longitude. Fonte: [34].

4.4.3 Fuso Horário

Até meados do século XIX, não havia um referencial único para a determinação da hora e cada região estabelecia uma hora que era seguida pelos seus habitantes. Com o aumento da população mundial e a crescente utilização dos meios de transportes tornou-se comum o deslocamento de grande número de pessoas entre localidades distantes e daí veio a necessidade de se padronizar o horário. Nos Estados Unidos, por exemplo, as ferrovias atravessavam longos percursos no sentido Leste-Oeste e chegou-se a ter 300 horas oficiais diferentes ao longo de suas ferrovias, o que certamente causava transtornos à população. Assim, por iniciativa de empresas ferroviárias, aceitou-se fixar cerca de cem regiões com mesmos horários que foram utilizados nesse país até 1883.

Em 1878, o senador canadense Sir Sanford Fleming (1827-1915) propôs um modelo mundial de tempo padronizado. O seu sistema era baseado em 24 zonas de tempo, cada uma correspondendo a uma hora.

Em outubro de 1884, 25 países reuniram-se em Washington e estabeleceram uma divisão do mundo em 24 fusos, baseando-se no fato de que a Terra leva praticamente 24 horas para dar uma volta completa em torno do seu eixo de rotação. Assim, dividindo os 360° da circunferência terrestre por 24 obtém-se 15° que é o ângulo correspondente a cada fuso que representa uma hora. Todas as localidades situadas no interior de um fuso horário possuem, por convenção, a mesma hora, que é chamada de *hora legal*.

Para efeito de cálculo das horas, considera-se como fuso referencial aquele delimitado pelos meridianos $7^{\circ} 30'$ leste e $7^{\circ} 30'$ oeste. A partir dele, os fusos horários são numerados de 1 a 12

com sinal positivo para leste, quando as horas são adiantadas em relação a Greenwich e, com sinal negativo para oeste, quando as horas estão atrasadas em relação a Greenwich.

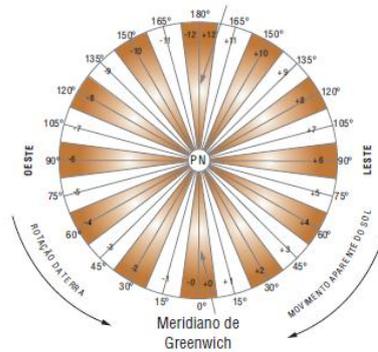


Figura 4.17: Fusos horários - Terra vista do Pólo Norte. Fonte: [7].

Convém salientar que nem sempre as linhas imaginárias desses fusos coincidem com o limite dos horários dos países. Em geral, algumas adaptações são realizadas a fim de corrigir possíveis problemas. Podemos ver na figura 4.18 que o horário de determinadas áreas de alguns países não corresponde ao horário do fuso em que estão localizadas.

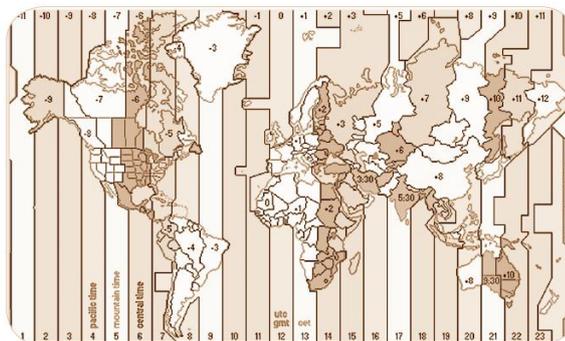


Figura 4.18: Fusos horários no mundo em 2013. Fonte: [7].

4.5 Coordenadas cartesianas no Espaço

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX , OY e OZ , com a mesma origem O .

Seja E o espaço euclidiano tridimensional. Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço E estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço E e os ternos ordenados de números reais (x, y, z) . Neste caso, dizemos que x , y e z são as coordenadas de P em relação aos eixos ortogonais $OXYZ$. Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$

no espaço E , identificamos cada ponto P de E pelas suas coordenadas (x, y, z) e escrevemos $P = (x, y, z)$.

Sejam $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais e $P = (x, y, z)$ um ponto do espaço. Indicaremos por φ o ângulo formado pelas semirretas OX e OP' , onde P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano que contém os eixos OX e OY . E indicaremos por θ o ângulo formado pelas semirretas OP' e OP . Na figura 4.19, vemos o ponto $P' = (x, y, 0)$ e os dois ângulos θ e φ associados ao ponto P . O ângulo θ , tal que $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, está associado a latitude do ponto P e o ângulo φ , tal que $-180^\circ < \varphi < 180^\circ$, está associado a longitude desse mesmo ponto.

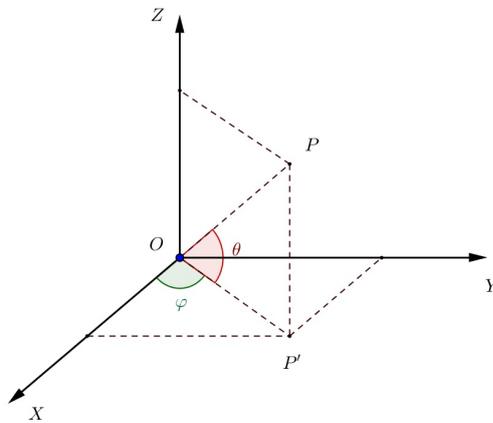


Figura 4.19: Sistema OXYZ.

A distância entre dois pontos distintos P_1 e P_2 do espaço, de coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , respectivamente, pode ser calculada pela equação

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Uma demonstração para esta equação pode ser encontrada em [10].

Seja S uma esfera de centro C e raio r . Sejam $C = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ as coordenadas do centro C e de um ponto $P \in S$ em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então,

$$P \in S \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r,$$

donde obtemos a equação da esfera S

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Em particular, se o centro da esfera for a origem do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, sua

equação será:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

4.6 Relação entre coordenadas cartesianas e geográficas

Os sistemas de coordenadas geográficas e cartesianas podem ser relacionados ao considerarmos que o planeta Terra é uma grande esfera. Assim, é possível transformar as coordenadas cartesianas de um ponto P da superfície terrestre em coordenadas geográficas e vice-versa.

Inicialmente, fixemos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O no centro da Terra, o eixo OZ positivo apontando na direção do Polo Norte, o plano OXY sendo o plano do Equador com o eixo OX positivo cortando o Meridiano de Greenwich e o eixo OY positivo cortando o meridiano de longitude $90^\circ(E)$.

Sejam P um ponto qualquer sobre a superfície da Terra, (x, y, z) suas coordenadas cartesianas e, θ e φ , suas coordenadas geográficas. A distância de P até O é o raio da Terra que identificaremos por r .

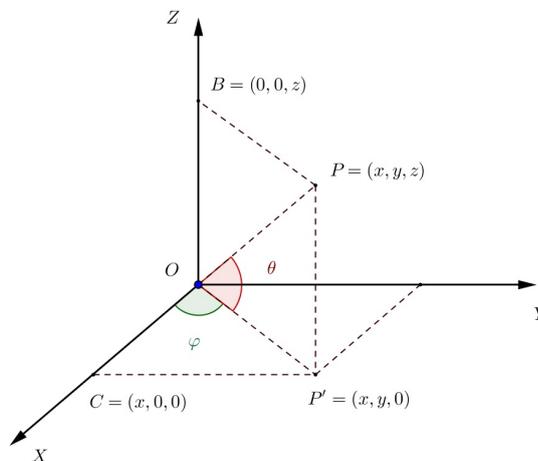


Figura 4.20: Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas geográficas.

Descreveremos a seguir como podemos obter as coordenadas geográficas de P a partir de suas coordenadas cartesianas.

Primeiramente note que no triângulo OPB , temos $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{r}$. Como $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (pois $r = d(O, P)$), temos

$$\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Da última equação e considerando o fato de θ variar de -90° a 90° , podemos notar que θ possui um único valor de 0 a 90° quando z é positivo e um único valor de -90° a 0 quando z é negativo. No primeiro caso tem-se que a latitude de P é θ , enquanto no segundo caso a latitude de P é $-\theta$. Assim,

$$\theta = \arcsen\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Considerando o triângulo $OP'C$, temos $\sen\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Dessas equações e considerando o fato de φ variar de -180° a 180° , podemos notar que φ possui um único valor de 0 a 180° , quando y é positivo; e φ possui um único valor de -180° a 0 , quando y é negativo. No primeiro caso tem-se que a longitude de P é φ , enquanto no segundo caso a longitude de P é $-\varphi$. Assim,

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{e} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Descreveremos a seguir como obter as coordenadas cartesianas de P a partir de suas coordenadas geográficas.

Como $\sen\theta = \frac{z}{r}$, temos,

$$z = r \cdot \sen\theta.$$

Por outro lado, $\cos\theta = \sen(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$ e $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Portanto,

$$x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi.$$

Finalmente, $y = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sen\varphi$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = r \cdot \cos\theta$. Portanto,

$$y = r \cdot \cos\theta \cdot \sen\varphi.$$

5 *Proposta Didática*

5.1 Introdução

A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno. (BRASIL, 1998, p. 24)

As discussões acerca da aceitação de diferentes geometrias proporcionaram grandes avanços do saber geométrico, tanto no que diz respeito às bases da própria geometria euclidiana como na percepção da impossibilidade desta geometria explicar problemas físicos como os relacionados a grandes distâncias ou à astronomia.

Entretanto, tradicionalmente o ensino de outras geometrias não tem sido abordado no ensino básico, em particular na rede estadual de educação do Rio de Janeiro, na qual se tem como referência os currículos mínimos propostos pela Secretaria Estadual de Educação. Assim, temos presenciado em sala de aula a geometria euclidiana sendo proposta como única, ao invés de uma parte das geometrias. De acordo com Zanella ([23]), o fato de outras geometrias não serem abordadas no ensino básico pode estar relacionado tanto à formação inicial da maioria dos professores de Matemática quanto à falta deste conteúdo na maioria dos livros didáticos do ensino fundamental e médio.

No presente estudo, pretendemos mostrar que essas geometrias podem ser exploradas na educação básica com elementos do dia-a-dia. Neste capítulo, propomos atividades sobre geometria esférica, que é uma geometria não euclidiana, de forma a conduzir o aluno a construir conceitos dessa geometria e expandí-los para definir elementos da cartografia, ao estudar o globo terrestre. Além disso, os alunos terão a oportunidade de perceber diferenças entre essa geometria e a geometria com a qual eles estão familiarizados, a euclidiana.

O estudo das Geometrias não-Euclidianas traz grandes contribuições para a Escola, pois possibilita uma visão da Matemática como um conhecimento que pode ser contestado, por meio de discussões dos conceitos de verdade matemática e de espaço, já que historicamente o estudo das Geometrias não-Euclidianas começou a partir da tentativa de se provar ou negar o 5º Axioma de Euclides, conhecido também como Postulado das Paralelas. (KALEFF et al., 2007, p.4)

As atividades que propomos neste capítulo têm como referencial teórico o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, do qual falaremos mais detalhadamente a seguir. Por simplicidade chamaremos este referencial teórico apenas de modelo de van Hiele.

5.2 Modelo de van Hiele

Ao investigarem as dificuldades apresentadas por seus alunos, o holandês Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Gedof desenvolveram o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, que tem por objetivo conduzir a aprendizagem e a avaliação das habilidades geométricas dos alunos. O primeiro livro no qual se desenvolveu este modelo é chamado *Structure and Insight: A theory of mathematics education* (Estrutura e Insight: A teoria da educação matemática, tradução nossa), de 1959. Entretanto, o interesse pelos estudos dos van Hiele tornaram-se maior após suas traduções para o inglês feitas em 1984.

Tal modelo sugere cinco níveis de compreensão, denominados visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor, os quais detalham o desenvolvimento do aprendizado geométrico dos alunos. De acordo com Kaleff *et al* ([14]), as características dos níveis de van Hiele são as seguintes:

- **Visualização:** neste nível, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo, sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. O reconhecimento das figuras geométricas ocorre a partir das suas aparências globais.
- **Análise:** os alunos analisam informalmente as figuras através da observação e experimentação. Eles começam a distinguir características e propriedades das figuras geométricas para resolver problemas.
- **Dedução Informal:** os alunos formam definições abstratas. Podendo reconhecer condições necessárias e suficientes de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico.

- **Dedução Formal:** os alunos desenvolvem de forma lógica seqüências de afirmações deduzindo uma a partir de outra. Um aluno pode construir provas, bem como perceber a possibilidade de desenvolvê-las de formas distintas.
- **Rigor:** os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com alto grau de rigor. São capazes de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas e estudar várias geometrias na ausência de modelos concretos.

De acordo com esse modelo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, um aluno só alcança determinado nível de raciocínio se tiver atuado com sucesso no nível anterior. Além disso, o avanço de um nível para o seguinte é consequência da maturidade geométrica atingida em atividades adequadas, que são organizadas pelo professor, e não por conta do aumento de sua idade. Assim, é essencial que haja uma harmonia entre a aprendizagem e o nível de pensamento dos estudantes.

No modelo de van Hiele, o professor desempenha um papel fundamental, uma vez que cabe a ele escolher as tarefas que favorecerão a passagem de nível do aluno em determinado tema de geometria. Assim, o modelo de van Hiele propõe cinco fases de aprendizagem sucessivas, as quais possuem como objetivo guiar o professor na melhoria do raciocínio geométrico dos alunos. De acordo com Kaleff *et al* ([14]), são elas:

- **Questionamento ou Informação:** nesta fase o professor e o aluno estabelecem um diálogo sobre os objetos de estudo, e com isso o professor entende o grau de maturidade dos alunos sobre o tema escolhido.
- **Orientação Direta:** requer que o professor conduza o aluno a explorar o assunto em estudo a partir de atividades selecionadas e ordenadas.
- **Explicitação:** a partir de suas experiências, os alunos expõem suas opiniões sobre as estruturas observadas. Nesta fase, o professor pouco interfere no trabalho dos alunos, deixando-os livres na busca da informação.
- **Orientação Livre:** aqui o professor apresenta aos alunos tarefas que possibilitem formas distintas de serem realizadas e assim estes procurem soluções pessoais.
- **Integração:** onde os alunos sintetizam, auxiliados pelo professor, o que foi aprendido, elaborando um aspecto geral dos objetos e suas relações no nível alcançado.

5.3 Atividades

Nesta seção, apresentaremos quatro grupos de atividades baseadas no modelo de van Hiele, que podem ser aplicadas para alunos do primeiro ano do ensino médio. Os pré-requisitos necessários para a realização dessas atividades são os conceitos elementares da geometria euclidiana (ponto, reta e plano) além dos conceitos de ângulo, círculo, esfera, seção plana de uma esfera e noções de área.

Atividade 1: Conhecendo elementos da geometria esférica.

Tipo de atividade: individual.

Objetivo: visualizar, através de cortes na esfera e desenhos, elementos da geometria esférica como círculo máximo, arco de círculo máximo e triângulo esférico.

Material: uma folha de papel A4, canetas hidrográficas e duas bolas de isopor pequenas. Uma bola de isopor deverá conter dois cortes, sendo que um deles dividirá a esfera ao meio. Deverão ser utilizados ímãs para que as esferas pareçam intactas.

É possível notar que todos os itens desta atividade visam desenvolver a habilidade de visualização geométrica requerida pelo primeiro nível do modelo de van Hiele.

Procedimentos:

a) Você recebeu uma bola de isopor que possui partes conectadas através de ímãs. Desmonte essa bola e posicione a porção plana de cada uma dessas partes sobre o papel e desenhe o contorno dessas partes. O que você observou nesses desenhos? Há algo em comum entre eles?



Figura 5.1: Cortes na esfera.

b) Os dois círculos obtidos possuem o mesmo raio? Por que isso aconteceu?

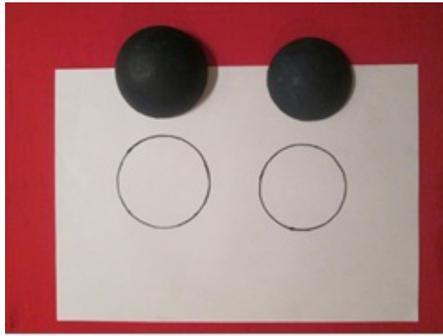


Figura 5.2: Círculos.

O círculo com o maior raio possível que você obteve é denominado *círculo máximo*. O círculo máximo que obtivemos é a seção plana correspondente a um corte que passa pelo centro da bola. Assim, os raios da bola e do círculo máximo são iguais.

c) Utilizando uma caneta hidrográfica da cor preta, marque dois pontos sobre a outra bola de isopor. Uma esses dois pontos através do menor caminho possível.



Figura 5.3: Arco de círculo máximo.

A curva que você desenhou é denominada *arco de círculo máximo*.

d) Utilizando uma caneta hidrográfica da cor preta, marque três pontos sobre a bola de isopor. Uma esses três pontos, dois a dois, através do menor caminho possível. Descreva a figura encontrada. Com que figura plana você acha que ela se parece?

A figura que você desenhou é denominada *triângulo esférico*.

Nessa atividade, conhecemos conceitos de uma nova geometria, diferente da geometria euclidiana, que se desenvolve sobre a esfera, e por isso, é denominada *geometria esférica*.

Atividade 2: Aplicando os elementos da geometria esférica no globo terrestre.

Tipo de atividade: em dupla.

Objetivo: reconhecer, no globo terrestre, conceitos construídos na primeira atividade e utilizá-los para definir elementos básicos de cartografia (polos geográficos, linha do Equador, meridianos e hemisférios terrestres) a partir do ponto de vista da geometria esférica, além de resolver problemas simples de navegação.

Material: um pequeno globo terrestre coberto com papel manteiga e um lápis.

É possível notar que os itens desta atividade visam desenvolver a habilidade de visualização geométrica.

Procedimentos:



Figura 5.4: Globo terrestre.

a) Podemos girar o globo terrestre em torno de um eixo imaginário, que intersecta o globo terrestre em dois pontos. Localize esses pontos.

Esses pontos são denominados *polo Norte* e *polo Sul*. Note que o primeiro fica localizado próximo ao Canadá e o segundo localizado na Antártida.

b) O globo terrestre tem desenhado 13 círculos máximos e círculos menores. Tente identificá-los.

Podemos notar que estão desenhados 12 círculos máximos passando pelos polos Norte e Sul. Os arcos de círculo máximo que ficam compreendidos entre os polos Norte e Sul são semicírculos máximos denominados *meridianos*, sendo o meridiano de Greenwich o mais conhecido. Este meridiano passa pela Inglaterra e divide a Terra em oriente e ocidente. Tente encontrá-lo no globo terrestre.

O outro círculo máximo que você identificou é denominado *Linha do Equador* e passa

por países como o Equador, Brasil e Indonésia. A linha do Equador divide a Terra em dois hemisférios, o Norte (que contém o polo Norte) e o Sul (que contém o polo Sul).

c) No globo terrestre, coberto com um papel vegetal, marque um ponto sobre a capital do Brasil (Brasília) e a capital da Espanha (Madrid). Agora, desenhe um círculo máximo passando por esses pontos.



Figura 5.5: Círculo máximo no globo terrestre.

d) Trace o menor caminho entre as capitais do Brasil e da Espanha.



Figura 5.6: Arco de círculo máximo no globo terrestre.

e) O que você pode observar em relação às características do caminho traçado no globo terrestre? Discuta com seus colegas.

Note que o menor caminho que liga essas capitais é um arco de círculo máximo.

Atividade 3: Analisando as retas na geometria esférica.

Tipo de atividade: em dupla.

Objetivo: mostrar diferenças das geometrias esférica e euclidiana.

Material: um pequeno globo terrestre coberto com papel manteiga, um mapa-múndi impresso no papel A4, uma caneta hidrográfica e uma régua.

É possível notar que os itens desta atividade visam desenvolver a habilidade de visualização geométrica.

Procedimentos:

a) Escolha um ponto sobre o globo terrestre. Tente descobrir quantos círculos máximos passam por esse ponto.

b) Escolha um ponto sobre o mapa-múndi impresso na folha de papel. Tente descobrir quantas retas passam por esse ponto.

Você deve ter percebido que no globo terrestre existem infinitos círculos máximos passando por um ponto, enquanto no mapa-múndi, existem infinitas retas que passam por um ponto.

Os círculos máximos na geometria esférica equivalem às retas da geometria euclidiana. Na geometria euclidiana, duas retas concorrentes formam ângulos planos, enquanto na geometria esférica a interseção de dois círculos máximos determinam ângulos denominados *ângulos esféricos*.

c) Tome dois pontos sobre o globo terrestre. Tente descobrir quantos círculos máximos passam por esses pontos.

d) Agora tome dois pontos sobre o mapa-múndi. Tente descobrir quantas retas passam por esses pontos.

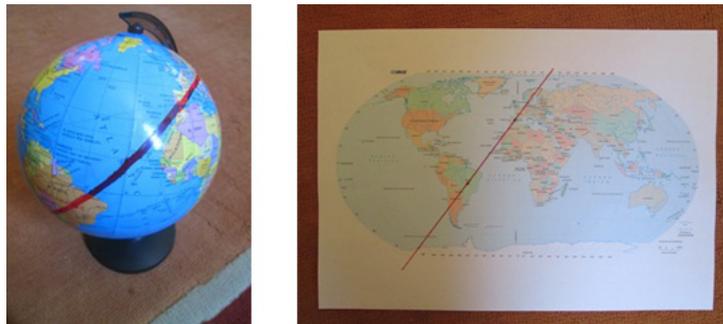


Figura 5.7: Círculo máximo no globo terrestre e uma reta no mapa-múndi.

e) A partir dos polos Norte e Sul, quantas retas você consegue traçar? Compare as suas retas com as dos seus colegas.



Figura 5.8: Círculos máximos no globo terrestre.

f) Existem outros pontos em que aconteça o mesmo que o observado no item anterior?

Na geometria esférica, diferente da geometria euclidiana, por dois pontos podem passar mais de uma reta, que são os círculos máximos. Tais pontos, como os polos Sul e Norte, são chamados de *pontos antípodas*.

Atividade 4: Localizando um ponto no globo terrestre.

Tipo de atividade: em dupla.

Objetivo: introduzir o conceito de latitude e longitude.

Material: um pequeno globo terrestre coberto com papel manteiga e uma caneta hidrográfica.

Observamos que os itens dessa atividade privilegiam o nível da Análise.

Procedimentos:

Na atividade 3, vimos que por dois pontos sobre a esfera passa um único círculo máximo, desde que esses pontos não sejam antípodas. Além disso, sabemos que um círculo compreende um ângulo de 360° .

a) Sabendo que um arco de círculo máximo é uma parte de um círculo máximo, calcule a medida do arco, em graus, que fica determinado na linha do Equador por dois meridianos consecutivos. (Lembre-se que foram traçados 24 meridianos no globo).

b) Desenhe, no globo terrestre, o círculo máximo que passa pelas capitais a seguir:

- Brasília e Tóquio (Japão).
- Lima (Peru) e Washington (Estados Unidos).

c) Faça uma estimativa para determinar o ângulo que compreende o menor arco de círculo

máximo determinado por essas capitais.

Note que os arcos de círculo máximo que unem essas capitais correspondem aos caminhos que um avião percorreria para se deslocar entre elas.

d) Complete a tabela a seguir com os resultados encontrados por cada uma das duplas.

Duplas	Ângulo que compreende o arco que liga Brasília e Tóquio	Ângulo que compreende o arco que liga Lima e Washington

e) Localize a capital da Itália (Roma) no globo terrestre e faça o que se pede nos itens a seguir.

(I) Desenhe o meridiano que passa por essa capital e faça uma estimativa para a medida do arco que une essa capital e a interseção do meridiano desenhado com a Linha do Equador.

A *latitude* de um ponto sobre o globo terrestre equivale à medida, em graus, do arco de meridiano compreendido entre este ponto e a linha do Equador. Ela é medida de 0 a 90° no sentido norte (N) ou de 0 a 90° no sentido sul (S). É comum atribuir sinal positivo para latitudes ao norte e negativos para latitudes ao sul. Como Roma se encontra no Hemisfério Norte, dizemos que sua latitude é 45° (N), aproximadamente.

(II) Faça uma estimativa para a medida do arco na Linha do Equador que une o meridiano desenhado no item anterior e o meridiano de Greenwich. (dica: utilize as marcações em graus já existentes no globo para fazer sua estimativa).

A *longitude* de um ponto sobre o globo terrestre equivale à medida, em graus, do arco sobre a linha do Equador, compreendido entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa por esse ponto. Ela é medida de 0 a 180° no sentido leste (E) ou de 0 a 180° no sentido oeste (W), podendo-se atribuir sinal positivo para longitudes ao leste e negativo para longitudes ao oeste. Como Roma se encontra no Hemisfério oriental, dizemos que sua longitude é 12° (E), aproximadamente.

f) Faça uma estimativa para a latitude e a longitude de cada capital na tabela a seguir, atribuindo o sinal de positivo ou negativo.

Capital	Latitude	Longitude
Rio de Janeiro		
Guatemala		
Londres		
Oslo		
Quito		

A fim de localizar um ponto sobre a superfície terrestre, foi criado um sistema de referência e posicionamento denominado Sistema de Coordenadas Geográficas. Nesse sistema, cada ponto da superfície terrestre é identificado pela sua latitude e sua longitude, que constituem as suas coordenadas geográficas.

Atividade 5: Conjecturando sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Tipo de atividade: em dupla.

Objetivo: fazer deduções informais acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Material: um pequeno globo terrestre coberto com papel vegetal, uma caneta hidrográfica e um transferidor.

Essas atividades visam desenvolver o nível da Dedução Informal do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele.

Procedimentos:

a) Escolha três capitais em um mesmo hemisfério do globo terrestre. Una esses três pontos dois a dois através do menor caminho possível, ou seja, com arcos de círculos máximos.

b) O que você pode observar em relação às características da figura traçada no globo terrestre? Discuta com seus colegas.

Note que a figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem as cidades escolhidas é um triângulo esférico.

c) Meça os ângulos internos do triângulo esférico desenhado no item anterior e some as medidas obtidas.

d) Complete a tabela a seguir com os resultados encontrados por cada uma das duplas.

Duplas	Soma das medidas dos ângulos internos do triângulo esférico

e) Assim como na geometria euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo possui sempre o mesmo valor?

f) Compare os resultados obtidos na tabela com a soma dos ângulos internos de um triângulo da geometria euclidiana.

Podemos perceber que, ao contrário da geometria euclidiana, na geometria esférica a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é superior a 180° .

g) Desenhe, sobre o globo terrestre revestido com papel vegetal, um triângulo esférico determinado por dois pontos que você vai escolher sobre a linha do Equador e um ponto no polo Norte.

h) Meça os ângulos deste triângulo esférico.

i) Compare as medidas com as encontradas pelos seus colegas. Vocês observaram alguma coisa em comum sobre a medida dos ângulos?

Vocês devem ter percebido que, diferentemente da geometria euclidiana, na geometria esférica é possível obter triângulos com dois ângulos retos.

j) Desenhe, sobre o globo terrestre revestido com papel vegetal, um triângulo esférico definido pelos pontos A, B e C, onde A é a interseção do meridiano que passa pelo Congo com a linha do Equador, B é interseção do meridiano que passa pela Colômbia com a linha do Equador e C o polo norte.

k) Meça os ângulos deste triângulo esférico.

l) Compare as medidas com as de seus colegas. Vocês observaram alguma coisa em comum sobre a medida dos ângulos?

Note que também é possível obter um triângulo esférico na geometria esférica com os três ângulos retos.

6 *Considerações Finais*

Este trabalho foi desenvolvido na intenção de mostrar que é possível inserir um estudo de geometrias não euclidianas ainda no ensino básico, de forma com que os alunos percebam sua importância no mundo real. Entretanto, percebemos que na maioria das escolas a abordagem das geometrias não euclidianas não tem sido contemplada por diversos motivos, dentre os quais se destacam a falta de conhecimento do professor do assunto e a falta de referência em livros didáticos. Porém, nosso objetivo não era ingressar nessas discussões.

Nesse sentido, oferecemos um panorama histórico desde a formalização da geometria euclidiana, há aproximadamente 300 a.C., até as discussões que desencadearam no surgimento das geometrias não euclidianas. Também abordamos os conceitos fundamentais da geometria esférica, comparando-os com a geometria euclidiana. Realizamos um estudo dos principais conceitos da cartografia, relacionando-os com elementos da geometria esférica e propomos uma sequência de atividades que possam auxiliar o docente na condução de seu aluno a construir elementos da geometria esférica. Dentre as geometrias não euclidianas, a escolha pela geometria esférica foi feita devido à facilidade de exploração e maior conectividade com a realidade, por vivermos em uma superfície esférica.

Acreditando que a interação com outros saberes pode contribuir mais intensamente com o desenvolvimento cognitivo do aluno, desenvolvemos atividades interdisciplinares com a Geografia. Desta forma, a geometria se torna uma ferramenta para compreender elementos da cartografia tornando as atividades mais atrativas ao aluno, uma vez que conexões dos conceitos vistos em sala de aula com situações cotidianas podem constituir um importante fator motivacional.

As atividades propostas utilizam materiais simples, de fácil manipulação e contemplam principalmente o nível da visualização do modelo de van Hiele, sendo o primeiro passo para a construção de um novo conceito, devido à sua importância para o desenvolvimento e a organização informal do raciocínio.

Desejamos que este estudo seja uma fonte de reflexão para docente de Matemática sobre

a contribuição de que esse novo olhar da geometria possa trazer ganhos no desenvolvimento do conhecimento geométrico de seus alunos. Esperamos que percebam que é possível uma abordagem das geometrias não euclidianas de uma forma interativa, diferente da tradicional transferência de saberes.

Referências

- [1] ADAMES, MÁRCIO ROSTIROLLA. *Geometria Esférica*, Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática - Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2005.
- [2] APOLO 11. *Latitude e Longitude das cidades Brasileiras*. Apolo 11, 2014. In: <<http://www.apolo11.com/latlon.php>>. Acessado em: 3 de janeiro de 2014.
- [3] ATRACTOR. *Geometria Esférica*, Matemática do Planeta Terra, Atractor, 2013. In: <<http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/urso2.htm>>. Acessado em: 27 de dezembro de 2013.
- [4] BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES. *Geometria Hiperbólica*, Rio de Janeiro, IMPA, 2002.
- [5] BOYER, CARL BENJAMIN. *História da Matemática*, São Paulo, Edgard Blucher, 1974.
- [6] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental*, Brasília, 1998.
- [7] CARVALHO, EDILSON ALVES DE; ARAÚJO, PAULO CESAR DE. *Leituras Cartográficas e Interpretações Estatísticas I*, UFRN, Natal, RN, 2ª edição, 2011.
- [8] COUTINHO, LÁZARO. *Convite às Geometrias não-Euclidianas*, Rio de Janeiro, Interciência, 2001.
- [9] CRESCENTI, ELIANE PORTALONE. *Os Professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino*, Tese de Doutorado, UFSCar, São Carlos, 2006.
- [10] DELGADO, JORGE; FRENSEL, KATIA; CRISSAFF, LHAYLLA. *Geometria Analítica*, Rio de Janeiro, SBM - Coleção Profmat, 2013.
- [11] EVES, HOVARD. *Introdução à história da matemática*, Campinas SP, 5ª Edição, Editora da Unicamp, 2011.
- [12] FITZ, PAULO ROBERTO. *Cartografia Básica*, São Paulo, Oficina de Textos, 2008.
- [13] *Noções Básicas de Cartografia*. IBGE, 2014. In: <<http://goo.gl/fGlrRO>>. Acessado em: 18 de novembro de 2013.
- [14] KALEFF, ANA MARIA; HENRIQUES, ALMIR DE SOUZA; REI, DULCE MONTEIRO; FIGUEIREDO, LUIZ GUILHERME. *Desenvolvimento do Pensamento Geométrico - O Modelo de Van Hiele*, Bolema, Rio Claro, n. 10, p. 21-30., 1994.

- [15] KALEFF, ANA MARIA; ROBAINA, DIOGO TAVARES; NASCIMENTO, ROGÉRIO SANTOS. *Geometrias não euclidianas: do caminhar nas cidades ao funcionamento dos GPS.*, In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte - MG, 2007.
- [16] LIMA, ELON LAGES. *Ainda sobre o Teorema de Euler para Poliedros Convexos.* In: Revista do Professor de Matemática, SBM, volume 5, 1987.
- [17] NETO, ANTÔNIO CAMINHA MUNIZ. *Geometria*, Rio de Janeiro, SBM - Coleção Profmat, 2013.
- [18] PARANÁ. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*, Secretaria de Estado da Educação do Paraná, Curitiba, 2008.
- [19] PRESTES, IRENE DA CONCEIÇÃO RODRIGUES. *Geometria Esférica: uma conexão com a Geografia*, Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC/SP, 2006.
- [20] RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo Matemática*, Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.
- [21] SILVA, KAROLINA BARONE RIBEIRO. *Noções de Geometrias não Euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais*, Curitiba, PR, CRV, 2011.
- [22] THOMAZ, MARA LÚCIA; FRANCO, VALDENI SOLIANI. *Geometria Não-Euclidiana / Geometria Esférica.*, Secretaria da Educação, Paraná, 2007.
- [23] ZANELLA, IDELMAR ANDRÉ. *Geometria Esférica: uma proposta de atividades com aplicações*, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2013. Disponível em: <<http://goo.gl/1JYN2M>>.
- [24] <<http://goo.gl/7GxhiZ>>. Acessado em: 05 de dezembro de 2013.
- [25] <<http://goo.gl/MSJCQs>>. Acessado em: 05 de dezembro de 2013.
- [26] <<http://goo.gl/F1Rmzy>>. Acessado em: 07 de janeiro de 2014.
- [27] <<http://goo.gl/nJyZTj>>. Acessado em: 07 de janeiro de 2014.
- [28] <<http://goo.gl/YQRvqp>>. Acessado em: 18 de fevereiro de 2014.
- [29] <<http://goo.gl/BpRHaf>>. Acessado em: 16 de fevereiro de 2014.
- [30] <<http://goo.gl/U0p4eE>>. Acessado em: 29 de novembro de 2013.
- [31] <<http://goo.gl/2y0acA>>. Acessado em: 29 de novembro de 2013.
- [32] <<http://goo.gl/6wdOxc>>. Acessado em: 16 de fevereiro de 2014.
- [33] <<http://goo.gl/mhBND0>>. Acessado em: 06 de janeiro de 2014.
- [34] <<http://goo.gl/esZSsR>>. Acessado em: 06 de janeiro de 2014.