



AUDINO CASTELO BRANCO

A MÁ TEMÁTICA da DISLEXIA

Aspectos da utilização da Arte e da Tecnologia na aprendizagem da Matemática por alunos portadores de DISLEXIA

CAMPINAS

2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

AUDINO CASTELO BRANCO

A MÁ TEMÁTICA da DISLEXIA

Aspectos da utilização da Arte e da Tecnologia na aprendizagem da Matemática por alunos portadores de DISLEXIA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO AUDINO CASTELO BRANCO E ORIENTADO PELA PROFA. DRA. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.

Assinatura da Orientadora

A handwritten signature in black ink, appearing to read "M. A. Diniz Ehrhardt".

Profª Dra Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

CAMPINAS

2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C277m Castelo Branco, Audino, 1961-
A má temática da dislexia : aspectos da utilização da arte e da tecnologia na aprendizagem da matemática por alunos portadores de dislexia / Audino Castelo Branco. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dislexia. 2. Fibonacci, Números de. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Educação inclusiva. 5. Arte na educação. I. Ehrhardt, Maria Aparecida Diniz, 1956-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Mathematics and dyslexia : aspects of the use of art and technology in the learning of mathematics for students with dyslexia

Palavras-chave em inglês:

Dyslexia

Fibonacci numbers

Mathematics - Study and teaching

Inclusive education

Art in education

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Maria Aparecida Diniz Ehrhardt [Orientador]

Vincenzo Bongiovanni

Anamaria Gomide

Data de defesa: 20-02-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 20 de fevereiro de 2015 e
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

M. A. Ehrhardt

Prof.(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

Anamaria Gomide

Prof.(a). Dr(a). ANAMARIA GOMIDE

V. Bongiovanni

Prof.(a). Dr(a). VINCENZO BONGIOVANNI

Abstract

This research aims to explore the learning of certain topics of mathematics by dyslexic students and the contribution that art and technology can provide, serving as facilitators instruments in the teaching-learning process. In this work, we will begin the construction of a class in order to guide the teacher on how to meet the educational needs of a dyslexic, following expert recommendations about Dyslexia. We will use as a starting point, an intriguing challenge to pique the interest of the student and to develop a strategy that meets these guidelines, which are based on the multisensory teaching. We will discuss about one of the most interesting concepts of mathematical curriculum: the Fibonacci sequence.

Keywords: Dyslexia; Fibonacci numbers; Mathematics – Study and teaching; Art in education.

Resumo

Essa pesquisa tem como objetivo explorar a aprendizagem de certos tópicos da Matemática por parte de alunos disléxicos e a contribuição que a Arte e a tecnologia podem dar, servindo como instrumentos facilitadores no processo de ensino-aprendizagem. Nesse trabalho, iniciaremos a construção de uma aula, visando orientar o professor sobre como atender as necessidades pedagógicas de um disléxico, seguindo orientações de especialistas sobre o tema. Utilizaremos como ponto de partida, um

desafio intrigante para despertar o interesse do aluno e para desenvolver uma estratégia que atenda essas orientações, cuja base é o ensino multissensorial. Abordaremos um dos conceitos mais interessantes do curriculum matemático: a sequência de FIBONACCI.

Palavras-chave: Dislexia; Fibonacci, Números de;, Matemática – Estudo e ensino; Educação inclusiva; Arte na educação.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 2. MOTIVAÇÃO PESSOAL | 7 |
| 3. DISLEXIA | 11 |
| 3.1 Definição e elementos fundamentais sobre a Dislexia | 11 |
| 3.2 Sintomas da Dislexia e recomendações de especialistas | 14 |
| 3.3 Recursos tipográficos visando atender as necessidades dos disléxicos | 22 |
| 4. DISLEXIA e MATEMÁTICA | 25 |
| 4.1 Considerações Gerais da Dislexia que interferem na aprendizagem da Matemática. | 25 |
| 4.2 A “Ritabella” | 28 |
| 4.3 A calculadora MusiCalcolorida | 30 |
| 4.4 A Experiência Brasileira sobre Discalculia, “a dislexia dos números” | 34 |
| 4.5 A contestação dos diagnósticos | 42 |
| 4.6 A dislexia e sua influência na aprendizagem da Matemática, segundo a extensa tradição de órgãos internacionais | 44 |
| 5. PROPOSTA de ATIVIDADES: Ilusões de ótica. | 63 |
| 5.1 O contexto. | 63 |
| 5.2 A mágica do chocolate infinito | 64 |
| 5.3 O sofisma de Sam Loyd | 67 |
| 5.4 A proposta de Régine Douady – Mudança de Quadro | 71 |
| 5.5 O quadro da Geometria Analítica | 72 |
| 6. Proposta de Atividade: A Arte e a Regularidade | 77 |
| 6.1 A interdisciplinaridade Matemática-Arte | 77 |

| | |
|--|------------|
| 6.2 Uma extensão da regra de Sarrus | 78 |
| 6.3 O precioso auxílio da FOLHA QUADRICULADA | 80 |
| 6.3.1 A busca dos vértices dos quadriláteros | 80 |
| 6.3.2 O modelo gráfico no papel quadriculado | 82 |
| 6.4 Esbarrando nos limites da perfeição humana | 84 |
| 6.5 O “GEOPLANO” sem pregos | 88 |
| 7. A sequência de Fibonacci | 91 |
| 7.1 A descoberta de uma sequência | 91 |
| 7.2 A sequência de FIBONACCI e a regularidade no cálculo da área do quadrilátero “invisível” | 93 |
| 7.3 GEOGEBRA, a visão pela geometria dinâmica | 96 |
| 8. QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS | 103 |
| 8.1 O ato de definir | 103 |
| 8.2 Os quadriláteros notáveis segundo EUCLIDES, LEGENDRE e HADAMARD | 104 |
| 8.3 As vantagens da concepção de HADAMARD | 110 |
| 8.4 Os quadriláteros de Q1 a Q6, segundo suas diagonais | 114 |
| 9. Planilhas Eletrônicas | 119 |
| 9.1 A planilha como recurso didático | 119 |
| 9.2 Os limites de uma planilha | 125 |
| 9.2.1 Especificações e limites de cálculo da planilha EXCEL | 125 |
| 9.2.2 Normas técnicas – O padrão IEEE 754 | 129 |
| 9.2.3 O programa PYTHON | 134 |
| 9.3 Compreendendo as grandezas envolvidas na planilha | 137 |
| 9.4 Razões notáveis em uma planilha | 145 |
| 9.4.1 A razão Áurea | 145 |
| 9.4.2 A compreensão da razão áurea sob a ótica da MusiCalcolorida e Planilha | 150 |

| | |
|--|------------|
| 9.5 O termo geral da sequência de Fibonacci e a Geometria Dinâmica | 157 |
| 10. As DEMONSTRAÇÕES | 165 |
| 10.1 A Identidade de Cassini: " $F_{n+1} \times F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$ " | 166 |
| 10.2 Demonstração da generalidade do vídeo "64 = 65?!" | 167 |
| 10.2.1 A validação da "MUDANÇA de QUADRO" | 168 |
| 10.2.2 O paralelogramo invisível de área unitária | 172 |
| 10.3 O número de dígitos de " F_n " | 174 |
| 10.4 A sequência de Fibonacci e o número Φ | 175 |
| 10.5 A irracionalidade de Φ | 176 |
| 11. A Falácia do "Chocolate Infinito" | 179 |
| 11.1 A "MUDANÇA de QUADRO" | 179 |
| 11.2 O corte do chocolate sob a ótica da Geometria Analítica | 181 |
| 12. CONCLUSÃO | 191 |
| 12.1 A declaração de SALAMANCA e a "exclusão na inclusão" | 191 |
| 12.2 As "RAMPAS" | 193 |
| 12.3 A "INCLUSÃO" dos professores | 194 |
| 13. BIBLIOGRAFIA | 197 |
| SUPLEMENTOS | 203 |
| S1 A sequência de Lucas | 203 |
| Definição e experimentação; $L_{n+1} \times L_{n-1} - (L_n)^2 = 5 \times (-1)^{n-1}$; O Paralelogramo de área 5; O termo geral da sequência de Lucas e a Geometria Dinâmica; A sequência de Lucas e o número Φ . | |
| S2 A Generalização da Sequência de FIBONACCI (GSF) | 212 |
| Gibonacci: definição e experimentação; O termo geral da sequência Gibonacci; $G_{n+1} \times G_{n-1} - (G_n)^2 = \mu \times (-1)^n$; O Paralelogramo de área $ \mu $; Gibonacci e a Geometria Dinâmica; Gibonacci e o Paralelogramo de área zero; A sequência de Gibonacci e o número Φ . | |

| | |
|---|------------|
| ANEXOS: A História da Matemática | 227 |
| A1 Os quadriláteros notáveis em “Os Elementos” de EUCLIDES | 227 |
| A2 O contexto histórico na vida e obra de LEGENDRE | 231 |
| A3 A vida secular de HADAMARD | 238 |

Dedico esse trabalho àquele que foi a grande inspiração, o real motivador de minhas energias para escrever até o ponto final: meu filho Ariel.

Porque para alguém que já percorreu grande parte de uma estrada pedagógica angustiante, talvez, a atitude mais confortável fosse o silêncio. Mas, para um pai que assiste o sofrimento de seu amado filho, cada linha se transforma em um grito para que a sociedade entenda, de uma vez por todas, que aprender é apenas umas das maneiras de se praticar a felicidade.

Agradecimentos

Sei que há uma quantidade enorme de agradecimentos que deveria fazer e, de antemão, peço desculpas devido à limitação de minha visão. Mas não poderia deixar de agradecer àqueles que se agigantaram dentro de minha alma.

A Deus, porque Ele é tudo na minha vida.

A meu amigo Rashi, que constantemente lapidou minha intuição para realizar um trabalho edificante; um amigo verdadeiramente de outro mundo.

A meus amigos de longa data, Aureo e Marta; o que seria de mim sem o incentivo de vocês dois?!

Aos professores doutores, componentes da Banca Examinadora de meu trabalho: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt, pela coragem em aceitar ser minha orientadora, fornecendo preciosas sugestões e mostrando paciência e respeito ao meu ritmo; à Anamaria Gomide, pelo exemplo de alegria e comprometimento em relação à aprendizagem de seus alunos; ao ilustre Pitagórico, Vincenzo Bongiovanni, por ter tido um papel tão importante no nascimento dessa dissertação, exercendo profunda influência nos elementos que a compõem, prestando uma inestimável ajuda através de sua experiência e labor. Qualquer palavra de agradecimento que eu possa fazer, ainda assim será pouco, mesmo para alguém que é matemático e poeta.

Agradeço ao meu amigo José Geraldo (in memoriam) que continua mais vivo do que nunca, pois seu exemplo de interação com os alunos, sua inesgotável capacidade de criar jogos matemáticos e músicas encantadoras, sua arrebatadora e obstinada preocupação em pensar sempre nas minorias, nunca deixarão de estar presentes no coração de todos aqueles que tiveram o privilégio de sua convivência.

Às professoras doutoras Janete Bolite Frant e Lulu Healy, responsáveis pelos meus primeiros passos no mundo da matemática inclusiva.

À professora de Arte, Silvia Cristina Ferraz Holzhauser, por sua ajuda na execução das atividades artísticas e experiências com os alunos efetuadas em uma escola pública na periferia de Atibaia.

Aos meus colegas do ProfMat-Unicamp, sobretudo aos amigos Adilson Pedro Roveram, Cecília Yumi Kurokawa e Ariadne Vasques Calçada pelas valiosas contribuições durante todo o curso. A você, minha amiga Ariadne, eu deveria fazer um agradecimento multidimensional, pois sua ajuda foi imprescindível em cada passo que percorri nesses últimos 3 anos, emprestando sua capacidade enorme, seja no campo matemático, seja no domínio extremo da língua portuguesa, seja em todo apoio emocional e logístico que a grandeza de seu coração me ofertou. Que Deus possa lhe recompensar por tudo que você fez por mim.

A vocês minhas amigas matemáticas, Angela Cunha Lima Savi e Carla Ricciuti, que já acompanham minha história há mais de 35 anos, meu eterno amor e obrigado.

À minha amiga Éva Juhász, que mesmo estando tão distante, sempre incentivou meu trabalho com sua ajuda angelical.

À minha família, minha mãe e meus irmãos, não só pelo apoio recebido nesses últimos momentos, mas por toda a vida.

À minha sogra, Dona Maria de Lourdes, por cuidar com tanto carinho de meus filhos durante todo o tempo na elaboração dessas páginas.

Agradeço, enfim, a meus amados filhos, Ariel e Talita; vocês são tudo que há de melhor e mais belo na minha vida.

À CAPES, pelo financiamento desse projeto e ao IMECC-Unicamp pela oportunidade de realizá-lo.

1 Introdução

Há uma gama enorme de exemplos na história da humanidade em que a ciência chegou a negar fatos que, hoje, fazem parte do conhecimento acessível a todos. A circulação do sangue, a existência de vírus e bactérias, a queda de meteoritos, a vida nas profundezas dos mares. Com o natural progresso da civilização, muitas epidemias, que devastavam multidões na antiguidade, encontram atualmente respaldo na medicina, pois agora existe prevenção e tratamento para doenças que, antigamente, eram consideradas apenas como consequência do pecado. Hoje, já atingimos um grau de evolução enorme, mas ainda desconhecemos a solução de muitos males que atingem a humanidade deixando, sem respostas, os anseios de muitas pessoas mundo afora.

Doenças que ainda não têm nome, mas que deixarão muitos rastros na história, atacam suas vítimas silenciosamente, até que um dia alguém, ou uma instituição, chega ao ponto de esclarecer a humanidade quanto a suas características, seus efeitos, sua prevenção e até mesmo, quem sabe, sua cura. Não poderia ser diferente quanto aos distúrbios pedagógicos, que muitas vezes tornam a trajetória do ensino-aprendizagem um verdadeiro tormento na alma de muitos estudantes, no caminho de sua formação moral, ética e científica.

A Matemática tem exercido, ao longo da história da educação, o papel de protagonista na sombra dos temores dos alunos, mesmo para aqueles considerados “normais”. Provas, exames de recuperação, simulados, concursos, muitos instrumentos de avaliação e seleção acabam tornando árduo um caminho que deveria fazer parte da felicidade em percorrer a estrada do conhecimento, ampliando, cada vez mais, o modo

como vemos o mundo e como podemos participar de sua transformação. Mas, ao invés disso, muitas almas ficam pelo caminho sentindo-se incapazes intelectualmente, ou pelo fato de não terem sido preservadas, compreendidas e apoiadas em suas dificuldades ao chegarem à derradeira conclusão de que “não nasceram para isso”, ou porque, simplesmente, são incapazes de aprender. Muitos são deixados de lado, pois “não deram frutos” quando alguns achavam que era derradeira hora da colheita, porque não deram “a resposta correta” no “exame final” ou porque foram precocemente jogados na corrente do “time is money”, quando, na verdade, deveriam ter sido amparadas e esclarecidas quanto ao que ocorre em suas vidas e como agir para dinamizar suas compreensões relativas ao valor do conhecimento.

TDAH, discalculia, acalculia, dispraxia, dislexia, DDA; são muitas as letrinhas que representam as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem da “rainha e serva das ciências”. É de se esperar que muitas outras denominações ainda sejam descobertas e façam parte do “CID” pedagógico do futuro (CID - Classificação Estatística Internacional de Doenças e Problemas Relacionados à Saúde), mas não sem antes de deixar, no caminho, o carimbo da reprovação e a pecha da “incapacidade” na vida de muitos estudantes.

Urge compreendermos esses distúrbios para que possamos tornar mais efetiva a aprendizagem da Matemática por todos aqueles que a encaram como um “desafio intransponível” e se vêem privados da beleza do conhecimento matemático, pois acreditamos que esta ciência pode contribuir de maneira decisiva no bem estar do indivíduo, bem como no progresso da humanidade.

Há poucas pesquisas no Brasil que estudam esse fenômeno pedagógico que afeta parte dos estudantes, que podem passar toda sua vida acadêmica desconhecendo seu distúrbio e, naturalmente, sem efetuar qualquer procedimento visando buscar esclarecimento e qualidade de vida.

Essa pesquisa tem como objetivo explorar a aprendizagem de certos tópicos da Matemática por parte de alunos disléxicos e a contribuição que a Arte e a tecnologia podem dar, servindo como instrumentos facilitadores no processo de ensino-aprendizagem. Nesse trabalho, iniciaremos a construção de uma aula, visando orientar o professor sobre como atender as necessidades pedagógicas de um disléxico, seguindo orientações de especialistas sobre o tema. Utilizaremos como ponto de partida, um desafio intrigante para despertar o interesse do aluno e para desenvolver uma estratégia que atenda essas orientações, cuja base é o ensino multissensorial. Abordaremos um dos conceitos mais interessantes do curriculum matemático: a sequência de FIBONACCI.

Há poucas pesquisas no Brasil que estudam esse fenômeno pedagógico que afeta parte dos estudantes, que podem passar toda sua vida acadêmica desconhecendo seu distúrbio e, naturalmente, sem efetuar qualquer procedimento visando buscar esclarecimento e qualidade de vida.

A seguir, será descrita a estrutura dessa dissertação com uma breve síntese quanto ao tema e à organização de cada um dos capítulos.

No **capítulo 2**, são descritas as razões que motivaram a escolha desse tema.

No **capítulo 3**, a Dislexia é descrita de uma forma geral, com definições, consequências e recomendações de especialistas para amparar os estudantes no caminho da aprendizagem.

O **capítulo 4** busca esclarecer a relação da Dislexia com a aprendizagem da Matemática, sugerindo os recursos necessários para que o professor possa atender uma gama maior de seus alunos, contando até mesmo com os conselhos de especialistas internacionais com vasta experiência no ensino dessa ciência a alunos com Dislexia.

No **capítulo 5**, são propostas atividades tendo como base o ensino multissensorial, base fundamental do ensino eficiente a alunos disléxicos.

No **capítulo 6**, é proposta uma sequência de atividades utilizando a interdisciplinaridade com Arte, buscando recursos para uma compreensão mais aprofundada sobre as atividades do capítulo anterior.

No **capítulo 7**, é definida a sequência de Fibonacci devido à sua íntima ligação com a atividade discutida no capítulo anterior. Os resultados provenientes dessa sequência são testados em um programa de Geometria Dinâmica, o Geogebra.

No **capítulo 8**, são discutidas as definições quanto aos quadriláteros notáveis e a possibilidade de defini-los através de suas diagonais.

No **capítulo 9**, é introduzido o recurso das planilhas eletrônicas e são discutidas suas limitações e suas possibilidades de promover conjecturas quanto à generalização de propriedades sugeridas por esses meios e a integração das planilhas com o programa Geogebra.

No **capítulo 10**, são mostrados os únicos recursos capazes de dar um ponto final nas constantes limitações que aparecem nas experiências, sejam em atividades manufaturadas, sejam com a utilização do computador.

No **capítulo 11**, após serem trabalhados todos os conceitos necessários para a compreensão da atividade inicial, é mostrada, sob o ponto de vista matemático, a essência da falácia do chocolate infinito.

No **capítulo 12**, é feita a conclusão do trabalho que visa à inclusão do aluno disléxico nos sistemas de ensino.

Em seguida, nos **SUPLEMENTOS**, é mostrada a sequência de Lucas, uma sequência recorrente semelhante à de Fibonacci, mas com elementos iniciais distintos. É feita a generalização da sequência de Fibonacci (GSF) e suas consequências em relação à atividade do sofisma de Sam Loyd.

Encerrando o trabalho, em **ANEXOS**, é mostrada a História da Matemática, centralizando o contexto histórico envolvendo os matemáticos que mais influenciaram a

humanidade na formação do conceito dos quadriláteros notáveis, Euclides, Legendre e Hadamard.

2 Motivação pessoal

- Matemática?! Aquele burro??!

Foi esta a resposta espontânea de uma ex-professora de Matemática do 1º grau (atual ensino fundamental II) quando soube que eu, seu ex-aluno, estava fazendo faculdade de Matemática. Não, não foi por maldade, na época (década de 70) sequer existia conhecimento no Brasil de que existia um distúrbio com o enigmático nome DISLEXIA.

Minha vida acadêmica, na escola fundamental, sempre foi recheada de desastres como a de muitos outros estudantes que desconhecem o que se passa consigo. Recuperação em todos os anos, reprovação em português na 5ª série (atual 6º ano), dificuldade de aprendizagem em todas as matérias que exigissem domínio de leitura e compreensão de texto. O que para muitos era “preparação para o futuro”, para mim era apenas uma tortura.

No primeiro ano do 2º grau (ensino médio) o professor de Matemática, que ministraria esta disciplina também nos dois anos seguintes, resolveu organizar um horário para que os alunos pudessem aprender a jogar xadrez. Participei com muita alegria, pois gostava do jogo e resolvi me inscrever em todos os campeonatos organizados na escola. Já no meio do 2º ano, meu professor veio me questionar curioso:

- Como você pode jogar xadrez tão bem e ir tão mal em Matemática?

Meu professor não entendia como eu havia vencido todos os jogos realizados com meus colegas de escola nos dois anos consecutivos (a única pessoa que me vencia era o

próprio professor) e não conseguia transformar este “raciocínio enxadrístico” em “raciocínio matemático”.

A partir daquele dia comecei a tentar ligar os procedimentos do jogo de xadrez com a Matemática: conhecimento prévio das regras, estratégia de jogo, previsão de movimentos, compreensão da situação espelhada em cada momento da partida. Passei, a partir do 2º semestre, a ter melhor rendimento nas provas de Matemática até atingir o fim do curso gostando consideravelmente da “ciência dos números”.

A experiência positiva que eu havia vivenciado me influenciou de tal maneira que acabei escolhendo Matemática para estudar na faculdade. Foram anos difíceis, mas minha dedicação ao estudo possibilitou que eu sanasse diversas deficiências de minha formação, para que eu pudesse terminar minha vida acadêmica no ensino superior, e seguir, a carreira de PROFESSOR.

Já no 2º ano do início de minha experiência profissional, fui trabalhar em uma escola (onde trabalharia durante 6 anos) que era muito indicada por psicólogos, terapeutas e fonoaudiólogos para alunos que apresentassem dificuldade de aprendizagem. Foram anos de trabalho intenso e produtivo buscando entender como ensinar melhor aquela “temida” Matemática que já, há muito, havia conquistado minha alma. Foi ali que ouvi, pela primeira vez, o nome DISLEXIA, que afetava alguns alunos na compreensão de textos, leitura e, em alguns casos, provocava dificuldades em Matemática.

Ainda, por muitos anos, trabalhei por diversas escolas em São Paulo até me estabelecer em Atibaia, cidade onde resolvi educar meus filhos. Percebi que meu filho começou a apresentar os mesmos sintomas que eu na vida escolar até que, por indicação de uma fonoaudióloga, levei-o a uma associação denominada **ABD**, para descobrir o que estava acontecendo.

Depois de passar por uma gama enorme de especialistas, aguardei em casa a chegada, pelo correio, do tão aguardado parecer. Ao abrir o envelope com o resultado

enviado pela **ABD (Associação Brasileira de Dislexia)**, estava descrito que ele possuía o mais alto grau de dislexia: **SEVERO**. Era o primeiro passo para compreender a tortura que representava para meu filho, e que também havia sido para mim, o simples ato de aprender.

Leitura, língua estrangeira, Matemática, diversas foram as dificuldades apresentadas na vida escolar de meu filho. Como professor, enfrentar essa situação passou a ser um desafio ensinar Matemática, não apenas a ele, mas também a alunos que, mesmo sem saberem, possuíam esse distúrbio. Essa caminhada perdura até os dias de hoje.

3 Dislexia

3.1 Definição e elementos fundamentais sobre a Dislexia.

Segundo a Associação Brasileira de Dislexia (ABD), este distúrbio pedagógico é definido, atualmente, utilizando a descrição elaborada pelo maior órgão mundial do estudo da dislexia, a IDA (International Dislexia Association) que, no comitê de abril de 1994 definiu:

“A dislexia é um dos muitos distúrbios de aprendizagem. É um distúrbio específico da linguagem, de origem constitucional, caracterizado pela dificuldade em decodificar palavras simples. Mostra uma insuficiência no processo fonológico. Essas dificuldades na decodificação de palavras simples não são esperadas em relação à idade. Apesar de instrução convencional, adequada inteligência, oportunidade sociocultural e ausência de distúrbios cognitivos e sensoriais fundamentais, a criança falha no processo da aquisição da linguagem com frequência, incluídos aí os problemas de leitura, aquisição e capacidade de escrever e soletrar.”

Mais recentemente, em 2003, foi redefinida assim:

“Dislexia é uma dificuldade de aprendizagem de origem neurológica. É caracterizada pela dificuldade com a fluência correta na leitura e por dificuldade na habilidade de decodificação e soletração. Essas dificuldades resultam tipicamente do déficit no componente fonológico da linguagem que é inesperado em relação a outras habilidades cognitivas consideradas na faixa etária.” (Susan Brady, Hugh Catts, Emerson Dickman, Guinevere Eden, Jack Fletcher, Jeffrey Gilger, Robin Moris, Harley Tomey and Thomas Viall)

(<http://www.dislexia.org.br/category/s2-o-que-e-dislexia/c12-definicao-de-dislexia/> consultado em 20 de Junho de 2014)

A dislexia pode ser hereditária ou adquirida, conforme esclarecem IANHEZ e NICO (p 22-23) [27]

“Sabemos, ainda, que a dislexia em si, ou dislexia de evolução, o objeto de nossos estudos e matéria deste livro, é diferente da chamada dislexia adquirida, ou afasia, como é conhecida. Embora os sintomas sejam bastante semelhantes, a primeira é congênita e hereditária, e a segunda, consequência de um traumatismo craniano, acidente vascular, tumor, derrame etc.”

Também no mesmo livro [27], é esclarecida a origem do nome DISLEXIA, “DIS” significa “DISTÚRBIO” ou “DIFICULDADE” e “LEXIA” pode tanto significar “LEITURA” (do latim) como também “LINGUAGEM” (do grego). Assim, o vocábulo DISLEXIA tem como significado “DISTÚRBIO de LEITURA” ou “DISTÚRBIO de LINGUAGEM”. IANHEZ e NICO [27] destacam que a dislexia é um distúrbio específico na aquisição da leitura e escrita, mas que nem toda dificuldade apresentada no processo de aquisição da linguagem implica na caracterização da dislexia. A confirmação desse distúrbio só pode ser feita através de um diagnóstico “multidisciplinar e de exclusão”.

Topczewski [49] assinala que esse diagnóstico requer a participação de uma equipe de especialistas de “várias áreas, tais como a pedagógica, fonoaudiológica, psicopedagógica, psicológica e médica” [página 25]. Ele ainda descreve que “Embora se saiba ser, a dislexia, um quadro definitivo nas suas características, nem sempre o é na sua intensidade”, pois parte das dificuldades pode se tornar mais discreta ou até mesmo ser superada com uma orientação competente.

Existem, aproximadamente, 7000 línguas faladas no mundo, mas cerca de 3500 delas, apenas, possuem também a forma escrita (<http://www.ethnologue.com/enterprise-faq/how-many-languages-world-are-unwritten>, visto em 01 de Julho de 2014). Como a

dislexia está relacionada com a dificuldade do aluno em associar o símbolo gráfico de uma palavra (grafema) com seu respectivo som (fonema), qualquer língua escrita do mundo é passível de oferecer dificuldades tanto na escrita, quanto na leitura de seus vocábulos. Topczewski [49], na página 19, relata que há publicações indicando a incidência da dislexia desde 5% até 17% da população mundial. Descreve, na página 21, que essa variação ocorre devido à relação grafema-morfema que há em cada idioma. Na Itália, por exemplo, a estimativa é que apenas 3% a 4% dos italianos sejam disléxicos (http://www.aiditalia.org/it/cosa_e_la_dislessia.html#introduzione, visto em 30 de Junho de 2014). A relação entre o símbolo gráfico e o som, na língua italiana, é mais próxima em relação a outros idiomas como, por exemplo, o Francês e o Inglês. Nos Estados Unidos, o instituto “The Yale Center for Dyslexia & Creativity” (Centro Yale para a Dislexia e Criatividade), em Houston - Texas, relata que, aproximadamente, 1 em cada 5 americanos são disléxicos e avança a possibilidade dessa cifra ultrapassar 20% da população, já que muitos casos permanecem sem diagnóstico.

(<http://dyslexia.yale.edu/MDAI/>, visto em 30 de Junho de 2014).

A ABD (Associação Brasileira de Dislexia) estima, já que não há dados oficiais, que o número de disléxicos no Brasil esteja entre 10 e 15% da população, número que justifica uma atenção maior, por parte do governo e de todos aqueles interessados em melhorar a qualidade do ensino no país, sejam pais ou educadores. Urge preparar o ambiente escolar para receber, também, os possíveis estudantes afetados por essa “cegueira verbal” [42, cap. 2 As raízes históricas da dislexia]. A LDB (Lei de Diretrizes e Bases), lei orgânica e geral da educação brasileira, apóia, mesmo que de maneira indireta, a inclusão dos disléxicos dentro do sistema educacional brasileiro. Vide LDB 9.394/96:

“Art. 12 - Os estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as do seu sistema de ensino, terão a incumbência de:

I - elaborar e executar sua Proposta Pedagógica.

V - prover meios para a recuperação dos alunos de menor rendimento.

Art. 23 - *A educação básica poderá organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar.*

Art. 24 - *V, a) avaliação contínua e cumulativa; prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período.”*

Essa preocupação, em atender melhor os estudantes com dificuldades específicas na aprendizagem escolar, já foi objeto de estudo e ações em outros países, mostrando um exemplo digno de ser seguido em nosso país.

3.2 Sintomas da Dislexia e recomendações de especialistas.

O Prof. Dr. Abram Topczewski, mestre em neurologia pela FMUSP, doutor em neurociências pela FMUNICAMP, neuropediatra do Hospital Albert Einstein e vice-presidente da Associação Brasileira de Dislexia (ABD), afirma em seu livro “**Dislexia, como lidar?**” [49] que a dislexia faz parte de um quadro clínico que se manifesta dentro do âmbito escolar e que, por isso, é na sala de aula que ela é identificada. Ele destaca que são nas atividades de aprendizagem, envolvendo leitura e escrita, que se encontram distorções como:

“a) confusão dos sons semelhantes: T/D, P/B, C/G, S/Z, F/V;

b) confusão na grafia: B/D, P/Q, N/U, G/Q, M/N, J/G;

c) inversões: SAPATO/SATAPO, PAR/PRA;

d) supressão: BRANCO/BANCO, CARRO/CAO, GUIADO/GIADO;

e) adição: CASA/CASCA, MAL/MALE, FIQUE/FIAQUE;

- f) espelho: TIO/OIT, SOL/LOS, OS/SO;
- g) repetição: CARAMEMELO, BANANANA;
- h) aglutinação de palavras: EU ESTOU FAZENDO AS TAREFAS;
- i) divisão inadequada: AMA MADEIRA É DÓNE NE.”

Topczewski ainda acrescenta outras características que ajudam a identificar a presença da dislexia nos alunos, como:

“a) a leitura é lenta, hesitante, e sofrida. Muitas vezes a leitura é monótona, entrecortada, as palavras são mal pronunciadas, há omissão e substituição de fonemas e de palavras;

b) compreensão difícil e limitada do texto, pois durante a leitura a concentração está mais voltada para a decodificação das palavras. Ademais, existe a dificuldade para transformar o código escrito em código fonético e, obviamente, isso dificulta o bom entendimento do trecho lido;

c) relutância para ler e escrever, pois, em virtude das dificuldades, procuram se omitir dessas tarefas que lhes causam grande sofrimento e desconforto;

d) muito estresse para a leitura em voz alta, pois ficam constrangidos ao expor, aos outros, as suas deficiências;

e) dificuldade para soletrar atrapalha o memorizar correto das palavras;

f) déficit de memória visual para reconhecimento dos grafemas dificulta a correlação com o som correspondente;

g) desorientação esquerda-direita. Há confusão na determinação das diversas partes do próprio corpo;

h) lentidão para execução das tarefas escritas e com isso grande parte das vezes ficam incompletas. Com frequência recusam a realização das tarefas, pois demanda muito tempo para ler o texto e se torna exaustivo;

- i) dificuldade para memorização sequencial do alfabeto, tabuada, dias da semana, meses, número de telefones;
- j) dificuldade para organizar as tarefas, organizar-se para o trabalho e adequar o tempo para a realização das tarefas. Permanecem por longo tempo para realizar um trabalho que, em condições habituais, poderia ser feito no terço do tempo;
- k) o desempenho é bastante instável;
- l) a escrita pouco legível ou mesmo ilegível, pois não respeita pontuação, separação das palavras;
- m) muitos erros ortográficos, pois nem sempre a palavra escrita tem uma correspondência absoluta como o som da palavra;
- n) dispersão e desatenção são frequentes, pois são muito sensíveis a ruídos e movimentos à sua volta e isso faz com que percam o foco da leitura. Retomar a leitura é uma tarefa penosa, pois lembrar o que foi lido anteriormente é difícil e isso interfere na compreensão e memorização;
- o) a memorização se apresenta comprometida, pois ao se solicitar que repitam corretamente uma frase que lhes foi falada não conseguem, embora consigam perceber o sentido. Falha, portanto a memória de curta duração;
- p) dificuldade para aprender uma segunda língua; muitas vezes não existem grandes transtornos para a parte oral, mas são sim relevantes para a escrita.”

Ianhez e Nico [27] destacam os sintomas mais comuns da dislexia:

“Desempenho inconstante.

Demora na aquisição da leitura e da escrita.

Lentidão nas tarefas de leitura e escrita, mas não nas orais.

Dificuldade com os sons das palavras e, conseqüentemente, com a soletração.

Escrita incorreta, com trocas, omissões, junções e aglutinações de fonemas.

Dificuldade em associar o som ao símbolo.

Dificuldade com a rima (sons iguais no final das palavras) e aliteração (sons iguais no início das palavras).

Discrepância entre as realizações acadêmicas, as habilidades linguísticas e o potencial cognitivo.

Dificuldades em associações, como, por exemplo, associar os rótulos aos seus produtos.

Dificuldade para organização sequencial, por exemplo, as letras do alfabeto, os meses do ano, tabuada, etc.

Dificuldade em nomear os objetos, tarefas, etc.

Dificuldade em organizar-se com o tempo (hora), no espaço (antes e depois) e direção (direita e esquerda).

Dificuldade em memorizar números de telefone, mensagens, fazer anotações, ou efetuar alguma tarefa que sobrecarregue a memória imediata.

Dificuldade em organizar suas tarefas.

Dificuldade com cálculos mentais.

Desconforto ao tomar notas e/ou relutância para escrever.

Persistência no mesmo erro, embora conte com ajuda profissional.”

Diante de tantas dificuldades apresentadas pelos disléxicos, os especialistas recomendam algumas atitudes a serem tomadas dentro do âmbito pedagógico.

Topczewski [49] descreve alguns procedimentos recomendáveis nas salas de aula:

- a) turmas com número menor de alunos;
- b) não expor a criança à leitura para o grupo;
- c) auxiliá-la à leitura dos enunciados das questões;
- d) dar a ela um tempo maior para a feitura das tarefas escritas;
- e) fazer as avaliações, preferencialmente, orais é um procedimento que ameniza parte das dificuldades;

f) as avaliações devem abranger outras atividades como participações nas aulas, a feitura das tarefas, o empenho nos trabalhos;

g) valorar o esforço e a dedicação no conceito final.”

O autor também destaca o cuidado que os professores devem ter para evitar que o aluno com dislexia seja alvo de bullying, sugerindo um “trabalho de conscientização” com os colegas de sala. Sugere também a participação dos familiares ajudando a criança no desenvolvimento da leitura e, salientando a insuficiência do apoio exclusivamente em sala de aula, ele propõe:

- Leitura assistida, em voz alta, diariamente,
- Ler junto com o disléxico, simultaneamente, buscando auxiliar o aluno na aquisição da fluência,
- Assistir o estudante, alternando criança e o familiar, na leitura dos parágrafos de um texto, estimulando o estudante a não abandonar as atividades ante às menores dificuldades,
- Elaborar uma divisão da tarefa, objetivando um melhor rendimento e provocar menos cansaço,
- A utilização de recursos visuais visando a melhor compreensão dos textos como, por exemplo, “figuras, desenhos, esquemas, filmes, sites”,
- O uso de textos gravados (em áudio), pois eles ajudam na memorização.

Para atingir o sucesso no binômio ensino-aprendizagem de alunos disléxicos é aconselhado o uso de todos os estímulos, quer sejam visuais, auditivos ou sinestésicos (simultaneamente). Esse tipo de ensino é denominado **multissensorial** cujo esclarecimento é dado por IANHEZ e NICO [27, p 88]:

“O aprendizado multissensorial trabalha simultaneamente com o uso dos olhos, ouvidos, órgãos da fala, dedos e músculos, envolvendo todos os caminhos para o cérebro. A

vantagem desse método é que a criança disléxica é capaz de usar áreas de força, ao mesmo tempo que exercita e fortalece áreas mais fracas. O objetivo é a criança aprender respostas automáticas duradouras (os nomes, os sons e formas de todos os fonemas) e desenvolver a habilidade de sequenciá-las corretamente nas palavras.”

Topczewski, em [49], também recomenda alguns procedimentos por parte da escola, como aceitar o uso de letras de forma; permitir o uso de computador na realização das tarefas escolares; evitar ditados; permitir a gravação da aula para que seja ouvida posteriormente em casa; evitar a correção de todos os erros e valorizar mais o conteúdo e a criatividade; evitar testes de múltipla escolha; tanto quanto possível, evitar tarefas longas; aconselha que seja feita a leitura das questões, por parte do professor, das tarefas a serem realizadas pelo aluno; permitir um tempo extra para que o estudante faça suas avaliações; não obrigar o aluno a refazer um trabalho devido aos erros ortográficos; estimular o aluno a rever a tarefa realizada; propor que o disléxico leia a história para alguém escrever; fazer avaliações mais orais do que escritas; permitir o uso de calculadora e não ser exigente quanto ao aprendizado de língua estrangeira, devido às dificuldades que o aluno já tem na própria língua materna. Quanto a esse último quesito, SHAYWITZ [42], na página 244, recomenda “uma dispensa ou isenção dos exames de língua estrangeira” pelo fato de que as dificuldades, nesse tipo de avaliação, serão ainda maiores do que a aprendizagem da língua pátria. Observa que a dislexia “reflete um déficit em seu nível mais básico de processamento da linguagem” e que, por isso, instiga a troca desse tipo de aprendizagem por um curso (ou projeto independente) sobre a cultura de outro país.

Aprender uma língua estrangeira está longe de ser impossível para um aluno com dislexia. Além da possibilidade de refutar essa tese pela simples coleta de um único exemplo, existe até, fora do país, estudos que visam orientar o ensino de idiomas a alunos portadores desse distúrbio. A Associação Escocesa de Dilexia (Dyslexia

Scotland), em uma de suas edições, disponibilizou um documento [47] destacando as principais dificuldades na aprendizagem de uma língua estrangeira por um aluno disléxico e sugere alguns procedimentos para melhor viabilizar esse objetivo.

Outra possibilidade a ser analisada, quanto à aprendizagem de idiomas, é a utilização de um recurso ainda não devidamente explorado, mas digno de menção: o “Valor propedêutico do ESPERANTO” no despertar do interesse na aprendizagem de outras línguas, otimizando o tempo investido na aquisição satisfatória de outro idioma (http://pt.wikipedia.org/wiki/Valor_propedêutico_do_esperanto). Pedro Jacintho Cavalheiro, em sua **Breve Panorama da Língua Internacional Esperanto** [15], pág 9, argumenta:

“Devido à sua fonologia, léxico e gramática, o tempo de aquisição para o uso instrumental é normalmente bem menor que o de aquisição de uma língua européia, possibilitando emprego quase imediato. Adicionalmente, sua regularidade e a clareza estrutural favorecem a compreensão de fenômenos da linguagem, a conscientização linguística dos estudantes e a aceleração no aprendizado de outras línguas.”

O Esperanto prima por ser uma língua cuja regularidade facilita o processo de aprendizagem, pois não exige tanto da memória quanto outros idiomas. Na mesma obra, [15] na página 37, é dada a classificação linguística do Esperanto, enunciando suas diversas características, muitas delas podendo servir como elemento facilitador da aprendizagem por parte dos estudantes disléxicos como, por exemplo,

- ✓ No Esperanto, não há conjugação de verbos variáveis, seja por pessoa, seja por número,
- ✓ Todos os verbos nos presente do indicativo terminam por “as”, no pretérito por “is”, no futuro por “os”, no imperativo por “u” e, no condicional, “us”,
- ✓ Para colocar uma palavra no plural, basta acrescentar um “j” (que tem o som de um “i” breve), os adjetivos terminam por “a”, os advérbios derivados terminam por “e”,

- ✓ existe uma relação biunívoca entre modo como escrevemos uma determinada letra e o modo como a pronunciamos, ou seja, há uma letra para cada som e um som para cada uma das 28 letras que compõem o alfabeto do Esperanto,

É bem certo que o Esperanto possui outras qualidades que justificariam ser ele o mais adequado ao posto do primeiro idioma a ser ensinado a um aluno disléxico, mas um dos seus aspectos mais interessantes é o valor propedêutico da língua internacional para a aprendizagem de outros idiomas, caso seja interesse do aluno. No documento [41], Modelo de Aprendizagem de Línguas Estrangeiras Utilizando o Efeito Propedêutico da Aquisição Prévia da Língua Esperanto, do Professor Doutor do Departamento de Atuária e Métodos Quantitativos e da Professora Titular e Coordenadora de Estudos Pós-Graduados em Linguística Aplicada e Estudos da Linguagem (LAEL), ambos da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, são apresentadas algumas pesquisas que apontam uma redução do tempo médio de aquisição de uma língua estrangeira, quando o ensino de uma língua étnica é precedido pelo ensino do Esperanto, já se levando em conta a soma dos tempos.

É muito importante observarmos os aspectos, tanto positivos quanto negativos, no ensino de uma língua estrangeira para um aluno disléxico, para que possamos compreender melhor certas dificuldades em áreas que muitas vezes não fazemos ligação como, por exemplo, a Matemática. No livro “**Dyslexia and Maths**” [51], Yeo escreve, na página 17, no capítulo “Difficulties with the language aspects of mathematics” (Dificuldades como os aspectos linguísticos da Matemática)

“Matemática tem uma linguagem que lhe é própria e os alunos têm que aprender o vocabulário dessa nova língua. Termos como **fator primo** e **denominador** são muito específicos e os alunos podem não os encontrar fora das lições de Matemática. Termos como **subtração** ou **diferença** podem ser usados em diferentes situações em conversas no cotidiano e em um contexto matemático. Além disso, muitos vocábulos, tais como os dois últimos mencionados, se referem ao mesmo cálculo matemático. Isso pode confundir alunos disléxicos.”

Yeo também destaca que, em Matemática, a linguagem está relacionada com símbolos e que a debilidade na compreensão dessa linguagem simbólica é uma das características já largamente conhecidas com relação a alguns alunos disléxicos. Diz ela que os alunos podem ter dificuldades relacionadas a um tipo específico de cálculo com a “forma falada” da questão. Por exemplo, eles podem não ver que a igualdade, $5 \times 6 = 30$, deriva de um problema como ‘Havia 6 pessoas em cada mesa e havia 5 mesas; quantas pessoas estavam lá no total?’.

Ler, e interpretar aquilo que é lido, já é uma tarefa um tanto árdua para um aluno disléxico, mas não encerra aí o rol de dificuldades que o estudante encontra em sua vida acadêmica. Em Matemática, por exemplo, o simples fato de saber equacionar um problema não garante sucesso na busca da solução dele, há outros passos a serem seguidos que não estão isentos de dificuldades. Mas, garantir uma boa leitura por parte dos disléxicos é imprescindível para se chegar ao “x” da questão, e não podemos desdenhar quanto à importância dos conselhos que os especialistas nesse distúrbio nos oferecem. Compreender certas barreiras contidas na simples leitura de um texto deve fazer parte de nossos propósitos porque há de ser, também, parte da solução. Nossos alunos disléxicos necessitam dessa orientação.

3.3 Recursos tipográficos visando atender as necessidades dos disléxicos.

Há poucos estudos relativos à melhora da compreensão da leitura por parte dos disléxicos. A pesquisadora Luz Rello, da Universidade Pompeu Fabra, da cidade de Barcelona, Espanha, realizou diversas pesquisas sobre esse assunto. Verificou-se que, em leituras na Web, o tamanho de letra que melhor facilita a compreensão de textos, por parte dos disléxicos, é a partir de 18 pontos.

(http://www.taln.upf.edu/system/files/biblio_files/w4a2013-wikiwiki.pdf, visto em 29/01/15)

No mesmo estudo, foi verificado que a distância entre as linhas não exercia um papel tão significativo para a compreensão da leitura, apesar de que existem pesquisadores que sugerem a utilização de espaçamento de, no mínimo, 1,5.

No que tange à escolha de uma fonte mais adequada, Luz Rello constatou que fontes tipográficas exercem um impacto significativo na legibilidade de textos, por parte de pessoas com dislexia. Foi observado que, dentre as fontes mais comuns, aquelas que atingiram os melhores resultados foram “Helvetica”, “Courier”, “Arial”, “Verdana” e “CMU (Computer Modern Unicode)”. No entanto, desaconselha-se o uso da fonte “*Arial*” na forma itálica, pois ela afetou a legibilidade por parte dos participantes da pesquisa. Foi constatado também que as fontes tipográficas denominadas de “sans serif” (sem serifa), que são fontes que não possuem os pequenos traços e prolongamentos que aparecem no fim das hastes das letras, como na fonte “Times New Roman”, são mais aconselhadas para incrementar a legibilidade dos textos. Também foi verificado que a leitura é facilitada quando um texto usa fontes do tipo “monospaced” (mono-espaçada), também conhecida como “passo-fixo” ou “não-proporcional”, que são fontes cujas letras e caracteres ocupam o mesmo espaço horizontal. O espaço reservado para cada letra ou caractere, possui largura fixa, o que, segundo a pesquisa, é importante para facilitar a compreensão do texto.

(http://dyslexiahelp.umich.edu/sites/default/files/good_fonts_for_dyslexia_study.pdf, e http://sipt07.si.ehu.es/WS/RethinkingUA/Papers/wsrua2013_submission_Rello.pdf, visto em 29/01/15).

A organização mais conceituada, mundialmente, sobre dislexia é a BDA (British Dyslexia Association), a Associação Britânica de Dislexia, coletou diversas informações sobre especialistas e resumiu as qualidades que deve possuir uma fonte tipográfica para facilitar a leitura por parte de pessoas com dislexia. São elas:

- 1) Boas hastes superiores nas letras como “b, d, f, h, k, l e t” e todas as letras maiúsculas. Boas hastes inferiores, como nas letras “g, j, p, q e y”;
- 2) As letras “b e d”; “p e q” são distinguíveis uma de outra, sem formarem imagens espelhadas;
- 3) Diferentes formatos para as letras “i maiúsculo”, I; “L minúsculo”, l e o dígito 1. Comparando todas juntas: I, l, 1;
- 4) A letra “g” arredondada como escrito de forma cursiva. A maioria dos disléxicos prefere a letra “a” arredondada (ao invés de “A” minúsculo), embora possa ocorrer alguma confusão com a letra “o”;
- 5) O espaço entre as letras deve possibilitar, por exemplo, diferenciar as letras “r” e “n”, escritas juntas, como em “tornar” e não parecer com a letra “m”, como em “tomar”, possibilitando uma rápida distinção entre as duas (tornar – tomar).

(<http://bdatech.org/what-technology/typefaces-for-dyslexia/>, visto em 29 de Janeiro de 2015)

Como consequência de todas essas orientações e objetivando situar o leitor, disléxico ou não, em uma realidade mais propícia à compreensão do texto nesse trabalho, a fonte tipográfica escolhida para estampar nessa dissertação é a “LEXIA” ou “LEXIA READABLE”, pois, foi feita para atender as necessidades por parte de alunos disléxicos, é gratuita e está de acordo com todas as orientações divulgadas pela BDA (British Dyslexia Association), Associação Britânica de Dislexia.

4 Dislexia e Matemática

4.1 Considerações Gerais da Dislexia que interferem na aprendizagem da Matemática.

Um professor de Matemática interessado em aprimorar seu trabalho, procurando atender a todos os seus pupilos, deverá tomar conhecimento de alguns aspectos, já mencionados no capítulo anterior, e conhecer os procedimentos mais adequados de modo a atingir todos os seus alunos na efetiva aprendizagem da Matemática no ensino escolar. Mesmo sem o laudo dos especialistas nessa questão, sabe-se que ele pode ter de 10% a 15% de disléxicos entre seus estudantes (ABD) o que, em um grupo de 40 alunos, algo muito comum em escolas públicas no país, significaria possuir de 4 a 6 alunos disléxicos sob sua tutela. É imprescindível saber o que fazer para não ter a impressão de se estar diante de um problema insolúvel. Deve-se, primeiramente, analisar os aspectos gerais, indicados pelos profissionais da área, que atinge, de alguma maneira, o ensino da Matemática.

Dorian Yeo e Julian Kay, com grande experiência no ensino da matemática para alunos disléxicos, escreveram o livro “**Dyslexia and Maths**” [51], “Dislexia e Matemática”. Elas descrevem que, nos primeiros estágios das discussões sobre a dislexia, não era o pensamento geral de que esse distúrbio poderia levar o estudante a ter dificuldades na aprendizagem da **Matemática**, e que essas dificuldades eram centralizadas, principalmente, nos aspectos linguísticos da aprendizagem, e muito

especialmente, à dificuldade de leitura e escrita. Elas relatam que há alguns aspectos da dislexia que podem ser associados às dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Apesar de que a dificuldade de leitura possa, de fato, atrapalhar a compreensão de textos envolvendo Matemática, por si só ela não é a causa primordial na dificuldade de aprendizagem por parte de alunos disléxicos. THOMPSON [46] adverte que “Os professores devem ter em mente que são poucas as ocasiões em que os números são colocados em estrito isolamento relativos ao texto e que as dificuldades de leitura podem mascarar o nível de habilidade matemática. Não é só a linguagem da Matemática multissilábica, por exemplo - multiplicação, vértices, isósceles - palavras difíceis de decodificar, e que raramente contêm pistas contextuais para ajudar com significado”. Não é à toa que ela sugere aos professores ensinar a linguagem matemática como vocábulos de uma língua estrangeira.

Há diversas características dos disléxicos, descritas de uma maneira geral nos livros de especialistas brasileiros, que podem, também, envolver a dificuldade na aprendizagem da Matemática. IANHEZ [27, p 73], na orientação quanto a um bom procedimento, por parte dos professores, relativo aos alunos com dislexia, recomenda: “Inicie cada módulo com um esquema do que deverá ser apresentado naquele período. No final, realce de maneira resumida os pontos-chave”. Esse procedimento pode ser facilmente realizável em Matemática bastando apenas uma severa organização por parte do professor. Na mesma página, pode-se ler “Use vários materiais de apoio para apresentar a lição à classe, como: lousa, projetores de slides, retroprojetores, filmes educativos, demonstrações práticas e outros recursos multimídia”. Para a plena execução deste ponto, haverá necessidade de união entre escola e professor para prover a sala de aula com os recursos tecnológicos necessários à sua realização. Deve-se tratar o ensino de Matemática com muita seriedade e compromisso, oferecendo toda ajuda que o professor de Matemática precisar.

Em outra orientação, é dito “Introduza o vocabulário novo, ou técnico, de forma contextualizada”. Haverá muitas vezes que o professor de Matemática não encontre uma contextualização adequada para introduzir um conceito matemático, mas a busca por aprimoramento pessoal deve ser constante, seja através do uso de uma vasta bibliografia para buscar aplicações, seja na participação de cursos de formação ou até mesmo a busca de material já existente na internet como, por exemplo, o site da secretaria de educação do estado do Paraná, que foi visto em 16 de Julho de 2014, (<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=301>). Lá, pode-se encontrar uma “Sequência de aulas” ou diversas “Sugestões de Atividades”. Também, na mesma página, pode-se encontrar um link para as aulas de Matemática publicadas no “Portal do professor - MEC” ou ir diretamente ao portal do professor, no endereço (<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/buscarAulas.html>, visto em 16 de Julho de 2014) e efetuar uma busca sobre o tema desejado. Com o tema “matematica” (sem acento), foram encontradas (no dia 16 de Julho de 2014) 2269 aulas de Matemática.

Nesse mesmo livro [27], ainda encontramos duas sugestões que cabem plenamente ao curso de Matemática: “Realize aulas de revisão que permitam o tempo adequado para perguntas e respostas.” e “Autorize o uso de tabuadas, calculadoras simples, rascunhos e dicionários durante as provas.”. Diante das características apresentadas por alunos com dificuldade de aprendizagem, cabe ao professor tomar o devido cuidado nesses dois quesitos. Todos os alunos merecem e possuem o direito à manifestação de suas dificuldades e obter um tempo justo para uma nova oportunidade de aprendizagem. Quanto ao uso de tabuadas e calculadora durante a prova, basta entender que a avaliação é mais um momento de aprendizagem e todo recurso que seja útil à sua plena realização é, decididamente, bem-vindo. O resumo e o dicionário se justificam devido ao problema de memorização dos alunos disléxicos e àquilo que é definido como “disnomia”, pela mesma autora, na página 141, “DISNOMIA é a

dificuldade em nomear ou reconhecer nomes de objetos, coisas etc.". Se o aluno não se lembra de um conceito matemático, ele fica sem saber o que lhe é pedido e acaba se sentindo impossibilitado de prosseguir na resolução de um determinado problema em uma avaliação. A "disnomia" é classificada como uma dos sintomas mais comuns da dislexia.

4.2 A "RiTabella"

A Associação Italiana de Dislexia - AID: Associazione Italiana Dislessia (<http://www.aiditalia.org/>) propõe muitos recursos para auxiliar o estudante disléxico com dificuldade em Matemática. Além de sugerir o uso de diversas tabelas, como tabuadas, resumo de fórmulas matemáticas, entre outros, destaca-se uma cuja denominação é "la RiTabella". Suas características são as seguintes:

- Ela é formada pelos números naturais de 1 a 150,
- Os números estão associados a bolinhas coloridas que representam seus divisores,
- O número "1" não está associado a nenhuma bolinha, pois 1 é divisor de todo número natural,
- Os números primos de "2" até "19" são associados a bolinhas que se distinguem uma das outras pela cor,
- A bolinha do número "2" é VERMELHA, do número "3" VERDE, do "5" AMARELO, "7" PRETO, "11" AZUL ESCURO, "13" ROSA, "17" AZUL CLARO e "19" MARROM.
- Os outros números primos são representados, simplesmente, por si mesmos apenas escritos com uma fonte menor,
- Os números compostos, ou seja, não primos, são representados pelas bolinhas correspondentes aos seus divisores primos, cuja quantidade é proporcional ao número de fatores primos em sua decomposição fatorada, conforme o TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA.

- O número 2 ($2 = 2^1$) é representado por uma bolinha VERMELHA. O número 4 ($4 = 2^2$) é representado por duas bolinhas VERMELHAS. O número 8 ($8 = 2^3$) é representado por três bolinhas VERMELHAS. Conseqüentemente, o número 16 ($16 = 2^4$) é representado por quatro bolinhas VERMELHAS, o “32 = 2^5 ” por cinco bolinhas VERMELHAS e assim por diante,
- O número 6 ($6 = 2 \times 3$) é representado por uma bolinha VERMELHA e uma bolinha VERDE. O número 36 ($36 = 2^2 \times 3^2$) é representado por duas bolinhas VERMELHAS e duas bolinhas VERDES. O número 144 ($144 = 2^4 \times 3^2$) é representado por quatro bolinhas VERMELHAS e duas bolinhas VERDES.

Observe a “RiTabella” abaixo:

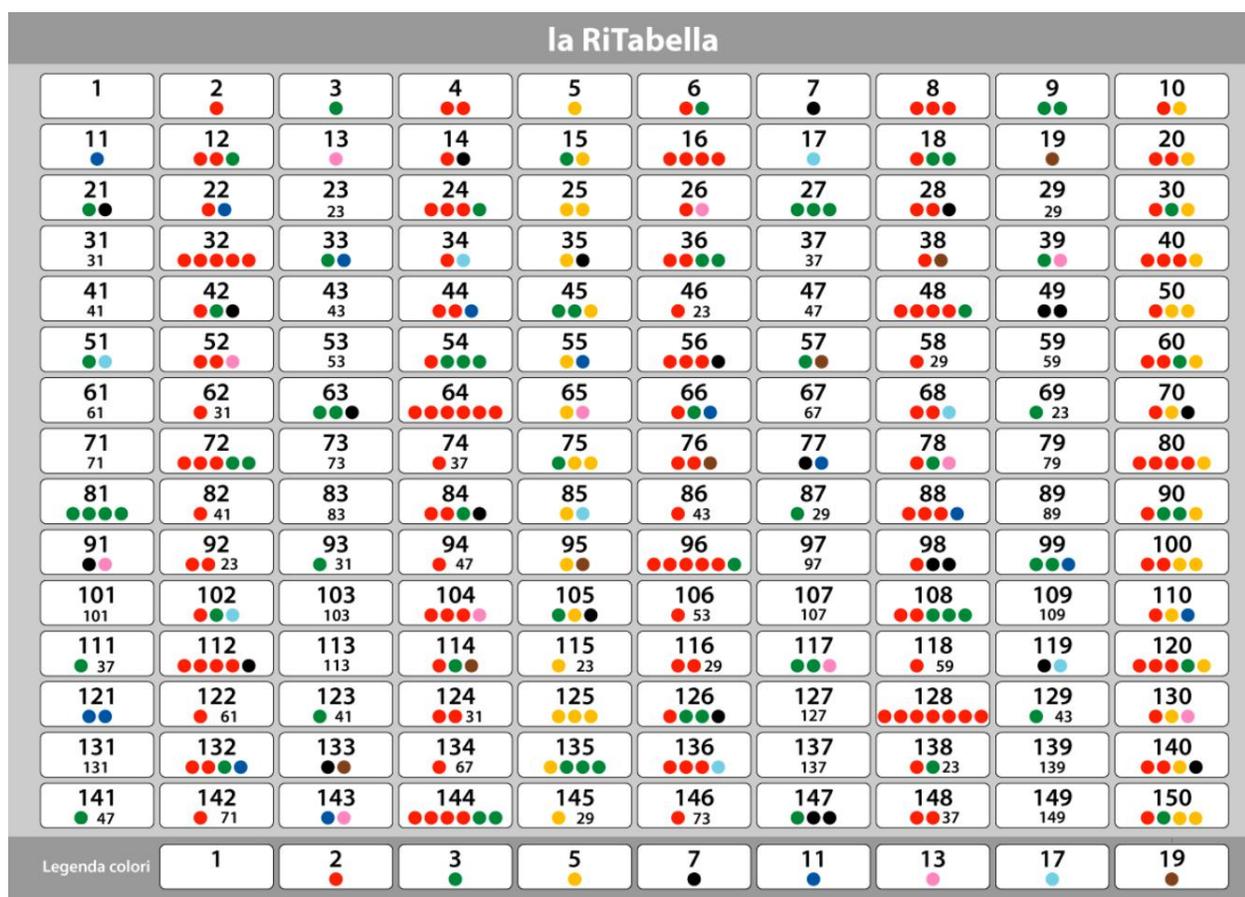


Figura 4.01: Na “RiTabella”, os números de 1 a 150 estão associados a bolinhas coloridas que representam seus divisores, onde cada divisor possui uma cor diferente.

No site da AID (Associazione Italiana Dislessia) é dito que essa tabela, com as

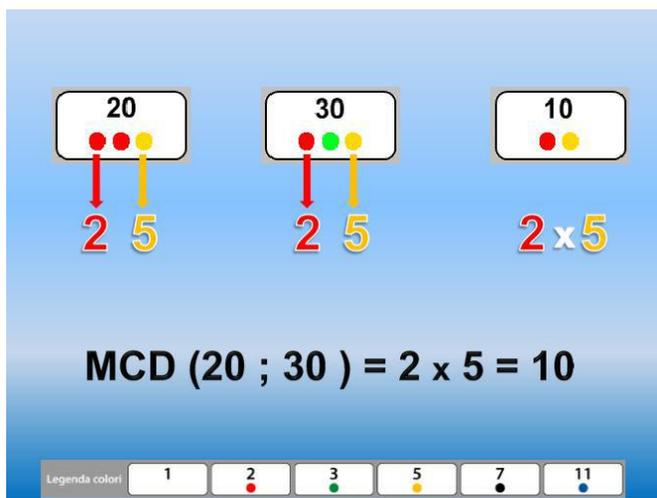


Figura 4.02: Exemplo de uso da “RiTabella”, da AID (Associazione Italiana Dislessia)

suas regras, pode ser considerada um sistema de numeração, que facilita as operações de multiplicação e divisão de números inteiros e, acima de tudo, permite compreender intuitivamente os conceitos de MMC e MDC e tornar mais fácil o cálculo fracionário.

A “RiTabella” pode também auxiliar o estudante na simplificação de frações. Um exemplo de imagem mental que o

aluno dislético faria para simplificar a fração 34/50, poderia ser:

$$34/50 \quad \text{●} \quad \text{●} \quad \text{●} \quad \text{●} \quad \text{●} \quad \text{●} = \text{●} \quad \text{●} \quad \text{●} \quad \text{●} = 17/25$$

O constante uso da “RiTabella” possibilitaria ao aluno dislético acostumar-se a “enxergar” um número sob a ótica de seus fatores. Como complemento, tendo o aluno acesso a um computador, poder-se-ia apresentá-lo a uma excelente ferramenta para ser trabalhada a forma decimal de um número de um modo mais atraente do que uma simples calculadora: A calculadora “MusiCalcolorida”.

4.3 A calculadora MusiCALcolorida

Há muitas características destacadas nos livros sobre dislexia que se referem, especificamente, à Matemática, mas não há conselho mais frequente, para os professores, quanto à orientação de “permitir o uso de uma calculadora simples” pelos alunos disléticos. Apesar de ser também muito comum a menção do uso de tabelas, seja tabuada ou fórmulas matemáticas, nada se compara à frequência da calculadora na lista de sugestões. Além do uso mais comum, através de uma calculadora básica, existe uma

possibilidade que vai ao encontro das solicitações de ensino multissensorial tão propalada por especialistas em dislexia no mundo todo: a calculadora “MusiCalcolorida”.

A “MusiCalcolorida” é o resultado do desenvolvimento iniciado por Nathalie Sinclair (2006), que criou a “Calculadora Colorida”, cujo objetivo era a exploração dos números racionais e irracionais através de sua representação decimal, caracterizada pela cor, tamanho e rapidez. A expansão decimal de um número, através dessa calculadora, é associada a uma matriz quadriculada cujas células se apresentam totalmente coloridas. Segundo a criadora, os alunos sentem-se encorajados a explorar os conceitos dos números decimais pela experimentação e investigação. A calculadora colorida foi projetada para reconstruir e organizar a concepção dos estudantes sobre os números reais representados tanto na forma fracionária como na forma decimal [44]. Pode-se, por exemplo, comparar as malhas quadriculadas coloridas obtidas das frações $17/25$ e $34/50$.

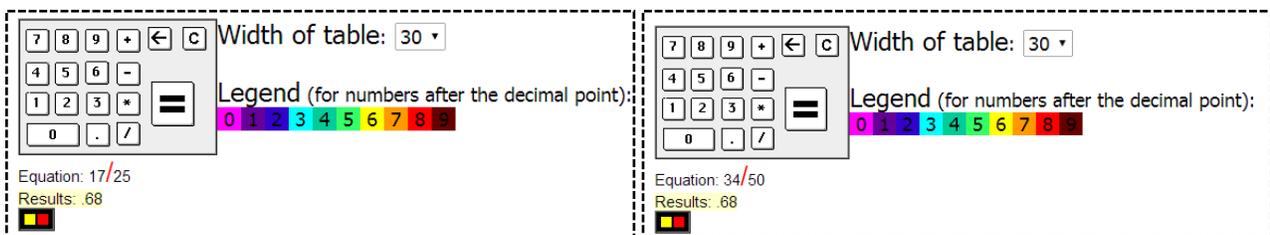


Figura 4.03: Calculadora Colorida - Nathalie Sinclair: <http://mathforum.org/mathtools/tool/953/>)

Inspirados pela ideia de Nathalie Sinclair, os pesquisadores Prof. Dra. Lulu Healy e Prof. Guilherme Rodrigues Magalhães recriaram a calculadora colorida visando aplicá-la a uma gama maior de usuários. Baseados nas possibilidades que essa ferramenta oferece, foram desenvolvidos trabalhos sob a perspectiva da Matemática inclusiva, beneficiando estudantes cegos e pessoas com baixa visão [34], alunos surdos [45] e também sua exploração no ensino de números reais através de sua representação visual e sonora [38].

A calculadora MusiCalcolorida, utilizada aqui para exemplificar seu uso, será a versão 6 (Calcolorida_v6), que pode ser encontrada, gratuitamente, no endereço <http://www.matematicainclusiva.net.br/>, acessado em 10-08-2014. A figura abaixo mostra a aparência da calculadora quando efetuamos a operação $123.456.789 \div 9.999.999.999$.

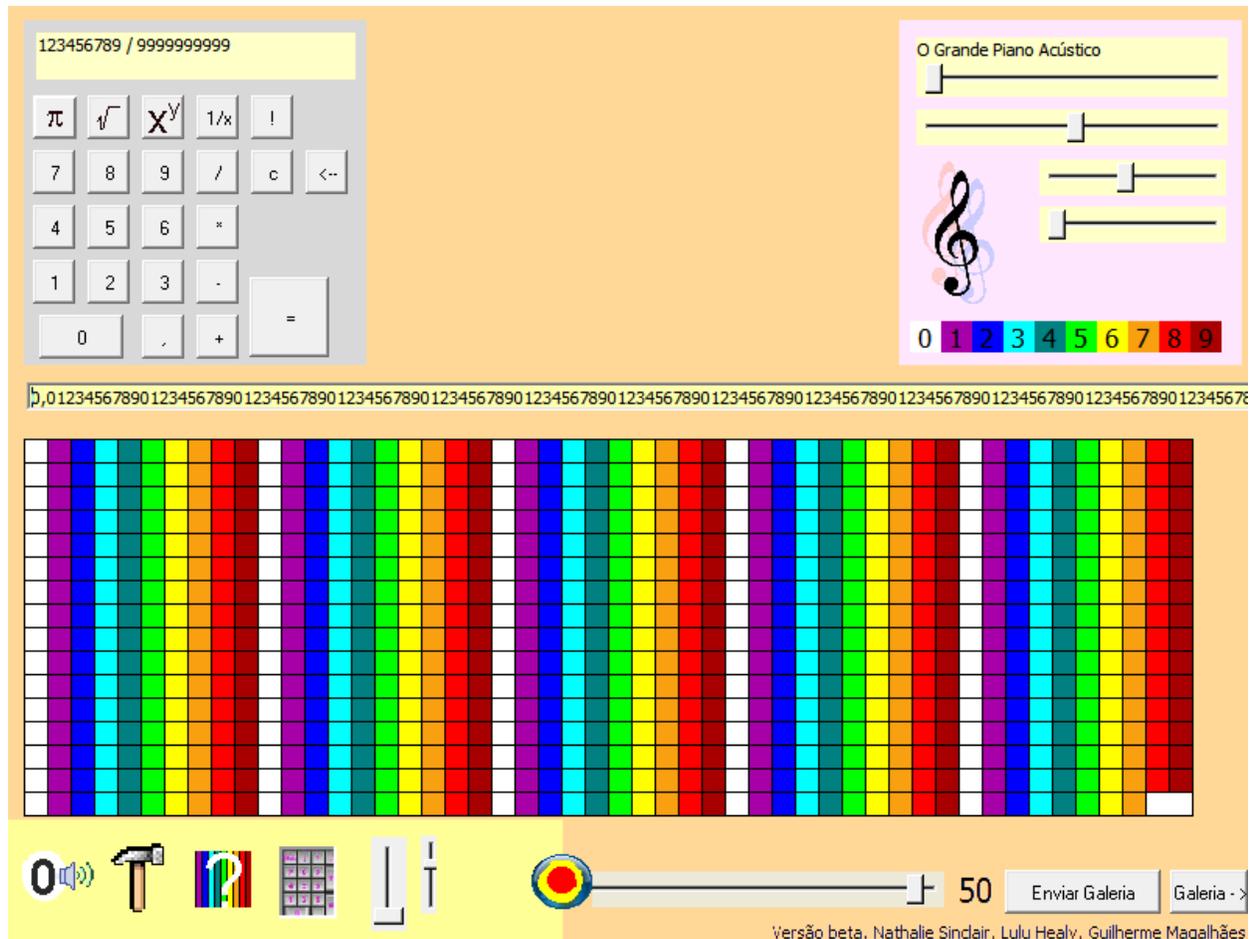


Figura 4.04: A MusiCalcolorida mostrando o cálculo $123.456.789 \div 9.999.999.999$.

Características básicas da “MusiCalcolorida”:

- Essa versão preserva as características básicas da calculadora colorida original,
- Ela opera em uma precisão máxima de 5.000 dígitos,
- A parte decimal do resultado é representada em uma malha quadriculada em que se pode escolher o número de colunas e, nesse caso, foram escolhidas 50,

- O tamanho do “quadrado” da representação visual pode ser alterado, possibilitando aprimorar a percepção da periodicidade do resultado,
- Cada dígito da parte decimal é representado por uma cor (e nota musical) que se difere dos demais, a saber: 0-branco, 1-roxo, 2-azul escuro, 3-azul claro, 4-verde escuro, 5-verde claro, 6-amarelo, 7-laranja, 8-vermelho, 9-marrom,
- Existe a opção de associar o dígito “0” tanto a uma nota musical quanto representá-lo por uma pausa (silêncio),
- A organização da malha quadriculada, conforme a ilustração acima é denominada “lira” e é a que melhor facilita a observação do período da dízima. Há outros padrões como, “diagonal”, “tabuleiro”,
- Ao apertar o símbolo da “clave de Sol” (G), poder-se-á ouvir uma “música”, tocada originalmente em piano, em que cada dígito da parte decimal é representado por uma nota musical,
- No campo da “clave de Sol”, o estudante pode modificar o instrumento e controlar a velocidade, o tom e o tempo entre as notas musicais.
- Seja através da malha quadriculada, seja pela representação musical, a ferramenta pode ajudar aos alunos perceberem com mais facilidade o período de um número racional,
- É possível gravar até 10 cálculos com suas respectivas representações visual e sonora,
- A ferramenta possui uma natural limitação diante do infinito, por isso, quando o período de um número for muito grande, irá dificultar a percepção do aluno quanto a esse aspecto. É recomendável, inicialmente, trabalhar com exemplos que facilitem, pedagogicamente, sua visualização,

Para se entender melhor o espírito motivador do trabalho desenvolvido pelos pesquisadores envolvidos na construção da “MusiColorida”, é digno de destaque uma nota de esclarecimento que pode ser vista no site “matemáticainclusiva” <http://www.matematicainclusiva.net.br/sobre.php>, visto em 6 de Setembro de 2014:

“Nosso trabalho envolve uma abordagem colaborativa na qual pesquisadores, professores e aprendizes buscam caminhos para oferecer uma Matemática

escolar que respeite as particularidades de cada aprendiz. Para nós, Educação Matemática Inclusiva não se reduz a discussões sobre escola especial ou escola regular, mas nos desafia a criar uma matemática na qual todos os aprendizes queiram ser incluídos.

Nossa premissa é que todos aprendem, mas nem sempre da mesma forma. Assim, tratamos *diferença* como *diferença* e não como deficiência, distúrbio ou desordem. Acreditamos que existem várias maneiras de fazer Matemática, e precisamos de um currículo que reflita isso. Isto é, a Matemática escolar deve proporcionar uma variedade de experiências - visuais, sonoras, táteis, ... - associadas aos objetos de estudo.”

A dislexia, seja considerada como deficiência, seja como distúrbio, seja desordem ou até mesmo como “diferença” precisa ser aceita, compreendida e digna de ser respeitada nas escolas de hoje. Há muito trabalho a ser feito.

São muitas as sugestões dadas pelos especialistas e pelas entidades que defendem uma verdadeira inserção do disléxico nas escolas em todo mundo. Fora do país há diversos empreendimentos que procuram entender a verdadeira essência da dificuldade dos disléxicos e divulgar os resultados às escolas, aos educadores e a pais desavisados quantos às dificuldades vividas por seus filhos. Conhecer essas realizações e colocá-las em prática é um dever moral de todo aquele que se preocupa com o ser humano e sabe o valor que representa uma educação justa e de qualidade para o engrandecimento da própria vida.

4.4 A Experiência Brasileira sobre Discalculia, “a dislexia dos números”.

Quando usamos a terminologia “a dislexia dos números” visando falar de “discalculia”, precisamos saber que, apesar do valor didático que essa expressão

contem, podemos incorrer em um equívoco, pois dislexia não é discalculia e discalculia não é dislexia. Se já estamos esclarecidos quanto ao vocábulo “dislexia”, precisamos tomar conhecimento quanto ao significado do termo “DISCALCULIA”. Discalculia vem do Grego (dis + cálculo) e significa “dificuldade ao calcular” [13].

Segundo o “CID - 10” (Classificação Estatística Internacional de Doenças e Problemas Relacionados à Saúde), no item “F81”, há um esclarecimento sobre o grupo ao qual pertence a “discalculia”, denominado “Transtornos específicos do desenvolvimento das habilidades escolares”: “Transtornos nos quais as modalidades habituais de aprendizado estão alteradas desde as primeiras etapas do desenvolvimento. O comprometimento não é somente a consequência da falta de oportunidade de aprendizagem ou de um retardo mental, e ele não é devido a um traumatismo ou doença cerebrais.” (<http://www.datasus.gov.br/cid10/V2008/cid10.htm> acessado em 15/AGO/2014)

No subitem “F 81.2”, denominado “Transtorno específico da habilidade em aritmética” lê-se:

“Transtorno que implica uma alteração específica da habilidade em aritmética, não atribuível exclusivamente a um retardo mental global ou à escolarização inadequada. O déficit concerne ao domínio de habilidades computacionais básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão mais do que as habilidades matemáticas abstratas envolvidas na álgebra, trigonometria, geometria ou cálculo.

Acalculia de desenvolvimento

Discalculia

Síndrome de Gerstmann de desenvolvimento

Transtorno de desenvolvimento do tipo acalculia

Exclui:

acalculia SOE (R48.8)

dificuldades aritméticas:

- associadas a um transtorno da leitura ou da soletração (F81.3)

- devidas a ensino inadequado (Z55.8)”

A dislexia também é mencionada no “CID - 10” sob o item “R48.0” e a busca para entender a relação entre ambas foi objeto de estudo do pesquisador Prof. Dr. José

Alexandre Bastos que, em seu livro “O Cérebro e a Matemática” [1], elenca a estreita relação que há entre a “discalculia” e a “dislexia”. Seus estudos apontam que:

- As duas situações são diferentes,
- Existe uma origem genética nas duas, entretanto, são diferentes,
- As duas situações são diferentes, mas existem indivíduos que sobrepõem uma a outra,
- Existe um grupo que tem em comum o comprometimento da memória de curto prazo.

Os dados obtidos em seus estudos ainda concluem que, aproximadamente, “10% dos disléxicos são excelentes em Matemática”, “30% dos disléxicos têm o nível de Matemática esperado para sua inteligência”, “10% estão abaixo do nível esperado para sua inteligência, devido a dificuldades na memória de curto prazo, que uma vez contornadas diminuem seus problemas”, “25% dos disléxicos têm rendimento em Matemática abaixo do esperado, mas como efeito colateral da sua dificuldade na leitura, que uma vez contornado, fazem suas dificuldades em Matemática desaparecerem.”

O fato de aproximadamente 60% dos disléxicos apresentarem dificuldades na aprendizagem matemática torna a dislexia merecedora de atenção por parte dos professores da ciência dos números, não importando o grau de severidade com que ela se apresenta (leve, moderada ou severa - ABD). Devemos levar em conta as características apresentadas por nossos alunos com esse distúrbio, buscando atender a todos que veem na escola uma oportunidade de aprender o “x” na álgebra da vida.

No Brasil há poucos livros que falam sobre a DISCALCULIA; há duas obras com o mesmo título (DISCALCULIA), uma de ANA MARIA ANTUNES de CAMPOS [13] e outra de JUSSARA BERNARDI [5].

A primeira, como relatada no livro, é direcionada a psicopedagogos, psicólogos, estudantes e professores de Matemática e realça que “todos os livros de discalculia” estão ligados a outras disciplinas e destaca que a obra se destina aos professores de Matemática para que conheçam o que se passa com seus alunos com dificuldade de aprendizagem em Matemática. Nele, pode-se ver a definição de discalculia, seus tipos, as dificuldades apresentadas por alunos discalcúlicos e proposta de atividades lúdicas para alunos do ensino fundamental I. Ao lermos as dificuldades relacionadas nessa obra, podemos ver também aspectos comuns aos alunos com DISLEXIA e que apresentam dificuldade em Matemática. São mencionados diversos aspectos da discalculia em crianças. As dificuldades descritas são:

- Visualizar conjuntos de objetos dentro de um conjunto maior;
- Conservar a quantidade, o que a impede de compreender que um quilo de café é igual a quatro pacotes de 250g;
- Compreender os sinais de soma, subtração, divisão e multiplicação (+, -, ÷, ×)
- Sequenciar números, como, por exemplo, o que vem antes do 13 e depois do 15 (antecessor e sucessor);
- Classificar números;
- Montar operações;
- Entender os princípios de medida;
- Lembrar as sequências dos passos para realizar operações matemáticas;
- Estabelecer correspondência um a um, ou seja, não relaciona o número de alunos de uma sala à quantidade de carteiras;
- Compreender os números cardinais e ordinais;
- Fraqueza na memória de trabalho e na memória em tarefas não verbais;
- Quando um professor dita um número, como exemplo o número 211, a criança com discalculia escreve 20011;
- Misturar números como 107, 1007 e 1070; confunde 5, 55, 555;

- Escrever fora da linha e lateralidade (reconhecer direita e esquerda);
- Entender que $5 + 9 = 11$, $2 + 1 = 7$ e $1 + 7 = 16$, logo $25 + 19 = 161$;
- A criança em uma seriação repete número, como 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7;
- Confundir o sinal, por exemplo, $20 - 10 = 30$ ($20 + 10 = 30$). Começa a multiplicação usando o primeiro número da esquerda do multiplicador, etc.

A escritora Ana Maria Antunes destaca também que o percentual de discalcúlicos está ente 4% e 6% da população e cita uma pesquisa nos Estados Unidos que revela números entre 5% e 8%. Ana Maria toca também na questão da autoestima do estudante discalcúlico que pode ficar abalada diante de um ambiente não preparado para respeitar “as diferenças e dificuldades que cada um encontra em sua jornada”. Alerta que os alunos discalcúlicos necessitam de apoio, afetividade e socialização.

A segunda obra, “Discalculia: o que é? como intervir?” [5], de Jussara Bernardi, foi consequência natural de sua dissertação de mestrado do programa de Pós-Graduação em Educação da PUC-RS. Em seu livro, a autora elabora um processo de conceituação da discalculia e destaca os subtipos em que esse distúrbio se divide, descreve algumas características manifestadas por alunos discalcúlicos e apresenta sugestões de jogos e atividades lúdicas visando à elevação da autoestima e autoimagem dos estudantes, bem como a evolução da capacidade matemática desses alunos. As propostas de atividades abordadas no livro são direcionadas a alunos do ensino fundamental 1.

Jussara Bernardi apresenta em seu livro os resultados obtidos em uma pesquisa realizada por Shalev sobre discalculia. Esse distúrbio foi constatado “em aproximadamente de 5% a 15% das crianças que frequentam as escolas normais de Ensino Fundamental” afetando, na mesma proporção, tanto meninos quanto meninas na idade escolar. É citada também uma investigação desenvolvida por Shalev em um grupo de 3029 crianças em idade escolar. Após a aplicação de testes, observou-se que 6%

desses alunos eram discalcúlicos. Depois de uma série de intervenções pedagógicas realizadas durante três anos, esse grupo de 183 crianças discalcúlicas foi submetido a novos testes e “constatou-se que 47% desses estudantes permaneciam com um baixo desempenho aritmético para sua idade e nível educativo”. A pesquisa buscava investigar a relação das habilidades aritméticas de alunos discalcúlicos e a persistência do distúrbio ante diversas questões familiares quanto ao aspecto social, econômico e cognitivo. Chegou-se, ao final de três anos de acompanhamento, que “fatores como o nível socioeconômico, o gênero e a presença ou não de problemas associados à leitura e à escrita não influenciavam na permanência ou não da discalculia”.

Uma importante questão abordada na obra de Jussara Bernardi é quanto à adoção das estratégias de intervenção para a discalculia. Destaca ela que “a discalculia parece requerer, somente, intervenções psicopedagógicas, basicamente educativas” dispensando a abordagem farmacológica e que, ao contrário de outros distúrbios como o déficit de atenção e hiperatividade, que necessitam de especialistas da área médica para seu diagnóstico e intervenção, a discalculia pertence ao âmbito da psicopedagogia requerendo, portanto, especialistas na área da educação.

Há nessa obra [5] a menção sobre “instrumentos neuropsicológicos para identificar um aluno com discalculia”, e cita um artigo de autoria de Elaine Vieira [50], que enumera diversas características que podem auxiliar o professor a detectar um aluno com discalculia, são elas:

- ❖ “Dificuldade na identificação de números: o aluno pode trocar os algarismos 6 e 9, 2 e 5, dizer dois quando o algarismo é quatro.
- ❖ Incapacidade para estabelecer uma correspondência recíproca: dizer o número a uma velocidade e expressar, oralmente, em outra.
- ❖ Escassa habilidade para contar compreensivamente: decorar rotina dos

números, ter déficit de memória, nomear de forma incorreta os números relativos ao último dia da semana, estações do ano, férias.

- ❖ Dificuldade na compreensão dos conjuntos: compreender de maneira errada o significado de um grupo ou coleção de objetos.
- ❖ Dificuldade na conservação: não conseguir compreender que os valores 6 e $4 + 2$ ou $5 + 1$ se correspondem; para eles, somente significam mais objetos.
- ❖ Dificuldade no cálculo: o déficit de memória dificulta essa aprendizagem. Confusão na direcionalidade ou apresentação das operações a realizar.
- ❖ Dificuldade na compreensão do conceito de medida: não conseguir fazer estimações acertadas sobre algo quando necessitar dispor das medidas em unidades precisas.
- ❖ Dificuldade para aprender a dizer as horas: aprender as horas requer a compreensão dos minutos e segundos e o aluno com discalculia quase sempre apresenta problemas.
- ❖ Dificuldade na compreensão do valor das moedas: tem problemas na aquisição da conservação da quantidade, em relação com moedas, por exemplo: 1 moeda de $25 = 5$ moedas de 5 .
- ❖ Dificuldade na compreensão da linguagem matemática e dos símbolos: adição, subtração, multiplicação, divisão, $+$, $-$, \times , $:$.
- ❖ Dificuldade em resolver problemas orais: o déficit de decodificação e compreensão do processo leitor impedirá a interpretação correta dos problemas orais.”

Nesse artigo [50] é elencada uma série de procedimentos iniciais, separados por características pessoais do estudante, recomendadas em uma “Sessão psicopedagógica”:

I – “Para aluno com aprendizagem oral:

- Instruções orais devem preceder todas as ações e demonstrações.
- Proporcionar um resumo oral de cada parte.
- Quando necessário, usar uma palavra-chave para chamar a atenção do aluno (p. ex: veja).
- Suprimir qualquer estímulo visual não pertinente.

II - Para aluno com aprendizagem visual:

- Demonstrações visuais devem preceder todas as instruções orais.
- Solicitar ao aluno que descreva todas as demonstrações ou desenhos.
- Proporcionar um resumo visual de cada situação.
- Proporcionar ao aluno a oportunidade de reproduzir as imagens das formas verbais e pictóricas.
- Usar fichas para fixar a atenção do aluno.
- Tentar que o aluno consiga fazer todo o trabalho sem falar, algumas vezes.

III - Para aluno com aprendizagem tátil:

- O aluno deve manipular objetos antes de qualquer instrução. Poderá ocorrer manipulação física somente, ou em conjunto com instruções orais.
- Suprimir qualquer estímulo visual que distraia o aluno.
- Proporcionar sempre um resumo (manipulação tátil de cada passo).
- Usar sempre uma forma que lhe chame a atenção.
- Usar material com várias texturas.”

Em seu livro [5], Jussara Bernardi enfoca bastante a questão da autoestima e da autoimagem (quesitos destacados também por Ana Maria Antunes [13]) realçando que “essa atribuição de valores resultará numa elevação ou diminuição de pretensões da pessoa em ações futuras, resultando num julgamento de si mesmo que influenciará todo o seu desenvolvimento”, destaca também que as atitudes dos pais têm um impacto deveras importante sobre a autoestima de seus filhos. Enfatiza que “muitas das percepções que os alunos possuem de si, na maioria dos casos, é gerida por adultos que enfatizam, ou até mesmo deturpam, os atributos ou comportamentos desajustados com comentários negativos sobre o seu desempenho escolar”. E salienta o mais grave desse tipo de atitude: “transformam os erros do indivíduo em fracassos pessoais, os erros são corrigíveis, mas os fracassos atingem diretamente a autoimagem e a autoestima, que

acabam amalgamando na criança uma incapacidade de aprendizagem e um aniquilamento da vontade e do desejo de aprender”.

Em suas considerações finais, Jussara Bernardi expõe os limites quanto à generalização sobre o tema de sua pesquisa salientando que “embora essas afirmações possuam caráter verídico, não se dispõem no momento de informações suficientes, devido ao número restrito de sujeitos e ao curto período de investigação utilizado para desenvolver esse estudo, para afirmar, com segurança, quais dos sujeitos possuem uma discalculia”. Na página final ela escreve “As instituições educacionais precisam se configurar como um espaço preparado para atender as necessidades educativas específicas dos alunos e potencializar o seu desenvolvimento integral, impedindo a repetência, o fracasso, a evasão e, conseqüentemente, a exclusão social”. A inclusão de alunos com necessidades específicas é uma chama forte no consistente trabalho de Jussara Bernardi.

4.5 A contestação dos diagnósticos

O diagnóstico da discalculia não é aceito por todos. Se é plenamente possível encontrar quem sustente a tese de que a dislexia seja uma “invenção” (http://www.crpsp.org.br/portal/comunicacao/cadernos_tematicos/8/frames/fr_dislexia.aspx, visto em 6 de Setembro de 2014), críticas mais contundentes, quanto ao diagnóstico da discalculia, foram feitas pelas pesquisadoras, e professoras de Matemática, Doutoradas Lulu Healy e Cláudia Rosana Kranz. Em um artigo [26] elas abordam aspectos relacionados ao desenvolvimento da discalculia, centralizam a pesquisa em artigos, dissertações e teses realizadas no Brasil. Constatam que é pequeno o número de trabalhos disponíveis, corroborando a afirmação da escritora Ana Maria Antunes em seu livro *Discalculia* [13]. Healy e Kranz também constatam que os estudos sobre discalculia estão centrados nas áreas de ciências biológicas e médicas “com forte predominância

dos aspectos neurológicos em detrimento aos aspectos sociais, históricos, culturais e pedagógicos”. Elas tomaram como referência a “psicologia histórico-cultural”, que “associa a aprendizagem e o desenvolvimento humano não somente a fatores biológicos, mas, sobretudo, a aspectos culturais”. Elas escrevem sobre “A constituição da discalculia”, sua definição segundo o CID 10 e também no “Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais”, o DSM IV, a quarta edição de uma publicação da Associação Americana de Psiquiatria (APA). Healy e Kranz [26] retratam a discalculia sob a perspectiva histórico-cultural de Vygotsky e descrevem como a discalculia é diagnosticada pelos especialistas da área.

Na conclusão do artigo, as pesquisadoras procuram sintetizar seus questionamentos com relação à discalculia no título “Diferenças e não déficits”. Elas fazem uma crítica sob o argumento de que os trabalhos por elas pesquisados “enfocam e promovem um modelo essencialmente calcado no déficit do aluno” e que, resumindo, os modelos utilizados para justificar as dificuldades dos alunos com aspectos específicos da matemática levam a conclusão de que “há algo de errado com seus cérebros”. Healy e Kranz realçam que “o rótulo de discalcúlico não é simplesmente o resultado inevitável de alguma característica estática individual de determinados sujeitos”, elas criticam o fato de que o diagnóstico da discalculia tem como base “uma norma ou desempenho ideal; aqueles que deles se afastam, se desviam, são considerados problemáticos, são rotulados e precisam de algum tipo de correção”. As pesquisadoras advertem que quem se beneficia com o rótulo da discalculia são as instituições e não o aluno, consideram que essa postura pode ter como consequência a “perpetuação de práticas não equitativas, que legitimam a exclusão daqueles considerados desviantes dos padrões normais, no interior das escolas”.

Entre tantas definições, contestações e pesquisas que buscam entender as dificuldades que alguns alunos encontram na Matemática, nós professores muitas vezes

não sabemos como agir e nos deparamos sempre com o desafio perene de como ensinar melhor “a rainha e serva das ciências”. Precisamos compreender que não faz parte da especialidade do professor de MATEMÁTICA ser um “expert” (perito) em distúrbios de aprendizagem, ser um bom professor de Matemática é simplesmente gostar de gente e ensinar Matemática com o brilho que essa ciência merece. Nosso compromisso deve ser o da INCLUSÃO de todos os alunos sem qualquer distinção, fazer com que nossas aulas possam ser acessíveis a todos os estudantes, mostrando que a Matemática é importante para a sociedade e pode não só ser compreendida como também ser útil para todos, cada um com a sua “diferença”.

4.6 A dislexia e sua influência na aprendizagem da matemática, segundo a extensa tradição de órgãos internacionais

No Brasil, até o presente momento, não há sequer um livro que seja dedicado a relacionar a aprendizagem de Matemática por parte de alunos disléxicos; fora do país, há muito mais tradição nesse aspecto. Entre tantas associações especializadas em dislexia espalhadas mundo afora, na Austrália, Itália, Espanha, França, destaca-se a “IDA” (International Dislexia Association), a Associação Internacional de Dislexia, sediada nos Estados Unidos, que reconhece a “ABD” (Associação Brasileira de Dislexia) como coligada e mantém estreita relação. Mas, quando o assunto é Matemática, a parte do mundo que tem feito, já há anos, um estudo específico sobre esse assunto é o Reino Unido. Na Inglaterra e na Escócia, existe até legislação oferecendo suporte a alunos disléxicos quanto às suas dificuldades de uma forma geral e também quanto ao ensino de Matemática. Por isso, serão tomadas como principais referências do binômio “Matemática e Dislexia”, as entidades mais tradicionais e de relevância mundial: a “DS” (Dyslexia Scotland) Associação Escocesa de Dislexia, sediada em Edimburgo, Escócia; e

a “BDA” (British Dyslexia Association) Associação Britânica de Dislexia, em Londres. Também tomamos como referência teórica as obras de alguns dos tradicionais professores de Matemática ligados a essas instituições, Steve Chinn e Richard Ashcroft [16], Moira Thomson [48, 46], Thomas Richard Miles e Elaine Miles [35] como também, Dorian Yeo e Julie Kay [51].

Para responder a questão de “Como a dislexia afeta a aprendizagem em Matemática”, Dr. Steve Chinn [17] provoca dizendo que na Matemática existem muitas instabilidades que muitas vezes são esquecidas. Muitas dessas instabilidades tornam-se sementes da confusão e do fracasso que são semeadas desde cedo, na vida acadêmica dos alunos. Chinn alerta que essa é a razão pela qual devemos observar o longo caminho na história da aprendizagem do indivíduo se quisermos compreender suas dificuldades na aprendizagem da Matemática. Ele diz que a Matemática tem mais exceção às regras do que muitas pessoas a supõem e que essas irregularidades põem em desvantagem especialmente o aluno disléxico que tem sua segurança na aprendizagem abalada. Ele relata muitas dessas situações:

- Dá como exemplo, o caso das operações com frações, que é um verdadeiro problema para muitos alunos, diante da expressão $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$, somente os números da parte de cima das frações são adicionados. No entanto, em $\frac{1}{5} \times \frac{3}{5}$, tanto os números da parte de cima como também da parte de baixo são multiplicados.
- Com relação a ângulos, nós medimos no sentido anti-horário, mas, com relação ao tempo, nós contamos no sentido horário. Para dizer a hora do dia, contamos a partir da hora até chegar a 30 minutos, como em 4h e 10min e 4h 25min, em seguida, fazemos contagem regressiva para a próxima hora. Dizemos “Quatro e meia” ou “Quatro horas e trinta minutos” para 4h 30min, mas costumamos dizer “Dez para as sete” com o sentido de 6h 50min, que não tem nem 10 nem 7.
- Nas adições, nós “carregamos” enquanto nas subtrações “decompomos”, no entanto ambas são mercantilização de quantidades, troca-se “10 unidades” por “um 10” e também

“uma dezena” por “10 unidades”. Nós esperamos absoluta precisão nas respostas e depois esperamos que os alunos abandonem esse critério para realizar estimativas.

- Nós escrevemos números como 1, 2, 3, 4, 5, 6 que vão se tornando maiores “da esquerda para a direita”, enquanto escrevemos 12, 13, 14 onde o dígito que representa a maior quantidade está “à esquerda”, mesmo que ele tenha sido o menor na experiência anterior.
- Nos números decimais, a sequência das palavras na parte inteira, “da direita para a esquerda”, é: unidades, dezenas, centenas, milhares. Para a parte decimal, a sequência “da esquerda para a direita” a partir da vírgula é: décimos, centésimos, milésimos.
- A multiplicação pode fazer o aluno a ter a idéia equivocada de que ela transforma números em quantidades maiores, mas, na realidade, quando se multiplica por “ $\frac{1}{2}$ ” transformamos números em quantidades menores.
- Com relação às questões visuais, pode haver um problema na distinção entre símbolos como “+” e “x” ou “+” e “÷” ou o layout da página de um livro pode causar dificuldades, por exemplo, se o espaço entre os exemplos são estreitos demais, como em “3+4”. Pela sugestão, deveríamos escrever “3 + 4”.
- Ainda com relação à direcionalidade, muitos alunos percebem que, a leitura de números como 13, 14 e 15 é feita de maneira diferente em relação a outros números como 36, 46, 56 onde os dígitos são escritos na mesma ordem das palavras. 36 é lido como “trinta e seis” e 13 não é lido como “dez e três”.
- Nós realizamos as operações da adição, subtração e multiplicação “da direita para a esquerda”, mas a divisão é feita “da esquerda para a direita”.
- Devido à falha na memória de curto prazo, os alunos disléxicos podem se perder no meio da sequência de um cálculo aritmético mental. Exemplo, na adição “234 + 93”, o aluno deve tentar operar mentalmente usando o mesmo método utilizado na forma escrita. Somam-se as unidades “4 + 3 = 7”, depois as dezenas “3 + 9 = 12”, carregam o “1” do resultado anterior para realizar o cálculo “2 + 1 = 3”. Depois, deve inverter a ordem dos resultados obtidos mentalmente (7, 2, 3) para obter 327.
- Parece haver lacunas na memória de longo prazo em alunos disléxicos. Por isso, é bastante improvável que um disléxico aprenda a decorar a tabuada, pode ser que eles

não se lembrem dos passos necessários para realizar uma divisão longa, especialmente se o processo não tem significado ou lógica para dar suporte à memória.

- Quanto à questão da linguagem (já abordada no capítulo anterior), Chinn diz que a Matemática possui seu próprio vocabulário, por exemplo, **ÁLGEBRA** é uma palavra exclusiva do universo matemático, mas também, a Matemática compartilha palavras com outras atividades, “tirar” pode estar relacionado a uma nota em uma avaliação, como também a uma subtração. Em Matemática há uma gama de palavras que podem estar associadas a uma mesma operação, “somar”, “acrescentar”, “mais”, “superar”, “incluir” podem indicar uma adição, mas nós podemos usar também “mais” para associar a uma subtração como em “Marcos tem 3 canetas a mais do que José. Se Marcos tem 10 canetas, quantas canetas tem José?”. Perguntas de Matemática sem o uso simbólico dessa linguagem usam frequentemente uma forma peculiar da língua. Não é suficiente apenas ser capaz de ler as palavras, você tem que saber seu significado dentro do universo dessa ciência. Assim, não é surpreendente que as pessoas classifiquem os problemas escritos (sem linguagem simbólica) como uma das áreas mais difíceis da Matemática, mesmo que elas não sejam disléxicas.
- Uma das coisas mais estranhas sobre a Matemática é a exigência para realizar as atividades rapidamente. Essa postura tem como consequência a tendência em aumentar a ansiedade do aluno e, assim, diminuir a precisão dos cálculos. Disléxicos tendem a ser mais lentos na execução das atividades e muitos fatores contribuem para isso, como a baixa memorização de fundamentos básicos da Matemática. Em um estudo de sala de aula, Chinn verificou que os alunos disléxicos levam cerca de 50% mais tempo para concluir um conjunto de questões de aritmética do que seus pares não disléxicos, mas havia um “fator oculto” agindo, o que pode fazer com que estes resultados estejam subestimados (*). Esse é um bom exemplo de uma área em que o simples conhecimento sobre essa tendência dos alunos disléxicos e um reajuste nos procedimentos pedagógicos por parte do professor, podem reduzir a pressão sobre os pupilos e ajudá-los na aprendizagem.

- A Matemática requer habilidades de sequenciamento. Elas podem ser habilidades para contar os números, sejam em ordem crescente como decrescente, de oito em oito ou em grupos de 6 ou até mesmo a sequência do processo longo da divisão. Essa dificuldade pode ser ligada aos problemas de linguagem em questões do tipo “subtraia 17 de 36” onde os números se apresentam em ordem contrária em relação ao modo como a subtração é computada, “36 - 17”. A sequência dos números negativos pode ser confusa como em coordenadas negativas, por exemplo, o par ordenado (-3; -6). Este é um exemplo que pode ilustrar o efeito desproporcional do que poderia ser considerado um aumento ínfimo de dificuldade. Passar de coordenadas positivas para coordenadas negativas pode criar um nível surpreendente de elevada ansiedade ou problemas de compreensão para alguns alunos.
- A Matemática pode causar ansiedade para a maioria dos alunos (e até em alguns professores), por exemplo, frações frequentemente causam isso. É uma característica dos disléxicos (e provavelmente de outros alunos também) ao pré-julgar uma questão como muito difícil de resolver, eles evitam o fracasso simplesmente não começando a tentar resolver o exercício. (*) Este é o “fator oculto” a qual nos referimos acima. Os alunos disléxicos apresentam uma proporção muito maior no quesito “não responderam” no teste de aritmética, ou seja, ao partir do princípio de que eles não seriam capazes de resolver a questão, eles decidiram evitar o fracasso não respondendo. Aprender requer do aluno a assumir riscos e se envolver no processo de aprendizagem. O medo do fracasso pode fazer o aluno deixar de correr o risco necessário para que a aprendizagem se efetue. Eis a atmosfera espiritual (egrégora) de uma aula que pode ajudar ou atrapalhar. A ansiedade pode ter um efeito negativo sobre a memória de trabalho.
- Quanto à habilidade conceitual, parece ser apenas uma manifestação comum da habilidade em Matemática por parte dos alunos com dislexia e eles podem executar a contento ou acima desse potencial com o ensino e motivação adequados. Infelizmente, a velocidade de trabalho e outros fatores aqui abordados podem significar que eles não recebem a experiência e a prática necessária para desenvolver habilidades e conceitos.

Outro fator importante é que o problema da compreensão equivocada de um conceito matemático nas séries iniciais e a prática incorreta desse conceito podem criar uma memória predominante. É importante certificar-se de que cada nova ideia é praticada corretamente.

Chinn também aborda o tema da importância dos fundamentos da aritmética como base sólida para compreensão da álgebra: as regras básicas da álgebra são experimentadas desde cedo na aprendizagem da aritmética. Por exemplo, sabendo que 7×8 é igual a 8×7 apresenta $ab = ba$. Sabendo-se que 7×6 é o mesmo que $5 \times 6 + 2 \times 6$ serve de subsídio para entender $a(b + c) = ab + ac$. Sabendo-se que 7×6 pode ser dividido em $5 \times 6 + 2 \times 6$ nos conduz escrever 13×6 como $10 \times 6 + 3 \times 6$ e, por 23×13 escrevemos $23 \times 10 + 23 \times 3$, o que nos dá suporte para trabalhar com $(x + a)(y + b)$.

Se os princípios básicos não são assimilados, então qualquer desenvolvimento destes princípios não será seguro. Os alunos necessitam associar novas informações com fatos já conhecidos. Fazer com que os disléxicos trabalhem a partir do que eles já sabem, para entender o que eles não sabem é crucial para atingir o sucesso. O professor precisa saber o que o aluno traz para a aula. Por exemplo, se os disléxicos só sabem multiplicar por 1, 2, 5 e 10, o professor pode usar esses números nos primeiros exemplos em novos temas, para que possam concentrar-se sobre o assunto, em vez de criar um conflito pelo uso de fatos numéricos desconhecidos.

Chinn faz algumas recomendações quando o ensino é direcionado a alunos disléxicos: em um pequeno artigo como esse, seria uma tarefa impossível de explicar como ensinar todos os variados temas que compõem a Matemática (que por si só pode explicar por que o fracasso em Matemática pode não ser total). No entanto, existem alguns princípios básicos que devem ajudar. Os alunos aprendem Matemática de diferentes maneiras. Alguns lidam bem com símbolos abstratos, outros exigem um modelo visual, que pode ser tão simples como uma reta numérica ou um modelo mais

sofisticado como o "material dourado", que pode evoluir de um "modelo de área" para muitas áreas básicas de Matemática, desde o "processo longo da multiplicação" perpassando multiplicação de frações até equações do segundo grau. Alguns alunos e professores tacham tais materiais como infantis ou não adequados à idade. Isso não deveria ser assim. O "material dourado" é uma ferramenta de ensino-aprendizagem sofisticado se usado corretamente. Há uma oportunidade enorme de usar a capacidade multissensorial do computador para apresentar tópicos da matemática visualmente, oralmente e simbolicamente de modo simultâneo. Disléxicos muitas vezes precisam do apoio de imagens e inter-relações para fortalecer suas memórias. Um exemplo simples disso é relacionar fatos desconhecidos com fatos conhecidos, tais como $8 + 7$, que pode ser obtido a partir de $8 + 8 - 1$ ou sobre 4×7 , que pode ser obtido a partir de $2 \times 7 \times 2$.

Alguns alunos são altamente intuitivos na maneira de aprender e trabalhar com a Matemática. Por exemplo, quando se pede para encontrar três números consecutivos que somam 33, eles vão dividir 33 por 3 e chegar a 11 e, em seguida, concluir rapidamente o trio com 10 e 12. Outros alunos são metódicos e seguem passo a passo o seu estilo. Eles iriam abordar a questão algebricamente, possivelmente através da equação $x + (x + 1) + (x + 2) = 33$, cuja solução é 10. Os alunos precisam saber recorrer a esses dois estilos de solução. A dependência excessiva em um único estilo é se colocar em uma situação de desvantagem. Disléxicos, muitas vezes, optam pelo estilo que lhes parece mais seguro, o estilo metódico, embora possa não ser o melhor caminho para se resolver o problema.

Todos os alunos, mas especialmente os disléxicos, vão se dar melhor em Matemática se eles entenderem inter-relação dos números e os procedimentos utilizados para manipulá-los. Basear-se na pura memorização de fatos e procedimentos não é um caminho seguro para aqueles que possuem déficit de memória. Um exemplo clássico é o processo de decomposição utilizado no Reino Unido para a subtração

(figura 4.05). Um estudo recente nos EUA identificou isso como um erro comum e frequente para a aprendizagem de alunos disléxicos. Se este procedimento deve ser realizado apenas como uma regra de memorização, é provável que fracasse. É por isso que esse método de subtração pressupõe a utilização do material dourado que só deve ser abandonado quando o aluno realmente compreender todo o processo; só assim ele estará preparado para trabalhar apenas com os dígitos. A compreensão desse método subtração utilizado no Reino Unido exige muitos conceitos e habilidades anteriores para que o estudante se sinta seguro. Isto inclui a apresentação clara e organizada da operação no papel, uma boa compreensão do valor posicional e uma capacidade de "ver" os números de outras formas (por exemplo, ver 72 como 60 + 12). Isso significa que resolver um problema de Matemática pode exigir que o aluno tenha que voltar a reaprender conceitos e habilidades iniciais ainda não assimilados. Veja as figuras a seguir:

$$\begin{array}{r}
 742 = 700 + 40 + 2 \\
 \underline{-386} = \underline{-(300 + 80 + 6)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \color{red}{-10} + \color{blue}{10} \Rightarrow \\
 \color{red}{-100} + \color{blue}{100} \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \simeq \\
 \simeq
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 700 + 30 + 12 \\
 \underline{-(300 + 80 + 6)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \simeq \\
 \simeq
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 600 + 130 + 12 \\
 \underline{-300 - 80 - 6} \\
 \underline{\underline{300 + 50 + 6}} \\
 \mathbf{356}
 \end{array}$$

Figura 4.05: descrição do processo de decomposição para a subtração, utilizado no Reino Unido [16]



Figura 4.06: Processo de decomposição da subtração $742 - 386$ utilizando o material dourado

Chinn também discorre sobre o uso da calculadora por parte de alunos disléxicos. Ele julga que o uso de calculadora pode ser muito útil, apenas advertindo que, tal como acontece com todos os equipamentos, as calculadoras podem também trazer desvantagens e requerem cuidados em seu uso. Ele diz que a calculadora pode ser usada para realizar cálculos que levariam muito tempo no papel, como por exemplo, a divisão $522 \div 11,72$, mas pode-se associar esse tipo de uso combinado com algumas estimativas, como por exemplo, buscar saber que o resultado deste cálculo está entre 40 e 50 ou até mesmo estimar que o resultado seja próximo de 45. Calculadora é também uma fonte de informações numéricas, que antigamente eram fornecidas por tabelas de logaritmo e régua de cálculo. Algumas calculadoras também podem computar dados estatísticos complexos e apresentam dados graficamente.

Ele diz que, para os disléxicos, é preciso haver um certo cuidado na digitação dos dados na ordem correta das teclas e que deve-se realizar uma checagem através de uma estimativa. Quando se pergunta, na língua inglesa, “5.3 divided into 607” (“5,3 na divisão de 607”), cuja digitação dos números ocorre em ordem inversa, ou seja, “607 \div 5,3”, procura-se como resposta um número igual a um pouco mais de 100 ($607 \div 5,3 > 600 \div 6$). Chinn acrescenta ainda que, se as teclas forem usadas adequadamente e na ordem correta, a calculadora pode ser usada para ilustrar ou desenvolver padrões. E, reafirma, deve-se evitar a pressão dos prazos artificiais, pois podem reduzir a ocorrência da digitação incorreta. A simples e benéfica pergunta “A resposta vai ser maior ou menor?” frequentemente orienta o aluno quanto ao procedimento correto que deve seguir.

Quanto ao uso de softwares para Matemática, Chinn afirma que programas desse tipo são desenvolvidos quase que diariamente e ele sugere alguns critérios na seleção destes softwares. Para um aluno disléxico, quanto mais um programa oferecer uma experiência multissensorial, juntando som, gráficos, símbolos e textos combinados, será

melhor para ele; embora alguns programas estejam próximos a isso, a maioria não é assim.

Segundo Chinn, os programas existentes possuem aspectos positivos e negativos. Um dos aspectos a serem levados em conta é a adequação do nível de linguagem utilizada no programa, que tanto pode ser muito “infantilizada” para o nível do estudante que utiliza o software, quanto ser inadequada para um aluno que possua dificuldade na compreensão da leitura. Algumas vezes os jogos podem ser frustrantes, na medida em que demoram demasiadamente nas atividades matemáticas ou para completar e alcançar seu “objetivo”.

Alguns programas são muito úteis para a construção de gráficos e tabelas, agilizando a realização do trabalho e permitindo a melhor compreensão de um conceito. Muitas vezes esse tipo de programa faz parte de um pacote como o Excel ou Word. Apesar de alguns programas serem como um “livro sobre tela”, fazendo pouco uso do real potencial de um computador, que realiza muito mais do que apenas mostrar o que está escrito, ao contrário do que se possa parecer, para um aluno disléxico esses programas podem ser mais fáceis de lidar do que um livro.

Computadores podem ajudar a melhorar a concentração e aumentar a capacidade de atenção. O software pode ser projetado para ser divertido e visualmente estimulante, ensinando a Matemática de maneira indireta e mais agradável. Os programas podem permitir que o aluno trabalhe de forma independente. Obviamente, o sucesso depende da concepção de como ele é construído, por exemplo, é importante que o aluno possa mover-se facilmente em torno do programa. Também é aconselhável que haja uma saída de som clara e que o programa use boas imagens.

Muitos disléxicos acham o “design” de tela exagerado. Parece haver uma tendência entre alguns designers para colocar toda sua coleção de diagramação em uma única tela. Conseguir o equilíbrio certo é difícil, pois os alunos possuem preferências

diversas e de caráter individual. Mas todo cuidado deve ser levado em conta para não fazer com que a primeira experiência seja tão irritante a ponto de desestimular o aluno e levá-lo a evitar tentativas posteriores.

Uma das principais observações de Chinn com relação aos alunos disléxicos é quanto à individualidade que cada um possui na maneira de aprender. A forma de aprender e estilo de raciocínio não são os mesmos para todos os alunos, sejam disléxicos ou não. É difícil conceber um livro-texto para atender a diferentes estilos de aprendizagem e muitas vezes o ensino não aborda esse tipo de questão. Novamente, o computador tem o potencial para satisfazer esta necessidade, as informações podem ser apresentadas em ambos os sentidos, tanto multissensorial quanto a via cognitiva. O software pode ser projetado para dar ao aluno um tratamento individualizado através do processo de aprendizagem, mesmo que isso seja tão simples como a escolha de usar ou não a saída de voz ou de um gráfico.

Quando buscamos informações sobre a relação entre dislexia e a aprendizagem da Matemática, as informações geralmente estão concentradas nos anos iniciais da vida acadêmica dos alunos. Pouco se fala sobre o período em que o aluno cursa o “Ensino Fundamental” e, mais raro ainda, no que tange ao “Ensino Médio”, palco principal das atividades a serem descritas nessa dissertação. Preenchendo essa lacuna, a instituição “Dyslexia Scotland” disponibiliza, entre tantos outros, um documento [46] que resume o rol de dificuldades encontradas por alunos disléxicos na aprendizagem dessa nobre ciência. Também são fornecidas orientações, tanto a pais, educadores e professores para melhor procederem na participação efetiva no ensino-aprendizagem da Matemática em benefício de nossos estudantes. Primeiramente é esclarecido que todos os guias possuem uma mensagem positiva e que o termo “Dislexia” é abordado para expressar o que os aprendizes “podem fazer” e não o que eles “não podem fazer”. Parte do princípio de que as dificuldades experimentadas pelos alunos com dislexia são vistos

como “barreiras à aprendizagem”, o que significa que o amparo ao estudante para superar essas barreiras fazem parte das responsabilidades dos profissionais que trabalham na escola.

Algumas das dificuldades apresentadas por alunos disléxicos e suas consequentes sugestões de apoio (alguns já mencionadas anteriormente) fazem parte do guia de orientação “Dyslexia and Mathematics” [46].

I - Leitura e Matemática (aspecto já abordado no capítulo anterior)

O ensino da Matemática está intimamente associado ao ensino de uma língua estrangeira. Algumas características semelhantes são: vocabulário próprio, dificuldades na leitura e compreensão dos textos, necessidade de releitura para o entendimento de textos matemáticos, dificuldades na compreensão de abreviaturas de termos matemáticos ou uso de símbolos especiais (/ “tal que”).

II - Números

As barreiras que alguns alunos disléxicos podem ter são:

- Copiar os números incorretamente,
- Inverter os números (colocar de cabeça pra baixo ou inversão horizontal),
- “Carregar” os números de maneira errônea (o “vai 1” da adição e subtração),
- Ser incapaz de fazer estimativas,
- Possuem dificuldades para entender valor posicional,
- Desalinha colunas, tornando os cálculos impossíveis de serem realizados,
- Serem incapazes de fazer cálculos complexos como o processo longo da divisão, onde devem seguir os passos em uma ordem prefixada,
- Frequentemente sabem o que fazer em cada passo em uma sequência, mas erram a ordem dos passos chegando a uma resposta errada,
- São inconsistentes, conseguem fazer algo corretamente em um dia, mas não tem o mesmo padrão de acerto no dia seguinte.

Sugestões para estratégias de apoio: Além de permitir o uso de calculadoras e tabelas, providenciar instrução para o uso adequado desses instrumentos; providenciar uma malha quadriculada adequada para realizar os cálculos como da adição e multiplicação; incentivar o uso de papel quadriculado; fazer uso de uma variedade de abordagens (incluindo jogos no computador) para desenvolver e reforçar fatos numéricos; ensinar estratégias para desenvolver uma abordagem sistemática nos cálculos usando, talvez, fluxogramas.

III – Formas e símbolos

As barreiras que alguns alunos disléxicos podem ter são:

- Serem significativamente mais lentos do que seus pares para finalizar as tarefas matemáticas, mesmo por aqueles que demonstram ter uma habilidade especial,
- Confundem os sinais de “+ com x” e “% com °”,
- Não entendem a linguagem matemática no que se refere a símbolos,
- Possuem uma dificuldade especial com álgebra e fórmulas matemáticas,
- São incapazes de relacionar as propriedades de uma figura com seu nome,
- Possuem dificuldade de fazer conexões entre formas geométricas;
- Não tem idéia alguma com relação à escala.

Sugestões para estratégias de apoio: sempre forneça tempo suficiente para o aluno processar a natureza de um problema; ensine as associações entre as palavras da linguagem comum com os símbolos matemáticos; faça a ligação entre o conceito da multiplicação com a adição e o conceito da divisão com a subtração; exiba, na sala de aula, quadros, fotos, folders que possam servir de consulta discreta pelos alunos; ensine a notação algébrica de forma lenta e imprima fórmulas para memorização; ofereça ampla oportunidade de revisão e reforço; utilize recursos visuais para dar ênfase aos diferentes aspectos das formas geométricas; use cores para as linhas de código e símbolos que identificam os aspectos das formas geométricas; sempre use as

representações visuais das formas geométricas para ilustrar seus nomes e propriedades; produza anotações ilustradas que mostram as palavras chaves, diagramas e exemplos trabalhados.

IV – Direcionalidade e sequência

As barreiras que alguns alunos disléxicos podem ter são:

- Ficar confuso com palavras e preposições que envolvam direção como: primeiro/último, antes/depois, acima/abaixo, próximo/anterior, ontem/amanhã (direcionalidade do tempo), norte-sul-leste-oeste,
- Ter dificuldade em fazer contagens em ordem decrescente,
- Ser incapaz de sequenciar dias da semana, meses, etc.
- Apresenta grande dificuldade em seguir uma sequência de instruções,
- Ser incapaz de seguir uma sequência de instruções na ordem correta,
- Ter dificuldade de leitura, compreensão e extrair informações de tabelas, diagramas e gráficos,
- Apresentar problemas na construção de gráficos e na sua leitura,
- Ter extrema dificuldade de ler as horas em um relógio analógico,
- Quando perguntado “Que horas são?”, pode dar uma resposta do tipo “São dez passados 15 minutos”,
- Podem ser capazes de dizer horas exatas e com “meia hora” (5h:00, 5h:30min, etc.), mas não frações de tempo como, por exemplo, 5h 12min.
- Açam confusos os conceitos de antes e depois em um relógio.
- Ser incapaz de extrair informações de horários.
- Dificuldade em estimar a passagem do tempo e ser incapaz de executar um trabalho quando “em 15 minutos” seria possível.

Sugestões para estratégias de apoio: ajude os alunos a desenvolver estratégias pessoais para distinguir esquerda de direita, use atividades visuais e cinestésicas para ilustrar palavras e preposições que envolvam sentido; use eixos numéricos e movimento

para ajudar com orientações; ensine diagramas de fluxo para ajudar os alunos seguirem direções e instruções; Realce onde se deve começar em sequências operacionais; utilize códigos de cores nos eixos, colunas, linhas e setas de esclarecimento; use cartão (ou régua) em forma “L” para ajudar a ler tabelas; colocar setas de direção em eixos de um gráfico; utilize código de cores em um gráfico para facilitar a leitura; use um relógio digital, mas isso vai ajudar apenas se cuidadosamente ensinado; use estratégias visuais para apoiar o uso de relógio analógico e "experiência" da passagem do tempo.

V – Trabalhos práticos de Matemática

As barreiras que alguns alunos disléxicos podem ter são:

- Ter dificuldade em alinhar colunas de números corretamente;
- Ter dificuldade em estruturar seu trabalho em etapas lógicas e sequenciadas;
- Não ter habilidade de construir tabelas, etc. adequadas para inserção de dados;
- Não ter habilidade motora refinada necessária para desenhar/medir com precisão;
- Ser incapaz de usar uma régua para desenhar linhas retas ou medir com precisão;
- Ter dificuldade em saber por onde começar a desenhar tabelas/gráficos no papel;
- Ficam confusos sobre as medidas apropriadas para tarefas distintas;
- Têm dificuldade em associar representações pictóricas a valores numéricos;
- Ser incapaz de terminar atividades práticas, quando a sequência têm direcionalidade como parte delas.

Sugestões para estratégias de apoio: utilize papel quadriculado e/ou papel pontilhado; sugira o uso de régua, marcadores adesivos e régua de leitura; forneça ferramentas e instrumentos que facilitem sua manipulação; ensine o uso correto de uma régua, transferidor e outras ferramentas de medição; forneça tesoura para canhotos se for o caso; providencie régua transparentes para ajudar na leitura escalas, tabelas, etc; amplie gráficos para tornar os detalhes mais acessíveis; use fluxogramas para servir como referência, mostrando a sequência dos passos em tarefas específicas; forneça ao

aluno uma folha com um exemplo, mostrando claramente o ambiente para executar o trabalho.

VI – Memória e Matemática

As barreiras que alguns alunos disléxicos podem ter são:

- Esquecem livros e equipamentos;
- Trabalham muito lentamente e esquecem as instruções dadas até mesmo antes de começar a tarefa;
- Possuem muita dificuldade de seguir instruções verbais;
- Incapazes de memorizar propriedades relativas à adição, subtração e tabuadas;
- Incapazes de “guardar números na cabeça” durante a realização de cálculos;
- Tem dificuldade em lembrar a sequência de etapas em operações com números;
- Apresentam dificuldade para memorizar fórmulas;
- São incapazes de copiar uma resposta com precisão de um lugar para outro;
- Iniciam a resolução de um problema de matemática partindo do lugar errado ou em um lugar não adequado da página;
- Não mostram seus trabalhos. Frequentemente idealizam seus raciocínios sem materializá-los no papel;
- Possuem grande dificuldade para lembrar detalhes da lição de casa.

Sugestões para estratégias de apoio para ajudar os alunos a se desenvolver:

- Não faça um estardalhaço com relação aos equipamentos esquecidos, mantenha um conjunto extra em sala de aula para ser utilizado quando necessário;
- Ajude o aluno a fazer uma lista pessoal (de checagem) sobre o equipamento necessário à atividade do dia, para ajudar a memória;
- Dê uma única instrução de cada vez e as repita com frequência;
- Utilize infográficos com apelo visual;
- Ensine “truques” de cálculos que podem ser feitos com o auxílio dos dedos, use padrões, código de cores e procure verbalizar conceitos e fórmulas usando ritmo e rima, ou até mesmo música para ajudar na memorização;

- Incentive o aluno a destacar cada etapa em um problema escrito (marcadores);
- Forneça o material escrito (resumos, listas) já com os devidos destaques ou exercícios de classe, em vez de esperar que alunos disléxicos copiem os exemplos;
- Desenvolva uma lista de verificação na seqüência de procedimentos envolvendo cálculos;
- Ensine a visualização, a utilização de realce, e o uso de código de cores para auxiliar a memorização de seqüências;
- Ensine técnicas de memorização, tais como os métodos mnemônicos;
- Dê exemplos que indiquem claramente os procedimentos exigidos;
- Ensine as fórmulas de uma forma "divertida" usando métodos mnemônicos, rimas, códigos de cores e "jingles";
- Construa quadros de parede em cores para mostrar fórmulas;
- Construa pequenos cartões para escrever fórmulas e servir de consulta;
- Dê a lição de casa no início da aula;
- Verifique se os alunos anotaram claramente a tarefa de lição de casa;
- Crie um espaço na sala para exibição visual ou gráfico da lição de casa;
- Lembre-se sempre que um aluno disléxico leva muito mais tempo do que seus colegas para fazer a lição de casa. Pode-se e definir um limite de tempo (os pais podem ser convidados a acompanhar o processo).

As atividades que fazem parte dos próximos capítulos procuram, pelo menos em seus princípios, ilustrar como seria ministrada uma aula (no caso uma seqüência de aulas) levando-se em conta as necessidades pedagógicas e as características de um estudante disléxico, cujos pilares serão:

- Aprendizado multissensorial,
- Atividades práticas,
- O estudo de regularidades,
- O uso de programas de computador;
- Revisão e aprofundamento de conceitos matemáticos;

5 Proposta de atividades:

Ilusões de ótica

5.1 O Contexto

Antes de iniciarmos a descrição das atividades, é necessário realizar alguns esclarecimentos. Apesar da liberdade que um professor possa ter para apresentar apenas uma parte das atividades ou mesmo ministrá-la em toda sua extensão, com a profundidade que julgar melhor dentro de seus objetivos pedagógicos ou seguindo a mesma estrutura a ser apresentada aqui, entendemos que, para melhor proveito dos estudantes, a sequência de atividades proposta seja aplicada no 3º ano do ensino médio, iniciando-se no primeiro semestre, pois é nessa série que as atividades aqui abordadas mais se sincronizam com a ementa deste nível de curso.

Muitos conceitos que já foram trabalhados em anos anteriores serão abordados novamente (alguns com uma salutar profundidade), possibilitando reavivar conceitos adormecidos ou não plenamente assimilados, não só pelos possíveis alunos disléxicos ou discalculícos presentes, bem como a todos os estudantes que fazem parte da organização escolar. As experiências descritas a seguir, exemplificadas por fotos, foram realizadas com a participação de professores de outras disciplinas, como Arte (cuja participação foi fundamental), Física e Química em uma escola estadual pública na periferia de Atibaia-SP. Se houver possibilidade, seria muito bom obter a ajuda de

algum educador da escola que possa dar suporte nas questões que envolvem o ambiente computacional, muito utilizado na execução desse trabalho.

5.2 A mágica do chocolate infinito

Buscando dinamizar o processo de ensino-aprendizagem, levando-se em conta a eficácia do ensino multissensorial, já mencionado em capítulos anteriores, utilizo um recurso pedagógico como “pontapé inicial”, um vídeo que se tornou famoso por alardear a possibilidade de se cortar um chocolate em um certo número de partes, comer um de seus pedaços, reorganizar o chocolate em forma de retângulo novamente e obter o mesmo chocolate do início da experiência. Há na internet uma quantidade muito grande de vídeos sobre esse truque, com chocolates de diversos tamanhos e composição de seus pedacinhos. Também há vídeos que procuram falar dessa experiência utilizando embustes visuais através de programas especializados em manipulação de imagens. Não trataremos sobre esses últimos, utilizaremos em nossas experiências apenas as ilusões de ótica obtidas sem o apoio de efeitos artificiais de qualquer espécie, cuja deformação da imagem visa ludibriar o expectador através da mudança das dimensões dos objetos que inicialmente faziam parte da experiência.

Nossa opção foi pelas dimensões de chocolate utilizadas pela maioria dos vídeos disponíveis na rede, um chocolate constituído de 24 pedacinhos (em forma de retângulos) distribuídos em uma malha 4 x 6. Uma grande influência em nossa escolha foi o fato de que essa disposição é facilmente encontrada em chocolates fabricados no Brasil, como o exemplar da foto a seguir.



Figura 5.01: Foto da realização a atividade da “Mágica do chocolate invisível” em uma escola pública

O vídeo original, de 35 segundos, utilizado como ponto de partida das atividades, já possuía mais de 2 milhões de visualizações (em 11 de outubro de 2014) e pode ser acessado no endereço <https://www.youtube.com/watch?v=Y13tSEyOqGs>. A sequência de cortes a serem feitos no chocolate está descrito na sucessão de fotos abaixo:



Figura 5.02: Sequência total da atividade da “Mágica do chocolate invisível” em uma escola pública

Após assistir a esse vídeo e a outros tantos disponíveis na rede, os alunos são incentivados a discutir sobre essa incrível possibilidade de se poder comer chocolate, o tanto quanto se queira, a partir de uma única barra. Quando o professor julgar conveniente, poderá fornecer alguns argumentos lógicos para dar fim a essa mistificação, seja através de explicações encontradas na própria internet ou de menções dadas pelos próprios alunos. Levando-se em conta que a barra de chocolate utilizada na experiência possui 160 gramas, na configuração já mencionada acima, podemos argumentar:

- 1) Se o chocolate possui 24 pedacinhos (4×6), nenhum sofisma poderia macular a fatídica lógica cartesiana de que, após comermos cada um de seus 24 pedaços, o chocolate, com a mais absoluta certeza, chegaria ao fim;
- 2) Cada um dos 24 pedacinhos tem o peso aproximado de 6,66 gramas ($160 \div 24$) e uma balança poderia aferir a diferença de peso entre o chocolate original e o peso da barra obtida após a finalização da experiência;
- 3) A largura do chocolate permanece a mesma durante toda a experiência, mas o comprimento é diminuído na parte final. Uma simples régua pode comprovar esse fato.

Obs.: Uma análise mais profunda dessa experiência será feita no final dessa dissertação (Cap. 11), quando o aluno estiver mais familiarizado com alguns conceitos fundamentais para compreender a explicação com mais clareza.

É necessário destacar que os alunos realizaram a experiência descrita acima com um chocolate real e, se as condições financeiras (da instituição) permitirem, é recomendável que o procedimento seja executado dessa maneira, pois tornará o evento mais marcante e significativo para os alunos. Mas, na ausência dessa possibilidade, poder-se-á utilizar uma malha quadriculada, similar ao exemplo a seguir:

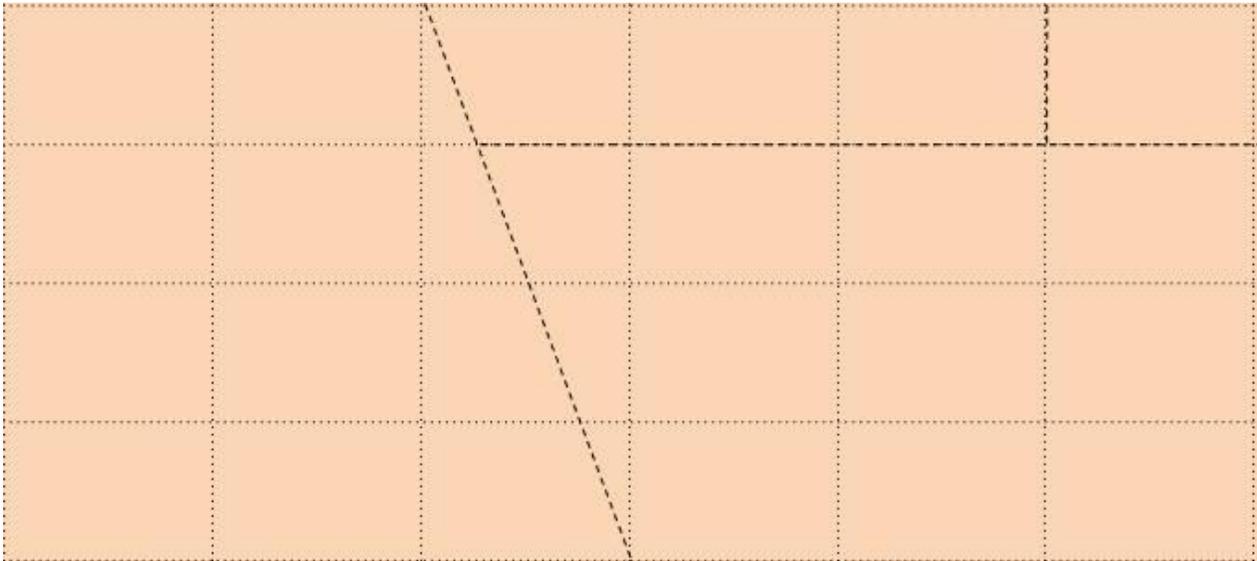


Figura 5.03: Modelo de papel para a “Mágica do chocolate invisível”

5.3 O sofisma de Sam Loyd

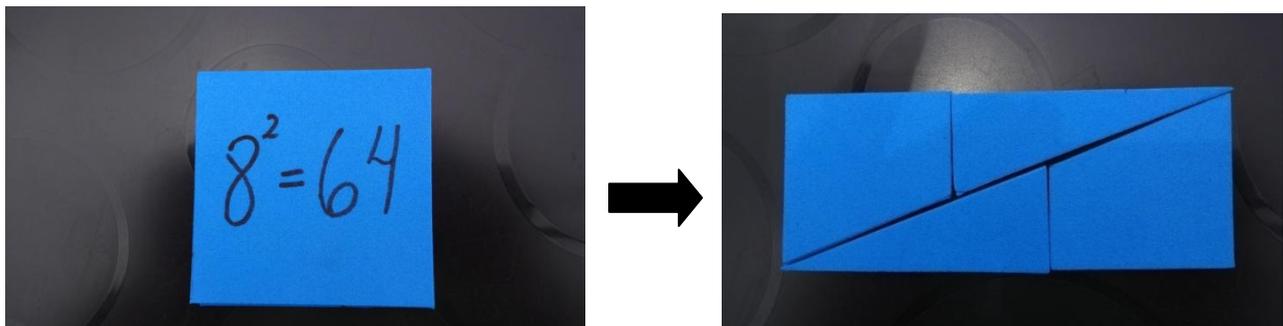


Figura 5.04: Modelo em EVA para a mágica do “64 = 65?!”, princípio e fim da experiência

A segunda experiência a ser realizada como os alunos é o sofisma proposto por Sam Loyd (1841 - 1911) [33], matemático e enxadrista americano, famoso por elaborar quebra-cabeças de diversos tipos, também envolvendo matemática e xadrez. Esse sofisma parte de um quadrado de 8 cm de lado que, primeiramente, é dividido em dois retângulos cujas bases congruentes são obtidas a partir de um dos lados do quadrado. Suas alturas são obtidas ao se efetuar um único corte, paralelo à base, em um dos lados perpendiculares, dividindo o lado do quadrado sob as medidas 3 cm e 5 cm.

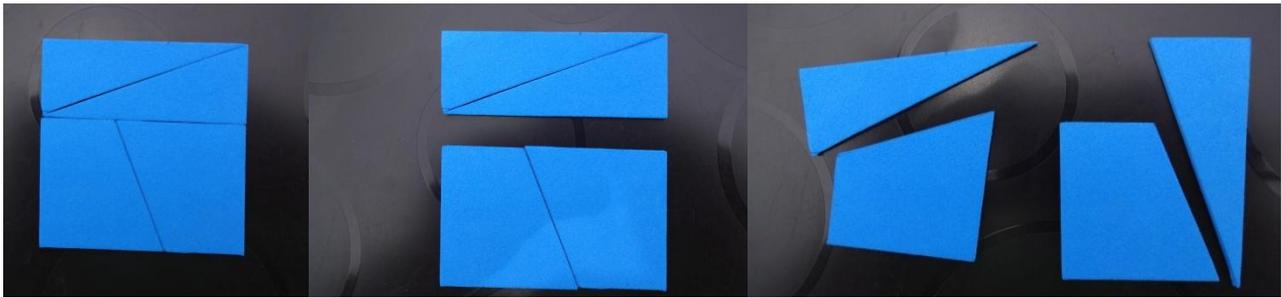


Figura 5.05: Três primeiras fases do experimento “64 = 65?!”

No retângulo menor, 3 cm x 8 cm, efetua-se um único corte ao longo de toda diagonal do retângulo, obtendo-se dois triângulos retângulos congruentes cujos catetos medem 3 cm e 8 cm. No retângulo maior, de dimensões 5 cm x 8 cm, efetua-se um corte, em diagonal, de modo a obter dois trapézios retângulos congruentes, cujos lados perpendiculares ao lado de medida 5 cm meçam 3 cm e 5 cm.



Para montar a segunda figura do sofisma, um retângulo, deve-se separar os quatro polígonos obtidos pelos cortes em dois grupos equivalentes, cada um deles contendo um trapézio retângulo e um triângulo retângulo. Em cada um desses grupos forma-se um triângulo

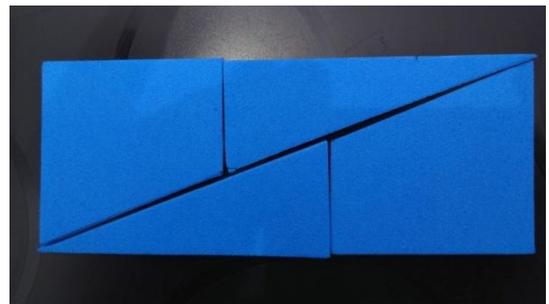


Figura 5.06: Duas últimas fases do experimento “64 = 65?!”

retângulo grande, cujos catetos medem 5 cm e 13 cm, apenas juntando os dois polígonos do grupo exatamente nas arestas de medida igual a 3 cm. Após a formação dos dois triângulos retângulos, deve-se agrupar os dois triângulos de modo a formar um retângulo cujos lados medem 5 cm e 13 cm. As ilustrações anteriores mostram o quadrado inicial e o retângulo que deve ser obtido após a execução dessa tarefa.

Uma boa maneira de iniciar essa atividade é através da projeção de um ou mais vídeos mostrando como ela transcorre, do começo ao fim. Há na internet uma boa quantidade de vídeos relativa a esse truque, um deles pode ser encontrado no endereço eletrônico https://www.youtube.com/watch?v=ATawe8IFA_c, acessado em 21/OUT/2014. É fundamental mostrar também um vídeo ou uma sequência de fotos orientando cada passo a ser executado pelo estudante durante o processo. Após o vídeo, deve-se fornecer a cada aluno uma folha quadriculada para a realização do experimento descrito no projetor.

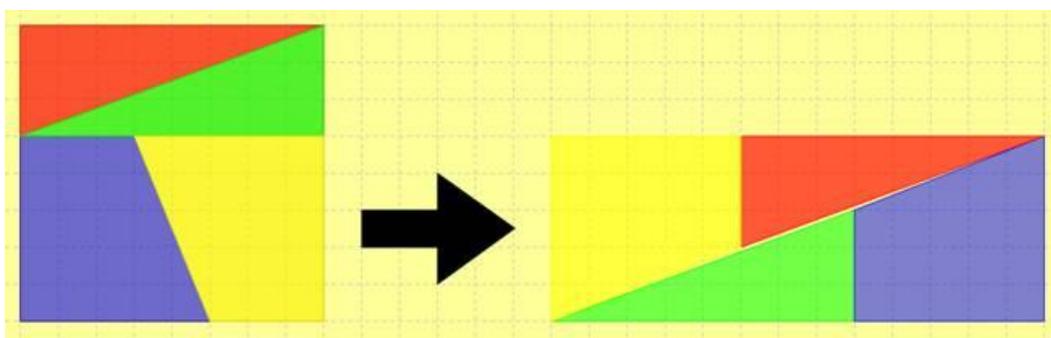


Figura 5.07: Modelo colorido para a mágica do “ $64 = 65$?!”, princípio e fim da experiência

Logo depois da finalização dessa atividade, é aconselhável o professor promover uma discussão em torno da diferença entre as áreas dos dois quadriláteros que, surpreendentemente, sugerem a igualdade “ $64 = 65$?!” Quando o professor escolher o momento mais adequado, pode-se apresentar a resposta dada pela mesma equipe que elaborou o vídeo anterior. A explicação pode ser encontrada em <https://www.youtube.com/watch?v=RUDpC7A-QTM>, acessado em 21/OUT/2014. Se houver possibilidade, será ótimo o professor utilizar argumentos semelhantes àqueles relativos ao experimento do “chocolate infinito”. Uma balança de precisão, nesse caso, poderia mostrar aos alunos que essa experiência difere um pouco da anterior, já que o “peso” (massa) dos objetos utilizados não se modifica no processo (a massa do Quadrado em relação à soma das massas dos 4 polígonos resultantes).

Apenas como depoimento, foi tentada também, pelo professor organizador dessas tarefas, a construção de um modelo feito em aço inoxidável, mas que, apesar da intensa beleza do resultado final, no quesito precisão, esse tipo de escolha acabou se revelando um verdadeiro fracasso, pois a diferença teórica entre as áreas do retângulo e do quadrado envolvidos na experiência, 1 cm^2 , estava associado a um peso de 1,56 gramas de aço inoxidável, pois a densidade do material utilizado era de $15,6 \text{ Kg/m}^2$ (medida oficial fornecida pela indústria). Pelos padrões oficiais, um quadrado construído com 21 cm de lado teria 441 cm^2 de área e deveria ter 687,96 g ($441 \times 1,56$) de “peso”, mas o quadrado inteiro, recebido, tinha 707,92 g e o outro quadrado dividido em 4 polígonos possuía 698,91 g, uma assustadora diferença de, aproximadamente, 9g. A indústria contratada para executar o serviço não conseguiu atingir o nível de precisão necessária para executarmos a experiência de modo minimamente aceitável.

Na atividade de recorte do quadrado, o professor deve estar preparado para alguns eventos com grande possibilidade de ocorrência: alguns alunos talvez não consigam executar o recorte do quadrado de modo adequado, possibilitando observar o espaço vazio em torno de uma das diagonais do retângulo. Caso isso ocorra, o professor pode solicitar a colaboração de outros alunos para ajudar o colega em dificuldade. Também, outra solução seria ter alguns quadrados já recortados, antecipadamente, para que possam ser utilizados em momentos como esse e para que todos possam ter a experiência visual mais adequada em prol do bom prosseguimento das atividades. Os alunos são colocados diante de uma situação em que são confrontados o senso comum e a exiguidade da visão humana. Para que se possa dizimar esse conflito, somos convidados a enxergar o problema não apenas pela visão, que pode ser falha, mas pelo raciocínio lógico que nos capacita a enxergar o verdadeiro ambiente da Matemática: o mundo das idéias. Para isso, precisaremos de uma verdadeira mudança no quadro em que nos situamos, mas, o que seria uma “mudança de quadro”?

5.4 A proposta de Régine Douady – Mudança de Quadro

A mudança de quadro é um processo descrito na tese de doutorado da pesquisadora francesa Régine Douady, intitulada “Jogo de quadros e dialética ferramenta-objeto” que, segundo a autora, pode ajudar na construção de conhecimentos matemáticos. Essa teoria está mencionada em um artigo cujos autores são Vincenzo Bongiovanni e Ana Paula Jahn [9], onde são descritas “as fases para a construção de um conceito”, em um total de 6. Em uma atividade proposta nesse trabalho, os autores fazem uma associação dessas fases com o problema abordado no artigo. Destacaremos aqui as duas primeiras fases mencionadas:

- Fase 1: Inicialmente, o problema apresentado deve mobilizar conhecimentos **antigos** dos alunos. Mas, tais conhecimentos se mostram **insuficientes** para resolver completamente o problema. Em outras palavras, os alunos devem usar conceitos e ferramentas explícitas (já conhecidas) para resolver parte do problema.
- Fase 2: O problema necessita de um novo conceito para ser resolvido. O novo conceito é a ferramenta adequada para resolver o problema. Uma mudança de quadro nessa fase desempenha um papel importante no desenvolvimento da dialética e pode favorecer a ampliação dos conhecimentos antigos dos alunos para produzir o conceito novo.

A mudança de quadros proposta por Régine Douady visa fazer evoluir as concepções do aluno em Matemática o que, nessa experiência, possibilitaria ao estudante um favorecimento à observação de regularidades e padrões geométricos. Além desse quesito, outro aspecto pedagogicamente benéfico é descrito por Bongiovanni [6] ao relatar a interpretação desse conceito por Marie Jeanne Perrin-Gorian durante a Jornada em homenagem a Régine Douady, realizada em Paris em Junho de 2001, quando ela “usa o termo mudança de quadros como meio de resolver problemas e de produzir conhecimentos novos”. Em nossa trajetória de atividades, produziremos conhecimentos novos e aprofundaremos conceitos já conhecidos, com o

objetivo de expandir a visão do aluno para além do que os sentidos humanos podem conceber, para além do que nossas máquinas podem calcular.

Outro aspecto importante, também mencionado por Bongiovanni [6], é que “uma mudança de quadro pode ser **necessária** ou pode apenas **facilitar** a resolução de um problema”, pois, em nosso caso, temos a necessidade de buscar o que há de verdade em um lugar que muitos vêem apenas “uma faixa” e, quanto à generalização que pretendemos promover, a mudança de quadro torna-se necessária para facilitar a compreensão do maravilhoso mundo matemático que se esconde por detrás daquilo que nossos olhos não podem ver.

O conceito moldado pela pesquisadora homenageada na Jornada Parisiense, também foi tema da palestra proferida por Aline Robert, quando ela esclarece que “o mérito de Régine Douady foi de transportar para os alunos, alguns elementos deste procedimento dos matemáticos que pode ajudar na aprendizagem” [6]. Com a expectativa de estarmos ajudando na promoção dessa “aprendizagem” é que, a partir de agora, abordaremos a nossa questão sob do quadro da Geometria Analítica.

5.5 O quadro da Geometria Analítica

Tomemos, em ordem crescente, os 5 números que apareceram na execução do recorte do quadrado: 2, 3, 5, 8 e 13. Representemos o quadrado e o retângulo da experiência em planos cartesianos diferentes, de modo que um dos vértices, de cada um dos quadriláteros, repouse sobre a origem do plano de Descartes e que dois de seus lados pertençam aos eixos cartesianos, como mostra a figura a seguir:

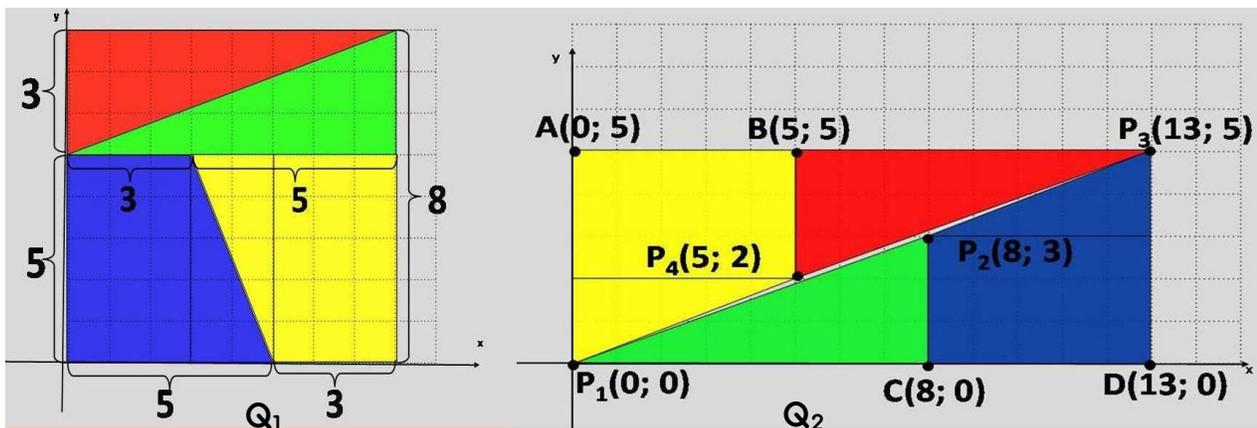


Figura 5.08: Mudança de quadro da mágica “64 = 65?!”, princípio e fim da experiência

Obs.: Os desenhos acima não obedecem, necessariamente, às proporções reais.

Como estamos diante de um problema que envolve a exiguidade da visão humana, necessitamos de ferramentas matemáticas que nos possam garantir a legitimidade dos quadros representados acima. Assim, faz-se necessário realizar algumas demonstrações para eliminarmos toda e qualquer suspeita de embuste.

I - Em Q_1 , os triângulos vermelho e verde são congruentes

Demonstração: Basicamente vamos usar o teorema que diz que a diagonal de um retângulo divide esse quadrilátero em dois triângulos congruentes. Em Q_1 , ambos os triângulos são retângulos, pois são obtidos a partir de um retângulo (o menor). Tanto o triângulo vermelho quanto o verde possuem um lado de medida 3 e outro de medida 8 (lados opostos de um retângulo). Então, pelo caso **LAL** de congruência de triângulos, podemos concluir que os triângulos em questão são congruentes. Também poderíamos usar o caso **LLL** se levássemos em conta que a diagonal do retângulo é o lado comum dos dois triângulos;

II - Em Q_2 , os triângulos vermelho e verde são congruentes

Demonstração: Temos um caso equivalente ao item anterior. O triângulo vermelho e o triângulo verde são retângulos e possuem dois catetos de medidas 3 e 8. Então, pelo

mesmo caso de congruência anterior (**LAL**), podemos concluir que ambos os triângulos são congruentes.

III - Os triângulos vermelhos de ambos os quadros, Q_1 e Q_2 , são congruentes

Demonstração: Os triângulos vermelhos dos dois quadros são congruentes pelo caso LAL, pois possuem dois catetos de medida 3 e 8.

Obs. 1: Os três itens anteriores garantem a congruência dos 4 triângulos da figura.

IV - Em Q_1 , ambos os trapézios são retângulos

Demonstração: ambos os trapézios são retângulos, pois são obtidos a partir de um retângulo. Tanto o trapézio azul quanto o amarelo possuem 2 ângulos retos e 2 ângulos, dois a dois congruentes, pois são alternos internos. Ambos os trapézios possuem um lado de medida 3, dois lados de medida 5 e um lado comum. Dessa forma, podemos concluir que, em Q_1 , os trapézios obtidos no corte do retângulo maior são congruentes.

V - Em Q_2 , os trapézios azul e amarelo são congruentes

Demonstração: podemos concluir que os dois trapézios são congruentes por um processo semelhante ao anterior, ambos possuem 2 ângulos retos, um lado medindo 3 e outros dois lados medindo 5. As ressalvas, nesse caso, é que não há lado comum nem ângulos “alternos internos”, mas podemos assegurar que o quarto lado de ambos são congruentes, pois eles representam uma hipotenusa de um pequeno triângulo retângulo (demarcados em Q_2) cujos catetos medem 2 e 5; o terceiro ângulo de congruência são os ângulos agudos dos trapézios que são os mesmos ângulos desse pequeno triângulo. O quarto ângulo que falta para completar a congruência pode ser comprovado pela propriedade de ângulos consecutivos, situados em bases diferentes, que são o suplemento do 3º ângulo mencionado anteriormente.

VI - Os trapézios amarelos de ambos os quadros são congruentes

Demonstração: Eles são congruentes, pois ambos possuem 2 ângulos retos, um ângulo agudo idêntico ao de um triângulo retângulo de catetos 2 e 5 e, ainda, um outro ângulo

obtuso cuja medida é a soma do ângulo reto mais a medida do outro ângulo agudo do triângulo retângulo já mencionado. Quanto aos lados, cada um deles possui um lado de medida 3, dois lados de medida 5 e o quarto lado cuja medida é equivalente à hipotenusa do triângulo mencionado anteriormente.

Obs. 2: Os três itens anteriores garantem a congruência dos 4 trapézios da figura.

Já podemos ter a certeza de que, sem o fantasma de qualquer tipo de truque, os polígonos de mesma cor situados em quadros diferentes, representados acima, são absolutamente congruentes. No quadro Q_2 podemos observar um pequeno espaço não colorido demarcado pelos vértices $P_1P_2P_3P_4$. Analisemos:

Análise I

1. Os vértices $P_1(0; 0)$; $P_2(8; 3)$; $P_3(13; 5)$ e $P_4(5; 2)$ são vértices de um QUADRILÁTERO.

2. Uma das possíveis definições de Paralelogramo é: “PARALELOGRAMO é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois”.

3. Considerando m_{12} o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 , m_{34} o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P_3 e P_4 , m_{23} o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P_2 e P_3 e m_{14} o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P_1 e P_4 , teremos:

$$m_{12} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{3-0}{8-0} = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad m_{34} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{5-2}{13-5} = \frac{3}{8} \quad \text{logo, } m_{12} = m_{34}$$

$$m_{14} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{2-0}{5-0} = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad m_{23} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{5-3}{13-8} = \frac{2}{5} \quad \text{logo, } m_{14} = m_{23}$$

Figura 5.09: Cálculo dos coeficientes angulares das retas P_1P_2 , P_3P_4 , P_1P_4 , e P_2P_3

Assim, podemos concluir que o QUADRILÁTERO $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Agora, vamos realizar a “Análise II” para calcular a área do paralelogramo que se situa nas proximidades de uma das diagonais do retângulo.

Análise II

Se os vértices do PARALELOGRAMO $P_1P_2P_3P_4$ são $P_1(0; 0)$; $P_2(8; 3)$; $P_3(13; 5)$ e $P_4(5; 2)$, podemos utilizar a regra de SARRUS para o cálculo de sua área.

Calculando a área do triângulo T_{143} :

| | | | | | |
|----|---|---|----|---|----|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 5 | 2 | 1 | 5 | 2 | |
| 13 | 5 | 1 | 13 | 5 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |

$D = +25 - 26$

$D = -1 (*)$

$A = |D|/2$

$A_{143} = 1/2$

Realizando os mesmos procedimentos com relação ao triângulo T_{123} , teremos que $A_{123} = 1/2$. Logo, a área do PARALELOGRAMO $P_1P_2P_3P_4$ é $A_{143} + A_{123} = 1$.

Assim, levando-se em conta os resultados obtidos nos itens I e II, podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO** de área igual a 1.

(*) Observar que a área do paralelogramo poderia ter sido obtida já nesse momento pelo P_1 cálculo $A = |D|$, ou seja, $A = |-1| = 1$.

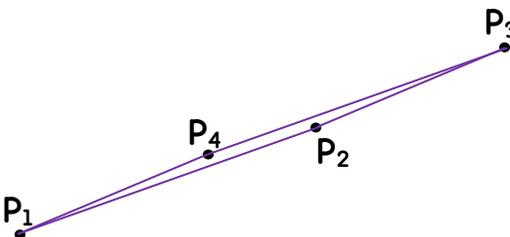


Figura 5.10: O paralelogramo $P_1P_2P_3P_4$ do experimento “64 = 65?!”

Após a demonstração anterior, o professor pode aventar a possibilidade de existirem outros quadrados que possam ser transformados em retângulos de modo semelhante. O próximo passo pode ser dado com o auxílio da professora (ou professor) de Artes promovendo a interdisciplinaridade e possibilitando a produção de um trabalho mais agradável aos olhos, pois esses especialistas dominam técnicas artísticas que normalmente não fazem parte do “metiê” de um professor de Matemática.

6. Proposta de Atividade:

A Arte e a Regularidade

6.1 A interdisciplinaridade Matemática-Arte

O professor de Matemática poderá obter melhores resultados, no decorrer das atividades, se puder contar com a colaboração de diversos colegas de trabalho na escola. Um papel fundamental poderá ser exercido pelo professor de Artes, caso se decida por uma colaboração recíproca em benefício de todos os alunos.

Nessa atividade, o professor deverá providenciar alguns materiais como cartolinas de diversas cores, tesoura, cola e outros que possam aprimorar essa experiência envolvendo matemática e Arte. O trabalho de colagem envolverá tanto o quadrado de lado 8 como também

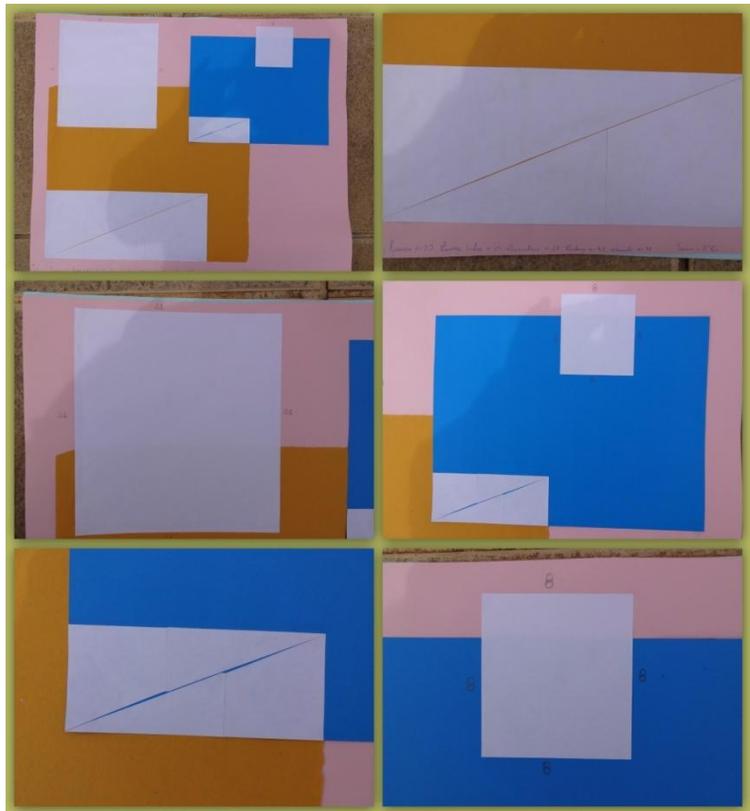


Figura 6.01: O experimento “64 = 65?!” usando cartolina

um novo quadrado de lado 21. O objetivo será o de provocar uma reflexão nos alunos quando a uma extensão da atividade do capítulo anterior. Espera-se que o aluno perceba que há um espaço vazio na composição do retângulo que é montado a partir da decomposição do quadrado de lado 21. O professor deve pedir para que o aluno compare a área do quadrado (21^2) com a área do retângulo (13×34). A obtenção da igualdade “ $441 = 442$ ” pode provocar discussões salutares que o professor pode conduzir a seu gosto.

No caso representado pelas fotos acima, foi realizada uma avaliação conjunta valendo tanto para Matemática bem como para Artes. Fica a critério do professor, conforme as circunstâncias permitirem, de proceder dessa maneira ou avaliar essa atividade apenas em Matemática segundo critérios previamente colocados aos alunos.

6.2 Uma extensão da regra de Sarrus

Em uma das apostilas de Matemática, fornecidas a alunos e professores das escolas públicas do Estado de São Paulo, no volume 1 do 2º ano do Ensino Médio, versão do aluno (pág 106), é apresentada uma extensão da regra de Sarrus que oferece a possibilidade de calcular a área de polígonos sem a necessidade de realizar a decomposição do polígono em triângulos. No nosso caso, esse método facilita a realização dos cálculos com números grandes, pois o aluno nunca necessita efetuar uma multiplicação com mais de dois fatores, ele também propicia um ambiente visual mais adequado para perceber regularidades.

Para efetuar o cálculo da área de um polígono de n lados, primeiramente dispor os “ n ” pares ordenados (x_i, y_i) que representam seus vértices, tomados um após um contornando-o em qualquer sentido, horário ou anti-horário. O primeiro par ordenado pode ser qualquer um deles e é representado por (x_1, y_1) , o segundo por (x_2, y_2) e, assim por diante, até o último que é representado por (x_n, y_n) . As coordenadas dos vértices

devem ser dispostas em coluna, partindo do primeiro e seguindo em sequência na volta toda. Quando escrever o último par ordenado, deve-se ainda escrever logo abaixo as coordenadas do primeiro par ordenado utilizado, como se estivéssemos realizando um processo de “fechamento” do polígono.

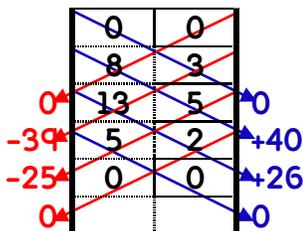
O método de realização dos cálculos é bem semelhante à regra de Sarrus, como sugere a figura abaixo, são efetuadas multiplicações entre os números que pertencem à mesma seta, conservando-se o sinal do produto quanto às multiplicações efetuadas do lado direito e invertendo o sinal nas multiplicações realizadas pelo lado esquerdo, da mesma maneira com se faz pelo método de Sarrus. Em seguida, deve-se somar os resultados obtidos e, para se obter a área do polígono, basta tomar a metade desse resultado, em módulo. Obs.: quando se tomar os vértices no **sentido horário**, o resultado da soma será **negativo**, conseqüentemente, no sentido **anti-horário** o resultado será **positivo**.

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \right| \text{ ou } A = \frac{1}{2}$$

Figura 6.02: Extensão da regra de Sarrus, apostila de Matemática SEE-SP, 2º ano, pág 106

Apenas como exemplo, se efetuássemos o cálculo da área do PARALELOGRAMO, da “Análise II” do capítulo anterior, teríamos:

$$P_1(0; 0); P_2(8; 3); P_3(13; 5) \text{ e } P_4(5; 2)$$



$$D = +40 - 39 + 26 - 25$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$A = D/2$$

$$A = 2/2, \text{ então } A = 1.$$

6.3 O precioso auxílio da FOLHA QUADRICULADA

6.3.1 A busca dos vértices dos quadriláteros

Nessa próxima atividade, utilizaremos folhas quadriculadas visando descobrir os pares ordenados associados aos vértices da decomposição do quadrado de lado 21, partindo do nosso já conhecido quadrado de lado 8, que aqui será abordado novamente como forma de auxílio na nova tarefa.

Cada quadradinho da folha quadriculada representada na figura 6.03 possui 0,5 cm de lado. Pode-se utilizar também, talvez até de modo mais adequado, uma folha quadriculada cujos quadradinhos tenham 1 cm de lado. Em outra folha, desenha-se um quadrado de lado 8 cm e, após seu recorte e pintura, cola-se na folha principal. O mesmo procedimento deverá ser feito para a colagem dos polígonos obtidos na decomposição do quadrado de lado 8 cm

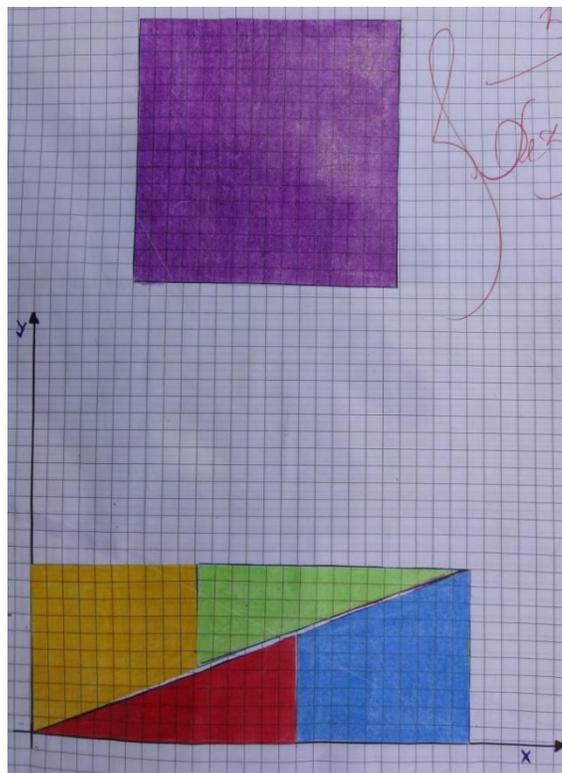


Figura 6.03: O experimento “64 = 65?!” usando folha quadriculada

(ainda em branco) para posterior pintura (preferencialmente uma cor para cada polígono) e colagem em um plano cartesiano da folha principal, como mostra a figura.

O próximo passo é executar ações semelhantes a essa, agora com o quadrado de lado 21. O professor pode fornecer as medidas dos polígonos a serem recortados.

Ao fazer a montagem do retângulo, conforme a figura abaixo, é natural que se obtenham algumas imperfeições na colagem que irão dificultar a estimativa da verdadeira posição dos vértices em cada um dos polígonos representados no plano cartesiano da folha principal. Cabe ao professor auxiliar os alunos até o limite onde considere o mais educativo e profícuo.

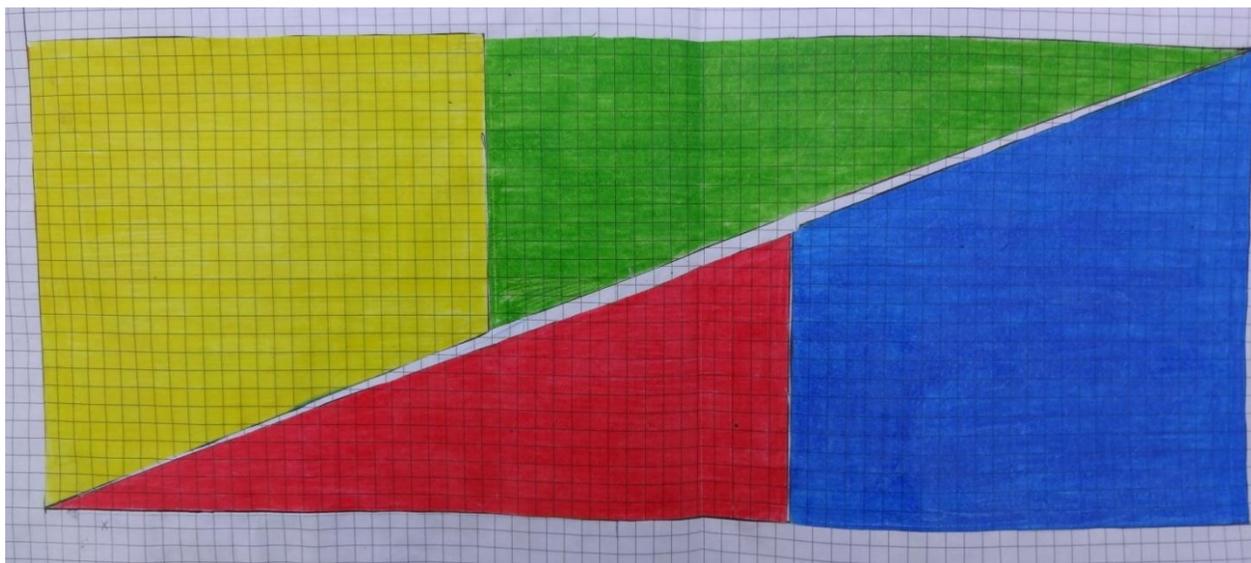


Figura 6.04: O retângulo 13 x 34 (cm) obtido do quadrado de lado 21 cm usando folha quadriculada

Após a finalização e avaliação dessa atividade, o professor pode discutir os resultados obtidos pelos alunos até se obter uma conclusão quanto aos reais pares ordenados associados à última construção, relativa ao retângulo. Após a conclusão desse estudo, os alunos já estarão preparados para a próxima etapa que não envolverá colagem, mas apenas a construção de polígonos em um plano cartesiano com o uso de lápis, borracha, canetas e régua.

6.3.2 O modelo gráfico no papel quadriculado

Nessa parte da atividade, serão executados procedimentos semelhantes ao anterior, primeiramente com relação ao quadrado de lado 8 e depois com relação ao quadrado de lado 21. A substancial diferença estará justamente no modo como os polígonos serão colocados no plano cartesiano principal, através da construção por meio de lápis, borracha e régua, conforme os dados obtidos no item anterior. Caso o aluno tenha desenhado de forma adequada, não haverá dificuldade de enxergar esse espaço. Cabe ao professor colaborar com os alunos na construção dessas figuras.

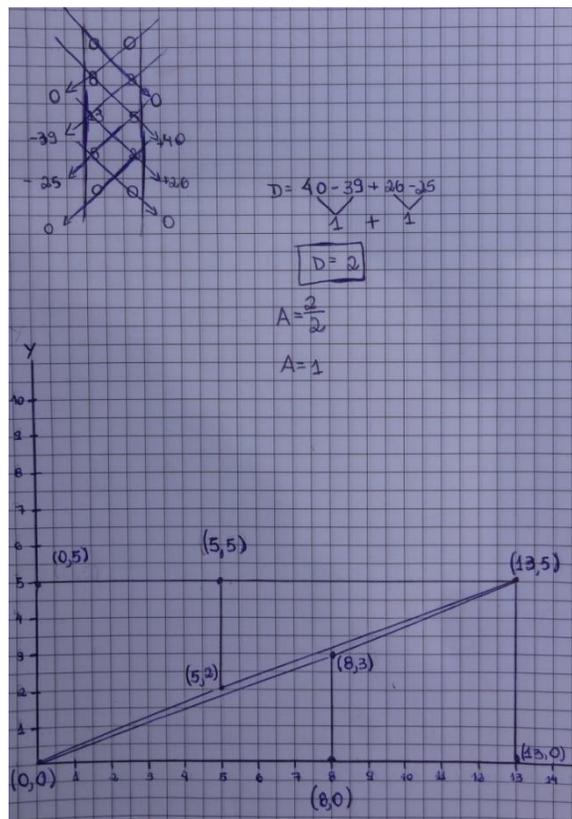


Figura 6.05: Cálculo da área no 1º quadrado

Outra diferença importante será o cálculo da área dos quadriláteros que se encontram nas proximidades de uma das diagonais dos polígonos. O método de cálculo da área será aquele já mencionado na seção 6.2. A seguir, uma sequência de fotos para ilustrar o desenvolvimento dessa atividade.

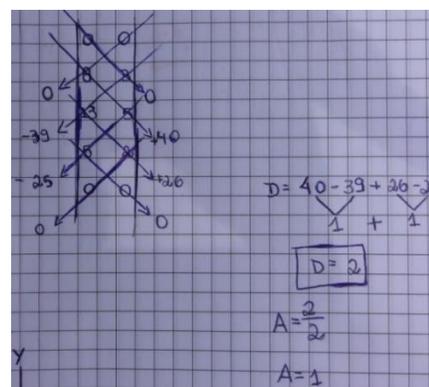
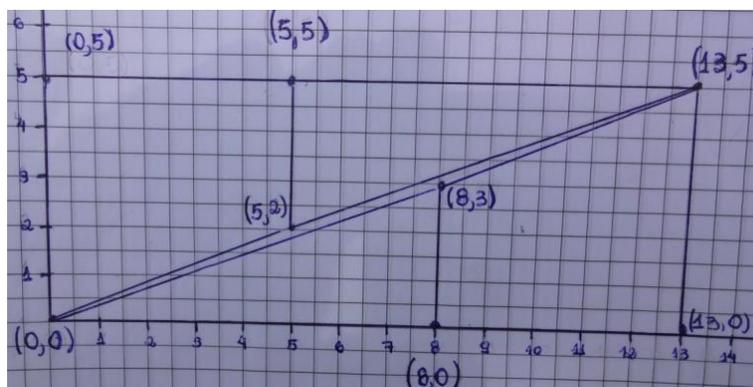


Figura 6.06: Ampliação da figura 6.5. O paralelogramo de Q_1 e o cálculo de sua área

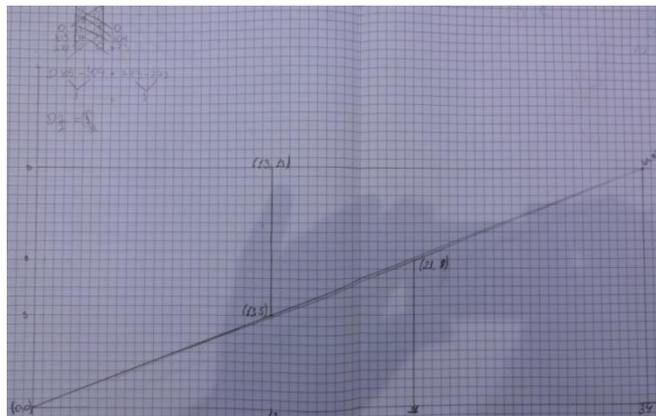
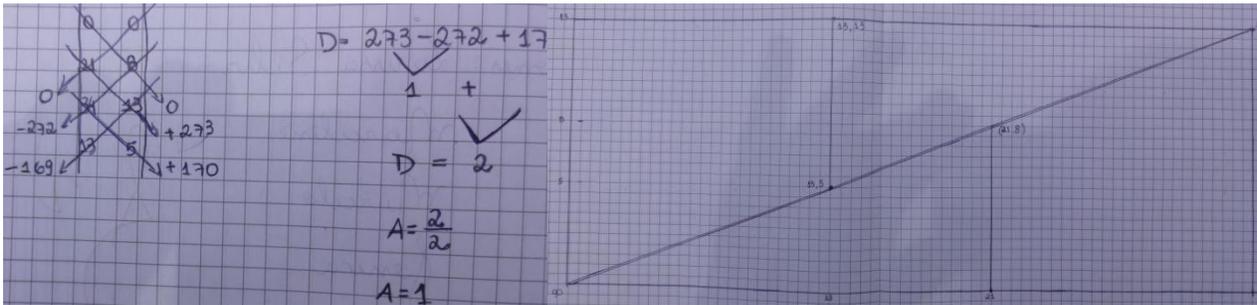
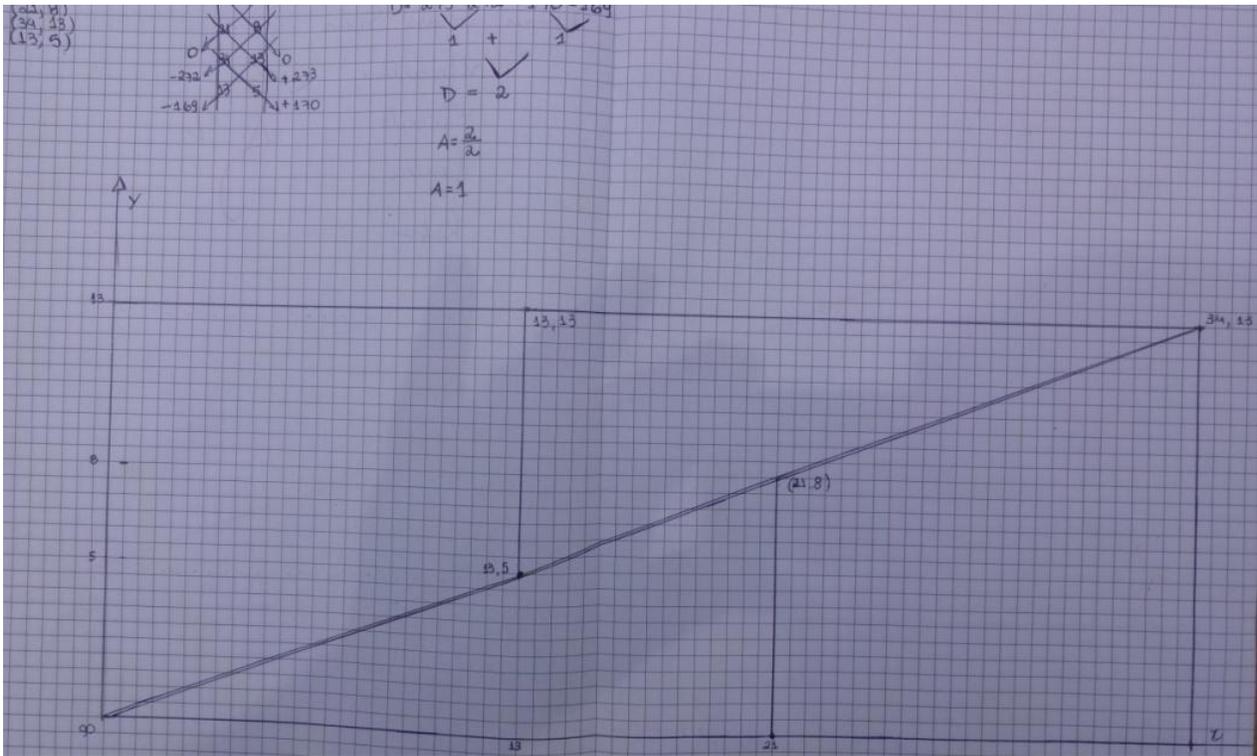


Figura 6.07: Atividade Q₂: O paralelogramo do retângulo 13x34 (cm) de e o cálculo de sua área

6.4 Esbarrando nos limites da perfeição humana

Nessa última atividade que envolve colagem, precisaremos utilizar os materiais mais adequados visando a precisão nos cortes dos polígonos envolvidos. As fotos retratadas nessa seção mostram as folhas dos polígonos já recortadas, pois, esse trabalho foi realizado em uma gráfica, especializada em corte a laser. Mesmo assim, pode-se verificar que a precisão dos cortes obtidos macularam, em parte, a execução da construção, não permitindo que ela pudesse ser realizada em toda sua plenitude.

Obs.: Os desenhos abaixo não obedecem às proporções reais.

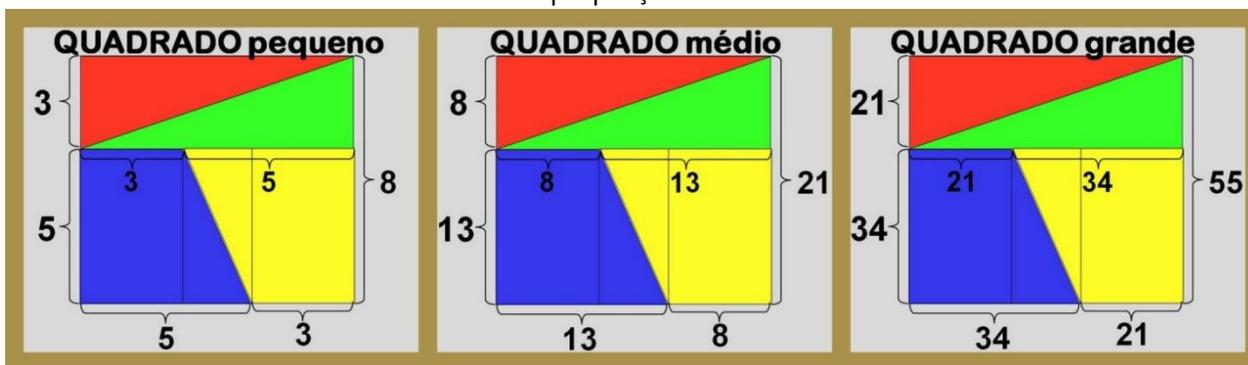


Figura 6.08: Recorte dos quadrados Q_1 , Q_2 e Q_3 , todos juntos para comparação das medidas

Para a produção dos polígonos envolvidos, partiu-se de um quadrado cujos lados mediam 55 cm, também produzido pela gráfica. Fez-se uma comparação entre os cortes efetuados até agora, incluindo o quadrado de 55 cm de lado, para se ter um visão ampla do que está sendo feito.

Para o bom transcorrer do planejamento dessa aula, há necessidade não só de providenciar uma gama maior de materiais, bem como uma sala adequada para serem realizadas as atividades. Esse ambiente deve possuir mesas grandes, pois as dimensões dos materiais que serão utilizados são também avantajadas e requerem um amplo espaço para o desenvolvimento do trabalho. Deve-se ter em mente que a desconstrução do quadrado utilizado vai gerar em sua reconstrução um retângulo cujas dimensões, em centímetros, são 34×89 .

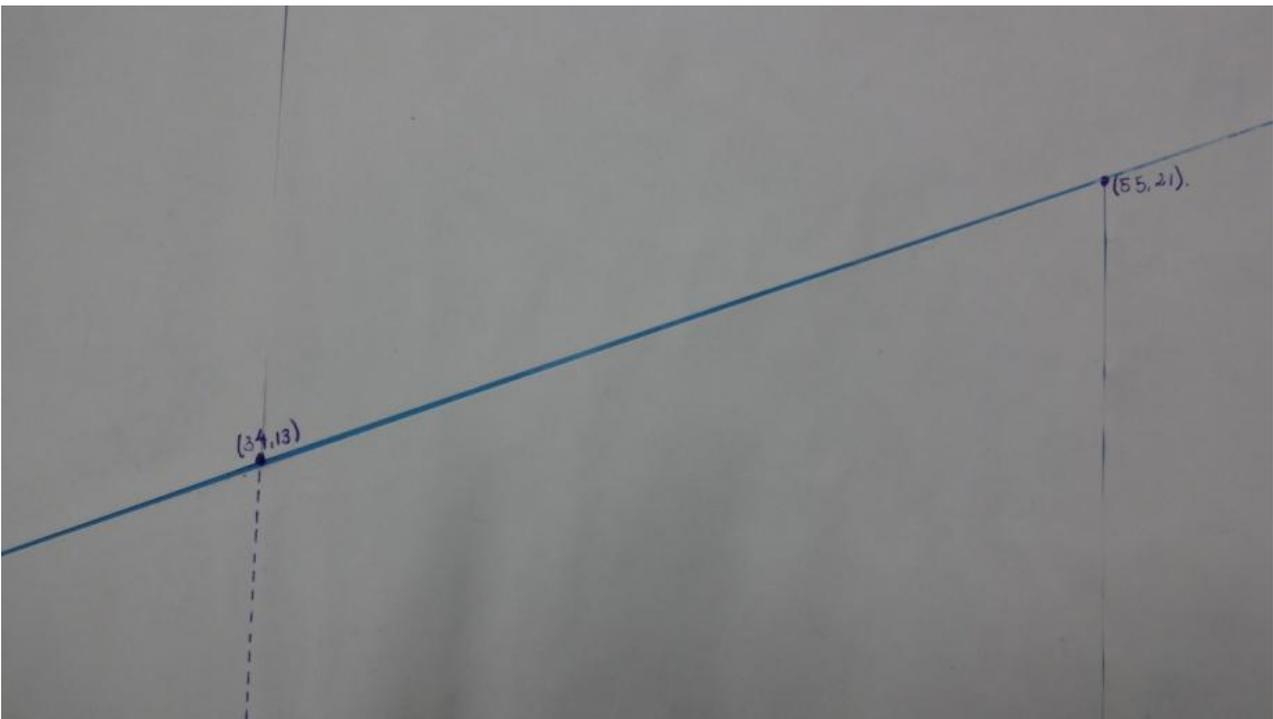
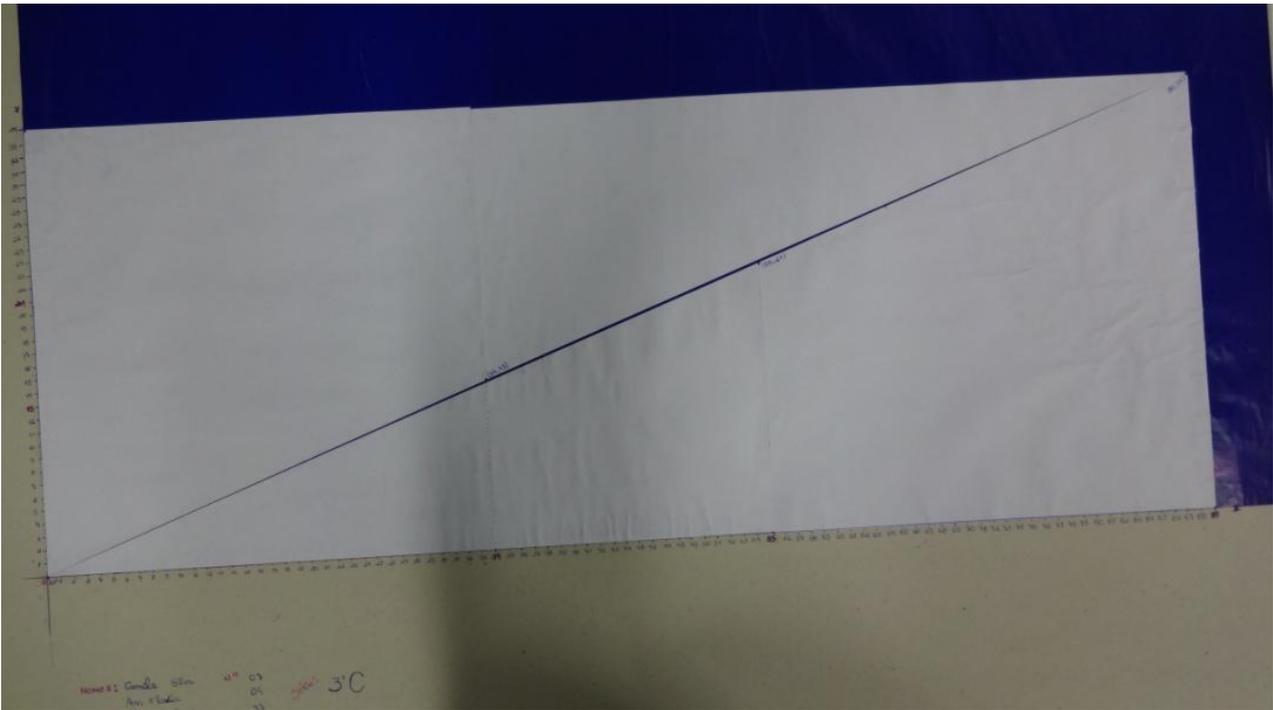


Figura 6.09: Atividade Q₃: Colagem do retângulo (centro) 34 × 89 (cm) em uma cartolina “Paraná”

Os materiais que devem ser encomendados são: 1 tubo de cola grande, cartolina do tipo “PARANÁ” (é a única no mercado que comporta o retângulo mencionado), cartolinas com cores vibrantes, régua grandes (até 1m, se possível) e, naturalmente, os polígonos já mencionados anteriormente. Quanto à quantidade, tudo vai depender do como o professor vai querer proceder, trabalho individual ou em grupo. Nossa experiência indica que em grupos, de 3 a 5 pessoas, o trabalho pode ser bem desenvolvido e tornar a atividade pedagogicamente proveitosa.



Figura 6.10: Atividade Q₃: Registro da aplicação da experiência em uma escola pública de Atibaia

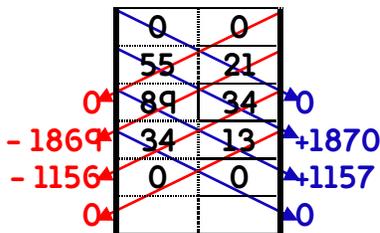
Pelo que podemos verificar através das fotos anteriores, percebe-se que o trabalho de utilizar esses tipos de materiais para executar uma atividade que necessita de tamanha exatidão, torna o labor ingrato e de difícil realização. O aluno pode perceber que há um quadrilátero colorido, no interior do retângulo, que possui dimensões diminutas e o professor deve solicitar a seus alunos o devido cálculo da área desse polígono, que está desenvolvido logo a seguir.

Área do QUADRADO: $55^2 = 3025$

Área do RETÂNGULO: $34 \times 89 = 3026$

Calculando a área do quadrilátero representado na folha de fundo azul:

$$P_1(0; 0); P_2(55; 21); P_3(89; 34) \text{ e } P_4(34; 13)$$



$$D = +1870 - 1869 + 1157 - 1156 = 1 + 1 = 2$$

$$A = D/2 \Rightarrow A = 2/2, \text{ então, } A = 1.$$

Diante dessa situação em que a colagem de polígonos em uma cartolina já beira o seu limite viável, o professor pode lançar mão de mais uma tentativa para esclarecer a visão sobre esse “quadrilátero” quase invisível: um “geoplano” sem pregos.

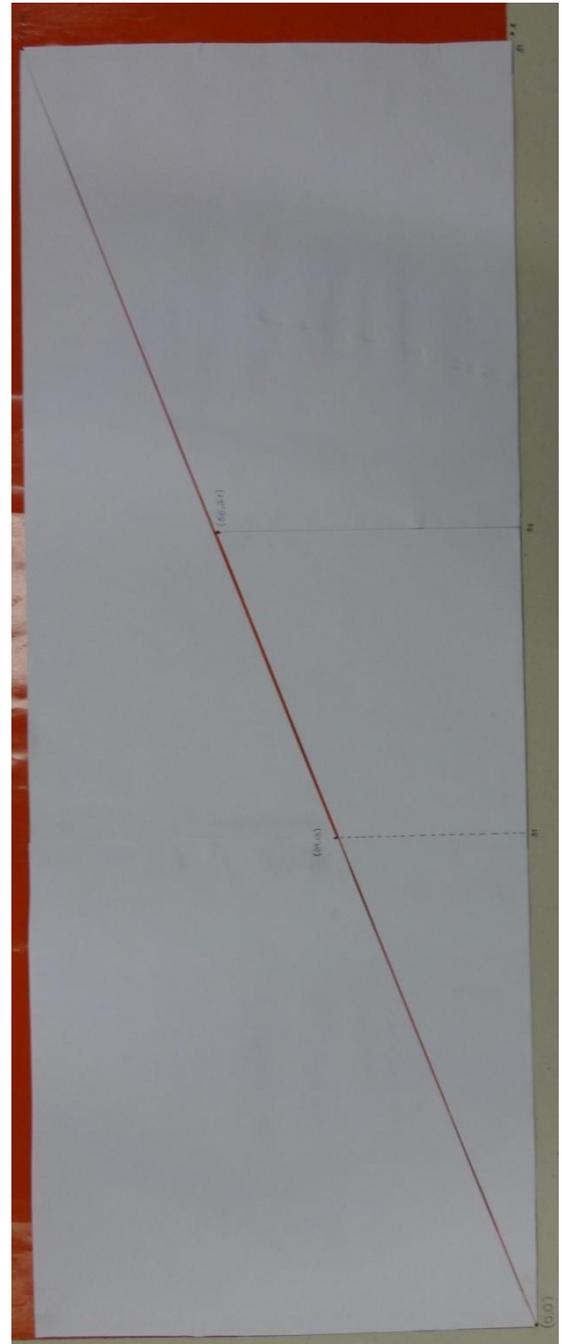


Figura 6.11: Q₃, Foto do retângulo completo

6.5 O “GEOPLANO” sem pregos

O geoplano é um recurso didático utilizado por professores como um objeto auxiliar no ensino de figuras e formas geométricas planas. A forma mais comum é uma placa de madeira, geralmente quadrada, constituída de pinos ou pregos dispostos em uma malha quadriculada, mantendo-se uma regularidade na distância, vertical e horizontal, dos elementos que a compõem. Os alunos são capazes de desenhar polígonos diversos e vão, pouco a pouco, se acostumando com a nomenclatura utilizada na Matemática para nomear seus objetos geométricos.

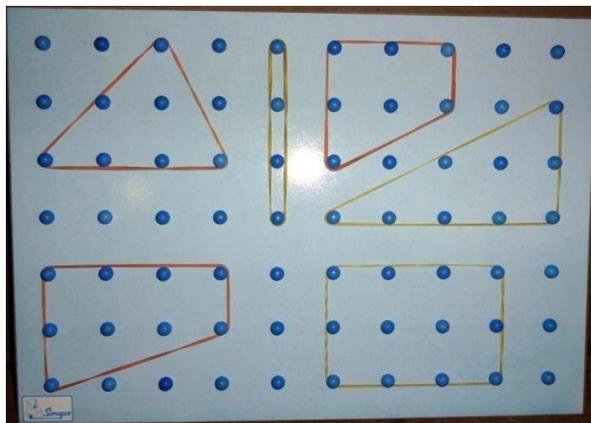


Figura 6.12: Exemplo de GEOPLANO

Nessa última atividade manual, utilizamos um objeto com idéias semelhantes à do GEOPLANO, mas totalmente desprovida de pregos. No mercado, essa madeira toda cheia de furinhos é conhecida como “placa (ou chapa) de fibras Eucatex” e é normalmente utilizada na construção de móveis ou como organizador vertical de objetos em uma parede. É possível encontrá-la até com

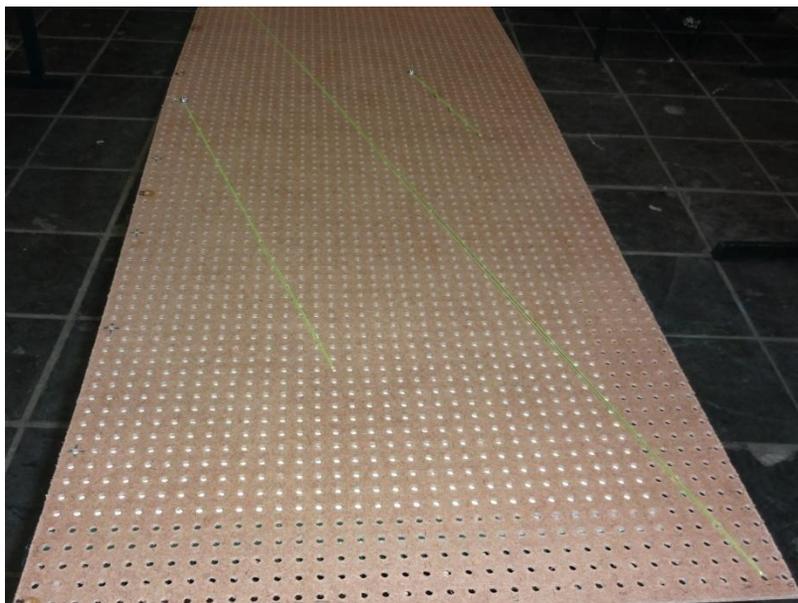


Figura 6.13: Placa de fibras Eucatex

1,22 m de largura com 2,75 m de comprimento e seus furos são distribuídos de maneira uniforme o que, sob um olhar matemático, podemos associar a um plano cartesiano.

Essa placa será utilizada para simularmos três planos cartesianos onde serão reconstruídos, polígono por polígono, os quadriláteros e os triângulos que se obtêm na decomposição dos três primeiros quadrados utilizados nas nossas experiências até agora. Utilizaremos linha de pesca colorida, parafuso, ruela, porca e uma chave de fenda para manipular os três últimos elementos. Os alunos, nesse momento, já terão plenas condições



Figura 6.14: Montagem na placa Eucatex

de executar essa tarefa com mais autonomia, pois eles já têm conhecimento das coordenadas dos vértices dos polígonos que participam dessa construção.

Primeiramente preenche-se o plano cartesiano por números que servirão de orientação aos estudantes sobre quais pontos serão utilizados; no caso da experiência mostrada nas fotos a seguir, foram colocados nos eixos apenas os números que aparecem nos pares

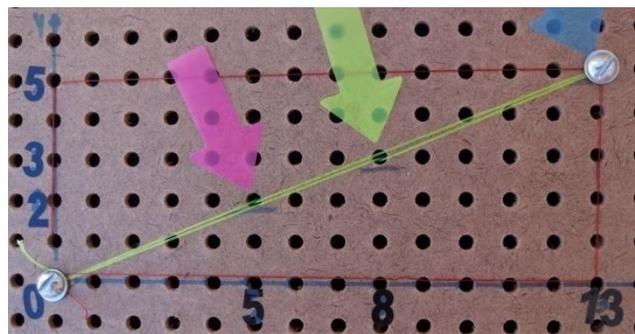


Figura 6.15: Retângulo do Q1 na placa

ordenados a serem trabalhados. É aconselhável fazer primeiro os quadriláteros relativos às diagonais dos retângulos envolvidos e só depois, se houver necessidade, procurar se preocupar com a construção dos retângulos que são o resultado das reconstruções.

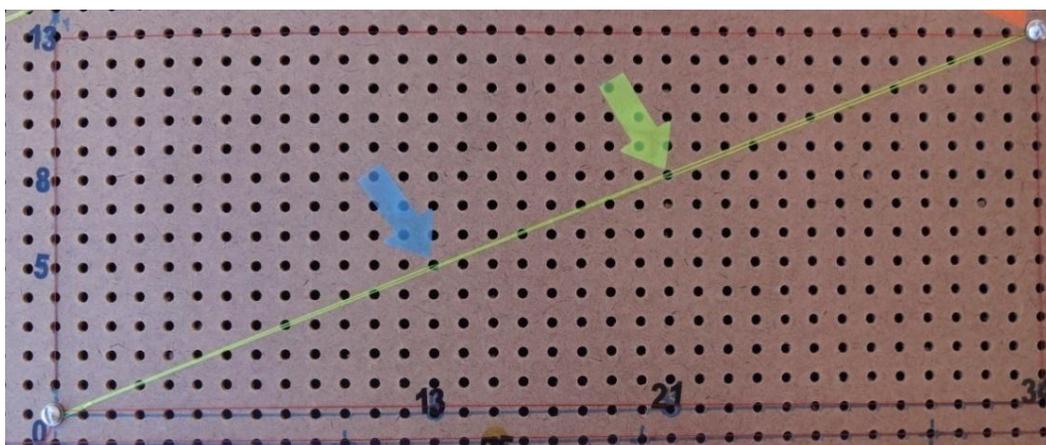


Figura 6.16: Retângulo do Q2 na placa



Figura 6.17: Retângulo do Q3 na placa

Pelo que se pode analisar através das fotos dessa atividade, a precisão necessária para que possamos observar mais detalhadamente o que acontece nos lados do quadrilátero construído com linhas amarelas fica um pouco afetada. Há dois lados de cada quadrilátero montado, que estão muito próximos, dificultando a plena observação visual. Por isso, introduziremos alguns conceitos, aprofundaremos outros, utilizaremos novas ferramentas para que possamos emitir um julgamento mais perto da realidade com relação aos objetos matemáticos que por hora trabalhamos.

7. A sequência de Fibonacci

7.1 A descoberta de uma sequência

Depois de tantas experiências sob diversos modelos, chega-se a um ponto em que nos deparamos com uma regularidade enorme quanto aos números utilizados até aqui em nossas experiências. Muitos aparecem repetidamente quando um novo quadrado deve ser recortado e também tomamos conhecimento de outros novos números na atividade. Utilizaremos a seguinte nomenclatura: **Q1** será o 1º quadrado recortado nas nossas atividades, **Q2** será o 2º e **Q3** será o 3º; os pontos de P_1 a P_4 representam as coordenadas dos vértices do QUADRILÁTERO obtido no interior do retângulo construído. Observemos:

$$\mathbf{Q1} \rightarrow 8^2 + 1 = 5 \times 13 \rightarrow P_1(0; 0); P_2(8; 3); P_3(13; 5) \text{ e } P_4(5; 2)$$

$$\mathbf{Q2} \rightarrow 21^2 + 1 = 13 \times 34 \rightarrow P_1(0; 0); P_2(21; 8); P_3(34; 13) \text{ e } P_4(13; 5)$$

$$\mathbf{Q3} \rightarrow 55^2 + 1 = 34 \times 89 \rightarrow P_1(0; 0); P_2(55; 21); P_3(89; 34) \text{ e } P_4(34; 13)$$

Se eliminarmos o número "0", que aparece durante toda a experiência, e abandonarmos as repetições, conseguiremos obter a seguinte lista: 8; 3; 13; 5; 2; 21; 34; 55; 89. Ao colocarmos em ordem crescente, obtemos a sequência:

2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89

Nesse momento, devemos alertar nossos alunos dizendo que ela é importante na Matemática e que possui uma REGULARIDADE de modo a relacionar seus elementos através de uma operação Matemática. Desafiemos nossos alunos a descobrir qual seria o próximo número da sequência logo após o número 89. Devemos dar tempo para que

eles possam ter a oportunidade de encontrar a operação adequada. Podemos dar dicas quanto ao próximo número e pedir a continuação da sequência.

É importante, logo após o compartilhamento do resultado, que o professor estabeleça a relação inversa, ou seja, se 89 faz parte da sequência porque $34 + 55 = 89$, o número 34 também faz parte, pois $89 - 55 = 34$. Dar outros exemplos até perceber que o aluno está preparado para responder:

Qual seria o número antes do 2?! E antes desse, qual número seria??!

Após esse momento, o professor deve mencionar o problema que deu origem a essa sequência, o problema dos coelhos (<https://www.youtube.com/watch?v=dkXnWgHvadw>, visto em 27 de Janeiro de 2015) e falar um pouco sobre a história do matemático que empresta seu nome a esses números: FIBONACCI.

Na matemática, os Números de Fibonacci são uma sequência definida recursivamente, ou seja, ela parte de 2 termos iniciais específicos e os demais termos da sequência são definidos a partir de um número fixo deles. A sucessão de Fibonacci pode ser definida assim:

Para todo n natural, temos:

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1; \\ 1, & \text{se } n = 2; \\ F(n - 1) + F(n - 2) & \text{para outros casos} \end{cases}$$

Figura 7.01: Definição da Sequência de Fibonacci

Na prática, você começa com 1 e 1 e então produz o próximo número de Fibonacci somando os dois anteriores, repetindo o mesmo processo sucessivamente para obter os seguintes. Os primeiros Números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946...

Para representar um número dessa sequência utilizamos a letra “F”, de Fibonacci, e a expressamos assim: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$ e assim por diante. Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, um matemático italiano que viveu no século 12 d.C., também conhecido como Fibonacci, para descrever o crescimento de uma população de coelhos no período de um ano.

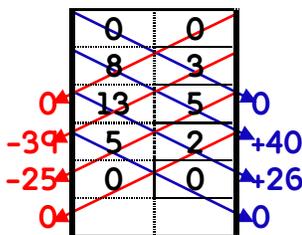
No próximo capítulo, a sequência de Fibonacci será utilizada para ajudar os estudantes a conjecturar sobre a existência de outros quadrados que possam ser desmembrados em retângulos que mantenham as características anteriores.

7.2 A sequência de FIBONACCI e a regularidade no cálculo da área do quadrilátero “invisível”

Já tendo conhecimento dos pares ordenados correspondentes aos quadriláteros Q1, Q2 e Q3, pode-se calcular a área de cada um deles:

$$Q1 \rightarrow 8^2 + 1 = 5 \times 13 \rightarrow F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$$

$$P_1(0; 0); P_2(8; 3); P_3(13; 5) \text{ e } P_4(5; 2)$$



$$D = +40 - 39 + 26 - 25$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$A = D/2$$

$$A = 2/2, \text{ então } A = 1.$$

$$Q2 \rightarrow 21^2 + 1 = 13 \times 34 \rightarrow F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$$

$$P_1(0; 0); P_2(21; 8); P_3(34; 13) \text{ e } P_4(13; 5)$$

| | | | |
|------|----|----|------|
| | 0 | 0 | |
| | 21 | 8 | |
| 0 | 34 | 13 | 0 |
| -272 | 13 | 5 | +273 |
| -169 | 0 | 0 | +170 |
| 0 | | | 0 |

$$D = +273 - 272 + 170 - 169$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$A = D/2$$

$$A = 2/2, \text{ então } A = 1.$$

$$Q3 \rightarrow 55^2 + 1 = 34 \times 89 \rightarrow F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89$$

$$P_1(0; 0); P_2(55; 21); P_3(89; 34) \text{ e } P_4(34; 13)$$

| | | | |
|-------|----|----|-------|
| | 0 | 0 | |
| | 55 | 21 | |
| 0 | 89 | 34 | 0 |
| -1869 | 34 | 13 | +1870 |
| -1156 | 0 | 0 | +1157 |
| 0 | | | 0 |

$$D = +1870 - 1869 + 1157 - 1156$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$A = D/2$$

$$A = 2/2, \text{ então } A = 1.$$

Levando-se em conta os pares ordenados obtidos até agora, pode-se fazer uma associação dos números que fazem parte da sequência de Fibonacci e os elementos que compõem esses pontos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,...

$$Q1 \rightarrow 8^2 + 1 = 5 \times 13 \rightarrow F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$$

$$Q2 \rightarrow 21^2 + 1 = 13 \times 34 \rightarrow F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$$

$$Q3 \rightarrow 55^2 + 1 = 34 \times 89 \rightarrow F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89$$

Procuramos saber se os alunos são capazes de, com esses dados, deduzir que:

$$Q4 \rightarrow 144^2 + 1 = 89 \times 233 \rightarrow F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233$$

e, comparando-se os pares ordenados dos elementos anteriores:

$$Q1 \rightarrow P_1(0; 0); P_2(8; 3); P_3(13; 5) \text{ e } P_4(5; 2)$$

$$Q2 \rightarrow P_1(0; 0); P_2(21; 8); P_3(34; 13) \text{ e } P_4(13; 5)$$

$$Q3 \rightarrow P_1(0; 0); P_2(55; 21); P_3(89; 34) \text{ e } P_4(34; 13)$$

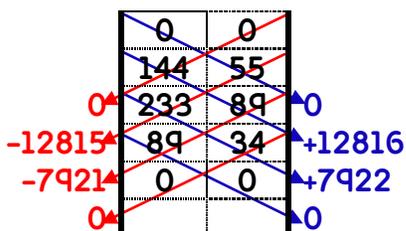
Nesse momento, tendo em vista a regularidade obtida até agora, podemos solicitar aos estudantes para deduzirem os pares ordenados associados a **Q4**, que seriam:

$$P_1(0; 0); P_2(144; 55); P_3(233; 89) \text{ e } P_4(89; 34)$$

Logo a seguir, calculando-se a área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, obteremos:

$$Q4 \rightarrow 144^2 + 1 = 89 \times 233 \rightarrow F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233$$

$$P_1(0; 0); P_2(144; 55); P_3(233; 89) \text{ e } P_4(89; 34)$$



$$D = +12816 - 12815 + 7922 - 7921$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

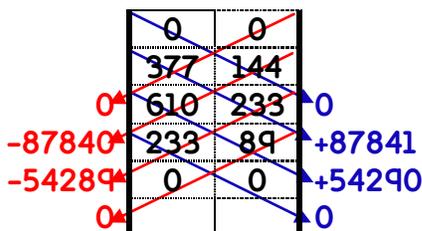
$$A = D/2$$

$$A = 2/2, \text{ então } A = 1.$$

Depois de esclarecido o exemplo anterior, conjectura-se novamente sobre quais seriam os pares ordenados, agora com relação ao quadrilátero **Q5**:

$$Q5 \rightarrow 377^2 + 1 = 233 \times 610 \rightarrow F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233, F_{14} = 377, F_{15} = 610$$

$$P_1(0; 0); P_2(377; 144); P_3(610; 233) \text{ e } P_4(233; 89)$$



$$D = +87841 - 87840 + 54290 - 54289$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$A = D/2$$

$$A = 2/2, \text{ então } A = 1.$$

O professor pode repetir esse processo até quando observar a compreensão da regularidade, por parte dos alunos nessa atividade. Em seguida pode-se partir para uma nova ferramenta capaz de representar esses e outros exemplos de nossa experiência através de um meio muito interessante: a Geometria Dinâmica.

7.3 GEOGEBRA, a visão pela geometria dinâmica

O Geogebra é um software gratuito multiplataforma, ou seja, pode ser utilizado em computadores com diversos sistemas operacionais. Seu ponto central é a Geometria Dinâmica que possibilita o movimento de seus objetos tornando as construções mais claras, eficientes e atraentes para o estudante. Ele foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem de Matemática para o uso em diversos níveis de ensino possibilitando, em um mesmo ambiente, o estudo de Geometria, Álgebra, Gráficos, Estatística, Tabelas, Probabilidade entre muitas opções. Ele pode ser baixado em http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/ (visto em 2/11/14) e, em sua última versão, possibilita até trabalhar com objetos em 3D.

Em nossa sequência de atividades o Geogebra vai desenvolver um papel muito importante, pois ele possibilitará uma visualização atraente das atividades realizadas até agora e viabilizará a construção de retângulos que, até o momento, apenas realizamos os cálculos que justificam a diferença unitária entre suas áreas e as áreas de seus quadrados originais. Os alunos são convidados a construir cada um dos retângulos trabalhados até aqui, como as figuras a seguir:

Retângulo 1

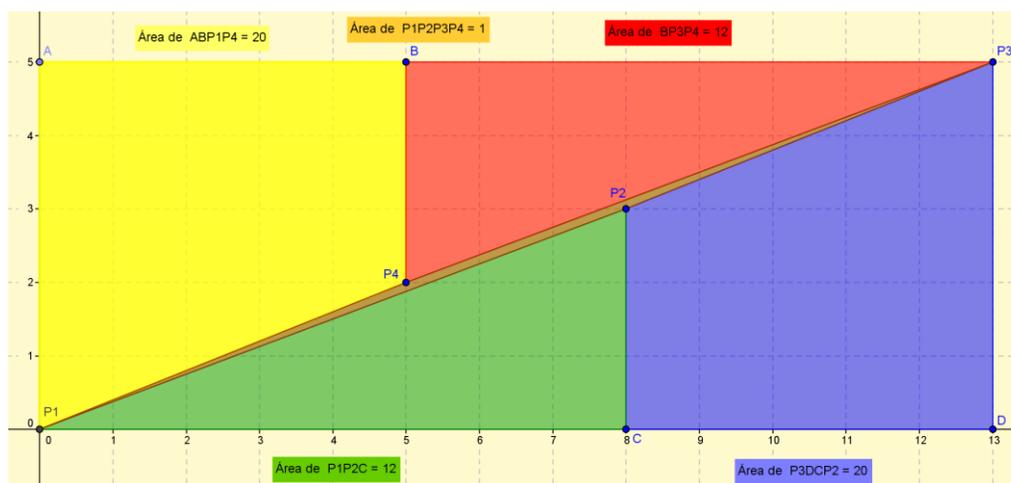


Figura 7.02: Construção, no Geogebra, do retângulo 1 da experiência

Retângulo 2

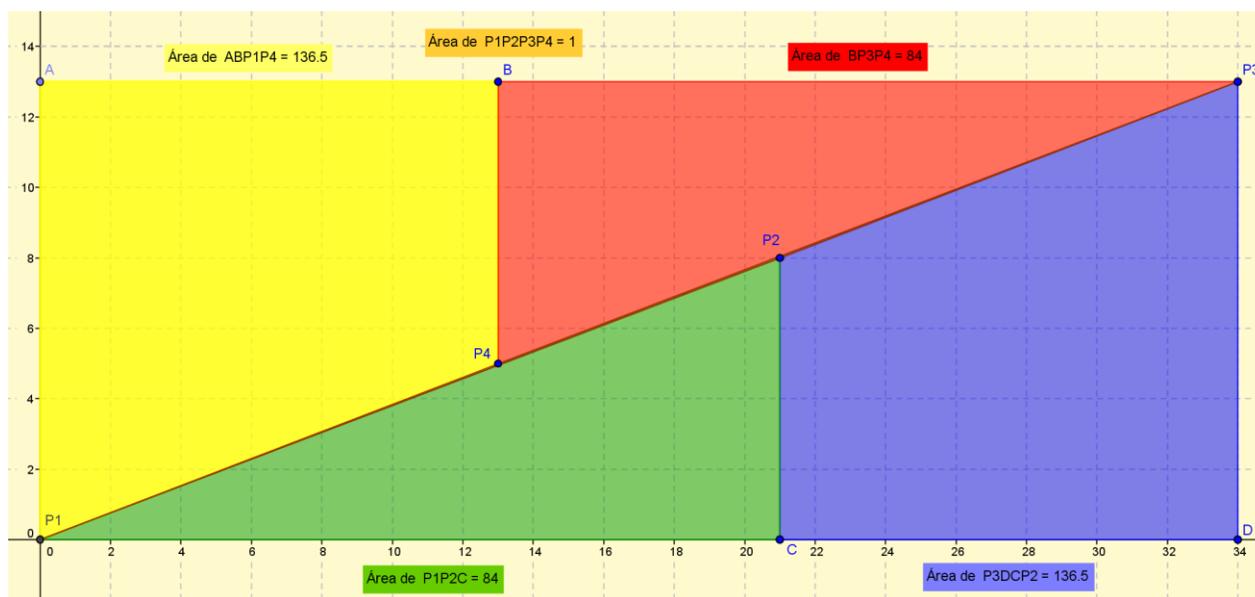


Figura 7.03: Construção, no Geogebra, do retângulo 2 da experiência

Retângulo 3

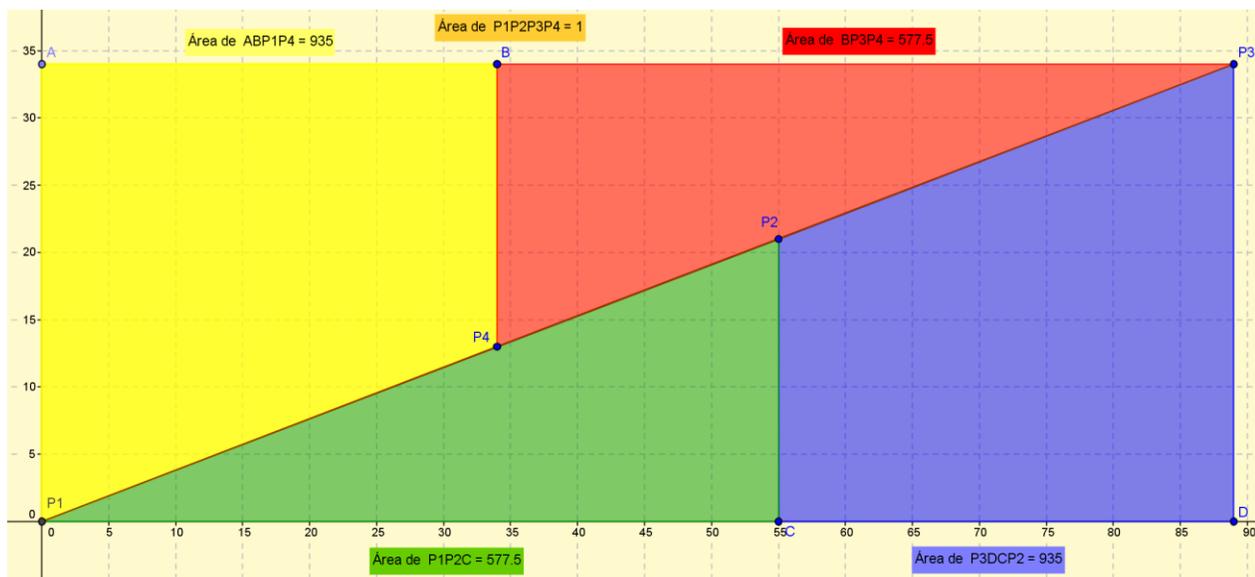


Figura 7.04: Construção, no Geogebra, do retângulo 3 da experiência

Retângulo 4

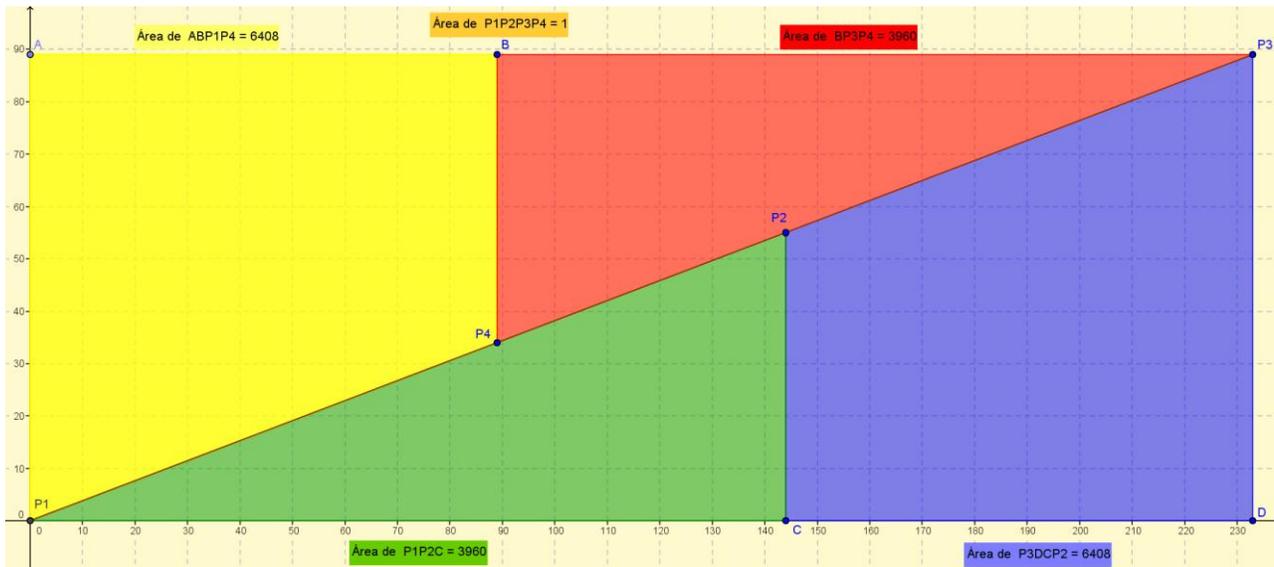


Figura 7.05: Construção, no Geogebra, do retângulo 4 da experiência

Retângulo 5



Figura 7.06: Construção, no Geogebra, do retângulo 5 da experiência

O processo de construção de outros retângulos pode ser executado, mas, nesse momento, podemos aplicar uma das possibilidades oferecidas por esse programa que pode ser muito útil para nossos objetivos. Repare que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ mal pode

ser visto em alguns dos retângulos anteriores. No entanto, o Geogebra permite que se faça ampliação da figura, por meio da barra de rolagem do mouse, até se chegar a uma dimensão que se deseja observar com mais precisão, possibilitando enxergarmos aquilo que, anteriormente, estava invisível para nós. A seguir, mostraremos uma sucessão de gravuras que, com algumas ampliações, atingimos a visualização do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$.

Q6 → $F_{13} = 233$, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1597$

$P_1(0; 0)$; $P_2(987; 377)$; $P_3(1597; 610)$ e $P_4(610; 233)$

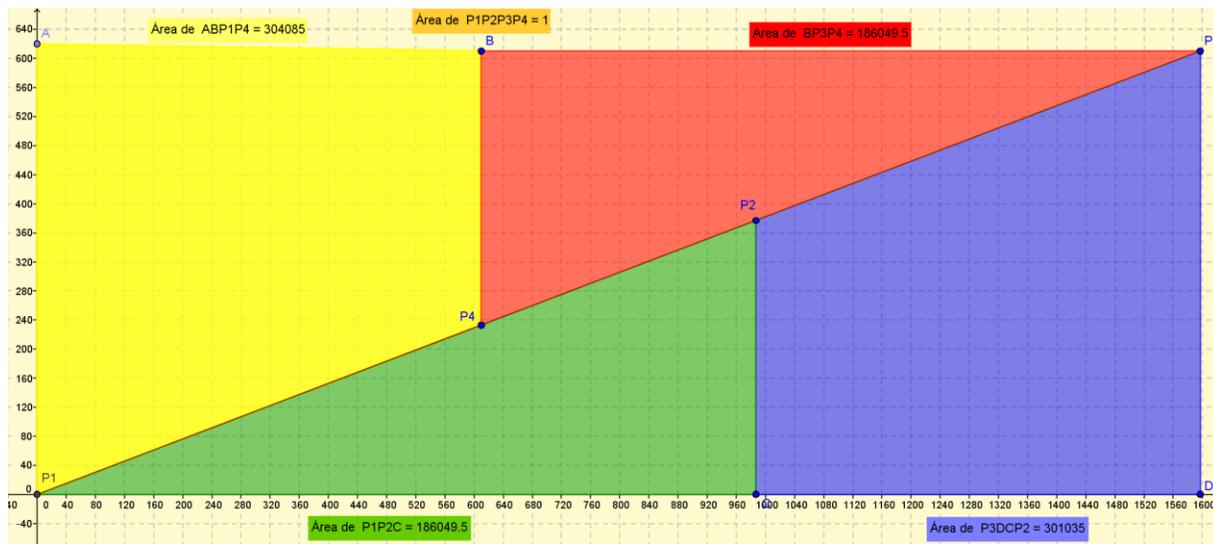


Figura 7.07: Construção, no Geogebra, do retângulo 6 da experiência

Para ampliar, basta utilizar a barra de rolagem do mouse.

1ª aproximação

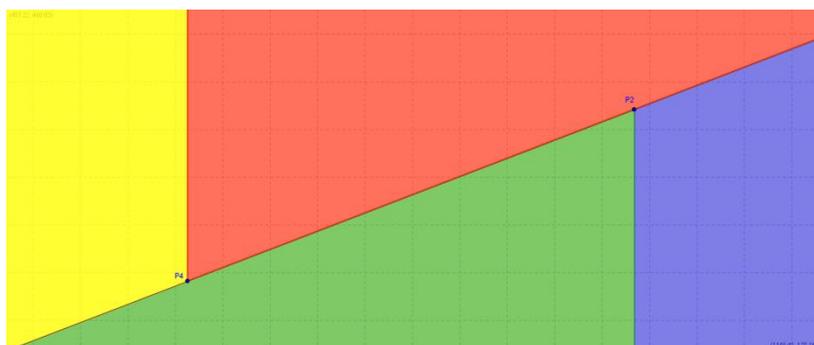


Figura 7.08: Primeira aproximação no centro retângulo 6 da experiência

2ª aproximação

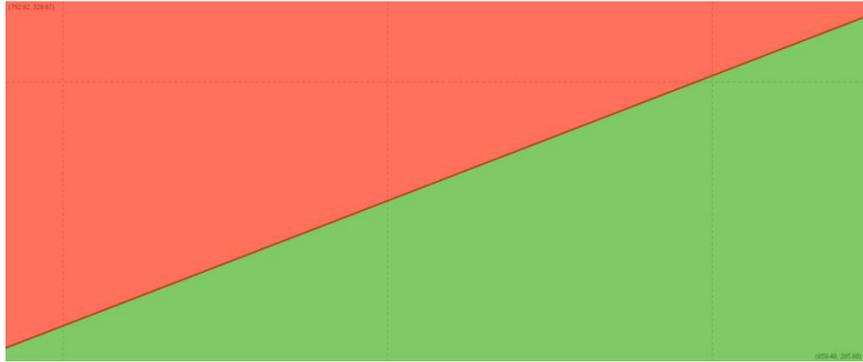


Figura 7.09: Segunda aproximação no centro retângulo 6 da experiência

3ª aproximação

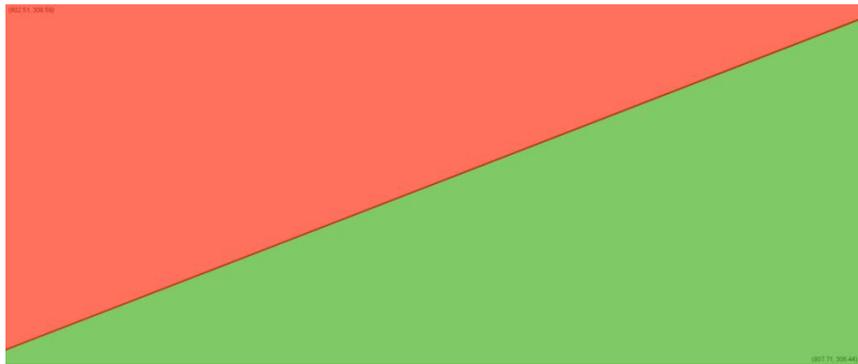


Figura 7.10: Terceira aproximação no centro retângulo 6 da experiência

4ª aproximação

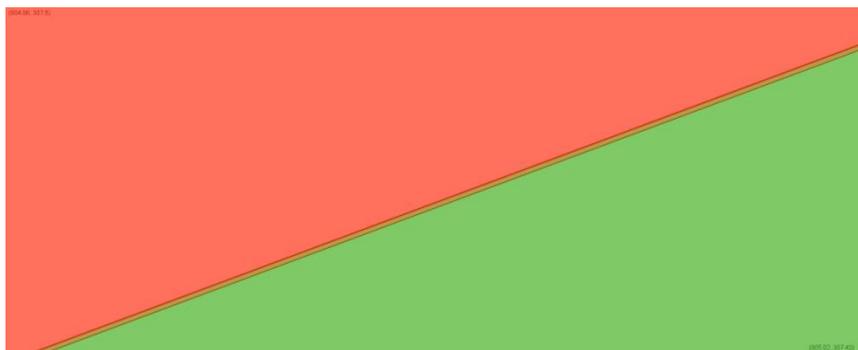


Figura 7.11: Quarta aproximação no centro retângulo 6 da experiência

5ª aproximação

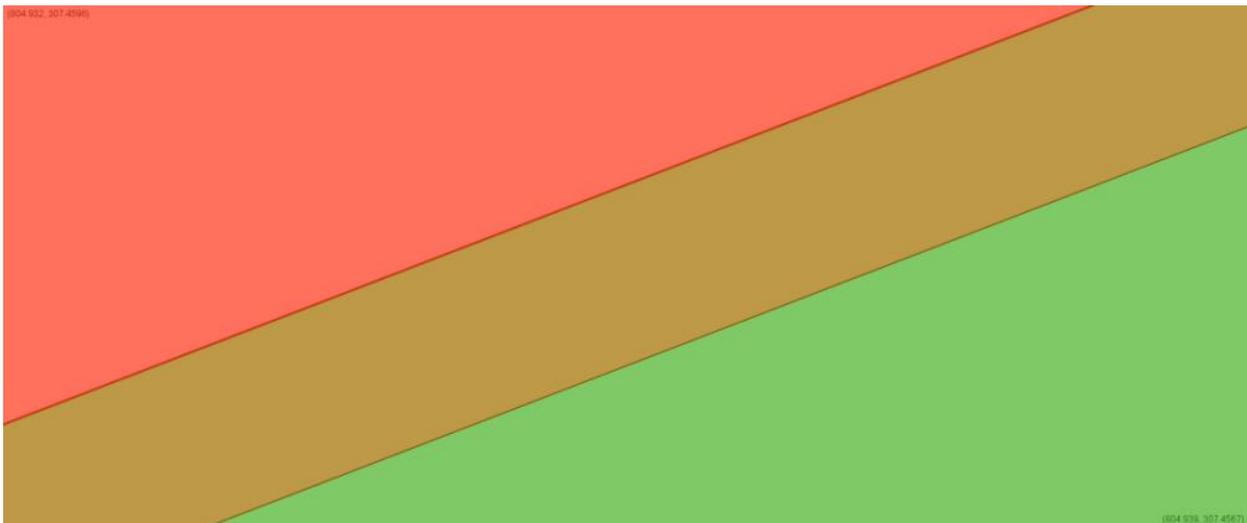


Figura 7.12: Quinta aproximação no centro retângulo 6 da experiência

Nesse ponto, já se torna evidente que o polígono $P_1P_2P_3P_4$ está presente nessa construção no Geogebra, o que nos faz conjecturar sobre a existência de outros quadrados que, ao serem repartidos e remontados sob forma de retângulos, apresentam a mesma diferença entre suas áreas como às realizadas até aqui. Ainda estudaremos sobre essa possibilidade, mas, antes disso, vamos estudar a natureza desses quadriláteros cujos vértices são representados pelos símbolos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . Para podermos atingir esse objetivo, primeiramente precisaremos analisar com mais profundidade as definições de objetos matemáticos bastante utilizados em nossas experiências até aqui: os quadriláteros notáveis.

Aproveitaremos esse instante para um esclarecimento. Devido à importância da definição dos quadriláteros notáveis em nosso trabalho, faremos um resumo da história dos personagens envolvidos nessa questão: Euclides, Legendre e Hadamard. Procuraremos oferecer subsídios para que o professor possa apresentar a História da Matemática de uma maneira cativante, não só para alunos disléxicos, como também para os demais. A História apresentada aqui será colocada de forma propositalmente

peçoal, realçando que o conhecimento é produzido por pessoas e não por estátuas de bronze, envolvendo questões que são atuais até mesmo nos dias de hoje como, por exemplo, a exclusão sofrida pelas mulheres na sociedade.

8. QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

8.1 O ato de definir

Nas atividades que realizamos até agora, precisamos utilizar alguns nomes que se referem a objetos matemáticos, alguns deles foram: Quadrilátero, Paralelogramo, Retângulo, Quadrado. Essa nomenclatura é utilizada visando esclarecer o que se passa nas experiências e a compreensão dessas atividades depende do como entendemos essas palavras. Isso acontece porque nem tudo na Matemática é tão absoluto quanto imagina o cidadão comum, pois existem ideias nessa ciência que só amadureceram através do tempo, no transcorrer da história.

Muita gente acha que, na Matemática, tudo já nasce pronto e mal podem supor que existem conceitos que foram concebidos há muito tempo e tiveram suas compreensões renovadas e que, mesmo assim, não invalidaram o modo de pensar de antigamente. Na Matemática, " $1 + 1$ " pode ser " 2 " ou pode ser até mesmo " 0 ", tudo depende em qual base trabalhamos. Na Geometria, seus elementos dependem de uma concepção específica para serem bem entendidos, pois até mesmo para a compreensão de um simples QUADRADO, em toda sua extensão, é necessário um enunciado que explique o significado desse termo, ou seja, aquilo que na Matemática nós chamamos de **definição**, a base em que se apoiam nossos conceitos.

No dicionário "Houaiss", "definir" pode significar "determinar, estabelecer com precisão" ou "explicar o sentido de"; no vocábulo "definição" encontramos "significação precisa de" em um de seus possíveis sentidos. Há de ser necessário estabelecer

definições, não só para o bom andamento de nossas atividades, mas também porque “as definições desempenham um papel essencial na atividade matemática”, propiciando um pleno esclarecimento quanto ao objeto do qual se fala. Agora, nós vamos estudar o que, ao longo da história, alguns dos grandes matemáticos “determinaram, estabeleceram com precisão”, “explicaram o sentido de” ou “deram a significação precisa de”: Quadriláteros Notáveis.

Obs.: Nos diagramas dos próximos itens adotaremos a seguinte nomenclatura:

D: Quadriláteros; P: Paralelogramo ; R: Retângulo; L: Losango; Q: Quadrado.

Na última parte dessa dissertação (Anexos) o professor vai encontrar uma síntese histórica envolvendo os matemáticos que mais se destacaram na construção do conceito de Quadriláteros Notáveis através dos tempos até os dias de hoje.

8.2 Os quadriláteros notáveis segundo EUCLIDES, LEGENDRE e HADAMARD

No livro “Os Elementos”, de Euclides, pode-se encontrar as definições envolvendo os quadriláteros. No livro I [20], na definição 19, Euclides define “Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto múltiláteras, as contidas por mais de quatro retas”. Logo depois, na definição 22, ele define alguns quadriláteros notáveis assim: “E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e rombóide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos

opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios”. Euclides utilizava o nome OBLONGO para o caso particular do que hoje chamamos de RETÂNGULO, também utilizava o vocábulo ROMBO (que também existe na língua portuguesa) para designar o que mais comumente chamamos de LOSANGO e ainda, Euclides utilizava a palavra ROMBÓIDE para um PARALELOGRAMO particular.

A seguir, como forma de facilitar a compreensão da relação entre essas definições, mostraremos uma representação por diagrama de Venn, do conjunto dos quadriláteros notáveis definidos por **EUCLIDES**.

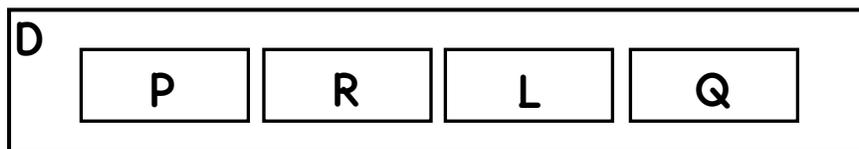


Figura 8.01: Concepção dos quadriláteros notáveis por Euclides

Pela definição de **EUCLIDES**,

- O quadrado é um Quadrilátero,
- O quadrado **não** é um tipo de Paralelogramo,
- O quadrado **não** é um tipo de Retângulo,
- O quadrado **não** é um tipo de losango.

Vejamos agora, uma outra definição de alguns dos quadriláteros notáveis realizada muito tempo depois da época de Euclides, pelo matemático francês Adrien-Marie LEGENDRE, em 1793.

Legendre foi importante quanto a seu excepcional talento em áreas superiores da Matemática [23] e seu trabalho foi devidamente reconhecido ao longo da história. Seus

principais trabalhos concentraram-se em teoria dos números, funções elípticas, o método dos mínimos quadrados e integrais [21]. Chegou a até mesmo a demonstrar a irracionalidade de π^2 [10]. Uma face importante de seu trabalho foi a publicação de “Éléments de Géométrie” em 1794, denominado “o ano do terror” [10]. “ele dedicou parte de seus esforços à promoção do estudo da Geometria Elementar, procurando facilitar a forma de ensiná-la aos jovens” [23]. Sua obra tinha como proposta aprimorar pedagogicamente “Os Elementos” de Euclides [20]. “Legendre escreveu que sua intenção era “fazer um livro muito rigoroso”, mas isso não o levou a exagerar no rigor às expensas da clareza.” [10]. O livro alcançou o sucesso e teve 20 edições durante a vida de seu autor [10] e, em uma de suas traduções para o inglês, alcançou 33 edições [21]. No Brasil, a obra de Legendre tornou-se base dos livros-texto utilizados em nossas escolas atualmente e deu início a 3 décadas de uma obsessiva luta de Legendre na tentativa de demonstrar, sem alcançar êxito, do 5º postulado de Euclides, “Legendre parece jamais ter admitido a possibilidade da existência de outras geometrias” [23], a não ser a Geometria Euclidiana. Nessa obra, entre muitas definições, Legendre define alguns polígonos, como retrata a figura a seguir

:

13. XIV. Le polygone de trois côtés est le plus simple de tous, il s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère*; celui de cinq, *pentagone*; celui de six, *hexagone*, etc.
14. XV. On appelle triangle *équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux, *fig. 7*; triangle *isoscele*, celui dont deux côtés seulement sont égaux, *fig. 8*; triangle *scalène*, celui qui a ses trois côtés inégaux, *fig. 9*.
- XVI. Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse* : ainsi ABC est un triangle rectangle en A, le côté BC est son hypoténuse, *fig. 10*.
- XVII. Parmi les quadrilatères on distingue :
- Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits, *fig. 11*. [Voyez la prop. 20, liv. 1.]
- Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les côtés égaux, *fig. 12*. [Voyez la même prop.]
- Le *parallélogramme* ou *rhombe*, qui a les côtés opposés parallèles, *fig. 13*.
- Le *losange*, dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits, *fig. 14*.
- Enfin le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles, *fig. 15*.

Figura 8.02: Quadriláteros notáveis, por Legendre, em “Éléments de Géométrie” [32]

Em [8], Vincenzo Bongiiovanni diz: “Legendre, que preconizava uma geometria mais rigorosa e menos intuitiva, caracterizava os quadriláteros notáveis da seguinte maneira”: O quadrado tem seus lados iguais e seus ângulos retos (fig. 11); o retângulo tem ângulos retos sem ter os lados iguais (fig. 12); o losango tem os lados iguais sem que os ângulos sejam retos (fig. 14); o paralelogramo tem os lados opostos paralelos (fig. 13). Sobre fig. 15, ver [7].

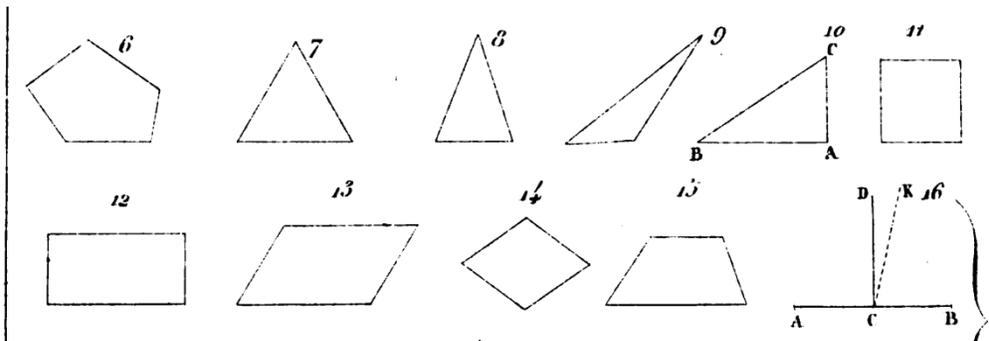


Figura 8.03: Representação dos polígonos, por Legendre, em de “Éléments de Géométrie” [32]

Com essa estrutura de definições, permite que tanto quadrados, retângulos bem como losangos sejam classificados como paralelogramos. À seguir, uma representação por diagrama de Venn, do conjunto dos quadriláteros notáveis definidos por **LEGENBRE**.

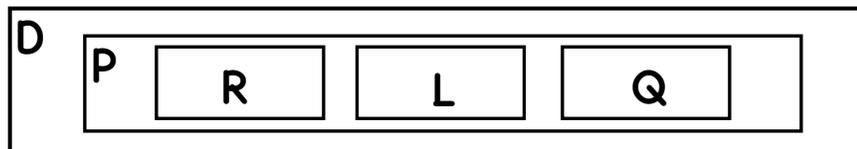


Figura 8.04: Concepção dos quadriláteros notáveis por Legendre

Pela definição de **LEGENBRE**,

- O quadrado é um Quadrilátero,
- O quadrado é um tipo de Paralelogramo,
- O quadrado **não** é um tipo de Retângulo,
- O quadrado **não** é um tipo de Losango.

Agora, veremos outra definição dos quadriláteros notáveis realizada por um matemático, também francês, Jacques Solomon **HADAMARD**, em 1898.

Hadamard sempre demonstrou interesse em pedagogia e escreveu muitos artigos sobre conceitos em Matemática Elementar, que eram utilizados em suas aulas. Em 1898 ele publicou o livro “*Leçons de Géométrie Élémentaire*” que passou a ter uma grande influência no ensino de Matemática na França (<http://www-history.mcs.st->

and.ac.uk/Biographies/Hadamard.html visto em 26/NOV/2014). Nessa obra, ele define os quadriláteros notáveis levando-se em conta uma hierarquia de propriedades. Dessa maneira, em relação à proposta de LEGENGRE, o **Quadrado** passou a ser um caso particular de **Losango** e **Retângulo**. BONGIOVANNI [8] traduz, do original, essas definições e destaca suas consequências:

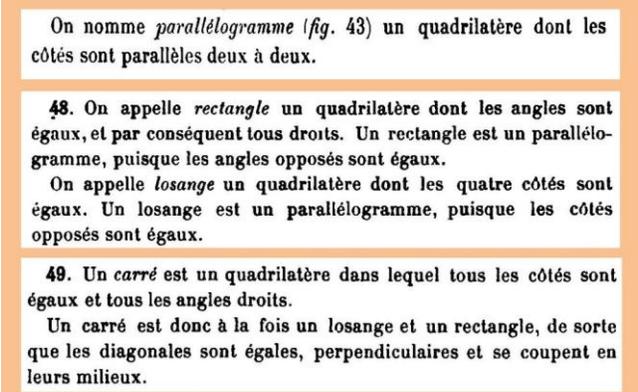


Figura 8.05: Leçons de Géométrie Élémentaire, de Hadamard – 2ª edição [24]

“...em 1898, Hadamard caracteriza os quadriláteros notáveis de uma maneira mais ampla:

Quadrado é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.

Retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, conseqüentemente, retos.

Losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.

Paralelogramo é o quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois.

Nessas novas definições, as restrições impostas aos retângulos e aos losangos foram eliminadas: agora todo quadrado pode ser considerado losango e retângulo.”

A seguir, uma representação por diagrama de Venn, do conjunto dos quadriláteros notáveis definidos por **HADAMARD**.

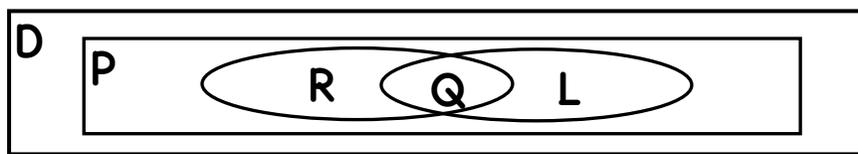


Figura 8.06: Concepção dos quadriláteros notáveis por Hadamard

Pela definição de **HADAMARD**,

- O quadrado é um Quadrilátero,
- O quadrado é um tipo de Paralelogramo,
- O quadrado é um tipo de Retângulo,
- O quadrado é um tipo de Losango.

8.3 As vantagens da concepção de HADAMARD

BONGIOVANNI [8] salienta que “...as concepções dos nossos alunos relativas às definições dos quadriláteros notáveis, nas séries iniciais, assemelham-se muito às de Euclides e Legendre...” e também destaca a dificuldade que os alunos possuem em aceitar que um único nome seja atribuído a objetos matemáticos representados de formas diferentes, por exemplo, quando os professores dizem que o Quadrado é um tipo de Retângulo.

O tipo de classificação do conceito de quadriláteros notáveis idealizado por Hadamard é denominado “classificação hierárquica”, segundo a concepção de Michael de Villiers [19]. Em seu artigo, Villiers define: “Por classificação hierárquica entende-se a classificação de um conjunto de conceitos de tal forma que os mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais”. Esse tipo de organização de conceitos é semelhante à utilizada na classificação de números reais, como mostra a figura abaixo:

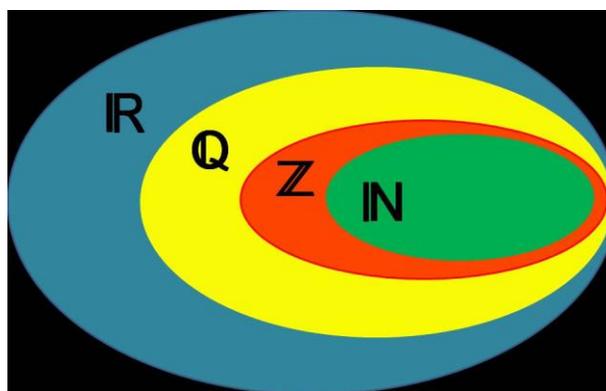


Figura 8.07: Exemplo de classificação hierárquica

Na leitura do diagrama acima, a interpretação de “os mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais” teria como consequência que todo número Natural é Inteiro, todo número Inteiro é Racional e, encerrando, todo número Racional é Real.

Na concepção de organização dos quadriláteros de Hadamard, apesar da hierarquia não ocorrer de forma absoluta, envolvendo todos os elementos abordados, há

uma hierarquia em que o caso mais particular é o QUADRADO, que é um caso específico de LOSANGO e RETÂNGULO; o RETÂNGULO e o LOSANGO são casos particulares de um PARALELOGRAMO que, por sua vez, é um QUADRILÁTERO.

Existe uma dificuldade inicial dos alunos (que por sinal é muito natural) em aceitar o tipo de organização dos quadriláteros concebida por Hadamard, preferindo a representação de Euclides, denominada “classificação por partição”, que é uma classificação em que “...os vários subconjuntos de conceitos são disjuntos uns dos outros”. Não há nada que desabone a escolha pela classificação por partição, já que “...uma definição (e classificação) por partição não é matematicamente “errada” simplesmente por ser por partição (desde que contenha, claro, informação suficiente para assegurar que todos os não exemplos são excluídos)” [19]. Villiers salienta que, muitas vezes, a decisão entre classificar por partição ou hierarquicamente é uma questão pessoal e de conveniência e ele procura esclarecer o ponto central de seu artigo quanto à escolha, em geral, por parte dos professores de Matemática. Mas, “Por que é que convencionalmente preferimos a classificação hierárquica dos vários quadriláteros convexos à classificação por partição”? Ele responde enumerando 5 vantagens:

1. **“Conduz a definições de conceitos e a formulações de teoremas mais econômicas”.** Exemplificando, o Paralelogramo pode ser definido à Euclides como “Rombóide é uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais nem ângulos retos” [8] ou, à Hadamard, “Paralelogramo é o quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois”,
2. **“Simplifica a sistematização dedutiva e conduz ao aparecimento de propriedades de conceitos mais específicos”.** Exemplificando, ao classificarmos o Retângulo como um subconjunto dos Paralelogramos, quando demonstramos que “as diagonais de um paralelogramo se intersectam nos respectivos pontos médios”, torna-se desnecessário

demonstrar a mesma propriedade para o Retângulo porque é uma consequência implícita da inclusão hierárquica,

3. **“Proporciona muitas vezes um esquema conceitual durante a resolução de problemas”**. Ao definirmos os quadriláteros notáveis de forma hierárquica, podemos elaborar estratégias, tanto na resolução de problemas como em demonstrações, que ampliem a gama de caminhos que podem ser seguidos. Villiers [19] menciona a demonstração de um caso particular do teorema de Von Aubel, em que são construídos 4 quadrados sobre os lados de um paralelogramo. A demonstração de que o quadrilátero formado pelos 4 centros desses quadrados é também um quadrado pode ser feita de maneira “elegante” utilizando a classificação hierárquica dos quadriláteros notáveis;

4. **“Sugere, algumas vezes, definições alternativas e novas proposições”**. Uma forma de definir os quadriláteros notáveis é através de suas diagonais e, suas proposições, poderiam ser assim:

- PARALELOGRAMO é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios,
- RETÂNGULO é o quadrilátero cujas diagonais congruentes se intersectam nos respectivos pontos médios,
- LOSANGO é o quadrilátero cujas diagonais perpendiculares se intersectam nos respectivos pontos médios,
- QUADRADO é o quadrilátero cujas diagonais congruentes se intersectam nos respectivos pontos médios, formando um ângulo reto.

Uma forma mais econômica, utilizando diretamente uma hierarquia, seria:

- PARALELOGRAMO é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios,
- RETÂNGULO é o PARALELOGRAMO cujas diagonais são congruentes,
- LOSANGO é o PARALELOGRAMO cujas diagonais são perpendiculares,
- QUADRADO é o paralelogramo cujas diagonais são congruentes e perpendiculares.

Essa forma de definir os quadriláteros notáveis tem o mesmo tipo de representação, por diagrama de Venn, utilizado para as definições de **HADAMARD**, conforme a ilustração abaixo:

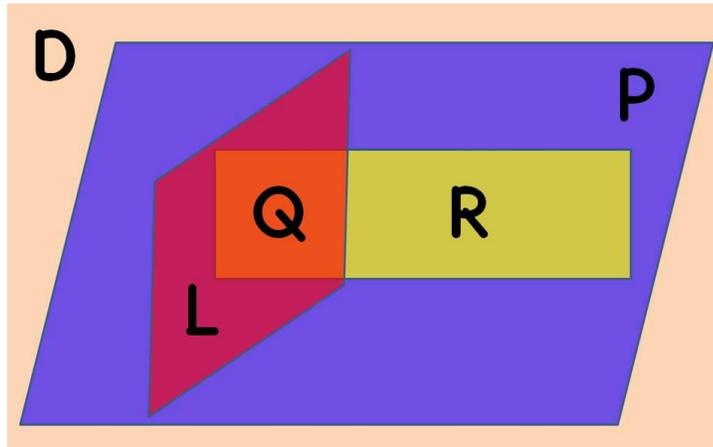


Figura 8.08: Classificação hierárquica dos quadriláteros notáveis segundo suas diagonais

5. “Proporciona uma perspectiva global muito útil”.

“A classificação hierárquica dá uma perspectiva útil que pode conduzir a uma perspectiva mais coesa ao sublinhar as relações entre conceitos, e por isso uma melhor retenção” [19]. A facilidade de memorização das definições e das relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis torna esse tipo de classificação bastante apropriada para alunos com dificuldade de memorização, só por isso esse tipo de agrupamento já mereceria a devida atenção por parte dos professores de Matemática. Villiers ainda destaca em seu artigo que essa forma de classificação é esteticamente mais agradável e mais perceptiva para enxergar as relações entre os conceitos, facilitando a visualização das propriedades quando se caminha dos conceitos mais gerais aos mais específicos. Ele destaca a herança de propriedades recebida dos conceitos mais amplos pelos conceitos mais centrais. Nessa estrutura de conceitos, o quadrado herda o encontro das diagonais nos seus respectivos pontos médios do

paralelogramo, diagonais congruentes dos retângulos e sua perpendicularidade dos losangos.

8.4 Os quadriláteros de Q1 a Q6, segundo suas diagonais.

Tomaremos como base de nossos cálculos, a classificação hierárquica dos quadriláteros notáveis, adotando a seguinte definição para o PARALELOGRAMO:

“é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios”

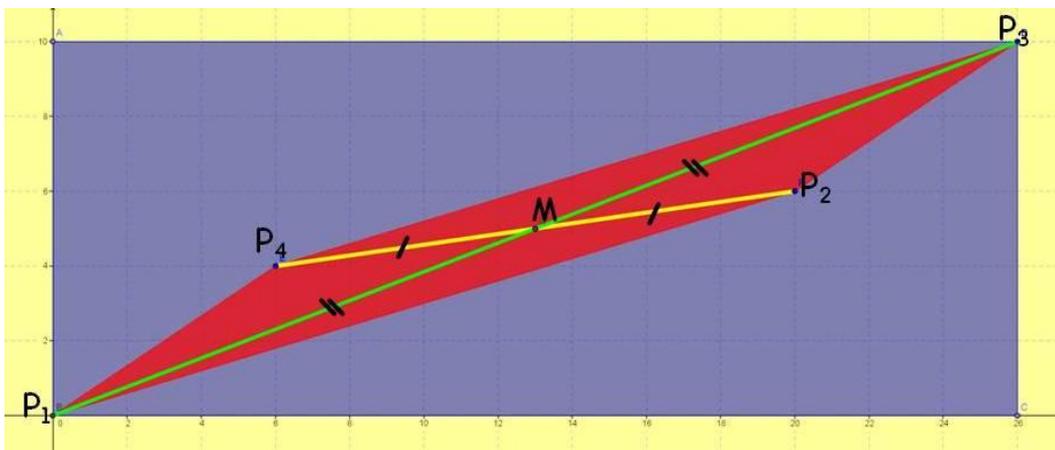


Figura 8.09: Representação no plano cartesiano da propriedade das diagonais do paralelogramo

Já temos conhecimento dos pares ordenados correspondentes aos quadriláteros de Q1 a Q6, obtidos pela regularidade das experiências já executadas e da sequência de Fibonacci expressa abaixo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,...

A partir dos pares ordenados P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , realizaremos os devidos cálculos para encontrarmos seus respectivos pontos médios:

$$\mathbf{Q1} \rightarrow F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$$

$$P_1(0; 0); P_2(8; 3); P_3(13; 5) \text{ e } P_4(5; 2)$$

Ponto Médio da diagonal P_1P_3 :

$$M_{13} = \left(\frac{0+13}{2}; \frac{0+5}{2} \right) = \left(\frac{13}{2}; \frac{5}{2} \right) = (6,5; 2,5)$$

Ponto Médio da diagonal P_2P_4 :

$$M_{24} = \left(\frac{8+5}{2}; \frac{3+2}{2} \right) = \left(\frac{13}{2}; \frac{5}{2} \right) = (6,5; 2,5)$$

Assim, como $M_{13} = M_{24}$ podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

$$\mathbf{Q2} \rightarrow F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34$$

$$P_1(0; 0); P_2(21; 8); P_3(34; 13) \text{ e } P_4(13; 5)$$

Ponto Médio da diagonal P_1P_3 :

$$M_{13} = \left(\frac{0+34}{2}; \frac{0+13}{2} \right) = \left(\frac{34}{2}; \frac{13}{2} \right) = (17; 6,5)$$

Ponto Médio da diagonal P_2P_4 :

$$M_{24} = \left(\frac{21+13}{2}; \frac{8+5}{2} \right) = \left(\frac{34}{2}; \frac{13}{2} \right) = (17; 6,5)$$

Assim, como $M_{13} = M_{24}$ podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

$$\mathbf{Q3} \rightarrow F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89$$

$$P_1(0; 0); P_2(55; 21); P_3(89; 34) \text{ e } P_4(34; 13)$$

Ponto Médio da diagonal P_1P_3 :

$$M_{13} = \left(\frac{0+89}{2}; \frac{0+34}{2} \right) = \left(\frac{89}{2}; \frac{34}{2} \right) = (44,5; 17)$$

Ponto Médio da diagonal P_2P_4 :

$$M_{24} = \left(\frac{55+34}{2}; \frac{21+13}{2} \right) = \left(\frac{89}{2}; \frac{34}{2} \right) = (44,5; 17)$$

Assim, como $M_{13} = M_{24}$ podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

$$\mathbf{Q4} \rightarrow F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233$$

$$P_1(0; 0); P_2(144; 55); P_3(233; 89) \text{ e } P_4(89; 34)$$

Ponto Médio da diagonal P_1P_3 :

$$M_{13} = \left(\frac{0+233}{2}; \frac{0+89}{2} \right) = \left(\frac{233}{2}; \frac{89}{2} \right) = (116,5; 44,5)$$

Ponto Médio da diagonal P_2P_4 :

$$M_{24} = \left(\frac{144+89}{2}; \frac{55+34}{2} \right) = \left(\frac{233}{2}; \frac{89}{2} \right) = (116,5; 44,5)$$

Assim, como $M_{13} = M_{24}$ podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

$$\mathbf{Q5} \rightarrow F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233, F_{14} = 377, F_{15} = 610$$

$$P_1(0; 0); P_2(377; 144); P_3(610; 233) \text{ e } P_4(233; 89)$$

Ponto Médio da diagonal P_1P_3 :

$$M_{13} = \left(\frac{0+610}{2}; \frac{0+233}{2} \right) = \left(\frac{610}{2}; \frac{233}{2} \right) = (305; 116,5)$$

Ponto Médio da diagonal P_2P_4 :

$$M_{24} = \left(\frac{377+233}{2}; \frac{144+89}{2} \right) = \left(\frac{610}{2}; \frac{233}{2} \right) = (305; 116,5)$$

Assim, como $M_{13} = M_{24}$ podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Q6 → $F_{13} = 233$, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1597$

$P_1(0; 0)$; $P_2(987; 377)$; $P_3(1597; 610)$ e $P_4(610; 233)$

Ponto Médio da diagonal P_1P_3 :

$$M_{13} = \left(\frac{0+1597}{2}; \frac{0+233}{2} \right) = \left(\frac{1597}{2}; \frac{610}{2} \right) = (798,5; 305)$$

Ponto Médio da diagonal P_2P_4 :

$$M_{24} = \left(\frac{377+233}{2}; \frac{377+233}{2} \right) = \left(\frac{1597}{2}; \frac{610}{2} \right) = (798,5; 305)$$

Assim, como $M_{13} = M_{24}$ podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Poderíamos continuar esses cálculos ainda por diversas vezes, mas chegaríamos ao ponto de nos questionar se não existiria um caminho menos moroso para comprovarmos a real existência desse PARALELOGRAMO, em todas as montagens de um retângulo obtido pelo corte de seu respectivo quadrado. Utilizaremos a seguir um processo que visa facilitar nosso caminho de descoberta e enxergar, por outras vias, o que acontece no desenvolver dessa experiência: o valoroso recurso da planilha eletrônica.

9. Planilhas Eletrônicas

9.1 A planilha como recurso didático

No ponto em que chegamos sabemos que, nas experiências já realizadas com o quebra cabeça de quatro peças, podemos montar um retângulo cuja área terá 1 unidade a mais do que a do quadrado inicial. Sabemos também que os números envolvidos pertencem a uma sequência famosa denominada Fibonacci. Verificamos que essa unidade extra torna-se cada vez mais invisível aos nossos olhos, quanto mais damos prosseguimento à experiência e ainda, descobrimos que, nessa invisibilidade, oculta-se um quadrilátero notável denominado paralelogramo.

Por um momento, abandonaremos as questões envolvendo a visualização, em particular, de cada um dos eventos e procuraremos “enxergar” as relações entre nossos quadriláteros notáveis sob a ótica da linguagem das planilhas. Primeiramente, vamos analisar a diferença entre as áreas do quadrado e do seu respectivo retângulo. Cabe ao professor decidir em qual ordem serão colocados os elementos que compõem a subtração. O que é imprescindível mesmo é que o aluno saiba, sem sombra de dúvidas, se a planilha descreve a diferença entre “a área do QUADRADO e a área do RETÂNGULO” ou “a área do RETÂNGULO e a área do QUADRADO”. A planilha a seguir retrata a segunda opção.

Os números de FIBONACCI

| F_0 | 0 | F_{k-1} | x | F_{k+1} | - | $(F_k)^2$ | |
|----------|-----------------|-----------|---|-----------|---|------------|------|
| F_1 | 1 | 0 | x | 1 | - | 1 | -1,0 |
| F_2 | 1 | 1 | x | 2 | - | 1 | 1,0 |
| F_3 | 2 | 1 | x | 3 | - | 4 | -1,0 |
| F_4 | 3 | 2 | x | 5 | - | 9 | 1,0 |
| F_5 | $F_{k-1} = 5$ | 3 | x | 8 | - | 25 | -1,0 |
| F_6 | $F_k = 8 (k=6)$ | 5 | x | 13 | - | $8^2 = 64$ | 1,0 |
| F_7 | $F_{k+1} = 13$ | 8 | x | 21 | - | 169 | -1,0 |
| F_8 | 21 | 13 | x | 34 | - | 441 | 1,0 |
| F_9 | 34 | 21 | x | 55 | - | 1156 | -1,0 |
| F_{10} | 55 | 34 | x | 89 | - | 3025 | 1,0 |
| F_{11} | 89 | 55 | x | 144 | - | 7921 | -1,0 |
| F_{12} | 144 | 89 | x | 233 | - | 20736 | 1,0 |
| F_{13} | 233 | 144 | x | 377 | - | 54289 | -1,0 |
| F_{14} | 377 | 233 | x | 610 | - | 142129 | 1,0 |
| F_{15} | 610 | 377 | x | 987 | - | 372100 | -1,0 |
| F_{16} | 987 | 610 | x | 1597 | - | 974169 | 1,0 |
| F_{17} | 1597 | 987 | x | 2584 | - | 2550409 | -1,0 |
| F_{18} | 2584 | 1597 | x | 4181 | - | 6677056 | 1,0 |
| F_{19} | 4181 | 2584 | x | 6765 | - | 17480761 | -1,0 |
| F_{20} | 6765 | 4181 | x | 10946 | - | 45765225 | 1,0 |
| F_{21} | 10946 | 6765 | x | 17711 | - | 119814916 | -1,0 |

Tabela 9.01: Excel - Diferença entre a área do retângulo e a área do quadrado de F_0 a F_{21}

A observação e a “leitura” dessa planilha, além de se relacionar com as atividades efetuadas até agora, visa dar início a uma questão: Qual o significado de “-1”, isto é, o resultado da diferença entre as áreas do retângulo e do quadrado, obtidos na última coluna?! Se possível, após a discussão sobre o assunto, seria de um valor didático enorme se o professor promovesse a construção de pelo menos um exemplo que retrate essa situação, de preferência, de forma manufaturada, sem a utilização de recursos computacionais. Outro aspecto importante a ser destacado é buscar a generalização desse resultado e fazer a seguinte associação:

- ✚ Quando “n” é PAR, o QUADRADO de lado F_n é uma unidade de área MENOR do que a área de seu RETÂNGULO correspondente,
- ✚ Quando “n” é ÍMPAR, o QUADRADO de lado F_n é uma unidade de área MAIOR do que a área de seu RETÂNGULO correspondente.

Prosseguindo a construção de sequência da planilha, obtemos:

| | | | | | | | |
|-----|----------|----------|---|-----------|---|-------------|------|
| F19 | 4181 | 2584 | x | 6765 | - | 17480761 | -1,0 |
| F20 | 6765 | 4181 | x | 10946 | - | 45765225 | 1,0 |
| F21 | 10946 | 6765 | x | 17711 | - | 119814916 | -1,0 |
| F22 | 17711 | 10946 | x | 28657 | - | 313679521 | 1,0 |
| F23 | 28657 | 17711 | x | 46368 | - | 821223649 | -1,0 |
| F24 | 46368 | 28657 | x | 75025 | - | 2149991424 | 1,0 |
| F25 | 75025 | 46368 | x | 121393 | - | 5628750625 | -1,0 |
| F26 | 121393 | 75025 | x | 196418 | - | 14736260449 | 1,0 |
| F27 | 196418 | 121393 | x | 317811 | - | 38580030724 | -1,0 |
| F28 | 317811 | 196418 | x | 514229 | - | 1,01004E+11 | 1,0 |
| F29 | 514229 | 317811 | x | 832040 | - | 2,64431E+11 | -1,0 |
| F30 | 832040 | 514229 | x | 1346269 | - | 6,92291E+11 | 1,0 |
| F31 | 1346269 | 832040 | x | 2178309 | - | 1,81244E+12 | -1,0 |
| F32 | 2178309 | 1346269 | x | 3524578 | - | 4,74503E+12 | 1,0 |
| F33 | 3524578 | 2178309 | x | 5702887 | - | 1,24227E+13 | -1,0 |
| F34 | 5702887 | 3524578 | x | 9227465 | - | 3,25229E+13 | 1,0 |
| F35 | 9227465 | 5702887 | x | 14930352 | - | 8,51461E+13 | -1,0 |
| F36 | 14930352 | 9227465 | x | 24157817 | - | 2,22915E+14 | 1,0 |
| F37 | 24157817 | 14930352 | x | 39088169 | - | 5,836E+14 | -1,0 |
| F38 | 39088169 | 24157817 | x | 63245986 | - | 1,52788E+15 | 0,0 |
| F39 | 63245986 | 39088169 | x | 102334155 | - | 4,00005E+15 | 0,0 |

Tabela 9.02: Excel - Diferença entre a área do retângulo e a área do quadrado de F_{19} a F_{39}

Podemos observar que, no final dessa planilha, na última coluna da linha correspondente ao F_{38} , encontramos um resultado intrigante: seriam iguais, nesse ponto, as áreas do quadrado e do retângulo?! A continuação da planilha nos mostra que esse evento não é apenas um caso isolado.

| | | | | | | | |
|-----|------------|-----------|---|-----------|---|-------------|------|
| F35 | 9227465 | 5702887 | x | 14930352 | - | 8,51461E+13 | -1,0 |
| F36 | 14930352 | 9227465 | x | 24157817 | - | 2,22915E+14 | 1,0 |
| F37 | 24157817 | 14930352 | x | 39088169 | - | 5,836E+14 | -1,0 |
| F38 | 39088169 | 24157817 | x | 63245986 | - | 1,52788E+15 | 0,0 |
| F39 | 63245986 | 39088169 | x | 102334155 | - | 4,00005E+15 | 0,0 |
| F40 | 102334155 | 63245986 | x | 165580141 | - | 1,04723E+16 | 0,0 |
| F41 | 165580141 | 102334155 | x | 267914296 | - | 2,74168E+16 | 0,0 |
| F42 | 267914296 | 165580141 | x | 433494437 | - | 7,17781E+16 | 0,0 |
| F43 | 433494437 | 267914296 | x | 701408733 | - | 1,87917E+17 | 0,0 |
| F44 | 701408733 | 433494437 | x | 1,135E+09 | - | 4,91974E+17 | 0,0 |
| F45 | 1134903170 | 701408733 | x | 1,836E+09 | - | 1,28801E+18 | 0,0 |
| F46 | 1836311903 | 1,135E+09 | x | 2,971E+09 | - | 3,37204E+18 | 0,0 |
| F47 | 2971215073 | 1,836E+09 | x | 4,808E+09 | - | 8,82812E+18 | 0,0 |

Tabela 9.03: Excel - Diferença entre a área do retângulo e a área do quadrado de F₃₅ a F₄₇

Como a tabela acima foi feita com o programa EXCEL, poderíamos pensar que, se usássemos um outro tipo de planilha, o resultado poderia ser bem diferente. Para extinguir qualquer dúvida, procuremos construir uma tabela semelhante em outro programa.

A tabela, a seguir, mostra a utilização de um programa similar ao Excel, o LibreOffice versão 4.3* (programa gratuito) . Nessa tabela, está expressa a diferença entre a área do quadrado e do seu respectivo retângulo e, também nela, como se pode ver, o resultado zera em torno do F₃₈.

(*) <http://www.libreoffice.org/download/libreoffice-fresh/?version=4.3.0>, visto em 9/10/14.

64 = 65 LibreOffice 4.3 ods - LibreOffice Calc

Dosiero Redakti Vido Enmeti Formato Iloj Datumoj Fenestro Helpo

Arial 10

H1

| | A | B | C | D | E | F |
|----|-----|-----------|--------------------|---|--------------------|-------|
| 1 | | 0 | Área do QUADRADO | | Área do RETÂNGULO | Q - R |
| 2 | F1 | 1 | 1 | - | 0 | 1 |
| 3 | F2 | 1 | 1 | - | 2 | -1 |
| 4 | F3 | 2 | 4 | - | 3 | 1 |
| 5 | F4 | 3 | 9 | - | 10 | -1 |
| 6 | F5 | 5 | 25 | - | 24 | 1 |
| 7 | F6 | 8 | 64 | - | 65 | -1 |
| 8 | F7 | 13 | 169 | - | 168 | 1 |
| 9 | F8 | 21 | 441 | - | 442 | -1 |
| 10 | F9 | 34 | 1156 | - | 1155 | 1 |
| 11 | F10 | 55 | 3025 | - | 3026 | -1 |
| 12 | F11 | 89 | 7921 | - | 7920 | 1 |
| 13 | F12 | 144 | 20736 | - | 20737 | -1 |
| 14 | F13 | 233 | 54289 | - | 54288 | 1 |
| 15 | F14 | 377 | 142129 | - | 142130 | -1 |
| 16 | F15 | 610 | 372100 | - | 372099 | 1 |
| 17 | F16 | 987 | 974169 | - | 974170 | -1 |
| 18 | F17 | 1597 | 2550409 | - | 2550408 | 1 |
| 19 | F18 | 2584 | 6677056 | - | 6677057 | -1 |
| 20 | F19 | 4181 | 17480761 | - | 17480760 | 1 |
| 21 | F20 | 6765 | 45765225 | - | 45765226 | -1 |
| 22 | F21 | 10946 | 119814916 | - | 119814915 | 1 |
| 23 | F22 | 17711 | 313679521 | - | 313679522 | -1 |
| 24 | F23 | 28657 | 821223649 | - | 821223648 | 1 |
| 25 | F24 | 46388 | 2149991424 | - | 2149991425 | -1 |
| 26 | F25 | 75025 | 5628750625 | - | 5628750624 | 1 |
| 27 | F26 | 121393 | 14736260449 | - | 14736260450 | -1 |
| 28 | F27 | 196418 | 38580030724 | - | 38580030723 | 1 |
| 29 | F28 | 317811 | 101003831721 | - | 101003831722 | -1 |
| 30 | F29 | 514229 | 264431464441 | - | 264431464440 | 1 |
| 31 | F30 | 832040 | 692290561600 | - | 692290561601 | -1 |
| 32 | F31 | 1346269 | 1812440220361 | - | 1812440220360 | 1 |
| 33 | F32 | 2178309 | 4745030099481 | - | 4745030099482 | -1 |
| 34 | F33 | 3524578 | 12422650078084 | - | 12422650078083 | 1 |
| 35 | F34 | 5702887 | 32522920134769 | - | 32522920134770 | -1 |
| 36 | F35 | 9227465 | 85146110326225 | - | 85146110326224 | 1 |
| 37 | F36 | 14930352 | 222915410843904 | - | 222915410843905 | -1 |
| 38 | F37 | 24157817 | 583600122205489 | - | 583600122205488 | 0 |
| 39 | F38 | 39088169 | 1527884955772560 | - | 1527884955772560 | 0 |
| 40 | F39 | 63245986 | 4000054745112200 | - | 4000054745112190 | 0 |
| 41 | F40 | 102334155 | 10472279279564000 | - | 10472279279564000 | 0 |
| 42 | F41 | 165580141 | 27416783093579900 | - | 27416783093579900 | 0 |
| 43 | F42 | 267914296 | 71778070001175600 | - | 71778070001175600 | 0 |
| 44 | F43 | 433494437 | 187917426909947000 | - | 187917426909947000 | 0 |
| 45 | F44 | 701408733 | 491974210728665000 | - | 491974210728665000 | 0 |

Planilha1 / Planilha2 / Planilha3

Folio 1 / 3

Apriora

Tabela 9.04: LibreOffice - Diferença entre a área do quadrado e a área do retângulo de F₁ a F₄₅

Ainda persistindo em mais uma tentativa, podemos buscar outra planilha gratuita, agora no Google Planilhas.

O Google planilhas (<http://www.google.com/intl/pt-BR/sheets/about/> visto em 10 de Dezembro de 2014) faz parte de um pacote de programas, semelhante ao Microsoft Office, que pode ser utilizado para construir tabelas como as feitas anteriormente, entre outras possibilidades. A figura abaixo retrata o resultado que obtivemos nessa alternativa:

| F0 | | ÁREA DO QUADRADO | | ÁREA DO RETÂNGULO | Q - R |
|-----|-----------|----------------------|---|----------------------|-------|
| F1 | 1 | | - | | |
| F2 | 1 | | - | | |
| F3 | 2 | | - | | |
| F4 | 3 | | - | | |
| F5 | 5 | | - | | |
| F6 | 8 | 64,0 | - | 65,0 | -1,0 |
| F7 | 13 | 169,0 | - | 168,0 | 1,0 |
| F8 | 21 | 441,0 | - | 442,0 | -1,0 |
| F9 | 34 | 1156,0 | - | 1155,0 | 1,0 |
| F10 | 55 | 3025,0 | - | 3026,0 | -1,0 |
| F11 | 89 | 7921,0 | - | 7920,0 | 1,0 |
| F12 | 144 | 20736,0 | - | 20737,0 | -1,0 |
| F13 | 233 | 54289,0 | - | 54288,0 | 1,0 |
| F14 | 377 | 142129,0 | - | 142130,0 | -1,0 |
| F15 | 610 | 372100,0 | - | 372099,0 | 1,0 |
| F16 | 987 | 974169,0 | - | 974170,0 | -1,0 |
| F17 | 1597 | 2550409,0 | - | 2550408,0 | 1,0 |
| F18 | 2584 | 6677056,0 | - | 6677057,0 | -1,0 |
| F19 | 4181 | 17480761,0 | - | 17480760,0 | 1,0 |
| F20 | 6765 | 45765225,0 | - | 45765226,0 | -1,0 |
| F21 | 10946 | 119814916,0 | - | 119814915,0 | 1,0 |
| F22 | 17711 | 313679521,0 | - | 313679522,0 | -1,0 |
| F23 | 28657 | 821223649,0 | - | 821223648,0 | 1,0 |
| F24 | 46368 | 2149991424,0 | - | 2149991425,0 | -1,0 |
| F25 | 75025 | 5628750625,0 | - | 5628750624,0 | 1,0 |
| F26 | 121393 | 14736260449,0 | - | 14736260450,0 | -1,0 |
| F27 | 196418 | 38580030724,0 | - | 38580030723,0 | 1,0 |
| F28 | 317811 | 101003831721,0 | - | 101003831722,0 | -1,0 |
| F29 | 514229 | 264431464441,0 | - | 264431464440,0 | 1,0 |
| F30 | 832040 | 692290561600,0 | - | 692290561601,0 | -1,0 |
| F31 | 1346269 | 1812440220361,0 | - | 1812440220360,0 | 1,0 |
| F32 | 2178309 | 4745030099481,0 | - | 4745030099482,0 | -1,0 |
| F33 | 3524578 | 12422650078084,0 | - | 12422650078083,0 | 1,0 |
| F34 | 5702887 | 32522920134769,0 | - | 32522920134770,0 | -1,0 |
| F35 | 9227465 | 85146110326225,0 | - | 85146110326224,0 | 1,0 |
| F36 | 14930352 | 222915410843904,0 | - | 222915410843905,0 | -1,0 |
| F37 | 24157817 | 583600122205489,0 | - | 583600122205488,0 | 1,0 |
| F38 | 39088169 | 1527884955772560,0 | - | 1527884955772560,0 | -1,0 |
| F39 | 63245986 | 4000054745112200,0 | - | 4000054745112200,0 | 1,0 |
| F40 | 102334155 | 10472279279564000,0 | - | 10472279279564000,0 | -2,0 |
| F41 | 165580141 | 27416783093579900,0 | - | 27416783093579900,0 | 0,0 |
| F42 | 267914296 | 71778070001175600,0 | - | 71778070001175600,0 | 0,0 |
| F43 | 433494437 | 187917426909947000,0 | - | 187917426909947000,0 | 0,0 |

Tabela 9.05: Planilhas Google - Diferença entre as áreas do quadrado e do retângulo de F_1 a F_{43}

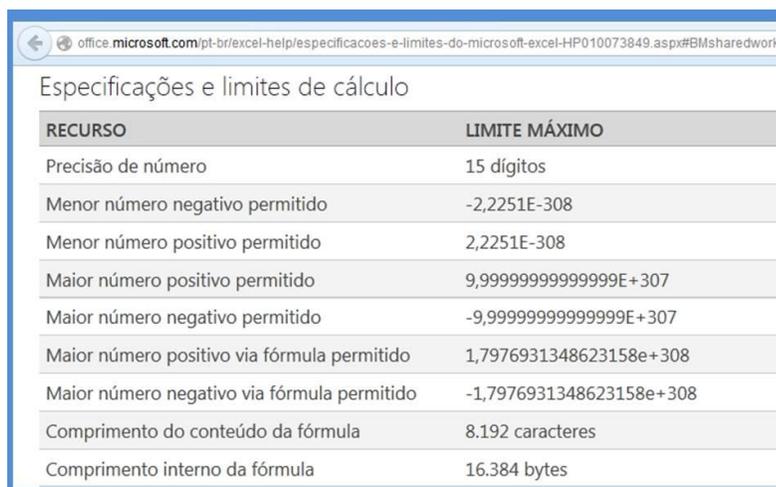
Podemos observar que, a partir de F_{40} os resultados não aparecem conforme o esperado, segundo nossas experiências realizadas até agora e, em F_{38} , as áreas de ambos os quadriláteros se igualam.

Os resultados dessas três planilhas poderiam nos fazer crer que dois dos lados paralelos do paralelogramo, próximo à diagonal do retângulo, se aproximam de tal maneira no transcorrer das experiências, que chegariam a um ponto de se tocarem, fazendo com que a área desse quadrilátero zerasse. Faz-se necessário, nesse momento, discutir sobre um assunto pouco abordado nas escolas de nível médio: seriam as planilhas infalíveis?!

9.2 Os limites de uma planilha

9.2.1 Especificações e limites de cálculo da planilha EXCEL

Para compreender o motivo dos resultados surpreendentes das tabelas anteriores, precisamos tomar conhecimento das limitações às quais elas estão submetidas. Na tabela abaixo, no site oficial da Microsoft, pode-se verificar quais são essas limitações, no caso do EXCEL 2007: (<https://support.office.microsoft.com/en-US/article/Excel-specifications-and-limits-1672b34d-7043-467e-8e27-269d656771c3?ui=en-US&rs=en-US&ad=US>, visto em 27/01/2015)



| RECURSO | LIMITE MÁXIMO |
|---|--------------------------|
| Precisão de número | 15 dígitos |
| Menor número negativo permitido | -2,2251E-308 |
| Menor número positivo permitido | 2,2251E-308 |
| Maior número positivo permitido | 9,999999999999999E+307 |
| Maior número negativo permitido | -9,999999999999999E+307 |
| Maior número positivo via fórmula permitido | 1,7976931348623158e+308 |
| Maior número negativo via fórmula permitido | -1,7976931348623158e+308 |
| Comprimento do conteúdo da fórmula | 8.192 caracteres |
| Comprimento interno da fórmula | 16.384 bytes |

Tabela 9.06: Especificações e limites de cálculo da planilha Excel

Há algumas informações, nessa tabela, dignas de destaque quanto às experiências envolvidas nesse trabalho (simplificado):

1. Precisão de números: 15 dígitos
2. Menor número positivo permitido: $2,225 \times 10^{-308}$,
3. Maior número positivo permitido: $9,999 \times 10^{+307}$,
4. Maior número positivo via fórmula permitido: $1,797 \times 10^{+308}$.

Nas planilhas construídas (Excel, LibreOffice e Google) pode-se notar que, a partir do F_{38} , as áreas do QUADRADO e do RETÂNGULO são representadas por números absolutamente iguais. Em F_{37} , ambas as áreas atingem a cifra de 15 dígitos significativos e, em F_{38} , já chega a 16 dígitos, ultrapassando o limite de precisão da planilha. Esse resultado é coerente com a orientação 1 acima.

A planilha EXCEL abaixo mostra uma tabela construída de modo semelhante às anteriores, dando continuidade às fórmulas colocadas na tabela para se observar a sequência numérica até o número Fibonacci F_{739} . Pode-se observar, na célula G740, que a área do QUADRADO chega a um valor na ordem de $1,530 \times 10^{+308}$. A partir desse ponto, a planilha não consegue mais expressar os valores das áreas, tanto do quadrado bem como do retângulo, se colocássemos uma célula calculando seu valor. O item 4 já previa essa ocorrência.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|------|-------------|-----------|---|-----------|---|-------------|-------|
| 1 | F0 | 0 | F_{K-1} | x | F_{K+1} | - | $(F_K)^2$ | |
| 736 | F735 | 1,8048E+153 | 1,12E+153 | x | 2,92E+153 | - | 3,2573E+306 | 0,0 |
| 737 | F736 | 2,9202E+153 | 1,8E+153 | x | 4,73E+153 | - | 8,5278E+306 | 0,0 |
| 738 | F737 | 4,725E+153 | 2,92E+153 | x | 7,65E+153 | - | 2,2326E+307 | 0,0 |
| 739 | F738 | 7,6453E+153 | 4,73E+153 | x | 1,24E+154 | - | 5,845E+307 | 0,0 |
| 740 | F739 | 1,237E+154 | 7,65E+153 | x | 2E+154 | - | 1,5302E+308 | 0,0 |
| 741 | F740 | 2,0016E+154 | 1,24E+154 | x | 3,24E+154 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 742 | F741 | 3,2386E+154 | 2E+154 | x | 5,24E+154 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 743 | F742 | 5,2402E+154 | 3,24E+154 | x | 8,48E+154 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 744 | F743 | 8,4787E+154 | 5,24E+154 | x | 1,37E+155 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 745 | F744 | 1,3719E+155 | 8,48E+154 | x | 2,22E+155 | - | #NÚM! | #NÚM! |

Tabela 9.07: Excel – Diferença entre as áreas dos quadriláteros de F_{735} a F_{744} – Not. Científica

Essa outra tabela a seguir, mostra o último número da sequência de Fibonacci que a planilha EXCEL consegue calcular, o F_{1476} , algo que o 4º item das limitações do programa já indicava.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|------|-------|-------------|-----------|---|-----------|---|-----------|-------|
| 1 | F0 | 0 | F_{K-1} | x | F_{K+1} | - | $(F_K)^2$ | |
| 1474 | F1473 | 3,0854E+307 | 1,91E+307 | x | 4,99E+307 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1475 | F1474 | 4,9923E+307 | 3,09E+307 | x | 8,08E+307 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1476 | F1475 | 8,0776E+307 | 4,99E+307 | x | 1,31E+308 | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1477 | F1476 | 1,307E+308 | 8,08E+307 | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1478 | F1477 | #NÚM! | 1,31E+308 | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1479 | F1478 | #NÚM! | #NÚM! | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1480 | F1479 | #NÚM! | #NÚM! | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1481 | F1480 | #NÚM! | #NÚM! | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1482 | F1481 | #NÚM! | #NÚM! | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |
| 1483 | F1482 | #NÚM! | #NÚM! | x | #NÚM! | - | #NÚM! | #NÚM! |

Tabela 9.08: Excel – Diferença entre as áreas dos quadriláteros em F_{1476} – Notação Científica

Apenas a título de curiosidade, mesmo estando diante do número de Fibonacci F_{1476} , se ele não estiver expresso na forma científica (como na tabela acima), mas em sua forma decimal, a contagem do número de seus dígitos é uma tarefa estafante e com alta probabilidade de ocorrência de erro. Para amenizar a execução dessa contagem, existe uma fórmula (a ser demonstrada no próximo capítulo) que facilita esse trabalho. Se atribuímos ao símbolo $N(F_n)$ o significado “número de dígitos de F_n ” a fórmula seria:

$$N(F_n) = \left[n \times \left(\log \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \right) - (\log 5) / 2 \right], n > 1$$

Obs.: O símbolo $\lceil \alpha \rceil$ significa “o primeiro número inteiro maior do que α ”.

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/footnotes/floor-ceil.html>, visto em 22 de Dezembro de 2014;

Aplicando a fórmula acima para o caso de $n = 1476$, temos:

$$N(F_{1476}) = \lceil 1476 \times [\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2] - [(\log 5) \div 2] \rceil$$

$$N(F_{1476}) = \lceil 1476 \times [\log 3,23606 - \log 2] - [(\log 5) \div 2] \rceil$$

$$N(F_{1476}) = [1476 \times [0,51001 - 0,30102] - [0,698970 \div 2]]$$

$$N(F_{1476}) = [1476 \times 0,20899 - [0,349485]] \Rightarrow N(F_{1476}) = [308,46924 - 0,349485]$$

$$N(F_{1476}) = [308,119755] = 309$$

Se fizéssemos o cálculo para $n = 1477$, teríamos:

$$N(F_{1477}) = [1477 \times [\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2] - [(log 5) \div 2]]$$

$$N(F_{1477}) = [1477 \times 0,20899 - 0,349485]$$

$$N(F_{1477}) = [308,67823 - 0,349485]$$

$$N(F_{1477}) = [308,328745] = 309$$

Pode parecer estranho para um aluno que, mesmo que esse dois números tenham a mesma quantidade de dígitos, um pode ser computável na planilha e outro não. Para esclarecer aos estudantes, pode-se relembrar as propriedades das potências para elucidar que, se na última tabela o número Fibonacci F_{1476} está escrito como $1,307 \times 10^{+308}$ e na fórmula aparece $[308,119755]$ (valores aproximados) é porque:

$10^{308,11955} = 10^{0,11955} \times 10^{308} = 1,3168 \times 10^{308}$ ainda não supera o limite de número via fórmula que é $1,797 \times 10^{308}$ mas, no segundo caso, o número $10^{308,328745} = 10^{0,328745} \times 10^{308} = 2,131 \times 10^{308}$ acaba ultrapassando esse limite, impossibilitando sua computação na planilha.

No site <http://www.inwexcel.com/specification-limits-compare/>, visto em 13 de Dezembro de 2014, é feita uma comparação entre os limites do EXCEL das versões de 2003 até 2013, realçando que as especificações e limites de cálculo da última versão (2013) permanecem as mesmas da versão de 2007. No site oficial da Microsoft (em inglês) pode-se confirmar essa afirmação: <https://support.office.com/en-us/article/Excel-specifications-and-limits-ca36e2dc-1f09-4620-b726-67c00b05040f?ui=en-US&rs=en-US&ad=US>, visto em 12 de Dezembro de 2014.

| FEATURE | 2003 | 2007 | 2010 | 2013 |
|---|--------------|---------------|-------------|------|
| Number precision | 15 digits | | | |
| Smallest allowed negative number | -2.2251E+308 | | | |
| Smallest allowed positive number | 2.225E-308 | | 2.2251E-308 | |
| Largest allowed positive number | 1.79769E+308 | 1E+308 | | |
| Largest allowed negative number | -1E+307 | -1E+308 | | |
| Largest allowed positive number via formula | #N/A | 1.79769E+308 | | |
| Largest allowed negative number via formula | #N/A | -1.79769E+308 | | |

Tabela 9.09: Comparação - Excel 2003 a 2013

9.2.2 Normas técnicas - O padrão IEEE 754

Quando procuramos observar um pouco da generalização dos resultados de nossas atividades dos quebra cabeças no computador, utilizando tabelas, ficamos diante de cálculos envolvendo números de dimensões enormes e nos deparamos com símbolos estranhos (#NÚM!) devido à natureza da ordem de grandeza dos números envolvidos na questão. Diante disso, é absolutamente necessário conhecermos as limitações das ferramentas tecnológicas que utilizamos em nossos experimentos para não chegarmos a conclusões apressadas, proferir julgamentos injustificados e, conseqüentemente, estar em desacordo com a verdade.

No mundo perfeito da Matemática, muitas vezes florescem afirmações absolutas como “Entre dois números racionais quaisquer há infinitos números reais”, mas, os computadores não são capazes de absorver todo esse absolutismo matemático, no mundo cibernético a realidade é outra. O computador registra seus dados digitalmente através de dois tipos de tensão: alta e baixa. Esse tipo de ocorrência eletrônica está associado, matematicamente, aos valores 1 e 0, respectivamente. Assim, os dados de um computador são registrados utilizando-se de uma representação binária. Se representarmos os números em um sistema de aritmética de ponto flutuante, eles serão expressos na forma $m \times 10^k$, $1 \leq m < 10$, onde m é a mantissa e $k \in \mathbb{Z}$. Como o computador utiliza a base 2, os números são representados assim, $m \times 2^k$, onde m é a mantissa, k o expoente e ambos são números binários. A aparente inocência da semelhança entre as duas bases esconde aspectos intrigantes para um leitor comum, apenas para exemplificar essa questão, a fração decimal $\frac{1}{10}$ possui uma representação decimal finita (0,1), mas o mesmo não acontece quando expresso na base 2.

$$(0,1)_{10} = (0,0001100110011\dots)_2 = 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 0 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 0 \times 2^{-10} + \dots$$

Se considerarmos ainda as dízimas periódicas e os números irracionais, cuja expansão decimal é infinita, podemos perceber que a representação desses tipos de

números por uma quantidade finita de dígitos binários é, simplesmente, impossível. Como a representação exata de certos números reais não é possível, o computador é estruturado para utilizar um agrupamento de bits para realizar essa tarefa de forma aproximada. O tamanho desse agrupamento de bits depende de características internas de cada computador, por exemplo, o computador utilizado nessas experiências digitais possui 64 bits e isso significa que, para representar um determinado número ($m \times 2^k$), ele utiliza esse agrupamento de 64 bits distribuídos da seguinte forma:

- 1 bit para expressar o sinal do número, 0 para positivo, 1 para negativo,
- 11 bits para o expoente (k) e,
- 52 bits para a mantissa (m).

Esse tipo de representação numérica é denominada “aritmética binária de ponto flutuante” usada para representar números reais; quando se deseja representar números inteiros, normalmente é utilizada a “aritmética binária de ponto fixo” e, em ambos os casos, a escolha visa atingir a maior precisão possível de modo a otimizar a rapidez dos cálculos ante uma quantidade fixa de bits a serem utilizados. Não faz parte dos objetivos dessa dissertação o aprofundamento quanto a esse tema, apenas deseja-se esclarecer que a representação de números em um computador é executada dentro de certos padrões e que o usuário deve ter ciência da existência dessas limitações ao trabalhar com números. No site da Microsoft há o alerta: “o Microsoft Excel armazena e calcula números de ponto flutuante. Isto pode afetar os resultados de alguns números ou fórmulas devido ao arredondamento e/ou truncamento de dados.” (<http://support2.microsoft.com/kb/78113/pt-br>, visto em 23 de Dezembro de 2014) e, no mesmo endereço eletrônico, é esclarecido:

“O Microsoft Excel foi projetado com base na especificação IEEE 754 para armazenar e calcular números de ponto flutuante. IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers), uma instituição internacional que, entre outras coisas, determina padrões para software e hardware de computador. A especificação

754 é uma especificação amplamente adotada que descreve como os números de ponto flutuante devem ser armazenados em um computador binário. Ela é popular porque permite que os números de ponto flutuante sejam armazenados em uma quantidade razoável de espaço e que os cálculos sejam realizados de maneira relativamente rápida. O padrão 754 é utilizado nas unidades de ponto flutuante e nos processadores de dados numéricos em quase todos os microprocessadores atuais com base em PC que implementam aritmética de ponto flutuante, incluindo os processadores Intel, Motorola, Sun e MIPS.”

A representação de “números de ponto flutuante” baseia-se na notação científica, apenas ela não pode ser implementada no computador em toda sua extensão, pois é utilizada uma quantidade finita de dígitos para representar a mantissa m (no nosso caso 52) e uma quantidade finita de dígitos para representar o expoente k (no nosso caso, 11). Essa limitação de bits acaba influenciando os resultados de duas maneiras:

- nas limitações máximas e mínimas com relação a números positivos, cujos parâmetros já foram mencionados anteriormente, o maior número positivo via fórmula permitido, $1,797 \times 10^{+308}$ que é um número muito próximo de 2^{1024} e o menor número positivo permitido, $2,225 \times 10^{-308}$ que é muito próximo de 2^{-1022} , devido à norma IEEE 754, o expoente pode variar de -1022 a +1023;
- na precisão, que está limitada a 15 dígitos decimais, já que a mantissa de 52 bits (ou 53 se incluirmos um bit de unidade implícita) gera um número binário cuja precisão pode não ser adequada, dependendo da ordem de grandeza que se quer obter na experiência digital.

Já sabemos que o computador realiza aproximações. Precisamos agora entender um pouco da linguagem das planilhas para manifestar a ocorrência desses eventos. Os símbolos utilizados para revelar que houve uma extrapolação desses limites podem ser encontrados no site oficial da Microsoft, que diz:

garantem que há infinitos números entre 1 e 1,000000000000001, para esse computador de 64 bits, quando segue a norma IEEE 754, não há nem mesmo um. Para se obterem mais informações sobre aritmética computacional, consultar os endereços a seguir:

<http://intprogc.pbworks.com/w/page/11211433/Representa%C3%A7%C3%A3o%20de%20N%C3%BAmeros> e <http://www.inf.ufsc.br/~willrich/Ensino/INE5602/restrito/ii-cap2.PDF>,

9.2.3 O programa PYTHON

No item anterior descobrimos que, devido às limitações impostas pelo padrão IEEE 754, não podemos, por exemplo, obter um número da sequência de Fibonacci superior a F_{1476} ao utilizarmos um programa como o Excel, mas essa impossibilidade não é absoluta se usarmos um programa cujas especificações priorizam a exatidão de cálculos em alguns casos particulares como faz o Python. PYTHON é uma linguagem de programação livre, ou seja, é distribuído gratuitamente e “pode ser utilizado para criar qualquer tipo de software, proprietário ou livre”.

(http://daibert.net/uploads/cursos/Python/Curso_Basico_Python-MarceloDaibert.pdf, visto em 29 de Janeiro de 2015).

Python, apesar de também usar a norma IEEE 754 para números reais, também pode ser utilizado para obter resultados com maior precisão quando os números envolvidos são inteiros. No quadro abaixo, obtido no site oficial dessa linguagem de programação, há menção quanto a essa característica do programa:

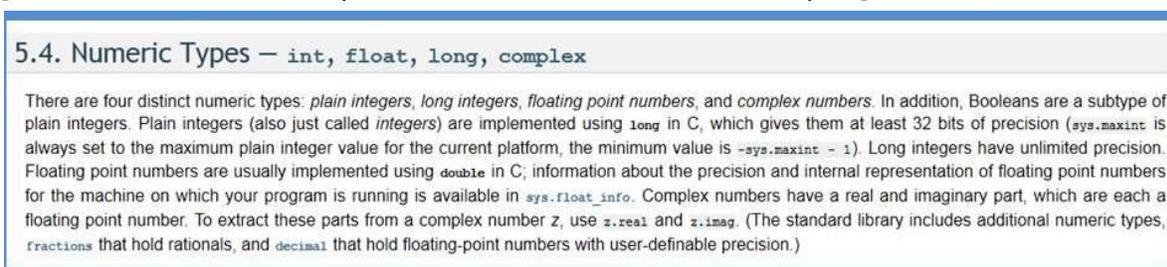


Figura 9.01: Especificações da representação de números inteiros pelo programa Python

Site oficial do programa PYTHON: <https://docs.python.org/2/library/stdtypes.html>

Apenas a título de curiosidade, utilizamos o programa Python para executar um cálculo semelhante ao feito nas planilhas anteriores e colocamos em ordem 3 resultados, o número da sequência de Fibonacci que estamos trabalhando, seu valor, e a diferença entre as áreas do quadrado e do retângulo. No caso da primeira experiência que realizamos nesse trabalho, o resultado foi: F_6 , 8, -1, ou seja, o 6º número da sequência de Fibonacci é 8 e a diferença entre as áreas do quadrado de lado 8 e do retângulo de dimensões 5 (F_5) e 13 (F_7) é -1. Uma parte dos resultados que obtivemos está retratada na figura a seguir, que mostra apenas a página 3 do documento:

```

F77, 5527939700884757, 1
F78, 8944394323791464, -1
F79, 14472334024676221, 1
F80, 23416728348467685, -1
F81, 37889062373143906, 1
F82, 61305790721611591, -1
F83, 99194853094755497, 1
F84, 160500643816367088, -1
F85, 259695496911122585, 1
F86, 420196140727489673, -1
F87, 679891637638612258, 1
F88, 1100087778366101931, -1
F89, 1779979416004714189, 1
F90, 2880067194370816120, -1
F91, 4660046610375530309, 1
F92, 7540113804746346429, -1
F93, 12200160415121876738, 1
F94, 19740274219868223167, -1
F95, 31940434634990099905, 1
F96, 51680708854858323072, -1
F97, 83621143489848422977, 1
F98, 135301852344706746049, -1
F99, 218922995834555169026, 1
F100, 354224848179261915075, -1
F101, 573147844013817084101, 1
F102, 927372692193078999176, -1
F103, 1500520536206896083277, 1
F104, 2427893228399975082453, -1
F105, 3928413764606871165730, 1
F106, 6356306993006846248183, -1
F107, 10284720757613717413913, 1
F108, 16641027750620563662096, -1
F109, 26925748508234281076009, 1
F110, 43566776258854844738105, -1
F111, 70492524767089125814114, 1
F112, 114059301025943970552219, -1
F113, 184551825793033096366333, 1
F114, 298611126818977066918552, -1
F115, 483162952612010163284885, 1
F116, 781774079430987230203437, -1
F117, 1264937032042997393488322, 1
F118, 2046711111473984623691759, -1
F119, 3311648143516982017180081, 1
F120, 5358359254990966640871840, -1
F121, 8670007398507948658051921, 1
F122, 14028366653498915298923761, -1
F123, 22698374052006863956975682, 1
F124, 36726740705505779255899443, -1
F125, 59425114757512643212875125, 1
F126, 96151855463018422468774568, -1
F127, 155576970220531065681649693, 1
F128, 251728825683549488150424261, -1
F129, 407305795904080553832073954, 1
F130, 659034621587630041982498215, -1
F131, 1066340417491710595814572169, 1
F132, 1725375039079340637797070384, -1
F133, 2791715456571051233611642553, 1
F134, 4517090495650391871408712937, -1
F135, 7308805952221443105020355490, 1
F136, 11825896447871834976429068427, -1
F137, 19134702400093278081449423917, 1
F138, 30960598847965113057878492344, -1
F139, 50095301248058391139327916261, 1
F140, 81055900096023504197206408605, -1
F141, 131151201344081895336534324866, 1
F142, 212207101440105399533740733471, -1
F143, 343358302784187294870275058337, 1
F144, 555565404224292694404015791808, -1
F145, 898923707008479989274290850145, 1
F146, 1454489111232772683678306641953, -1
F147, 2353412818241252672952597492098, 1
F148, 3807901929474025356630904134051, -1
F149, 6161314747715278029583501626149, 1
F150, 9969216677189303386214405760200, -1
F151, 16130531424904581415797907386349, 1
F152, 26099748102093884802012313146549, -1

```

Figura 9.02: Página 3 da representação numérica da experiência “64=65?!” pelo programa Python

Realizamos a experiência do F_1 ao F_{10000} e a diferença entre as áreas dos quadriláteros em nenhum momento zerou. Com o último resultado dessa lista (F_{10000}) faremos, a seguir, uma contagem dos dígitos utilizados para a impressão desse número enorme.

Se quisermos calcular o número de dígitos de F_{10000} , basta utilizar a fórmula mencionada em 9.2.1 para $n = 10000$. Assim teremos:

$$N(F_{10000}) = [10000 \times [\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2] - [(\log 5) \div 2]]$$

$$N(F_{10000}) = [10000 \times 0,2089876402499 - 0,349485002]$$

$$N(F_{10000}) = [2089,876402499 - 0,349485002]$$

$$N(F_{10000}) = [2089,526917497] = 2090 \text{ dígitos}$$

Obs.: Quanto maior o valor de “n” deve-se utilizar maior quantidade de dígitos nos números envolvidos na fórmula para que a resposta seja precisa.

Também podemos utilizar os resultados obtidos pelo programa Python para executar uma conferência direta,

F₁₀₀₀₀

```
1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
3364476487643178326662161200510754331030214846068006390656476997468008
1442166662368155595513633734025582065332680836159373734790483865268263
0408924630564318873545443695598274916066020998841839338646527313000888
3026923567361313511757929743785441375213052050434770160226475831890652
7890855154366159582987279682987510631200575428783453215515103870818298
9697916131278562650331954871402142875326981879620469360978799003509623
0229102636813149319527563022783762844154036058440257211433496118002309
1208287046088923962328835461505776583271252546093591128203925285393434
6209042452489294039017062338889910858410651831733604374707379085526317
6432573399371287193758774689747992630583706574283016163740896917842637
8624212835258112820516370298089332099905707920064367426202389783111470
0540749984592503606335609338838319233867830561364353518921332797329081
3373264265263398976392272340788292817795358057099369104917547080893184
1056146322338217465637321248226383092103297701648054726243842374862411
4530938122065649140327510866433945175121615265453613331113140424368548
0510676584349352383695965342807176877532834823434555736671973139274627
3629108210679280784718035329131176778924659089938635459327894523777674
4061922403376386740040213303432974969020283281459334188268176838930720
0363479562311710310129195316979460763273758925353077255237594378843450
4067715555779056450443016640119462580972216729758615026968443146952034
6149322911059706762432685159928347098912847067408620085871350162603120
```

7190317208609408129832158107728207635318662461127824553720853236530577
5956430072517744315051539600905168603220349163222640885248852433158051
5348496224348482993809050704834824493274537326245677558790891871908036
6205800959474315005240253270974699531877072437682590741993963226598414
7498193609285223945039707165443156421328157688908058783183404917434556
2705202235648464951961124602683139709750693826487066132645076650746115
1267752274862159864253071129844118262266105716351506926002986170494542
5047491378115154139941550671256271197133252763631939606902895650288268
608362241082050562430701794976171121233066073310059947366875

Cálculo do número de dígitos de F_{10000} :

$$70 \times 29 + 60 = 2030 + 60 = 2090$$

Entenda o cálculo acima: foi utilizada uma fonte monoespçada (Verdana), ou seja, cada dígito, seja 1, seja 8, ocupa o mesmo espaço horizontal. Assim, em cada linha há a mesma quantidade de dígitos. Se a primeira linha possui 70 algarismos, todas as linhas subsequentes também os terão. Ao todo, são 29 linhas completas e, praticamente, precisamos apenas contar o número de dígitos da última linha ou quantos algarismos faltam para completar a linha. Os dígitos que compõem esse número imenso (e de outros, até F_{50000}) podem ser conferidos, on line, em <http://mathforsmartypants.com/resources/ficalc.php>, visto em 18 de Dezembro de 2014.

9.3 Compreendendo as grandezas envolvidas na planilha

Essa parte de nossas atividades práticas com os alunos será a única em que não usaremos o centímetro como base de nossa referência, nós utilizaremos o metro como medida linear e o m^2 como medida de área. O material necessário para sua realização será: um rolo comum de fio de nylon usada em construção, trena, fita adesiva cinza com excelente capacidade colante, um pedaço de madeira simples (MDF) em forma de quadrado com 1 m de lado e uma superfície plana (preferencialmente uma quadra esportiva) suficientemente grande para caber os alunos que participam da atividade e o retângulo a ser construído. Para executar a primeira atividade do quebra cabeça relativa ao quadrado de lado 8 decomposto em um retângulo 5×13 , em metros, será

necessário um cuidado maior, para que a precisão do resultado final não afete a comparação salutar que se pode fazer, caso tudo ocorra conforme o planejado, por isso, aconselhamos alguns procedimentos para aumentar a probabilidade de sucesso da experiência:

- Procure utilizar a quadra esportiva para construir um plano cartesiano tendo como eixos as linhas já pintadas para a prática de vôlei (basquete, futebol de salão),
- Para verificar se as linhas realmente foram pintadas segundo um ângulo reto, é didaticamente apropriado utilizar o triângulo áureo (3, 4, 5) para uma aplicação prática do Teorema de Pitágoras. Caso o ângulo da quadra não esteja conforme se espera, apenas uma das linhas deverá ser usada para compor o plano cartesiano;
- Apenas para que sirva de referência, ao terminar de se construir o paralelogramo, sua altura deverá ter uma medida entre 11 cm e 12 cm (11,7 cm).

As fotos do mosaico a seguir mostram uma experiência realizada em uma escola pública na cidade de Atibaia. Foi usada uma reportagem obtida na internet que informava sobre o intenso fluxo de pessoas no metrô de São Paulo considerado “o mais lotado do mundo” por atingir a cifra de 8,6 pessoas por metro quadrado nos horários de pico. Os alunos foram convidados a tentar colocar 9 pessoas com os pés na região interna do quadrado de madeira. Também foram desafiados a colocar uma quantidade maior do que na primeira experiência; e questionados sobre a quantidade de pessoas por metro quadrado mais adequada visando uma política mais humana em relação aos cidadãos que usam esse meio de transporte.

Após a experiência no quadrado de madeira, os alunos foram convidados a realizar a mesma tarefa no paralelogramo, que também possui 1 m^2 de área.



Figura 9.03: Atividade do “64 = 65?!” realizada na quadra de uma escola pública de Atibaia - SP

Chegamos a um ponto que requer um esclarecimento prévio antes de continuarmos. Após a experiência na quadra esportiva, aproveitaremos o instante em que nos encontramos para rever conceitos sobre a notação científica (já mencionada no item anterior) e compreender melhor a dimensão da altura do paralelogramo em cada experiência concebida, para associarmos a medidas conhecidas, seja a objetos comuns do dia-a-dia, seja a referências importantes no mundo da ciência. Primeiramente, vamos retomar a experiência realizada como a partição do primeiro quadrado e analisar parte do desenho da construção do retângulo e seu respectivo paralelogramo.

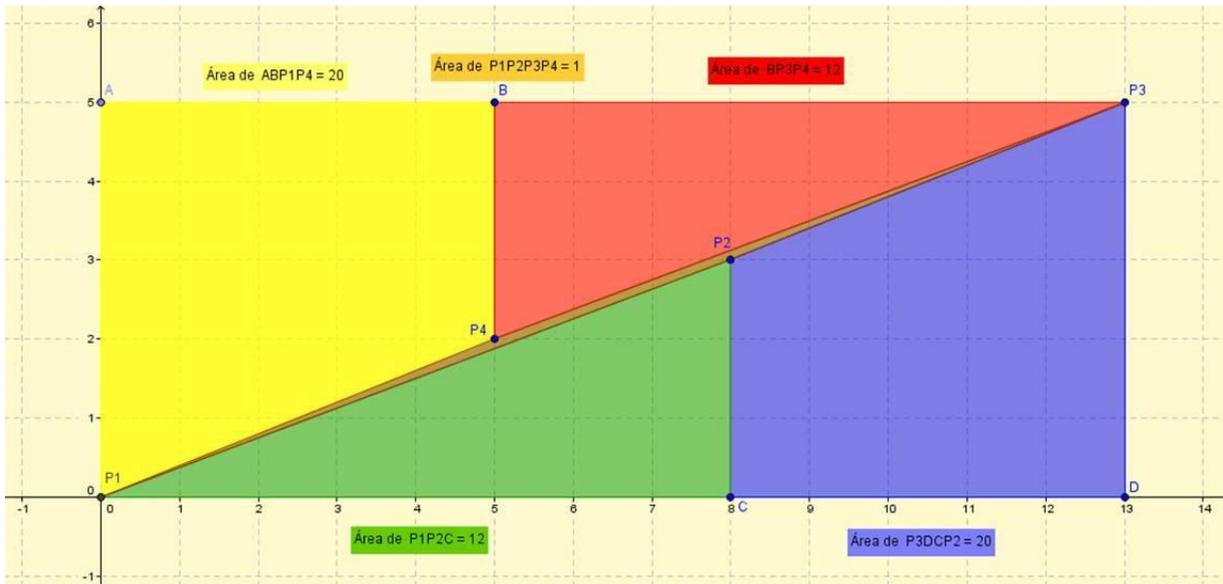


Figura 9.04: Aprofundamento sobre a ordem de grandeza da altura do paralelogramo

Se retirarmos dessa figura acima os dois trapézios e o triângulo vermelho, vamos obter a figura a seguir:

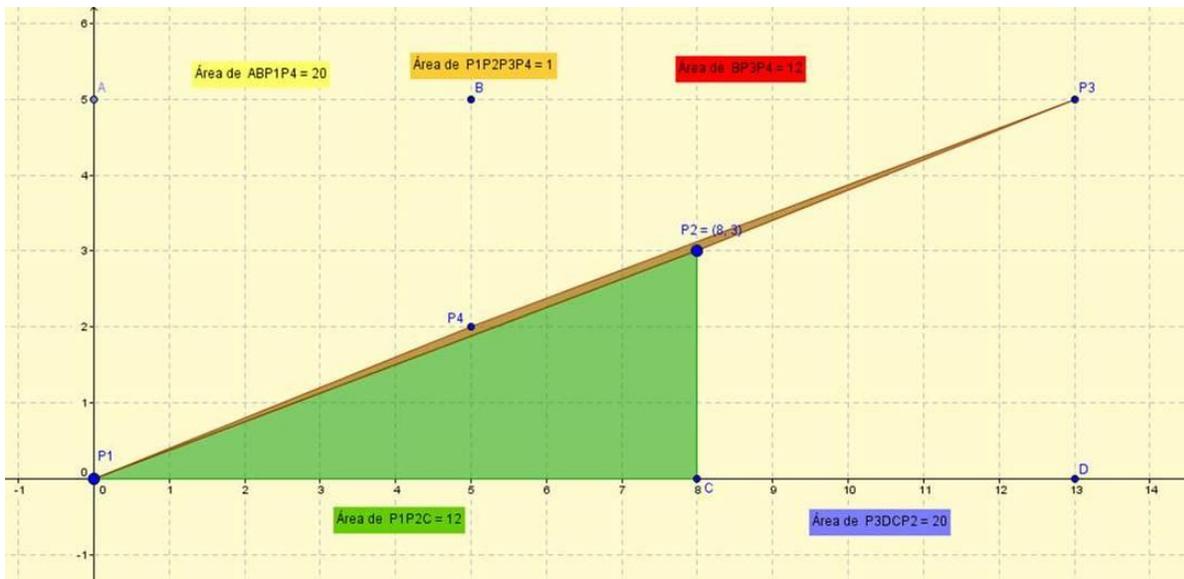


Figura 9.05: Destaque do paralelogramo e sua base na hipotenusa do triângulo verde

Relembrando os dados envolvidos no desenho,

$$Q1 \rightarrow 8^2 + 1 = 5 \times 13 \rightarrow F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$$

$$P_1(0; 0); P_2(8; 3); P_3(13; 5) \text{ e } P_4(5; 2)$$

Podemos observar que o par ordenado $P_2(8; 3)$ é de fundamental importância para se encontrar a base do paralelogramo, pois sua medida é nada mais do que a medida da HIPOTENUSA do triângulo retângulo P_1P_2C , cujos catetos medem 3 e 8. Assim, para calcularmos a medida da hipotenusa, basta utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$P_1P_2 = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73} \cong 8,5440037$$

Como sabemos que a área do PARALELOGRAMO é dada por $A = b \times h$ e $A = 1$, temos:

$1 = 8,5440037 \times h$, do que podemos concluir que $h \cong 1/8,5440037 \cong 0,11704$, ou seja, a altura do paralelogramo é o inverso da medida da hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 8 e 3. Na experiência realizada na quadra esportiva, a altura do paralelogramo seria, aproximadamente, 0,117 m ou 11,7 cm, espaço suficiente para apoiar os pés de diversas pessoas na atividade do metro quadrado.

Para efetuarmos a generalização do resultado acima, vamos considerar: sejam $F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$, as representações de 5 números consecutivos da sequência de Fibonacci, de tal modo que $n \in \mathbf{N}, 3 < n \leq 34$ (limite observado nas tabelas até agora) e n é par. Ficam definidos, no retângulo abaixo, os seguintes pontos:

$$P_1(0; 0); P_2(F_{n+2}; F_n); P_3(F_{n+3}; F_{n+1}) \text{ e } P_4(F_{n+1}; F_{n-1})$$

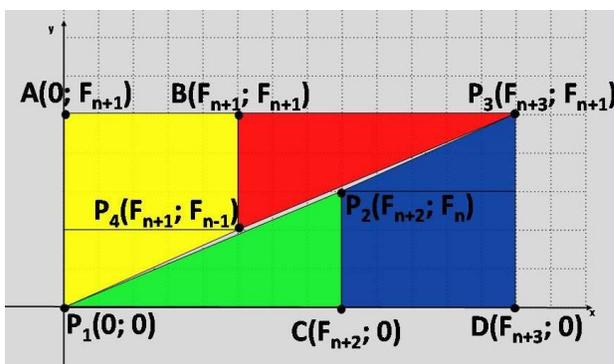


Figura 9.06: Representação genérica da experiência “64 = 65?!” , no plano cartesiano

Também podemos aproveitar a generalização dos 4 vértices ($P_1P_2P_3P_4$) para confirmar, em uma planilha, que realmente estamos tratando de um PARALELOGRAMO.

$$P_1(0; 0); P_2(F_{n+2}; F_n); P_3(F_{n+3}; F_{n+1}) \text{ e } P_4(F_{n+1}; F_{n-1})$$

$$M_{13} = \left(\frac{0+F_{n+3}}{2}; \frac{0+F_{n+1}}{2} \right) \text{ e } M_{24} = \left(\frac{F_{n+1}+F_{n+2}}{2}; \frac{F_{n-1}+F_n}{2} \right)$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|----|-----|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | F0 | 0 | xP ₁ | xP ₃ | yP ₁ | yP ₃ | xMP ₁₃ | yMP ₁₃ | xMP ₂₄ | yMP ₂₄ | xP ₂ | xP ₄ | yP ₂ | yP ₄ |
| 2 | F1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | F2 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | F3 | 2 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | F4 | 3 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2,5 | 1,0 | 2,5 | 1,0 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 6 | F5 | 5 | 0 | 8 | 0 | 3 | 4,0 | 1,5 | 4,0 | 1,5 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| 7 | F6 | 8 | 0 | 13 | 0 | 5 | 6,5 | 2,5 | 6,5 | 2,5 | 8 | 5 | 3 | 2 |
| 8 | F7 | 13 | 0 | 21 | 0 | 8 | 10,5 | 4,0 | 10,5 | 4,0 | 13 | 8 | 5 | 3 |
| 9 | F8 | 21 | 0 | 34 | 0 | 13 | 17,0 | 6,5 | 17,0 | 6,5 | 21 | 13 | 8 | 5 |
| 10 | F9 | 34 | 0 | 55 | 0 | 21 | 27,5 | 10,5 | 27,5 | 10,5 | 34 | 21 | 13 | 8 |
| 11 | F10 | 55 | 0 | 89 | 0 | 34 | 44,5 | 17,0 | 44,5 | 17,0 | 55 | 34 | 21 | 13 |
| 12 | F11 | 89 | 0 | 144 | 0 | 55 | 72,0 | 27,5 | 72,0 | 27,5 | 89 | 55 | 34 | 21 |
| 13 | F12 | 144 | 0 | 233 | 0 | 89 | 116,5 | 44,5 | 116,5 | 44,5 | 144 | 89 | 55 | 34 |
| 14 | F13 | 233 | 0 | 377 | 0 | 144 | 188,5 | 72,0 | 188,5 | 72,0 | 233 | 144 | 89 | 55 |
| 15 | F14 | 377 | 0 | 610 | 0 | 233 | 305,0 | 116,5 | 305,0 | 116,5 | 377 | 233 | 144 | 89 |
| 16 | F15 | 610 | 0 | 987 | 0 | 377 | 493,5 | 188,5 | 493,5 | 188,5 | 610 | 377 | 233 | 144 |
| 17 | F16 | 987 | 0 | 1597 | 0 | 610 | 798,5 | 305,0 | 798,5 | 305,0 | 987 | 610 | 377 | 233 |
| 18 | F17 | 1597 | 0 | 2584 | 0 | 987 | 1292,0 | 493,5 | 1292,0 | 493,5 | 1597 | 987 | 610 | 377 |
| 19 | F18 | 2584 | 0 | 4181 | 0 | 1597 | 2090,5 | 798,5 | 2090,5 | 798,5 | 2584 | 1597 | 987 | 610 |
| 20 | F19 | 4181 | 0 | 6765 | 0 | 2584 | 3382,5 | 1292,0 | 3382,5 | 1292,0 | 4181 | 2584 | 1597 | 987 |
| 21 | F20 | 6765 | 0 | 10946 | 0 | 4181 | 5473,0 | 2090,5 | 5473,0 | 2090,5 | 6765 | 4181 | 2584 | 1597 |
| 22 | F21 | 10946 | 0 | 17711 | 0 | 6765 | 8855,5 | 3382,5 | 8855,5 | 3382,5 | 10946 | 6765 | 4181 | 2584 |
| 23 | F22 | 17711 | 0 | 28657 | 0 | 10946 | 14328,5 | 5473,0 | 14328,5 | 5473,0 | 17711 | 10946 | 6765 | 4181 |
| 24 | F23 | 28657 | 0 | 46368 | 0 | 17711 | 23184,0 | 8855,5 | 23184,0 | 8855,5 | 28657 | 17711 | 10946 | 6765 |
| 25 | F24 | 46368 | 0 | 75025 | 0 | 28657 | 37512,5 | 14328,5 | 37512,5 | 14328,5 | 46368 | 28657 | 17711 | 10946 |
| 26 | F25 | 75025 | 0 | 121393 | 0 | 46368 | 60696,5 | 23184,0 | 60696,5 | 23184,0 | 75025 | 46368 | 28657 | 17711 |
| 27 | F26 | 121393 | 0 | 196418 | 0 | 75025 | 98209,0 | 37512,5 | 98209,0 | 37512,5 | 121393 | 75025 | 46368 | 28657 |
| 28 | F27 | 196418 | 0 | 317811 | 0 | 121393 | 158905,5 | 60696,5 | 158905,5 | 60696,5 | 196418 | 121393 | 75025 | 46368 |
| 29 | F28 | 317811 | 0 | 514229 | 0 | 196418 | 257114,5 | 98209,0 | 257114,5 | 98209,0 | 317811 | 196418 | 121393 | 75025 |

Tabela 9.16: Cálculo dos pontos médios das diagonais do paralelogramo

Ao continuar a sequência da tabela acima, pode-se perceber, visualmente, que os dados começam a ser não computáveis a partir de F_{1476} , pelos mesmos motivos já mencionados anteriormente.

9.4 Razões notáveis em uma planilha

9.4.1 A razão áurea

Se observarmos com atenção os cortes realizados nos quadrados iniciais, como ilustra a figura abaixo, podemos verificar que os números que são utilizados para cortar os primeiros quadrados para iniciar a experiência, são números consecutivos da

sequência de Fibonacci. Se tivermos a curiosidade de calcular a razão entre eles teremos:

$$Q_1: 5/3 = 1,666666\dots$$

$$Q_2: 13/8 = 1,625$$

$$Q_3: 34/21 = 1,619047619047\dots$$

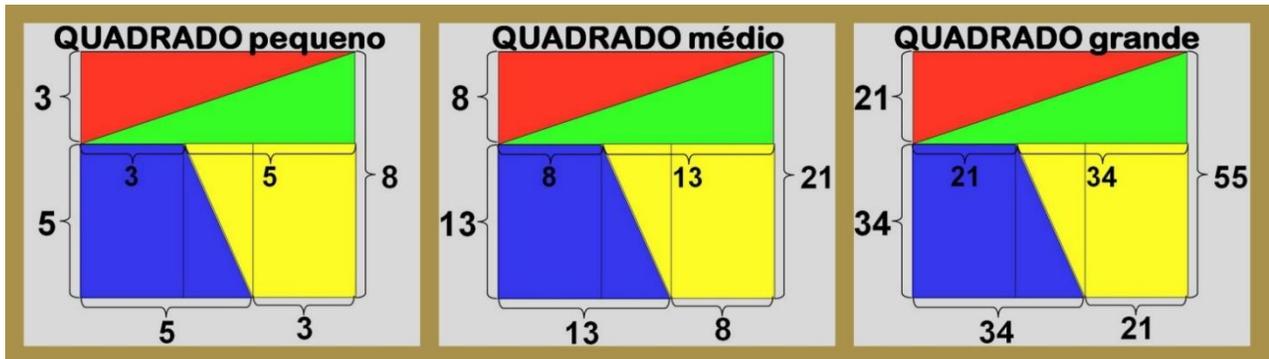


Figura 9.07: A razão entre as medidas dos dois primeiros cortes nos três primeiros quadrados

Obs.: Os desenhos acima não obedecem às proporções reais.

Os resultados apresentados nas três primeiras razões observadas têm em comum um número decimal estabilizado próximo a **1,6**. Para analisarmos com mais cuidado e com muitos exemplos a mais, podemos utilizar o recurso da planilha eletrônica não só com os exemplos das experiências já realizadas, como também as razões de todos os números consecutivos da sequência de Fibonacci. Apenas para auxiliar a leitura da planilha, a linha 7 está associada à primeira experiência do “QUADRADO pequeno”, o lado do quadrado que foi recortado mede 8 cm e a razão entre as medidas do primeiro corte (5 e 3) é 1,666666666666667000000. Convém salientar que a diferença entre o resultado da planilha e do resultado da conta feita a mão se deve à norma IEEE 754.

| H7 | | | | | | | |
|----|-----|------------------|-------------|-------------------|-----|-------------|------------------------|
| A | B | C | D | E | F | G | H |
| | Fn | Área do QUADRADO | | Área do RETÂNGULO | Q-R | "h" | RAZÃO |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | F1 | 1 | | | | | |
| 3 | F2 | 1 | | | | | |
| 4 | F3 | 2 | | | | | |
| 5 | F4 | 3 | 9,0 | 10,0 | -1 | 0,316227766 | 2,00000000000000000000 |
| 6 | F5 | 5 | 25,0 | 24,0 | 1 | 0,185695338 | 1,50000000000000000000 |
| 7 | F6 | 8 | 64,0 | 65,0 | -1 | 0,117041147 | 1,66666666666666700000 |
| 8 | F7 | 13 | 169,0 | 168,0 | 1 | 0,071795816 | 1,60000000000000000000 |
| 9 | F8 | 21 | 441,0 | 442,0 | -1 | 0,044499416 | 1,62500000000000000000 |
| 10 | F9 | 34 | 1156,0 | 1155,0 | 1 | 0,027472113 | 1,61538461538462000000 |
| 11 | F10 | 55 | 3025,0 | 3026,0 | -1 | 0,016985789 | 1,61904761904762000000 |
| 12 | F11 | 89 | 7921,0 | 7920,0 | 1 | 0,010496121 | 1,61764705882353000000 |
| 13 | F12 | 144 | 20736,0 | 20737,0 | -1 | 0,006487355 | 1,61818181818182000000 |
| 14 | F13 | 233 | 54289,0 | 54288,0 | 1 | 0,004009312 | 1,61797528089890000000 |
| 15 | F14 | 377 | 142129,0 | 142130,0 | -1 | 0,002477913 | 1,61805555555556000000 |
| 16 | F15 | 610 | 372100,0 | 372099,0 | 1 | 0,001531429 | 1,61802575107296000000 |
| 17 | F16 | 987 | 974169,0 | 974170,0 | -1 | 0,000946477 | 1,61803713527851000000 |
| 18 | F17 | 1597 | 2550409,0 | 2550408,0 | 1 | 0,000584954 | 1,61803278688525000000 |
| 19 | F18 | 2584 | 6677056,0 | 6677057,0 | -1 | 0,000361522 | 1,61803444782168000000 |
| 20 | F19 | 4181 | 17480761,0 | 17480760,0 | 1 | 0,000223433 | 1,61803381340013000000 |
| 21 | F20 | 6765 | 45765225,0 | 45765226,0 | -1 | 0,000138089 | 1,61803405572755000000 |
| 22 | F21 | 10946 | 119814916,0 | 119814915,0 | 1 | 8,53437E-05 | 1,61803396316671000000 |
| 23 | F22 | 17711 | 313679521,0 | 313679522,0 | -1 | 5,27453E-05 | 1,61803399852180000000 |
| 24 | F23 | 28657 | 821223649,0 | 821223648,0 | 1 | 3,25984E-05 | 1,61803398501736000000 |

| H43 | | | | | | | |
|-----|-----|------------------|-----------------------|-----------------------|-----|-------------|------------------------|
| A | B | C | D | E | F | G | H |
| | Fn | Área do QUADRADO | | Área do RETÂNGULO | Q-R | "h" | RAZÃO |
| 25 | F24 | 46368 | 2149991424,0 | 2149991425,0 | -1 | 2,01469E-05 | 1,61803399017560000000 |
| 26 | F25 | 75025 | 5628750625,0 | 5628750624,0 | 1 | 1,24515E-05 | 1,61803398820532000000 |
| 27 | F26 | 121393 | 14736260449,0 | 14736260450,0 | -1 | 7,69544E-06 | 1,61803398895790000000 |
| 28 | F27 | 196418 | 38580030724,0 | 38580030723,0 | 1 | 4,75604E-06 | 1,61803398867044000000 |
| 29 | F28 | 317811 | 101003831721,0 | 101003831722,0 | -1 | 2,9394E-06 | 1,61803398878024000000 |
| 30 | F29 | 514229 | 264431464441,0 | 264431464440,0 | 1 | 1,81665E-06 | 1,61803398873830000000 |
| 31 | F30 | 832040 | 692290561600,0 | 692290561601,0 | -1 | 1,12275E-06 | 1,61803398875432000000 |
| 32 | F31 | 1346269 | 1812440220361,0 | 1812440220360,0 | 1 | 6,93897E-07 | 1,61803398874820000000 |
| 33 | F32 | 2178309 | 4745030099481,0 | 4745030099482,0 | -1 | 4,28852E-07 | 1,61803398875054000000 |
| 34 | F33 | 3524578 | 12422650078084,0 | 12422650078083,0 | 1 | 2,65045E-07 | 1,61803398874965000000 |
| 35 | F34 | 5702887 | 32522920134769,0 | 32522920134770,0 | -1 | 1,63807E-07 | 1,61803398874999000000 |
| 36 | F35 | 9227465 | 85146110326225,0 | 85146110326224,0 | 1 | 1,01238E-07 | 1,61803398874986000000 |
| 37 | F36 | 14930352 | 222915410843904,0 | 222915410843905,0 | -1 | 6,25687E-08 | 1,61803398874991000000 |
| 38 | F37 | 24157817 | 583600122205489,0 | 583600122205488,0 | 1 | 3,86696E-08 | 1,61803398874989000000 |
| 39 | F38 | 39088169 | 1527884955772560,0 | 1527884955772560,0 | 0 | 2,38991E-08 | 1,61803398874990000000 |
| 40 | F39 | 63245986 | 4000054745112200,0 | 4000054745112190,0 | 0 | 1,47705E-08 | 1,61803398874989000000 |
| 41 | F40 | 102334155 | 10472279279564000,0 | 10472279279564000,0 | 0 | 9,12865E-09 | 1,61803398874990000000 |
| 42 | F41 | 165580141 | 27416783093579900,0 | 27416783093579900,0 | 0 | 5,64181E-09 | 1,61803398874989000000 |
| 43 | F42 | 267914296 | 71778070001175600,0 | 71778070001175600,0 | 0 | 3,48683E-09 | 1,61803398874989000000 |
| 44 | F43 | 433494437 | 187917426909947000,0 | 187917426909947000,0 | 0 | 2,15498E-09 | 1,61803398874989000000 |
| 45 | F44 | 701408733 | 491974210728665000,0 | 491974210728665000,0 | 0 | 1,33185E-09 | 1,61803398874989000000 |
| 46 | F45 | 1134903170 | 1288005205276050000,0 | 1288005205276050000,0 | 0 | 8,2313E-10 | 1,61803398874989000000 |
| 47 | F46 | 1836311903 | 3372041405099480000,0 | 3372041405099480000,0 | 0 | 5,08722E-10 | 1,61803398874989000000 |

Tabela 9.17: Tabelas do Excel envolvendo a razão entre dois termos consecutivos, de F_1 a F_{46}

A última razão, a partir da qual não há mais modificação, refere-se à linha 43 cujo resultado é **1,61803398874989000000**. Levando-se em conta que, no transcorrer da construção de cada linha da planilha, algumas casas decimais se estabilizaram e que, pelas limitações que a norma IEEE 754 impõe e pelos limites naturais que qualquer computador possui, não podemos averiguar até onde essa “estabilização” ocorre, uma

curiosidade mais aguçada pode nos fazer conjecturar: Será que existe uma razão “r” na qual essa sequência de razões vai se estabilizando pouco a pouco?!

Partindo da premissa que essa razão “r” exista ($r \neq 0$), diante de quaisquer três números consecutivos da sequência de Fibonacci (F_{n-1}, F_n, F_{n+1}), ela teria a seguinte característica:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = r$$

aplicando a definição da sequência de Fibonacci, temos:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \Rightarrow \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} \Rightarrow \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

ou seja,

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \Rightarrow r = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{r^2}{r} = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 = r + 1$$

ou seja, se existe uma razão “r”, ela obedece a relação $r^2 = r + 1$ (I) e é solução da equação do 2º grau $r^2 - r - 1 = 0$.

Por **soma** e **produto** sabemos que **S = +1** e **P = -1** e, considerando α e β as soluções dessa equação, teremos:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow \alpha + \beta = +1 \text{ \# } \alpha \times \beta = -1$$

Se dividirmos por “r” ambos os membros da relação (I), obteremos a relação (II),

$$r^2 = r + 1 \Rightarrow \frac{r^2}{r} = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} \Rightarrow r = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = r - 1$$

Desprezando a solução negativa, pois sabemos que a razão teórica da tabela é um número positivo, teríamos as seguintes relações válidas para α :

- $\alpha^2 = \alpha + 1$ (I),
- $\alpha^{-1} = \alpha - 1$ (II),
- $\alpha \cong 1,61803398874989484820458683436563811772030917980576...$

O valor acima mostra uma aproximação com 50 casas decimais [33]. Se compararmos o valor de α acima como o valor da razão estabilizada na tabela (1,61803398874989000000), podemos verificar que, até a sequência de zeros, os valores de todas as casas decimais são exatamente os mesmos. As duas primeiras relações também são válidas para β e $\beta \cong -0,61803398874989\dots$

Essa razão “r”, fruto de uma conjectura sobre as razões de uma tabela é um número já há muito tempo conhecido e famoso, tendo recebido, ao longo da história, títulos nobres como “Número de Ouro”, “Razão Áurea”, “Número Áureo”, “Seção Áurea” e até mesmo de “A Proporção Divina”. Em Livio [33], página 96, diz “A Razão Áurea aparece em Elementos em vários lugares. A primeira definição da Razão Áurea (“razão extrema e média”) relacionada a áreas é dada de uma forma um tanto indireta no livro II. Uma segunda e mais clara definição relativa à proporção aparece no livro VI. Euclides então usa a Razão Áurea especialmente na construção do pentágono (no livro IV) e na construção do icosaedro e do dodecaedro (no livro XIII)”. Em “Os elementos” [20], página 231, podemos encontrar na definição 3:

“Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor”

Para explicar a definição de Euclides quanto à Razão Áurea, Livio [33], faz a interpretação: “...a linha AB é dividida pelo ponto C. A definição de Euclides no livro VI de razão extrema e média é que (segmento maior)/(segmento menor) é igual a (linha inteira)/(segmento maior). Em outras palavras,.... $AC/CB = AB/AC$ ”, como ilustra a figura abaixo:

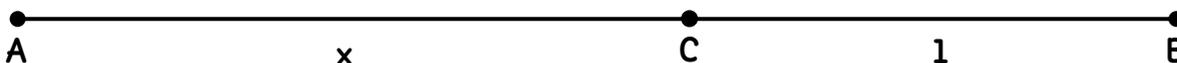


Figura 9.08: Representação da divisão de um segmento em extrema e média razão

Pela definição acima, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Os mesmos valores encontrados anteriormente para α e β . Importante destacar duas relações entre as duas soluções, α e β , provenientes da relação de soma (S) e produto (P) em uma equação do 2º grau ($x^2 - Sx + P = 0$)

$$\text{em } x^2 - x - 1 = 0, \quad \alpha + \beta = +1 \text{ e } \alpha \times \beta = -1 \text{ ou } \left(\alpha = -\frac{1}{\beta} \text{ e } \beta = -\frac{1}{\alpha} \right)$$

Livio [33] afirma que, no início do século XX, Mark Barr atribuiu à Razão Áurea o nome de Φ (Phi), “a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego, que viveu entre 490 e 430 a.C.”.

Há uma vasta literatura abordando propriedades do Número de Ouro e, em muitas obras, são atribuídas a ele características místicas e associando a diversos elementos da natureza. Discorrer sobre esses aspectos não faz parte dos objetivos desse trabalho, mas o professor pode solicitar de seus alunos a realização de uma pesquisa quanto a esse assunto, tomando-se o cuidado para distinguir o fato do mito. Uma tarefa difícil, altamente desafiadora, mas plena de satisfação para quem possui uma sede enorme em aprender.

9.4.2 A compreensão da razão áurea sob a ótica da MusiColorida e Planilha

Um atividade interessante envolvendo razões pode ser realizada utilizando a calculadora MusicalColorida para repetir, passo a passo, a atividade do item anterior (9.4.1) com o diferencial de explorar a expansão decimal das razões trabalhadas até então. Mas, nós vamos aproveitar e vamos estudar, um a um, cada um dos retângulos trabalhados até agora, analisando a razão entre seus lados, no caso, o maior sobre o menor. Usaremos a calculadora MusicalColorida para estudarmos a parte decimal dos

resultados obtidos e tecer considerações sobre sua expansão decimal. Começaremos calculando a razão entre os lados do primeiro retângulo da experiência (13/5) e depois continuaremos os outros casos na sequência:

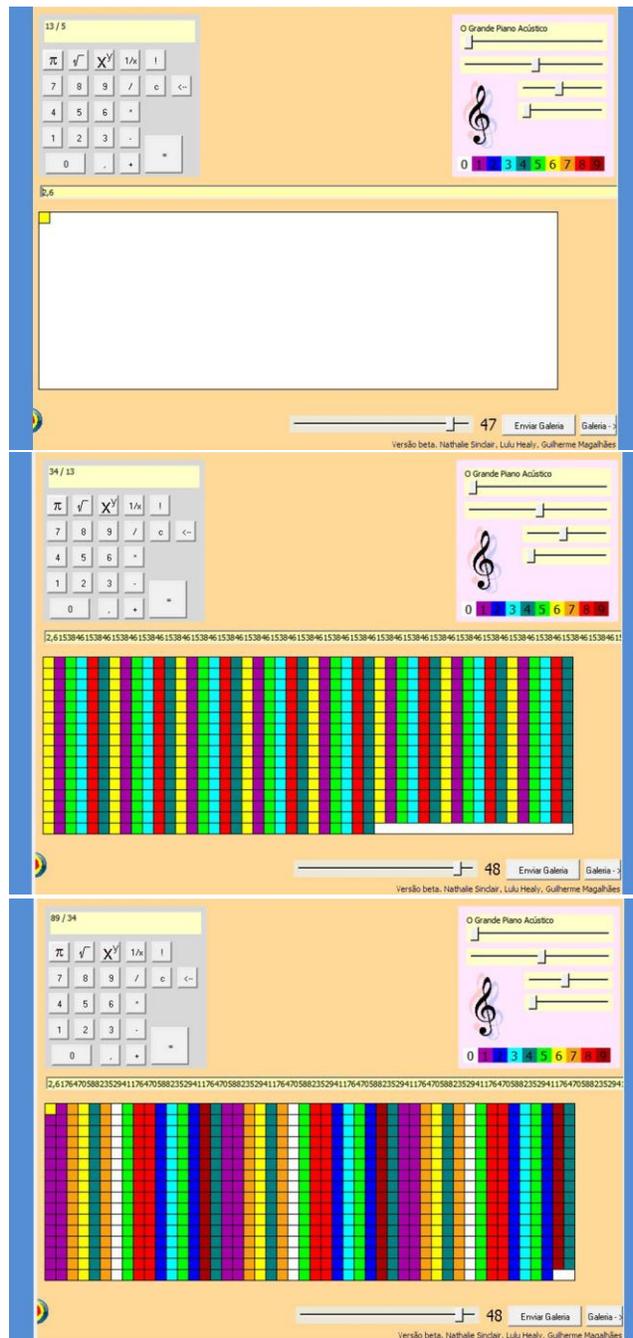


Figura 9.09: Representação das razões na MusiCalcolorida, 13/5; 34/13 e 89/34

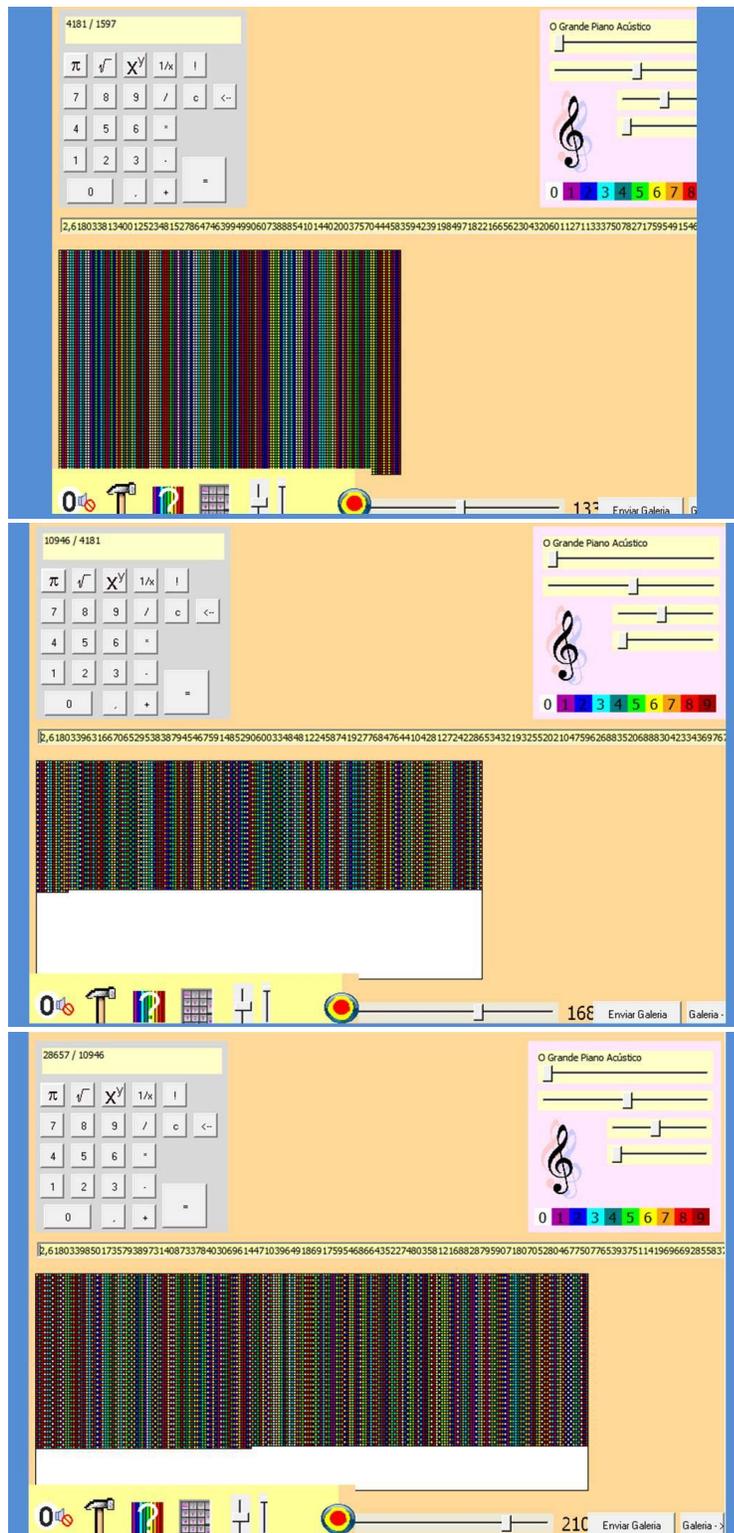


Figura 9.11: Representação das razões na MusiCalcolorida, 4181/1597; 10946/4181 e 28657/10946

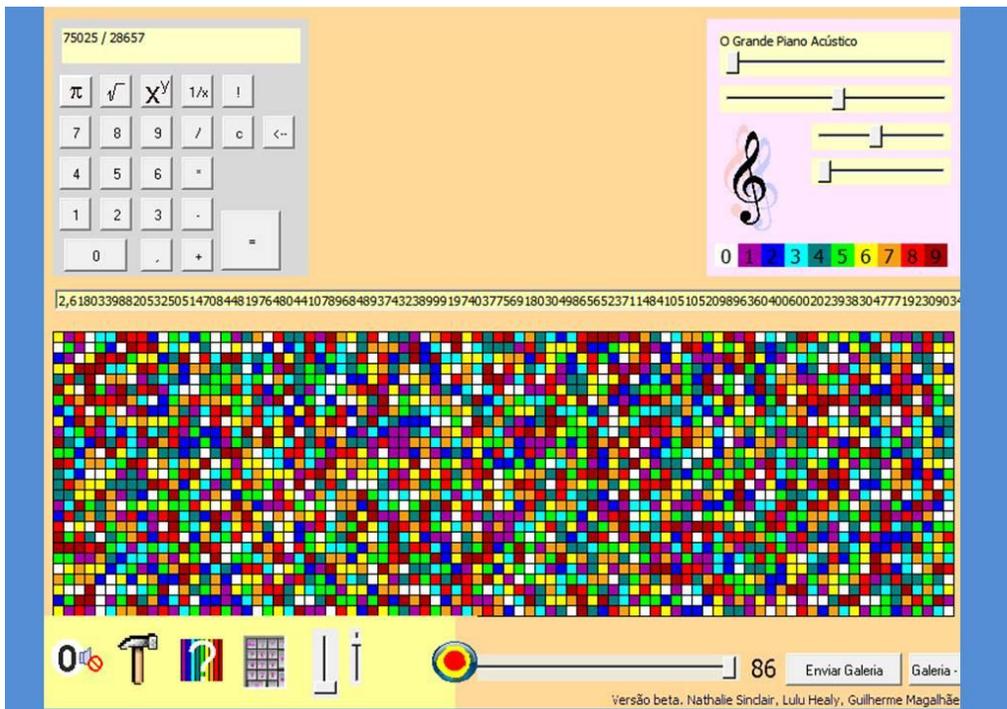


Figura 9.12: Representação da razão, na MusiCalcolorida, 75025/28657

A experiência começou com um número decimal exato, depois foi passando por dízimas periódicas em que o período pode ser calculado sob contagem na tela, depois vimos dízimas periódicas que são constatáveis apenas pelo aspecto visual e, por último, uma malha quadriculada que não oferece possibilidade de visualização de qual seja o período do resultado da razão.

Agora, veremos a praticidade de uma planilha para executar esse tipo de cálculo que possibilita comparações de resultados para que se possa extrair uma característica matemática, uma propriedade, uma regularidade. Utilizaremos a mesma planilha do item anterior, ocultaremos algumas colunas cuja análise não nos interessa nesse momento e acrescentaremos uma coluna em que serão colocadas as razões entre as medidas dos lados dos retângulos, sempre tomando o maior dividido pelo menor. Apenas para melhor interpretação da tabela, na linha 7, o lado do quadrado em questão mede 8, os lados do retângulo resultante medem 13 e 5, cuja razão, nessa ordem é 2,6.

| I7 | | | |
|----|-----------|-----------|------------------------|
| A | B | H | I |
| 1 | Fn | Fi | Fi² |
| 2 | F1 | 1 | |
| 3 | F2 | 1 | |
| 4 | F3 | 2 | |
| 5 | F4 | 3 | 2,00000000000000000000 |
| 6 | F5 | 5 | 1,50000000000000000000 |
| 7 | F6 | 8 | 1,66666666666666700000 |
| 8 | F7 | 13 | 1,60000000000000000000 |
| 9 | F8 | 21 | 1,62500000000000000000 |
| 10 | F9 | 34 | 1,61538461538462000000 |
| 11 | F10 | 55 | 1,61904761904762000000 |
| 12 | F11 | 89 | 1,61764705882353000000 |
| 13 | F12 | 144 | 1,61818181818182000000 |
| 14 | F13 | 233 | 1,61797752808989000000 |
| 15 | F14 | 377 | 1,61805555555556000000 |
| 16 | F15 | 610 | 1,61802575107296000000 |
| 17 | F16 | 987 | 1,61803713527851000000 |
| 18 | F17 | 1597 | 1,61803278688525000000 |
| 19 | F18 | 2584 | 1,61803444782168000000 |
| 20 | F19 | 4181 | 1,61803381340013000000 |
| 21 | F20 | 6765 | 1,61803405572755000000 |
| 22 | F21 | 10946 | 1,61803396316671000000 |
| 23 | F22 | 17711 | 1,61803398521800000000 |
| 24 | F23 | 28657 | 1,61803398501736000000 |
| 25 | F24 | 46368 | 1,61803399017560000000 |
| 26 | F25 | 75025 | 1,61803398820532000000 |

| I37 | | | |
|-----|-----------|-------------|------------------------|
| A | B | H | I |
| 1 | Fn | Fi | Fi² |
| 27 | F26 | 121393 | 1,61803398895790000000 |
| 28 | F27 | 196418 | 1,61803398867044000000 |
| 29 | F28 | 317811 | 1,61803398878024000000 |
| 30 | F29 | 514229 | 1,61803398873830000000 |
| 31 | F30 | 832040 | 1,61803398875432000000 |
| 32 | F31 | 1346269 | 1,61803398874820000000 |
| 33 | F32 | 2178309 | 1,61803398875054000000 |
| 34 | F33 | 3524578 | 1,61803398874965000000 |
| 35 | F34 | 5702887 | 1,61803398874999000000 |
| 36 | F35 | 9227465 | 1,61803398874986000000 |
| 37 | F36 | 14930352 | 1,61803398874991000000 |
| 38 | F37 | 24157817 | 1,61803398874989000000 |
| 39 | F38 | 39088169 | 1,61803398874990000000 |
| 40 | F39 | 63245986 | 1,61803398874989000000 |
| 41 | F40 | 102334155 | 1,61803398874990000000 |
| 42 | F41 | 165580141 | 1,61803398874989000000 |
| 43 | F42 | 267914296 | 1,61803398874989000000 |
| 44 | F43 | 433494437 | 1,61803398874989000000 |
| 45 | F44 | 701408733 | 1,61803398874989000000 |
| 46 | F45 | 1134903170 | 1,61803398874989000000 |
| 47 | F46 | 1836311903 | 1,61803398874989000000 |
| 48 | F47 | 2971215073 | 1,61803398874989000000 |
| 49 | F48 | 4807526976 | 1,61803398874989000000 |
| 50 | F49 | 7778742049 | 1,61803398874989000000 |
| 51 | F50 | 12586269025 | 1,61803398874989000000 |

Tabela 9.18: Tabelas do Excel envolvendo a razão entre dois lados do retângulo, de F₅ a F₅₀

Ao analisarmos a sequência de razões dos lados dos retângulos, podemos verificar que, pouco a pouco, a parte decimal aproxima-se do resultado que encontramos para Φ e a parte inteira apresenta-se com uma unidade a mais. Podemos conjecturar que, se tivéssemos possibilidade de continuar a tabela indefinidamente, quanto maior o valor de F_n , mais a razão (q) entre os lados do retângulo se aproximaria de Φ^2 . Para facilitar a compreensão dos alunos, podemos esclarecer que, partindo da premissa de que exista uma razão “ q ” ($q \neq 0$), diante de quaisquer três números consecutivos da sequência de Fibonacci (F_{n-1} , F_n , F_{n+1}), ela teria a seguinte característica:

$$q = \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} \times \frac{F_n}{F_n} = \frac{F_n}{F_{n-1}} \times \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi \times \Phi = \Phi^2$$

agora, escrevendo de maneira mais elegante a expressão $\alpha^2 = \alpha + 1$ (I), calculada no item anterior, teremos: $\Phi^2 = \Phi + 1$. Se dividirmos essa igualdade por Φ e isolarmos a fração no primeiro membro teremos:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \Rightarrow \frac{\Phi^2}{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \text{ ou } \Phi^{-1} = \Phi - 1$$

Convém salientar que a relação $\Phi^2 = \Phi + 1$ também é válida para a outra raiz da equação do 2º grau que resolvemos anteriormente. Assim, são válidas as relações a seguir: $\alpha^2 = \alpha + 1$ (I) e $\beta^2 = \beta + 1$ (II). Essas relações serão de vital importância para realizarmos um maravilhoso casamento entre a praticidade das planilhas e o atraente visual oferecido pelo programa Geogebra.

9.5 O termo geral da sequência de Fibonacci e a Geometria Dinâmica

Para encerrarmos com chave de ouro esse capítulo, precisamos aproveitar uma faceta que os programas de Geometria Dinâmica, como o Geogebra, oferecem: o movimento dos elementos geométricos em função de uma variável.

Para entendermos melhor do que estamos falando, pensemos resumidamente na sequência de retângulos que construímos no desenvolver desse trabalho. Se após a mudança de quadros que realizamos, tomamos ciência dos pares ordenados que formam não só o primeiro retângulo, mas também o de qualquer um deles de uma forma genérica, seria ótimo se pudéssemos assistir na tela do computador a construção de cada um desses retângulos, um após o outro, até o limite suportável pelo programa, já que o Geogebra também possui os seus limites [2].

Já sabemos que, se tivermos 5 números consecutivos da sequência de Fibonacci, F_{n-1} , F_n , F_{n+1} , F_{n+2} , F_{n+3} , $n \in \mathbf{N}$ e n par, poderíamos construir, de forma genérica o retângulo e seu respectivo paralelogramo nos casos estudados até agora.

$$P_1(0; 0); P_2(F_{n+2}; F_n); P_3(F_{n+3}; F_{n+1}) \text{ e } P_4(F_{n+1}; F_{n-1})$$

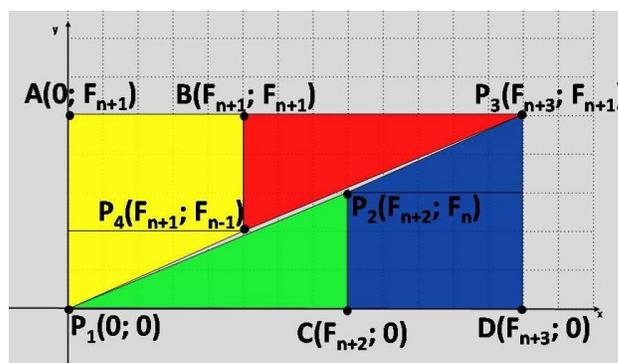


Figura 9.13: Representação genérica da mudança de quadro relativa ao retângulo do evento “64=65?!”

O único impedimento que temos para realizar isso, sem conhecimento de programação, é conhecermos uma fórmula geral de um termo da sequência de Fibonacci

para podermos expressar uma sequência genérica de 5 números consecutivos na planilha do Geogebra. Para facilitar a compreensão dos passos a serem seguidos até atingirmos nosso objetivo, resumiremos abaixo alguns de nossos resultados obtidos até agora antes de darmos início à busca da fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci:

$$(I)\alpha^2 = \alpha + 1, \quad (II)\beta^2 = \beta + 1, \quad (III)\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (III)\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$(IV)\alpha \times \beta = -1, \quad (V)\alpha + \beta = +1, \quad (VI)\alpha^{-1} = \alpha - 1, \quad (VII)\alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

Figura 9.14: Formulário, sintetizando as relações obtidas até agora sobre α e β

Primeiros elementos da sequência de Fibonacci:

$$F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, F_6=8, F_7=13, F_8=21, F_9=34, F_{10}=55, F_{11}=89, F_{12}=144, \\ F_{13}=233, F_{14}=377, F_{15}=610, F_{16}=987, F_{17}=1597, F_{18}=2584, F_{19}=4181, \dots$$

Se multiplicarmos, ambos os membros da igualdade (I) $\alpha^2 = \alpha + 1$ por α , obteremos:

$$\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = \mathbf{2\alpha + 1}; \text{ assim,}$$

$$\alpha^4 = \alpha \times \alpha^3 = \alpha \times (2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2(\alpha + 1) + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = \mathbf{3\alpha + 2};$$

$$\alpha^5 = \alpha \times \alpha^4 = \alpha \times (3\alpha + 2) = 3\alpha^2 + 2\alpha = 3(\alpha + 1) + 2\alpha = 3\alpha + 3 + 2\alpha = \mathbf{5\alpha + 3};$$

$$\alpha^6 = \alpha \times \alpha^5 = \alpha \times (5\alpha + 3) = 5\alpha^2 + 3\alpha = 5(\alpha + 1) + 3\alpha = 5\alpha + 5 + 3\alpha = \mathbf{8\alpha + 5};$$

$$\alpha^7 = \alpha \times \alpha^6 = \alpha \times (8\alpha + 5) = 8\alpha^2 + 5\alpha = 8(\alpha + 1) + 5\alpha = 8\alpha + 8 + 5\alpha = \mathbf{13\alpha + 8};$$

$$\alpha^8 = \alpha \times \alpha^7 = \alpha \times (13\alpha + 8) = 13\alpha^2 + 8\alpha = 13(\alpha + 1) + 8\alpha = 13\alpha + 13 + 8\alpha = \mathbf{21\alpha + 13};$$

$$\alpha^9 = \alpha \times \alpha^8 = \alpha \times (21\alpha + 13) = 21\alpha^2 + 13\alpha = 21(\alpha + 1) + 13\alpha = 21\alpha + 21 + 13\alpha = \mathbf{34\alpha + 21};$$

$$\alpha^{10} = \alpha \times \alpha^9 = \alpha \times (34\alpha + 21) = 34\alpha^2 + 21\alpha = 34(\alpha + 1) + 21\alpha = 34\alpha + 34 + 21\alpha = \mathbf{55\alpha + 34}. \text{ E}$$

assim, sucessivamente, teríamos:

$$\alpha^{15} = F_{15} \times \alpha + F_{14} = 610\alpha + 377. \text{ Generalizando, temos:}$$

$$\alpha^n = F_n \times \alpha + F_{n-1}, \quad n > 1 \quad (\text{VIII})$$

Continuando, se multiplicarmos, ambos os membros da igualdade (II) $\beta^2 = \beta + 1$ por β , obteremos: $\beta^3 = \beta^2 + \beta = \beta + 1 + \beta = 2\beta + 1$;

Assim, realizando procedimento semelhante ao realizado anteriormente, teremos:

$$\beta^n = F_n \times \beta + F_{n-1}, n \geq 1 \text{ (IX)}$$

Subtraindo, membro a membro, (VIII) - (IX) obtemos:

$$\alpha^n - \beta^n = (F_n \times \alpha + F_{n-1}) - (F_n \times \beta + F_{n-1}) = F_n \times \alpha + F_{n-1} - F_n \times \beta - F_{n-1} = F_n \times \alpha - F_n \times \beta, \text{ ou seja,}$$

$$\alpha^n - \beta^n = F_n \times (\alpha - \beta). \text{ Aplicando o resultado de (VII), temos:}$$

$$\alpha^n - \beta^n = F_n \times \sqrt{5} \Rightarrow F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

Caso queiramos testar essa fórmula,

$$F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} \stackrel{\text{VII}}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1; F_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha + 1) - (\beta + 1)}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} \stackrel{\text{VII}}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1,$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} \stackrel{\text{VIII}}{\Rightarrow}$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{F_{n-2} \times \alpha + F_{n-3} - (F_{n-2} \times \beta + F_{n-3})}{\sqrt{5}} + \frac{F_{n-1} \times \alpha + F_{n-2} - (F_{n-1} \times \beta + F_{n-2})}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{F_{n-2} \times \alpha + F_{n-3} - F_{n-2} \times \beta - F_{n-3} + F_{n-1} \times \alpha + F_{n-2} - F_{n-1} \times \beta - F_{n-2}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{F_{n-2} \times \alpha + F_{n-1} \times \alpha - F_{n-2} \times \beta - F_{n-1} \times \beta + F_{n-3} - F_{n-3} + F_{n-2} - F_{n-2}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{F_{n-2} \times \alpha + F_{n-1} \times \alpha - F_{n-2} \times \beta - F_{n-1} \times \beta}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{(F_{n-2} + F_{n-1}) \times \alpha - (F_{n-2} - F_{n-1}) \times \beta}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{F_n \times \alpha - F_n \times \beta}{\sqrt{5}} = \frac{F_n \times (\alpha - \beta)}{\sqrt{5}} = \frac{F_n \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = F_n$$

Logo, se em

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \text{ (Fórmula de Binet)}$$

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, então ela é a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci. Assim, utilizaremos esse resultado para executar nossas atividades de construção dos retângulos por meio do Geogebra e sua planilha.

O primeiro slide mostra um caso que não trabalhamos até agora, o quadrado de lado 3 que é transformado em um retângulo 2 por 5.

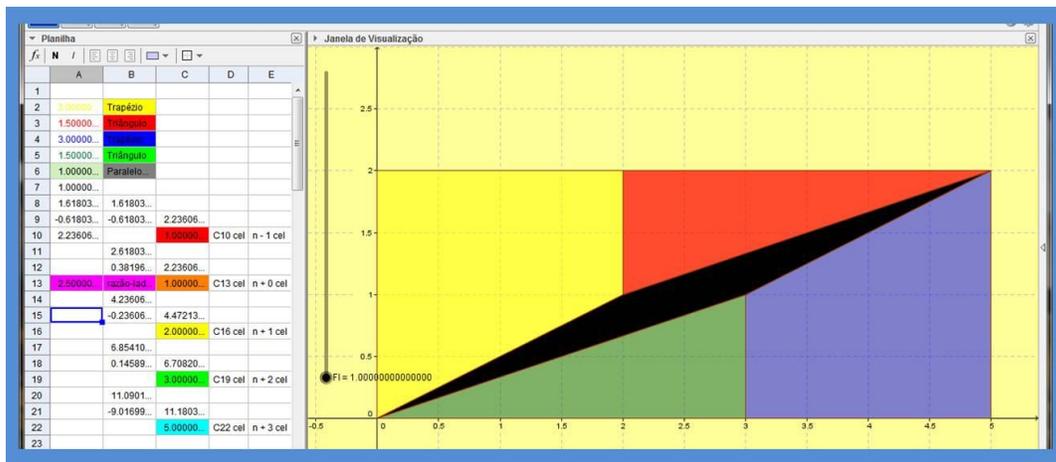


Figura 9.15: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=1

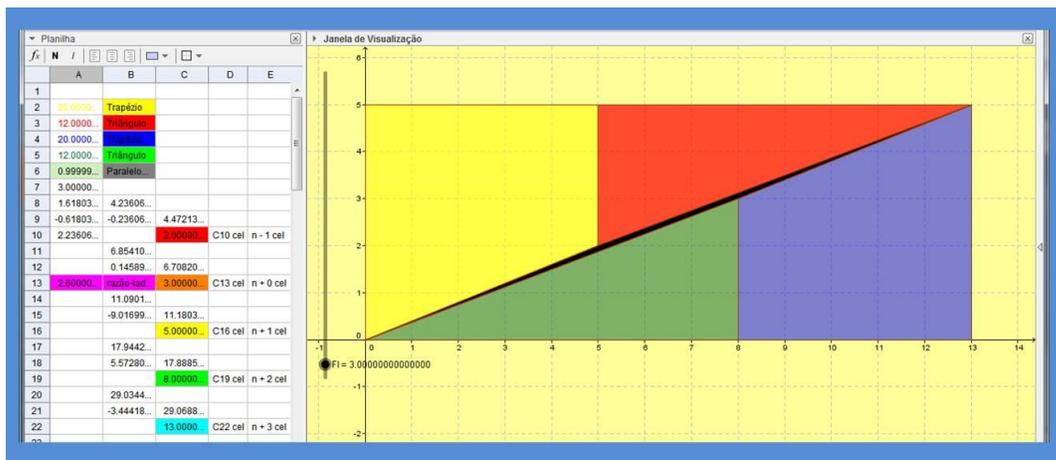


Figura 9.16: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=3

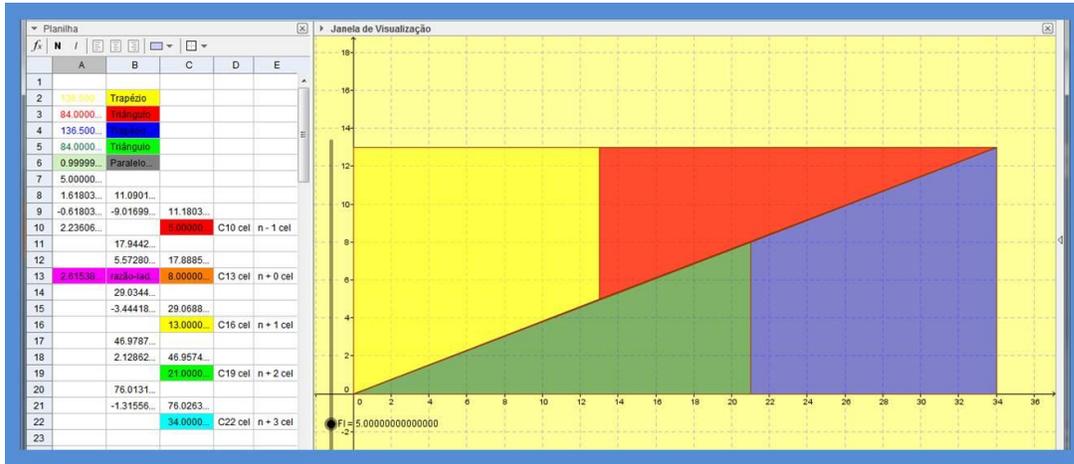


Figura 9.17: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=5

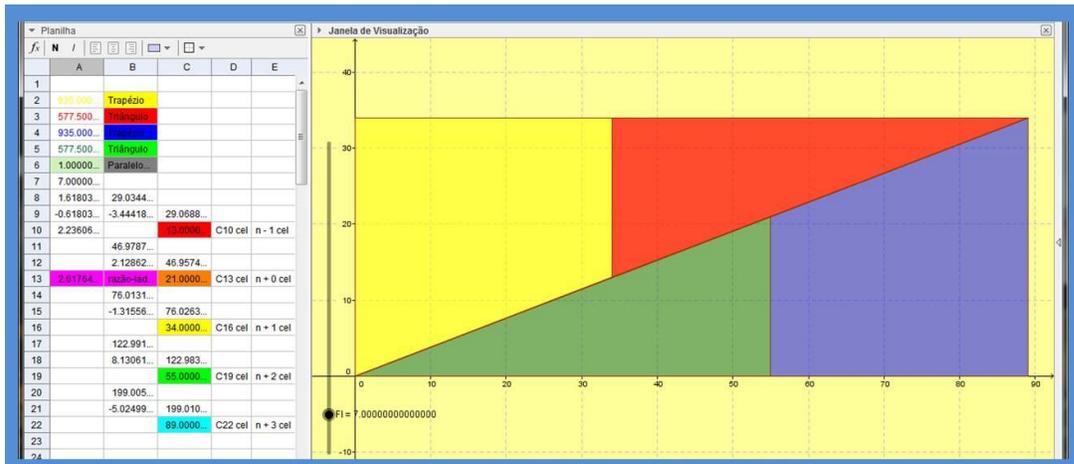


Figura 9.18: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=7

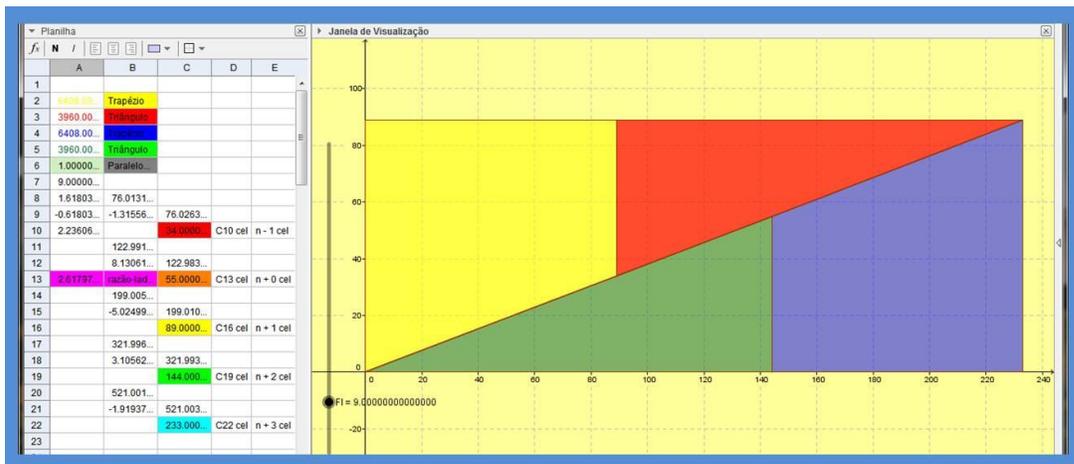


Figura 9.19: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=9

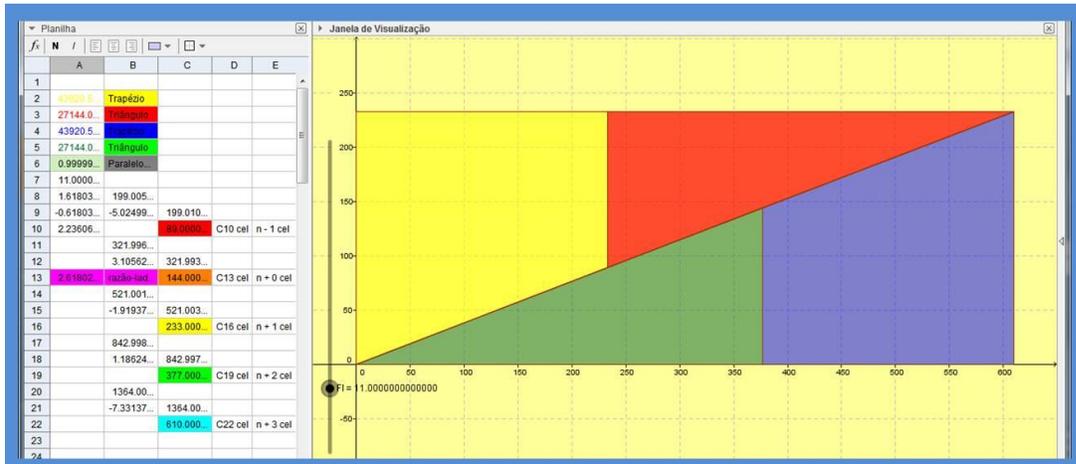


Figura 9.20: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=11

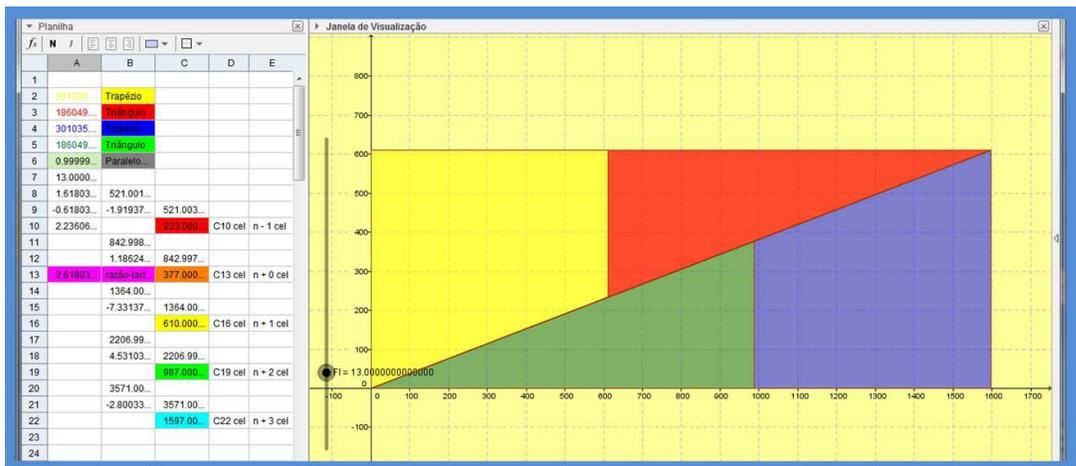


Figura 9.21: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=13

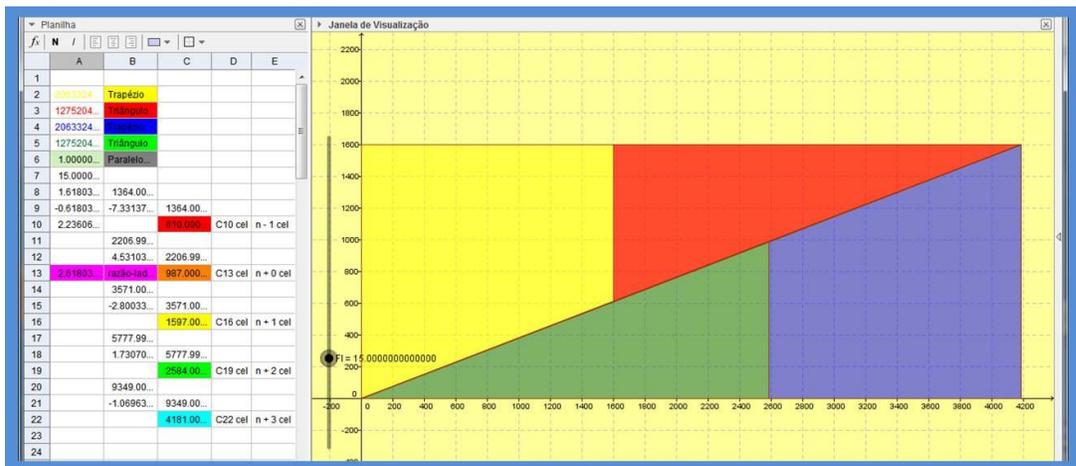


Figura 9.22: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para n=15

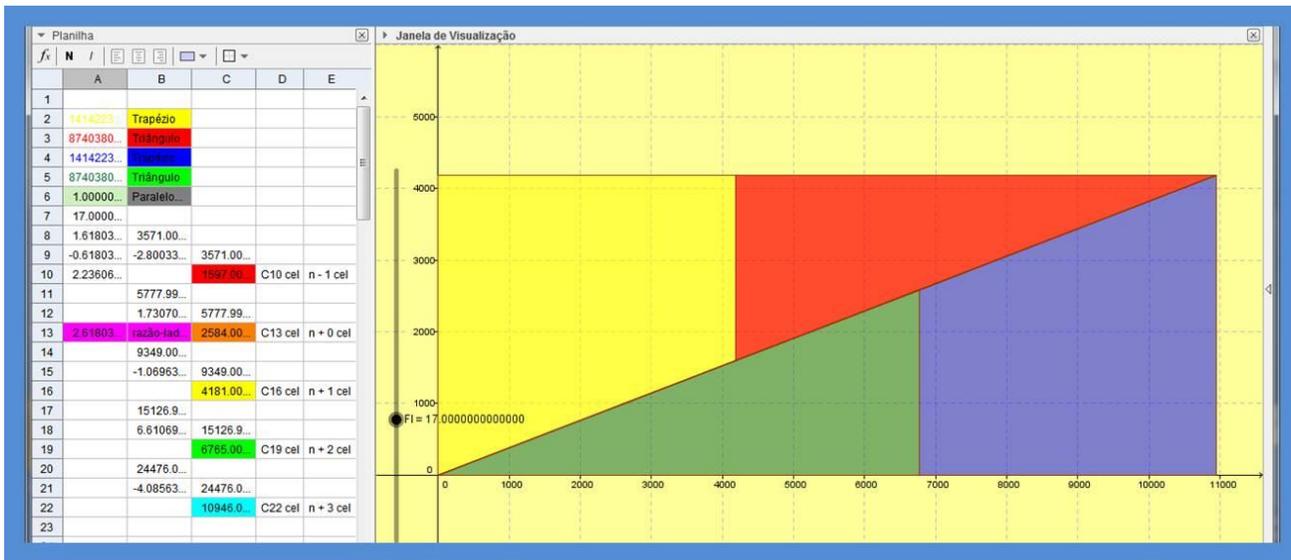


Figura 9.23: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para $n=17$

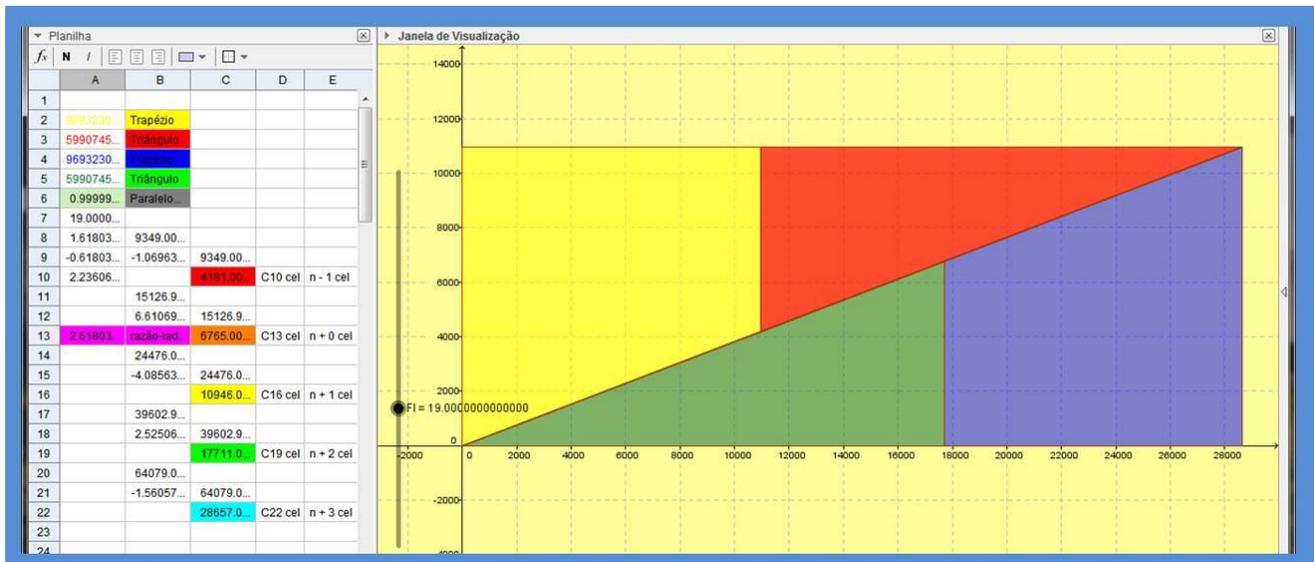


Figura 9.24: Representação, no Geogebra (com o controle deslizante), da fórmula de Binet para $n=19$

10. As demonstrações

Ao chegarmos a esse ponto, já esgotamos inúmeras possibilidades para validar todos os casos em que é possível conceber, e em alguns casos realizar na prática, a seguinte experiência: desmontar um quadrado cujo lado possui como medida um número da sequência de Fibonacci, e remontá-lo sob forma de um retângulo cuja área sempre terá uma unidade a mais que o quadrilátero original; essa área adicional estará representada nos limites de um paralelogramo, que na maior parte das experiências é invisível e está construído de tal forma que sua diagonal maior coincide com uma das diagonais do retângulo.

Percebemos que as atividades manuais possuem seus limites naturais e buscamos apoio na tecnologia em busca de uma solução para nossos problemas e descobrimos que, por mais avançada que seja a tecnologia utilizada para computar aquilo que é invisível aos nossos olhos, ela também possui seu limite. A busca pela verdade absoluta esbarra na impossibilidade de que a realidade das três dimensões em que vivemos é incapaz de expressar toda infinitude que a Matemática abrange, em suas múltiplas dimensões.

Se nossas mãos, nossos olhos, nossas ferramentas manuais e nossos computadores são incapazes de dar um ponto final para a questão da generalização da experiência “ $64 = 65$ ”, o mesmo não se aplica ao nosso cérebro. Só ele é capaz de conceber, compreender e demonstrar verdades que pertencem ao mundo maravilhoso da Matemática, pois é no mundo da “rainha e serva das ciências” que se encontra a resposta para nossas questões. Podemos ser cegos pela visão, mas, através da

Matemática, podemos enxergar pela mente, basta nos esforçarmos para compreender sua linguagem e estabelecer um elo entre seu mundo abstrato e o mundo em que vivemos.

A demonstração é o meio pelo qual uma verdade é provada e não haverá necessidade da comprovação de nossos olhos. Cabe, a cada um, decidir o quanto de esforço vale a pena investir para se ter a alegria de tocar o intangível, enxergar o invisível e adquirir a independência intelectual para compreender o maravilhoso mundo da Matemática.

10.1 A Identidade de Cassini: $F_{n+1} \times F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$

Na demonstração a seguir, F_i representa o i -ésimo termo da seqüência de Fibonacci.

Verifiquemos, por indução finita, que para $n \geq 1$, $F_{n+1} \times F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$

Seja $P(n)$ a proposição: se $n \geq 1$, então $F_{n+1} \times F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$

I - Verifiquemos se a proposição acima é válida para $n = 1$, ou seja, se

$$F_2 \times F_0 - (F_1)^2 = (-1)^1$$

1° membro = $F_2 \times F_0 - (F_1)^2 = 1 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1 =$ **2° membro**.

Conclusão: a proposição é válida para $n = 1$.

II - Admitamos que a proposição seja válida para $n = k$, ou seja,

$$F_{k+1} \times F_{k-1} - (F_k)^2 = (-1)^k$$

Verifiquemos se a igualdade é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$F_{k+2} \times F_k - (F_{k+1})^2 = (-1)^{k+1}$$

1° membro = $F_{k+2} \times F_k - (F_{k+1})^2$, utilizando a propriedade característica da seqüência de Fibonacci ($F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$), temos:

$F_{k+2} \times F_k - (F_{k+1})^2 = (F_k + F_{k+1}) \times F_k - (F_{k+1})^2 = F_k \times F_k + F_{k+1} \times F_k - (F_{k+1})^2 = (F_k)^2 + F_{k+1} \times F_k - (F_{k+1})^2$ (*). Mas, também pela propriedade característica da seqüência de Fibonacci, se

$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, então $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$. Substituindo na igualdade (*) temos:

$$\begin{aligned}
(F_k)^2 + F_{k+1} \times F_k - (F_{k+1})^2 &= (F_k)^2 + F_{k+1} \times (F_{k+1} - F_{k-1}) - (F_{k+1})^2 = \\
&= (F_k)^2 + F_{k+1} \times F_{k+1} - F_{k+1} \times F_{k-1} - (F_{k+1})^2 = (F_k)^2 + (F_{k+1})^2 - F_{k+1} \times F_{k-1} - (F_{k+1})^2 = \\
&= (F_k)^2 + \cancel{(F_{k+1})^2} - F_{k+1} \times F_{k-1} - \cancel{(F_{k+1})^2} = (F_k)^2 - F_{k+1} \times F_{k-1} (**). \text{ Pela hipótese de indução,} \\
F_{k+1} \times F_{k-1} - (F_k)^2 &= (-1)^k, \text{ ou seja,}
\end{aligned}$$

$-F_{k+1} \times F_{k-1} = -(-1)^k - (F_k)^2$ e, substituindo em (**), temos:

$$\begin{aligned}
(F_k)^2 - F_{k+1} \times F_{k-1} &= (F_k)^2 - (-1)^k - (F_k)^2 = \cancel{(F_k)^2} - (-1)^k - \cancel{(F_k)^2} = -(-1)^k = \\
&= (-1) \times (-1)^k = (-1)^1 \times (-1)^k = (-1)^{k+1} = \mathbf{2^\circ \text{ membro.}}
\end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$ e concluímos, pelo princípio da indução finita, que para $n \geq 1$, $F_{n+1} \times F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$

Obs.: Se associarmos o produto " $F_{n+1} \times F_{n-1}$ " com a área do RETÂNGULO e a potência " $(F_n)^2$ " com a área do QUADRADO, podemos generalizar que:

Quando "n" for PAR, a área do QUADRADO será uma unidade **MENOR** do que a área do RETÂNGULO e, conseqüentemente, quando "n" for ÍMPAR, a área do QUADRADO será uma unidade **MAIOR** do que a área do RETÂNGULO.

10.2 Demonstração da generalidade do vídeo "64 = 65?!"

Para que tenhamos certeza absoluta de que essa atividade poderá ser realizada virtualmente, com a evolução gradual dos computadores, que serão capazes de lidar com uma gama de números reais mais extensa sem as limitações atuais, precisamos garantir que a experiência de recortar o quadrado e sua transformação em retângulo, ocorre na mais absoluta lisura matemática. Para isso, precisamos realizar algumas demonstrações:

- provar que as figuras que fazem parte da decomposição do quadrado são as mesmas que compõem o retângulo;
- provar que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um paralelogramo e sua área mede 1.

Utilizaremos uma única figura (na sequência) para servir de apoio às duas demonstrações a seguir. Sejam as representações 5 números consecutivos da sequência de Fibonacci:

$$F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > 3 \text{ e } (n+2 \text{ é par})$$

Ficam definidos, no plano cartesiano abaixo, os seguintes pontos:

$$P_1(0; 0); P_2(F_{n+2}; F_n); P_3(F_{n+3}; F_{n+1}) \text{ e } P_4(F_{n+1}; F_{n-1})$$

Obs.: Os desenhos abaixo não obedecem às proporções reais.

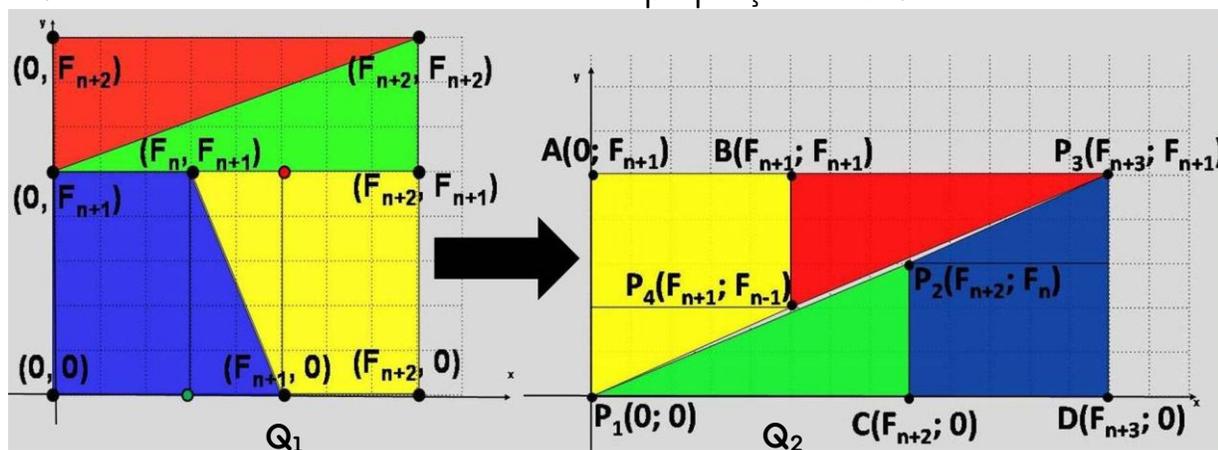


Figura 10.01: Representação, no plano cartesiano, da mudança de quadro do evento genérico “64=65?!”

10.2.1 A validação da “MUDANÇA de QUADRO”

Utilizaremos conceitos da geometria para demonstrar que os polígonos de mesma cor nos dois planos cartesianos acima são congruentes.

I - Em Q_1 , os triângulos, vermelho e verde são congruentes.

Demonstração: Em Q_1 , ambos os triângulos são retângulos, pois são obtidos a partir de um retângulo (menor). Tanto o triângulo vermelho quanto o verde possuem um lado de medida F_{n+2} e outro de medida $F_{n+2} - F_{n+1}$ (lados opostos de um retângulo). Os triângulos são congruentes e essa conclusão pode ocorrer tanto pelo caso **LLL**, pois a hipotenusa de ambos é comum, ou pelo caso **LAL** já que o ângulo entre os catetos é reto.

II - Em Q_2 , os triângulos, vermelho e verde são congruentes.

Demonstração: Em Q_2 , temos um caso equivalente ao item anterior. O triângulo vermelho é retângulo no vértice B, pois os pares ordenados B e P_4 possuem a mesma abscissa (F_{n+1}) e os pares ordenados B e P_3 possuem a mesma ordenada (F_{n+1}). O triângulo verde é retângulo no vértice C, pois os pares ordenados C e P_2 possuem a mesma abscissa (F_{n+2}) e os pares ordenados C e P_1 possuem a mesma ordenada (0). Cada um dos triângulos possui um lado medindo F_n (um medindo diretamente F_n e outro medindo $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$). Ambos os triângulos possuem um lado medindo F_{n+2} (um medindo diretamente F_{n+2} e outro medindo $F_{n+3} - F_{n+1} = F_{n+2}$). Então, pelo caso **LAL** os triângulos, vermelho e verde em Q_2 são congruentes.

III – Os triângulos vermelhos dos quadros Q_1 e Q_2 são congruentes.

Demonstração: Os triângulos vermelhos de ambos os quadros (Q_1 e Q_2) são retângulos, pois já provamos essa característica nos itens I e II. Ambos os triângulos possuem 2 pares de catetos congruentes, pois o cateto maior de Q_1 mede F_{n+2} e o cateto maior de Q_2 mede $F_{n+3} - F_{n+1}$ e ainda, o cateto menor de Q_1 mede $F_{n+2} - F_{n+1} (=F_n)$ e o cateto menor de Q_2 mede $F_{n+1} - F_{n-1} (=F_n)$. Portanto, pelo caso **LAL** os triângulos vermelhos dos quadros Q_1 e Q_2 são congruentes.

Obs.: Os três itens anteriores garantem a congruência dos 4 triângulos dos quadros 1 e 2.

IV – Em Q_1 , os trapézios, azul e amarelo são congruentes.

Demonstração: a) Quanto aos ângulos, em Q_1 , ambos os trapézios são retângulos, pois são obtidos a partir de um retângulo. Tanto o trapézio azul quanto o amarelo possuem 2 ângulos retos e 2 ângulos dois a dois congruentes, pois são alternos internos. b) Quanto aos lados, em Q_1 , o trapézio azul possui um lado de medida F_n , dois lados de medida F_{n+1} e o trapézio amarelo possui um lado de medida $F_{n+2} - F_{n+1} (=F_n)$, dois lados de medida F_{n+1} (um medindo diretamente F_{n+1} e outro medindo $F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$). O quarto de ambos é lado comum. Dessa forma, podemos concluir que, em Q_1 , os trapézios obtidos no corte do retângulo maior são congruentes.

V – Em Q_2 , os pontos P_1 , A , P_3 e D são vértices de um RETÂNGULO.

- Calculemos o ponto médio do segmento P_1P_3 .

$$M_{13} = \left(\frac{0+F_{n+3}}{2}, \frac{0+F_{n+1}}{2} \right) = \left(\frac{F_{n+3}}{2}, \frac{F_{n+1}}{2} \right)$$

- Calculemos o ponto médio do segmento AD .

$$M_{AD} = \left(\frac{0+F_{n+3}}{2}, \frac{F_{n+1}+0}{2} \right) = \left(\frac{F_{n+3}}{2}, \frac{F_{n+1}}{2} \right)$$

Como $M_{13} = M_{AD}$, podemos concluir que o quadrilátero P_1AP_3D é um **paralelogramo**.

- Calculemos a medida da diagonal P_1P_3 .

$$D_{13} = \sqrt{(0 - F_{n+3})^2 + (0 - F_{n+1})^2} = \sqrt{F_{n+3}^2 + F_{n+1}^2}$$

- Calculemos a medida da diagonal AD .

$$D_{AD} = \sqrt{(0 - F_{n+3})^2 + (F_{n+1} - 0)^2} = \sqrt{F_{n+3}^2 + F_{n+1}^2}$$

Como $D_{13} = D_{AD}$, como já havíamos demonstrado que o quadrilátero P_1AP_3D é um **paralelogramo** e que agora chegamos à conclusão de que as diagonais são congruentes, podemos concluir que o quadrilátero P_1AP_3D é um **retângulo**.

VI – Em Q_2 , os quadriláteros azul e amarelo são trapézios congruentes.

Demonstração: Precisamos demonstrar a congruência de 4 pares de ângulos ($A1$ até $A4$) e 4 pares de lados ($L1$ até $L4$).

$L1$: Como P_1AP_3D é um retângulo, os lados P_1A e P_3D são congruentes;

$A1$: Como P_1AP_3D é um retângulo, os ângulos P_1AP_3 e P_3DP_1 são retos;

$L2$: Pela demonstração II, BP_4 é congruente a CP_2 ;

$A2$: Em consequência da demonstração II, os ângulos ABP_4 e DCP_2 são retos;

Obs.1: Nesse ponto, por $A1$ e $A2$, podemos deduzir o paralelismo entre os segmentos AP_1 e BP_4 e entre os segmentos CP_2 e DP_3 , ou seja, os quadriláteros, azul e amarelo em Q_2 são trapézios;

L3: Como P_1AP_3D é um retângulo, os lados P_1D e AP_3 são congruentes e, como já foi provado, em II, que P_1C e BP_3 são congruentes, então os lados AB e CD são congruentes;

Obs.2: Em consequência das demonstrações dos itens anteriores, podemos concluir, pelo caso LAL, que $\triangle ABP_4 \equiv \triangle DCP_2$, então, os segmentos AP_4 e DP_2 são congruentes e os ângulos P_4AB e P_2DC também o são. Assim, os ângulos P_4AP_1 e P_2DP_3 também são congruentes. Então, pelo caso **LAL**, os triângulos P_4AP_1 e P_2DP_3 são congruentes;

L4: Devido ao item anterior, podemos concluir que os lados P_1P_4 e P_2P_3 são congruentes;

A3: Devida à congruência dos triângulos P_4AP_1 e P_2DP_3 , os ângulos AP_1P_4 e DP_3P_2 são congruentes;

A4: Como P_1ABP_4 e P_3DCP_2 são trapézios e os ângulos AP_1P_4 e DP_3P_2 são congruentes, então os ângulos P_1P_4B e P_3P_2C são também congruentes (caso dos ângulos colaterais internos).

Amparados por todos os itens anteriores, podemos concluir que os quadriláteros P_1ABP_4 (amarelo) e P_3DCP_2 (azul) são trapézios congruentes.

VII - Os trapézios azuis de ambos os quadros são congruentes.

Demonstração: Precisamos demonstrar que a congruência de 4 pares de ângulos (A1 até L4) e 4 pares de lados (L1 até L4).

L1, L2 e L3: Os trapézios azuis possuem 1 lado de medida F_n , 2 lados de medida F_{n+1} . No trapézio de Q_1 isso já foi abordado no item **IV** e no trapézio em Q_2 , o lado P_2C mede F_n , o lado DC mede $F_{n+3} - F_{n+1} = F_{n+2}$ e o lado P_3D mede F_{n+2} ;

A1 e A2: Ambos os trapézios possuem dois ângulos retos como já demonstrados em **IV** e **VI**;

Obs.3: Sejam $G(0; 0)$, $H(0; F_{n+1})$, $I(F_n; F_{n+1})$, $J(F_{n+1}; 0)$ os pares ordenados que formam o trapézio azul em Q_1 . De modo análogo ao realizado na "Obs.2", pelo caso LAL, $\triangle IHG \equiv \triangle DCP_2$, então, os segmentos GI e DP_2 são congruentes e os ângulos IGH e P_2DC

também o são. Assim, os ângulos IGJ e P_2DP_3 também são congruentes. Então, pelo caso **LAL**, os triângulos IGJ e P_2DP_3 são congruentes;

L4: Devido ao item anterior, podemos concluir que os lados IJ e P_2P_3 são congruentes;

A3: Devida à congruência dos triângulos IGJ e P_2DP_3 , os ângulos GJI e DP_3P_2 são congruentes;

A4: Como GHIJ e P_3DCP_2 são trapézios e os ângulos GJI e DP_3P_2 são congruentes, então os ângulos JIH e P_3P_2C são também congruentes (caso dos ângulos colaterais internos).

Amparados por todos os itens anteriores, podemos concluir que os trapézios azuis GHIJ e P_3DCP_2 (azul) congruentes.

Obs.: Os últimos itens garantem a congruência dos 4 trapézios dos quadros 1 e 2.

10.2.2 O paralelogramo invisível de área unitária

Relembrando, sejam 5 números consecutivos da sequência de Fibonacci, F_{n-1} , F_n , F_{n+1} , F_{n+2} , F_{n+3} , $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 3$ e $n+2$ é par (*). Consideremos particularmente os seguintes pontos: $P_1(0; 0)$; $P_2(F_{n+2}; F_n)$; $P_3(F_{n+3}; F_{n+1})$ e $P_4(F_{n+1}; F_{n-1})$

Demonstremos:

I – O quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Sabemos que “**PARALELOGRAMO** é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.”.

- Calculemos o ponto médio do segmento P_1P_3 .

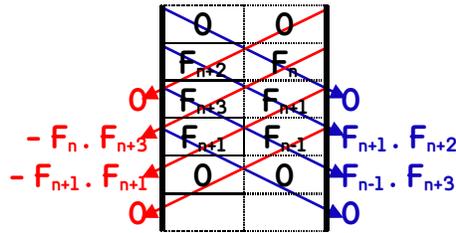
$$M_{13} = \left(\frac{0+F_{n+3}}{2}; \frac{0+F_{n+1}}{2} \right) = \left(\frac{F_{n+3}}{2}; \frac{F_{n+1}}{2} \right)$$

- Calculemos o ponto médio do segmento P_2P_4 .

$$M_{24} = \left(\frac{F_{n+1}+F_{n+2}}{2}; \frac{F_{n-1}+F_n}{2} \right) = \left(\frac{F_{n+3}}{2}; \frac{F_{n+1}}{2} \right)$$

Como $M_{13} = M_{24}$, podemos concluir que $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO**.

II – A área do PARALELOGRAMO $P_1P_2P_3P_4$ é igual a 1.



Calculemos “D”:

$$D = F_{n+1} \cdot F_{n+2} - F_n \cdot F_{n+3} + F_{n-1} \cdot F_{n+3} - F_{n+1} \cdot F_{n+1}$$

$$D = F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) - F_n \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) + F_{n-1} \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) - F_{n+1} \cdot F_{n+1}$$

$$D = F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) - F_n \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) + (F_{n+1} - F_n) \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) - F_{n+1} \cdot F_{n+1}$$

$$D = F_{n+1} \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2} + (F_{n+1} - F_n) \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) - F_{n+1} \cdot F_{n+1}$$

$$D = F_{n+1} \cdot F_n - F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2} + (F_{n+1} - F_n) \cdot (F_{n+1} + F_{n+2})$$

$$D = -F_n \cdot F_{n+2} + (F_{n+1} - F_n) \cdot (F_{n+1} + F_{n+2})$$

$$D = -F_n \cdot F_{n+2} + F_{n+1} \cdot F_{n+1} + F_{n+1} \cdot F_{n+2} - F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2}$$

$$D = F_{n+1} \cdot F_{n+1} + F_{n+1} \cdot F_{n+2} - F_n \cdot F_{n+1} - 2 \cdot (F_n \cdot F_{n+2})$$

$$D = (F_{n+1})^2 + F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) - F_n \cdot F_{n+1} - 2 \cdot (F_n \cdot F_{n+2})$$

$$D = (F_{n+1})^2 + F_{n+1} \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+1} - 2 \cdot (F_n \cdot F_{n+2})$$

$$D = (F_{n+1})^2 + (F_{n+1})^2 - 2 \cdot (F_n \cdot F_{n+2})$$

$$D = 2 \cdot (F_{n+1})^2 - 2 \cdot (F_n \cdot F_{n+2})$$

$$D = 2 \cdot [(F_{n+1})^2 - F_n \cdot F_{n+2}] (*)$$

$$D = 2 \cdot [1]$$

$$D = 2$$

(*) Se “n+2” é par, então “n+1” é ímpar, assim, a área do QUADRADO é **MAIOR** do que a área do RETÂNGULO em uma unidade, então a expressão

$$[(F_{n+1})^2 - F_n \cdot F_{n+2}] = 1.$$

Sabemos que $A = |D|/2$. Assim,

$$A = \frac{|D|}{2} \text{ então, } A = \frac{2}{2}, \text{ ou seja, } A = 1$$

Logo, podemos concluir que a área do **PARALELOGRAMO** $P_1P_2P_3P_4$ é igual a **1**.

Assim, levando-se em conta os resultados obtidos nos itens I e II, podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO** e sempre terá área cuja medida é igual a **1**.

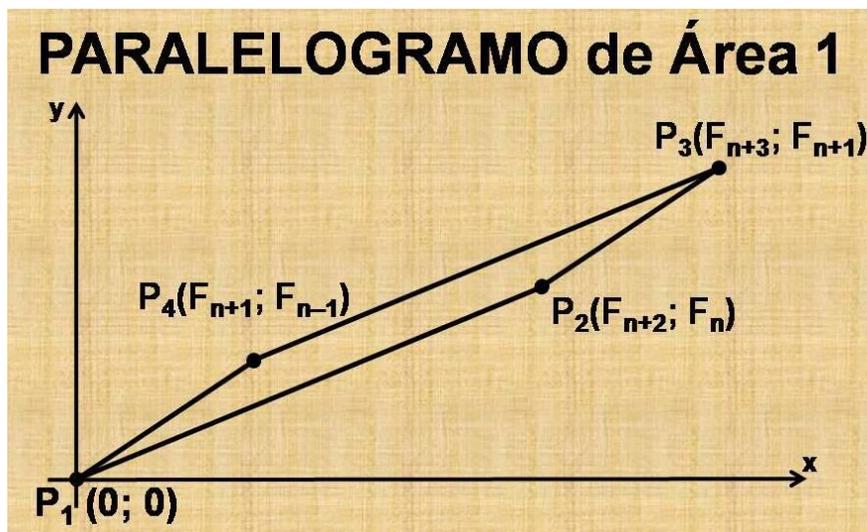


Figura 10.02: Representação do paralelogramo $P_1P_2P_3P_4$ cuja área possui medida unitária

10.3 O número de dígitos de “ F_n ”

No último item do capítulo nove (9.5) deduzimos a seguinte fórmula:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \quad (\text{Fórmula de Binet})$$

Vamos realizar algumas transformações nela, visando descobrir uma maneira de obter o número de dígitos de um número F_n na sequência de Fibonacci:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\alpha^n - \frac{\alpha^n \times \beta^n}{\alpha^n} \right) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \times \left(1 - \frac{\beta^n}{\alpha^n} \right)$$

$$F_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \times \left(1 - \frac{\beta^n}{\alpha^n}\right) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \times \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right], \text{então, } F_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \times \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]$$

Como $|\beta| < |\alpha|$, quando $n \rightarrow \infty$, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \rightarrow 0$. Assim, para um valor suficientemente grande de n , teremos:

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}, \text{ assim, } \log F_n \approx \log \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} = \log \alpha^n - \log \sqrt{5} = n \times \log \alpha - \log 5^{\frac{1}{2}}$$

então,

$$\log F_n \approx n \times \log \alpha - \frac{1}{2} \times \log 5$$

O número de dígitos de $F_n = 1 +$ característica do $\log F_n = \lceil \log F_n \rceil$

O símbolo $\lceil r \rceil$ é conhecido como “teto de r ” e transforma qualquer número real r no primeiro número inteiro maior ou igual a r .

Assim, número de dígitos de $F_n = N(F_n) = \lceil n \cdot \log \alpha - (\log 5)/2 \rceil$. Assim,

$$N(F_n) = \left\lceil n \times \left(\log \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \right) - (\log 5)/2 \right\rceil$$

$$N(F_n) = \lceil n \times (\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2) - (\log 5) \div 2 \rceil, n > 1$$

10.4 A sequência de Fibonacci e o número Φ

No capítulo 9 (9.41), estivemos diante da seguinte situação: construímos uma planilha que calculava, passo a passo, as razões entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci (F_{n+1}/F_n). Chegamos à seguinte conclusão:

“A última razão, a partir da qual não há mais modificação, refere-se à linha 43 cujo resultado é **1,61803398874989000000.**”

As limitações do computador não permitiram chegar a uma conclusão definitiva. Agora que já temos a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci (fórmula de

Binet), vamos demonstrar que, quanto maior o valor de n , mais a razão entre dois termos consecutivos dessa sucessão aproxima-se de Φ . Vejamos:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\alpha^n - (-\alpha^{-1})^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\alpha^n - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \right)$$

Então, a razão entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci é dada por:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\alpha^{n+1} - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} \right)}{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\alpha^n - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \right)} = \frac{\alpha^{n+1} - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{\alpha^n - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{\alpha^n - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

mas, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} - 0}{\alpha^n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n \times \alpha}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

10.5 A irracionalidade de Φ

No capítulo 9, encontramos o valor de Φ , resolvendo a equação abaixo:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } 1 - \Phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Os passos que vamos seguir agora são para demonstrar que Φ é um número irracional:

I - A irracionalidade de $\sqrt{5}$.

Vamos supor, por absurdo, que $\sqrt{5}$ seja um número racional, isto é,

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n}, m \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0$$

Suponhamos ainda, que a fração m/n seja irredutível, isto é, m e n sejam primos entre si.

Elevando ao quadrado a igualdade acima, teremos:

$$(\sqrt{5})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 5 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 5n^2$$

No resultado acima, o termo $5n^2$ representa um número múltiplo de **5**, o que nos faz concluir que m^2 é um número inteiro múltiplo de **5** e isso só pode acontecer se m também o for, ou seja, $m = 5p$ com p também número inteiro. Assim, se:

$$m^2 = 5n^2, \text{ então } (5p)^2 = 5n^2 \Rightarrow 25p^2 = 5n^2 \Rightarrow 5p^2 = n^2 \Rightarrow n = 5q, q \in \mathbb{Z}$$

Assim, chegamos à conclusão de que $m = 5p$ e $n = 5q$ com p e q números inteiros. Mas, isso significa que m e n são ambos múltiplos de 5, o que contradiz nossa suposição inicial de que eles são primos entre si. Essa contradição é devido a termos admitido a suposição de que $\sqrt{5}$ pode ser escrito na forma m/n com m e n inteiros.

Portanto, demonstramos, por absurdo, que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

II - A irracionalidade de Φ .

Vamos supor, por absurdo, que Φ seja um número racional, isto é, que existe um número racional r tal que $\Phi = r$. Então,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = r \Rightarrow 1 + \sqrt{5} = 2r \Rightarrow \sqrt{5} = 2r - 1$$

Mas, os “números racionais são fechados em relação às quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero)” [36] e, portanto, $2r - 1$ é um número racional. Mas, no item **I**, provamos que $\sqrt{5}$ é um número irracional e assim chegamos a uma contradição. Logo, podemos concluir que Φ é um número irracional.

A conclusão acima significa que a expansão decimal de Φ possui infinitas casas decimais não periódicas e nos garante que o valor encontrado na planilha Excel não está

de acordo com a verdade. A seguir, o número de ouro com 2000 casas decimais (utilizaremos a fonte Verdana por motivos já mencionados anteriormente):

(<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi.html>, visto em 5 de Janeiro de 2015)

Φ

12345 67890 12345 67890 12345 67890 12345 67890 12345 67890 12345 67890 12345 67890 12345 67890 12345
1,
61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072
07204 18939 11374 84754 08807 53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766 72635 44333 89086 59593
95829 05638 32266 13199 28290 26788 06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432 16269 54862 62963 13614
43814 97587 01220 34080 58879 54454 74924 61856 95364 86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098
74339 44221 25448 77066 47809 15884 60749 98871 24007 65217 05751 79788 34166 25624 94075 89069 70400
02812 10427 62177 11177 78053 15317 14101 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874 80710 13179 52368
94275 21948 43530 56783 00228 78569 97829 77834 78458 78228 91109 76250 03026 96156 17002 50464 33824
37764 86102 83831 26833 03724 29267 52631 16533 92473 16711 12115 88186 38513 31620 38400 52221 65791
28667 52946 54906 81131 71599 34323 59734 94985 09040 94762 13222 98101 72610 70596 11645 62990 98162
90555 20852 47903 52406 02017 27997 47175 34277 75927 78625 61943 20827 50513 12181 56285 51222 48093
94712 34145 17022 37358 05772 78616 00868 83829 52304 59264 78780 17889 92199 02707 76903 89532 19681
98615 14378 03149 97411 06926 08867 42962 26757 56052 31727 77520 35361 39362 10767 38937 64556 06060
59216 58946 67595 51900 40055 59089 50229 53094 23124 82355 21221 24154 44006 47034 05657 34797 66397
23949 49946 58457 88730 39623 09037 50339 93856 21024 23690 25138 68041 45779 95698 12244 57471 78034
17312 64532 20416 39723 21340 44449 48730 23154 17676 89375 21030 68737 88034 41700 93954 40962 79558
98678 72320 95124 26893 55730 97045 09595 68440 17555 19881 92180 20640 52905 51893 49475 92600 73485
22821 01088 19464 45442 22318 89131 92946 89622 00230 14437 70269 92300 78030 85261 18075 45192 88770
50210 96842 49362 71359 25187 60777 88466 58361 50238 91349 33331 22310 53392 32136 24319 26372 89106
70503 39928 22652 63556 20902 97986 42472 75977 25655 08615 48754 35748 26471 81414 51270 00602 38901
62077 73224 49943 53088 99909 50168 03281 12194 32048 19643 87675 86331 47985 71911 39781 53978 07476
15077 22117 50826 94586 39320 45652 09896 98555 67814 10696 83728 84058 74610 33781 05444 39094 36835
83581 38113 11689 93855 57697 54841 49144 53415 09129 54070 05019 47754 86163 07542 26417 29394 68036
73198 05861 83391 83285 99130 39607 20144 55950 44977 92120 76124 78564 59161 60837 05949 87860 06970
18940 98864 00764 43617 09334 17270 91914 33650 13715

Cálculo: $23 \times 85 + 45 = 1955 + 45 = 2000$ casas decimais.

11. A Falácia do “Chocolate Infinito”

No capítulo 5 (5.2), descrevemos uma experiência denominada “A Mágica do chocolate infinito” na qual se argumentava que, efetuando-se determinados cortes na barra de chocolate, poder-se-ia comer um dos 24 pedacinhos e remontar o chocolate novamente em seu tamanho e forma originais. Para desfazer esse mito citamos, basicamente, três argumentos: se comermos cada um dos 24 pedacinhos que compõem o chocolate, ele fatidicamente acaba; efetuar a conferência, em uma balança, do peso do chocolate no início e no fim da experiência; medir o comprimento da barra de chocolate e comparar o “antes” e “depois”.

Agora, após estudarmos diversos conceitos, podemos efetuar uma argumentação mais consistente diante de uma situação ideal, em que o chocolate possui medidas exatas e não se despedaça em momento algum diante dos cortes que são efetuados.

11.1 A “MUDANÇA DE QUADRO”

Primeiramente, vamos representar o chocolate abaixo, utilizado na “mágica do chocolate infinito”, em um plano cartesiano.



Figura 11.01: Foto do chocolate utilizado durante a experiência do “chocolate infinito”

Inicialmente é preciso esclarecer que, em todas as figuras a seguir, foram usadas a mesma malha quadriculada dividida em 6 linhas e 4 colunas. Essa malha está disposta em um plano cartesiano onde será descrito todo o processo de montagem, corte e remontagem do chocolate. O pedacinho vermelho (sob forma de retângulo) representado na figura 11.2 será o parâmetro de comparação para os outros pedaços, seus lados serão $l_u \times l_v$ (u e v , unidades de distância) e sua área superficial será l_{uv} (uv , unidade de área). Para efeito de cálculo, a espessura do chocolate (l_w) será a mesma em qualquer ponto de cada um dos 24 pedaços, distribuídos na forma $4u \times 6v$. Assim, o volume do pedacinho de chocolate vermelho será, então, l_{uvw} . Obs.: as medidas do chocolate utilizado na experiência foram realizadas de forma simples, tendo como referência a base retangular cujas dimensões encontradas foram $4u = 4,5$ cm e $6v = 18$ cm.

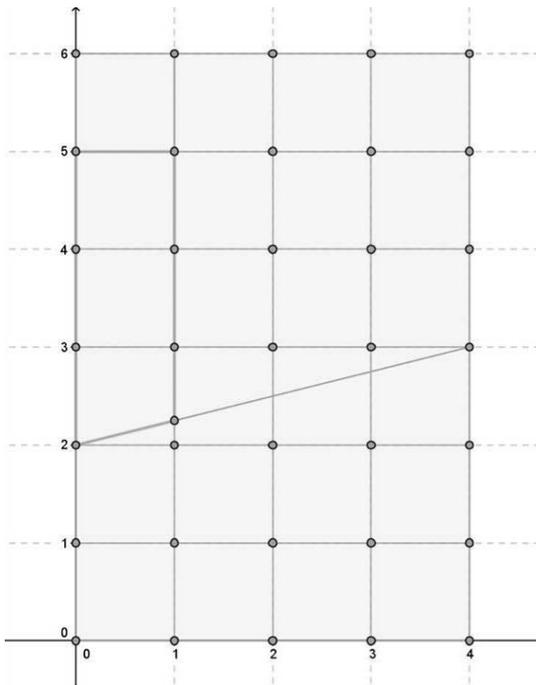


Figura 11.02: Esboço do chocolate e dos cortes a serem efetuados

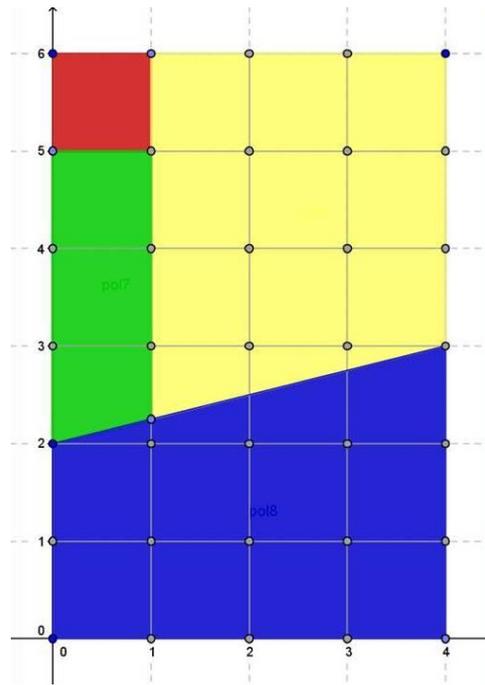


Figura 11.03: Chocolate com os cortes já efetuados

Nas próximas representações, vamos adotar a seguinte convenção: quando escrevermos o par ordenado $(x; y)$, fica subentendido que estamos falando $(x.u; y.v)$, por exemplo, o par ordenado $(5; 7)$ significa $(5u; 7v)$;

11.2 O corte do chocolate sob a ótica da Geometria Analítica

Para efetuar os cálculos, precisamos nomear os pontos que participarão da desmontagem do chocolate. Seja:

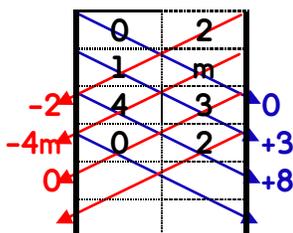
A(0; 6), B(1; 6), C(4; 6), D(0; 5), E(1; 5), F(0; 2), G(1; m) e H(4; 3).

Vamos calcular o valor de m :

Como os pontos **F**, **G** e **H** pertencem a uma mesma reta, o determinante composto por esses três pontos é zero.

Então,

F(0; 2), G(1; m) e H(4; 3)



Como $D = 0$,

$$-4m - 2 + 3 + 8 = 0 \Rightarrow 4m = 9 \Rightarrow m = 9/4$$

Logo, G(1; 9/4)

A partir desse momento, vamos retirar, pouco a pouco, “pedaços de chocolate” da malha quadriculada da figura 11.03.

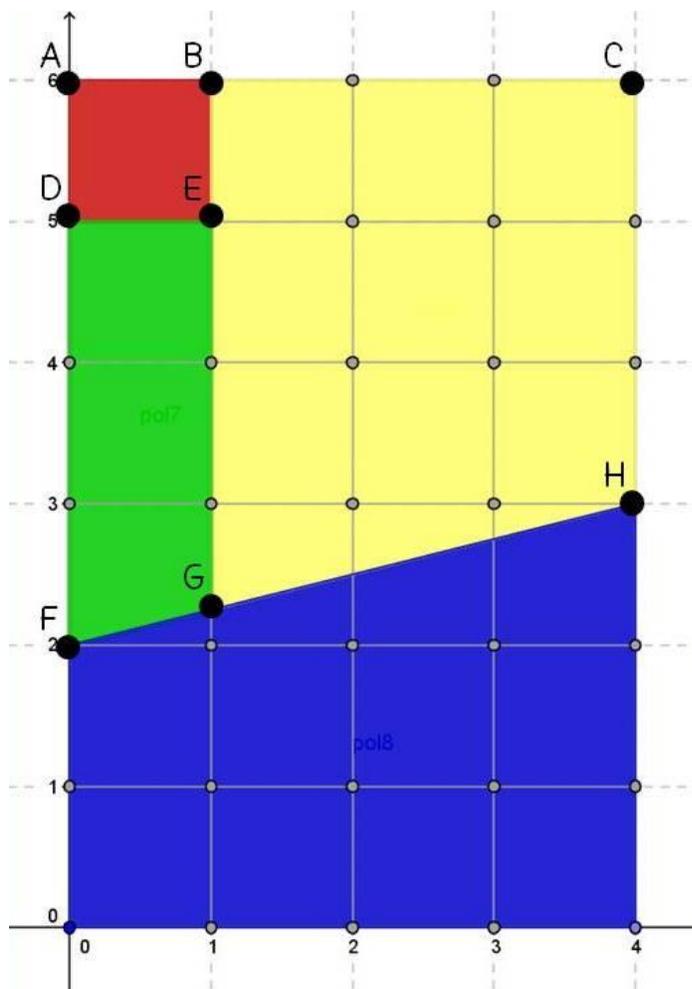


Figura 11.04: Chocolate com os pontos de corte já demarcados

Observe que o trapézio (azul), que se encontra na base do retângulo do chocolate, em nenhum instante mudará sua posição até o fim da experiência. A figura 11.05 mostra a retirada do pedacinho vermelho (ABED) que é a grande referência no problema, na experiência física, a necessidade de ele ser retirado por último é porque, como o chocolate é cortado com faca, para não ocorrer nenhum desperdício, é melhor aproveitar algum corte mais longo que já tenha sido feito antes. Aqui, em uma situação ideal, não temos esse problema.

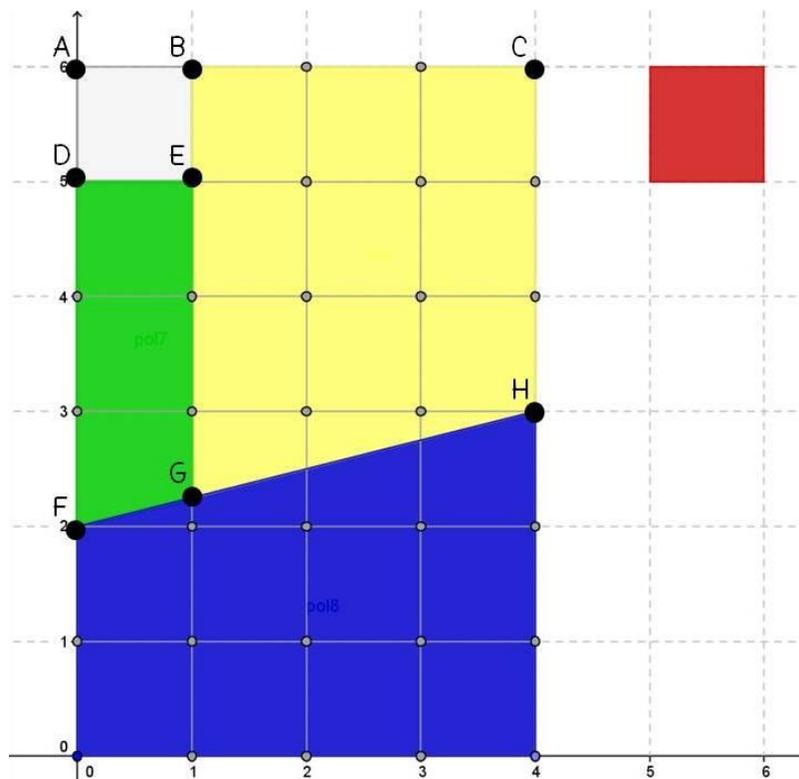


Figura 11.05: Retirada do pedaço de chocolate vermelho

A próxima figura (11.06) retrata a retirada dos pedaços verde (DEGF) e amarelo (BCHG), como é feita na experiência prática, mas, sob o ponto de vista matemático, utilizaremos a **figura 11.05** como parâmetro para realizar translações dos objetos matemáticos que devem mudar de posição para compor o chocolate em sua nova formação.

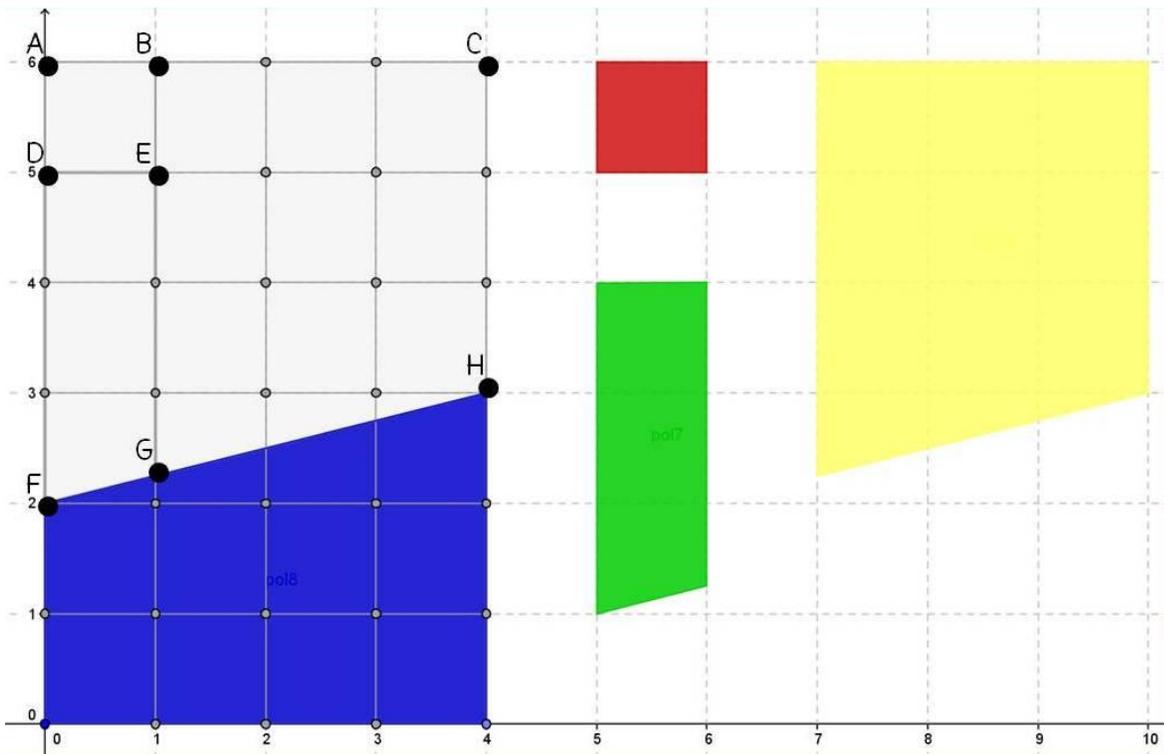


Figura 11.06: Retirada dos pedaços verde e amarelo

A partir desse momento, a remontagem será dividida em duas situações distintas a serem realizadas a partir da **figura 11.05**:

1. Realizar duas translações, uma do trapézio BCHG segundo o vetor GF, e outra, com relação ao trapézio DEGF segundo o vetor GH.
2. Realizar duas translações, uma do trapézio BCHG segundo o vetor BA, e outra, com relação ao trapézio DEGF segundo o vetor EC.

A figura a seguir (11.07), mostra o **caso 1**:

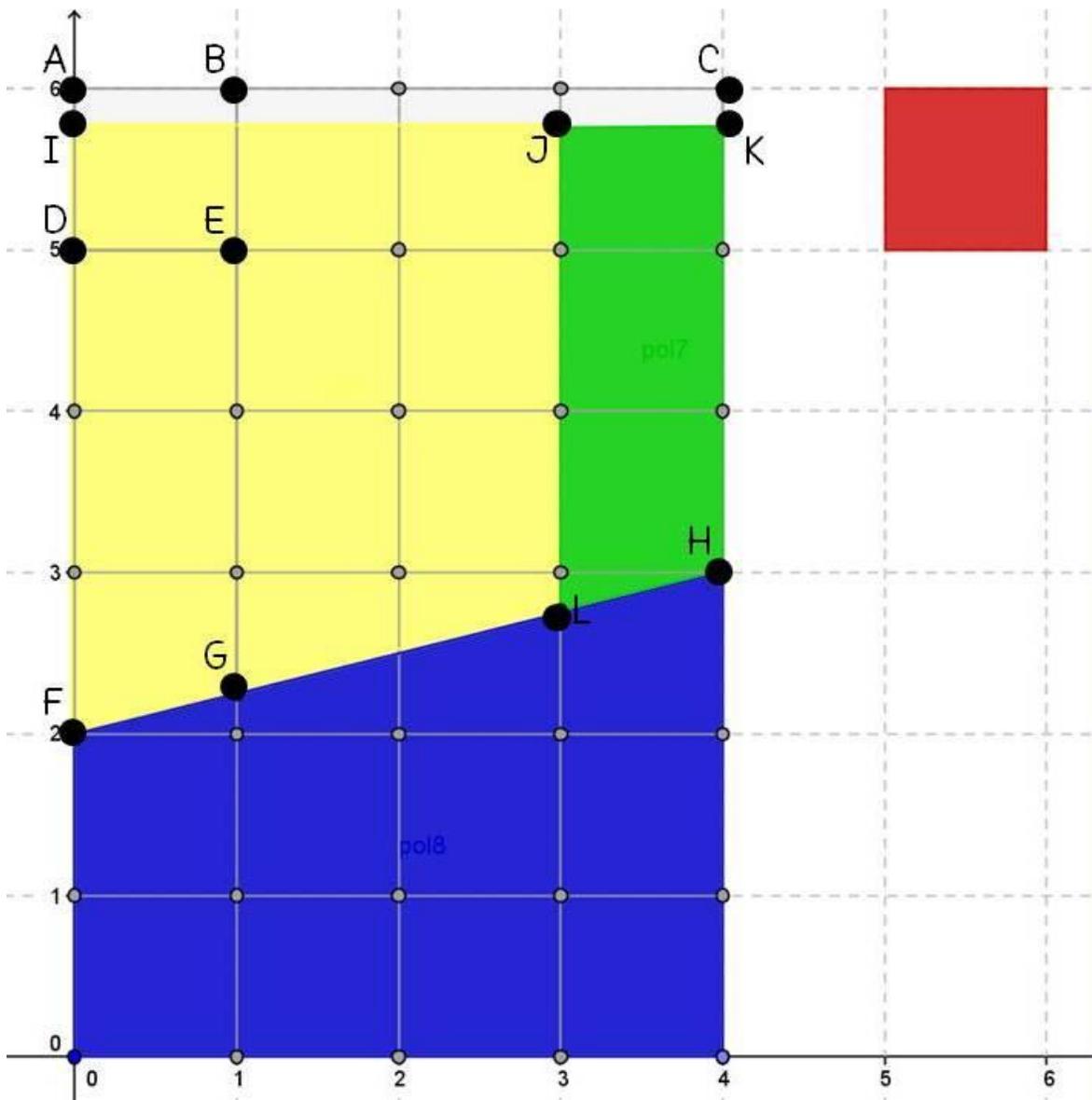


Figura 11.07: Translações dos trapézios BCHG (segundo o vetor GF) e DEGF (segundo o vetor GH)

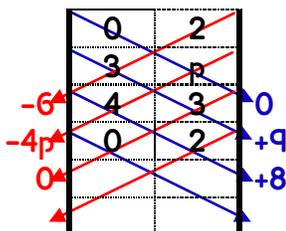
Nessas translações do caso 1, aparecem três pontos que até agora não faziam parte do problema, são eles I, J, K e L. Determinemos suas coordenadas:

Sejam n e p os valores desconhecidos nos pares ordenados a seguir,

$$I(0; n), J(3; n), K(4; n) \text{ e } L(3; p)$$

Sabemos que os pontos F, L e H estão na mesma reta, então o determinante composto por esses três pontos também é zero. Assim,

$$F(0; 2), L(3; p) \text{ e } H(4; 3).$$



Como $D = 0$,

$$-4p - 6 + 9 + 8 = 0 \Rightarrow 4p = 11 \Rightarrow p = 11/4$$

Logo, $L(3; 11/4)$

Sabemos que o trapézio amarelo original (BCHG), na figura 11.05, a base maior é BG. Após a realização da translação, o trapézio resultante (IJLF), na figura 11.07, a base maior é IF. Como estamos tratando do mesmo quadrilátero, pois houve apenas uma translação, podemos dizer os quatro pontos $B(1; 6)$, $G(1; 9/4)$, $I(0; n)$ e $F(0; 2)$ formam um PARALELOGRAMO, então, suas “diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios”. Assim,

- Calculando o ponto médio do segmento BF.

$$M_{BF} = \left(\frac{1+0}{2}; \frac{6+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; 4 \right)$$

- Calculando o ponto médio do segmento IG.

$$M_{IG} = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{n+9/4}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{n+9/4}{2} \right)$$

Como $M_{BF} = M_{IG}$, podemos concluir que:

$$\Rightarrow \frac{n + 9/4}{2} = 4 \Rightarrow n + 9/4 = 8 \Rightarrow n = 8 - 9/4 \Rightarrow n = \frac{32}{4} - \frac{9}{4} \Rightarrow n = \frac{32}{4} - \frac{9}{4} \Rightarrow n = \frac{23}{4}$$

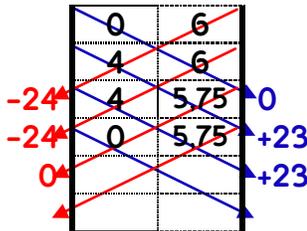
Portanto,

$$\mathbf{I(0; 23/4), J(3; 23/4), K(4; 23/4) \text{ e } L(3; 11/4)}$$

O valor de $n = 23/4 = 5,75$, indica que a distância entre os pontos I e A é de 0,25v já que o $y_A = 6$ ($6 - 5,75 = 0,25$). Aplicando esse resultado à experiência real, significa que a barra resultante fica com a altura 0,25v a menos do que o chocolate original.

Como os pares ordenados A, C, K e I são vértices de um retângulo (é aconselhável pedir aos alunos provarem isso pela propriedade das diagonais), podemos calcular:

$A(0; 6)$, $C(4; 6)$, $K(4; 5,75)$ e $I(0; 5,75)$.



Como $D = 23 + 23 - 24 - 24$,

$D = -2$ e, como $A = |D|/2 = |-2|/2 = 1$

Então, $A = 1uv$

Isso significa que, o pedaço que está faltando possui a mesma área superficial do pedacinho que foi retirado anteriormente.

Resumindo, a translação do **caso 1** faz com que a barra de chocolate perca $0,25v$ de altura ficando com $5,75v$ e o pedaço que falta é um retângulo cuja área superficial é $1uv$ ($4 \times 1u \times 0,25v$) e volume $1uvw$, volume equivalente ao do pedacinho de chocolate vermelho.

Agora vamos tratar sobre o outro tipo de translação que pode ser realizada, a do **caso 2**, em que o trapézio BCHG sofre uma translação segundo o vetor BA e também o outro trapézio DEGF, segundo um vetor EC; ambos quadriláteros representados na **figura 11.05**. A figura a seguir (11.08), mostra esse segundo caso.

Assim como no caso anterior, nos deparamos com alguns pares ordenados até agora desconhecidos nesse problema, que são:

$M(0; q)$, $N(3; 3)$, $O(4; r)$ e $P(3; 6)$

As coordenadas dos pontos N e P foram encontradas de imediato, pois as características originais dos trapézios permanecem as mesmas nas translações, e conseqüentemente, os polígonos de mesma cor que sofreram uma translação, são absolutamente congruentes.

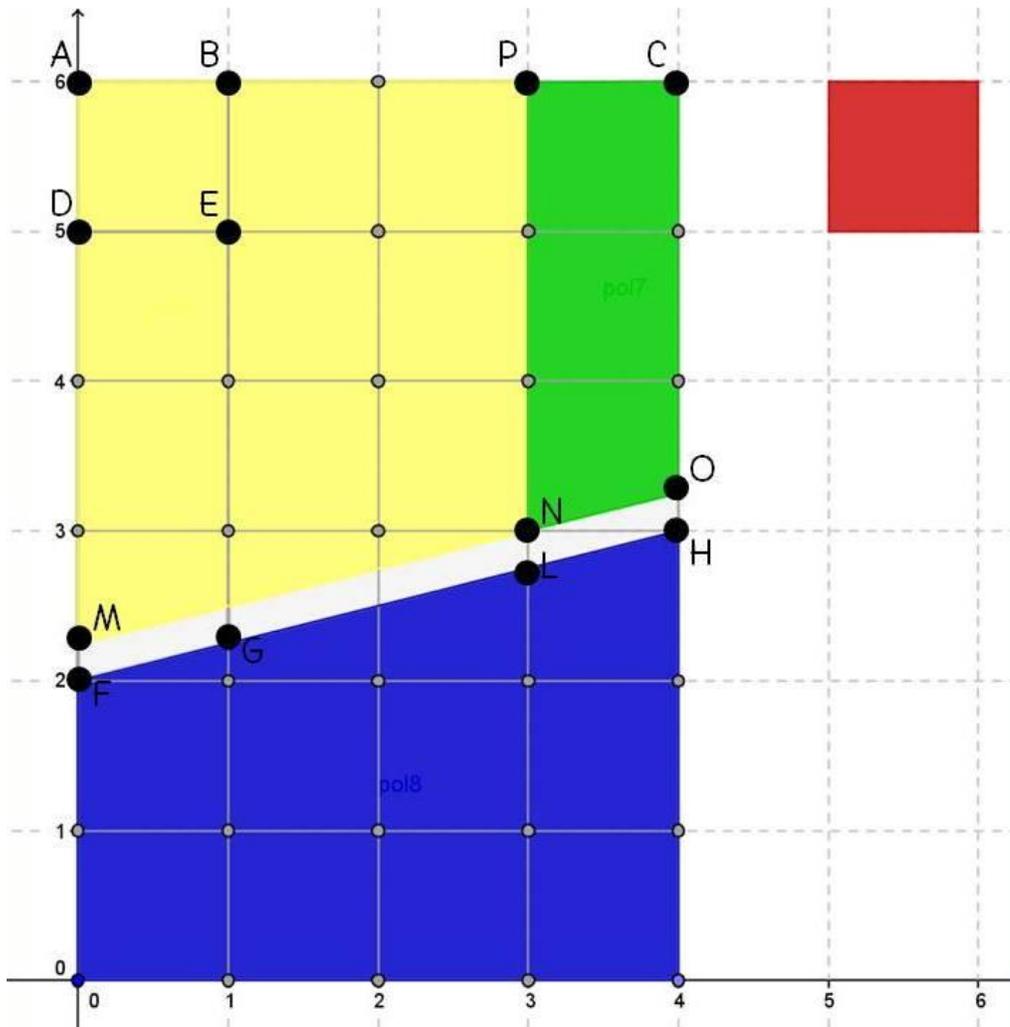


Figura 11.08: Translações dos trapézios BCHG (segundo o vetor BA) e DEGF (segundo o vetor EC)

Para encontrar os valores de q e r dos pontos M e O , respectivamente, utilizaremos o mesmo processo realizado anteriormente. A base BG , do trapézio amarelo original, forma, com a base AM do trapézio transladado, um paralelogramo ou até mesmo um retângulo, por causa do vetor paralelo ao eixo das abscissas utilizado. Assim, pelos mesmos argumentos anteriores, podemos dizer que os quatro pontos $B(1; 6)$, $G(1; 2)$, $A(0; 6)$ e $M(0; q)$ formam um RETÂNGULO, então, por ser ele um PARALELOGRAMO, suas diagonais também se intersectam nos respectivos pontos médios. Então,

- Calculando o ponto médio do segmento BM.

$$M_{BF} = \left(\frac{1+0}{2}; \frac{6+q}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{6+q}{2} \right)$$

- Calculando o ponto médio do segmento AG.

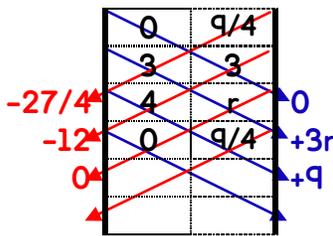
$$M_{AG} = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{6+9/4}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{6+9/4}{2} \right)$$

Como $M_{BM} = M_{AG}$, podemos concluir que:

$$\frac{6 + 9/4}{2} = \frac{6 + q}{2} \Rightarrow 6 + 9/4 = 6 + q \Rightarrow 9/4 = q \Rightarrow q = \frac{9}{4}$$

Ou seja, $M(0; 9/4)$ e, como os pontos M, N e O estão na mesma reta,

$M(0; 9/4)$, $N(3; 3)$ e $O(4; r)$.



Como $D = 0$,

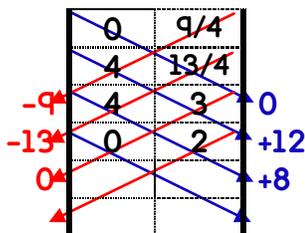
$$3r - 12 - 27/4 + 9 = 0 \Rightarrow 3r = 12 - 9 + 27/4$$

$$\Rightarrow 3r = 3 + 27/4 = 12/4 + 27/4 = 39/4$$

$$\Rightarrow 3r = 39/4 \Rightarrow r = 13/4$$

Logo, considerando o quadrilátero MOHF, temos:

$M(0; 9/4)$, $O(4; 13/4)$, $H(4; 3)$, $F(0; 2)$



Como $D = 12 + 8 - 9 - 13$,

$$D = -2 \text{ e, como } A = |D|/2 = |-2|/2 = 1$$

Então, $A = 1uv$

Isso significa que, o pedaço que está faltando

possui a mesma área superficial do pedacinho que foi retirado anteriormente. E ainda,

- Calculando o ponto médio do segmento MH.

$$M_{MH} = \left(\frac{0+4}{2}; \frac{9/4+3}{2} \right) = \left(\frac{4}{2}; \frac{21/4}{2} \right) = \left(2; \frac{21}{8} \right)$$

- Calculando o ponto médio do segmento FO.

$$M_{FO} = \left(\frac{0+4}{2}; \frac{2+13/4}{2} \right) = \left(\frac{4}{2}; \frac{21/4}{2} \right) = \left(2; \frac{21}{8} \right)$$

Como $M_{MH} = M_{FO}$, podemos concluir que o quadrilátero MOHF é um **paralelogramo**.

Resumindo, a translação do **caso 2** faz com que a barra de chocolate continue com a altura numericamente igual à anterior, ou seja, $6v$, mas, entre o pedaço que permaneceu inalterado (trapézio azul) e os pedaços manipulados, aparece um espaço vazio em forma de paralelogramo cuja área superficial é luv e volume $luvw$, volume que também é equivalente ao pedacinho de chocolate vermelho. O mito foi desfeito.

Para ilustrar de maneira dinâmica a experiência do “chocolate infinito” pode-se baixar em <http://www.geogebra.org/material/show/id/51821>, visto em 7 de Janeiro de 2015, o documento do Geogebra (.ggb) que ilustra a experiência descrita nesse capítulo. As figuras a seguir mostram os slides com procedimentos semelhantes aos mostrados até aqui:

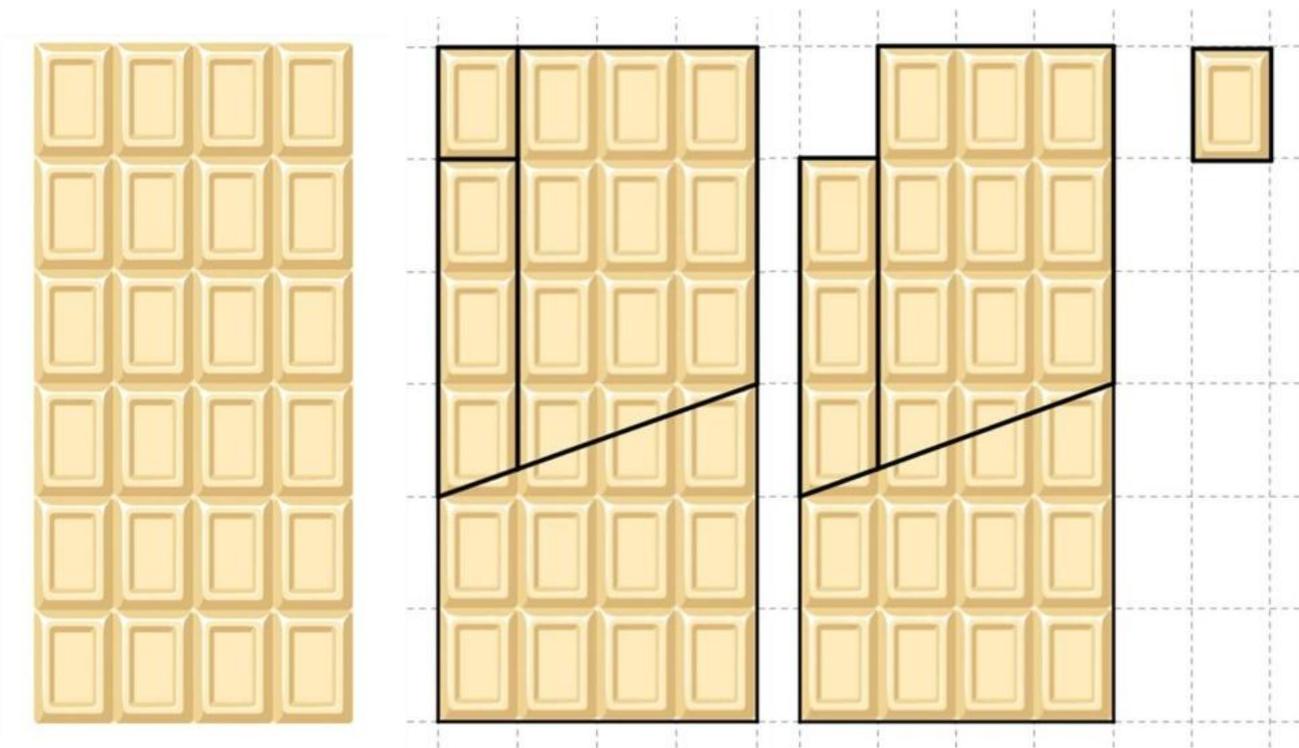


Figura 11.09: Representação, pelo Geogebra, das 3 primeiras etapas do “chocolate infinito”

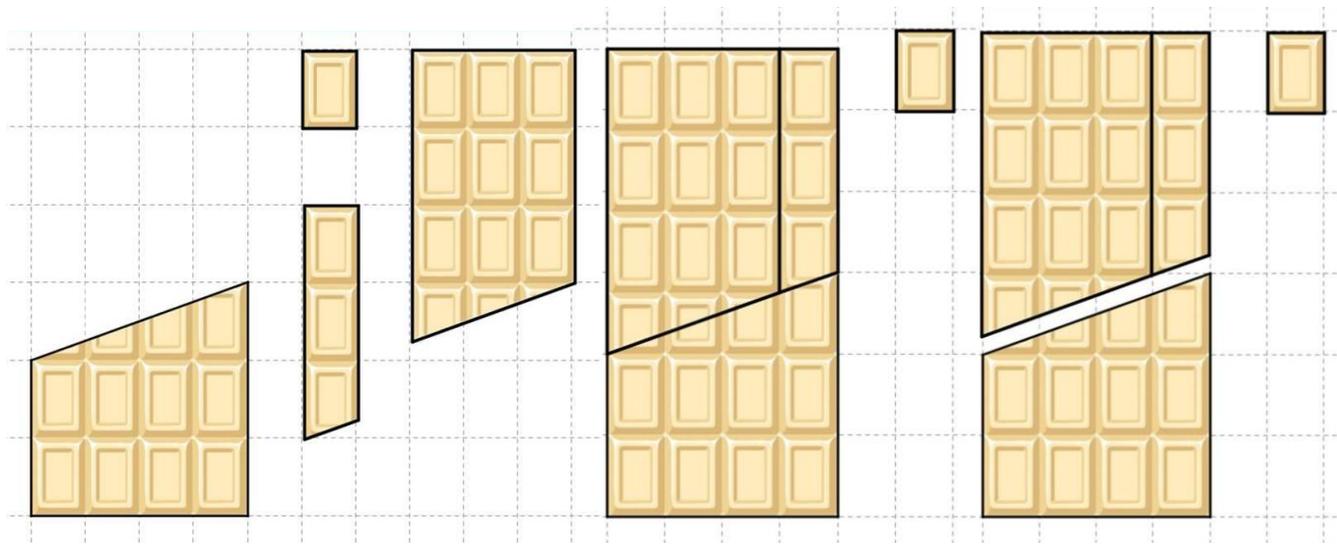


Figura 11.10: Representação, pelo Geogebra, das 3 últimas etapas do “chocolate infinito”

12. CONCLUSÃO

12.1 A declaração de SALAMANCA e a “exclusão na inclusão”

No dia 10 de Junho de 1994, na cidade de Salamanca, Espanha, foi aprovada por aclamação aquele que é considerado um dos documentos mais importantes que visam à inclusão social, a “Declaração de Salamanca”, que “é uma resolução das Nações Unidas que trata dos princípios, política e prática em educação especial” (http://pt.wikipedia.org/wiki/Declara%C3%A7%C3%A3o_de_Salamanca, visto em 22 de Janeiro de 2015). No preâmbulo desse documento, pode-se ler:

“2. Acreditamos e proclamamos que:

- cada criança tem o direito fundamental à educação e deve ter a oportunidade de conseguir e manter um nível aceitável de aprendizagem,
- cada criança tem características, interesses, capacidades e necessidades de aprendizagem que lhe são próprias,
- os sistemas de educação devem ser planejados e os programas educativos implementados tendo em vista a vasta diversidade destas características e necessidades,
- as crianças e jovens com necessidades educativas especiais devem ter acesso às escolas regulares, que a elas devem se adequar através de uma pedagogia centrada na criança, capaz de ir ao encontro destas necessidades,
- as escolas regulares, seguindo esta orientação inclusiva, constituem os meios mais capazes para combater as atitudes discriminatórias, criando comunidades abertas e solidárias, construindo uma sociedade inclusiva e

atingindo a educação para todos; além disso, proporcionam uma educação adequada à maioria das crianças e promovem a eficiência, numa ótima relação custo-qualidade, de todo o sistema educativo.”

(<http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001393/139394por.pdf>, visto em 21 de Janeiro de 2015)

Para que possamos compreender com mais propriedade, quando se diz que a educação é “direito fundamental” de toda criança, convém tomarmos ciência sobre o que diz a “Convenção sobre os direitos da criança”, outro documento de notável importância mundial que visa a proteção de crianças e adolescentes em todo o mundo, quando esclarece a amplitude desse vocábulo que é assim definido, no artigo 1: “Nos termos da presente Convenção, criança é todo o ser humano menor de 18 anos, salvo se, nos termos da lei que lhe for aplicável, atingir a maioridade mais cedo”

(https://www.unicef.pt/docs/pdf_publicacoes/convencao_direitos_crianca2004.pdf, visto em 23 de Janeiro de 2015)

As atividades descritas nesse trabalho buscaram exemplificar como seria elaborar um plano de aulas que atendam a estudantes matriculados no Ensino Médio, na faixa etária que inclui a definição dada pela “Convenção”, cuja efetiva inclusão de “crianças e jovens com necessidades educativas especiais”, em sua mais justa concepção, tem sido historicamente desfavorável a alunos portadores de dislexia que, verdadeiramente, tem feito parte da “Exclusão na Inclusão”.

O termo “Inclusão” é bastante profundo. A complexidade do tema merece de todo educador a leitura de textos de especialistas sobre o assunto, que tem como destaque, no Brasil, a mestre em Psicologia, doutora em Educação e Pesquisadora sobre assuntos educacionais, Rosita Edler Carvalho que, entre tantas observações dignas de relevância, escreveu: “...de um modo geral, os sujeitos da inclusão devem ser identificados dentre aqueles que não têm acesso aos bens e serviços histórica e socialmente disponíveis. Infelizmente estamos nos referindo a uma considerável parcela de nossa população. Inúmeros alunos com dificuldades de aprendizagem podem ser considerados em situação de deficiência decorrente de condições sociais e econômicas adversas, bloqueadoras de seu pleno desenvolvimento,

mesmo sem apresentarem perturbações no nível biológico como cegueira, surdez, retardo mental, paralisia cerebral, por exemplo. Creio que merecem citação, dentre outros, os aprendizes com manifestação de transtornos invasivos do desenvolvimento e aqueles com **dislexias** (destaque nosso), cujas origens orgânicas são aceitas por muitos estudiosos, mas não por todos. Constatase que estes últimos não são mencionados – **com a necessária visibilidade** – nas discussões e documentos de política sobre educação inclusiva” [14]. Esse trabalho procura preencher uma lacuna existente na bibliografia brasileira que remete à inclusão dos alunos disléxicos no “sistema de educação” que deve ser planejado e “implementado tendo em vista a vasta diversidade destas características e necessidades” no que se refere à aprendizagem da “rainha e serva das ciências”, a Matemática.

A simples negação da existência da Dislexia não irá apagar a página 832 da última edição do CID 10, que mantém a Dislexia, sob a classificação R48, entre os sintomas reconhecidos mundialmente [37], esse distúrbio pode até ter deixado de ser uma categoria específica do DSM-V, a nova edição do Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos mentais [3], em sua 5ª versão, considerada a “bíblia da psiquiatria” (<http://veja.abril.com.br/noticia/saude/psiquiatrias-revisam-criterios-para-o-diagnostico-de-disturbios-mentais>, visto em 25 de Janeiro de 2015), passando a ocupar uma categoria mais geral, a do Transtorno Específico de Aprendizagem, sem impossibilitar seu diagnóstico nos pacientes. A negação da existência da Dislexia em nada contribui para a evolução da aprendizagem dos estudantes, sejam eles quais forem.

12.2 As “RAMPAS”

A escola em que trabalho, palco da aplicação das diversas atividades fotografadas nessa dissertação, está repleta de rampas. Seguindo as determinações legais (http://portal.mp.sc.gov.br/portal/conteudo/cao/cij/manual_acessibilidade_web.pdf, visto em 24 de Janeiro de 2015), foram construídas diversas rampas para atender

peças com dificuldade de locomoção, muito embora algumas delas não estejam de acordo com a norma NBR9050 que é a norma brasileira que estabelece os critérios e parâmetros técnicos sobre as condições de acessibilidade a pessoas com deficiência (http://www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos/%5Bfield_generico_imagens-filefield-description%5D_24.pdf, visto em 25 de Janeiro de 2015). Nunca tive oportunidade de ministrar aulas a um cadeirante na escola, mas a presença das rampas tem seu significado: quando eles chegarem, as rampas estarão ali, à disposição de uso, por quem quer que seja, conforme recomenda as organizações internacionais que buscam promover uma “educação para todos”.

A escola de hoje precisa também de outras rampas. Não necessariamente das que estão diante de nossos olhos, mas também de rampas que conduzem o estudante para o caminho da ciência, da arte e do saber. Há necessidade proeminente de construirmos uma escola que atenda a todos os estudantes, a contento, sem exceção, nem mesmo excluindo os alunos que porventura sejam disléxicos e que, provavelmente, não tenham ciência de seu distúrbio. A simples estimativa (10 a 15%) de um percentual tão grande de disléxicos entre nossos alunos, justifica que tomemos medidas visando à construção das rampas necessárias para atendê-los: a preparação de condições pedagógicas favoráveis que “devem se adequar através de uma pedagogia centrada na criança, capaz de ir ao encontro destas necessidades”

12.3 A “INCLUSÃO” dos professores

“A inclusão educacional exige que expliquemos dificuldades escolares não só tendo os alunos como focos, mas considerando-se as limitações existentes em nossos sistemas de ensino e em nossas escolas. O desafio implica numa nova visão de necessidades educacionais especiais que, além das dos alunos,

traduzem-se por necessidades das escolas, dos professores e de todos os recursos humanos que nelas trabalham” Rosita Edler Carvalho [14]

Sim, há necessidade urgente de que os professores sejam incluídos nos sistemas de ensino. Já não bastassem as condições de trabalho inóspitas vividas pelo professor de hoje, como violência, desrespeito e desvalorização profissional ainda se vê obrigado a executar seu trabalho sem as mínimas condições pedagógicas pra isso. Excesso de alunos nas salas, o uso inadequado de celulares pelos estudantes durante as lições ministradas pelos mestres, restrições do uso livre dos equipamentos tecnológicos imprescindíveis em um ensino multissensorial. Sem as necessárias condições de trabalho, que envolvem não só os aspectos mencionados anteriormente, mas também uma colaboração intensa na produção, divulgação e execução das atividades pedagógicas que possam despertar a chama da curiosidade e o prazer da aprendizagem na “criança” que nos foi delegada a importante missão de ensinar.

A Matemática pode ser aprendida por todos, mas dificilmente ela será acessível se for apresentada de qualquer jeito aos estudantes, de uma maneira geral, e ainda mais por aqueles que carregam o lastro da dificuldade. É preciso um esforço daqueles que estão envolvidos na educação, para que a nossa “Rainha” deixe de ser uma “Má Temática na Dislexia” e passe a ser, simplesmente, a “Matemática na Dislexia”, com tudo do bom e do melhor para que o manto da “Majestade” possibilite, a todos, a verdadeira inclusão no “mundo maravilhoso...” da própria vida.

13. BIBLIOGRAFIA

- [1] BASTOS, José Alexandre. **O Cérebro e a Matemática**, 1ª edição. São José do Rio Preto, sp: Edição do Autor, 2005.
- [2] ARAÚJO, Luís Cláudio. **Cuidado no uso do computador!** Revista do professor de Matemática, SBM, n. 70 p. 41-45, 2009.
<http://www.dma.ufs.br/~gastao/arquivos/textos/ArtigoLuisClaudioRPM70.pdf> visto em 05 de Março de 2015.
- [3] ASSOCIAÇÃO AMERICANA de PSQUIATRIA. **DSM-5**; tradução: Maria Inês Corrêa Nascimento. Porto Alegre, rs: Artmed, 2014.
- [4] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática Através dos Tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas; tradução: Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo, sp: Blucher, 2010.
- [5] BERNARDI, Jussara. **DISCALCULIA**: O que é? Como intervir? Jundiaí, sp: Paco Editorial, 2014.
- [6] BONGIOVANNI, Vincenzo. **Notas de aulas do curso de Didática da Geometria ministrado pelo professor Vincenzo Bongiovanni**. 2014.
- [7] BONGIOVANNI, Vincenzo. **Sobre definições de trapézios isósceles**. Revista do professor de Matemática, São Paulo, n. 72, p. 9-10, 2010.

- [8] BONGIOVANNI, Vincenzo. **Quadrados são losangos? Paralelogramos são trapézios?** Revista do professor de Matemática, Rio de Janeiro n. 55, p. 29-32, 2004.
- [9] BONGIOVANNI, Vincenzo; JAHN, Ana Paula. **O Teorema de Pitágoras segundo a dialética ferramenta-objeto.** Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.7, p. 78-83, UFSC: 2008.
- [10] BOYER, Carl B. **História da Matemática;** tradução: Elza F. Gomide, 2ª edição. São Paulo, sp: Blucher, 1996.
- [11] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ADAPTAÇÕES CURRICULARES – Estratégias para a educação de alunos com necessidades especiais.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1999.
- [12] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- [13] CAMPOS, Ana Maria Antunes de. **DISCALCULIA: superando as dificuldades em aprender Matemática.** Rio de Janeiro, rj: Wak Editora, 2014.
- [14] CARVALHO, Rosita Edler. **Educação Inclusiva: do que estamos falando?** Artigo, 2005. http://www.fcee.sc.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=238, visto em 05 de Março de 2015.
- [15] CAVALHEIRO, Pedro Jacintho; RUSILO, Luiz Carlos. **Breve Panorama da Língua Internacional Esperanto;** São Paulo, sp: Z-editorial, 2012.

- [16] CHINN, Stephen; Ashcroft, J. Richard. **Mathematics for Dyslexics: Including Dyscalculia**, Third Edition. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [17] CHINN, Stephen. **Maths and Dyslexia**. A view from UK, <http://www.learning-works.org.uk/chinns-uk-research-pdf>, 2005.
- [18] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. São Paulo, sp: Editora Livraria da Física, 2008.
- [19] DE VILLIERS, Michael. **O papel e a função de uma classificação hierárquica de quadriláteros**. Artigo, 1993.
http://www.apm.pt/files/_traducao_do_Villiers_v_FINAL_4a6423ce36ef5.pdf, visto em 05 de Março de 2015.
- [20] EUCLIDES. **Os Elementos**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, sp: Editora UNESP, 2009.
- [21] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**; tradução Hygino H. Domingues, 5ª edição – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.
- [22] FLOOD, Raymond. WILSON, Robin. **Os grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos**; tradução Maria Beatriz de Medina, São Paulo, sp: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2013.
- [23] GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**, 3ª edição, São Paulo, sp: Editora Livraria da Física, 2009.
- [24] HADAMARD, Jacques. **Leçons de geometrie elementaire**; 2º édition, Paris, fr: Librairie Armand Colin, 1931.

- [25] HADAMARD, Jacques. **Psicologia da Invenção na Matemática**; tradução Estela dos Santos Abreu, Rio de Janeiro, rj: Contraponto, 2009.
- [26] HEALY, Lulu; KRANZ, Cláudia Rosana. **Pesquisas sobre Discalculia no Brasil: Uma reflexão a partir da perspectiva histórico-cultural**. Artigo, 2012.
<http://www.matematicainclusiva.net.br/pdf/PESQUISAS%20SOBRE%20DISCALCULIA%20NO%20BRASIL.pdf>, visto em 05 de Março de 2015.
- [27] IANHEZ, Maria Eugenia; NICO, Maria Angela. **Nem Sempre é o que parece**, 12^a edição. Rio de Janeiro, rj: Elsevier, 2002.
- [28] ISKANDAR, J.I. **Normas da ABNT**; 4^a edição, Curitiba, pr: Juruá, 2009.
- [29] KOSHY, Thomas. **Elementary Number theory with applications**; 2^o edition, San Diego, california, usa: Academic Press of Elsevier, 2007.
- [30] KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**; 1^o edition, New York, ny: John Wiley & Sons, 2001.
- [31] LEGENDRE, Adrien-Marie. **Elementos de geometria**; tradução Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, Rio de Janeiro, rj: E-LIMC, 2009.
- [32] LEGENDRE, Adrien-Marie. **Éléments de Géométrie avec des notes**; Bruxelles, be: J. B. Balleroy, 1845.
- [33] LIVIO, Mario; **Razão Áurea - A História de FI, um número surpreendente**; tradução Marco Shinobu Matsumura, 4^a edição, Rio de Janeiro, rj: Record, 2009.
- [34] MARTINS, Elen Graciele. **O papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos para números racionais por pessoas cegas e pessoas com baixa visão**. 2010. Dissertação (Mestrado) - Universidade Bandeirantes, São Paulo.

- [35] MILES, Thomas Richard; MILES, Elaine; **Dyslexia and Mathematics**; 2^o edition, London, uk: RoutledgeFalmer, 2003.
- [36] NIVEN, Ivan; **Números: racionais e irracionais**; tradução de Renata Watanabe, 1^a edição, Rio de Janeiro, rj: SBM, 2012.
- [37] ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DE SAÚDE. **CID 10**; tradução Centro Colaborador da OMS para a Família. Classificações Internacionais em Português, 10^a edição, rev. 5. reimpr. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2014.
- [38] RODRIGUES, Maisa Aparecida Siqueira. **Explorando números reais através de uma representação visual e sonora: uma estudo da interações dos alunos do ensino médio**, 2010. Dissertação (Mestrado) – Universidade Bandeirantes, São Paulo.
- [39] Rooney, Anne. **A História da Matemática**, desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito; tradução Mario Fecchio, 1^a edição, São Paulo, sp: M.Books do Brasil Editora, 2012.
- [40] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**, uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas; Rio de Janeiro, rj: Zahar, 2012.
- [41] RUSILO, Luiz Carlos; MADUREIRA, Sandra. **Modelo de Aprendizagem de Línguas Estrangeiras Utilizando o Efeito Propedêutico da Aquisição Prévia da Língua Esperanto**; São Paulo, sp: Z-editorial, 2013.
- [42] SHAYWITZ, Sally. **Entendendo a Dislexia**: um novo e completo programa para todos os níveis de problemas de leitura; 1^a edição, Porto Alegre, rs: Artmed, 2006.
- [43] SILVA, Maria Aparecida Roseane Ramos. **Adrien-Marie (1752-1833) e suas obras em Teoria dos Números**. 2010. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, RN.

- [44] SINCLAIR, Nathalie; LILJEDAHN, Peter; ZAZKIS, Rina. **A Coloured Window on pre-service Teacher' conceptions of Rational Numbers**. International Journal of Computers for Mathematical Learning. vol. 11, n.2, 2006.
- [45] SOUZA, Franklin Rodrigues. **Explorações de frações equivalentes por alunos surdos: uma investigação das contribuições da MusiColorida**. 2010. Dissertação (Mestrado) – Universidade Bandeirantes, São Paulo.
- [46] THOMPSON, Moira; **Supporting Dyslexic in the Secondary Curriculum. Dyslexia and Mathematics**, (http://www.dsse.org.uk/resources/2_6MathsP.pdf). Great Britain, uk: Dyslexia Scotland, 2007.
- [47] THOMPSON, Moira; **Supporting Dyslexic in the Secondary Curriculum. Dyslexia and Modern Foreign Languages**. Great Britain, uk: Dyslexia Scotland, 2007.
- [48] THOMSON, Moira; **Dyslexia and Mathematics**, number 2.6 in the series of supporting Dyslexic Pupils in the secondary curriculum. Great Britain, uk: Dyslexia Scotland, 2007.
- [49] TOPCZEWSKI, Abram; **Dislexia, como lidar?** São Paulo, sp: All Print Editora, 2010.
- [50] VIEIRA, Elaine. **Transtornos na Aprendizagem da Matemática: número e discalculia**, Revista Ciências e Letras, n. 35, p. 109-119, 2004.
- [51] YEO, Dorian; KAY, Julie; **Dyslexia and Maths**; London, uk: David Fulton Publishers, 2003.

SUPLEMENTOS

Suplemento 1: A sequência de Lucas

S1.1: Definição e experimentação

A sequência de Fibonacci, já mencionada no capítulo 7, foi definida como uma sequência recorrente, composta de números naturais, partindo de dois valores iniciais fixos, 1 e 1, e os restantes, do terceiro termo em diante, eram calculados como a soma de seus dois termos anteriores, ou seja, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Existem infinitas sequências que podem ser construídas de maneira semelhante à Fibonacci, a mais famosa delas é denominada “Sequência de Lucas”, seus valores iniciais são 1 e 3 e os outros elementos da sequência são representados pela letra “L”:

$$L_1 = 1, L_2 = 3 \text{ e } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 3 \text{ [30, pág 8]}$$

Representando a sequência de Lucas através de seus números, teremos:

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11, L_6 = 18, L_7 = 29, L_8 = 47, L_9 = 76, L_{10} = 123, \\ L_{11} = 199, L_{12} = 322, L_{13} = 521, L_{14} = 843, \dots$$

Se utilizarmos a planilha Excel para efetuar cálculos semelhantes ao realizados com a sequência de Fibonacci, teremos:

| A | B | C | D | E | F | H |
|----|-------|------------------|-------------|-------------------|-----|-----------------------|
| | L_n | Área do QUADRADO | | Área do RETÂNGULO | Q-R | F_i |
| 1 | L1 | 1 | | | | 0,0 |
| 2 | L2 | 3 | | | | |
| 3 | L3 | 4 | | | | |
| 4 | L4 | 7 | 49,0 | 44,0 | 5 | 1,3333333333333000000 |
| 5 | L5 | 11 | 121,0 | 126,0 | -5 | 1,7500000000000000000 |
| 6 | L6 | 18 | 324,0 | 319,0 | 5 | 1,5714285714285700000 |
| 7 | L7 | 29 | 841,0 | 846,0 | -5 | 1,6363636363636400000 |
| 8 | L8 | 47 | 2209,0 | 2204,0 | 5 | 1,6111111111111100000 |
| 9 | L9 | 76 | 5776,0 | 5781,0 | -5 | 1,6206896551724100000 |
| 10 | L10 | 123 | 15129,0 | 15124,0 | 5 | 1,6170212765957400000 |
| 11 | L11 | 199 | 39601,0 | 39606,0 | -5 | 1,6184210526315800000 |
| 12 | L12 | 322 | 103684,0 | 103679,0 | 5 | 1,6178861788617900000 |
| 13 | L13 | 521 | 271441,0 | 271446,0 | -5 | 1,6180904522613100000 |
| 14 | L14 | 843 | 710649,0 | 710644,0 | 5 | 1,6180124223602500000 |
| 15 | L15 | 1364 | 1860496,0 | 1860501,0 | -5 | 1,6180422264875200000 |
| 16 | L16 | 2207 | 4870849,0 | 4870844,0 | 5 | 1,6180308422301300000 |
| 17 | L17 | 3571 | 12752041,0 | 12752046,0 | -5 | 1,6180351906158400000 |
| 18 | L18 | 5778 | 33385284,0 | 33385279,0 | 5 | 1,6180335296783000000 |
| 19 | L19 | 9349 | 87403801,0 | 87403806,0 | -5 | 1,6180341640996900000 |
| 20 | L20 | 15127 | 228826129,0 | 228826124,0 | 5 | 1,6180339217722400000 |
| 21 | L21 | 24476 | 599074576,0 | 599074581,0 | -5 | 1,6180340143330800000 |

Tabela S1: Representação, pelo Excel, da fórmula $L_n \times L_n - L_{n-1} \times L_{n+1} = 5 \cdot (-1)^n$

No Geogebra, para o caso $L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11, L_6 = 18$, teremos

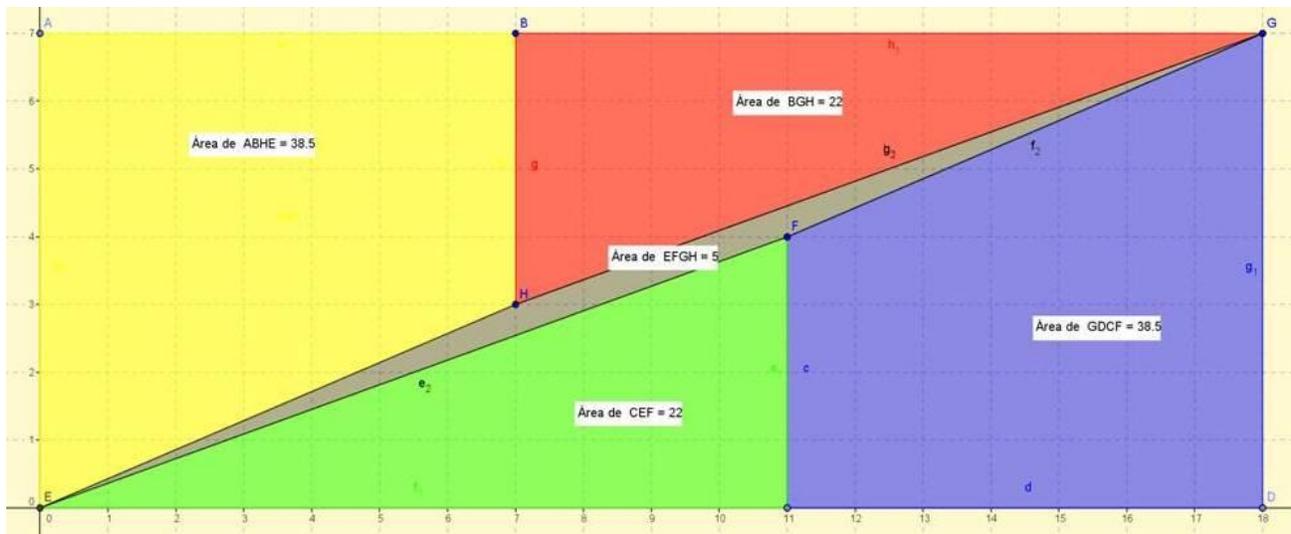


Figura S1: Representação, pelo Geogebra, do caso $L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11, L_6 = 18$

No caso acima, o lado do quadrado é $L_5 = 11$ e as dimensões do retângulo são $L_4 = 11$ e $L_6 = 18$ e a diferença entre a área do quadrado e do retângulo é -5 . Podemos constatar que a área do quadrado é 5 unidades **MENOR** do que a medida da área do

I - Verifiquemos se a proposição acima é válida para $n = 1$, ou seja, se

$$L_2 \times L_0 - (L_1)^2 = 5 \cdot (-1)^{1-1} \quad (L_0 = L_2 - L_1 = 3 - 1 = 2)$$

$$1^\circ \text{ membro} = L_2 \times L_0 - (L_1)^2 = 3 \times 2 - 1^2 = 6 - 1 = 5 = 5 \cdot (-1)^0 = 5 \cdot (-1)^{1-1} = 2^\circ \text{ membro.}$$

Conclusão: a proposição é válida para $n = 1$.

II - Admitamos que a proposição seja válida para $n = k$, ou seja,

$$L_{k+1} \times L_{k-1} - (L_k)^2 = 5 \cdot (-1)^{k-1}$$

Verifiquemos se a igualdade é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$L_{k+2} \times L_k - (L_{k+1})^2 = 5 \cdot (-1)^k$$

1º membro = $L_{k+2} \times L_k - (L_{k+1})^2$, utilizando a propriedade característica da seqüência de Lucas, ($L_{k+2} = L_k + L_{k+1}$), temos:

$$L_{k+2} \times L_k - (L_{k+1})^2 = (L_k + L_{k+1}) \times L_k - (L_{k+1})^2 = L_k \times L_k + L_{k+1} \times L_k - (L_{k+1})^2 =$$

$= (L_k)^2 + L_{k+1} \times L_k - (L_{k+1})^2$ (*). Mas, também pela propriedade característica da seqüência de Lucas, se $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$, então $L_k = L_{k+1} - L_{k-1}$. Substituindo na igualdade (*) temos:

$$(L_k)^2 + L_{k+1} \times L_k - (L_{k+1})^2 = (L_k)^2 + L_{k+1} \times (L_{k+1} - L_{k-1}) - (L_{k+1})^2 =$$

$$= (L_k)^2 + L_{k+1} \times L_{k+1} - L_{k+1} \times L_{k-1} - (L_{k+1})^2 = (L_k)^2 + (L_{k+1})^2 - L_{k+1} \times L_{k-1} - (L_{k+1})^2 =$$

$$= (L_k)^2 + \cancel{(L_{k+1})^2} - L_{k+1} \times L_{k-1} - \cancel{(L_{k+1})^2} = (L_k)^2 - L_{k+1} \times L_{k-1}$$
 (**). Pela hipótese de indução,

$$L_{k+1} \times L_{k-1} - (L_k)^2 = 5 \cdot (-1)^{k-1}, \text{ ou seja,}$$

$$-L_{k+1} \times L_{k-1} = -5 \cdot (-1)^{k-1} - (L_k)^2 \text{ e, substituindo em (**), temos:}$$

$$L_{k+2} \times L_k - (L_{k+1})^2 = (L_k)^2 - 5 \cdot (-1)^{k-1} - (L_k)^2 = \cancel{(L_k)^2} - 5 \cdot (-1)^{k-1} - \cancel{(L_k)^2} = -5 \cdot (-1)^{k-1} =$$

$$= 5 \cdot (-1) \times (-1)^{k-1} = 5 \cdot (-1)^1 \times (-1)^{k-1} = 5 \cdot (-1)^{1+k-1} = 5 \cdot (-1)^k = 2^\circ \text{ membro.}$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$ e concluímos, pelo princípio da indução finita, que para $n \geq 1$, $L_{n+1} \times L_{n-1} - (L_n)^2 = 5 \cdot (-1)^{n-1}$

Obs.1: Se associarmos o produto " $L_{n+1} \times L_{n-1}$ " com a área do RETÂNGULO e a potência " $(L_n)^2$ " com a área do QUADRADO, podemos generalizar que:

Quando “n” for ÍMPAR, a área do QUADRADO será 5 unidades **MENOR** do que a área do RETÂNGULO e, conseqüentemente, quando “n” for PAR, a área do QUADRADO será 5 unidades **MAIOR** do que a área do RETÂNGULO.

Obs.2: É interessante observar que, as demonstrações da identidade de Cassini (10.1) e à realizada acima são extremamente semelhantes.

S1.3: O Paralelogramo de área 5

Relembrando, sejam 5 números consecutivos da sequência de Lucas, $L_{n-1}, L_n, L_{n+1}, L_{n+2}, L_{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 3$ e $n+2$ é ímpar (*). Consideremos particularmente os seguintes pontos: $P_1(0; 0)$; $P_2(L_{n+2}; L_n)$; $P_3(L_{n+3}; L_{n+1})$ e $P_4(L_{n+1}; L_{n-1})$

Demonstremos:

I - O quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Sabemos que “**PARALELOGRAMO** é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.”.

- Calculemos o ponto médio do segmento P_1P_3 .

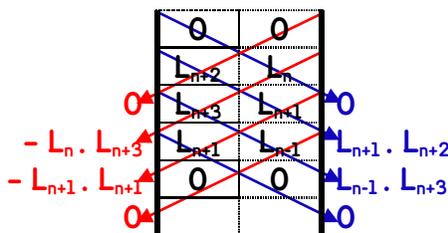
$$M_{13} = \left(\frac{0+L_{n+3}}{2}; \frac{0+L_{n+1}}{2} \right) = \left(\frac{L_{n+3}}{2}; \frac{L_{n+1}}{2} \right)$$

- Calculemos o ponto médio do segmento P_2P_4 .

$$M_{24} = \left(\frac{L_{n+1}+L_{n+2}}{2}; \frac{L_{n-1}+L_n}{2} \right) = \left(\frac{L_{n+3}}{2}; \frac{L_{n+1}}{2} \right)$$

Como $M_{13} = M_{24}$, podemos concluir que $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO**.

II - A área do **PARALELOGRAMO** $P_1P_2P_3P_4$ é igual a 5.



Calculemos “D”:

$$D = L_{n+1} \cdot L_{n+2} - L_n \cdot L_{n+3} + L_{n-1} \cdot L_{n+3} - L_{n+1} \cdot L_{n+1}$$

$$D = L_{n+1} \cdot (L_n + L_{n+1}) - L_n \cdot (L_{n+1} + L_{n+2}) + L_{n-1} \cdot (L_{n+1} + L_{n+2}) - L_{n+1} \cdot L_{n+1}$$

$$D = L_{n+1} \cdot (L_n + L_{n+1}) - L_n \cdot (L_{n+1} + L_{n+2}) + (L_{n+1} - L_n) \cdot (L_{n+1} + L_{n+2}) - L_{n+1} \cdot L_{n+1}$$

$$D = L_{n+1} \cdot L_n + L_{n+1} \cdot L_{n+1} - L_n \cdot L_{n+1} - L_n \cdot L_{n+2} + (L_{n+1} - L_n) \cdot (L_{n+1} + L_{n+2}) - L_{n+1} \cdot L_{n+1}$$

$$D = L_{n+1} \cdot L_n - L_n \cdot L_{n+1} - L_n \cdot L_{n+2} + (L_{n+1} - L_n) \cdot (L_{n+1} + L_{n+2})$$

$$D = -L_n \cdot L_{n+2} + (L_{n+1} - L_n) \cdot (L_{n+1} + L_{n+2})$$

$$D = -L_n \cdot L_{n+2} + L_{n+1} \cdot L_{n+1} + L_{n+1} \cdot L_{n+2} - L_n \cdot L_{n+1} - L_n \cdot L_{n+2}$$

$$D = L_{n+1} \cdot L_{n+1} + L_{n+1} \cdot L_{n+2} - L_n \cdot L_{n+1} - 2 \cdot (L_n \cdot L_{n+2})$$

$$D = (L_{n+1})^2 + L_{n+1} \cdot (L_n + L_{n+1}) - L_n \cdot L_{n+1} - 2 \cdot (L_n \cdot L_{n+2})$$

$$D = (L_{n+1})^2 + L_{n+1} \cdot L_n + L_{n+1} \cdot L_{n+1} - L_n \cdot L_{n+1} - 2 \cdot (L_n \cdot L_{n+2})$$

$$D = (L_{n+1})^2 + (L_{n+1})^2 - 2 \cdot (L_n \cdot L_{n+2})$$

$$D = 2 \cdot (L_{n+1})^2 - 2 \cdot (L_n \cdot L_{n+2})$$

$$D = 2 \cdot [(L_{n+1})^2 - L_n \cdot L_{n+2}] (*)$$

$$D = 2 \cdot [5]$$

$$D = 10$$

(*) Se “n+2” é ímpar, então “n+1” é par, assim, a área do QUADRADO é **MAIOR** do que a área do RETÂNGULO em 5 unidades, então a expressão

$$[(L_{n+1})^2 - L_n \cdot L_{n+2}] = 5.$$

Sabemos que $A = |D|/2$. Assim,

$$A = \frac{|D|}{2} \text{ então, } A = \frac{10}{2}, \text{ ou seja, } A = 5$$

Logo, podemos concluir que a área do **PARALELOGRAMO** $P_1P_2P_3P_4$ é igual a **5**.

Assim, levando-se em conta os resultados obtidos nos itens I e II, podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO** e sempre terá área cuja medida é igual a **5**.

S1.4: O termo geral da sequência de Lucas e a Geometria Dinâmica

Para aplicarmos o resultado anterior no Geogebra, precisaremos também de uma fórmula do termo geral para a sequência de Lucas, assim como procedemos com relação à de Fibonacci. Já sabemos que:

$$(I)\alpha^2 = \alpha + 1, \quad (II)\beta^2 = \beta + 1, \quad (III)\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (III)\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$(IV)\alpha \times \beta = -1, \quad (V)\alpha + \beta = +1, \quad (VI)\alpha^{-1} = \alpha - 1, \quad (VII)\alpha - \beta = \sqrt{5},$$

$$(VIII)\alpha^n = F_n \times \alpha + F_{n-1}, n > 1; \quad (IX)\beta^n = F_n \times \beta + F_{n-1}, n > 1.$$

Vamos mostrar que $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

$$L_1 = \alpha^1 + \beta^1 = \alpha + \beta = 1, \text{ ou seja, } L_1 = 1$$

$$L_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha + 1 + \beta + 1 = \alpha + \beta + 2 = 1 + 2 = 3, \text{ ou seja, } L_2 = 3$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = \alpha^{n-2} + \beta^{n-2} + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \xrightarrow{\text{VIII e IX}}$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = F_{n-2} \times \alpha + F_{n-3} + (F_{n-2} \times \beta + F_{n-3}) + F_{n-1} \times \alpha + F_{n-2} + (F_{n-1} \times \beta + F_{n-2})$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = F_{n-2} \times \alpha + F_{n-3} + F_{n-2} \times \beta + F_{n-3} + F_{n-1} \times \alpha + F_{n-2} + F_{n-1} \times \beta + F_{n-2}$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = F_{n-2} \times \alpha + F_{n-1} \times \alpha + F_{n-2} \times \beta + F_{n-1} \times \beta + F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-2}$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = (F_{n-2} + F_{n-1}) \times \alpha + (F_{n-2} + F_{n-1}) \times \beta + F_{n-1} + F_{n-1}$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = F_n \times \alpha + F_n \times \beta + F_{n-1} + F_{n-1}$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = F_n \times \alpha + F_{n-1} + F_n \times \beta + F_{n-1}$$

$$L_{n-2} + L_{n-1} = \alpha^n + \beta^n = L_n$$

Assim, encontramos a fórmula do termo geral da sequência de Lucas,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

Vamos testá-la no Geogebra, para os valores cujos lados dos quadrados sejam da forma L_{n+2} , em que “n+2” é impar.

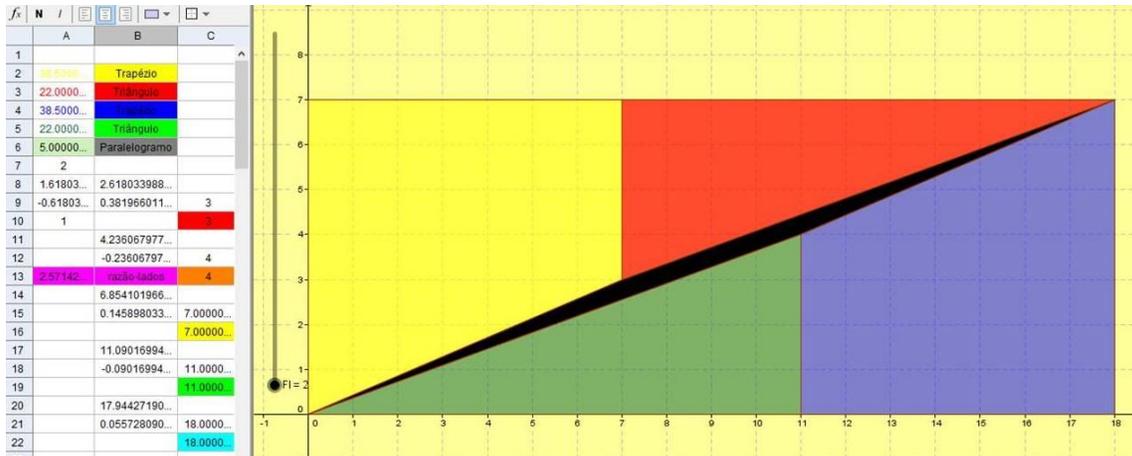


Figura S3: Controle deslizante do caso $L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11$ (lado do quadrado), $L_6 = 18$

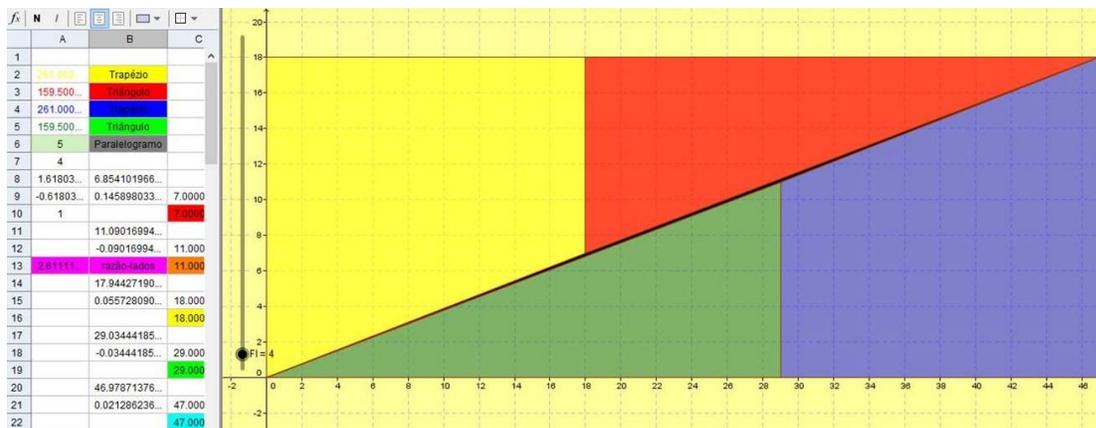


Figura S4: Controle deslizante do caso $L_4 = 7, L_5 = 11, L_6 = 18, L_7 = 29$ (lado do quadrado), $L_8 = 47$

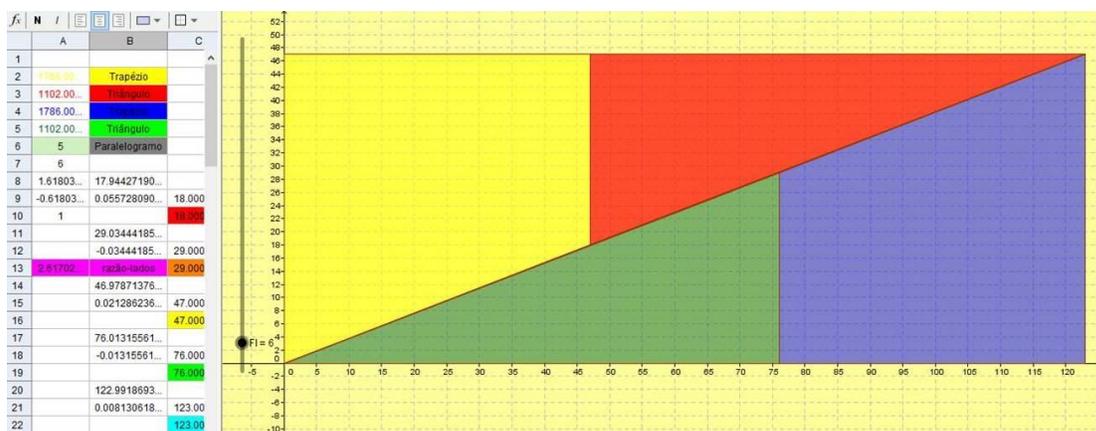


Figura S5: Controle deslizante do caso $L_6 = 18, L_7 = 29, L_8 = 47, L_9 = 76$ (lado do quadrado), $L_{10} = 123$

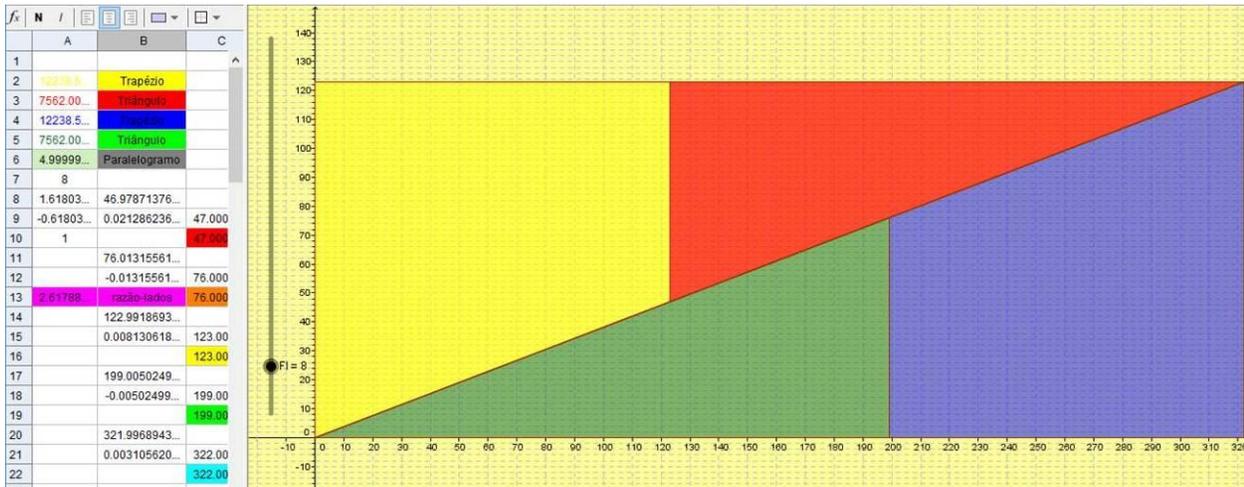


Figura S6: Controle deslizante do caso $L_8 = 47$, $L_9 = 76$, $L_{10} = 123$, $L_{11} = 199$ (lado do quadrado), $L_{12} = 322$

S1.5: A sequência de Lucas e o número Φ

Na tabela S1, coluna H, há uma série de razões sucessivas entre números consecutivos da sequência de Lucas. A sequência numérica vai apresentando, na tabela, números cada vez mais próximos de nosso já conhecido número de ouro. Seria essa também uma outra semelhança entre as duas sequências? Vejamos:

Vamos utilizar a fórmula do termo geral de maneira semelhante ao que fizemos em relação à fórmula de Binet:

$$F_n = \alpha^n + \beta^n \stackrel{IV}{\Rightarrow} F_n = \alpha^n + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n$$

Então, a razão entre dois números consecutivos da sequência de Lucas é dada por:

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{\alpha^{n+1} + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{\alpha^n + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{\alpha^n + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

mas, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + 0}{\alpha^n + 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n \times \alpha}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \Phi$$

Então, quanto maior o valor de n , a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Lucas também se aproxima de Φ .

Suplemento 2: A Generalização da Sequência de FIBONACCI

S2.1: Gibonacci: definição e experimentação

No ponto em que chegamos, é muito natural questionar se seria possível realizarmos uma experiência semelhante à do quadrado original no “64 = 65?!” com números naturais arbitrários a e b ($a < b$). Vamos considerar uma sequência de recorrência, G_n , de tal forma que $G_1 = a$, $G_2 = b$, e $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, $n \geq 3$. Observe a seguinte regularidade:

$$G_1 = a, G_2 = b, G_3 = 1a + 1b, G_4 = 1a + 2b, G_5 = 2a + 3b, G_6 = 3a + 5b, G_7 = 5a + 8b, \dots$$

Se observarmos os coeficientes de a e b na sucessão acima, denominada Gibonacci, podemos reconhecer números que pertencem à sequência de Fibonacci. Se a reescrevermos utilizando a notação F_n , teremos:

$$G_1 = a, G_2 = b, G_3 = aF_1 + bF_2, G_4 = aF_2 + bF_3, G_5 = aF_3 + bF_4, G_6 = aF_4 + bF_5, \\ G_7 = aF_5 + bF_6, G_8 = aF_6 + bF_7, G_9 = aF_7 + bF_8, G_{10} = aF_8 + bF_9, G_{11} = aF_9 + bF_{10},$$

Essa sequência, leva-nos a conjecturar: $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$, $n > 2$?

Demonstremos, por indução, a veracidade dessa igualdade:

I - G_3 é verdadeiro, pois $G_3 = aF_{3-2} + bF_{3-1} = aF_1 + bF_2 = a.1 + b.1 = a + b$

II - Admitamos que a proposição seja válida para $n = k$, ou seja,

$$G_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}$$

Verifiquemos se a igualdade é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$G_{k+1} = aF_{k-1} + bF_k$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} = G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} = aF_{k-2} + bF_{k-1} + aF_{k-3} + bF_{k-2} = \\ &= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) = a(F_{k-1}) + b(F_k) = \\ &= aF_{k-1} + bF_k = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$ e concluímos, pelo princípio da indução finita, que para $n \geq 3$, $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ (X) [30, pág 110].

S2.2: O termo geral da sequência Gibonacci

Antes de darmos início à demonstração da fórmula que possibilita encontrar um termo qualquer da sequência Gibonacci, vamos falar sobre uma constante importante representada por “ μ ”, a décima segunda letra do alfabeto grego. O símbolo “ μ ” representa uma constante que aparece em diversas fórmulas para a generalização dos números de Fibonacci. Essa constante é chamada de “característica da GSF” (Generalização da Sequência de Fibonacci) [30, pág 111].

Considere as seguintes igualdades:

$$c = a + (a - b) \times \beta \text{ e } d = a + (a - b) \times \alpha; \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

Definição: $\mu = c \times d$. Calculemos o valor de μ :

$$\mu = c \times d = [a + (a - b) \times \beta] \times [a + (a - b) \times \alpha]$$

$$\mu = a^2 + a(a - b) \times \alpha + a(a - b) \times \beta + (a - b)^2 \times \alpha\beta \stackrel{IV}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{IV}{\Rightarrow} \mu = a^2 + a(a - b) \times [\alpha + \beta] + (a - b)^2 \times (-1) \stackrel{V}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{v}{\Rightarrow} \mu = a^2 + a(a-b) \times 1 + (a-b)^2 \times (-1)$$

$$\mu = a^2 + a^2 - ab - 1(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\mu = a^2 + a^2 - ab - a^2 + 2ab - b^2$$

Logo,

$$\boxed{\mu = a^2 + ab - b^2}$$

Agora, vamos provar que:

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta}{\alpha - \beta}$$

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}, \text{então, } \sqrt{5} \times G_n = a(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + b(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$$

$$\sqrt{5} \times G_n = a\left(\frac{\alpha^n}{\alpha^2} - \frac{\beta^n}{\beta^2}\right) + b\left(\frac{\alpha^n}{\alpha^1} - \frac{\beta^n}{\beta^1}\right) = \alpha^n \left(\frac{a}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha}\right) - \beta^n \left(\frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta}\right)$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n \left(a \times \frac{1}{\alpha^2} + b \times \frac{1}{\alpha}\right) - \beta^n \left(a \times \frac{1}{\beta^2} + b \times \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n (a \cdot \beta^2 + b \cdot (-\beta)) - \beta^n (a \cdot \alpha^2 + b \cdot (-\alpha))$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n (a\beta^2 - b\beta) - \beta^n (a\alpha^2 - b\alpha)$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n [a(\beta + 1) - b\beta] - \beta^n [a(\alpha + 1) - b\alpha]$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n [a + a\beta - b\beta] - \beta^n [a + a\alpha - b\alpha]$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n [a + (a-b)\beta] - \beta^n [a + (a-b)\alpha]$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n \left[\overbrace{a + (a-b)\beta}^c \right] - \beta^n \left[\overbrace{a + (a-b)\alpha}^d \right]$$

$$\sqrt{5} \times G_n = \alpha^n [c] - \beta^n [d] = c\alpha^n - d\beta^n$$

Então,

$$\text{se } \sqrt{5} \times G_n = c\alpha^n - d\beta^n \Rightarrow \boxed{G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\sqrt{5}}} \text{ ou } G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}, n \in \mathbb{N} \text{ (XI)}$$

S2.3: $G_{n+1} \times G_{n-1} - (G_n)^2 = \mu \times (-1)^n$ [30, pág 112]

Agora, vamos demonstrar que $G_{n+1} \times G_{n-1} - (G_n)^2 = \mu \times (-1)^n$

$$1^{\text{º}} \text{ membro} = G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2 = {}^{XI} \left(\frac{c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) \times \left(\frac{c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1}}{\sqrt{5}} \right) - \left(\frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\sqrt{5}} \right)^2$$

$$G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2 = \frac{(c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}) \times (c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1})}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} - \frac{(c\alpha^n - d\beta^n)^2}{\sqrt{5}^2}$$

$$G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2 = \frac{(c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}) \times (c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1})}{5} - \frac{(c\alpha^n - d\beta^n)^2}{5}$$

$$G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2 = \frac{(c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}) \times (c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1}) - (c\alpha^n - d\beta^n)^2}{5}$$

$$5 \cdot (G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2) = (c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}) \times (c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1}) - (c\alpha^n - d\beta^n)^2 = \Psi$$

Então,

$$\Psi = (c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}) \times (c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1}) - (c\alpha^n - d\beta^n)^2$$

$$\Psi = c^2\alpha^{2n} - cd\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - cd\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + d^2\beta^{2n} - (c^2\alpha^{2n} - 2cd\alpha^n\beta^n + d^2\beta^{2n})$$

$$\Psi = c^2\alpha^{2n} - cd\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - cd\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + d^2\beta^{2n} - c^2\alpha^{2n} + 2cd\alpha^n\beta^n - d^2\beta^{2n}$$

$$\Psi = -cd\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - cd\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2cd\alpha^n\beta^n$$

$$\Psi = -cd(\alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1}) + 2cd(\alpha\beta)^n$$

$$\Psi = -cd(\alpha^{n-1+1+1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n-1+1+1}) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = -cd(\alpha^{n-1+2}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n-1+2}) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = -cd(\alpha^2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} + \beta^2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = -cd\alpha^{n-1}\beta^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = -cd(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha + 1 + \beta + 1) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = -1cd(-1)^{n-1} \left(\frac{+1}{\alpha + \beta} + 2 \right) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = cd(-1)^1(-1)^{n-1}(3) + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = 3cd(-1)^n + 2cd(-1)^n$$

$$\Psi = 5cd(-1)^n = 5\mu(-1)^n$$

Assim, podemos concluir que:

$$\Psi = 5 \times 1^\circ \text{ membro} = 5 \cdot (G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2) = 5\mu(-1)^n = 5 \times 2^\circ \text{ membro}$$

Logo, 1º membro = 2º membro.

Portanto, a fórmula da Generalização da Sequência de Fibonacci (GSF) é:

$$\boxed{G_{n+1} \times G_{n-1} - G_n^2 = \mu(-1)^n} \text{ (XII)}$$

S2.4: O Paralelogramo de área $|\mu|$

Sejam 5 números consecutivos quaisquer da sequência Gibonacci,

$$\mathbf{G_{n-1}, G_n, G_{n+1}, G_{n+2}, G_{n+3}, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq 3}$$

Consideremos particularmente os seguintes pontos:

$$P_1(0; 0); P_2(G_{n+2}; G_n); P_3(G_{n+3}; G_{n+1}) \text{ e } P_4(G_{n+1}; G_{n-1})$$

Demonstremos:

I - O quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Sabemos que “**PARALELOGRAMO** é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.”.

- Calculemos o ponto médio do segmento P_1P_3 .

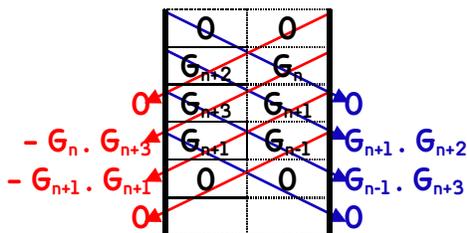
$$M_{13} = \left(\frac{0+G_{n+3}}{2}; \frac{0+G_{n+1}}{2} \right) = \left(\frac{G_{n+3}}{2}; \frac{G_{n+1}}{2} \right)$$

- Calculemos o ponto médio do segmento P_2P_4 .

$$M_{24} = \left(\frac{G_{n+1}+G_{n+2}}{2}; \frac{G_{n-1}+G_n}{2} \right) = \left(\frac{G_{n+3}}{2}; \frac{G_{n+1}}{2} \right)$$

Como $M_{13} = M_{24}$, podemos concluir que $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO**.

II – A área do PARALELOGRAMO $P_1P_2P_3P_4$ é igual a $|\mu|$.



Calculemos “D”:

$$D = G_{n+1} \cdot G_{n+2} - G_n \cdot G_{n+3} + G_{n-1} \cdot G_{n+3} - G_{n+1} \cdot G_{n+1}$$

$$D = G_{n+1} \cdot (G_n + G_{n+1}) - G_n \cdot (G_{n+1} + G_{n+2}) + G_{n-1} \cdot (G_{n+1} + G_{n+2}) - G_{n+1} \cdot G_{n+1}$$

$$D = G_{n+1} \cdot (G_n + G_{n+1}) - G_n \cdot (G_{n+1} + G_{n+2}) + (G_{n+1} - G_n) \cdot (G_{n+1} + G_{n+2}) - G_{n+1} \cdot G_{n+1}$$

$$D = G_{n+1} \cdot G_n + G_{n+1} \cdot G_{n+1} - G_n \cdot G_{n+1} - G_n \cdot G_{n+2} + (G_{n+1} - G_n) \cdot (G_{n+1} + G_{n+2}) - G_{n+1} \cdot G_{n+1}$$

$$D = G_{n+1} \cdot G_n - G_n \cdot G_{n+1} - G_n \cdot G_{n+2} + (G_{n+1} - G_n) \cdot (G_{n+1} + G_{n+2})$$

$$D = -G_n \cdot G_{n+2} + (G_{n+1} - G_n) \cdot (G_{n+1} + G_{n+2})$$

$$D = -G_n \cdot G_{n+2} + G_{n+1} \cdot G_{n+1} + G_{n+1} \cdot G_{n+2} - G_n \cdot G_{n+1} - G_n \cdot G_{n+2}$$

$$D = G_{n+1} \cdot G_{n+1} + G_{n+1} \cdot G_{n+2} - G_n \cdot G_{n+1} - 2 \cdot (G_n \cdot G_{n+2})$$

$$D = (G_{n+1})^2 + G_{n+1} \cdot (G_n + G_{n+1}) - G_n \cdot G_{n+1} - 2 \cdot (G_n \cdot G_{n+2})$$

$$D = (G_{n+1})^2 + G_{n+1} \cdot G_n + G_{n+1} \cdot G_{n+1} - G_n \cdot G_{n+1} - 2 \cdot (G_n \cdot G_{n+2})$$

$$D = (G_{n+1})^2 + (G_{n+1})^2 - 2 \cdot (G_n \cdot G_{n+2})$$

$$D = 2 \cdot (G_{n+1})^2 - 2 \cdot (G_n \cdot G_{n+2})$$

$$D = 2 \cdot [(G_{n+1})^2 - G_n \cdot G_{n+2}] \text{ (XII)}$$

Se $G_{n+1} \times G_{n-1} - (G_n)^2 = \mu \times (-1)^n$, então, $(G_n)^2 - G_{n+1} \times G_{n-1} = (-1) \times \mu \times (-1)^n = \mu \times (-1)^{n+1}$

Assim, $(G_{n+1})^2 - G_{n+2} \times G_n = \mu \times (-1)^{n+2} = \mu \times (-1)^n$, ou seja,

$$(G_{n+1})^2 - G_{n+2} \times G_n = \mu \times (-1)^n$$

Logo, $D = 2 \cdot [(G_{n+1})^2 - G_n \cdot G_{n+2}] \text{ (XII)}$

$$D = 2 \cdot [\mu \times (-1)^n]$$

$$D = 2\mu \times (-1)^n$$

Sabemos que $A = |D|/2$. Assim, $A =$

$$A = \frac{|D|}{2} \text{ então, } A = \frac{|2\mu(-1)^n|}{2} = |\mu(-1)^n| = |\mu|, \text{ ou seja, } A = |\mu|$$

Logo, podemos concluir que a área do **PARALELOGRAMO** $P_1P_2P_3P_4$ é igual a $|\mu|$.

Assim, levando-se em conta os resultados obtidos nos itens I e II, podemos concluir que o quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO** e sempre terá área cuja medida é igual a $|\mu|$ (*).

(*) No caso da Gibonacci, deve-se comparar, caso a caso, se a área do QUADRADO é **MAIOR** ou **MENOR** do que a área do RETÂNGULO em $|\mu|$ unidades.

S2.5: Gibonacci e a Geometria Dinâmica

Vamos aplicar a fórmula do termo geral da Gibonacci (XI), no Geogebra para observar alguns resultados para $a = 6$ e $b = 10$.



Figura S7: Gibonacci, caso $G_1 = 6$, $G_2 = 10$, $G_3 = 16$, $G_4 = 26$ (lado do quadrado), $G_5 = 42$

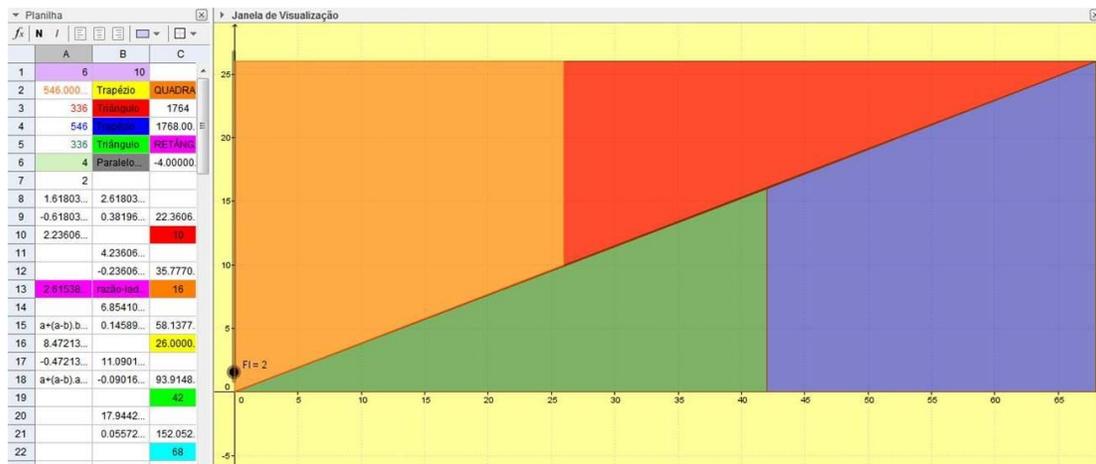


Figura S8: Gibonacci, caso $G_2 = 10$, $G_3 = 16$, $G_4 = 26$, $G_5 = 42$ (lado do quadrado), $G_6 = 68$

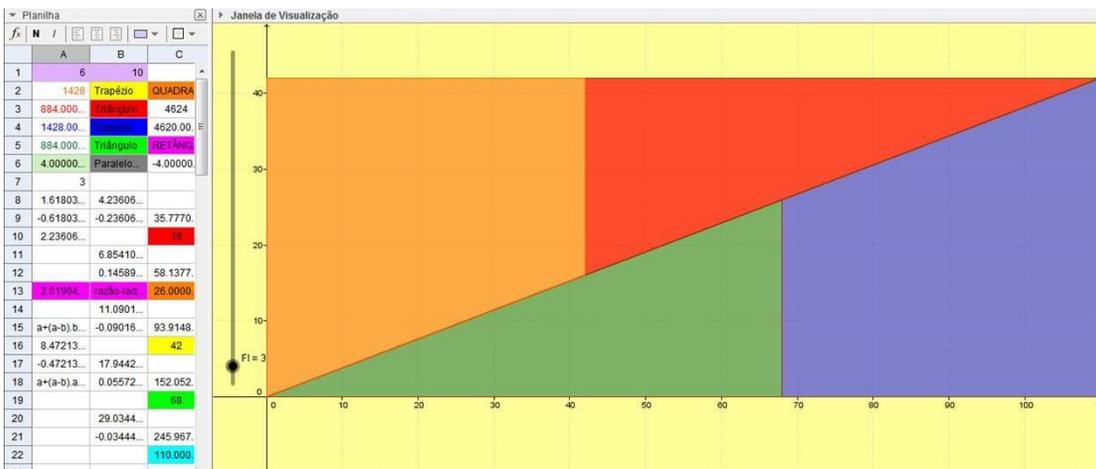


Figura S9: Gibonacci, caso $G_3 = 16$, $G_4 = 26$, $G_5 = 42$, $G_6 = 68$ (lado do quadrado), $G_7 = 110$

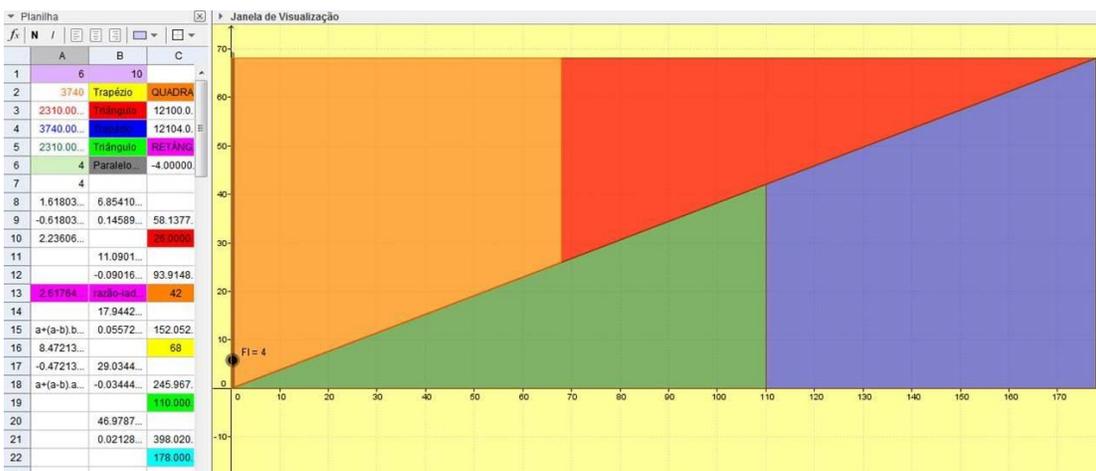


Figura S10: Gibonacci, caso $G_4 = 26$, $G_5 = 42$, $G_6 = 68$, $G_7 = 110$ (lado do quadrado), $G_8 = 178$

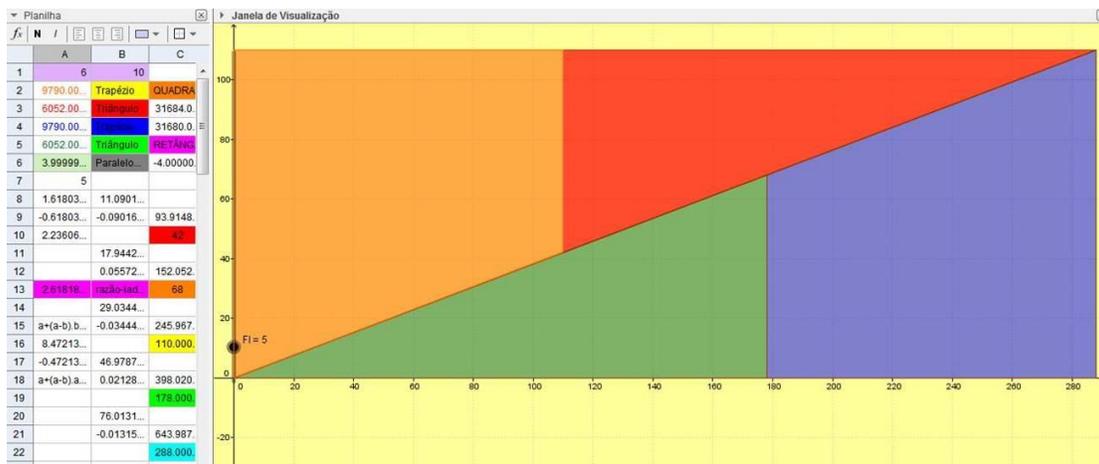


Figura S11: Gibonacci, caso $G_5 = 42$, $G_6 = 68$, $G_7 = 110$, $G_8 = 178$ (lado do quadrado), $G_q = 288$



Figura S12: Gibonacci, caso $G_6 = 68$, $G_7 = 110$, $G_8 = 178$, $G_q = 288$ (lado do quadrado), $G_{10} = 466$

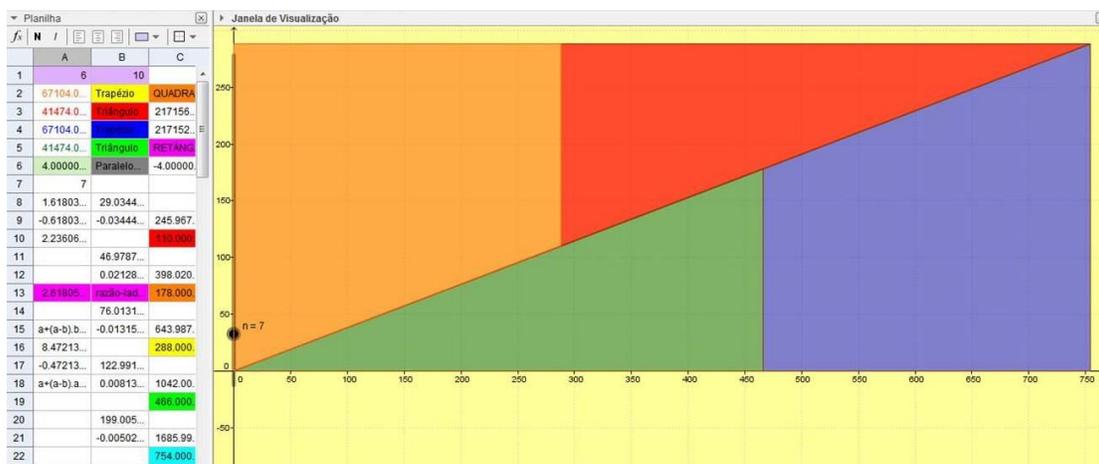


Figura S13: Gibonacci, caso $G_7 = 110$, $G_8 = 178$, $G_q = 288$, $G_{10} = 466$ (lado do quadrado), $G_{11} = 754$

S2.6: Gibonacci e o Paralelogramo de área zero

Uma curiosidade que um aluno pode ter envolve as inúmeras possibilidades para o valor de μ ($a^2 + ab - b^2$). Com a utilização livre do programa Geogebra, no item anterior, seria natural o professor ser questionado com a seguinte pergunta:

Seria possível a área do PARALELOGRAMO assumir o valor zero?!

Para responder a essa questão, precisamos retomar alguns pontos de nossas experiências, os valores de a e b são números inteiros positivos e $a \leq b$; Se a área do paralelogramo vale 0, isso só aconteceria se $\mu = 0$, ou seja, $a^2 + ab - b^2 = 0$. Destaquemos, como incógnita da equação anterior, o valor de b , sabendo que $b > a > 0$.

Se $a^2 + ab - b^2 = 0$, então, $b^2 - ab - a^2 = 0 \Rightarrow 1.b^2 - a.b - a^2 = 0$.

Resolvendo a equação do 2º grau acima,

$$b = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4.1.(-a^2)}}{2.1} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4.a^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2(1+4)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2(1+4)}}{2}$$

então,

$$b = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} \stackrel{a > 0}{=} \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2} \stackrel{b > 0}{=} \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2} = a \cdot \alpha = a \cdot \Phi$$

ou seja, $b = a\Phi$, do que podemos concluir que, se “ a ” for um número inteiro, “ b ” será um número irracional e extrapola os limites de nossas experiências até aqui, mas, se quiséssemos prosseguir dentro do mundo abstrato da matemática, a sequência geradora de nossa experiência virtual seria:

$$G_1 = a,$$

$$G_2 = a\Phi,$$

$$G_3 = a + a\Phi = a(1 + \Phi) = a\Phi^2,$$

$$G_4 = a\Phi + a\Phi^2 = a\Phi.(1 + \Phi) = a\Phi.\Phi^2 = a\Phi^3,$$

$$G_5 = a\Phi^2 + a\Phi^3 = a\Phi^2.(1 + \Phi) = a\Phi^2.\Phi^2 = a\Phi^4,$$

$G_6 = a\Phi^3 + a\Phi^4 = a\Phi^3 \cdot (1 + \Phi) = a\Phi^3 \cdot \Phi^2 = a\Phi^5,$
 $G_7 = a\Phi^4 + a\Phi^5 = a\Phi^4 \cdot (1 + \Phi) = a\Phi^4 \cdot \Phi^2 = a\Phi^6$ e, assim por diante,
 $G_8 = a\Phi^7, G_9 = a\Phi^8, G_{10} = a\Phi^9, G_{11} = a\Phi^{10}, \dots,$ o que nos faz deduzir que:

$$G_n = a\Phi^{n-1}$$

Assim, os 5 números consecutivos dessa sequência seriam:

$$G_{n-1} = a\Phi^{n-2}, G_n = a\Phi^{n-1}, G_{n+1} = a\Phi^n, G_{n+2} = a\Phi^{n+1}, G_{n+3} = a\Phi^{n+2}, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > 3$$

E os pares ordenados associados ao QUADRILÁTERO $P_1P_2P_3P_4$ seriam:

$$P_1(0; 0); P_2(a\Phi^{n+1}; a\Phi^{n-1}); P_3(a\Phi^{n+2}; a\Phi^n) \text{ e } P_4(a\Phi^n; a\Phi^{n-2})$$

Demonstremos:

I - O quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ é um PARALELOGRAMO.

Sabemos que “**PARALELOGRAMO** é o quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.”.

- Calculemos o ponto médio do segmento P_1P_3 .

$$M_{13} = \left(\frac{0+a\Phi^{n+2}}{2}; \frac{0+a\Phi^n}{2} \right) = \left(\frac{a\Phi^{n+2}}{2}; \frac{a\Phi^n}{2} \right)$$

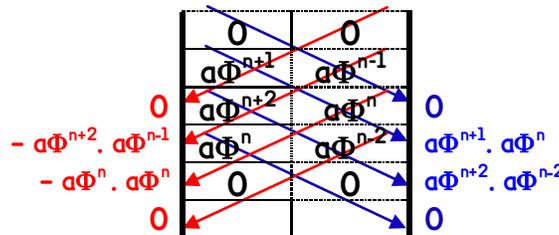
- Calculemos o ponto médio do segmento P_2P_4 .

$$M_{24} = \left(\frac{a\Phi^{n+1}+a\Phi^{n-1}}{2}; \frac{a\Phi^{n+2}+a\Phi^{n-2}}{2} \right) = \left(\frac{a\Phi^{n+2}}{2}; \frac{a\Phi^n}{2} \right)$$

Como $M_{13} = M_{24}$, podemos concluir que $P_1P_2P_3P_4$ é um **PARALELOGRAMO**.

II - A área do **PARALELOGRAMO** $P_1P_2P_3P_4$ é igual a 0.

$$G_{n-1} = a\Phi^{n-2}, G_n = a\Phi^{n-1}, G_{n+1} = a\Phi^n, G_{n+2} = a\Phi^{n+1}, G_{n+3} = a\Phi^{n+2}$$



Calculemos “D”:

$$D = a\Phi^{n+1} \cdot a\Phi^n - a\Phi^{n+2} \cdot a\Phi^{n-1} + a\Phi^{n+2} \cdot a\Phi^{n-2} - a\Phi^n \cdot a\Phi^n$$

$$D = a^2\Phi^{2n+1} - a^2\Phi^{2n+1} + a^2\Phi^{2n} - a^2\Phi^{2n} = 0 + 0 = 0,$$

logo $D = 0$ e, conseqüentemente, $A = 0$.

Resumindo,

1. O lado do quadrado a ser cortado teria, como medida, $a\Phi^{n+1}$,
2. O retângulo, da reconstrução do quadrado, teria como dimensões, $a\Phi^n$ e $a\Phi^{n+2}$,
3. A área de ambos os quadriláteros seria de $a^2\Phi^{2n+2}$ unidades de área;
4. Os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 estão na reta suporte da diagonal P_1P_3 do retângulo.

A representação de ambos ficaria assim:

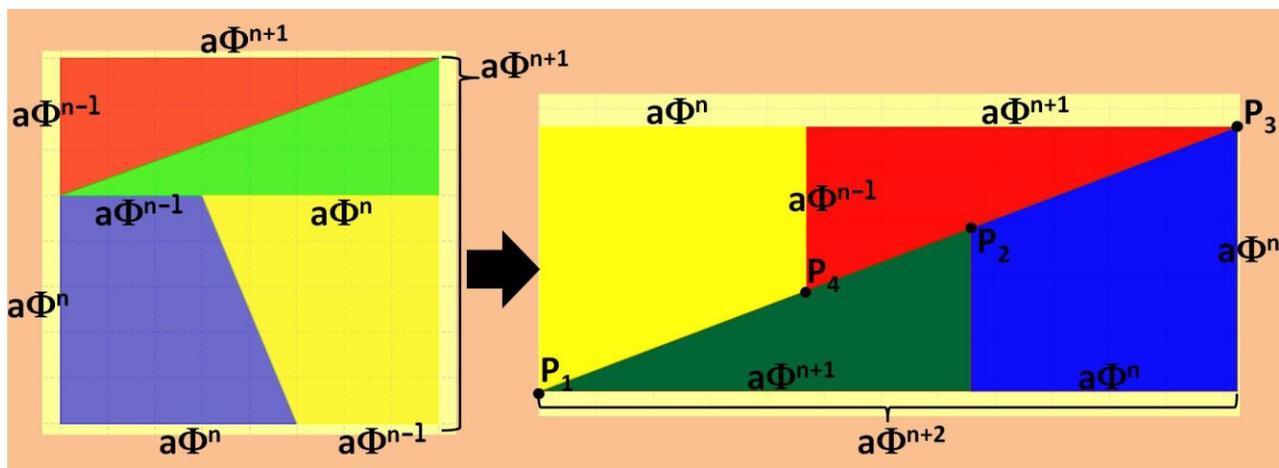


Figura S14: Gibonacci e o caso do PARALELOGRAMO de área ZERO

S2.7: A seqüência Gibonacci e o número Φ

Observe a tabela abaixo, construída no Excel, em que aparece, em cada linha, G_n , a área do quadrado de lado G_n , a área do retângulo de dimensões G_{n-1} e G_{n+1} , a diferença entre as áreas do quadrado e do retângulo e a razão entre dois termos consecutivos anteriores a G_n (G_{n-1}/G_{n-2}). Pode-se ver também, na célula H2, o valor de μ relativo aos valores de a e b escolhidos, 6 e 10, respectivamente.

| | A | B | C | D | E | F | H |
|----|------------|------------|-------------------------|---|--------------------------|------------|-------------------------------|
| 1 | | Gn | Área do QUADRADO | | Área do RETÂNGULO | Q-R | Fi |
| 2 | G1 | 6 | | | | | -4,0 |
| 3 | G2 | 10 | | | | | mi, a característica de GSF |
| 4 | G3 | 16 | | | | | |
| 5 | G4 | 26 | 676,0 | | 672,0 | 4 | 1,60000000000000000000 |
| 6 | G5 | 42 | 1764,0 | - | 1768,0 | -4 | 1,62500000000000000000 |
| 7 | G6 | 68 | 4624,0 | - | 4620,0 | 4 | 1,61538461538462000000 |
| 8 | G7 | 110 | 12100,0 | - | 12104,0 | -4 | 1,61904761904762000000 |
| 9 | G8 | 178 | 31684,0 | - | 31680,0 | 4 | 1,61764705882353000000 |
| 10 | G9 | 288 | 82944,0 | - | 82948,0 | -4 | 1,61818181818182000000 |
| 11 | G10 | 466 | 217156,0 | - | 217152,0 | 4 | 1,61797752808989000000 |
| 12 | G11 | 754 | 568516,0 | - | 568520,0 | -4 | 1,61805555555556000000 |
| 13 | G12 | 1220 | 1488400,0 | - | 1488396,0 | 4 | 1,61802575107296000000 |
| 14 | G13 | 1974 | 3896676,0 | - | 3896680,0 | -4 | 1,61803713527851000000 |
| 15 | G14 | 3194 | 10201636,0 | - | 10201632,0 | 4 | 1,61803278688525000000 |
| 16 | G15 | 5168 | 26708224,0 | - | 26708228,0 | -4 | 1,61803444782168000000 |
| 17 | G16 | 8362 | 69923044,0 | - | 69923040,0 | 4 | 1,61803381340013000000 |
| 18 | G17 | 13530 | 183060900,0 | - | 183060904,0 | -4 | 1,61803405572755000000 |
| 19 | G18 | 21892 | 479259664,0 | - | 479259660,0 | 4 | 1,61803396316671000000 |
| 20 | G19 | 35422 | 1254718084,0 | - | 1254718088,0 | -4 | 1,61803399852180000000 |
| 21 | G20 | 57314 | 3284894596,0 | - | 3284894592,0 | 4 | 1,61803398501736000000 |
| 22 | G21 | 92736 | 8599965696,0 | - | 8599965700,0 | -4 | 1,61803399017560000000 |
| 23 | G22 | 150050 | 22515002500,0 | - | 22515002496,0 | 4 | 1,61803398820532000000 |

Tabela S2: Representação, pelo Excel, da fórmula $(G_n)^2 - G_{n+1} \times G_{n-1} = \mu \times (-1)^{n+1}$

Se levarmos nossa atenção para a célula H22, poderemos ver um número que muito se aproxima do valor de Φ , como nas tabelas semelhantes que produzimos em relação às sequências de Fibonacci e Lucas.

Nós já demonstramos que, quanto maior o valor de n, a razão entre dois termos consecutivos em ambas as sequências também se aproxima de Φ . Demonstraremos que o mesmo ocorre com Gibonacci. Sabemos, de XI, que

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\sqrt{5}}, n \in \mathbb{N} \text{ (XI)}$$

Então, a razão entre dois números consecutivos da sequência Gibonacci é dada por:

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\frac{c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\sqrt{5}}} = \frac{c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}}{c\alpha^n - d\beta^n} \stackrel{IV}{=} \frac{c\alpha^{n+1} - d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{c\alpha^n - d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c\alpha^{n+1} - d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{c\alpha^n - d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

mas, $\lim_{n \rightarrow \infty} d \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} d \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c\alpha^{n+1} - 0}{c\alpha^n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c \cdot \alpha^{n+1}}{c \cdot \alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n \times \alpha}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \Phi$$

Assim, podemos concluir que, quanto maior o valor de n , a razão entre dois termos consecutivos da sequência GIBONACCI também se aproxima de Φ , inclusive para os casos particulares das sequências de Lucas e Fibonacci.

ANEXOS

A HISTÓRIA da MATEMÁTICA

“A Matemática é um esforço humano continuado, como a Literatura, a Física, a Arte, a Economia ou a Música. Tem um passado e um futuro, bem como um presente. A Matemática que aprendemos e usamos hoje difere de muitos modos da Matemática de mil, quinhentos ou mesmo cem anos atrás. A Matemática do século XXI certamente evoluirá para algo diferente da do século XX. Aprender sobre Matemática é como começar a conhecer outra pessoa. Quanto mais você sabe de seu passado, melhor pode entendê-la e interagir com ela, agora e no futuro.” [4]

A.1 Os quadriláteros notáveis em “Os Elementos” de EUCLIDES

“Um número é uma pluralidade composta de unidades” Euclides

Euclides de Alexandria é frequentemente intitulado como o “Pai da Geometria”. Ele, junto com Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga, são considerados os “três gigantes da Matemática do século III a.C.” [21], viveu na Grécia Antiga, por volta de 300 a.C., no lugar onde nasceram as principais ideias da Geometria. A principal produção de Euclides, “Os elementos”, é a obra que possui o maior número de edições, depois da Bíblia, e é considerado por muitos como o livro matemático mais influente de

todos os tempos. Sua importância é crucial na história da evolução das idéias matemáticas e é a origem da Geometria que se estuda hoje nas escolas.

Flood [22], sobre esta obra, escreve:

“Os Elementos de Euclides, um modelo de raciocínio dedutivo, era uma compilação de resultados conhecidos organizados em ordem lógica. Começava com axiomas e postulados iniciais e usava regras de dedução para derivar cada nova proposição de maneira sistemática. Não foi a primeira dessas obras, mas a mais importante. Os Elementos consistem de 13 seções, geralmente chamadas “Livros” embora tenha sido escritas em rolos de papiro. Dividem-se tradicionalmente em três partes principais: geometria plana, aritmética e geometria dos sólidos.”

Pouco se sabe sobre a vida e personalidade desse grande matemático. Conjectura-se que tenha sido ele “o criador da famosa e duradoura escola de Matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor” [21]. Não se sabe a data nem o local de seu nascimento, e ainda, apenas se supõe que sua formação matemática tenha ocorrido na escola platônica de Atenas, na Grécia. Os autores antigos descrevem Euclides como uma pessoa gentil, generosa e modesta e relatam histórias que supostamente envolveram esse grande geômetra. Em uma delas há muita semelhança com o diálogo de Menecmo, quando era professor de Alexandre, no caso de Euclides, “Proclo conta que Ptolomeu I resolveu tomar com ele lições de Geometria e que,

achando-a difícil, perguntou-lhe se não haveria uma forma mais simples de aprendê-la. Euclides teria, então, respondido: **Na Geometria não existem caminhos especiais para os reis** [23]. Em [21], descreve uma outra história “contada por Stobaeus, segundo a qual Euclides, indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matéria que estava sendo vista, ordenou a seu escravo que desse a ele uma moeda, **para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo**”.

Tatiana Roque, em seu livro “A História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas” [40], diz: “A obra “Os Elementos, de Euclides, é vista como o ápice do esforço de organização da geometria grega desenvolvida até o século III a.E.C. Por um lado, afirma-se que seria somente uma compilação de resultados já existentes produzidos por outros, o que torna o seu autor um mero editor. Por outro lado, celebra-se que esses trabalhos tenham sido expostos de um modo novo, o que revelaria a predominância na Grécia, nessa época, de um pensamento lógico e dedutivo. A transição para o pensamento dedutivo, que teria sua expressão na sistematização operada por essa obra, é frequentemente associada à necessidade de fundar a geometria prática em bases mais sólidas.”

Em “Os Elementos” pode-se encontrar, também, as definições envolvendo os quadriláteros. No livro I [20], na definição 19, Euclides define “Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto múltiláteras, as contidas por mais de quatro retas”. Logo

depois, na definição 22, ele define alguns quadriláteros notáveis assim: “E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e rombóide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios”. Euclides utilizava o nome OBLONGO para o caso particular do que hoje chamamos de RETÂNGULO, também utilizava o vocábulo ROMBO (que também existe na língua portuguesa) para designar o que mais comumente chamamos de LOSANGO e ainda, Euclides utilizava a palavra ROMBÓIDE para um PARALELOGRAMO particular.

A seguir, como forma de facilitar a compreensão da relação entre essas definições, mostraremos uma representação por diagrama de Venn, do conjunto dos quadriláteros notáveis definidos por **EUCLIDES**.

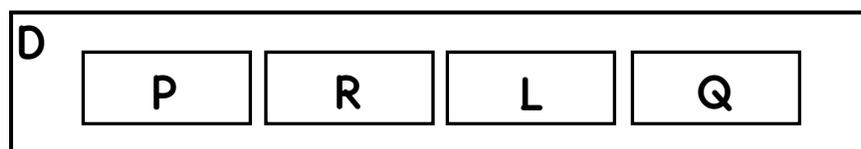


Figura A.01: Concepção dos quadriláteros notáveis por Euclides

Pela definição de **EUCLIDES**,

- O quadrado é um Quadrilátero,
- O quadrado **não** é um tipo de Paralelogramo,
- O quadrado **não** é um tipo de Retângulo,
- O quadrado **não** é um tipo de losango.

Vejamos agora, uma outra definição de alguns dos quadriláteros notáveis realizada muito tempo depois da época de Euclides, pelo matemático francês Adrien-Marie LEGENDRE, em 1793.

A.2 O contexto histórico na vida e obra de LEGENDRE

“Meu objetivo é apresentar uma Geometria que satisfaça ao espírito” Legendre [10]

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), ou simplesmente LEGENDRE, foi um matemático francês que viveu em uma época profícua da história de seu país, tanto no aspecto político quanto matemático, “Passou por quatro períodos da história da França, a saber: o Antigo Regime, a Revolução Francesa, o primeiro Império de Napoleão e a Restauração” [43]. Foi contemporâneo de uma geração de grandes matemáticos: o criador da Geometria Descritiva [10], Gaspard **MONGE** (1746-1818); o pioneiro da “Matemática social”, defensor da instrução pública e gratuita (ideia avançada para a época), Marquês de **CONDORCET** (1743-1794); “um dos maiores matemáticos de todos os tempos” [22], o “Príncipe dos Matemáticos” [21], Carl Friedrich **GAUSS** (1777-1855); o escritor da primeira “teoria das funções” e presidente do comitê formado para estabelecer o sistema métrico na França, Joseph-Louis **LAGRANGE** (1736-1813) e Pierre-Simon **LAPLACE** (1749-1827), considerado “o último matemático importante do século XVIII” [22], que chegou a ser chamado de “O Newton da França” por causa de sua obra em cinco volumes “Tratado de Mecânica Celeste” [23]. Sua habilidade política

de se relacionar com os poderosos tornou-se conhecida e até atribuem a ele uma perspicaz resposta em um diálogo com Napoleão quando fora, supostamente, indagado “por que, ao contrário de Isaac Newton, não mencionara Deus no seu tratado”, ele respondeu “Senhor, não precisei dessa hipótese”; tornou-se conhecido pela participação na estruturação da “École Normale e da Polytechnique” em Paris e recebeu de Napoleão o título de conde além de ser nomeado Ministro do Interior [23]; em Matemática, destacou-se em seus trabalhos sobre teoria analítica da probabilidade, a equação de Laplace e pela “transformada de Laplace”, ele é considerado como um dos matemáticos mais respeitáveis da França, pela sua grande contribuição com importantes trabalhos em vários ramos das ciências [43].

Legendre, junto com os dois últimos matemáticos mencionados anteriormente, Lagrange e Laplace, ficaram conhecidos como o trio LLL da Matemática Francesa [35] (não obstante Lagrange ter sido italiano [22]), o fato de esses nomes começarem pela mesma letra “L”, não é fruto de coincidência. Maria Aparecida Roseane Ramos Silva, em sua tese de doutorado sobre Legendre [43], relata que, de uma forma geral, os sobrenomes começados pelos artigos definidos “*la*” (a) e “*le*” (o) como os dos matemáticos Legendre, Lagrange e Laplace eram escritos inicialmente como “La Grange”, “Le Gendre” e “La Place”. Ela explica a origem dos sobrenomes na França, cuja tradição teve início com o aumento da população francesa a partir do século XIII. Os cidadãos foram sentindo necessidade de distinguir melhor as pessoas que possuíam o mesmo nome e começou-se a acrescentar, ao primeiro nome, um sobrenome associado ao nome do santo correspondente ao dia do nascimento da criança. Pouco a pouco, sem interferência de qualquer lei oficial, os nomes foram se tornando hereditários. Com o passar do tempo, outras fontes acabaram também se tornando comuns na escolha, como, por exemplo, “Beaumont” que é nome de cidade, “Dalmont” que veio de “mont” (monte), “Leboeuf” (boi) e “Leloup” (lobo). Silva [43] menciona também os sobrenomes

cuja origem repousa no grau de parentesco, como “Lepère” de pai e “Lafille” de filha, assim, ela esclarece que a etimologia do nome “Le Gendre” provém de “gendre” (genro), que remete à “aquele que herdou a casa do sogro”, “La Grange” tem como origem a palavra “grange” cujo significado é “celeiro” e “La Place”, de “place” que pode ser “praça” como também “lugar”.

Legendre “foi um homem de excepcional talento em vários campos da Matemática e por ele a elite científica da França nutria especial afeição, inclusive devido a suas qualidades como ser humano. Pequeno de estatura, gorducho, polido e reservado.” [23], também, diversos fatores sobre o caráter de Legendre foi descrito por Silva [43], relatando ocorrências em sua vida que revelam sua modéstia, severidade, seu perfeccionismo, timidez, generosidade e sua “parcialidade”. Essa última característica se deve a vários episódios envolvendo a matemática Sophie Germain, à quem privilegiava com informações antecipadas com relação a realização de futuros concursos a serem realizados e a resultados dos pareceres de seus trabalhos sobre a curvatura de superfícies. Apesar de não ganhar nenhum desses concursos, “Legendre também tentou convencer a comissão julgadora para beneficiá-la com uma menção honrosa” [43].

Sophie Germain (1776-1831) nasceu em Paris e se interessou pela Matemática ainda quando era jovem, seu pai era um eminente banqueiro da época [43] e, apesar de ter recebido “uma severa oposição de seus pais, que refletiam o preconceito da sociedade da época”, persistiu tenazmente em seu sonho matemático e até chegou a ter seu talento reconhecido por alguns dos maiores matemáticos de sua época [4], entre eles, Legendre. Sophie German foi impedida de se matricular-se na Escola Politécnica por ser mulher [21], mas isso não a impediu de inscrever-se usando um pseudônimo masculino M. Leblanc, submetendo seus trabalhos escritos à avaliação de seus professores e chegou até a receber “rasgados elogios de Lagrange” [21] que, após ter a

agradável surpresa de conhecê-la pessoalmente, “passou a lhe dar toda a ajuda e estímulo, pondo-a em contato com outros matemáticos franceses e auxiliando-a a desenvolver seus interesses matemáticos” [22]. Sua produção científica é de tal envergadura que ela chega a ser chamada de “A Hipátia do século XIX” e, apesar do reconhecimento histórico dedicado à líder da escola neoplatônica de Alexandria [22], que se distinguiu em seus estudos sobre Matemática, Medicina e Filosofia, o talento da pupila de Legendre em Matemática foi muito superior [21]. Sophie Germain obteve importantes resultados na teoria matemática de superfícies elásticas, trabalho que a fez ganhar, em 1816, prêmio da Academia Francesa de Ciência, tornando-se a primeira mulher, não esposa de acadêmico, a ser aceita nessa instituição. Seu trabalho serviu de base fundamental ao desenvolvimento da “teoria da elasticidade” que foi crucial à construção da Torre Eiffel, na comemoração do centenário da Revolução Francesa de 1789. Em reconhecimento às suas contribuições à República Francesa, diversos matemáticos, físicos, engenheiros, militares e políticos franceses, totalizando 72 pessoas, tiveram seus nomes gravados na base da torre e, entre eles, está o de LEGENDRE, mas não consta o nome de nenhuma mulher, nem mesmo o de sua amiga, Sophie Germain, não obstante sua notável contribuição intelectual à edificação desse monumento. Muitos autores e biógrafos dizem que ela foi excluída pelo simples fato de ser mulher.

Sophie Germain, em sua odisséia de enfrentamento dos preconceitos da época, conquistou a amizade e o respeito de Lagrange, Legendre, Gauss e, com esse último manteve correspondência por muito tempo, desde 1804, ainda como M. Leblanc. Gauss e Sophie jamais se encontraram e o “Príncipe dos Matemáticos” só soube da verdadeira identidade de “seu” correspondente, em 1807, quando soldados franceses ocuparam sua cidade, Hanover, durante a invasão napoleônica na Alemanha. Ao receber a visita do general francês Joseph Marie de Pernety, em sua casa, foi informado estar ali para

protegê-lo, graças ao pedido de Mademoiselle Germain, pois ele era amigo da família de Sophie. Surpreso e admirado pela espantosa revelação de que seu correspondente “LeBlenc” era na verdade uma mulher, escreveu uma carta à sua protetora agradecendo seu zelo e a elogiou, enaltecendo sua coragem e talento para estudar Matemática.

Em 1808, em uma época difícil para uma mulher divulgar seu trabalho matemático, Legendre publica um livro mencionando o teorema de Germain [4] “que constitui um degrau importante na maratona de três séculos para provar o Último Teorema de Fermat” [10]. Devido ao fato de ser uma pessoa respeitada e conhecida no meio científico da época, a publicação de Legendre sobre o resultado de Germain ajudou a estabelecer a reputação dela [4]. Sophie morreu aos 55 anos de idade, em 1831, por um câncer de mama, sem ter seu talento devidamente reconhecido como merecia. Pouco antes de sua morte, Gauss submeteu à Universidade de Gottingen, na Alemanha, o reconhecimento do trabalho de Germain como tese de doutorado, e quando a documentação de aceite do título chegou, a “Hipátia do século XIX” já havia falecido. Nesse momento de sua vida, Gauss, que era “Príncipe”, teve uma atitude de “rei” e Legendre, embora jamais tenha recebido qualquer alcunha monárquica, também teve seu quantum de “nobreza”.

Legendre foi importante quanto a seu excepcional talento em áreas superiores da Matemática [23] e seu trabalho foi devidamente reconhecido ao longo da história. Seus principais trabalhos concentraram-se em teoria dos números, funções elípticas, o método dos mínimos quadrados e integrais [21]. Chegou a até mesmo a demonstrar a irracionalidade de π^2 [10]. Mas uma face importante de seu trabalho foi a publicação de “Éléments de Géométrie” em 1794, denominado “o ano do terror” [10]. “ele dedicou parte de seus esforços à promoção do estudo da Geometria Elementar, procurando facilitar a forma de ensiná-la aos jovens” [23]. Sua obra tinha como proposta aprimorar pedagogicamente “Os Elementos” de Euclides [29]. “Legendre escreveu que sua

intenção era “fazer um livro muito rigoroso”, mas isso não o levou a exagerar no rigor às expensas da clareza.” [10]. O livro alcançou o sucesso e teve 20 edições durante a vida de seu autor [10] e, em uma de suas traduções para o inglês, alcançou 33 edições [21]. No Brasil, a obra de Legendre tornou-se base dos livros-texto utilizados em nossas escolas atualmente e deu início a 3 décadas de uma obsessiva luta de Legendre na tentativa de demonstrar, sem alcançar êxito, do 5º postulado de Euclides, “Legendre parece jamais ter admitido a possibilidade da existência de outras geometrias” [23], a não ser a Geometria Euclidiana. Nessa obra, entre muitas definições, Legendre define alguns polígonos, como retrata a figura a seguir:

- 13. XIV. Le polygone de trois côtés est le plus simple de tous, il s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère*; celui de cinq, *pentagone*; celui de six, *hexagone*, etc.**
- 14. XV. On appelle *triangle équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux, *fig. 7*; *triangle isocèle*, celui dont deux côtés seulement sont égaux, *fig. 8*; *triangle scalène*, celui qui a ses trois côtés inégaux, *fig. 9*.**
- XVI. Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse* : ainsi ABC est un triangle rectangle en A, le côté BC est son hypoténuse, *fig. 10*.**
- XVII. Parmi les quadrilatères on distingue :**
- Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits, *fig. 11*. [Voyez la prop. 20, liv. 1.]**
- Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les côtés égaux, *fig. 12*. [Voyez la même prop.]**
- Le *parallélogramme* ou *rhombe*, qui a les côtés opposés parallèles, *fig. 13*.**
- Le *losange*, dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits, *fig. 14*.**
- Enfin le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles, *fig. 15*.**

Figura A.02: Quadriláteros notáveis, por Legendre, em “Éléments de Géométrie” [32]

Em [8], Vincenzo Bongiiovanni diz: “Legendre, que preconizava uma geometria mais rigorosa e menos intuitiva, caracterizava os quadriláteros notáveis da seguinte maneira”: O quadrado tem seus lados iguais e seus ângulos retos (fig. 11); o retângulo tem ângulos retos sem ter os lados iguais (fig. 12); o losango tem os lados iguais sem que os ângulos sejam retos (fig. 14); o paralelogramo tem os lados opostos paralelos (fig. 13). Sobre fig. 15, ver [7].

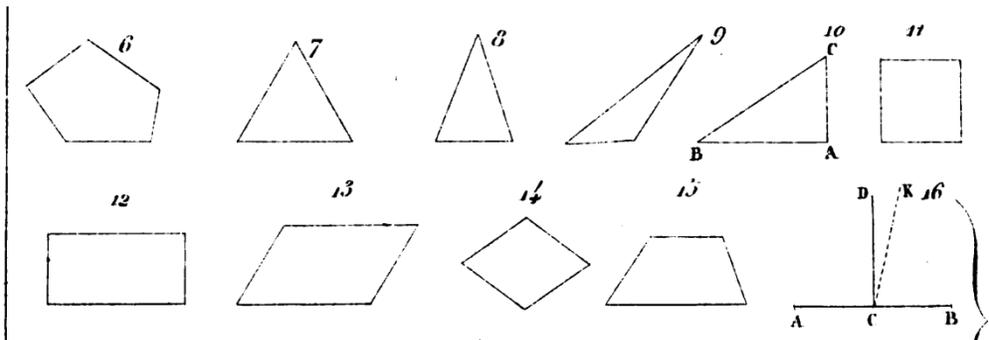


Figura A.03: Representação dos polígonos, por Legendre, em de “Éléments de Géométrie” [32]

Com essa estrutura de definições, permite que tanto quadrados, retângulos bem como losangos sejam classificados como paralelogramos. À seguir, uma representação por diagrama de Venn, do conjunto dos quadriláteros notáveis definidos por **LEGENDRE**.

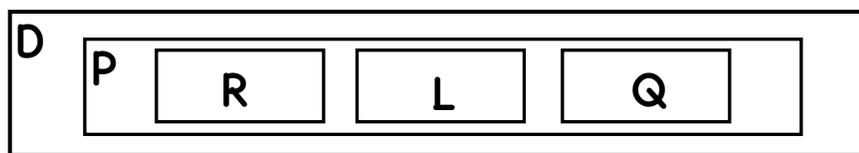


Figura A.04: Concepção dos quadriláteros notáveis por Legendre

Pela definição de **LEGENDRE**,

- O quadrado é um Quadrilátero,
- O quadrado é um tipo de Paralelogramo,
- O quadrado **não** é um tipo de Retângulo,
- O quadrado **não** é um tipo de Losango.

Agora, veremos outra definição dos quadriláteros notáveis realizada por um matemático, também francês, Jacques Solomon HADAMARD, em 1898.

A.3 A vida secular de HADAMARD

“Posso oferecer-me como exemplo para os pais, em todos os lugares, desesperadamente preocupados sobre a incapacidade de seu filho para triunfar nos primeiros problemas básicos na aritmética, pois, mesmo no início da escola secundária, eu estava sempre entre os piores da minha classe” Jacques Hadamard

Jacques Solomon HADAMARD (1865-1963) nasceu em Versailles, França. Seu pai era professor de latim e, sua mãe, professora de piano. Depois de estudar na “École Normale Supérieure”, lecionou no “Lycée Buffon”, em Paris. Após receber seu doutorado em 1892, tornou-se professor na “Faculté des Sciences” de Bordeaux e depois na “Sorbonne” em Paris. Em 1909, tornou-se professor no “Collège de France”, “École Polytechnique”, e depois na “École Centrale des Arts et Manufactures”. Recebeu muitos títulos de doutor *honoris causa* e, em 1892, ganhou o Grande Prêmio da Academia de Ciências por seu excelente trabalho em análise complexa; trabalho que, por sua vez, o levou a provar o teorema do número primo em 1896. Quase todos os ramos da Matemática foram influenciados pela mente criativa de Hadamard, especialmente análise complexa, análise funcional, probabilidade e física matemática [29].

A vida pessoal de Hadamard é marcada por episódios dolorosos em épocas de grande conturbação na humanidade. Quando ele tinha 3 anos de idade sua família mudou-se para Paris e, em 1870, com a eclosão da guerra Franco-Prussiana, eles viveram momentos desesperadores, chegando até mesmo a comer carne de elefante para não passar fome; nessa época, a população francesa matava cavalos, cães e gatos para sobreviver. Ainda nesses tempos a família Hadamard passou pela tristeza pela

perda de uma jovem irmã do menino Hadamard, Jeanne, que morreu em 1870 e também de outra irmã, Suzanne, que nasceu em 1871 e morreu em 1874 (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hadamard.html> - visto em 3/12/2014).

O pequeno Hadamard cresceu tendo bom desempenho em todas as disciplinas, exceto Matemática, que ele ficava sempre entre os piores da sala. Essa situação só foi mudada no 5º ano após um professor incentivá-lo a se dedicar ao estudo de Ciências e Matemática. Hadamard prosseguiu sua carreira acadêmica com sucesso e, em 1892, casou-se com Anna Louise-Trenel que era de família judaica como ele. Hadamard teve 5 filhos, 3 homens e 2 mulheres, Cécile e Jaqueline, e foi através de seus filhos varões que esse nobre matemático acabou tendo profundas tristezas. Durante a primeira guerra mundial, ele perdeu dois de seus filhos mais velhos, Pierre e Etienne, que foram mortos em ação, na batalha de Verdun, com uma diferença de poucas semanas. Após a eclosão da 2ª grande guerra mundial e da queda da França, Hadamard, que era de origem judaica, fugiu com sua família para os Estados Unidos e, em 1944, durante a guerra, recebeu a notícia de que seu outro filho, Mathieu, também morreu. Logo após o término da 2ª grande guerra, Hadamard retornou à França e, durante toda sua vida, foi defensor dos direitos humanos e tornou-se ativo nos movimentos internacionais em prol do pacifismo. Essa atividade política de Hadamard nascera bem antes desses episódios, já em 1894 quando morava em Bordeaux, ele se envolveu no famoso caso “Dreyfus” em que um oficial de artilharia do exército Francês, Alfred Dreyfus, foi acusado injustamente de traição. Apesar da intensa atividade de Hadamard na defesa do acusado, que possuía ligações familiares com sua esposa, o réu foi condenado à prisão perpétua. Somente em 1897, quando Hadamard já morava em Paris, é que ele começou a descobrir que as provas obtidas para a condenação de Dreyfus haviam sido forjadas. Mais tarde, em 1906, depois de muitas batalhas políticas da época e de intensa atividade de Hadamard em prol da libertação do injustiçado, é que Dreyfus foi

reintegrado ao exército Francês, recebendo condecoração da Legião de Honra (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hadamard.html> - visto em 3/12/2014).

Ainda nos Estados Unidos, em 1944, antes de voltar para seu país, ele publicou o livro “Psicologia da Invenção na Matemática” [25] que depois foi traduzido para o francês. A grande inspiração para escrever esse livro foi uma conferência realizada por Henri Poincaré (1854-1912), na Sociedade de Psicologia em Paris. Essa obra discorre, basicamente, sobre um assunto que normalmente não esperamos que seja alvo de atenção para um matemático: a intuição.

Hadamard coloca em questão de que forma os matemáticos “inventam” novas ideias. As aspas utilizadas anteriormente são devido à distinção que o autor faz questão de esclarecer, pois ele diz que o termo “mais correto” para o título do livro seria “descoberta”. Hadamard escreve que “descoberta refere-se a um fenômeno, uma lei, um ser vivo que já existia mas não havia sido percebido” e, didaticamente exemplifica que “Cristóvão Colombo descobriu a América, mas ela já existia antes dele; Benjamin Franklin inventou o para-raios que, antes dele, não existia” [25]. Ele ainda salienta que essa diferença nem sempre é tão evidente e que há diversos casos, no âmbito da ciência, que são tanto descobertas como invenções e acrescenta que, mesmo caso do para-raios, há uma **invenção** de algo que não existia antes, devido a uma **descoberta** “sobre a natureza elétrica do raio” [25]. Hadamard relata diversos casos do que ele chama de “casos paradoxais de intuição” envolvendo personagens famosos na história da Matemática como, Fermat, Riemann, Galois, Poincaré e Cardano. Em sua análise, no próprio livro, César Benjamin escreve que “Hadamard defende que o pensamento criativo em matemática se realiza, em larga medida, sem palavras, sendo frequentemente acompanhado de imagens mentais compactas, cuja forma varia de pessoa a pessoa” [25, aba da contracapa].

Hadamard sempre demonstrou interesse em pedagogia e escreveu muitos artigos sobre conceitos em Matemática Elementar, que eram utilizados em suas aulas. Em 1898 ele publicou o livro “*Leçons de Géométrie Élémentaire*” que passou a ter uma grande influência no ensino de Matemática na França (<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hadamard.html>

visto em 26/NOV/2014). Nessa obra, ele define os quadriláteros notáveis levando-se em conta uma hierarquia de

propriedades. Dessa maneira, em relação à proposta de LEGENGRE, o **Quadrado** passou a ser um caso particular de **Losango** e **Retângulo**. BONGIOVANNI [8] traduz, do original, essas definições e destaca suas consequências:

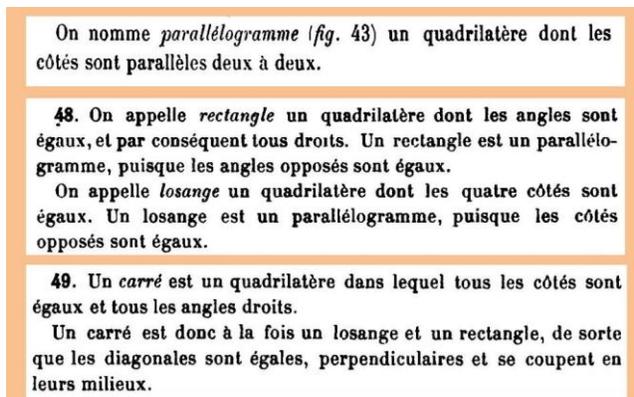


Figura A.05: Leçons de Géométrie Élémentaire, de Hadamard – 2ª edição [24]

“...em 1898, Hadamard caracteriza os quadriláteros notáveis de uma maneira mais ampla: Quadrado é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais. Retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, conseqüentemente, retos. Losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. Paralelogramo é o quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois. Nessas novas definições, as restrições impostas aos retângulos e aos losangos foram eliminadas: agora todo quadrado pode ser considerado losango e retângulo.”

A seguir, uma representação por diagrama de Venn, do conjunto dos quadriláteros notáveis definidos por **HADAMARD**.

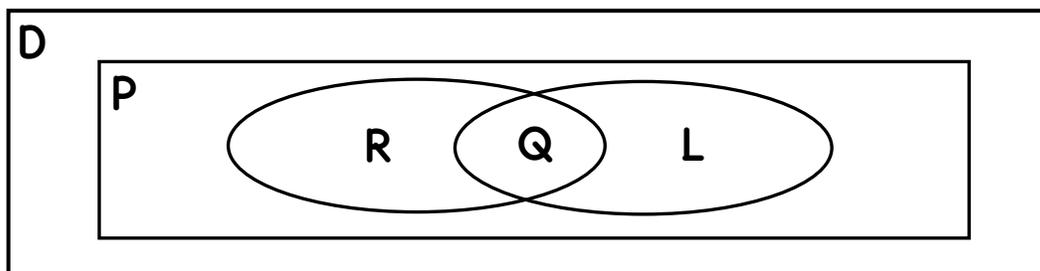


Figura A.06: Concepção dos quadriláteros notáveis por Hadamard

Pela definição de **HADAMARD**,

- O quadrado é um Quadrilátero,
- O quadrado é um tipo de Paralelogramo,
- O quadrado é um tipo de Retângulo,
- O quadrado é um tipo de Losango.