Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Aspectos da Geometria Neutra

Adriane Renófio da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

2015

111 Renófio da Silva, Adriane
X111x Aspectos da Geometria Neutra/ Adriane Renófio da Silva- Rio Claro: [s.n.], 2015.
51 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Geometria Neutra. 2. Euclides. 3. Quadriláteros de Saccheri. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Adriane Renófio da Silva
Aspectos da Geometria Neutra

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
IGCE/UNESP

Prof. Dr. Edson de Oliveira
UNICEP

Rio Claro, 19 de Fevereiro de 2015

*Dedico esta dissertação ao meu esposo, **Ademir** e a nossa filha **Luana**, pelo incentivo, apoio, por não me deixarem esmorecer no decorrer dos estudos, por caminharem ao meu lado, ajudando e colaborando nos momentos difíceis da vida, não deixando que me afastasse de meus objetivos.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu o dom do conhecimento e da perseverança e, assim, encheu de luz o meu caminho para “caminhar” sempre e não abandonar meus sonhos pelo meio.

Em segundo lugar, agradeço a meus pais, meus primeiros professores, que mesmo em sua simplicidade, foram meus alfabetizadores.

Agradeço também à minha orientadora, Prof. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi, que muito me ajudou na escrita desta dissertação, me orientando e corrigindo o trabalho por diversas vezes.

Agradeço ainda à CAPES, pelo incentivo financeiro (Bolsa de estudos), que me possibilitou custear as viagens para este curso de Mestrado Profissional em Matemática.

Também, a todos os professores e colegas do curso, que de uma forma ou outra, colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

Muito obrigada!

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns aspectos da Geometria Neutra, assim chamada porque não é assumido o Axioma das Paralelas. São apresentados resultados possíveis de serem demonstrados assumindo alguns Axiomas de Incidência, Ordem, Congruência e Medida. Demonstramos o Teorema de Saccheri-Legendre e mostramos que nesta geometria não se pode garantir a existência de retângulos.Não nos preocupamos em construir uma teoria axiomática, no sentido exato da palavra.

Palavras-chave: Geometria Neutra, Euclides, Quadriláteros de Saccheri.

Abstract

In this work we study some aspects of Neutral Geometry, so called because it is not assumed the Axiom of Parallels. We present results which are possible to be demonstrated assuming some axioms Incidence, Betweenness, Congruence and Measure are developed. We demonstrate the Saccheri-Legendre theorem and show that this geometry can not guarantee the existence of rectangles. We are not interested to construct an axiomatic theory, in the strict sense of the word.

Keywords: Neutral Geometry, Euclides, Saccheri quadrilaterals.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A geometria era uma ciência empírica, uma coleção de regras práticas usadas principalmente na medição de terras, já conhecida pelos babilônios, indianos e chineses. Foi a partir de Thales de Mileto, matemático grego, que a geometria ficou estabelecida como uma teoria dedutiva, e que foi mantida e desenvolvida nos séculos seguintes por matemáticos como Pitágoras, Archytas, Eudóxio, Platão, entre outros.

Euclides, por volta de 300 a.C., escreveu um compêndio, *Os Elementos*, no qual desenvolveu uma teoria axiomática, denominada geometria euclidiana, em sua homenagem.

E o que é um método axiomático? Um método axiomático é um método que demonstra que os resultados são corretos, baseados na veracidade de outros e através de deduções lógicas. Assim, para mostrar que um fato D_1 é correto, devemos recorrer a um fato D_2 já conhecido e aceito. Porém, se não se aceitar D_2 deve-se mostrar que D_2 decorre logicamente de algum outro fato, podendo repetir-se esse processo várias vezes até que se aceite um fato sem justificativas. No entanto, não podemos fazer isso indefinidamente, pois correríamos o risco de uma *regressão infinita*. Assim, precisamos aceitar certas afirmações, chamadas *axiomas* ou *postulados* e precisamos também de uma compreensão do significado das palavras e símbolos utilizados na demonstração. Ou seja, ao usarmos algum termo desconhecido, devemos dar uma definição deste, porém devemos observar que não podemos também definir termos indefinidamente. Essas definições devem ter por base outros termos, que são os ***termos indefinidos ou primitivos***.

A grande realização de Euclides foi construir, a partir de alguns postulados simples, 465 proposições, muitas complicadas e não tão intuitivamente óbvias, que continham todo o conhecimento geométrico do seu tempo.

Euclides tentou definir todos os termos geométricos, tarefa sem sucesso. Nós admitiremos cinco termos geométricos indefinidos que serão a base para a definição dos demais termos geométricos: ***ponto***; ***reta***; ***pertencer a***; ***estar entre*** e ***congruente***.

Não temos por objetivo construir uma teoria axiomática. Assim, não nos preocuparemos se os axiomas são independentes ou completos. O objetivo principal é apresentar resultados já conhecidos da geometria plana, algumas demonstrações, tentando na medida do possível analisar aqueles que podemos demonstrar com os axiomas escolhidos por nós e os que não podemos.

Optamos apresentar neste trabalho aspectos, no plano, da ***geometria neutra***, ou seja, uma geometria em que não se assume o*axioma das paralelas*. Não trataremos aqui das Geometrias Não-Euclidianas que surgiram na tentativa de provar-se o axioma das paralelas.

O trabalho é baseado no livro de Greenberg [1] e Moise [2].

No Capítulo 2 apresentamos os cinco primeiros axiomas de Euclides e uma breve nota histórica sobre Saccheri e Legendre com suas tentativas para provar o quinto axioma.

No Capítulo 3 são apresentados os axiomas de incidência, ordem, congruência e o da medida, este último apenas com o intuito de mostrar que muitos resultados decorrem mais facilmente, porém para a formalização precisamos assumir o axioma de Arquimedes.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos algumas condições suficientes para paralelismo, os quadriláteros de Saccheri e o teorema de Saccheri-Legendre.

2 Os cinco primeiros axiomas de Euclides

Todo estudo em geometria deve ter como ponto de partida os quatro primeiros *postulados ou axiomas* de Euclides. Em seguida, dependendo dos objetivos outros axiomas serão considerados.

Definição 2.1. ***Segmento:*** *O segmento $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos entre A e B incluindo as extremidades A e B. Assim, para quaisquer dois pontos A e B, tem-se $\overline{AB} = \overline{BA}$*

"***Congruência***" é um termo indefinido, e se refere tanto em relação a segmentos, quanto em relação a ângulos, ou, a triângulos, que nos dá a ideia intuitiva de que duas figuras são congruentes, se podem ser movidas sem alterar o tamanho e a forma de modo que coincidam.

O conceito de congruência entre triângulos é usualmente definido como: dois triângulos são congruentes se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Na notação $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ entendemos que A corresponde a D, B a E, e C a F.

Axioma 1. Por quaisquer pontos P e Q distintos, existe uma única reta l que passa por eles.

Para representar uma reta por dois pontos P e Q, usaremos a notação $\overleftrightarrow{PQ}$.

Axioma 2. Para todo o segmento $\overline{AB}$ e para todo segmento $\overline{CD}$, existe um único ponto E com B entre A e E, que denotaremos por $A * B * E$ ou $E * B * A$, tal que o segmento $\overline{BE}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$ dado.

Definição 2.2. ***Círculo:*** *Dados dois pontos O e A, o conjunto de todos os pontos P tais que $\overline{OP} \cong \overline{OA}$ é chamado* ***círculo****, com $\overline{OP}$ sendo chamado "raio" e, O, "centro" do círculo.*

Axioma 3. Para todo ponto O e todo ponto A diferente de O existe um círculo com centro O e raio $\overline{OA}$.

Definição 2.3. ***Semirreta:*** *A semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os pontos do segmento $\overline{AB}$, juntamente com todos os pontos C tais que $A * B * C$.*

Definição 2.4. *Sejam l uma reta e, A e B quaisquer pontos que não pertencem a l. Se $A = B$ ou se o segmento $\overline{AB}$ não contém nenhum ponto de l, dizemos que A e B estão no* ***mesmo lado*** *da reta l (Figura 2.1). Se $A \neq B$ e o segmento $\overline{AB}$ intersecta l, dizemos que A e B estão em* ***lados opostos*** *de l (Figura 2.2).*

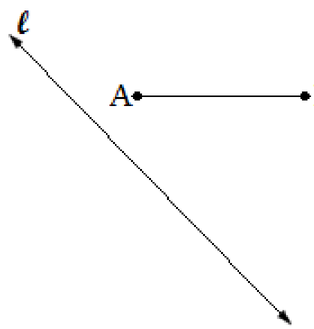

Figura 2.1: A e B no mesmo lado da reta l

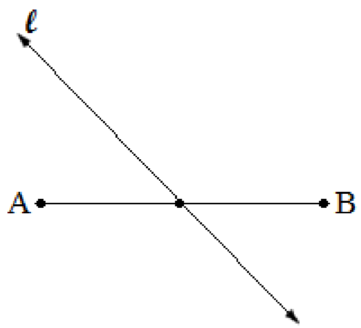

Figura 2.2: A e B em lados opostos da reta l

Definição 2.5. *Um* ***ângulo*** *é a união de duas semirretas com mesma origem, mas que não pertencem a uma mesma reta. Se o ângulo é a união das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então, essas semirretas são chamadas de "lados" do ângulo; o ponto A é chamado "vértice" e, o ângulo será denotado por $\angle BAC$, observando que $\angle BAC = \angle CAB$.*

Definição 2.6. *Dado um ângulo $\angle CAB$, dizemos que um ponto D está* ***no interior de*** *$\angle CAB$, se B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ e se, C e D estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. (Assim, o interior de um ângulo é a interseção de dois semiplanos.) (Figura 2.3).*

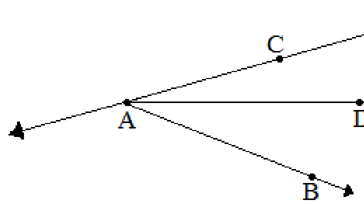

Figura 2.3: Ponto no interior de um ângulo

Antes de enunciar o próximo postulado precisamos definir o que é um ângulo reto.

Definição 2.7. *Dado um ângulo $\angle ABC$ seja A' um ponto na semirreta oposta de $\overrightarrow{BA}$, tal que $A' \neq B$ (Figura 2.4). Dizemos que $\angle ABC$ é* ***reto*** *se $\angle ABC \cong \angle A'BC$*

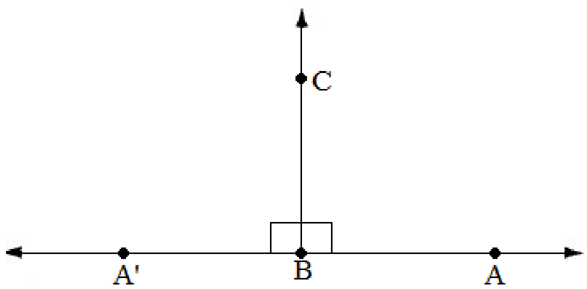

Figura 2.4: Ângulo reto

Axioma 4*.* Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

Apesar de não considerarmos no nosso trabalho o quinto axioma, iremos enunciá-lo e tecer alguns comentários sobre ele.

Axioma 5 *(O axioma das paralelas de Euclides).* Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

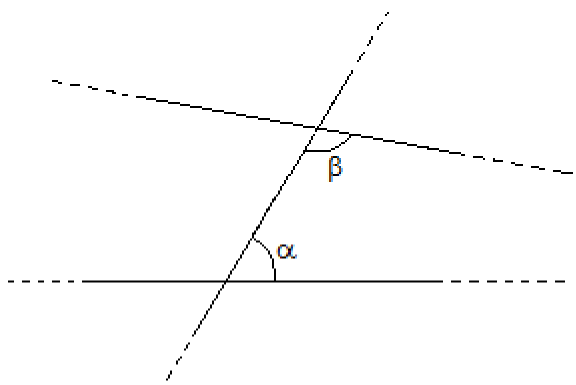

Figura 2.5: Axioma das paralelas de Euclides

Os quatro primeiros axiomas foram bem aceitos pelos matemáticos da época, no entanto, o **quinto Axioma: o das paralelas** foi altamente controverso. "De fato, o próprio Euclides o utiliza apenas na demonstração de sua 29^a proposição, o que talvez indique que nem mesmo ele tivesse certeza de sua evidência" [1]
Durante séculos, após a obra de Euclides, inúmeros matemáticos tentaram demonstrar o quinto axioma, porém muitas das tentativas de fazê-lo acabaram por produzir resultados equivalentes.

Uma versão do axioma das paralelas é o chamado *axioma de Playfair*, porque apareceu na apresentação de John Playfair, publicada em 1795, embora tenha sido referido muito mais cedo, por Proclus (410 - 485 a.C.). Esse axioma é atualmente mais conhecido do que o enunciado por Euclides.

Axioma de Playfair: Dados uma reta l e um ponto P que não está sobre l existe uma única reta m por P que é paralela à l (Figura 2.6).

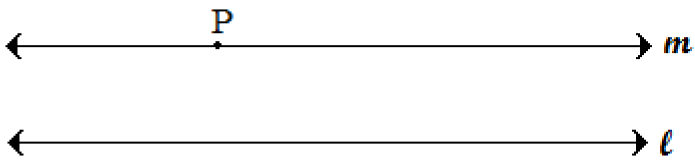

Figura 2.6: Axioma de Playfair

A seguir vamos examinar as tentativas de *Saccheri* e de *Legendre* para provar o axioma das paralelas de Euclides. Nas suas tentativas foi usado um resultado, posteriormente conhecido por Teorema de Saccheri-Legendre, que será demonstrado no capítulo 4. O teorema afirma que: *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a* 180^0. Escolhemos as tentativas de Saccheri e Legendre porque os dois tentaram provar o axioma das paralelas usando resultados que hoje são conhecidos como sendo da ***geometria neutra***.

Saccheri (1667 -1733)

Girolamo Saccheri foi um padre jesuíta que passou a vida perseguindo um objetivo: provar o Quinto Axioma dos Elementos de Euclides.

A ideia de Saccheri foi tentar provar por redução ao absurdo, método que consiste em assumir que a proposição a ser demonstrada é falsa e chegar a uma contradição. Nestes estudos, considerou certos quadriláteros, os quadriláteros de Saccheri, com dois ângulos retos na base e cujos lados adjacentes são congruentes entre si (Figura 2.7). Um estudo mais detalhado envolvendo estes quadriláteros será apresentado no final desta dissertação.

Usando apenas resultados da geometria neutra prova-se que os ângulos do lado oposto à base (topo) são congruentes, ou seja, $\angle C \cong \angle D$.

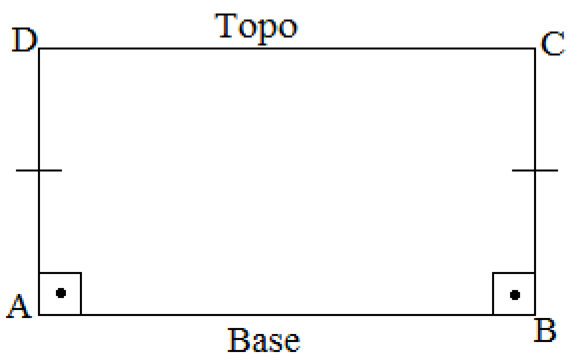

Figura 2.7: Quadrilátero de Saccheri

Mas, os ângulos do topo do quadrilátero podem ser: retos, obtusos ou agudos.

A intenção de Saccheri era mostrar que os casos dos ângulos obtusos e agudos levariam a um absurdo, restando assim, o dos ângulos retos, que é o caso euclidiano.

Ele conseguiu mostrar que o caso dos ângulos obtusos levava a uma contradição, usando o teorema que leva seu nome e de Legendre. Este teorema será provado no capítulo 4. Porém, por mais que tentasse, Saccheri não conseguiu uma contradição no caso dos ângulos agudos.

Ele deduziu alguns resultados "estranhos", mas não uma contradição. Finalmente, ele exclamou em frustração: "A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa, porque é repugnante à natureza da reta". [1]. Mais tarde, viram que seus estudos eram o princípio de uma nova geometria, que não era a euclidiana.

Legendre (1752 - 1833)

Adrien-Marie **Legendre** foi um dos grandes matemáticos, com inúmeras pesquisas em matemática pura e aplicada, que também tentou demonstrar o 5^o axioma de Euclides. Legendre publicou, em 1833, ano de sua morte, uma coleção de suas tentativas. Vamos esboçar uma delas de provar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180^0.

Esta tentativa envolve casos de congruência de triângulos, que serão tratados em 3.3, do Capítulo 3.

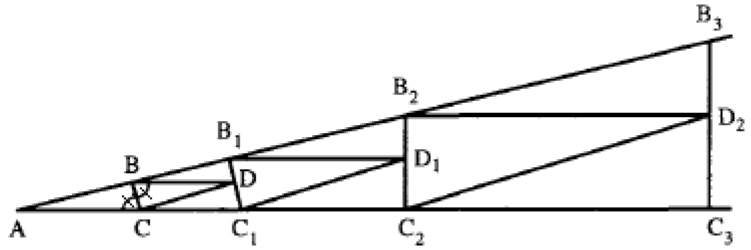

Figura 2.8: Congruência de triângulos

Suponha, por contradição, que exista um triângulo $\triangle ABC$ que possui um defeito $d \neq 0$, em que defeito significa a diferença entre 180^0 e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Usando o resultado, posteriormente conhecido como Teorema de Saccheri-Legendre (Teorema 4.4), tem-se $d > 0$. Um dos ângulos do triângulo, digamos $\angle A$ deve ser agudo. Seja o ponto D oposto de A em relação ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, tal que $\angle DBC \cong \angle ACB$ e $\overline{BD} \cong \overline{AC}$. Então $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ (LAL) e daí $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, de modo que D está no interior do ângulo agudo $\angle A$. Portanto, há uma reta l através de D tal que l intersecta o lado $\overrightarrow{AB}$ em um ponto $B_1 \neq A$ e o lado $\overrightarrow{AC}$ em um ponto de $C_1 \neq A$. Como as retas são paralelas, temos que $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$.

Suponha B_1 sobre o segmento $\overline{AB}$. Então, A e B_1 estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BD}$. Como $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, A e C_1 estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BD}$. Assim, B_1 e C_1 estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BD}$. Absurdo, pois D está no interior do ângulo $\angle A$, entre B_1 e C_1. Esta contradição mostra que $A * B * B_1$. Da mesma forma, temos entre $A * C * C_1$. Já que $\triangle ACB \cong \triangle DBC$, o defeito do $\triangle DBC$ também é d. Portanto, com a aditividade do defeito aplicado aos quatro triângulos em que $\triangle AB_1C_1$ foi decomposto, o defeito do $\triangle AB_1C_1$ é maior ou igual a $2d$.

Repetindo esta construção para $\triangle AB_1C_1$, obtemos $\triangle AB_2C_2$ com defeitos maiores ou iguais a $4d$. Iterando a construção n vezes, obtém-se um triângulo, com defeitos maiores ou iguais a $2^n d$, que podem ser tão grande quanto quisermos, tomando n suficientemente grande. Mas o defeito de um triângulo não pode ser maior do que 180^0! Esta contradição mostra que cada triângulo $\triangle ABC$ tem defeito 0.

Legendre tentou justificar cada passo, mas não conseguiu justificar a frase: "Portanto, há uma reta ...". Desta forma, Legendre não conseguiu provar na geometria neutra que o defeito de cada triângulo é zero.

No entanto, conseguiu provar o seguinte teorema em geometria neutra.

Teorema 2.1. *Se para qualquer $\angle A$ agudo e qualquer ponto D no interior de um $\angle A$, existe uma reta que passa por D, que não passa por A e que intersecta ambos os lados do $\angle A$, então a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0.*

Observe, porém que na realidade a hipótese deste teorema é uma formulação equivalente ao postulado das paralelas de Euclides.

3 Axiomas de Incidência, de Ordem, de Congruência e da Medida

David Hilbert (1862 - 1943) é considerado um dos maiores matemáticos de sua época. Ele deu relevantes e originais contribuições para uma ampla gama de campos da Matemática.

No campo da Geometria, considerando como termos primitivos *ponto*, *reta* e *plano* e, supondo três relações entre tais conceitos: "*incidência*", "*estar entre*" e "*congruência*", desenvolveu um sistema axiomático. Usamos a palavra incidente no sentido de pertencer.

Não foi o primeiro, mas seus axiomas são talvez os mais intuitivos e certamente são os mais próximos em espírito aos axiomas de Euclides.

Como já observamos, no nosso trabalho não iremos assumir o *axioma das paralelas* e também não vamos nos preocupar em estabelecer uma teoria axiomática no sentido exato da palavra.

3.1 Axiomas de Incidência

Os axiomas deste grupo estabelecem uma ligação entre os conceitos de *pontos*, *retas* e *planos*.

Axioma $\boldsymbol{I}_1$. Para quaisquer pontos P e Q distintos existe uma única reta que os contém.

Axioma $\boldsymbol{I}_2$. Para cada reta l existem pelo menos dois pontos distintos "incidentes" com l.

Axioma $\boldsymbol{I}_3$. Existem pelo menos três pontos distintos com a propriedade de que não são todos os três, "incidentes" com uma mesma reta.

Estes axiomas preenchem algumas lacunas encontradas na obra de Euclides. Agora podemos afirmar que cada reta tem pelo menos dois pontos sobre ela e também que os pontos não se encontram todos em uma única reta.

Com apenas estes axiomas é possível provar vários resultados. Apresentaremos alguns bastante conhecidos no ensino fundamental e médio, mas que lá são vistos sem demonstração.

Definição 3.1. *Duas retas r e s no plano são paralelas se não se intersectam. Notação $r \parallel s$.*

Proposição 3.1. *Se l e m são duas retas distintas e não paralelas, então l e m têm um único ponto em comum.*

Prova:

Sejam l e m retas distintas e não paralelas. Por serem não paralelas, as retas têm pelo menos um ponto em comum. Seja P tal ponto e provemos que é único. Para isto, considere Q um outro ponto comum às duas retas l e m. Se P e Q fossem distintos, Pelo ***Axioma I***$_1$, haveria uma única reta que passaria por eles, e portanto $l = m$ e então P é o único ponto comum a l e m. □

Proposição 3.2. *Existem três retas distintas que não são concorrentes no mesmo ponto.*

Prova:

Pelo ***Axioma I***$_3$, existem três pontos distintos P, Q e R que não são colineares. Consideremos as retas $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$, e $\overleftrightarrow{RP}$ determinadas por eles. Se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QR}$, então, P, Q, R estão sobre a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, o que é uma contradição, pois P, Q e R não são colineares. Assim, $\overleftrightarrow{PQ} \neq \overleftrightarrow{QR}$ e da mesma forma $\overleftrightarrow{QR} \neq \overleftrightarrow{RP}$ e $\overleftrightarrow{RP} \neq \overleftrightarrow{PQ}$.

Vamos mostrar agora que as retas $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$, e $\overleftrightarrow{RP}$ não são concorrentes no mesmo ponto. Caso sejam, existe um ponto X que se encontra em todas as três. As retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RP}$ não são paralelas pois P encontra-se em ambas; no entanto, o ponto X encontra-se também em ambas, por isso, pela Proposição 3.1, $X = P$.

Da mesma forma, as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, ambas passam tanto por Q e X, de modo que $X = Q$ pela Proposição 3.1, mas, então, $P = X = Q$, de modo que P e Q não são pontos distintos, o que nos dá uma contradição. □

Proposição 3.3. *Para cada reta há pelo menos um ponto que não está sobre ela.*

Prova:

Pelo ***Axioma I***$_3$, existem três pontos A, B, e C, com a propriedade de que de que não são todos os três "incidentes" com uma mesma reta. Assim, considerando-se a reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos que C não está em $\overleftrightarrow{AB}$. Analogamente, se considerarmos as retas $\overleftrightarrow{AC}$ ou $\overleftrightarrow{BC}$. □

Proposição 3.4. *Para cada ponto, existe pelo menos uma reta que não o contém.*

Prova:

Suponhamos que existe um ponto P tal que todas as retas passam por P. Logo todas as retas são concorrentes no mesmo ponto, o que contradiz a Proposição 3.2. □

3.2 Axiomas de Intermediação (Ordem)

Definição 3.2. *Um triângulo $\triangle ABC$ é um **triângulo isósceles**, se dois de seus lados forem congruentes, ou seja $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (Figura 3.1).*

Para ilustrar a necessidade de axiomas de intermediação, considere a seguinte demonstração de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Esta não é prova de Euclides, mas é um argumento encontrado em alguns textos de geometria do ensino fundamental e médio.

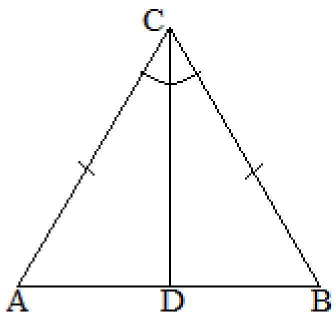

Figura 3.1: Triângulo isósceles

Dado o $\triangle ABC$, com $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, provaremos que $\angle A \cong \angle B$ (figura 3.1):

Seja a bissetriz do $\angle C$ que encontra o lado $\overline{AB}$ em D (todo ângulo possui uma bissetriz). Nos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (o $\triangle ABC$ é isósceles), $\angle ACD \cong \angle BCD$ (definição da bissetriz de um ângulo); $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (coisas iguais são congruentes). Portanto, pelo caso LAL, temos $\triangle ACD \cong \triangle BCD$. Daí, $\angle A \cong \angle B$ (ângulos correspondentes de triângulos congruentes).

Considere a primeira etapa cuja justificativa é que todo ângulo tem uma bissetriz. Esta é uma afirmação correta e pode ser provada separadamente.

Mas como saber que a bissetriz do ângulo $\angle C$ intersecta $\overleftrightarrow{AB}$, ou se o ponto de intersecção D situa-se entre A e B? Isto pode parecer óbvio, mas se quisermos ser rigorosos, isto exige prova. O esquema poderia parecer com a Figura 3.2 e, se este for o caso, as etapas da demonstração estariam corretas, mas podemos concluir apenas que o ângulo $\angle B$ é congruente ao ângulo $\angle CAD$ e não ao ângulo $\angle CAB$.

Vamos então enunciar os axiomas de ordem e tecer alguns comentários sobre os mesmos.

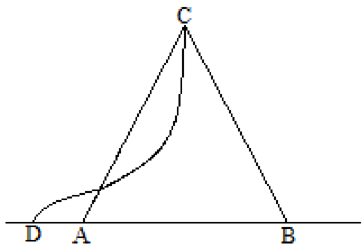

Figura 3.2: Intersecção da bissetriz ângulo C do triângulo $\triangle ABC$ com o lado $\overline{AB}$

Axioma B$_1$. Se um ponto B está entre dois outros pontos A e C, então, A, B e C são três pontos distintos de uma reta e B está entre C e A.

Este axioma trata da reflexividade do conceito de um ponto estar entre outros dois, ou seja, entre A e C significa o mesmo que entre C e A não importa se A ou C é mencionado primeiro. Mas se quisermos deixar claro que B está entre A e C nesta ordem, denotaremos por $A * B * C$, lembrando que A, B e C são colineares.

Axioma B$_2$. Dados quaisquer dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E sobre a reta $\overleftrightarrow{BD}$ tal que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.

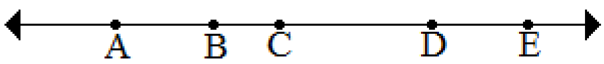

Figura 3.3: Axiomas de Intermediação - Axioma B$_2$

Este axioma garante que existem pontos entre B e D e que a reta $\overleftrightarrow{BD}$ não "termina" em B ou D.

Axioma B$_3$. Se A, B e C são três pontos distintos e estão sobre uma mesma reta, então um e apenas um dos pontos situa-se entre os outros dois.

Este axioma assegura que uma reta não é circular. Observe a figura abaixo. É possível dizer que A está entre C e B, C está entre A e B e B está entre A e C.

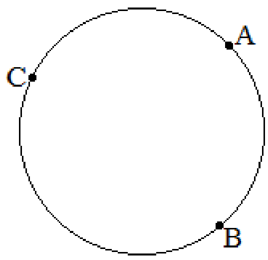

Figura 3.4: Sobre uma reta não ser circular

Dentre os vários resultados que poderíamos provar usando os axiomas dados, escolhemos a seguinte proposição, apesar de sua simplicidade, mas que observa como se demonstra uma igualdade de conjuntos.

Proposição 3.5. *Para quaisquer dois pontos A e B:*
(i) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$, *e*
(ii) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

Prova (i):

Segue das definições de segmento de reta e semirreta que $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Por outro lado, se um ponto C pertence à intersecção de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ tem-se: se $C = A$ ou $C = B$, C é um extremo de $\overline{AB}$. Como, A, B, e C são três pontos colineares, pelo ***Axioma B***$_3$ tem-se uma das relações $A * C * B$, $A * B * C$ ou $C * A * B$.

Se $A * B * C$, então C não está em $\overrightarrow{BA}$; se $C * A * B$, então C não está em $\overrightarrow{AB}$. Em ambos os casos, C não pertence a ambas as semirretas. Por conseguinte, tem-se $A * C * B$. Logo, C pertence ao $\overline{AB}$.

Prova (ii):

Da definição de semirreta, segue que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AB}$. Vamos demonstrar a outra inclusão. Considere então, C um ponto que pertence a $\overleftrightarrow{AB}$. Se $C = A$ ou $C = B$, então C é um extremo de $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$, respectivamente, logo, C pertence a $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Como, A, B, e C são três pontos colineares temos pelo ***Axioma B***$_3$ uma das relações $A * C * B$, $A * B * C$ ou $C * A * B$.

Se $A * B * C$, então C está em $\overrightarrow{AB}$; se $C * A * B$, então C está em $\overrightarrow{BA}$; se $A * C * B$, C está em $\overline{AB}$, logo C pertence a $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. $\square$

Definição 3.3. ***Semi-plano:*** *Dados uma reta l e um ponto P não pertencente a l, o semi-plano determinado por l contendo P é o conjunto de todos os pontos Q, tais que P e Q estão do mesmo lado de l, unido aos pontos de l. A reta l é chamada origem do semi-plano.*

Axioma B$_4$**: (Axioma de Separação do Plano).** Para toda reta l e para quaisquer três pontos A, B e C não pertencentes a l:

(i) Se A e B estão no mesmo lado da reta l e B e C estão no mesmo lado de l, então A e C estão no mesmo lado de l (Figura 3.5).

(ii) Se A e B estão em lados opostos de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão do mesmo lado que l (Figura 3.6).

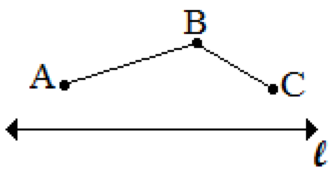

Figura 3.5: Pontos no mesmo lado de l

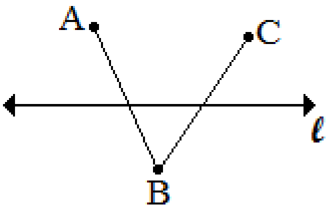

Figura 3.6: Pontos em lados opostos de l

Corolário 3.1. *Se A e B estão em lados opostos de l e B e C estão do mesmo lado de l, então A e C estão em lados opostos a l.*

Proposição 3.6. *Toda reta separa o plano exatamente em dois semiplanos disjuntos.*

Prova:

Seja l uma reta em um plano. Pela Proposição 3.3, existe um ponto A que não pertence a l. Pelo ***Axioma*** $\boldsymbol{I_2}$, existe um ponto O que pertence a l e pelo ***Axioma*** $\boldsymbol{B_2}$, existe um ponto B tal que $B * O * A$. Então, A e B estão em lados opostos de l.

Seja C qualquer ponto distinto de A e B e não pertencente a l. Se C e B não estão no mesmo lado de l, então C e A estão no mesmo lado de l pelo ***Axioma*** $\boldsymbol{B_4}$***(ii)***. Da mesma forma se C e A não estão do mesmo lado de l, concluímos que C e B estão no mesmo lado de l. Assim, o conjunto de pontos que não estão em l é a união do semiplano H_A que contém A e do semiplano H_B que contém B.

Se C estiver em ambos os lados, então A e B estariam do mesmo lado, pelo Corolário 3.1 , o que é uma contradição. Logo os dois lados são disjuntos. $\square$

O próximo teorema é importante para justificar alguns resultados, em particular o teorema do ângulo externo de um triângulo.

Teorema 3.1. *(**Teorema de Pasch**). Se A, B, C são pontos distintos e não colineares e l é qualquer reta que intersecta $\overline{AB}$ em um ponto entre A e B, então l intersecta também $\overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ (Figura 3.7). Se C não está em l, então l intersecta ambos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.*

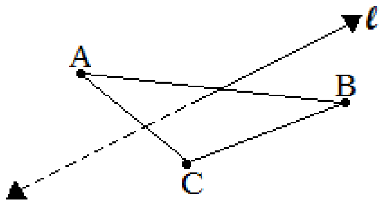

Figura 3.7: Teorema de Pasch

Prova:

Se C está em l, então A ou B não estão em l, pois A, B e C são não colineares. Suponha que $A \in l$, então pelo ***Axioma I***$_1$ tem-se $\overleftrightarrow{AC} = l$.

Se C não está em l, suponhamos que A, B e C não estão em l. Como l intercepta $\overline{AB}$, então A e B estão em lados opostos em relação a l. Pelo Axioma separação do plano, C está em um dos semiplanos determinados por l. Se C está no mesmo lado de A, então C está do lado oposto de B, o que significa que l intersecta $\overline{BC}$ e não intersecta $\overline{AC}$, visto que A e C estão do mesmo lado em ralação à l. $\square$

Definição 3.4. *A semirreta $\overrightarrow{AD}$ está entre as semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$, se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são semirretas opostas e D é interior ao $\angle CAB$. Esta definição não depende da escolha do ponto D em $\overrightarrow{AD}$.*

Proposição 3.7. *Dados um ângulo $\angle CAB$ e um ponto D sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Então D está no interior $\angle CAB$ se, e somente se, $B * D * C$. (Figura 3.8).*

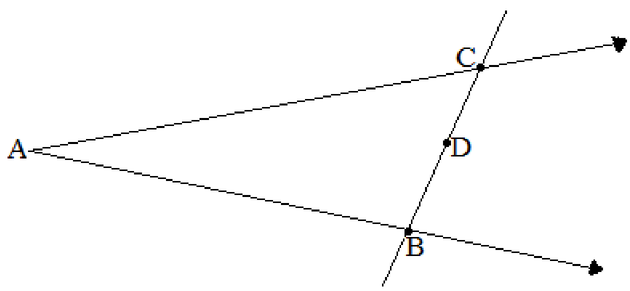

Figura 3.8: Ponto no interior de um ângulo

Prova:

Suponha que D seja um ponto em $\overleftrightarrow{BC}$, distinto de B e C. Pelo ***Axioma B***$_3$, temos que $D * B * C$, ou, $B * D * C$, ou, $B * C * D$.

Suponha que $D * B * C$, então $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta o segmento $\overline{CD}$ em B, de modo que C e D estão em lados opostos em relação à $\overleftrightarrow{AB}$. Assim D não está no interior de $\angle CAB$. A demonstração para o caso $B * C * D$ é análoga.

Finalmente, suponha que $B * D * C$. Como D está em $\overrightarrow{BC}$ e D e C estão do mesmo lado da $\overleftrightarrow{AB}$, e pela definição de semirreta D está em $\overrightarrow{CB}$ e D e B estão no mesmo lado da $\overleftrightarrow{AC}$. Então da definição de ponto interno a um ângulo, temos que D está no interior do $\angle CAB$. $\square$

Vamos terminar o estudo envolvendo os axiomas de ordem com este importante torema.

Teorema 3.2. *Se $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AD}$ intersecta o segmento $\overline{BC}$.(Figura 3.9)*

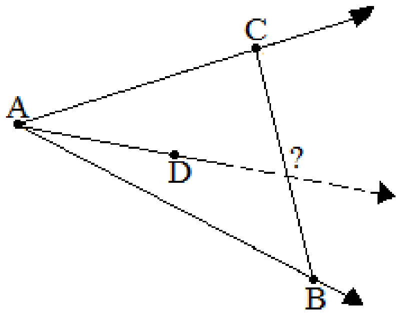

Figura 3.9: Semirreta interior a um ângulo $\angle BAC$ intesctando um segmento $\overline{BC}$

Prova:

Suponha que $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$. Pelo ***Axioma B***$_2$, existe um ponto F, tal que $F * A * D$, em que F, A e D são colineares (***Axioma B***$_2$), e o segmento $\overline{FD}$ intersecta $\overleftrightarrow{AC}$ em A. Assim F e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. Todo todo ponto de $\overrightarrow{AF}$ (exceto A) está no lado oposto de B em relação a $\overleftrightarrow{AC}$. Todo ponto de $\overline{BC}$, exceptuando C está no semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém B. Logo, o segmento $\overline{BC}$ não intersecta $\overrightarrow{AF}$.

Pelo ***Axioma B***$_2$, existe um ponto E de tal modo que $E * A * C$ e o segmento $\overline{CE}$ intersecta $\overleftrightarrow{AD}$ em A, assim E e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AD}$. Se $C * A * E$, então B está no interior do $\angle DAE$, assim B está no mesmo lado que E em relação a $\overleftrightarrow{AD}$. Logo pelo corolário 3.1, B e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AD}$.

Pela Proposição 3.5 (ii), $\overrightarrow{AF} \cup \overrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AD}$. Uma vez que B e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AD}$, o segmento $\overline{BC}$ intersecta $\overleftrightarrow{AD}$. Vimos que o segmento $\overline{BC}$ não se intersecta com $\overrightarrow{AF}$, então deve intersectar $\overrightarrow{AD}$. $\square$

3.3 Axiomas de Congruência e da Medida

Vamos assumir seis axiomas de congruência com os quais podemos provar resultados interessantes no que concerne a congruência de segmentos, ângulos e triângulos. Em relação à congruência de triângulos, vamos assumir o Axioma C_6 (LAL) e demonstraremos o caso ALA. Os dois outros casos LLL e LAA podem ser demonstrados usando os resultados apresentados, porém não faremos as demonstrações.

Axioma C_1. Se A e B são pontos distintos e se A' é qualquer ponto, então, para toda semirreta r com origem em A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. (Figura 3.10).

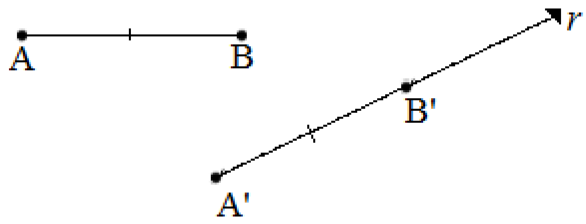

Figura 3.10: Axiomas de Congruência - Axioma C_1

Definição 3.5. ***Ponto médio*** *de um segmento $\overline{AB}$ é um ponto P entre A e B de tal modo que $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.*

Axioma C_2. Dado qualquer $\angle BAC$ e dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ com origem em um ponto A', então existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ em um dos semiplanos determinados pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$. (Figura 3.11).

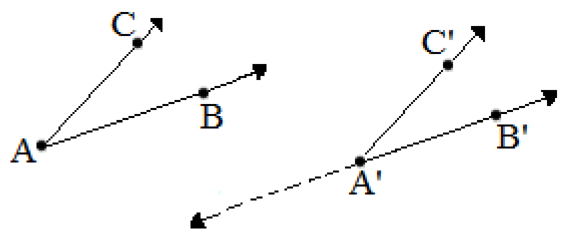

Figura 3.11: Axiomas de Congruência - Axioma C_2

Axioma C_3. Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Além disso, cada segmento é congruente a si.

Observe que $\overline{CD} = \overline{DC}$, portanto congruentes.

O *Axioma C_3* e esta observação nos garantem que a relação de congruência entre segmentos é uma relação de equivalência.

Axioma C_4. Se $\angle A \cong \angle B$ e $\angle A \cong \angle C$, então $\angle B \cong \angle C$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

Este axioma é o análogo para ângulos ao ***Axioma C_3*** para segmentos e da mesma forma concluímos que a relação de congruência de ângulos é uma relação de equivalência.

Axioma C_5. Se $A*B*C$, $A'*B'*C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. (Figura 3.12).

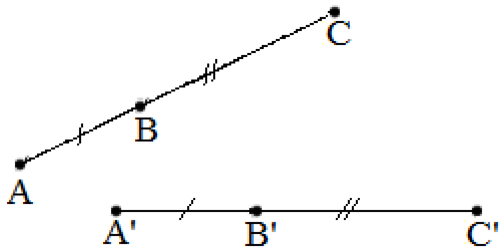

Figura 3.12: Axiomas de Congruência - Axioma C_5

Este Axioma nos permite dar uma noção de “operação” entre segmentos, que obviamente não pode ser definida.

Proposição 3.8. ***(Subtração de Segmento)*** *Se $A*B*C$, $D*E*F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (Figura 3.13).*

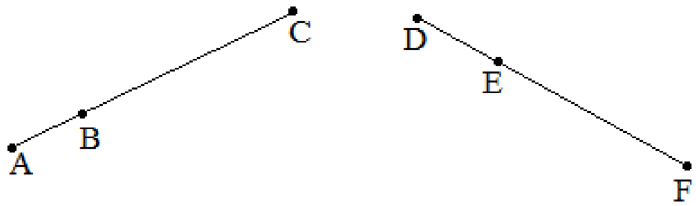

Figura 3.13: Subtração de Segmento

Prova:

Suponhamos, por absurdo, que $\overline{BC}$ não é congruente a $\overline{EF}$. Então, pelo ***Axioma C_1***, há um ponto G na $\overrightarrow{EF}$ tal que $\overline{BC} \cong \overline{EG}$ e, $G \neq F$, pois se $G \cong F$, então $\overline{EF} \cong \overline{EG}$ e $\overline{EG} \cong \overline{BC}$. Contradição.

Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ por hip'otese, segue do ***Axioma C_3*** que $\overline{DG} \cong \overline{AC}$. Por hipótese, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, portanto, $\overline{DF} \cong \overline{DG}$, pelo ***Axioma C_2***. Logo, $F = G$. Contradição, pois supusemos $G \neq F$. Logo, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. $\square$

Definição 3.6. *$\overline{AB} < \overline{CD}$ ($\overline{AB}$ menor que $\overline{CD}$) significa que existe um ponto E entre C e D tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$*

Observações:

(i) Segue diretamente da definição que se $A*E*B$, então $\overline{AE} < \overline{AB}$.

(ii) Utilizamos também a notação $\overline{CD} > \overline{AB}$ (lê-se $\overline{CD}$ ***maior que*** $\overline{AB}$) para indicar que $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Lema 3.1. *Se o ponto B está entre A e C e C está entre A e D, então B e C, nesta ordem, estão entre A e D, ou estão entre D e A.*

Prova:

Se B está entre A e C, então $A * B * C$ ou $C * B * A$. Como C está entre A e D, então teremos que $A * B * C$ e $B * C * D$ ou $D * C * B$ e $C * B * A$, donde segue o resultado. □

Proposição 3.9. *(i) Dados dois segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *uma e apenas uma das condições:* $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, *ou* $\overline{AB} > \overline{CD}$ *é satisfeita. (tricotomia).*

(ii) Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ *e* $\overline{CD} < \overline{EF}$, *então* $\overline{AB} < \overline{EF}$ *(transitividade).*

(iii) Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ *e* $\overline{CD} < \overline{EF}$ *então,* $\overline{AB} < \overline{EF}$.

Prova:

(i) Supondo que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não são congruentes. Existe um E em $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ (***Axioma C***$_1$). Pela definição de semirreta, temos uma e somente uma das relações: $C * E * D$, $E = D$ ou $C * D * E$. Estes são exatamente os três casos: $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$.

(ii) Já que $\overline{AB} < \overline{CD}$, existe um ponto P entre C e D tal que $C*P*D$, e, $\overline{AB} \cong \overline{CP}$ e como $\overline{CD} < \overline{EF}$, existe um ponto Q entre E e F tal que $E * Q * F$, e, $\overline{CD} \cong \overline{EQ}$. Como $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EQ}$, temos que $\overline{AB} < \overline{EQ}$, logo existe um ponto R em $\overline{EQ}$ tal que $E * R * Q$ e $\overline{AB} \cong \overline{ER}$. Como temos, $E * R * Q$ e $E * Q * F$, implica que $E * R * F$. Portanto $\overline{AB} < \overline{EF}$.

(iii) Se $\overline{CD} < \overline{EF}$, existe um ponto G entre E e F tal que $\overline{EG} \cong \overline{CD}$. Do ***Axioma C***$_3$, segue que $\overline{AB} \cong \overline{EG}$ e da definição 3.6 que $\overline{AB} < \overline{EF}$. □

Definição 3.7. $\angle ABC < \angle DEF$ *significa que há uma semirreta* $\overrightarrow{EG}$ *entre* $\overrightarrow{ED}$ *e* $\overrightarrow{EF}$ *tal que* $\angle ABC \cong \angle GEF$ *(Figura 3.14).*

Como o feito para o caso dos segmentos, utilizamos também a notação $\angle GEF > \angle ABC$ para indicar que $\angle ABC < \angle GEF$.

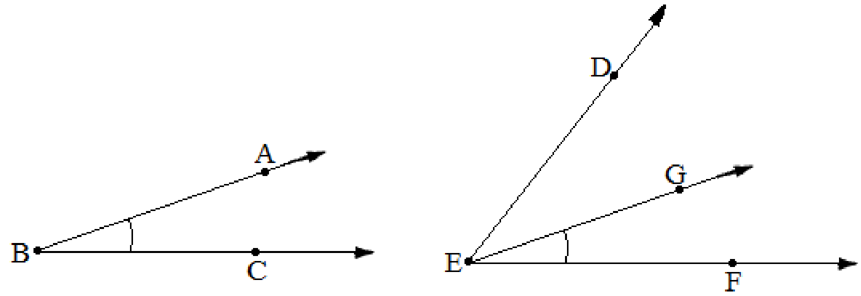

Figura 3.14: $\angle ABC < \angle DEF$, exite $\overrightarrow{DG}$ tal que $\angle ABC \cong \angle GEF$

Proposição 3.10. *(i) Exatamente uma das seguintes condições é satisfeita (tricotomia):* $\angle P < \angle Q$, $\angle P \cong \angle Q$, *ou* $\angle P > \angle Q$.

(ii) Se $\angle P < \angle Q$ *e* $\angle Q < \angle R$, *então* $\angle P < \angle R$.

Prova:

(i) Suponha $\angle ABC \ncong \angle DEF$. Pelo ***Axioma*** $\boldsymbol{C_2}$ existe uma única semirreta $\overrightarrow{EX}$ no mesmo lado de D em relação a $\overleftrightarrow{EF}$ e tal que $\angle ABC \cong \angle XEF$, onde $\overrightarrow{EX}$ está entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{ED}$ ou $\overrightarrow{EX}$ não está entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{ED}$. Se $\overrightarrow{EX}$ está entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{ED}$, então $\angle ABC < \angle DEF$.

Suponha que $\overrightarrow{EX}$ não está entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{ED}$. Como X e D estão no mesmo lado em relação a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EX}$ não está entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{ED}$, sabemos que X e F estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{ED}$. Assim, os pontos em $\overrightarrow{EX}$ e em $\overrightarrow{DF}$, exceto D, estão em lados opostos da $\overleftrightarrow{ED}$, de modo que o segmento DF não intersecta $\overrightarrow{EX}$. Analogamente, as semirretas opostas a $\overrightarrow{EX}$ e $\overrightarrow{FD}$, mostramos que o segmento DF não intersecta $\overleftrightarrow{EX}$. Assim D e F estão no mesmo lado da $\overleftrightarrow{EX}$, de modo que D é interior ao $\angle XEF$. Então $\overrightarrow{ED}$ está entre $\overrightarrow{EX}$ e $\overrightarrow{EF}$. Pela definição 3.7 , existe uma única semirreta $\overrightarrow{BY}$, entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ tal que $\angle DEF \cong \angle YBC$. Daí $\angle ABC > \angle DEF$.

(ii) Seja $\angle ABC < \angle DEF$ e $\angle DEF < \angle GHI$. Como $\angle ABC < \angle DEF$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{EX}$ entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$ tal que $\angle ABC \cong \angle XEF$. Como $\angle DEF < \angle GHI$, há uma única semirreta $\overrightarrow{HY}$ entre $\overrightarrow{HG}$ e $\overrightarrow{HI}$ tal que $\angle DEF \cong \angle YHI$. Como por hipótese, $\angle ABC < \angle DEF$ então $\angle ABC < \angle GHI$. □

Axioma $\boldsymbol{C_6}$**.(LAL)** Se num triângulo, dois lados e o ângulo formado por eles, forem congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo formado por eles, de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes (Figura 3.15).

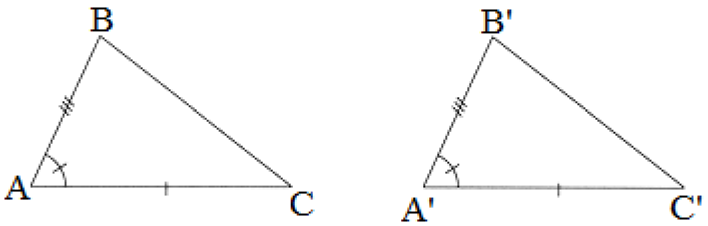

Figura 3.15: Axiomas de Congruência - Axioma C_6: Caso LAL de congruência para triângulos

Definição 3.8. *Se as semirretas* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *são opostas e a semirreta* $\overrightarrow{AD}$ *é comum aos ângulos* $\angle BAD$ *e* $\angle DAC$, *então os ângulos são chamados* ***ângulos suplementares***.

Proposição 3.11. *Suplementos de ângulos congruentes são congruentes.*

Prova:

Suponha $\angle ABC \cong \angle DEF$. Seja $\overrightarrow{BP}$ oposta a semirreta $\overrightarrow{BA}$ e, seja $\overrightarrow{EQ}$ oposta a semirreta $\overrightarrow{ED}$. Queremos mostrar $\angle CBP \cong \angle FEQ$.

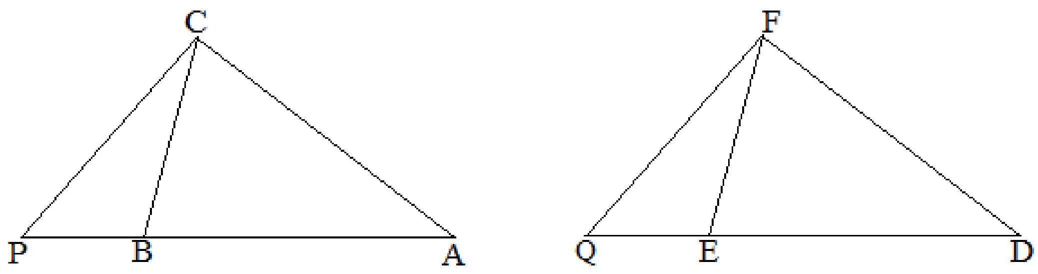

Figura 3.16: Suplementos de ângulos congruentes são congruentes

Uma vez que os pontos A, C e P dados são arbitrários nos lados do $\angle ABC$ e $\angle CBP$, pelo ***Axioma C***$_1$, podemos escolher os pontos D, F e Q nos ângulos $\angle DEF$ e $\angle FEQ$, de modo que $P*B*A$ e $Q*E*D$, tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{EF}$, e $\overline{BP} \cong \overline{EQ}$. Então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ por LAL, de onde segue $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, que pela definição de triângulos congruentes, implica $\angle A \cong \angle D$. Pelo ***Axioma C***$_5$, $\overline{AP} \cong \overline{DQ}$. Novamente por LAL, $\triangle ACP \cong \triangle DFQ$. Pela definição de triângulos congruentes $\overline{CP} \cong \overline{FQ}$ e $\angle P \cong \angle Q$. E mais uma vez por LAL, $\triangle CPB \cong \triangle FQE$, de onde decorre $\angle CBP \cong \angle FEQ$. $\square$

Proposição 3.12. *Dado $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então, para qualquer ponto B entre A e C, existe um único ponto E entre D e F de tal forma que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.*

Prova:

Pelo ***Axioma C***$_1$, existe um ponto único ponto E em $\overrightarrow{DF}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Se E não está entre D e F, então, $E = F$ ou $D * F * E$. Se $E = F$, temos que, B e C são dois pontos distintos sobre $\overline{AC}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{DF} \cong \overline{AB}$. Contradição.

Se $D*F*E$, então, pelo ***Axioma C***$_1$ existe um ponto G na semirreta oposta a $\overrightarrow{CA}$ tal que $\overline{FE} \cong \overline{CG}$. Logo, pelo ***Axioma C***$_3$ $\overline{AG} \cong \overline{DE}$. Assim, existem dois pontos distintos B e G em $\overrightarrow{AC}$ tal que $\overline{AG} \cong \overline{DE} \cong \overline{AB}$. Contradição. Portanto, só podemos ter $D * E * F$. $\square$

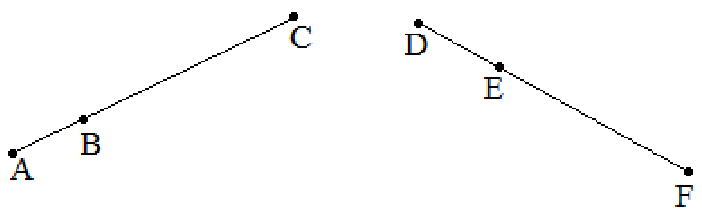

Figura 3.17: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $A * B * C$, existe um único ponto E entre D e F tal que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

Proposição 3.13. ***(i)*** *ângulos opostos pelo vértice são congruentes um com o outro.*

(ii) *Um ângulo congruente a um ângulo reto é um ângulo reto.*

Prova:

(i) Por definição, ângulos opostos pelo vértice são ângulos em que os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro:

Conforme a Figura 3.18 sejam os $\angle ABC$ e $\angle DBE$ onde as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$ são opostas, e $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BE}$ são opostas; O $\angle ABC$ é o suplemento do $\angle ABE$ e $\angle DBE$ é o suplemento do $\angle ABE$. Pela Proposição 3.11 e ***Axioma*** $\boldsymbol{C_4}$, $\angle ABE \cong \angle ABE$. Consequentemente, pela Proposição 3.11, vem que, $\angle ABC \cong \angle DBE$.

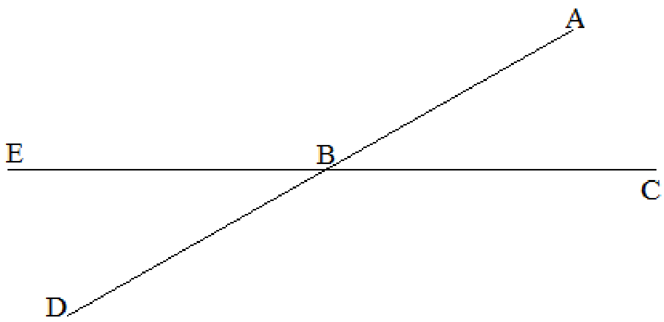

Figura 3.18: Ângulos opostos pelo vértice

(ii) Suponha que $\angle ABC$ é um ângulo reto e $\angle DEF \cong \angle ABC$ e que P é um ponto na semirreta oposta a $\overrightarrow{BC}$ e Q é um ponto na semirreta oposta a $\overrightarrow{EF}$. Precisamos mostrar $\angle DEF \cong \angle DEQ$.

Já que $\angle ABC \cong \angle DEF$, pela Proposição 3.11, os seus suplementos são congruentes, ou seja, $\angle ABP \cong \angle DEQ$.

Pela definição de ângulo reto (Definição 2.7), $\angle ABC \cong \angle ABP$, e, pelo ***Axioma*** $\boldsymbol{C_4}$, $\angle ABC \cong \angle DEQ$ e, novamente pelo *Axioma* C_4, $\angle DEF \cong \angle DEQ$. □

Definição 3.9. *Quando duas retas distintas l e m se intersectam são formados quatro ângulos, como indicado na Figura 3.19. Da Propocição 3.13(i) e da definição de ângulo reto segue que se um dos quatro ângulos formados é reto, então todos os outros também o serão.*

Neste caso, diremos que as retas l e m são **perpendiculares***. Usaremos a notação $l \perp m$ para indicar que l é perpendicular a m ou que l e m são perpendiculares.*

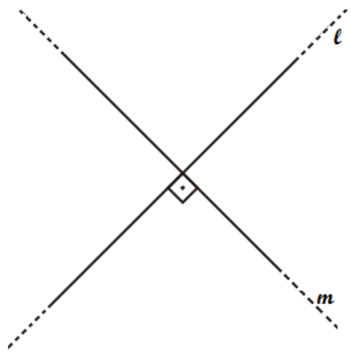

Figura 3.19: Retas l e m perpendiculares

Proposição 3.14. *Para cada reta l e cada ponto P existe uma reta através de P perpendicular a l.*

Prova:

Suponha primeiro que P não se encontra em l e sejam A e B dois pontos quaisquer em l. (Figura 3.20). Pelo ***Axioma C***$_2$, no lado oposto de l por P existe uma semirreta $\overrightarrow{AX}$ tal que $\angle XAB \cong \angle PAB$ e, pelo pelo ***Axioma C***$_1$, existe um ponto P' em $\overrightarrow{AX}$ tal que $AP' \cong AP$. Da definição de lados opostos, PP' intersecta l em um ponto Q. Se $Q = A$, então $PP' \perp l$ (definição de $\perp$). Se $Q \neq A$, por LAL, o $\triangle PAQ \cong \triangle P'AQ$. Logo, $\angle PQA \cong \angle P'QA$ (ângulos correspondentes de triângulos congruentes), de modo que $PP' \perp l$.

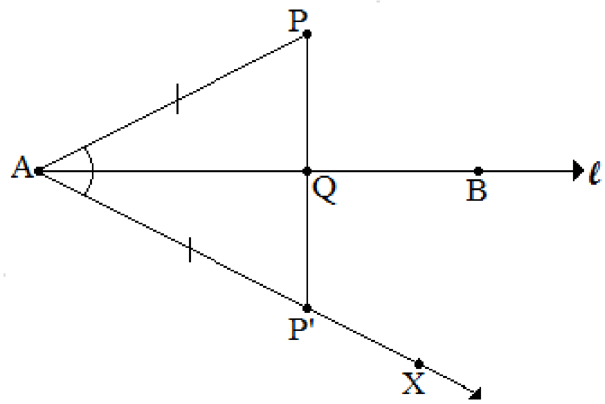

Figura 3.20: Reta perpendicular a l por um ponto P

Suponha agora que P encontra-se em l. Uma vez que, pela Proposição 3.3, existem pontos que não se encontram em l, podemos construir conforme a primeira parte deste teorema, uma reta s perpendicular a l a partir de um deles, obtendo assim um ângulo reto e, pelo ***Axioma C***$_2$, podemos obter um ângulo congruente a este ângulo reto com vértice em P e um lado em l, o que pela (Proposição 3.13 (ii)) é um ângulo reto. Daí s é perpendicular a l. $\square$

Neste ponto, vamos introduzir uma medida para ângulos e segmentos através de números reais e para isso é necessário o axioma de Arquimedes. Atribuiremos um número real positivo AB como o comprimento de um segmento arbitrário $\overline{AB}$ e $(\angle A)^o$ para a medida em graus do ângulo $\angle A$.

Axioma de Arquimedes Sejam $\overline{CD}$ um segmento qualquer, A um ponto, e r uma semirreta com início em A. Então, para cada ponto $B \neq A$ em r existe um número n tal que quando $\overline{CD}$ é colocado n vezes em r a partir de A, um ponto E é obtido de tal forma que $n \cdot \overline{CD} \cong \overline{AE}$ e, ou $B = E$ ou B está entre A e E.

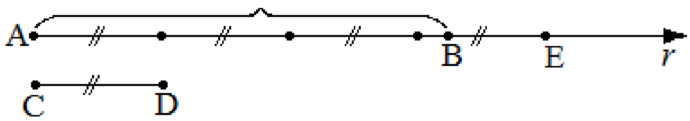

Figura 3.21: Axioma de Arquimedes

Axiomas de Medidas para Segmentos

Dado um segmento $\overline{OI}$, que será tomado como uma unidade. Associamos uma medida AB para cada segmento $\overline{AB}$ tal que as seguintes propriedades são válidas:

(1) AB é um número real positivo e $OI = 1$.

(2) $AB = CD$ se, e somente se, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

(3) $A * B * C$ se, e somente se, $AC = AB + BC$.

(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$ se, e somente se, $AB < CD$.

(5) Para todo número real x positivo, existe um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = x$.

Axiomas de Medidas para Ângulos

Associamos a cada ângulo, uma medida em graus de tal forma que sejam válidas as seguintes propriedades.

(6) $(\angle A)^0$ é um número real tal que $0 < (\angle A)^0 < 180^0$.

(7) $(\angle A)^0 = 90^0$ se, e somente se, $\angle A$ é um ângulo reto.

(8) $(\angle A)^0 = (\angle B)^0$ se, e somente se, $\angle A \cong \angle B$.

(9) Se $\overrightarrow{AC}$ é interior ao $\angle DAB$, então $(\angle DAB)^0 = (\angle DAC)^0 + (\angle CAB)^0$.

(10) Para todo número real x entre 0 e 180, existe um ângulo $\angle A$ tal que $(\angle A)^0 = x^0$.

(11) Se $\angle B$ é suplementar ao $\angle A$, então $(\angle A)^0 + (\angle B)^0 = 180^0$.

(12) $(\angle A)^0 > (\angle B)^0$ se, e somente se $\angle A > \angle B$.

Na realidade os axiomas de medidas de segmentos e de ângulos são mais enxutos e as afirmações acima podem ser vistas como uma proposição. Mas para nossos propósitos, iremos assumí-las como axiomas. Observe que os resultados obtidos até agora, são grandemente simplificados usando os axiomas de medidas.

Definição 3.10. *Sob a notação acima de grau, $\angle A$ é definido como **agudo** se $(\angle A)^0 < 90^0$, e **obtuso** se $(\angle A)^0 > 90^0$.*

Proposição 3.15. ***(Critério de congruência ALA).*** *Dados $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, e $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

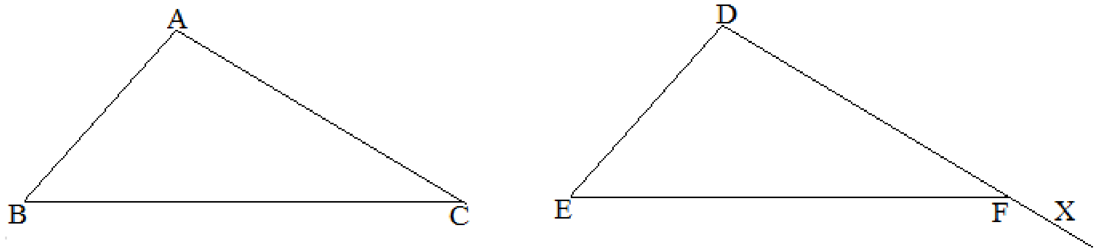

Figura 3.22: Critério de congruência ALA

Prova:

Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, conforme a Figura 3.22, seja $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ (por hipótese), então, existe um único ponto X na semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{DX}$. Assim, $\triangle ABC \cong \triangle DEX$ (LAL).

Pela definição de triângulos congruentes, $\angle ABC \cong \angle DEX$. Como, por hipótese, $\angle ABC \cong \angle DEF$, então $\angle DEF \cong \angle DEX$, por transitividade. Isso significa que E, F e X são colineares, isto é, F e X estão em ambas as semirretas $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{DF}$. Como a interseção de duas retas é um único ponto, temos que $F = X$. Portanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. $\square$

Enunciaremos resultados análogos a congruência de segmentos para congruência de ângulos.

Proposição 3.16. ***(Adição de ângulo).*** *Dados $\overrightarrow{BG}$ entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EH}$ entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$, se $\angle CBG \cong \angle FEH$, e se $\angle GBA \cong \angle HED$. Então $\angle ABC \cong \angle DEF$ (Figura 3.23)*

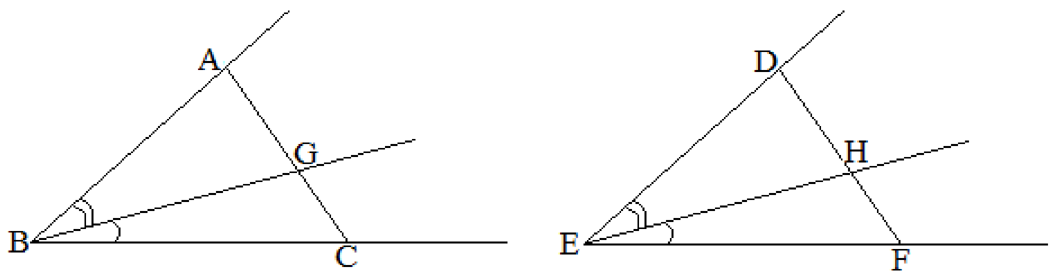

Figura 3.23: Adição de ângulo

Prova:

Pelo Teorema 3.2 , suponhamos G escolhido de forma que $A*G*C$. Pelo ***Axioma C_1***, assumimos D, F e H escolhidos de modo que $\overline{BA} \cong \overline{ED}$, $\overline{BG} \cong \overline{EH}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Então, $\triangle ABG \cong \triangle DEH$, por LAL e, em particular $\overline{AG} \cong \overline{DH}$, $\angle AGB \cong \angle DHE$ e $\angle GAB \cong \angle HDE$. Temos também $\triangle GBC \cong \triangle HEF$, por LAL e, em particular $\overline{GC} \cong \overline{HF}$, $\angle GCB \cong \angle HFE$ e $\angle BGC \cong \angle EHF$.

Como $A*G*C$, temos que os ângulos $\angle AGB$ e $\angle BGC$ são suplementares, logo, pela definição 3.8 e pela Proposição 3.8, os ângulos $\angle DHE$ e $\angle EHF$ são suplementares também. Então os pontos D, H e F são colineares e $D*H*F$. Como $\overline{AG} \cong \overline{DH}$ e $\overline{GC} \cong \overline{HF}$, pelo ***Axioma C_5*** $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Então por LLL, os triângulos $\triangle ABC \cong \triangle EDF$. Portanto $\angle ABC \cong \angle EDF$. $\square$

Proposição 3.17. ***(Subtração de ângulo).*** *Dados $\overrightarrow{BG}$ entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EH}$ entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$, se $\angle CBG \cong \angle FEH$ e, se $\angle ABC \cong \angle DEF$. Então $\angle GBA \cong \angle HED$.*

Prova:

Suponha, por absurdo, que $\angle GBA \ncong \angle HED$. Pelo ***Axioma C_2***, existe uma única semirreta $\overrightarrow{EX}$ no mesmo lado da $\overleftrightarrow{EH}$ tal que $\angle GBA \cong \angle HEX$, com $\overrightarrow{EX} \neq \overrightarrow{ED}$.

Visto que por hipótese $\angle FEH \cong \angle CBG$, vem pela Proposição 3.16 que $\angle ABC \cong \angle XEF$. A existência do $\angle XEF$ e do $\angle DEF$, ambos congruentes ao $\angle ABC$ contradiz a unicidade do ***Axioma C_2***. Logo, devemos ter $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{ED}$. Portanto, $\angle GBA \cong \angle HED$. $\square$

Proposição 3.18. ***(Critério de congruência LLL).*** *Dados $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$. Se $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$, então, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Com os resultados obtidos até agora, vamos apresentar uma demonstração do quarto axioma de Euclides.

Proposição 3.19. ***(Quarto Axioma de Euclides).*** *Todos os ângulos retos são congruentes um com o outro. (Figura 3.24)*

Prova:

Suponhamos que $\angle DAB \cong \angle DAC$ e $\angle HEF \cong \angle HEG$ são dois pares de ângulos retos, e que, por absurdo, $\angle DAB \ncong \angle HEF$. Pela Proposição 3.10 (i), devemos ter $\angle DAB > \angle HEF$ ou $\angle DAB < \angle HEF$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\angle DAB > \angle HEF$. Então existe uma semirreta $\overrightarrow{AX}$ entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ tal que $\angle XAB \cong \angle HEF$. Pela Proposição 3.11, suplementos de ângulos congruentes são congruentes. Logo, $\angle XAC \cong \angle HEG$.

Como $\angle DAC \cong \angle DAB$ e, $\angle HEF < \angle DAB$, então temos $\angle HEF < \angle DAC$ (Proposição 3.10 (ii)), e, como $\angle HEF \cong \angle HEG$, temos $\angle HEG > \angle DAC$ (Proposição 3.10 (ii)).

Além disso, como $\angle XAC \cong \angle HEG$, temos $\angle XAC < \angle DAC$ (pela Proposição 3.10 (ii)). Uma vez que $\overrightarrow{AX}$ está entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sabemos que $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AC}$, assim $\overrightarrow{AC}$ é semirreta oposta $\overrightarrow{AB}$. Então $\angle DAC < \angle XAB$. Contradição. Portanto $\angle DAB \cong \angle HEF$. $\square$

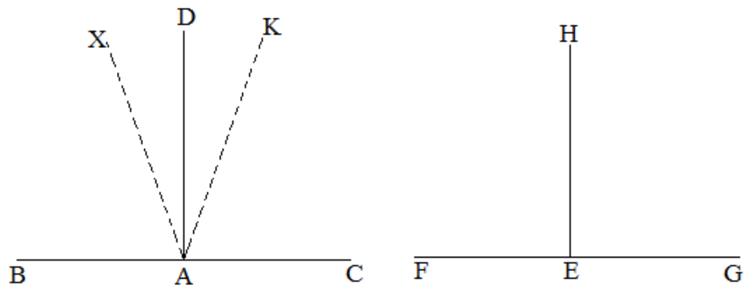

Figura 3.24: Congruência de ângulos retos

4 O Teorema de Saccheri-Legendre

O objetivo em estudar geometria neutra é tentar esclarecer o papel do postulado das paralelas. Há muitos teoremas da geometria que não dependem dele, há teoremas que seguem dos outros axiomas não sendo necessário o postulado das paralelas nas provas. Apresentaremos resultados que são condições suficientes para garantir o paralelismo entre duas retas.

4.1 Condições suficientes para paralelismo

Definição 4.1. ***Reta tranversal:*** *Se l, m e t são três retas num mesmo plano e t intersecta l e m em dois pontos distintos P e Q, repectivamente, então t é uma* ***reta transversal*** *a l e m. (Figura 4.1)*

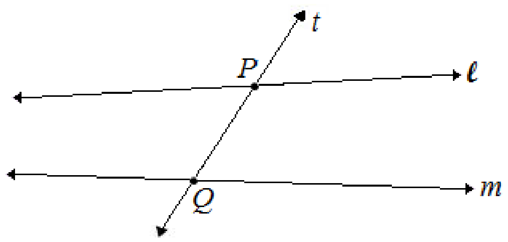

Figura 4.1: Reta transversal

Definição 4.2. ***Ângulos correspondentes:*** *Seja t uma transversal às retas l e l', com t intersectando l em B e l' em B'. Escolha os pontos A e C em l tal que $A * B * C$ e os pontos A' e C' em l' tal que A e A' estejam no mesmo lado de t de modo que $A' * B' * C'$. Os dois pares ($\angle ABB'$, $\angle C'B'B$) e ($\angle A'B'B$, $\angle CBB'$) são chamados de pares de* ***ângulos alternos internos****. Considere também os pontos P e Q em t tal que $Q * B * B'$ e $B * B' * P$. Então os pares de ângulos:($\angle BB'C'$ e $\angle QBC$); ($\angle PB'C'$ e $\angle B'BC$); ($\angle A'B'P$ e $\angle ABB'$) e, ($\angle A'B'B$ e $\angle ABQ$) são pares de* ***ângulos correspondentes****.(Figura 4.2).*

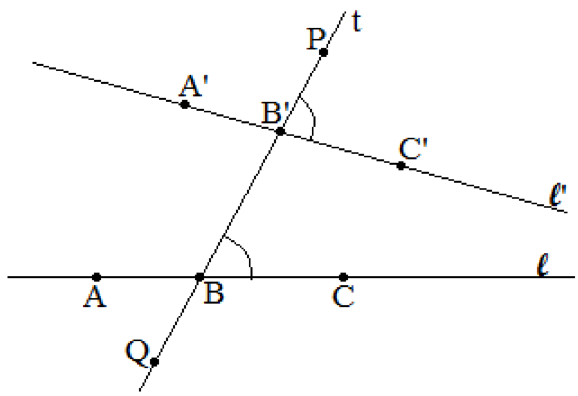

Figura 4.2: Ângulos correspondentes

Teorema 4.1. ***(Teorema dos Ângulos Alternos Internos).*** *Se duas retas que intersectam uma transversal possui um par de ângulos alternos internos congruentes, então, as duas retas são paralelas.*

Prova:

De acordo com a Figura 4.2, sejam l e l' duas retas cortadas por uma transversal t. Sejam B e B' os respectivos pontos de intersecção e os pontos A e C em l tal que $A * B * C$, pelo ***Axioma I***$_2$ e ***Axioma B***$_2$ e os pontos A' e C' em l' de modo que A' esteja no mesmo lado de t em relação a A, e C' esteja no mesmo lado de t em relação a C e $A' * B' * C'$. Vamos considerar que $\angle A'B'B \cong \angle CBB'$.

Supondo que as retas l e l' não são paralelas, isto é, elas se intersectam em um ponto, digamos D, e sem perda de generalidade, podemos dizer que D encontra-se no mesmo lado que C e C' em relação a t (***Axioma I***$_3$). Então existe um único ponto E na semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ tal que $B'E \cong BD$ (*Axioma C*$_1$). Então $\triangle EB'B \cong \triangle DBB'$, por LAL (***Axioma C***$_6$). Assim $\angle BB'D \cong \angle B'BE$, ou seja, $\angle C'B'B \cong \angle EBB'$.

Por hipótese, sabemos que $\angle EB'B \cong \angle DBB'$. Pela proposição 3.11, sabemos que ângulos congruentes possuem suplementos congruentes, assim os suplementos destes dois ângulos são congruentes. Como $\angle ABB'$ é suplementar do $\angle CBB' = \angle DBB'$ e o $\angle C'B'B$ é suplementar do $\angle A'B'B \cong \angle EB'B$, os ângulos $\angle ABB' \cong \angle C'B'B$ (Proposição 3.11). Logo, $\angle ABB'$ deve ser congruentes ao $\angle EBB'$, o que significa, que E deve estar na reta l. No entanto, E e D estão também na reta l'. Temos então duas retas l e l' passando por dois pontos distintos, assim $l = l'$, pois existe apenas uma reta através de dois pontos E e D (***Axioma I***$_1$). Isto é uma contradição, portanto, l e l' não se intersectam, ou seja, $l \parallel l'$. $\square$

Este teorema tem dois corolários muito importantes.

Corolário 4.1. *Duas retas perpendiculares à mesma reta são paralelas.*

Prova:

Se l e l' são ambas perpendiculares a t, os ângulos alternos internos são ângulos retos e, portanto, são congruentes (Proposição 3.19). Daí, o resultado segue do Teorema 4.1. □

Corolário 4.2. *Se l é qualquer reta e P é qualquer ponto que não está em l, existe pelo menos uma reta m através de P paralela a l (Figura 4.3).*

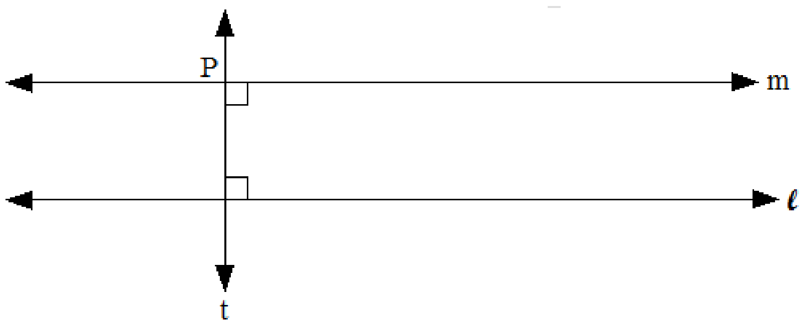

Figura 4.3: Reta m através de P paralela a l

Prova:

Existe uma reta t através de P perpendicular a l, e, novamente, existe uma reta a m através de P perpendicular à t (Proposição 3.14). Uma vez que l e m são perpendiculares a t, o Corolário 4.1 nos diz que $l \parallel m$. □

Vamos apresentar agora o teorema do ângulo externo que nos ajudará na demonstração do teorema de Saccheri-Legendre.

Definição 4.3. *Um ângulo suplementar a um ângulo interno de um triângulo é chamado ângulo externo do triângulo.*

Teorema 4.2. *(**Teorema do Ângulo Externo**). Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno não adjacente (Figura 4.4).*

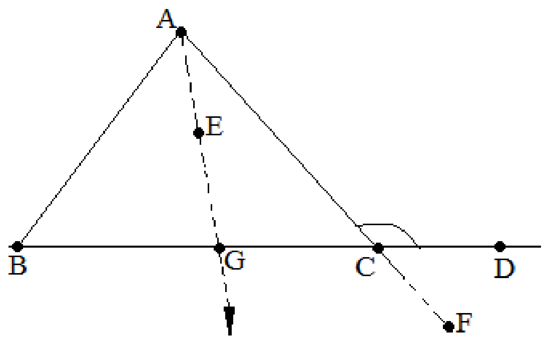

Figura 4.4: Ângulo externo de um triângulo

Prova:

Considere D na semirreta $\overrightarrow{BC}$ tal que $B*C*D$, o ângulo externo $\angle ACD$ e o ângulo interno não adjacente $\angle BAC$. Se $\angle BAC \cong \angle ACD$, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{CD}$ (Teorema 4.1), o que contradiz a hipótese de que estas retas se intersectam em B.

Suponha, por absurdo, que $\angle BAC$ seja maior do que $\angle ACD$. Então, por definição, existe uma semirreta $\overrightarrow{AE}$ entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tal que $\angle ACD \cong \angle CAE$. Esta semirreta $\overrightarrow{AE}$ intersecta BC em um ponto G (Teorema 3.2). De acordo com o Teorema 4.1, as retas de $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, portanto, $\angle BAC$ não pode ser maior do que $\angle ACD$.

Uma vez que $\angle BAC$ também não é congruente ao $\angle ACD$, $\angle BAC$ deve ser menor que $\angle ACD$ (Proposição 3.10(i)). Para o ângulo não adjacente $\angle ABC$, use o mesmo argumento aplicado ao ângulo exterior $\angle BCF$, que é congruente com $\angle ACD$ pelo teorema de congruência de ângulos opostos pelo vértice (Proposição 3.13 (i)). $\square$

O teorema do ângulo externo terá um papel importante no que se segue. Considerando a proposição 16, dos Elementos de Euclides , observamos uma lacuna, devido ao raciocínio de um diagrama em sua prova. Ele considerou a reta $\overleftrightarrow{MB}$ passando por B em que M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e construiu o ponto B' tal que $B*M*B'$ e $\overline{BM} \cong \overline{MB'}$ (***Axioma C***$_1$). Ele, então, assumiu a partir do diagrama que B' estava no interior de $\angle ACD$ (Figura 4.5). Como $\overline{BM} \cong \overline{MB'}$, $\angle BMA \cong \angle BMC$ (ângulos opostos pelo vértice) e $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ (M é ponto médio de $\overline{AC}$ vem que $\triangle MCB' \cong \triangle MAB$. Daí $\angle B'CA \cong \angle A$, por serem ângulos correspondentes de triângulos congruentes. Assim, Euclides concluiu corretamente que $\angle ACD > \angle A$.

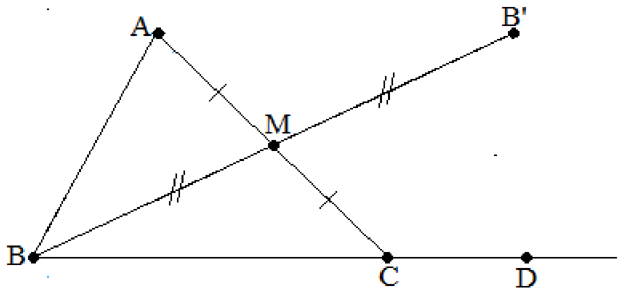

Figura 4.5: Comentário da Proposição 16, dos Elementos de Euclides

A lacuna no argumento de Euclides pode ser facilmente preenchida com as ferramentas que desenvolvemos. Como o segmento $\overline{BB'}$ intersecta $\overline{AC}$ em M; B e B' estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$ (por definição). Como $\overline{BD}$ intersecta $\overleftrightarrow{AC}$ em C, B e D estão também, em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, B' e D estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ (***Axioma B***$_4$). Como B' e M estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB'}$, e como o segmento $\overline{MB'}$ não contém o ponto B, no qual $\overleftrightarrow{MB'}$ intersecta $\overleftrightarrow{CD}$ (por construção de B' e ***Axiomas B***$_1$ e ***B***$_3$). Além disso, A e M estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, pois o segmento $\overline{AM}$ não contém o ponto C, em que $\overleftrightarrow{AM}$ intersecta $\overleftrightarrow{CD}$ (por definição de ponto médio e ***Axioma B***$_3$). Então, novamente, o ***Axioma B***$_3$, de separação do plano, garante que A e

B' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$ por definição de "interior" (precedendo a Proposição 3.7), mostramos que B' situa-se no interior do $\angle ACD$.

Usando o Teorema do Ângulo Externo podemos demonstrar o caso LAA de congruência de triângulos.

Proposição 4.1. ***(Critério congruência LAA).*** *Dado $AC \cong DF$, $\angle A \cong \angle D$, e $\angle B \cong \angle E$, como na Figura 4.6, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

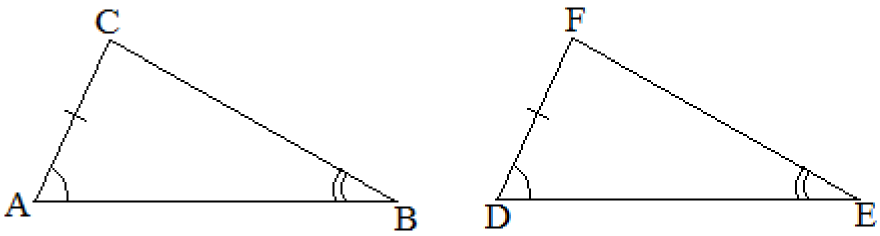

Figura 4.6: Critério congruência LAA

A demonstração da existência e unicidade do ponto médio de um segmento merece ser apresentada.

Proposição 4.2. *Todo segmento tem um único ponto médio.*

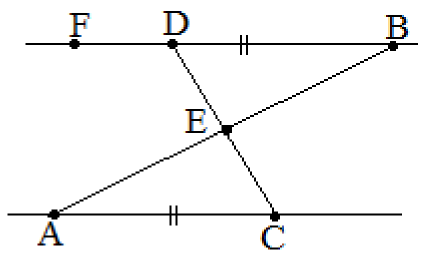

Figura 4.7: Ponto médio de um segmento

Prova:

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. Pela Proposição 3.3, existe um ponto C que não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura 4.7). Pelo ***Axioma C_4*** existe uma única semirreta $\overrightarrow{BF}$ no lado oposto de $\overleftrightarrow{AB}$ em relação a C tal que $\angle BAC \cong \angle ABF$. Existe um único ponto D em $\overrightarrow{BF}$ tal que $AC \cong BD$ (***Axioma C_1***).

Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABF$ são ângulos alternos internos cortados por uma transversal $\overleftrightarrow{AB}$ nas retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$. Uma vez que esses ângulos são congruentes, podemos concluir que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas (Teorema 4.1 – Ângulos Alternos Internos). Como C e D estão em lados opostos da $\overleftrightarrow{AB}$ sabemos que o segmento $\overline{CD}$ intersecta a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em um ponto que chamaremos E. Como E está no segmento $\overline{CD}$, temos $C * E * D$.

Sabemos também que E está na reta $\overleftrightarrow{AB}$, assim temos umas das seguintes situações: $E = A$, ou $E = B$, ou, se eles são três pontos distintos, $E * A * B$, ou $A * B * E$ ou $A * E * B$ (***Axioma B***$_2$). Assim, se $E = A$, temos $C * A * D$, e D está em ambos $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ o que contradiz a afirmação de que essas duas retas são paralelas. Se $E = B$, de maneira similar, chegamos a uma contradição.

Se $E*A*B$, como E e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, a reta $\overleftrightarrow{BD}$ é paralela à $\overleftrightarrow{AC}$, a reta $\overleftrightarrow{BD}$ não intersecta $\overleftrightarrow{AC}$, então B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ (Definição 2.4) então, E e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. (Corolário 3.1). Como a intersecção das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$ é o ponto C, temos $E * C * D$, que é uma contradição ao ***Axioma B***$_1$ pois já temos $C * E * D$; se $A * B * E$: Os mesmos argumentos podem ser utilizados.

Se $A*E*B$, é o caso restante. Os ângulos $\angle CEA$ e $\angle DEB$ são opostos pelo vértice, portanto, congruentes, pela Proposição 3.13, como $\overline{DB} \cong \overline{AC}$ e $\angle BDE \cong \angle ACD$ ($\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$) vem do caso ALA que $\triangle EBD \cong \triangle EAC$. Por definição de triângulos congruentes temos $\overline{AE} = \overline{EB}$. Isto, juntamente com $A * E * B$ implica que E é um ponto médio de AB.

Unicidade

Suponha que um segmento $\overline{AB}$, tenha dois pontos médios, que chamaremos M_1 e M_2, e apenas por uma questão de conveniência, digamos que estão ordenados como $A * M_1 * M_2 * B$. Como $A * M_1 * M_2$, $AM_1 < AM_2$. Como $M_1 * M_2 * B$ *, $BM_2 < BM_1$. Mas M_2 é um ponto médio, assim $AM_2 \cong BM_2$.

Segue que $AM_1 < AM_2 \cong BM_2 < BM_1$, o que implica que $AM_1 < BM_1$ (por transitividade), que contradiz o fato de que M_1 é um ponto médio. Assim, um segmento não pode ter dois pontos médios distintos, logo o ponto médio de um segmento é único.
□

O resultado é análogo para ângulos.

Proposição 4.3. *Todo ângulo tem uma única bissetriz. (Fig. 4.8)*

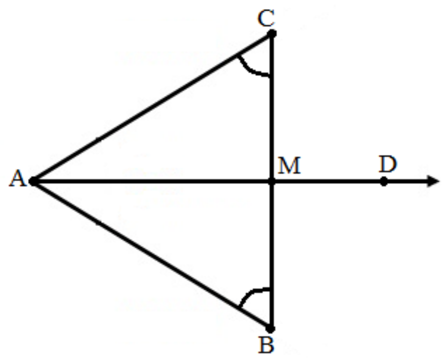

Figura 4.8: Bissetriz de um ângulo

Proposição 4.4. *Se em um $\triangle ABC$ temos $\angle B \cong \angle C$, então $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.*

Prova:

Como na Figura 4.8, seja $\overrightarrow{AD}$ a bissetriz do $\angle BAC$ tal que $\overrightarrow{AD}$ intersecte o lado $\overline{BC}$ no ponto M, em que $\angle BAM \cong \angle CAM$. Em vista disto e como $\angle B \cong \angle C$ (dado), e $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (lado comum), temos que $\triangle BAM \cong \triangle CAM$. Portanto $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. $\square$

Proposição 4.5. *Em um triângulo $\triangle ABC$, o maior ângulo é oposto ao maior lado e o maior lado é oposto ao maior ângulo, isto é, $\overline{AB} > \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle ACB > \angle ABC$.(Figura 4.9)*

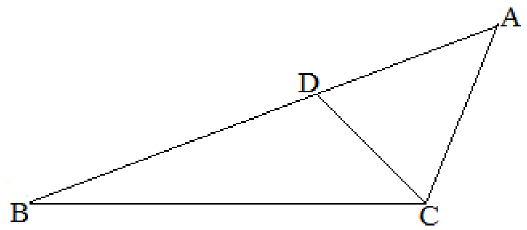

Figura 4.9: Triângulo $\triangle ABC$ com maior ângulo oposto ao maior lado

Prova:

Dado um $\triangle ABC$ em que $\overline{AB} > \overline{AC}$, devemos mostrar que $\angle ACB > \angle ABC$.

Seja D um ponto no lado AB tal que $AD \cong AC$, de modo que o $\triangle ACD$ é isósceles. Logo $\angle ACD \cong \angle ADC$. Mas $\angle ADC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle CBD$ (Teorema 4.2), logo, $\angle ADC > \angle ABC$. Como D está no interior do $\angle ACB$, temos que $\angle ACB > \angle ACD$. Portanto, num $\triangle ABC$ em que $AB > AC$, temos que $\angle ACB > \angle ABC$.

Devemos mostrar agora que dado um $\triangle ABC$ em que $\angle ACB > \angle ABC$, temos, $AB > AC$.

Assumamos, por absurdo, que $\overline{AB} \leq \overline{AC}$, isto é $\overline{AB} < \overline{AC}$ ou $\overline{AB} = \overline{AC}$. Se $AB < AC$, então $\angle ACB < \angle ABC$ (Teorema 4.2). Isso contradiz o fato de que $\angle ACB > \angle ABC$, portanto, $\overline{AB} < \overline{AC}$ é falso. Se $\overline{AB} = \overline{AC}$, então $\angle ACB \cong \angle ABC$. Isso também contradiz o fato que $\angle ACB > \angle ABC$, portanto, $\overline{AB} = \overline{AC}$ é falso. Logo, o que assumimos, $\overline{AB} \leq \overline{AC}$ é falso. Assim, num $\triangle ABC$ em que $\angle ACB > \angle ABC$, temos, $\overline{AB} > \overline{AC}$. $\square$

Proposição 4.6. *Dados $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\angle ABC < \angle DEF$ se, e somente se $\overline{AC} < \overline{DF}$.(Figura 4.10)*

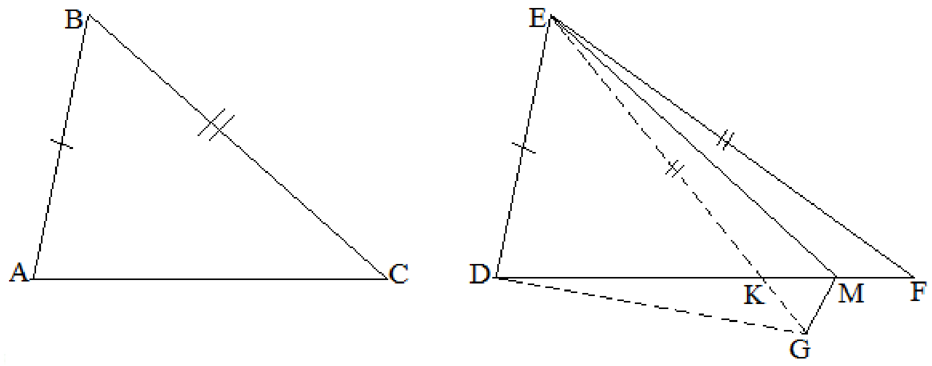

Figura 4.10: Dados $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\angle ABC < \angle DEF \Leftrightarrow \overline{AC} < \overline{DF}$

Prova:

Inicialmente vamos mostrar se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\angle ABC < \angle DEF \Rightarrow \overline{AC} < \overline{DF}$.

Pela Definição 3.7, se, $\angle ABC < \angle DEF$, então existe um ponto G no mesmo lado de $\overrightarrow{EF}$ com relação a D tal que $\angle ABC \cong \angle DEG$ e além disso, pelo ***Axioma C_1***, podemos escolher C tal que $\overline{BC} \cong \overline{EG}$. Então $\triangle ABC \cong \triangle DEG$ por LAL (***Axioma C_6***). Em particular, $\overline{AC} \cong \overline{DG}$. Como G é interno ao $\angle DEF$ e $\angle DEG < \angle DEF$, então a semirreta $\overrightarrow{EG}$ intersecta $\overleftrightarrow{DF}$ em um único ponto, digamos K.

Seja M o ponto sobre $\overleftrightarrow{KF}$, tal que $\overrightarrow{EM}$ seja a bissetriz do $\angle GEF$. Observe que $\triangle GEM \cong \triangle FEM$, por LAL, de onde segue $\overline{GM} \cong \overline{MF}$. Agora se $G \neq K$, os pontos D, G e M são não colineares e, pela desigualdade triangular no $\triangle DGM$, temos: $\overline{DG} < \overline{GM} + \overline{MD}$. Se $K = G$, então, $D * G * M$, e $\overline{MD} > \overline{DG}$, e assim, $\overline{DG} < \overline{GM} + \overline{MD}$. Em ambos os casos temos $\overline{DG} < \overline{GM} + \overline{MD} = \overline{DF}$. Como, por serem lados correspondentes de triângulos congruentes $\triangle ABC \cong \triangle DEG$ pelo caso ALA, $\overline{DG} \cong \overline{AC}$ decorre, $\overline{AC} < \overline{DF}$

Mostraremos agora que se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} < \overline{DF} \Rightarrow \angle ABC < \angle DEF$.

Como $\overline{AC} < \overline{DF}$, existe um ponto G no mesmo lado de $\overline{EF}$ com relação a D tal que $\angle ABC \cong \angle DEG$. Como G é interno ao $\angle DEF$ e $\angle DEG < \angle DEF$ e $\angle DEG \cong \angle ABC$, então pela Proposição 3.9(iii), $\angle ABC < \angle DEF$. $\square$

Lema 4.1. ***(Desigualdade Triangular)*** *Se A, B, e C são três pontos não colineares, então $AC < AB + BC$.*

Prova:

Existe um único ponto D tal que $A * B * D$ e $BD \cong BC$. Então, $\angle BCD \cong \angle BDC$, pois são os ângulos da base de um triângulo isósceles (Figura 4.11).

$AD = AB + BD$ (Axioma da medida (3)) e $BD = BC$ (Axioma da medida (2)); substituindo resulta $AD = AB + BC$. Como a semirreta $\overrightarrow{CB}$ está entre o $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CD}$, divide o $\angle ACD$; então, $\angle ACD > \angle BCD$ (Pela definição 3.7 e Proposição 3.10) e, como $\angle BCD \cong \angle BDC = \angle ADC$, temos que, $\angle ACD > \angle ADC$.

Mas, pela Proposição 4.4, $AD > AC$. Portanto, $AB + BC > AC$ (Axioma da medida (3)). $\square$

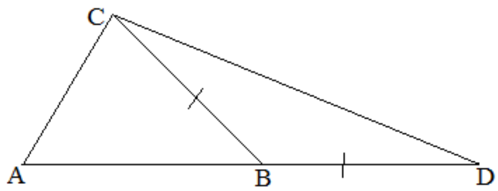

Figura 4.11: Desigualdade Triangular

Teorema 4.3. ***(A Desigualdade Poligonal)***. *Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$, são quaisquer pontos ($n > 1$), então $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n$*

Prova:

Vamos provar por indução em n, o número de pontos.

Começamos com $n = 3$. Se A_1, A_2, A_3 são três pontos não colineares, então, a desigualdade triangular nos dá

$$A_1A_2 + A_2A_3 < A_1A_3$$

Se A_1, A_2, A_3 estão alinhados, então pelo ***Axioma B***$_3$, um e somente um ponto situa-se entre os outros dois.

Se $A_1 * A_2 * A_3$, então, pelo Axioma de medida,

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3$$

Se $A_1 * A_3 * A_2$, então, pelo Axioma de medida,

$$A_1A_3 < A_1A_2 < A_1A_2 + A_2A_3$$

De maneira similar mostra-se os demais casos.

Agora, suponha que para $A_1, \cdots, A_n$, temos

$$A_1A_n \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \tag{4.1}$$

Precisamos mostrar que para $A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}$, temos

$$A_1A_{n+1} \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_{n+1}$$

Sabemos que se temos quaisquer três pontos A_1, A_n, A_{n+1}, então

$$A_1A_{n+1} \leqslant A_1A_n + A_nA_{n+1}$$

Então, usando a equação 4.1 temos

$$\begin{aligned} A_1A_{n+1} &\leqslant A_1A_n + A_nA_{n+1} \\ &\leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1} \end{aligned}$$

O resultado segue pelo teorema da indução finita. □

4.2 Quadriláteros de Saccheri

Corolário 4.3. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos de um triângulo é menor do que* 180^o.

Prova:

A medida de um ângulo externo de um triângulo é maior que a medida de qualquer ângulo interno não adjacente. Considere um ângulo externo e o adjacente, cuja soma é 180^o. Substituindo na desigualdade dada acima, segue o resultado. □

O seguinte teorema, muito importante, também exige o axioma de Arquimedes para a sua prova.

Teorema 4.4. ***(Saccheri-Legendre)***. *A soma das medidas dos três ângulos em qualquer triângulo é menor ou igual a* 180^0. *(Figura 4.12)*

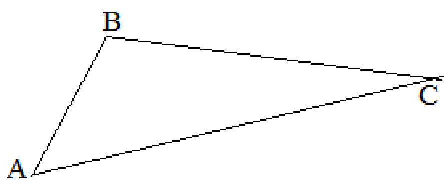

Figura 4.12: Triângulo $\triangle ABC$

Prova:

Vamos assumir o contrário, ou seja, que temos um triângulo $\triangle ABC$ em que $(\angle A)^0 + (\angle B)^0 + (\angle C)^0 > 180^0$. Portanto, há um $x \in \mathbb{R}^+$, de modo que $(\angle A)^0 + (\angle B)^0 + (\angle C)^0 = 180^0 + x^0$.

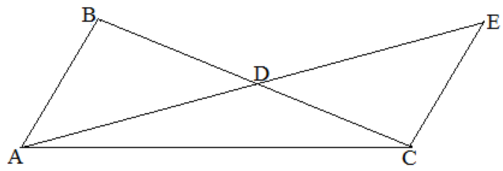

Figura 4.13: Teorema de Saccheri-Legendre

Sejam D o ponto médio de $\overline{BC}$ e E o único ponto na semirreta $\overrightarrow{AD}$, diferente de D, tal que $\overline{DE} \cong \overline{AD}$. Então por LAL, $\triangle BAD \cong \triangle CED$. Isto faz

$\angle B \cong \angle DCE$, $\angle E \cong \angle BAD$.

Assim,

$$\begin{aligned}(\angle A)^0 + (\angle B)^0 + (\angle C)^0 &= ((\angle BAD)^0 + (\angle EAC)^0) + (\angle B)^0 + (\angle ACB)^0 \\ &= (\angle E)^0 + (\angle EAC)^0 + (\angle DCE)^0 + ((\angle ACD)^0) \\ &= (\angle E)^0 + (\angle A)^0 + (\angle C)^0\end{aligned}$$

Então, $\triangle ABC$ e $\triangle ACE$ têm a mesma soma dos ângulos, mesmo que não sejam congruentes. Observe que:

$$(\angle BAE)^0 + (\angle CAE)^0 = (\angle BAC)^0,$$

daí , consequentemente

$$(\angle CEA)^0 + (\angle CAE)^0 = (\angle BAC)^0.$$

É impossível para os ângulos $\angle CEA$ e $\angle CAE$ ter a medida do ângulo maior que $\frac{1}{2}\angle(BAC)^0$, assim pelo menos um dos ângulos tem a medida menor ou igual $\frac{1}{2}\angle(BAC)^0$.

Consequentemente, há um triângulo $\triangle ACE$, de modo que a soma dos ângulos é $180^0 + x^0$, mas no qual um ângulo tem a medida menor ou igual a $\frac{1}{2}\angle A^0$.

Repita esta construção para outro triângulo com soma de ângulos $180^0 + x^0$, mas no qual a medida de um ângulo é menor ou igual a $\frac{1}{4}\angle A^0$. Agora existe $n \in \mathbb{Z}^+$, de modo que

$$\frac{1}{2^n}\angle A^0 \leqslant x^0,$$

pela propriedade arquimediana dos números reais. Deste modo, depois de um número finito de iterações sobre a construção dada, obteremos um triângulo com soma $180^0 + x^0$, em que um ângulo têm a medida menor ou igual a $\frac{1}{2^n}\angle A^0 \leqslant x^0$.

Então, os outros dois ângulos deverão ter a soma maior do que 180^0 contradizendo o corolário 4.3. □

Podemos generalizar o teorema Saccheri-Legendre para outros polígonos. Por exemplo, vamos provar que a soma dos ângulos de um quadrilátero $ABCD$ é, no máximo, 360^o.

Definição 4.4. *Dado quatro pontos A, B, C e D, de tal forma que estejam no mesmo plano, mas três deles não sejam colineares. Se os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ *intersectam-se apenas nas extremidades, então a figura assim formada é chamada de* ***quadrilátero****, e é denotada por* $\square ABCD$.

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ são os lados do $\square ABCD$, e os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ são as diagonais. Os ângulos de $\square ABCD$ são $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ e $\angle DAB$; eles são muitas vezes denotado brevemente como $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle A$. Se todos os quatro ângulos são ângulos retos, então, o quadrilátero é um retângulo.

Na tentativa de se provar a existência de retângulos com base nos pressupostos de que dispomos, até agora, sem o uso do postulado das paralelas, Saccheri chegou à conclusão de que é impossível provar que existem retângulos. Tentando de forma plausível, a construção de um retângulo, isto é, baseado nos axiomas assumidos e suas consequências, foi conseguido o que chamamos um ***quadrilátero de Saccheri***.

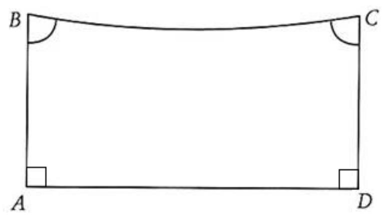

Figura 4.14: Quadrilátero de Saccheri

Definição 4.5. ***(Quadrilátero de Saccheri)****. Um quadrilátero ABCD é um quadrilátero de Saccheri se* $\angle A$ *e* $\angle D$ *são ângulos retos, B e C estão no mesmo lado da* $\overleftrightarrow{AD}$ *e* $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. *O segmento* $\overline{AD}$ *é chamado base e* $\overline{BC}$ *é chamado topo. Os ângulos da base são* $\angle A$ *e* $\angle D$*; e* $\angle B$ *e* $\angle C$ *são os ângulos do topo, conforme Figura 4.14.*

Teorema 4.5. *As diagonais de um quadrilátero de Saccheri são congruentes.*

Prova:
Por LAL, temos $\triangle BAD \cong \triangle CDA$. Portanto $BD \cong AC$. $\square$

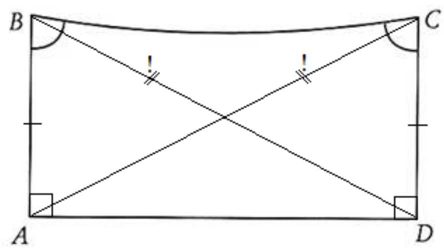

Figura 4.15: Diagonais de um quadrilátero de Saccheri

Teorema 4.6. *Seja* $\square ABCD$ *e* $\square EFGH$ *dois quadriláteros de Saccheri, com bases* $\overline{AD}$ *e* $\overline{EH}$. *Se* $\overline{EH} \cong \overline{AD}$ *e* $\overline{EF} \cong \overline{AB}$, *então* $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, $\angle F \cong \angle B$ *e* $\angle G \cong \angle C$.

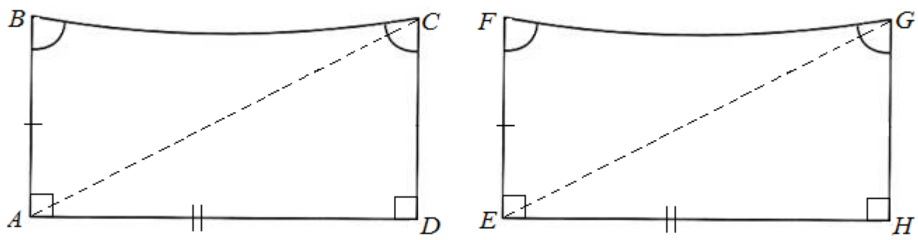

Figura 4.16: Congruência de dois quadriláteros de Saccheri

Prova:

Pela Definição 4.5, que diz que os ângulos da base de um quadrilátero de Saccheri são retos, e pela Proposição 3.13(ii), temos que $\angle A \cong \angle E$ e, $\angle D \cong \angle H$, e, ainda pela Definição 4.5, temos que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{EF} \cong \overline{HG}$, então, pelo ***Axioma*** $\boldsymbol{C}_6$, $\triangle ACD \cong \triangle EGH$. Segue que $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, $\angle ACD \cong \angle EGH$ e $\angle DAC \cong \angle HEG$.

Como $\angle BAD \cong \angle FEH$ e o ponto C se encontra no interior do $\angle BAD$ e o ponto G se encontra no interior do $\angle FEH$, e sabemos que $\angle CAD \cong \angle GEH$, então pela Proposição 3.17 $\angle BAC \cong \angle FEG$ e $\angle CDA \cong \angle GHE$. Logo $\triangle BAC \cong \triangle FEG$ por LAL (***Axioma*** $\boldsymbol{C}_6$). Segue que $\angle B \cong \angle F$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$. $\square$

Teorema 4.7. *Em todo quadrilátero de Saccheri, os ângulos do topo são congruentes.*

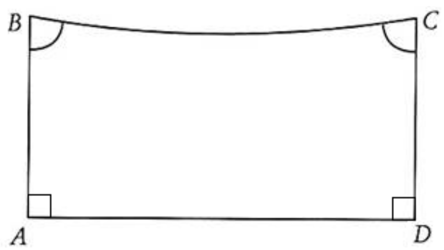

Figura 4.17: Ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri

Prova:

Do Teorema 4.5 segue que as diagoanis $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes. Do caso LLL, para congrência de triângulos vem que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$ também são congruentes. Portanto $\angle B \cong \angle C$. $\square$

Teorema 4.8. *Em qualquer quadrilátero de Saccheri, o topo é congruente ou maior do que a base, ou seja, dado um quadrilátero de Saccheri* $\square A_1B_1B_2A_2$*, com base* $\overline{A_1A_2}$*. Então,* $\overline{B_1B_2} \geqslant \overline{A_1A_2}$.

Prova:

Vamos configurar uma sequência de n quadriláteros de Saccheri, lado a lado a começar por um dado:

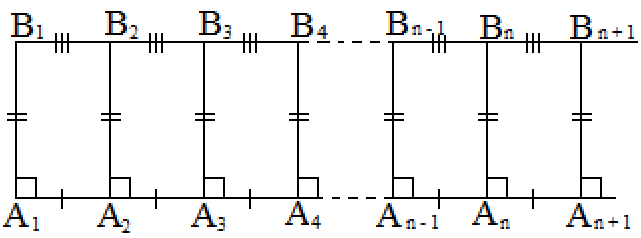

Figura 4.18: Em um quadrilátero de Saccheri, o topo é maior ou igual a base

Em que $A_3, A_4, \cdots, A_{n+1}$ são pontos da reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, na ordem indicada em $\overleftrightarrow{A_1A_2}$; os ângulos $\angle B_2A_2A_3$, $\angle B_3A_3A_4$, são ângulos retos,

$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_{n+1}$

e

$A_2B_2 = A_3B_3 = \cdots = A_nB_n = A_{n+1}B_{n+1}$

Pelo teorema 4.6, temos

$B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{n-1}B_n = B_nB_{n+1}$

Não sabemos se os pontos $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$, são colineares, mas, pela desigualdade poligonal (Teorema 4.3) sabemos que:

$B_1B_{n+1} \leqslant B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{n-1}B_n + B_nB_{n+1}$

Uma vez que todas as distâncias na reta são iguais a B_1B_2, temos $B_1B_{n+1} \leqslant n.B_1B_2$

Pelo mesmo princípio, obtemos

$A_1A_{n+1} \leqslant A_1B_1 + B_1B_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} \leqslant A_1B_1 + n.B_1B_2 + A_1B_1$

Como, $A_1A_{n+1} = n.A_1A_2$, temos

$n.A_1A_2 \leqslant n.B_1B_2 + 2.A_1B_1$

e esta conclusão é válida para todo n.

Agora suponha que nosso teorema seja falso. Então $A_1A_2 > B_1B_2$, de modo que $A_1A_2 - B_1B_2$ é um número positivo. Obviamente, $2.A_1B_1$ é um número positivo. Seja

$\varepsilon = A_1A_2 - B_1B_2$ e $M = 2.A_1B_1$.

Então, $\varepsilon > 0$ e $M > 0$, mas $n\varepsilon \leqslant M$ para todo inteiro positivo n. Isto contradiz o postulado de Arquimedes, e assim completa-se a prova. $\square$

Referências

[1] Greenberg, M.J.: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*. New York, N.Y.: W.H.Freeman and Company, 1993.

[2] Moise, E.E.: *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. New York, N.Y.: Addison-Wesley Publ. Comp. Inc., 1974.

[3] Euclides *Os elementos. Tradução e intorudução de: Irineu Bicudo*. 1^a edição. São Paulo. Editora UNESP, 2009.