Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Parábola e suas Aplicações

Adriano Almeida Cerqueira

Salvador - Bahia
Abril de 2015

Parábola e suas Aplicações

Adriano Almeida Cerqueira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva.

Parábola e suas Aplicações

Adriano Almeida Cerqueira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva (Orientadora)
UFBA

Prof. Dr. Antonio Teófilo Ataíde do Nascimento
UNEB

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha
UFBA

Dedico este trabalho a minha mãe, Joselita, que tanto lutou pela minha educação e aos meus filhos Lucas e Daniel que pacientemente sacrificaram seus sábados de lazer

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva pela paciência e compromisso na execução deste trabalho e pela assistência durante todo o curso, ao Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos por suas orientações extra curriculares aos colegas da turma de 2015 e ao baixo clero que tanto colaborou para a conclusão deste curso.

Minha vida que não me ama, minha amada que nunca vai me amar...seduzo as duas. "
Jack Kerouac

Resumo

Esse trabalho surgiu da percepção da necessidade de se modificar o olhar sobre o estudo das parábolas no Ensino Médio, partindo da premissa de que elas já fazem parte da vida dos alunos, não havendo, portanto, nenhum obstáculo pedagógico para a antecipação do conteúdo já no 1º ano, e não no 3º, como consta na matriz curricular do MEC, no que se refere ao ensino de Cônicas.

Para tanto, abordamos o tema de forma prática, sugerindo aos Professores de Matemática ações que prestigiem o conhecimento prévio dos alunos, suas habilidades e a construção do lugar geométrico utilizando apenas régua e compasso, uma vez que é possível perceber a familiarização dos educandos com o conteúdo por se mostrar presente em diversas atividades do seu dia a dia. Além disso, o fato de já possuírem no 1º ano do Ensino Médio o domínio de conteúdos que são pré-requisitos para o estudo das parábolas, como Geometria Plana, por exemplo, facilita o processo de construção de novas possibilidades para abordar o tema em questão.

Palavras chaves: Cônicas, Construções e Geometria Plana.

Abstract

This paper arose from the perception of the need to modify the way of looking to the study of the parables in high school, on the premise that they are already part of students' lives, with no therefore no pedagogical obstacle to the anticipation of the subject already in 1st year, and not on the 3rd, as stated in MEC curriculum, with regard to the teaching of conics.

Therefore, we approach the subject in a practical way, suggesting to the Math Teachers to focus on the students' prior knowledge skills and the construction of locus by using ruler and compass only, since it is possible to realize the familiarity of students with the content since it is present in various activities of their daily life. In addition, the fact that they already have, at this point of high school, the mastery of prerequisites issues for the study of the parables, as plane geometry, for example, which facilitates the construction process to approach the issue concerned.

Key words: Parables, Conics, Construction and Plane Geometry.

Conteúdo

Introdução

As cônicas fazem parte do cotidiano dos alunos desde muito cedo. Uma bola chutada descreve uma parábola, todos já conhecem as antenas parabólicas, os faróis de carro e as lanternas usam espelhos parabólicos; a iluminação da cadeira de um dentista tem formato elíptico, sem contar as várias aplicações em arquitetura que podemos admirar. E ainda hoje é comum se fazer apenas estudos analíticos das cônicas, através da fórmula da distância entre dois pontos.

A matriz curricular do MEC sugere que as cônicas sejam vistas pelos alunos do terceiro ano do ensino médio como um conteúdo da geometria analítica. Porém, estes alunos já têm contatos com as parábolas desde o primeiro ano do ensino médio, quando aprendem que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola ou quando o Professor de Física mostra que a trajetória de um objeto em movimento oblíquo, o arremesso de uma bola de basquete, por exemplo, descreve uma parábola.

O presente trabalho possibilita o uso e o estudo das parábolas desde o primeiro ano do ensino médio e nossa proposta apresenta como inovação a antecipação da abordagem das parábolas, utilizando-se da Geometria Plana para demonstração das propriedades por se tratar de um pré-requisito de amplo conhecimento por parte dos alunos. Por outro lado, a Geometria Analítica ainda é algo novo e complexo mesmo para o aluno do terceiro ano e não é recomendada pelo PCN para os alunos das séries iniciais. Ressalvo que o capítulo 2 é fonte de consultas para os professores e não devem ser trabalhados com os alunos iniciantes do ensino médio.

Nossa abordagem tem por objetivos desenvolver ferramentas para que o Professor de Matemática seja capaz de definir e caracterizar as parábolas desde o início do ensino médio para uma melhor compreensão dos educandos e que, diante de uma pergunta comum e trivial, como: "Professor, o que é uma parábola? ", o Professor não se limite a frustrar o aluno com a seguinte resposta: "no terceiro ano você vai saber o que é uma parábola" ou com um desenho apenas, responder: "isto é uma parábola". Além disso, que seja capaz de buscar significar este conteúdo matemático através das suas aplicações em outras áreas do conhecimento e no nosso dia a dia. Podendo utilizar para a isso a citação de algumas curiosidades sobre o tema, como por exemplo, a lenda de Arquimedes que incendiou uma frota marítima em guerra com um grande espelho parabólico, um forno parabólico capaz de chegar aos incríveis $3500^{\circ}C$ e uma calculadora parabólica, facilitando assim, uma relação interdisciplinar, dialogando com outras disciplinas, em especial com a Física, que muito se utiliza das cônicas, especificamente, falaremos das parábolas. Vale ressaltar ainda que o mundo hoje discute as questões energéticas buscando dispor de energia limpa e o sol talvez seja atualmente a principal fonte desta energia, enquanto que os receptores parabólicos são muito eficientes para captar energia solar.

Destaco ainda que neste trabalho vamos utilizar a notação AB para representar o segmento de extremidades nos pontos A e B, e $\overline{AB}$ para representar a distância entre os pontos A e B, ou seja, $dist(A, B) = \overline{AB}$.

Assim ficou organizado este trabalho:

No capítulo 1, apresento um breve relato histórico de como surgiu as cônicas, do seu início acidental quando Menaecmus trabalhava no problema da duplicação de um cubo, passando por resultados importantes apresentados por Apolônio e Euclides até os resultados obtidos por Fermat. Os dados biográficos apresentados foram extraídos de Boyer [5].

No capítulo 2, faço um estudo analítico definindo a parábola e seus elementos, determinando suas equações de acordo com o eixo focal. Além disso, transcrevo sobre as seções cônicas, fazendo uma análise a partir da equação geral e explorando a excentricidade das cônicas, com ênfase na parábola. As definições e demonstrações presentes neste capítulo foram apresentadas por Alves [2], Lehman [3] e Hellmeister [4].

No capítulo 3, mostro como Wagner [1] e Alves [2] constroem parábolas apenas os conhecimentos da geometria plana, régua e compasso. Mostro ainda uma construção usando régua e barbante apresentado por Silva [10].

No capítulo 4, enuncio e demonstro o teorema de Poncelet que justifica a propriedade refletora da parábola. Os dados biográficos apresentados foram extraídos de Wagner [1] e Alves [2].

No capítulo 5, apresento aplicações da parábola em objetos utilizados em nosso cotidiano como as lanternas ou antenas parabólicas e também em situações interessantes como obras arquitetônicas. Os dados biográficos apresentados neste capitulo foram extraídos de Talavera [7] e Sato [8].

No capítulo 6, apresento algumas curiosidades na utilização da parábola como a fantástica lenda de Arquimedes, um engenhoso pireliófero e uma calculadora parabólica. Os dados biográficos apresentados foram extraídos de Malagutti [6], Sato [8] e Rodrigues [9].

No capítulo 7, apresento uma sequência passo a passo para todas as construções citadas neste trabalho utilizando o software GeoGebra e finalmente, no capitulo 8, faço as considerações finais sobre este trabalho.

Capítulo 1

Relatos Históricos

Enquanto egípcios e babilônios ainda produziam textos em papiro e cuneiforme por muitos séculos após 800 $A.C.$, os gregos Tales de Mileto $(624 - 548$ $A.C.$ aproximadamente) e Pitágoras de Samos $(580 - 600$ $A.C.$ aproximadamente) buscavam se desenvolver a partir da aplicação de elementos de outras culturas.

Tales e Pitágoras foram os pais da Matemática grega, mas esta escola teve seu apogeu no período denominado "Idade Áurea" quando a tríade Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga organizaram e expandiram o conhecimento matemático da época.

Foi Menaecmus $(380 - 320$ $A.C.)$ o primeiro a avançar nos estudos das cônicas, enquanto trabalhava na solução do clássico problema da duplicação do cubo, ele descobriu as curvas que hoje chamamos de seções cônicas. Posteriormente Aristeu e Euclides também contribuíram com resultados importantes, mas foi Apolônio de Perga $(262 - 190$ $A.C.)$ quem aperfeiçoou e determinou o que temos hoje sobre o tema.

Para Menaecmus, Aristeu e Euclides cada cônica era originada a partir da secção de um cone circular reto de uma folha por um plano perpendicular a uma geratriz do cone. Obtendo três curvas distintas dependendo da seção meridiana do cone (Figura 1.1) .

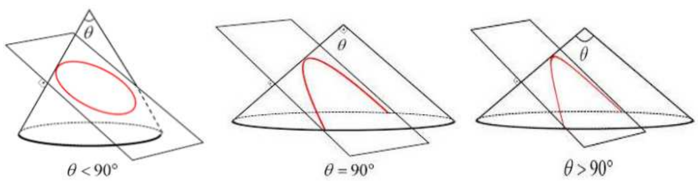

Figura 1.1: http://panambi-egef.blogspot.com.br/2013/12/estudo-da-geometria-analitica.html

Apolônio conseguiu mostrar que a partir de um único cone poderíamos obter qualquer uma das cônicas variando apenas a inclinação do plano de interseção.(Figura 1.2) . Foi ele também o responsável pelo cone de duas

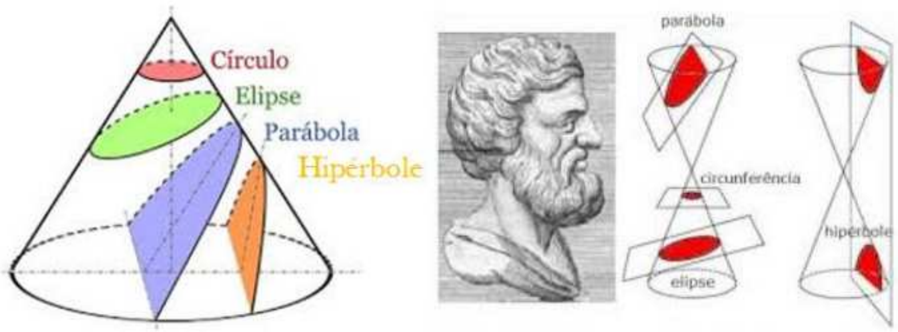

Figura 1.2: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/05/apolonio-de-perga.html

folhas e consequentemente do formato atual da hipérbole com dois ramos; Além disso, o mesmo as batizou de parábola, elipse e hipérbole. E não parou por aí, Apolônio ainda estudou as retas tangentes e normais de uma cônica. As descobertas de Apolônio sobre as cônicas foram registradas em sua obra prima "seções cônicas", composta originalmente por oito volumes e aproximadamente 400 proposições. Da obra original sete volumes foram recuperados, quatro escritos em grego e outros três traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra (826 a 901), no século XIX, mas infelizmente o oitavo volume foi perdido. Vale destacar que os três primeiros volumes são baseados em registros de Euclides. Em 1710 Edmund Halley traduziu os sete volumes para o latim e desde então todas as traduções modernas são baseadas neste trabalho.

É inquestionável a importância dos estudos de Apolônio sobre as cônicas para a astronomia, pois influenciou renomados cientistas como Ptolomeu e Kepler. E para a Matemática moderna, “Seções Cônicas” de Apolônio e “Os Elementos” de Euclides constituem o ápice da Matemática grega e ainda é base para os estudos em geometria.

Pierre de Fermat em sua obra Ad locos et solidos isagoge (1635), que define um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana relacionou os trabalhos de Apolônio com as teorias de equações de François Viète. Fazendo uso sistemático da linguagem algébrica introduzido por Viète para demonstrar os teoremas enunciados por Apolônio, ele combinou a álgebra com a natureza dos lugares geométricos e descobriu que todos os lugares geométricos estudados por Apolônio poderiam ser expressos por equações algébricas com duas variáveis. Os estudos de Fermat deram origem a sete equações que podem obter formas irredutíveis a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis, que atualmente escrevemos:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

dependendo dos valores dos coeficientes dessa equação, Fermat classificou os lugares geométricos obtidos em: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial.

Capítulo 2

Tratamento analítico da parábola

Neste capítulo faremos um estudo analítico das cônicas, mostrando que podemos determinar o tipo de cônica que cada equação geral representa a partir da excentricidade e do indicador associado a equação. Ainda que a parte final deste conteúdo não seja indicado para ser trabalhado em aulas do ensino médio é importante que o professor se aproprie do mesmo, dada sua relevância nos estudos das cônicas. Em função do objetivo deste trabalho, vamos fazer uma análise detalhada para as parábolas e as considerações referentes às outras cônicas podem ser verificadas em Lehman [3].

Definição 2.1 *Podemos definir a parábola de foco F e diretriz d ao conjunto $\wp$ dos pontos $P \in \pi$ que são equidistantes de F e de d, onde F é um ponto não pertencente à reta d com d e F pertencentes ao plano euclidiano π. Assim, $\wp = \{P \in \pi; dist(P, F) = dist(P, d)\}$.*

Se P é um ponto da parábola, F é o foco e l é a diretriz, temos $dist(P, F) = dist(P, l)$(Figura 2.1).

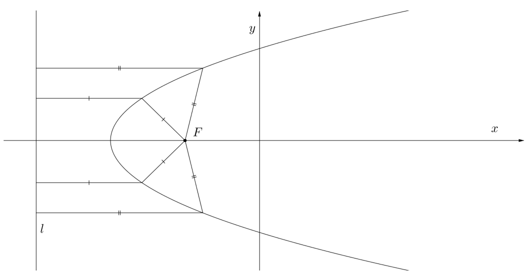

Figura 2.1: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Além do foco e da diretriz a parábola ainda tem: o vértice, que é o ponto da parábola mais próximo da diretriz; o eixo focal, reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz; raio focal, é o segmento que une um ponto qualquer da parábola e o foco; e as cordas, segmentos que unem dois pontos da parábola. Se este segmento contém o foco chamamos de corda focal e se esta corda focal for paralela a diretriz, chamamos de latus rectum(Figura 2.2)

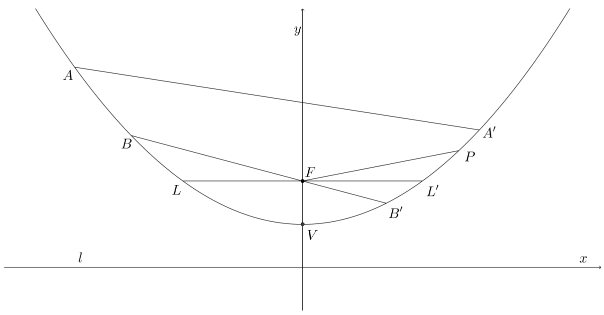

Figura 2.2: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

2.1 Equações de Parábolas

Faremos análises das equações de parábolas de acordo com o eixo focal

- Parábola de vértice na origem, $V(0,0)$, e eixo focal coincidindo com OX

  Seja $Q(x, y)$ um ponto da parábola(figura 2.3) .

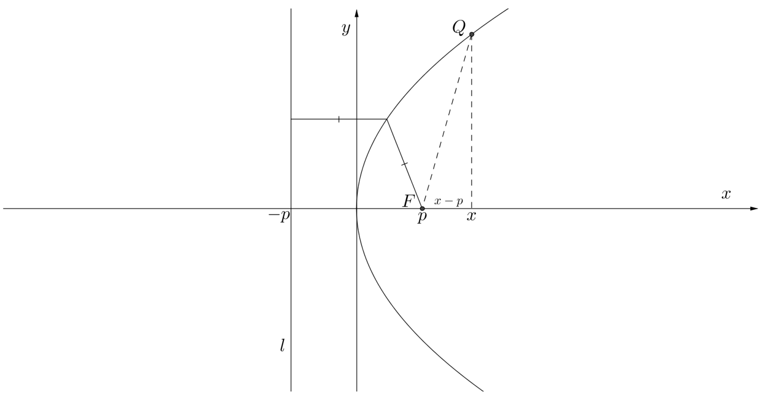

Figura 2.3: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Temos que o ponto Q satisfaz a equação

$$dist(Q,F) = dist(Q,l), \tag{2.1}$$

observe que

$$dist(Q,F) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \tag{2.2}$$

e

$$dist(Q,l) = |x+p| \tag{2.3}$$

substituindo 2.2 e 2.3 em 2.1, obtemos

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|, \tag{2.4}$$

elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado,

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \tag{2.5}$$

ou ainda,

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \tag{2.6}$$

ou equivalentemente

$$y^2 = 4px, \tag{2.7}$$

que é a equação da parábola de vértice na origem, $V(0,0)$ e eixo focal em OX.

- Parábola de vértice na origem, $V(0,0)$, e eixo focal coincidindo com OY

  Seja $Q(x,y)$ um ponto da parábola(figura 2.4).

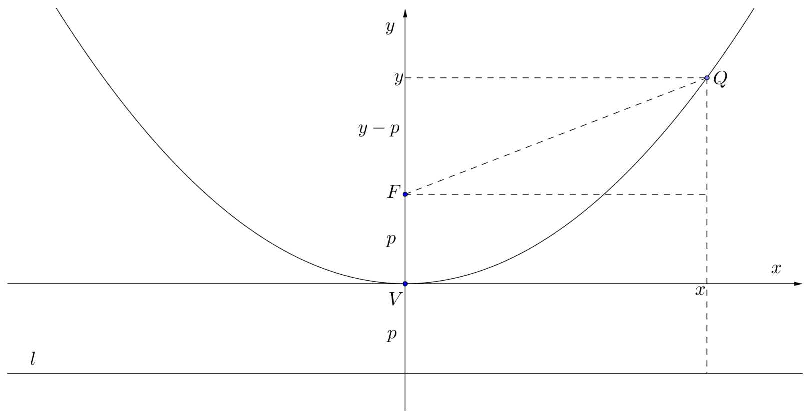

Figura 2.4: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Temos que o ponto Q satisfaz a equação

$$dist(Q, F) = dist(Q, l), \tag{2.8}$$

observe que

$$dist(Q, F) = \sqrt{(y-p)^2 + x^2} \tag{2.9}$$

e

$$dist(Q, l) = |y + p| \tag{2.10}$$

substituindo 2.9 e 2.10 em 2.8, obtemos

$$\sqrt{(y-p)^2 + x^2} = |y + p|, \tag{2.11}$$

elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado,

$$(y-p)^2 + x^2 = (y+p)^2 \tag{2.12}$$

ou ainda,

$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2 \tag{2.13}$$

ou equivalentemente

$$x^2 = 4py, \tag{2.14}$$

que é a equação da parábola de vértice na origem, $V(0,0)$ e eixo focal em OY.

- Parábola de vértice $V(h,k)$, e eixo focal paralelo ao eixo OX

  Fazendo uma translação de origem $O'(h,k)$, como na Figura 2.5, a equação da parábola em relação ao sistema $X'Y'$ é dada por

$$y'^2 = 4px' \tag{2.15}$$

.

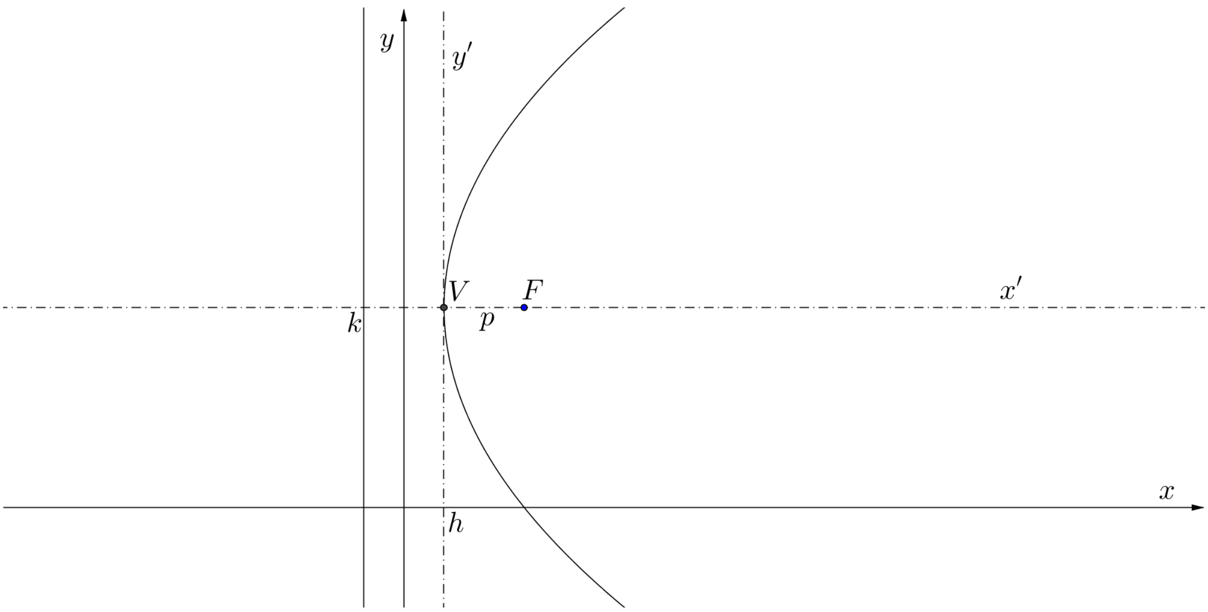

Figura 2.5: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Passando para o sistema XY, temos as equações de translação:

$$x' = x - h \tag{2.16}$$

e

$$y' = y - k \tag{2.17}$$

Substituindo 2.16 e 2.17 em 2.15 obtemos

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \tag{2.18}$$

que é a equação da parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo focal paralelo a OX

- Parábola de vértice $V(h,k)$, e eixo focal paralelo ao eixo OY

  Fazendo uma translação de origem $O'(h,k)$, como na Figura 2.6, a equação da parábola em relação ao sistema $X'Y'$ é dada por

$$x'^2 = 4py' \tag{2.19}$$

.

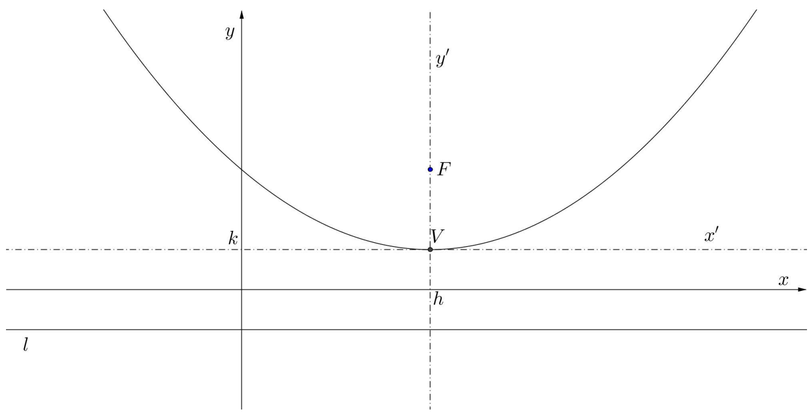

Figura 2.6: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Passando para o sistema XY, temos as equações de translação:

$$x' = x - h \tag{2.20}$$

e

$$y' = y - k \tag{2.21}$$

Substituindo 2.20 e 2.21 em 2.19 obtemos

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{2.22}$$

que é a equação da parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo focal paralelo a OY

2.2 Parábola obtida a partir da definição geral da seção cônica

Seja d uma reta fixa e F um ponto fixo não pertencente a referida reta. Seja P um ponto que se move no plano sem coincidir com o ponto F ou pertencer a reta d de tal forma que a razão entre a distância de P a F e a distancia de P a d seja constante. O ponto P define o lugar geométrico denominado de seção cônica. A reta fixa chamamos de diretriz, o ponto fixo de foco e a constante positiva representamos por e e chamamos de excentricidade.

A excentricidade é um parâmetro associado à cônica que mede o desvio desta cônica em relação a uma circunferência.

Sem perda de generalidades, vamos escolher o eixo OY como diretriz e um ponto do eixo OX diferente de $(0, 0)$ como foco. (Figura 2.7) .

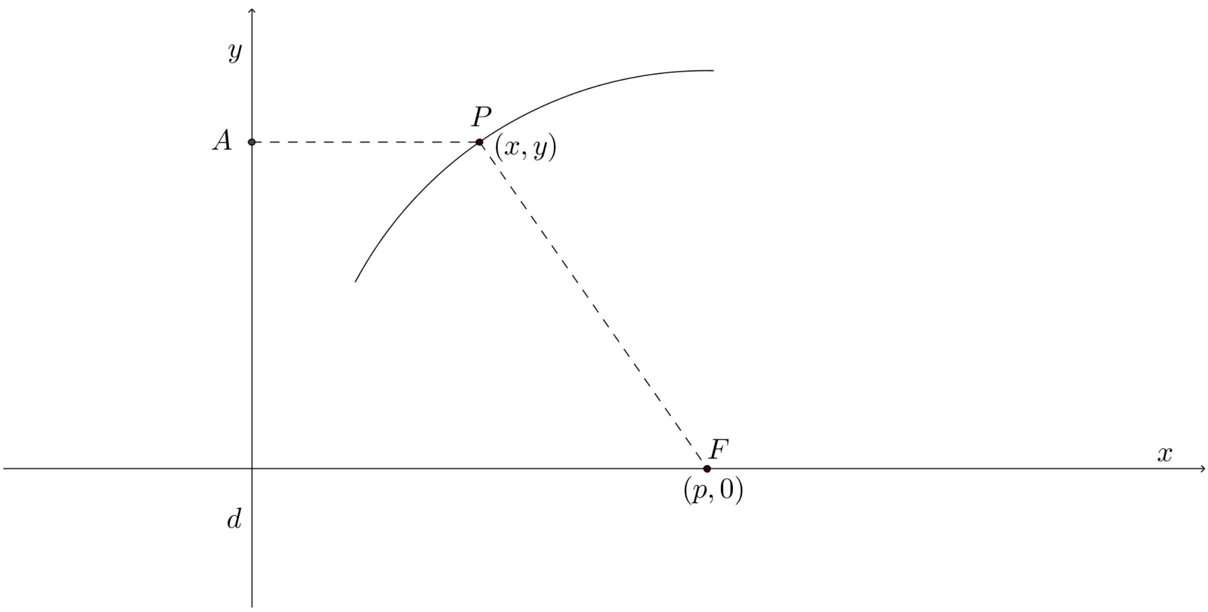

Figura 2.7: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

A distância de P a d é igual à distância de P ao ponto A. A constante positiva em questão é a excentricidade da seção cônica e vamos representar esta razão entre as distâncias por e, então:

$$e = \frac{dist(P, F)}{dist(P, A)} \tag{2.23}$$

Podemos expressar 2.23 analiticamente por:

$$e = \frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} \tag{2.24}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação 2.24, obtemos:

$$e^2 = \frac{(x-p)^2 + y^2}{x^2}, \tag{2.25}$$

que podemos reescrever como

$$(1-e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \tag{2.26}$$

Faremos uma análise da equação 2.26 a partir dos possíveis valores para a constante positiva e

• Se $e = 1$ então $1 - e^2 = 0$ e a equação se reduz a

$$-2px + y^2 + p^2 = 0, \tag{2.27}$$

ou seja,

$$y^2 = 2p(x - \frac{p}{2}) \tag{2.28}$$

que representa uma parábola cujo vértice é o ponto $(\frac{p}{2}, 0)$.

• Se $e \neq 1$ então $1 - e^2 \neq 0$ e a equação pode ser escrita

$$x^2 - \frac{2px}{1-e^2} + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{p^2}{1-e^2}, \tag{2.29}$$

completando os quadrados, obtemos

$$\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{1-e^2}, \tag{2.30}$$

ou equivalentemente,

$$\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}, \tag{2.31}$$

ou seja,

$$\frac{\left(x - \dfrac{p}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\dfrac{y^2}{1-e^2}}{\dfrac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1, \tag{2.32}$$

Ainda resta investigar dois subcasos que por não se tratar do objetivo deste trabalho, serão citados sem riqueza de detalhes.

Quando $e < 1$ temos que $1-e^2 > 0$ e ambos os denominadores no primeiro membro da equação 2.32 são positivos. Neste caso é possível mostrar que trata-se de uma elipse.

Quando $e > 1$ temos que $1-e^2 < 0$ e a fim de ter ambos os denominadores positivos, escrevemos a equação 2.32 na forma:

$$\frac{\left(x - \dfrac{p}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{\dfrac{y^2}{1-e^2}}{\dfrac{p^2e^2}{e^2-1}} = 1, \tag{2.33}$$

Neste caso é possível mostrar que trata-se de uma hipérbole.

Estes dois subcasos foram tratados com detalhes em Lehman [3]. O teorema que segue caracteriza a cônica segundo sua excentricidade.

Teorema 2.1 *Uma seção cônica é uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, conforme sua excentricidade seja igual a, menor que ou maior que a unidade.*

2.3 O indicador e a equação geral das cônicas

Fazendo a análise a partir da equação geral das cônicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.34}$$

E sem perda de generalidades, adotando $B = 0$, O que não representa nenhum problema, visto que tal fato é possível com uma mudança de coordenadas para termos os eixos da cônica paralelos aos eixos coordenados. Esta mudança de coordenada é devidamente demonstrada em Lehman [3]. Assim, obtemos:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.35}$$

Se $A = C = 0$ teremos uma reta de equação $Dx + Ey + F = 0$, que não é objeto de estudo neste trabalho.

Se $A.C \neq 0$, podemos dividir a equação 2.35 por A.C e teremos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0, \tag{2.36}$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = \frac{-F}{AC} \tag{2.37}$$

Completando os quadrados obtemos;

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4C^2A} + \frac{-F}{AC}, \tag{2.38}$$

que podemos reescrever

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AC^2F}{4A^2C^3} \tag{2.39}$$

Seja $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AC^2F$.
Para $M = 0$ obtemos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = 0 \tag{2.40}$$

que é uma cônica degenerada, particularmente um ponto, e também não é alvo deste trabalho.
Para $M \neq 0$, podemos escrever a equação 2.35 na forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1 \tag{2.41}$$

Como $AC \neq 0$ temos dois subcasos para analisar

1^0 caso: $AC > 0$
Desta forma A e C possuem o mesmo sinal, logo esta equação representa uma elipse de centro $\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C}\right)$ quando $M > 0$ e tem solução vazia quando $M < 0$.
2^0 caso: $AC > 0$
Desta forma A e C possuem sinais contrários, logo esta equação representa uma hipérbole.

Se $AC = 0$, com $A = 0$ ou $C = 0$.
Para $A = 0$ e $C \neq 0$ a equação 2.35 se escreve na forma $y^2+\frac{D}{C}x+\frac{E}{C}y+\frac{F}{C} = 0$, neste caso, se $D = 0$ a cônica degenera-se e se $D \neq 0$ a cônica é uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo das abcissas.
Analogamente, se $C = 0$ e $A \neq 0$ a cônica se degenera para $E = 0$ e é uma parábola de eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas para $E \neq 0$.
Por se tratar de um procedimento análogo vamos escolher apenas um dos casos para mostrar como chegar na equação de uma parábola a partir da equação geral das cônicas.
Vamos tomar o caso em que temos $A = 0$ e $C \neq 0$ e $D \neq 0$ e lembrar que inicialmente escolhemos um sistema de coordenadas conveniente, no qual $B = 0$. Neste caso a equação 2.35 se reduz a:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.42}$$

Como $C \neq 0$, podemos dividir a equação por C, obtendo:

$$y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0 \tag{2.43}$$

completando quadrado, temos

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2} + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0, \tag{2.44}$$

equivalentemente

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{-D}{C}x - \frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2} = 0 \tag{2.45}$$

como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{-D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right) \tag{2.46}$$

Que é a equação de uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo das abcissas e vértice

$$V = \left(\frac{-4C^2F + CE^2}{4C^2D}, \frac{-E}{2C} \right)$$

Na tabela que segue temos a classificação das cônicas de acordo com o Indicador, definido por $I = B^2 - AC$ ou conforme a excentricidade.

	$Parabola$	$Elipse$	$hiperbole$
$Indicador : I$	$I = 0$	$I < 0$	$I > 0$
$excentricidade : e$	$e = 1$	$0 < e < 1$	$e > 1$

Capítulo 3

Construções de Parábolas

Desde cedo o aluno do ensino médio se familiariza com o termo parábola, tem uma noção intuitiva do seu formato e é capaz até de associar tal curva ao gráfico de uma função quadrática. Porém, este mesmo aluno não conhece a definição, nem as características de uma parábola e nem consegue diferenciá-la de uma catenária ou do gráfico de uma função de grau 4, com coeficientes nulos, quando o expoente for ímpar. Apesar de ampla utilização no cotidiano do aluno, esta cônica é vista em aula apenas para ilustrar o gráfico de uma função quadrática ou descrever a trajetória de um móvel em movimento oblíquo.

Acreditando que esta abordagem tão superficial e elementar seja feita pelos professores de Matemática em função da falta de requisitos prévios dos alunos e da forma como tal cônica é apresentada com seus estudos e demonstrações ancorados na geometria analítica que, neste trabalho, vamos partir da definição desta cônica, sem o rigor da demonstração analítica, utilizando apenas a geometria plana e tendo como ferramentas apenas régua e compasso. Pretendemos de forma simples e clara mostrar por construção que tal definição é válida e mostrar algumas propriedades desta cônica que justificam a ampla utilização da mesma em nosso dia a dia.

De acordo com a definição 2.1 uma parábola de foco F e diretriz d é o conjunto $\wp$ dos pontos $P \in \pi$ que são equidistantes de F e de d, onde F é um ponto não pertencente à reta d com d e F pertencentes ao plano euclidiano π. Assim, $\wp = \{P \in \pi; dist(P, F) = dist(P, d)\}$.

Na Figura 3.1, se $dist(P, F) = dist(P, d)$, então P é um ponto da parábola $\wp$ de foco F e diretriz d.

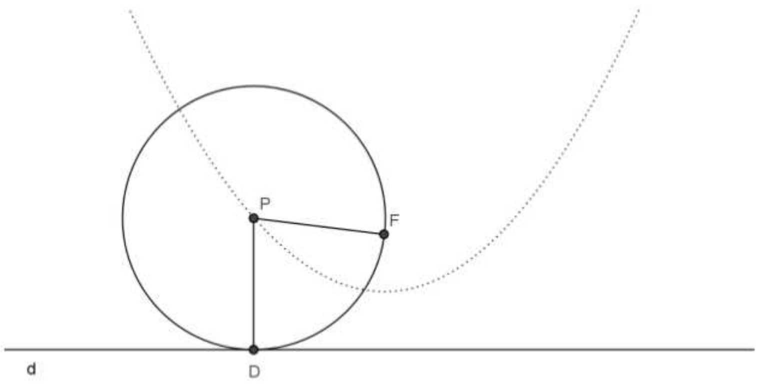

Figura 3.1: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Vamos mostrar agora algumas sugestões feitas por Wagner [1] e Alves [2] para obtenção de uma família de pontos de uma parábola conhecendo o foco e a diretriz da parábola e utilizando apenas régua e compasso.

Iniciaremos a construção da parábola sugerida por Wagner [1].

Tracemos uma reta r perpendicular a diretriz d, passando pelo foco F, em seguida marquemos o ponto D, interseção entre as retas r e d. O segmento DF é o parâmetro da parábola enquanto que V, ponto médio do segmento DF, é o vértice da parábola. Para cada ponto A da semirreta VF, trace a reta s, perpendicular a r. A circunferência de centro F e raio AD corta s nos pontos P e P_1, que pertencem a parábola(Figura 3.2).

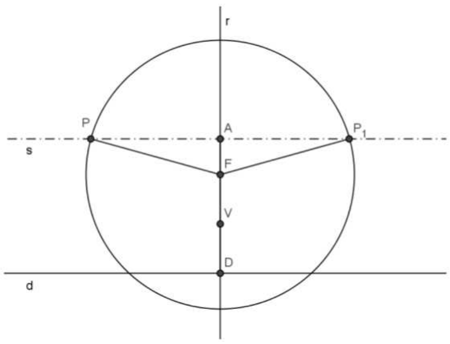

Figura 3.2: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

De fato, P e P_1 satisfazem a definição 2.1, pois PF e P_1F são raios da circunferência de raio AD, enquanto $dist(P, d) = dist(P_1, d) = \overline{AD}$ pois por construção as retas d e s são perpendiculares à reta r, logo as retas d e s são paralelas. Desta forma, basta escolher vários pontos sobre a semirreta VF e repetir o processo para encontrar outros pontos da parábola.

Para apresentar a construção da parábola sugerida por Alves [2], precisamos enunciar e demonstrar o lema que segue.

Lema 3.1 *Seja r uma reta perpendicular à diretriz d de uma parábola. Então r intersecta esta parábola num único ponto.*

Demonstração 3.1 *Desejamos mostrar que existe em r um único ponto equidistante da diretriz d e do foco F da parábola. Seja X o ponto de interseção entre as retas r e d, o conjunto dos pontos que são equidistantes de F e X é a mediatriz do segmento FX, logo o único ponto que pertence a r e é equidistante de F e X é o ponto de interseção entre a mediatriz de FX e a reta.*

Agora, apresentaremos a construção de parábola indicada em Alves [2].

Dados uma reta d e um ponto F, $F \notin d$, escolhemos um ponto arbitrário $X \in d$ e traçamos a reta r perpendicular a d em X. A intersecção de r com a mediatriz do segmento FX é um ponto P da parábola de foco F e diretriz d. Variando a escolha de $X \in d$ obtém-se outros pontos da parábola.(Figura 3.3)

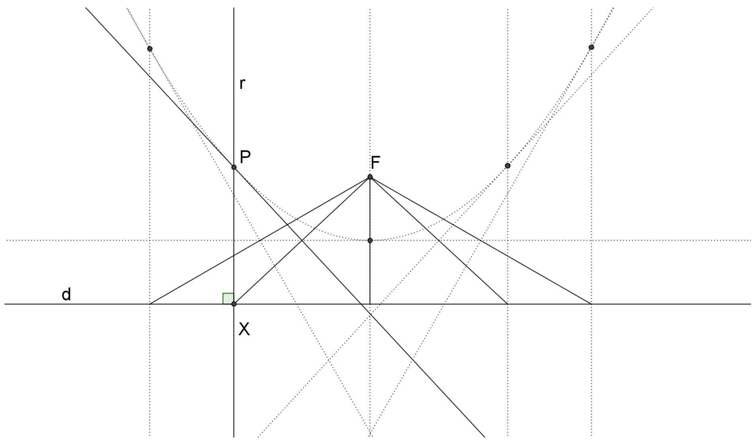

Figura 3.3: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

A partir das retas tangentes em cada ponto da parábola Hellmeister [4] mostrou como construir uma parábola com dobraduras . É provável que nesta fase nosso aluno não tenha maturidade para compreender esta justificativa. Contudo, dado à facilidade na construção deste modelo, é interessante explorar esta construção. E se necessário, podemos justificar o uso da técnica com as mediatrizes, visto que cada reta tangente à parábola é também mediatriz do segmento que une o foco e a projeção do ponto de tangência sobre a diretriz.

Vamos ao modelo,

Trace no papel a reta que será a diretriz da parábola e marque um ponto fora desta reta, este será o foco da parábola. Agora faça este ponto sobrepor vários pontos da diretriz e a cada sobreposição vinque o papel. Cada vinco registrado no papel representa uma reta tangente à parábola, quanto mais vincos fizer, mais a sua parábola ficará nítida. A parábola aparecerá contornada por estas retas vincadas no papel.(Figura 3.4)

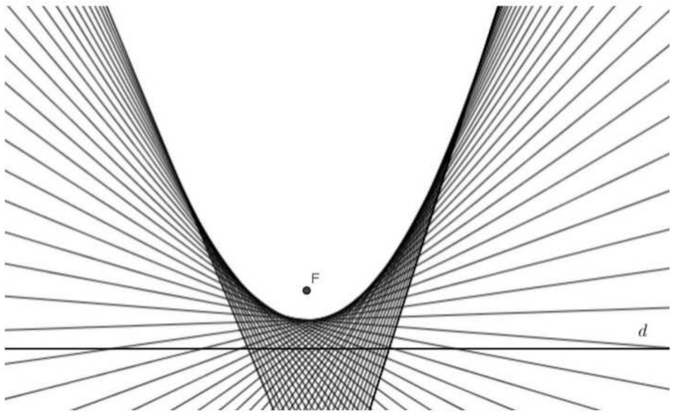

Figura 3.4: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Podemos ainda construir uma parábola utilizando material concreto, este método é conhecido como Método de Kepler. Para tanto são necessários régua, esquadro, alfinete, lápis e barbante.

Vejamos a construção,

Tome a régua como sendo a reta diretriz da parábola e fixe o alfinete onde será o foco da parábola. (Figura 3.5) .

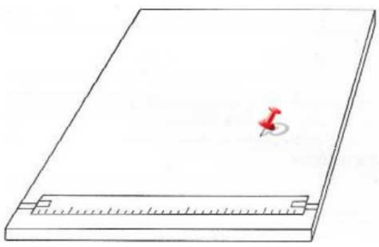

Figura 3.5: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAelEcAC/monografia-julio-pdf-quadricas-conicas-no-ensino-medio?part=2

Vamos associar os lados do esquadro com os lados de um triângulo retângulo. Posto isso, corte o barbante do tamanho do maior cateto e amarre uma ponta do barbante no vértice do esquadro oposto ao menor cateto e a outra ponta do barbante no alfinete.(Figura 3.6) .

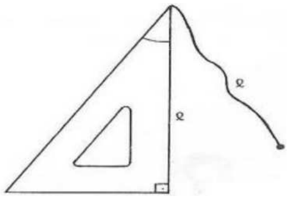

Figura 3.6: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAelEcAC/monografia-julio-pdf-quadricas-conicas-no-ensino-medio?part=2

Apoie o menor cateto na régua de modo que o maior cateto encoste no alfinete e estique o barbante com o lápis marcando o ponto médio entre o alfinete e a régua (perpendicular à régua), obtendo assim o vértice da parábola.(Figura 3.7) .

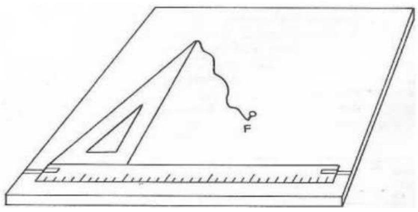

Figura 3.7: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAelEcAC/monografia-julio-pdf-quadricas-conicas-no-ensino-medio?part=2

Deslize o esquadro sobre a régua de modo que a ponta do lápis fique sempre encostada no maior cateto e mantendo o barbante esticado.(Figura 3.8) .

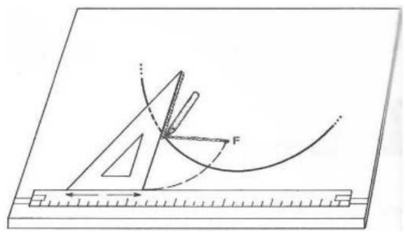

Figura 3.8: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAelEcAC/monografia-julio-pdf-quadricas-conicas-no-ensino-medio?part=2

Faça o mesmo processo deslizando o esquadro no sentido oposto para obter a outra parte da parábola (simétrica à obtida anteriormente).
Note que, se considerarmos o ponto P formado pela ponta do lápis, o ponto F formado pelo alfinete e a reta r como sendo a borda de régua, em todo ponto P da parábola, vale a relação: $dist(P, F) = dist(P, r)$, pois o comprimento do barbante é fixo.

Outras formas de construção de uma parábola usando apenas régua e compasso são apresentadas em Alves [2].

É possível a utilização de recursos computacionais, como por exemplo o software Geogebra, para a construção de uma parábola em sala de aula. A construção manual pode ser indicada como atividade extraclasse.

Capítulo 4

Propriedade refletora da parábola

Segundo [1] a parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que a sua distância à diretriz (chamada região interior) e outra onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a sua distância à diretriz (chamada região exterior).

Considere a parábola de foco F e diretriz d, trace uma reta r paralela a reta d e secante à parábola em P e P', marque F' a projeção de F em r (figura 4.1).

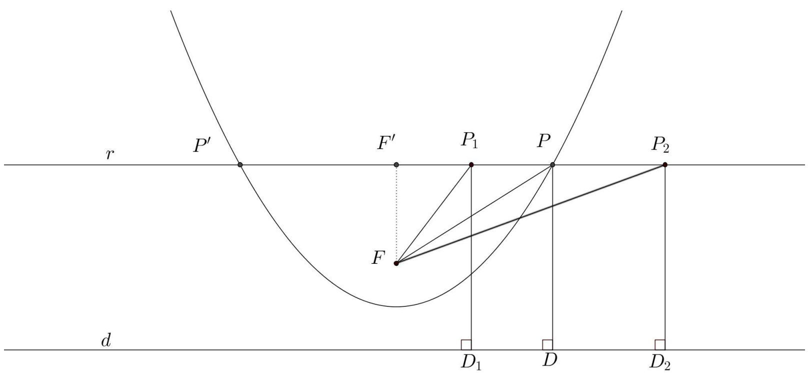

Figura 4.1: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Vamos mostrar que qualquer ponto interno do segmento $P'P$ é um ponto interior à referida parábola. Temos $F'F$ perpendicular à reta r, pois F' é projeção de F sobre r. Assim, os triângulos $FF'P_1$, $FF'P$ e $FF'P_2$ são retângulos e os segmentos P_1F, PF e P_2F são as hipotenusas dos respectivos triângulos. Se o ponto P_1 de r é interior ao segmento $P'P$, então $P_1F < PF = PD = P_1D_1$ logo, P_1 é interior à parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta exterior ao segmento $P'P$, então $P_2F > PF = PD = P_2D_2$, o que implica P_2 exterior à parábola.

Teorema 4.1 ***(Poncelet)****Dado uma parábola $\wp$ de foco F e um ponto P pertencente a mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelo raio vetor e pela reta perpendicular à diretriz d que passa por P são as retas tangente e normal a parábola em P*

Demonstração 4.1 *Considere um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d, e ainda a reta t, bissetriz do ângulo FPD, onde D é a projeção do ponto P na diretriz d. Vamos mostrar que t é tangente a parábola em P.(Figura 4.2)*

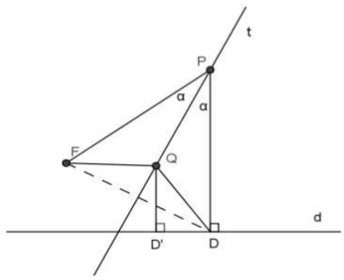

Figura 4.2: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Considere um ponto Q qualquer da reta t, distinto de P, e sua projeção D' sobre a reta d. Note que os triângulos QPD e QPF são congruentes pelo caso L.A.L, pois t é bissetriz do ângulo $\widehat{FPD}$, PQ é lado comum e $PF = PD$ pela definição da parábola. Desta forma podemos concluir que $FQ = QD > QD'$, pois o triângulo $QD'D$ é retângulo com hipotenusa QD, logo Q é externo à parábola. Ou seja, todos os pontos de t são externos à parábola exceto o ponto P que também pertence à parábola, logo a reta t tangencia a parábola no ponto P. (figura 4.3)

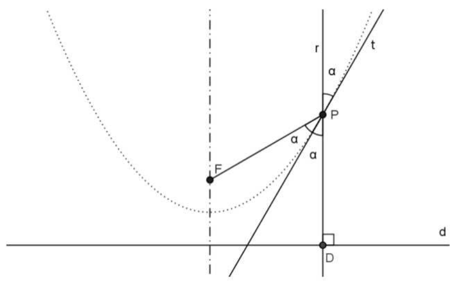

Figura 4.3: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Vamos mostrar agora que a outra bissetriz é a reta normal à parábola no ponto P. Note que o ponto P divide a reta t em duas semirretas e estas formam um ângulo raso de vértice P, este ângulo está divido em três outros ângulos, dois de medida α e o ângulo formado pelo segmento FP e a reta r, de medida 2β. A bissetriz em questão divide o ângulo formado pelo segmento FP e a reta r em dois ângulos iguais de medida β. Assim, esta bissetriz divide o ângulo raso citado em dois ângulos de medida $\alpha + \beta$. O que implica $\alpha + \beta = 90^0$, desta forma, as duas bissetrizes são perpendiculares entre si.

Observe que a reta r forma, com a reta t, ângulos opostos pelo vértice, enquanto a reta t é bissetriz do ângulo $\widehat{FPD}$.

Suponha agora um raio de luz, isto nos possibilita concluir que todo raio de luz paralelo ao eixo da parábola, após reflexão toma a direção do foco e analogamente, todo raio de luz emitido pelo foco sairá paralelo ao eixo após reflexão. Esta talvez seja a mais importante propriedade de uma parábola, e é exatamente esta, a propriedade refletora da parábola, que irá justificar as aplicações da parábola que discutiremos no próximo capítulo.

Capítulo 5

Aplicações

O paraboloide de revolução, também conhecido como superfície parabólica, é uma superfície obtida pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria, e esta superfície preserva a propriedade refletora da parábola em toda sua região. O que garante que toda recepção de sinais paralelos ao eixo de simetria será refletida para o foco, bem como todo sinal emitido pelo foco será refletido paralelamente ao eixo de simetria. Em função disto, o paraboloide será a base para as diversas aplicações que mostraremos a seguir

Na recepção de sinais a aplicação mais comum é sem nenhuma dúvida a antena parabólica que capta os sinais emitidos por um satélite, mas estes sinais chegam aqui muito fracos. Esta antena servirá como um amplificador natural de sinais, uma vez que direciona todos os sinais captados para o foco (Figura 5.1).

Figura 5.1: http://www.aprendematematica.com/parabola/aplicacoes.html

Notem que o receptor de sinal fica localizado no foco da parábola.

Outros exemplos que podemos destacar é o dos faróis de carros, holofotes e até mesmo das lanternas que possuem na sua estrutura um emissor de luz localizado no foco de uma parábola, voltado para um espelho parabólico localizado no fundo do objeto. É esta superfície que irá refletir os raios luminosos, paralelamente ao eixo da parábola.(Figura 5.2)

Figura 5.2: http://alankardec3221.blogspot.com.br/2012/08/uso-de-espelhos-curvos-1espelhos-de.html

A figura 5.3 mostra como funciona um dispositivo de iluminação com fundo parabólico, quando modificamos o ponto de emissão:

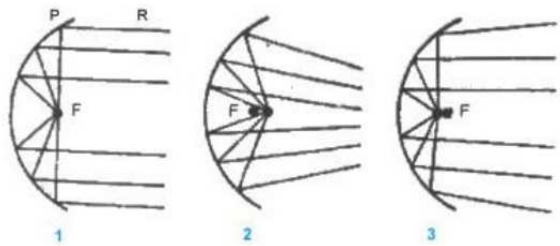

Figura 5.3: https://sites.google.com/site/fisica2palacios/home/optica/lentes-y-espejos

Note que no modelo 1 o emissor está localizado no foco e por isso os raios são refletidos paralelamente ao eixo, no entanto, no modelo 2 o emissor é colocado antes do foco, mais próximo do vértice da parábola e aí os raios são refletidos de forma convergente, enquanto no modelo 3 o emissor encontra-se após o foco, mais afastado do vértice, neste caso os raios são refletidos de forma divergente.

Destacam-se ainda, com este mesmo principio, os telescópios que, por não fazerem parte do cotidiano dos alunos não serão explorados aqui.

O campo Arquitetônico é vasto de exemplos utilizando a parábola, não só por questões esteticas e estruturais mas também pela otimização de espaços, iluminação e ventilação. Aqui no Brasil destacam-se as obras de Oscar Niemeyer, como a ponte Juscelino Kubitschek em Brasilia (Figura 5.4), os arcos da Marquês de Sapucaí no Rio de Janeiro (Figura 5.5) e a igreja da Pampulha em Belo Horizonte (Figura 5.6).

Figura 5.4: : http://mundo.guru/arquitetura-algumas-das-obras-mais-importantes-de-oscar-niemeyer/oscar-niemeyer-igreja-da-pampulha/

Figura 5.5: http://www.temporadalivre.com/blog/conheca-o-carnaval-rio-de-janeiro-em-2016/desfile-de-carnaval-2006-na-avenida-marques-de-sapucai/

Figura 5.6: http://www.viajenaviagem.com/2012/09/vnvbrasil-mar-de-brasilia

Além da ponte Hercílio Luz em Florianopólis (Figura 5.7).

Figura 5.7: http://www.panoramio.com/photo/2676000

Internacionalmente, podemos citar ainda a golden gate em São Francisco, Califórnia. Considerada uma das sete maravilhas do mundo moderno (Figura 5.8).

Figura 5.8: https://pt.wikipedia.org/wiki/PonteGoldenGate

e o Edifício Berliner Bogen, Hamburgo, Alemanha:(Figura 5.9)

Figura 5.9: http://www.frener-reifer.com/projects/office-building-berliner-bogen/

Ainda no campo das aplicações, temos os receptores parabólicos como uma excelente alternativa para captação da energia solar. Ainda que a ciência encontre dificuldade para o armazenamento desta energia, em função do custo elevado, já podemos verificar a utilização destes receptores através dos fornos solares como veremos a seguir no próximo capítulo.

Capítulo 6

Curiosidades

Dentre as curiosidades que envolvem as parábolas, vamos comentar um pouco sobre a lenda de Arquimedes, que relata uma vitória de Arquimedes frente a uma frota marítima utilizando espelhos parabólicos, comentaremos também sobre a calculadora parabólica, que pode ser utilizada já no ensino fundamental substituindo a tabuada de multiplicação, e um incrível forno parabólico batizado de Dentre as curiosidades que envolvem as parábolas, vamos comentar um pouco sobre a lenda de Arquimedes, que relata uma vitória de Arquimedes frente a uma frota marítima utilizando espelhos parabólicos, comentaremos também sobre a calculadora parabólica, que pode ser utilizada já no ensino fundamental substituindo a tabuada de multiplicação, e um incrível forno parabólico batizado de "Pireliófero", construído pelo padre Manuel António Gomes Himalaya, que alcançou $3.500^{o}C$ utilizando apenas energia solar.

6.1 A lenda de Arquimedes

Trataremos este tema como lenda por não haver consenso entre os cientistas. Alguns, como Kepler e Descartes, negam; enquanto outros, como Diodorus Siculus, e Anthemius de Tralles, dizem ser verdadeiro. Muitos cientistas atuais afirmam a possibilidade teórica, mas duvidam do aparato tecnológico da época.

Segundo a lenda, Arquimedes, o grande filósofo grego, na segunda guerra púnica exerceu papel fundamental na defesa da colônia grega de Siracusa na ilha da Sicília ante o exército e a marinha romana. Ele foi responsável pela invenção de várias armas de guerra, dentre elas catapultas, a terrível 'Mão de Ferro', um 'Canhão a Vapor' e aquilo que ficou conhecido como o 'Raio da Morte' ou 'Raio de Calor' de Arquimedes.

Quanto ao raio da morte, também não há consenso sobre ao artefato. Alguns afirmam ser um grande espelho parabólico, enquanto outros afirmam ser milhares de pequenos espelhos planos formando uma estrutura parabólica. Arquimedes posicionava este artefato de tal forma que os navios romanos que se encontravam parados sitiando a ilha ficassem localizados no foco da parábola e assim conseguia convergir toda energia solar captada para um único ponto da embarcação, que por ser feita de madeira, portanto de fácil combustão, se incendiavam.(Figura 6.1).

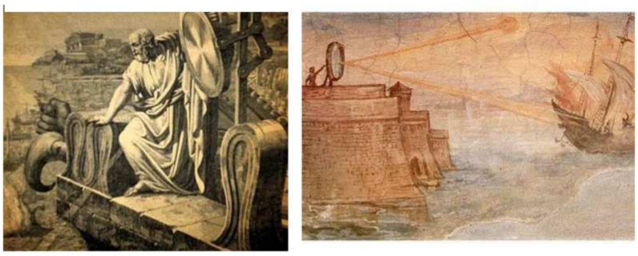

Figura 6.1: http://noticias.terra.com.br/ciencia/pesquisa/cientistas-estudam-lenda-de-espelho-grego-que-queimava-navios,86b85b6db16da310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html

6.2 O Pireliófero

Manuel António Gomes, o padre Himalaya, além das suas atividades ecumênicas também era pesquisador e inventor e já no final do século XIX e início do século XX se preocupava com a utilização de fontes renováveis de energia, defendia a utilização das energias eólica, solar e das marés. Ele foi um dos pioneiros na utilização da energia solar quando apresentou o Pireliófero na Exposição mundial de St. Louis, Missouri, Estados Unidos em 1904.

O pireliófero era um forno solar, com 6177 pequenos espelhos formando uma imensa estrutura parabólica espelhada de $80m^2$, este artefato tinha ainda uma cápsula refrataria localizada no foco da parábola, e esta estrutura estava apoiada em uma base com um mecanismo de relojoaria que fazia a superfície espelhada acompanhar o movimento solar, aproveitando o máximo de energia possível já que o sistema estava sempre alinhado. A cápsula funcionava como um recipiente onde se colocava o material que seria fundido.

Este invento gerou um alvoroço na exposição todos curiosos e apressados para ver quase tudo se derreter repentinamente, um bloco de granito se liquefazer quase que instantaneamente. Este forno conseguiu atingir incríveis $3500^{\circ}C$ apenas refletindo a energia solar.(Figura 6.2).

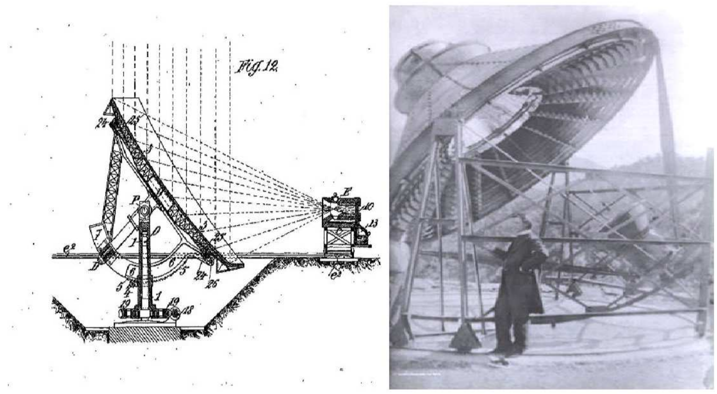

Figura 6.2: https://pt.wikipedia.org/wiki

6.3 Calculadora Parabólica

A calculadora parabólica é um artefato simples e muito fácil de ser construída, basta desenhar a parábola da curva $y = x^2$ e fixar em uma base de cortiça, note que não será necessário a utilização da parte negativa das ordenadas e nas abcissas tenha o cuidado de graduar com valores positivos nas duas direções. Utilize dois alfinetes para marcar os pontos A e B e um fio de nylon ou barbante com pesos nos extremos para garantir o fio sempre esticado (Figura 6.3).

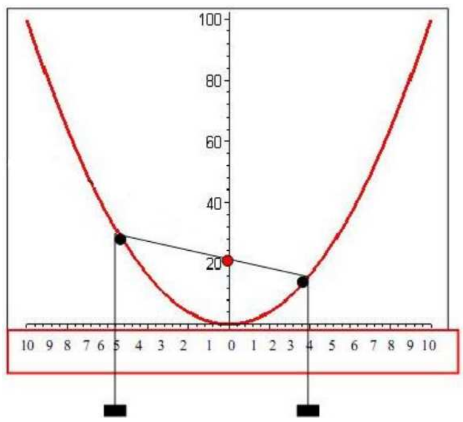

Figura 6.3: http://www.lucianofeijao.com.br/clf/ambientes/cienciasexatas

Observe que os alfinetes determinam três segmentos no fio esticado, os dois segmentos verticais determinam os fatores que serão multiplicados em quanto que o segmento com extremos nos alfinetes determina o produto entre estes fatores. Nos exemplos acima, temos $5 \times 4 = 20$. Desta forma, com apenas uma curva temos todas as tabuadas de multiplicação em mãos.

Vamos mostrar agora que esta calculadora é válida para qualquer valor real e para isto vamos utilizar mais uma vez a geometria plana(Figura 6.4).

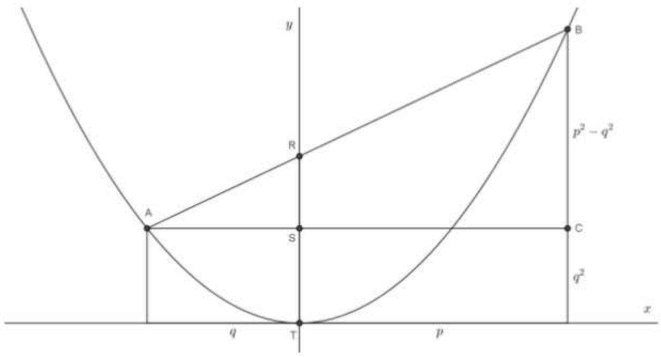

Figura 6.4: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

É fácil perceber que os triângulos ABC e ARS são semelhantes, pois RS e BC são paralelos. Desta forma, podemos afirmar que:

$$\frac{RS}{BC} = \frac{AS}{AC} \Longrightarrow RS = \frac{AS.BC}{AC} = \frac{q.(p^2 - q^2)}{p + q} = q(p - q)$$

,

além disso,

$$RT = ST + RS = q^2 + q(p - q) = p.q$$

Como o ponto T é a origem do sistema cartesiano, podemos concluir que a ordenada do ponto R é igual ao produto das abcissas dos pontos A e B, em módulo.

É claro que o objetivo não é levar o conhecimento de parábolas para o ensino fundamental e sim ilustrar a tabuada de forma concreta, a tabuada fica divertida sem perder o rigor matemático.

Capítulo 7

Uso do Geogebra na construção de parábolas

7.1 O modelo de Wagner

• Traçar a diretriz d;

Por conveniência, escolher uma diretriz paralela a OX. A nossa sugestão é digitar a equação da reta $y = 1$ no campo entrada, na parte inferior da janela(Figura 7.1).

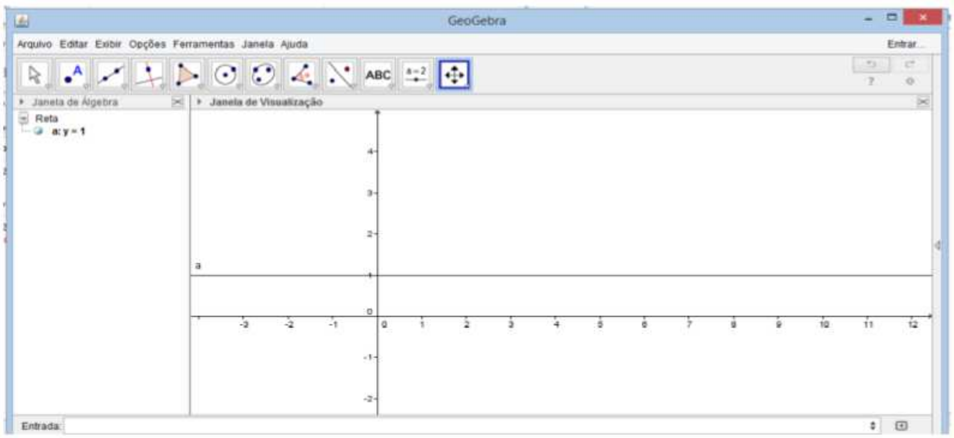

Figura 7.1: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Note que na janela de álgebra aparecerá a reta $a : y = 1$, precisamos renomear esta reta para reta d. Para isto basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto, escolher a opção renomear e digitar o novo nome. (Fique atento para este procedimento, vamos repetir este passo várias vezes).

• Marcar o foco F;

Ainda no campo entrada, digite as coordenadas do ponto F=(3,3). Outra opção é usar a barra de ferramentas, após escolher a função adequada clique com o botão esquerdo do mouse onde pretende marcar o foco (Figura 7.2).

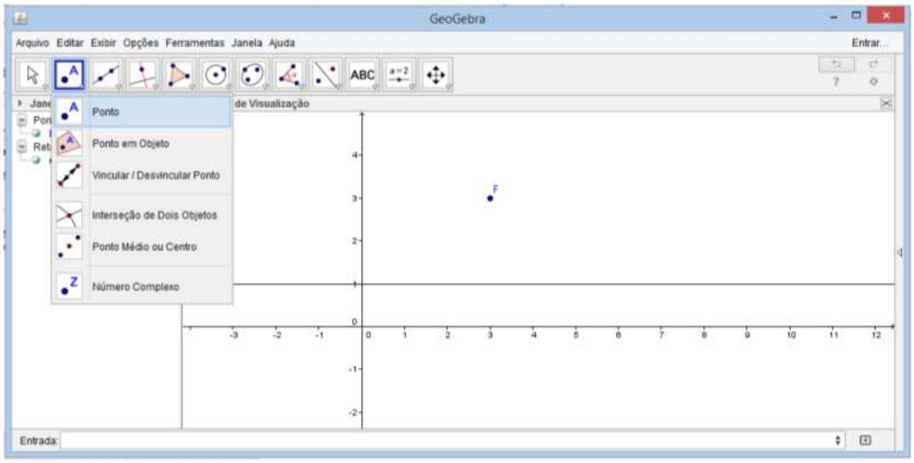

Figura 7.2: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Neste caso, será necessário renomear este ponto.

• Traçar a reta r perpendicular à diretriz e passando pelo foco;

Utilize a barra de ferramentas para escolhera função, reta perpendicular. Agora com o botão esquerdo do mouse selecione a diretriz d e o foco F (Figura 7.3).

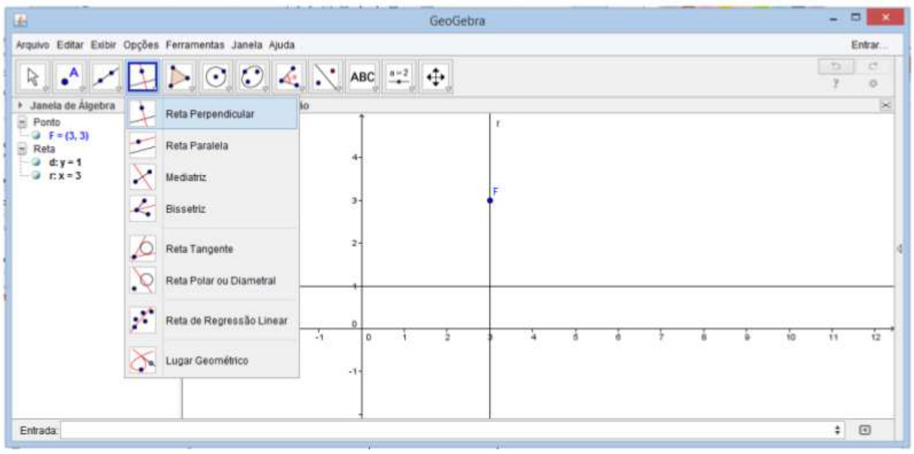

Figura 7.3: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Será necessário renomear esta reta.

• Marcar o ponto D, interseção entre as retas r e d;
Na barra de ferramentas escolha a função interseção de dois objetos, com o botão esquerdo do mouse selecione as retas d e r(Figura 7.4).

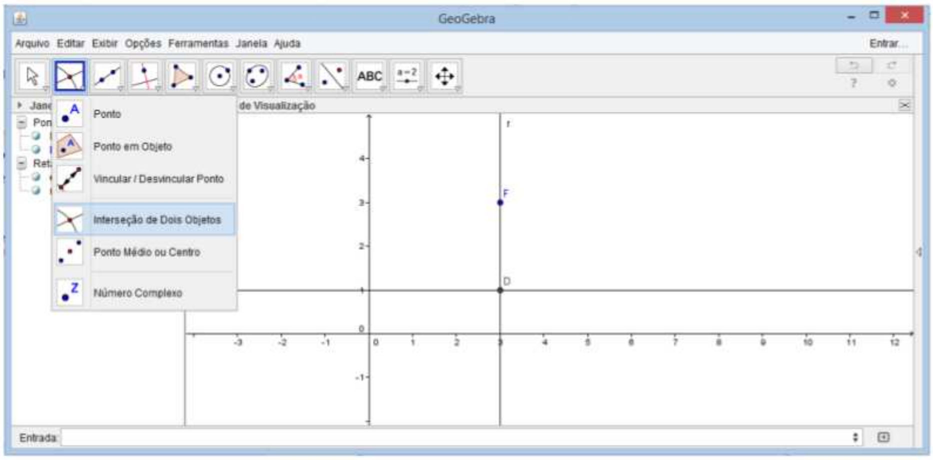

Figura 7.4: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Será necessário renomear este ponto.

• Marcar o ponto V, ponto médio do segmento DF;
Na barra de ferramentas escolha a função ponto médio ou centro, em seguida selecione os pontos D e F(Figura 7.5).

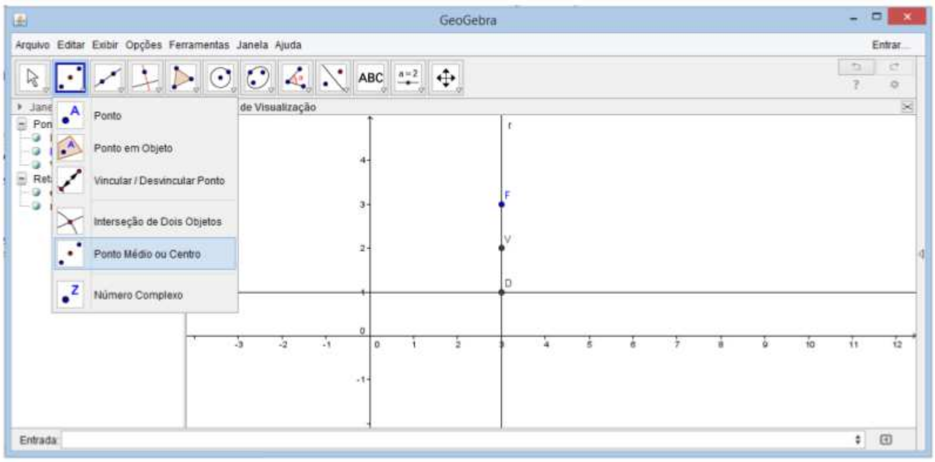

Figura 7.5: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Renomeie este ponto,

• Criar controle deslizante;

Na barra de ferramentas selecione a função controle deslizante, clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer local da janela de visualização (convém evitar o centro da janela). Configure o controle com o valor mínimo coincidente com a ordenada do ponto V e o valor máximo de forma conveniente (Figura 7.6).

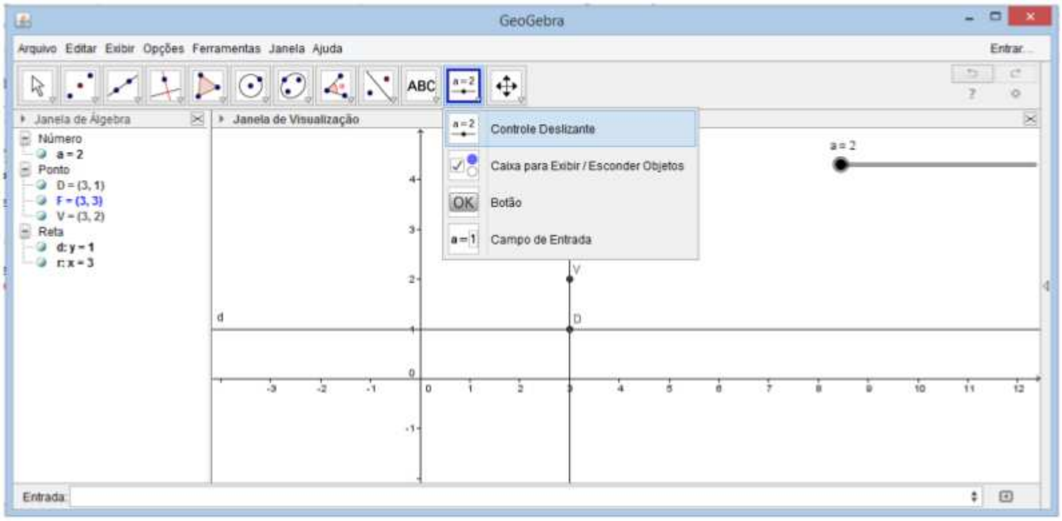

Figura 7.6: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Para animar o controle deslizante é preciso clicar com o botão direito do mouse e habilitar a opção Animar, se quiser parar a animação basta repetir o processo que desabilitará a função animar.

• Criar ponto A;

Este será o principal fator para a coleção de pontos pertencentes à parábola. No campo entrada localizado na parte inferior da janela digite o ponto A, cujas coordenadas são abcissa coincidente com a abcissa do vértice V e ordenada igual à variável do controle deslizante, isto garante que o ponto A será ponto pertencente a reta r. Assim, $A = (3, a)$;

• Traçar a reta s perpendicular a reta r passando pelo A;

Na barra de ferramentas selecionar a função reta perpendicular e em seguida escolher a reta r e o ponto A (Figura 7.7).

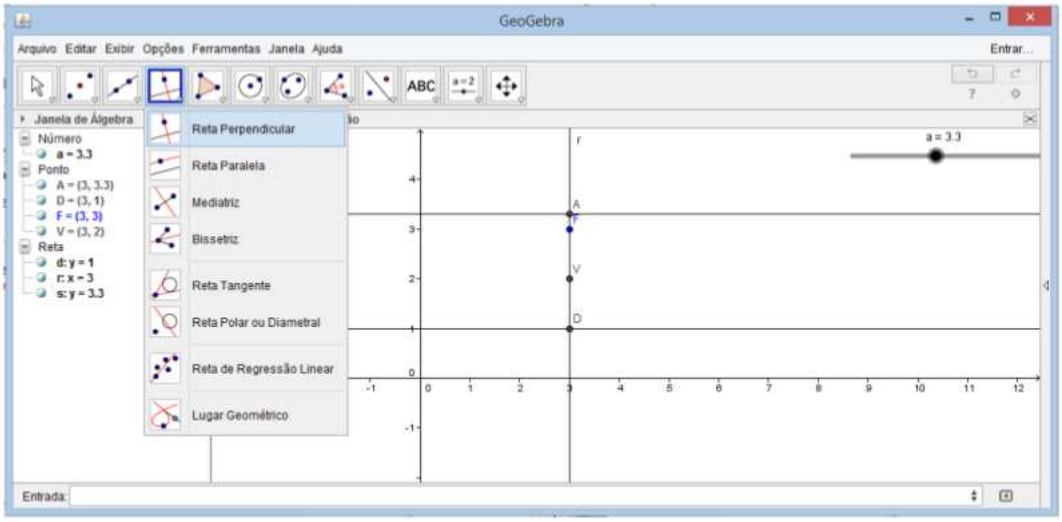

Figura 7.7: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

A reta criada deverá ser renomeada. Agora a reta r não será mais útil, portanto vamos ocultá-la clicando com o botão direto do mouse sobre o objeto e desabilitando a função exibir objeto.

• Traçar o segmento AD;

Na barra de ferramentas selecionar a função segmento e marcar os pontos A e D, extremos do segmento(Figura 7.8).

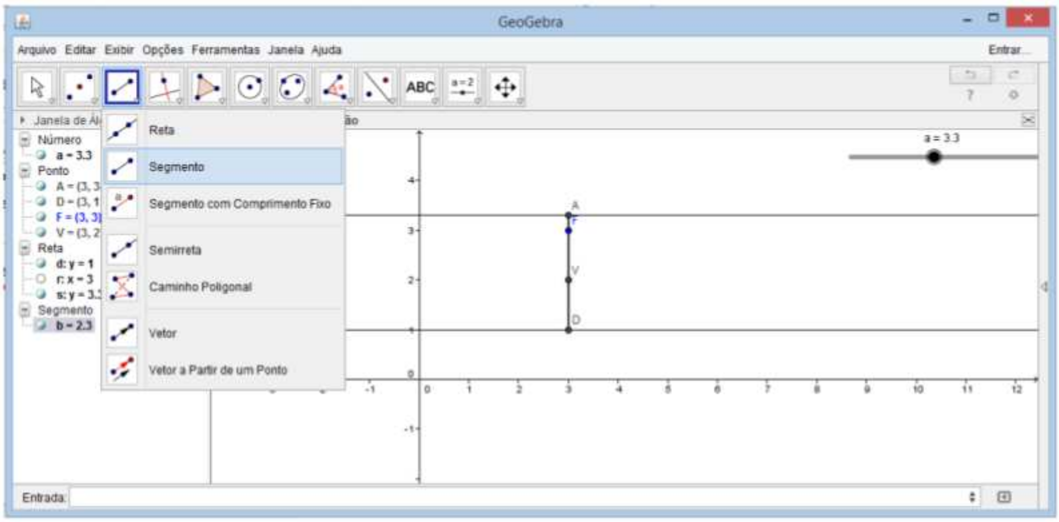

Figura 7.8: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Traçar circunferência de centro no foco F e raio o segmento AD;

Na barra de ferramentas, selecionar a função círculo dado centro e raio, selecionar o foco F e em seguida digitar o rótulo do segmento AD (Figura 7.9).

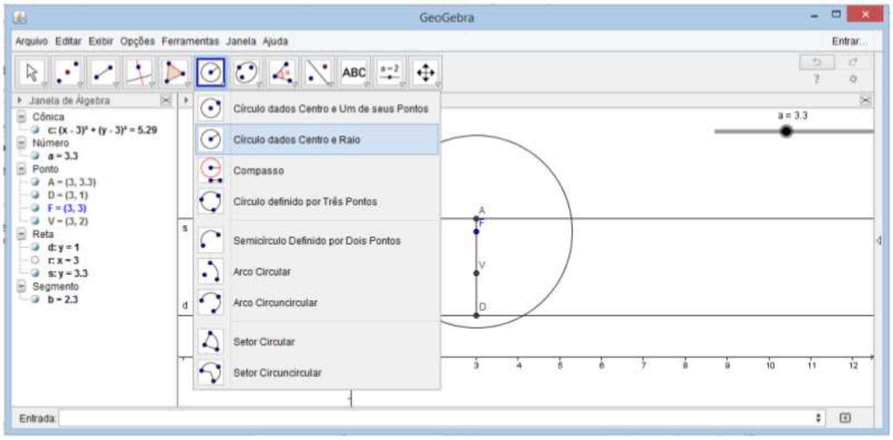

Figura 7.9: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Agora o segmento AD não será mais útil, portanto vamos ocultá-lo clicando com o botão direto do mouse sobre o objeto e desabilitando a função exibir objeto.

• Marcar os pontos P e P_1, interseções da circunferência com a reta s;

Na barra de ferramentas selecione a função interseção de dois objetos e em seguida selecione a circunferência e a reta s(Figura 7.10).

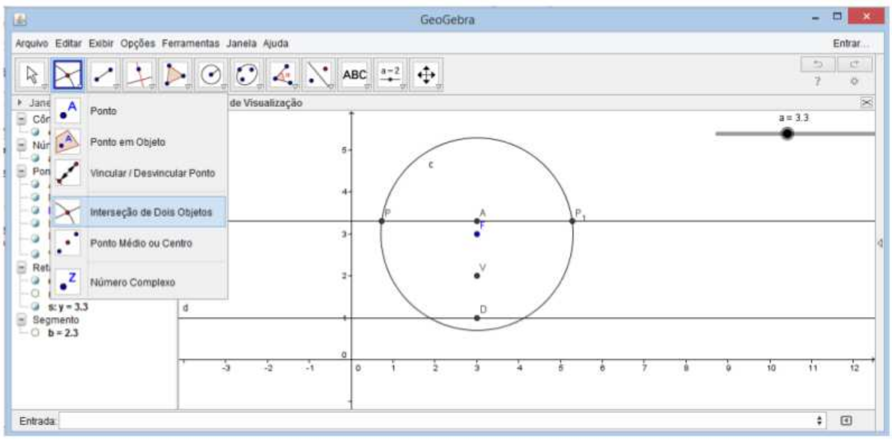

Figura 7.10: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

- Habilitar rastro nos pontos P e P_1

Clicar sobre os objetos com o botão direito do mouse e selecionar a função habilitar rastro;

Pronto, finalizamos. Se desejar pode ocultar todos os objetos que auxiliaram na construção deixando visível apenas os elementos da parábola, foco F, diretriz d e os pontos P e P_1.

Para visualizar a família de pontos basta animar o controle deslizante. Lembrando que isto é feito clicando com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecionando a função animar.

Para parar a animação basta repetir este último procedimento.

7.2 O modelo de Alves

- Traçar a diretriz d;

Traçar uma reta d qualquer, é conveniente escolher uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

Na barra de ferramenta, selecione a função "reta paralela"e em seguida clique no eixo escolhido e em um ponto qualquer fora deste eixo (Figura 7.11).

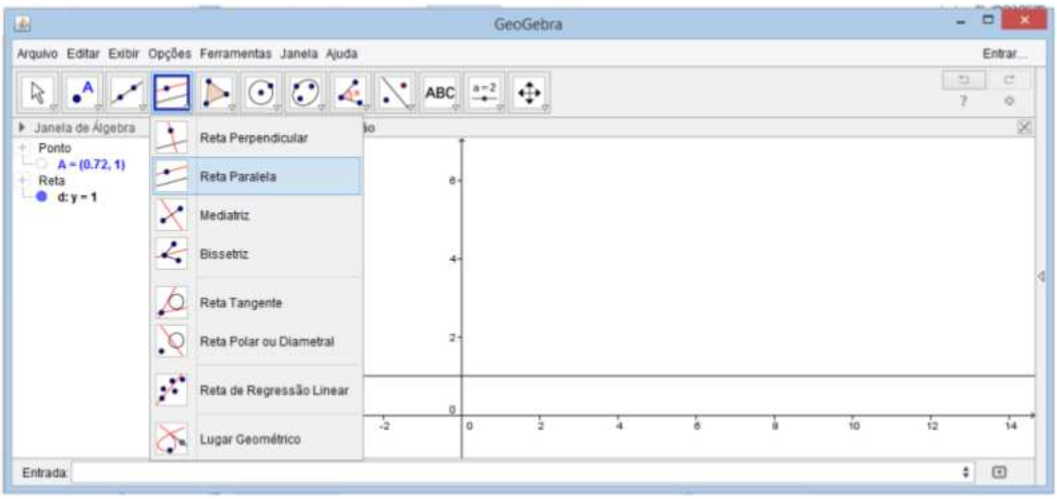

Figura 7.11: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

É preciso renomear a reta para d e ocultar o ponto auxiliar. Para isto, clique com o lado direito do mouse sobre os objetos e selecione as funções “renomear” e “exibir objeto” respectivamente.

- Marque um ponto F qualquer não pertencente à reta;

Na barra de ferramenta selecione a função “ponto” e na janela de visualização clique onde deseja que o foco se localize (Figura 7.12).

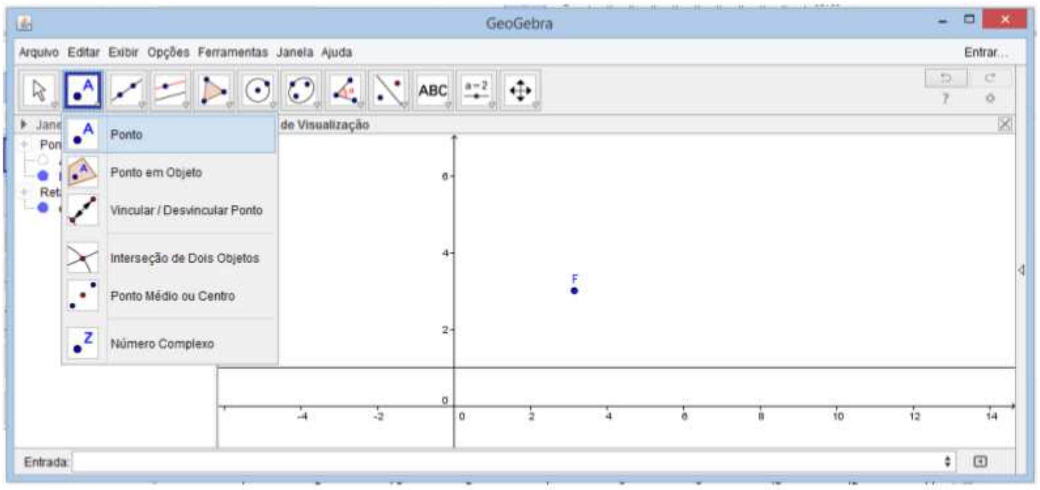

Figura 7.12: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Renomeie o ponto para F.

• Criar controle deslizante;

Na barra de ferramentas selecione a função controle deslizante, clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer local da janela de visualização (convêm evitar o centro da janela). Configure o controle com os valores mínimo e máximo adequados(Figura 7.13).

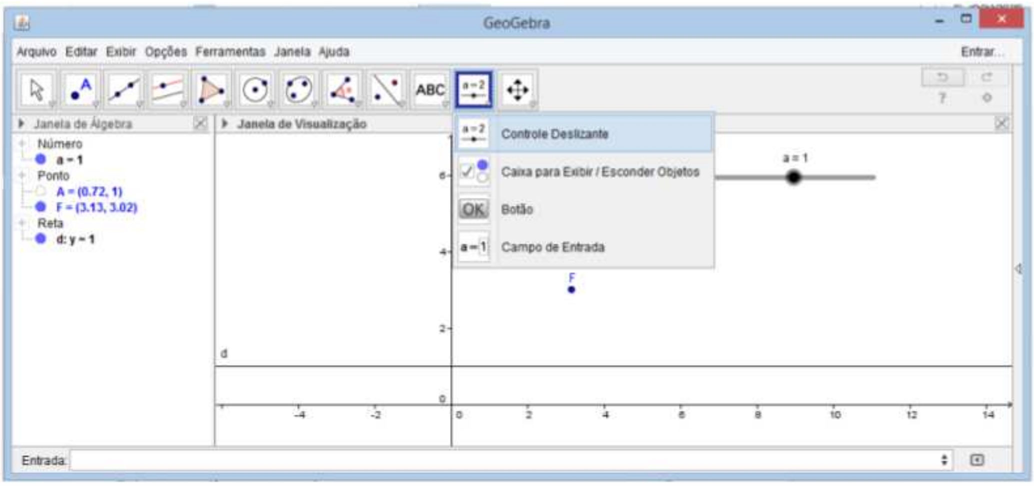

Figura 7.13: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Marque agora um ponto Q sobre a reta d;

Supondo que a sua reta seja paralela ao eixo X, então seu ponto terá as coordenadas (a, y_0). Onde a é a variável do controle deslizante e y_0 é o y da sua reta. Analogamente, se sua reta é paralela ao eixo Y, as coordenadas do seu ponto serão (x_0, a). No campo entrada localizado na parte inferior da janela digite o ponto $Q = (a, 1)$,

• Traçar o segmento FQ;

Na barra de ferramentas selecionar a função segmento e na janela de visualização clicar nos pontos extremos F e Q (Figura 7.14).

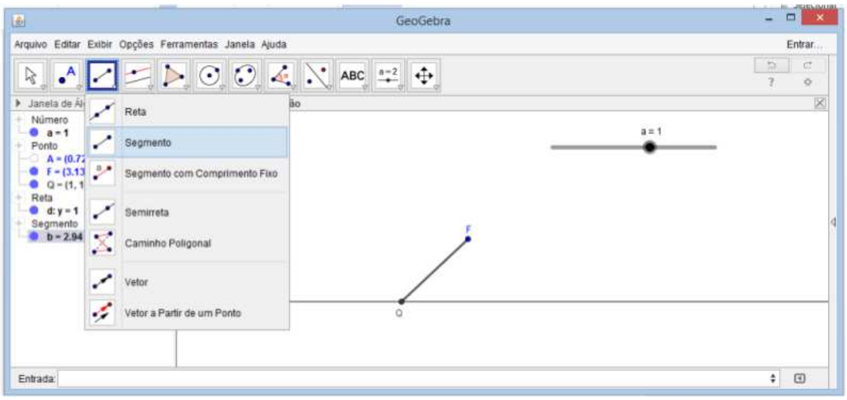

Figura 7.14: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Traçar a mediatriz do segmento FQ;

Na barra de ferramentas selecionar a função "mediatriz" e na janela de visualização clicar no segmento FQ(Figura 7.15).

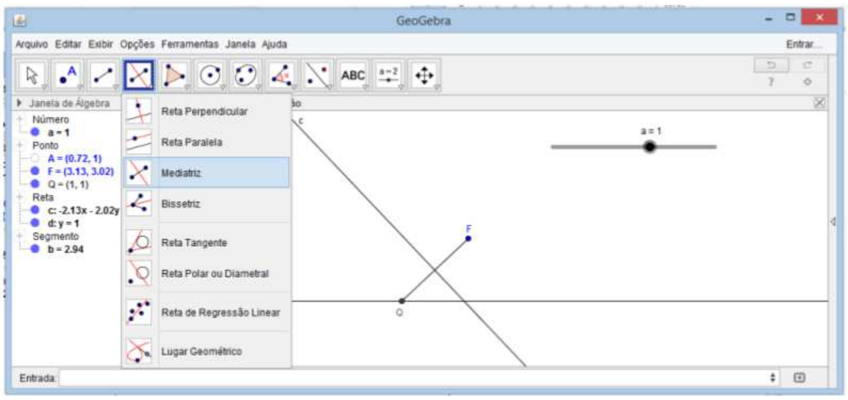

Figura 7.15: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Traçar uma perpendicular à reta d passando por Q;

Na barra de ferramentas, selecionar a função "reta perpendicular" e na janela de visualização clicar na reta d e no ponto Q, sem importância de ordem(Figura 7.16).

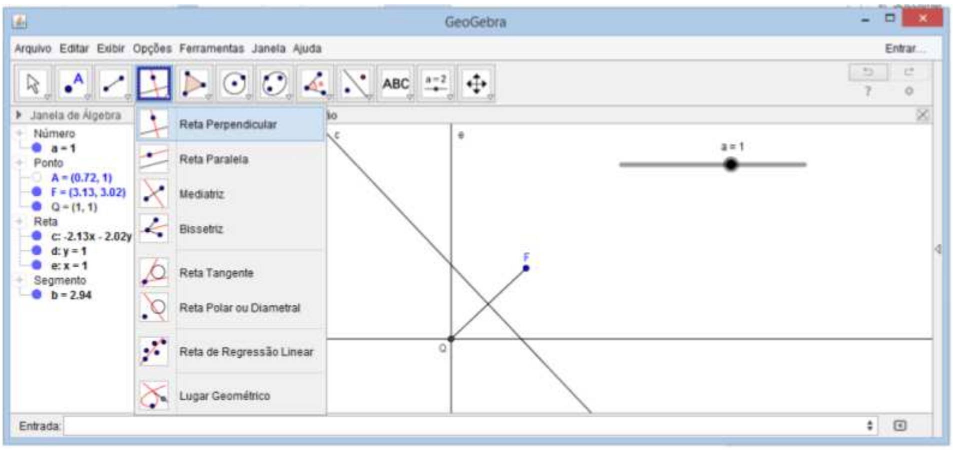

Figura 7.16: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Marcar o ponto P, interseção entre a mediatriz e a perpendicular traçada;

Na barra de ferramentas, selecionar a função "interseção de dois objetos" e na janela de visualização clicar na mediatriz e na reta perpendicular traçada(Figura 7.17).

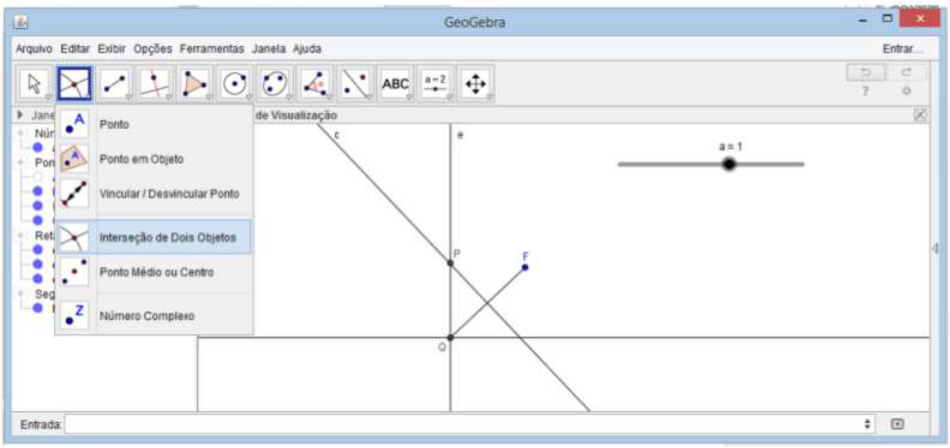

Figura 7.17: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Renomeie este ponto para ponto P.

• Habilitar o rastro do ponto P;

Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto P, em seguida selecione a função "habilitar rastro".

Para visualizar a animação basta clicar com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecionar a função "animar".

Querendo interromper a visualização, basta repetir o processo anterior.

7.3 Utilizando a circunferência

Para esta animação será necessário a escolha de uma função que irá nos auxiliar na construção do modelo. Aqui foi escolhida a função $f(x) = x^2 - 1$.

• Criar controle deslizante;

Na barra de ferramentas selecione a função controle deslizante, clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer local da janela de visualização (convêm evitar o centro da janela). Configure o controle com o valores mínimo e máximo adequados(Figura 7.18).

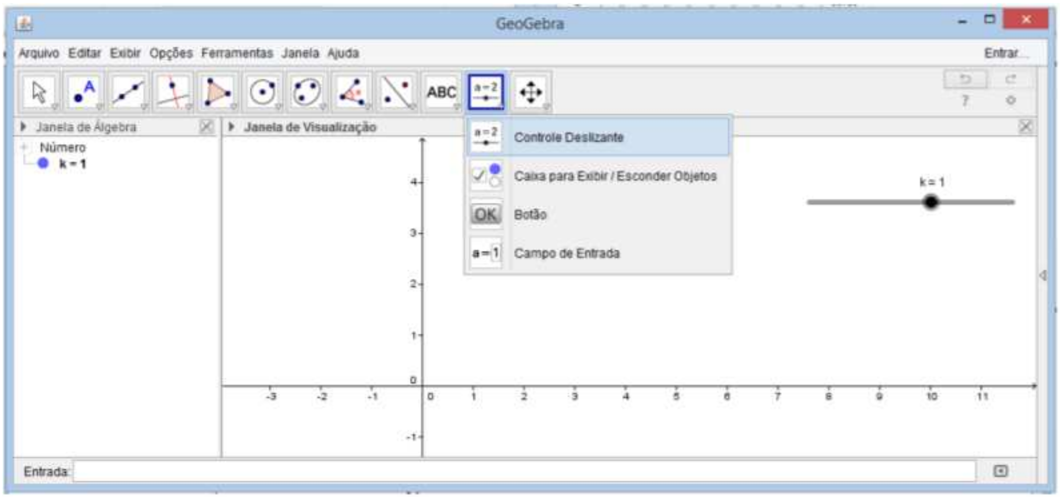

Figura 7.18: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Marcar o ponto P;

No campo entrada localizado na parte inferior da janela digite o ponto P com coordenadas, variando em função do controle deslizante. Este ponto deve pertencer ao gráfico da função escolhida. Assim, $P = (k, k^2 - 1)$(Figura 7.19).

• Traçar a diretriz e o foco da cônica $c : y = x^2 - 1$

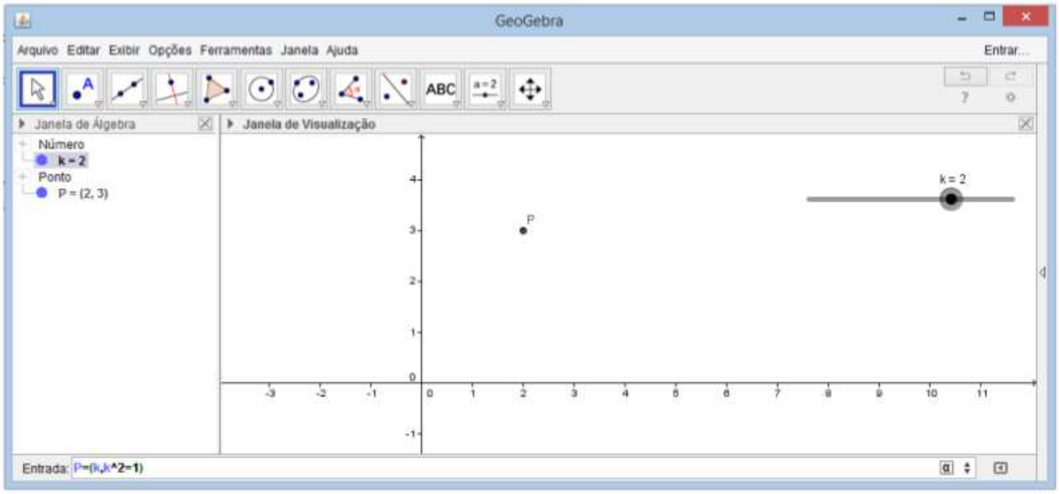

Figura 7.19: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

No campo Entrada, localizado na parte inferior da janela do geogebra, digite diretriz e entre colchetes digite a equação da cônica escolhida. Repita o processo para o foco(Figura 7.20).

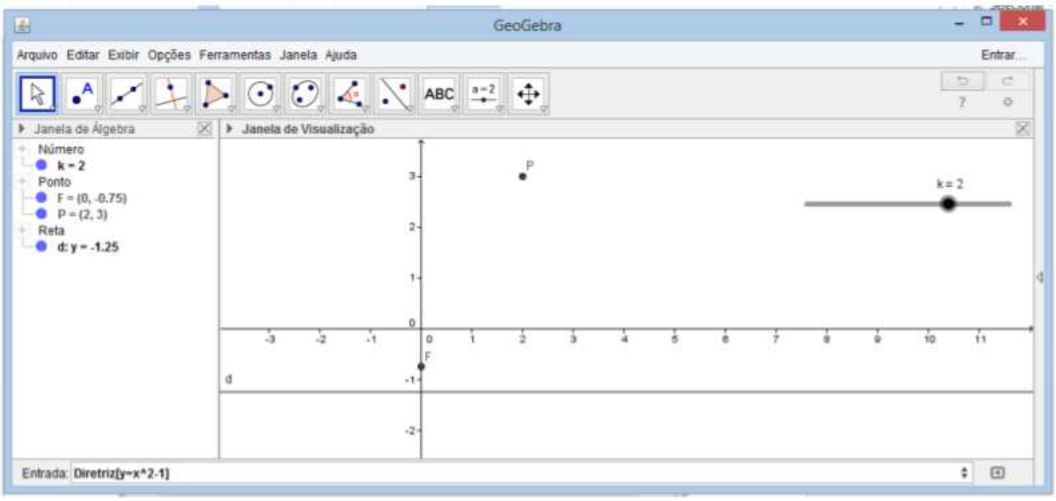

Figura 7.20: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Renomeie o foco para ponto F e a diretriz para reta d.

Este procedimento pode ser feito clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto, em seguida selecione a opção renomear.

- Traçar a circunferência de centro em P, passando pelo foco;

Na barra de ferramentas, selecione a função “círculo dados centro e um de seus pontos”.

Na janela de visualização, selecione primeiro o Ponto P que será o centro, depois selecione o foco F que será o ponto pertencente ao círculo(Figura 7.21).

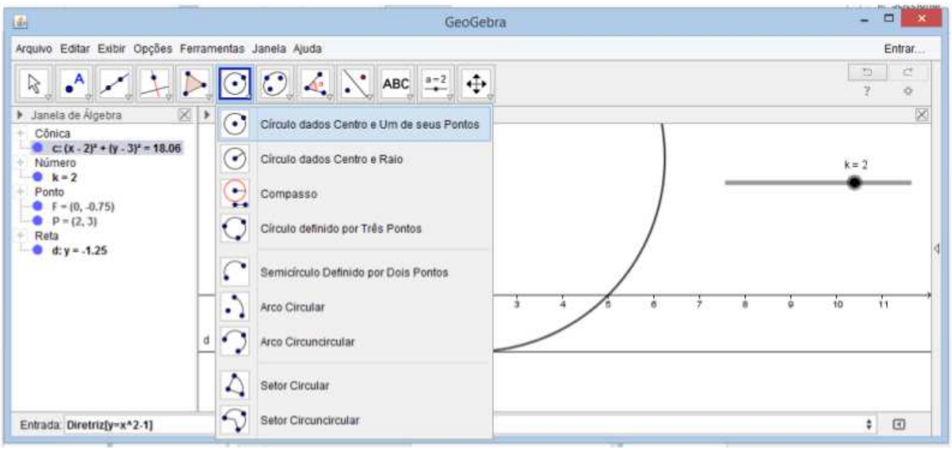

Figura 7.21: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Marcar o ponto Q, interseção entre a diretriz e a circunferência traçada;

Na barra de ferramentas, selecionar a função “Interseção de dois objetos” e na janela de visualização selecionar a diretriz e a circunferência, sem importância de ordem(Figura 7.22).

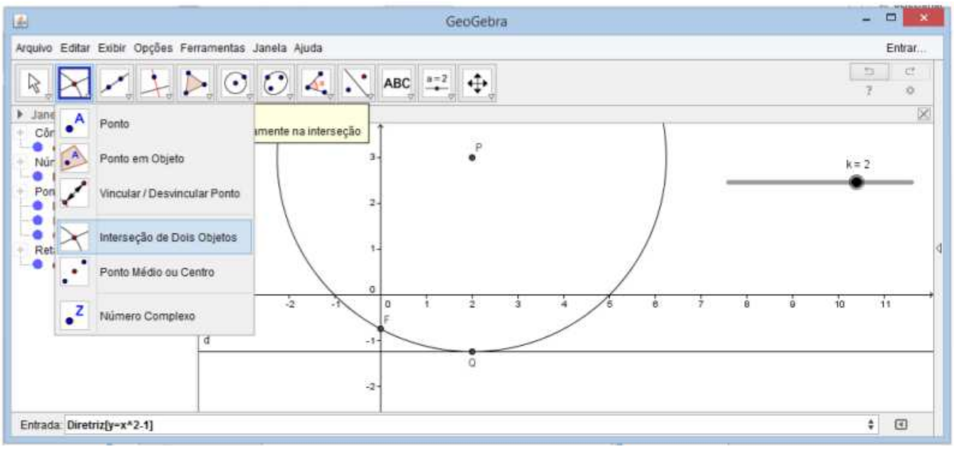

Figura 7.22: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

É preciso renomear este ponto de interseção para ponto Q.

• Traçar os segmentos PF e PQ;

Na barra de ferramentas, selecionar a função segmento em seguida clicar sobre os pontos extremos na janela de visualização(Figura 7.23).

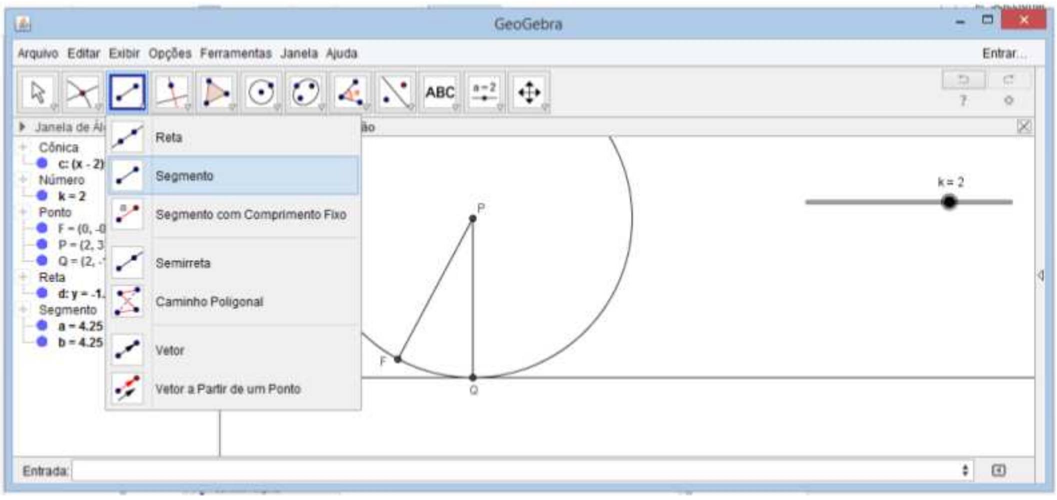

Figura 7.23: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Para finalizar basta habilitar o rastro do ponto P, que pode ser feito clicando sobre o ponto com o lado direito do mouse e em seguida selecionando a função “habilitar rastro”.

Tudo pronto, para ver o resultado basta animar o ponto P clicando com lado direito do mouse sobre o controle deslizante e selecionando a função “animar”.

Para interromper a animação basta repetir o procedimento anterior.

7.4 Dobradura

• Traçar a diretriz;

Traçar uma reta d qualquer, é conveniente escolher uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

Na barra de ferramenta selecione a função “reta paralela” e em seguida clique no eixo escolhido e em um ponto qualquer fora deste eixo(Figura 7.24).

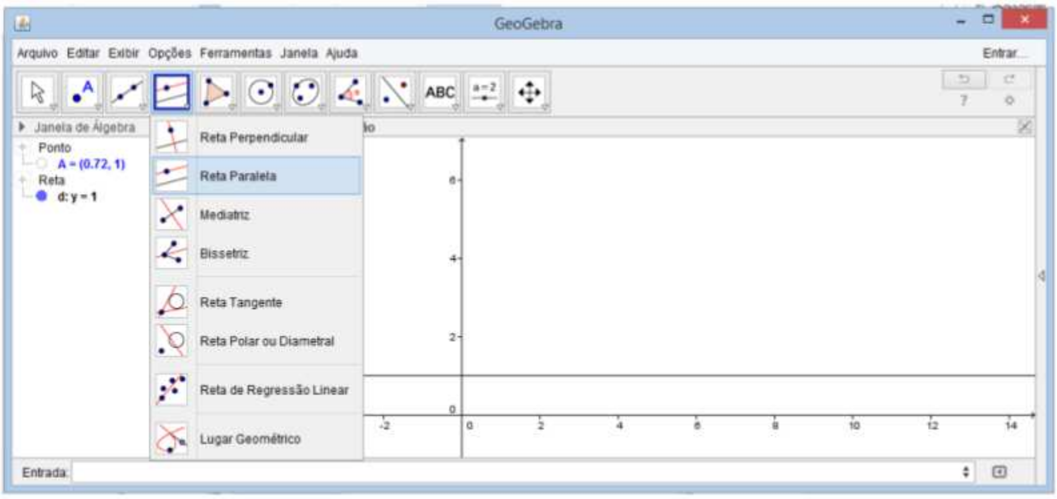

Figura 7.24: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

É preciso renomear a reta para d e ocultar o ponto auxiliar. Para isto, clique com o lado direito do mouse sobre os objetos e selecione as funções "renomear" e "exibir objeto" respectivamente.

• Marque um ponto F qualquer não pertencente à reta;

Na barra de ferramenta, selecione a função "ponto" e na janela de visualização clique onde deseja que o foco se localize(Figura 7.25).

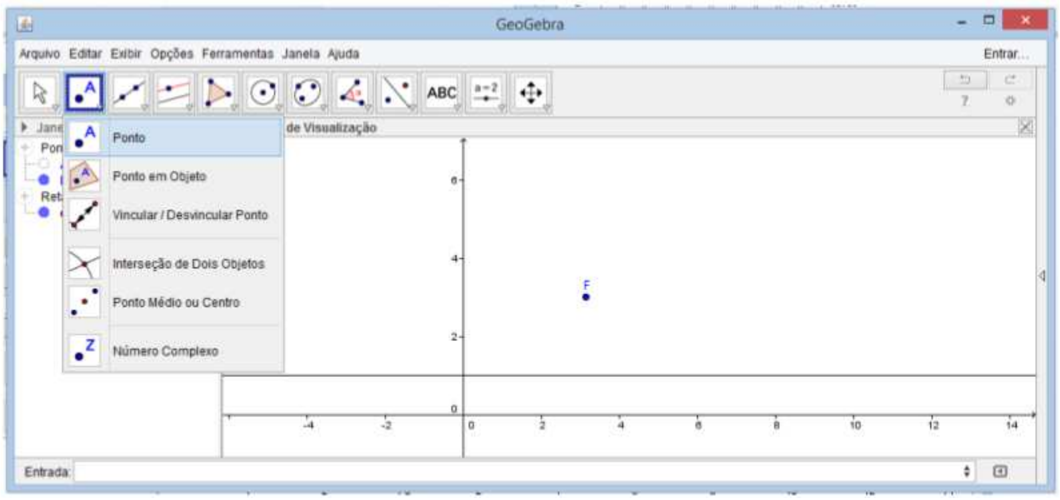

Figura 7.25: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Renomeie o ponto para F.

• Criar controle deslizante;

Na barra de ferramentas, selecione a função controle deslizante, clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer local da janela de visualização (convêm evitar o centro da janela). Configure o controle com os valores mínimo e máximo adequados(Figura 7.26).

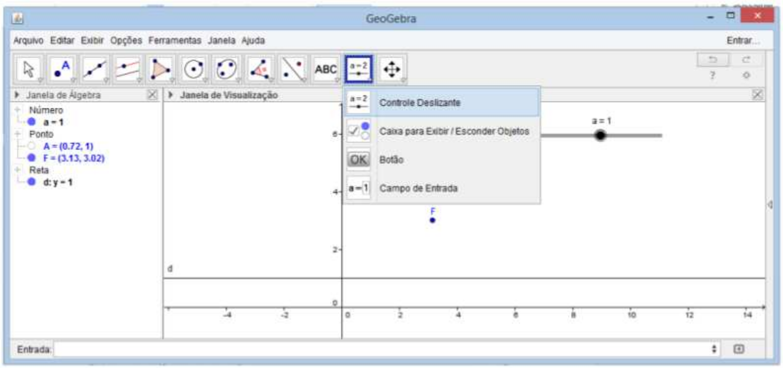

Figura 7.26: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

• Marque agora um ponto Q sobre a reta d;

Supondo que a sua reta seja paralela ao eixo X, então seu ponto terá as coordenadas (a, y_0). Onde a é a variável do controle deslizante e y_0 é o y????? da sua reta. Analogamente, se sua reta é paralela ao eixo Y, as coordenadas do seu ponto serão (x_0, a). No campo entrada localizado na parte inferior da janela digite o ponto $Q = (a, 1)$,

• Traçar a mediatriz do segmento FQ;

Na barra de ferramentas selecionar a função "mediatriz" e na janela de visualização clicar nos pontos F e Q(Figura 7.27).

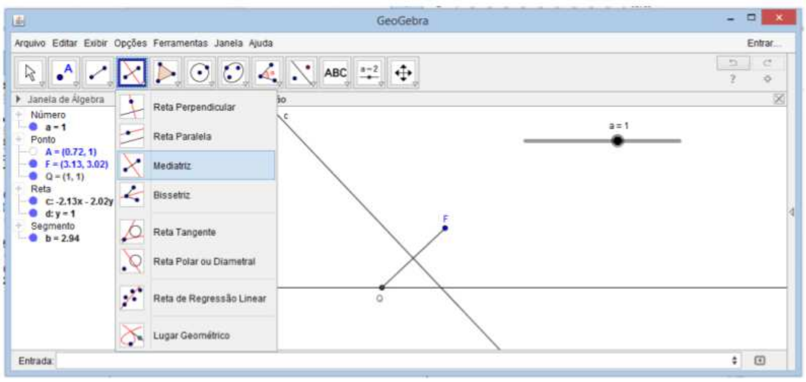

Figura 7.27: Software GeoGebra 5.0.74.0-3D (10 Março 2015)

Pronto, agora basta habilitar o rastro da mediatriz clicando com o botão direito do mouse sobre a mesma e selecionando a função “habilitar rastro”.

Para visualizar a animação clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a função “animar”.

Capítulo 8

Considerações Finais

Pretendemos com esses estudos ampliar o nosso olhar para este assunto de forma midiática, a fim de diferenciar e diversificar o ensino da Parábola na abordagem Matemática e na contemporaneidade, entendemos que possível um melhor aproveitamento e exploração nas abordagens deste tema com os alunos iniciantes do ensino médio. Com o uso do software GeoGebra podemos esclarecer nossos alunos quanto aos elementos e a definição clara de uma parábola, fato necessário, visto que estes alunos já trabalham que esta curva.

A expectativa é que este trabalho favoreça a compreensão, por parte dos alunos, das aplicações da parábola no seu cotidiano. Determinadas indagações se tornam simples com este entendimento, por exemplo: "porque as antenas são parabólicas?"; ou "porque o deslocamento horizontal de um móvel em lançamento oblíquo é o mesmo na subida e na descida?". Dada sua relevância, esse trabalho é indicado para os docentes do ensino da Matemática e a quem desejar refletir sobre o conhecimento matemático e a práxis pedagógica contextualizada em sala de aula.

E, partindo do pressuposto da importância da Matemática, bem como de sua contribuição na formação intelectual e do raciocínio lógico dos educandos, nossa proposta traz como viés as premissas da utilização do conhecimento prévio dos alunos na aplicação da Geometria plana, a utilização do software GeoGebra para a construção de parábola e para comparação de resultados com objetivos diagnósticos na solução de problemas que envolvam as Parábolas, é o que intenta este trabalho.

Bibliografia

[1] WAGNER, E. *Porque as Antenas são parabólicas?.* RPM 33, pp. 11-15, 1997.

[2] Alves, S., *A Parábola Revisitada.* I Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, 2009.

[3] Lehman, Charles H., *Geometria Analítica.* 8ª Edição, Globo, São Paulo, 1995.

[4] Hellmeister , Ana C. P., *Geometria em Sala de Aula.* 1 Edição, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[5] Boyer, C. B., *História da Matemática.* Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1974.

[6] Malagutti, Pedro L. A., *Inteligência Artificial no Ensino Médio.* UFSCar, São Carlos,2002.

[7] Talavera, L. M. B., *Parábola e Catenária: história e Aplicações.* Dissertação (Mestrado em Educação), USP, São Paulo, 2008.

[8] Sato, J., *As Cônicas e suas Aplicações.* UFU,Uberlândia-MG,2004.

[9] Rodrigues, J., *A Conspiração Solar do Padre Himalaya.* Disponível em <http://www.apagina.pt>. Acesso: 17 de outubro de 2014.

[10] Silva, J. J. A., *Cônicas e Quádricas no Ensino Médio.* Monografia (Especialização em Matemática), UFAM, Manaus, 2010.