Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Sociedade Brasileira de Matemática

Carla Saturnina Ramos de Moura

Análise do processo de conceitualização de probabilidade por estudantes do Ensino Médio a partir da Teoria dos Campos Conceituais

Juazeiro- BA

2014

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Sociedade Brasileira de Matemática

Carla Saturnina Ramos de Moura

Análise do processo de conceitualização de probabilidade por estudantes do Ensino Médio a partir da Teoria dos Campos Conceituais

Dissertação apresentada à Comissão Local do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: ProfºMsc. Evanilson Landim Alves

Juazeiro- BA

2014

	Moura, Carla S. R.
M929a	Análise do processo de conceitualização de probabilidade por estudantes do Ensino Médio a partir da Teoria dos Campos Conceituais / Carla Saturnina Ramos de Moura. -- Juazeiro, 2014.
	iv. 67 f.: il. ; 29 cm
	Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Juazeiro - BA, 2014.
	Orientador :ProfºMSc. EvanilsonLandinAlves
	Inclui referências.
	1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Probabilidade. I. Título. II. Alves, EvanilsonLandin. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 510

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

ANÁLISE DO PROCESSO DE CONCEITUALIZAÇÃO DE PROBABILIDADE POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO A PARTIR DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Por:

CARLA SATURNINA RAMOS DE MOURA

Dissertação aprovada em 03 de outubro de 2014.

Evanilson Landim Alves

Orientador: Prof. Me. Evanilson Landim Alves
(Universidade de Pernambuco – UPE)
(PROFMAT - UNIVASF)

Prof. Dr. Claudemiro de Lima Júnior
(Universidade de Pernambuco - UPE)

Lucília Batista Dantas Pereira

Profª. Drª. Lucília Batista Dantas Pereira
(Universidade de Pernambuco – UPE)

João Paulo Carneiro Barbosa

Prof. Me. João Paulo Carneiro Barbosa
(Universidade de Pernambuco – UPE)

Juazeiro
2014

Ao meu querido esposo Fábio de Moura, que sempre esteve do meu lado, apoiando-menos momentos mais difíceis.

Aos meus filhos Diogo e Mariana.

Aos meus queridos pais Florêncio e Maria das Mêrces.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial, ao meu esposo Fábio de Moura, pelo incentivo e apoio que me deram durante estes anos de estudo.

Ao meu orientador Prof. MSc. Evanilson Landim, pela atenção e orientação.

Aos estudantes e ao professor de matemática da turma em que desenvolvi minha pesquisa, pela participação e consideração que tiveram neste trabalho.

Aos meus colegas de turma, em especial Alice, Everaldo, Paulo, Manoel, Edilson, Jurandir e José Dantas, pela amizade conquistamos e peloo tempo de estudo que passamos juntos, compartilhando conhecimento e experiências.

A Deus, por estar sempre comigo, pois, sem ele, não somos nada.

“O êxito da vida não se mede pelo caminho que você conquistou, mas sim pelas dificuldades que superou no caminho.”

Abraham Lincoln

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo verificar como ocorre a construção do conceito de probabilidade por estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Essa investigação teve como fundamentação a Teoria dos Campos Conceituais, proposta pelo psicólogo francês GeràrdVergnaud. A pesquisa desenvolveu-se em dois momentos; o primeiro foi a aplicação de jogos que tratavam de forma lúdica o conceito de probabilidade, o segundo foi a aplicação de uma sequência de atividades, envolvendo os mesmos conceitos abordados nos jogos. No primeiro momento, os estudantes trabalharam em grupo, enquanto no segundo momento resolveram individualmente as questões propostas. Os resultados indicam que as propostas desenvolvidas tiveram importante contribuição na elaboração do conceito de probabilidade pelos estudantes participantes. Porém, para uma aprendizagem mais significativa, faz-se necessário que o estudante conheça outras situações relativas aosconceitos ora investigados. No entanto, mesmo apresentando diversas dificuldades, principalmente em conceitos como probabilidade condicional e probabilidade da união e/ou interseção de eventos, os resultados apontam que os participantes estão no caminho que conduz à compreensão dos conceitos e fenômenos probabilísticos, o que, de acordo com Vergnaud, é absolutamente natural, visto que a compreensão de um conceito ou de um campo conceitual só ocorre quando quem aprende é capaz de resolver diversas situações de natureza distinta, analisar suas formas de representação e mobilizar invariantes operatórios, tais como teorema em ação e conceito em ação.

Palavras-chave: Aprendizagem; Probabilidade;Jogos Matemáticos;Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

The aim of this research is to examine the process of building up the probability concept with the student’s aid those who are enrolled in Second Grade of High School. This quest had as theoretical foundation in Conceptual Areas Theory propounded by the French psychologist GeràrdVergnaud. It was carried out in two different moments, the first one was based in setting up games that coped with the playful way to deduce the probability concept; the second moment was about an enforcement of sequences of tasks involving the same concepts addressed in those games. At the first step, the students worked in groups, whilst, in the second step they solved the exercises individually. The outcome shows that the proposals, which were deliberated, had a paramount contribution during the formulation the probability concept by the students who took part in it. Yet, to validate the learning process it was necessary the students got to know other situations related to the conceptual area by that time was being checked. Even though showing several hardships, mainly en the concepts such as: conditional probability as well as in probability of union and/or intersection of events, the results displayed the students are on the way that guides them to the comprehension of those concepts and probabilistic phenomena. According to Vergnaud, it is absolutely natural, in as much as, the understanding of a concept or a conceptual area only occurs when the student is able to solve various situations from unlike complexion, plus, analyze its moulds of presentation and mobilize operative invariants, like: theorem of action and concept in action.

Key words: Learning; Probability; Mathematic games; Conceptual Areas Theory

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, a Matemática é tida como uma ciência rigorosa, formal e abstrata. Tais concepções levam a uma prática pedagógica impessoal e, por vezes, dissociada da realidade, o que torna o ensino e a aprendizagem processos cercados de dificuldades. A Matemática faz parte da vida e pode ser aprendida de uma maneira dinâmica, desafiante e divertida. Desse modo, assume ainda mais um papel científico, deixando de ser uma simples ferramenta necessária, sendo necessária e importante para as demais ciências.

Dentro desse contexto, está inserida a Probabilidade, que, mesmo estando inserida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), seu ensino nas escolas ainda se dá de forma superficial, dificultando, assim, a construção desse conceitono estudante. Diante desse fato, sentimos a necessidade de investigar como ocorre a compreensão dos conceitos probabilísticos por estudantes do 2º ano do Ensino Médio,identificando em quais das situações eles apresentaram maior dificuldade para responder ao questionamento proposto, o que pode contribuir para os professores nortearem seu trabalho em sala de aula.

No primeiro capítulo,apresentamos um breve histórico do ensino de Matemática no Brasil; em seguida, tratou-se o ensino de Matemática segundo a literatura e os Parâmetros Curriculares Nacionais. Tanto a literatura quanto os PCN apontam para a importância da utilização dos jogos no processo de aprendizagem. Ainda, apresenta-se um breve relato do contexto histórico da Probabilidade.

No segundo capítulo, foi apresentada a Teoria dos Campos Conceituais, proposta pelo psicólogo francês GerárdVergnaud.

O terceiro traz à tona os objetivos gerais e específicos do trabalho e, ainda, apresenta a forma na qual foram realizadas a coleta e análise dos dados.

O quarto capítulo apresenta os resultados obtidos e a discussão dos mesmos, tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais.

Finalmente, sintetizamos os principais resultados e indicações deste estudo nas considerações finais.

CAPÍTULO 1

ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

O ensino brasileiro foi, durante mais de duzentos anos, dominado quase exclusivamente pelos padres da Companhia de Jesus. Durante esse período, as escolas secundárias seguiram a tradição clássica humanista. Muitos jesuítas não viam com bons olhos a matemática. Os estudos das relações misteriosas entre números inquietavam os religiosos.

Em algumas escolas jesuítas, entretanto, devido ao empenho de seus mestres, os estudos matemáticos foram mais incentivados. Com a expulsão dos jesuítas do Brasil, em 1759, o sistema educacional brasileiro, praticamente, desmoronou, restando apenas alguns poucos centros educacionais.

A partir de 1772, foram criadas pela reforma pombalina[1] as chamadas aulas régias, aulas de disciplinas isoladas. Essa medida representou um retrocesso em termos institucionais uma vez que tais aulas eram avulsas.

> A permanência praticamente inalterada do sistema das Aulas Régias no Brasil da virada do século XVIII para o seguinte, estendendo-se ainda durante o primeiro reinado, deveu-se à continuidade dos modelos de pensamento em nossa elite cultural. Existiu um grande descompasso entre o pretendido pelo governo monárquico – tanto o português quanto o brasileiro, após a independência – e aquilo que as condições sociais e econômicas viriam permitir, dentro de um modelo produtivo excludente, escravista e pautado numa mentalidade que contribuía para se perpetrar tal situação (CARDOSO, 2004, p. 190).

Ainda na primeira metade do século XIX, as aulas avulsas das disciplinas matemáticas existiam em número bastante reduzido e que, além disso, eram pouco frequentadas. Apesar desse desinteresse demonstrado pelas aulas régias, as novas tendências chegaram a produzir alguns efeitos, como a criação do Seminário de Olinda pelo bispo Azeredo Coutinho, em 1798. Durante todo o período colonial e imperial, além das aulas avulsas, existiam os seminários e colégios chamados na época de Liceus.

Haidar (1972) relata a situação em que se encontravam os cursos preparatórios na década de 30 do século XIX. De acordo com a autora, os cursos anexos estavam desorganizados e se resumiam a uma grande quantidade de aulas avulsas.

A criação do Colégio Pedro II, em 1837, representou um primeiro passo na direção de mudanças no ensino secundário brasileiro. Segundo Haidar

> Os estudos simultâneos e seriados, organizados em um curso regular de 6 a 8 anos. Ensinar-se-iam no novo colégio as línguas: latina, grega, francesa e inglesa, a gramática nacional. A geografia e historia, as ciências naturais, as matemáticas, a música vocal e o desenho. O Colégio Pedro II, primeiramente tinha um regime de internato e a partir de 1856, o duplo regime de internato e externato. Aos bacharéis em Letras pelo Colégio Pedro II, foi concedido o direito à matricula em qualquer das Faculdades do Império (HAIDAR,1972, p. 22)

Em todas as várias reformas pelas quais passariam os planos de estudo do Colégio Pedro II, durante o período imperial, ora predominando o ensino clássico, ora o científico, a matemática esteve sempre presente, variando apenas a quantidade de horas destinadas a seu ensino.

Com a República e o primeiro ministro do recém-criado Ministério da Instrução, Correios e Telégrafos - Benjamin Constant - todo o sistema educacional brasileiro passou por uma profunda reforma oficializada pelo decreto nº. 891, de 8 de novembro de 1890, que ficou conhecida por Reforma de Benjamin Constant. Essa reforma foi elaborada segundo a filosofia de Augusto Comte.

Pode-se dizer que a ideia-chave do Positivismo de Comte era a Lei dos Três Estados, que afirmava que o homem passou e passa por três estágios em suas concepções, sendo elas de acordo com Superti (1998)

- **Teológico:** "No qual as explicações sobre o mundo eram fundadas na vontade de uma pluralidade de divindades, num primeiro momento, e depois, com seu amadurecimento, na de um só Deus. Pois, não tendo como basear suas explicações na razão, o espírito teológico alicerçavam-nas na fé irracional. " (SUPERTI, 1998, p 4).
- **Metafísico :**Nesse estado Superti (1998) destaca:

> Nele, os dogmas da fé eram questionados e, sendo estes o fundamento da ordem teológica, toda ela é posta em questão, dissolvendo-se a organicidade de seu saber. No entanto, por ser

> necessariamente constituído pela negação da Ordem, o espírito metafísico não consegue uma outra sistematização, servindo apenas de transição para o estado positivo.(SUPERTI, 1998, p. 4)

- **Positivo**: Superti (1998) destaca :

> Neste estado, o poder temporal, equivalente material da ordem espiritual positivista, seria exercido pelos industriais. Porque, para Comte, era natural que os ricos detivessem a autoridade econômica e social indispensável para o conjunto da coletividade, uma vez que constituíam o topo na hierarquia das capacidades. .(SUPERTI, 1998, p. 6)

A Reforma de Benjamin Constant tinha como princípios orientadores a liberdade e laicidade do ensino, como também a gratuidade da escola primária. Esses princípios seguiam a orientação do que estava estipulado na Constituição brasileira de 1824. Uma das intenções dessa Reforma era transformar o ensino em formador de estudantes para os cursos superiores e não apenas preparador. Cunha (1986) destaca que

> Além do alargamento dos canais de acesso ao ensino superior, Benjamin Constant criou condições legais para que escolas superiores mantidas por particulares viessem a conceder diplomas dotados do mesmo valor dos expedidos pelas faculdades federais. (CUNHA, 1986, p. 172-173).

Outra intenção era substituir a predominância literária pela científica. TalReforma foi bastante criticada pelos positivistas, já que não respeitava os princípios pedagógicos de Comte; pelos que defendiam a predominância literária, já que o que ocorreu foi o acréscimo de matérias científicas às tradicionais, tornando o ensino enciclopédico.

Nenhuma das várias reformas que ocorreram após a de Benjamin Constant, até 1930, chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro. Ao lado do ensino secundário e das faculdades, começaram a surgir as escolas técnicas, especialmente para atender às necessidades da agricultura e da indústria.

Foi neste espírito de mudanças que surgiu uma proposta educacional, que ficou conhecida como Movimento da Escola Nova, que destacava que o uso da racionalidade era fundamental porque era necessário enfatizar o trabalho científico; buscar métodos que dessem conta de explicar a realidade educacional; compreender o desenvolvimento do psiquismo dos educando e criar um ambiente propicio à educação. A liberdade pautava-se na espontaneidade, na capacidade de criação e na observação das diferentes aptidões apresentadas pelas crianças e adolescentes, ou seja, priorizavam-se métodos ativos. De acordo com Manacorda,

> Nas escolas 'novas' a espontaneidade, o jogo e o trabalho são elementos educativos sempre presentes: é por isso que depois foram chamadas 'ativas'. São frequentemente escolas nos campos, no meio dos bosques, equipadas com instrumentos de laboratório, baseadas no autogoverno e na cooperação, onde se procura ao máximo respeitar e estimular a personalidade da criança (MANACORDA,1997, p. 305).

Na proposta pedagógica da Escola Nova, aparece a necessidade de mudar os parâmetros da educação, colocando-a em consonância com os novos caminhos do mundo contemporâneo. As mudanças apontadas pela Escola Nova demonstram que, a partir do século XIX, diferentes tendências pedagógicas apontam para o esgotamento da Pedagogia Tradicional e a necessidade de mudança significativa na forma de educar.

Em 1928, a Congregação do Colégio Pedro II apresentou uma proposta de alteração da seriação do curso secundário, liderado pelo professor Euclides Roxo. Nessa proposta, ele se contrapõe à orientação geral do ensino de Matemática época, caracterizado por uma apresentação repetitiva, abstrata e lógica. Considera os interesses do estudante e seu estágio de desenvolvimento cognitivo e enfatiza a intuição, além decontextualizar a Matemática, deixando o tratamento rigoroso do assunto para níveis mais avançados da aprendizagem.

Podemos perceber a identidade de Roxo neste trecho de seu livro A matemática na educação secundária:

> Graças ao crescimento monstruoso da indústria e do comércio, tornou-se necessário orientar o ensino no sentido de não limitá-lo aos conhecimentos teóricos, mas atribuir, ao contrario, uma grande importância ao que seja imediatamente utilizável na pratica (ROXO, 1937, p. 56).

Francisco Campos, o primeiro-ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública, acatou, em sua reforma para o ensino secundário, todas as ideias modernizadoras presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II, na parte relativa ao ensino da Matemática.

No Brasil, as questões relativas ao ensino de Matemática começaram a ser discutidas com maior intensidade pelos professores durante a década de 50, devido principalmente à realização dos primeiros Congressos Nacionais de Ensino da Matemática. O primeiro desses congressos realizou-se em 1955, na cidade de Salvador, por iniciativa da faculdade de Filosofia da universidade da Bahia.

De acordo com Soares, Dassie e Rocha:

> o objetivo do Congresso era tratar de assuntos mais diretamente ligados ao ensino de Matemática como os programas, o livro de classe e as tendências modernas do ensino, além dos problemas ligados ao aperfeiçoamento dos professores de Matemática.(SOARES, DASSIE, ROCHA, 2008, p. 736).

No segundo e terceiro congressos, realizados em 1957 e 1959, respectivamente em Porto Alegre e Rio de Janeiro, percebeu-se claramente uma ampliação do número de professores.Apesar de as novas ideias terem sido apresentadas e discutidas nesses dois congressos, não seriam eles que desencadeariam o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Isso seria conseguido por meio das atividades desenvolvidas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM - fundado em 1961 por professores do estado de São Paulo.

De acordo com Benites (2011):

> Os defensores da Matemática Moderna enfatizavam que não se tratava de ignorar ou destacar a Matemática tradicionalmente ensinada, mas sim, fazer com que a Matemática nova continuasse a antiga e a tornasse mais manuseável, fornecendo-lhe instrumentos novos e conferindo unidade a uma ciência que se dispersava.(BENITES, 2011, p. 31)

O objetivo era pôr em dia o ensino tradicional das escolas e acrescentar aos programas certos temas como o estudo de conjuntos; conceitos de grupo, anel e corpo; espaços vetoriais; matrizes; álgebra de Boole; noções de cálculo diferencial e integral e estatística.

Segundo Soares, Dassie e Rocha (2004), ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, centrando o ensino nas estruturas e usando a linguagem dos conjuntos como elemento de unificação, a reforma deixou de considerar que aquilo que se propunha estava fora do alcance dos estudantes e dos professores. Estes, obrigados a ensinar uma Matemática por cujos métodos não foram preparados, ministravam um ensino deficiente e só agravavam os problemas. D'Ambrósio destaca sua opinião em relação à Matemática Moderna

> Se a Matemática Moderna não produziu os resultados pretendidos, o movimento serviu para desmistificar muito do que se fazia no ensino da Matemática e mudar- sem duvida para melhor- o estilo das aulas e das provas e para introduzir muitas coisas novas, sobretudo na linguagem moderna de conjuntos. Claro que houve exageros e incompetência, como em todas as inovações. Mas o salto foi altamente positivo. Isso se passou com essas mesmas características em todo mundo [...] (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 57-58).

Segundo Búrigo:

> a compreensão do alcance de um movimento envolve a investigação do contexto de sua emergência, dos interesses e motivações de seus protagonistas, das forças que o apoiaram ou a ele se opuseram, da sua capacidade de conquistar adesões e das condições. (BURIGO, 2006, p. 36)

Esse movimento entrou em declínio e se extinguiu a partir do momento em que se evidenciaram inadequações no modelo e distorções ocorridas em sua implementação, principalmente no Brasil.

As ideias do movimento da Matemática Moderna, até hoje, podem ser percebidas não apenas nas discussões teóricas, como também na prática da Educação Matemática. Grandes mudanças começaram a surgir na década de 80 do século XX, pois aspectos como a resolução de problemas, ligação da Matemática à vida real, relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, imprimiram novos rumos ao currículo.

Ao fazer uma reflexão sobre o ensino de Matemática no século XXI, destacamos a opinião de Onuchic e Allevato

> Reflexões e pesquisas sistemáticas, nos mais diversos níveis de ensino, perspectivas e linhas de pesquisa têm contribuído, sensivelmente, para o aprimoramento e melhor compreensão dos variados aspectos envolvidos nas atividades de ensino, aprendizagem e avaliação em salas de aula de Matemática.(ONUCHICe ALLEVATO, 2011, p. 87).

Os autores apoiam-se na indiscutível dificuldade enfrentada no ensino de Matemática, levando professores e pesquisadores a buscarem fundamentação e perspectivas para investigarem as diversificadas questões que surgem neste cenário. Essa complexidade decorre da presença e da inter-relação de inúmeros fatores trazidos ao contexto escolar por, pelo menos, cinco elementos: o professor, os estudantes, a disciplina (no caso, a Matemática), a escola e a sociedade.

Sadovsky destaca que:

> no modelo pedagógico atual, os professores mostram a utilidade das fórmulas e das regras matemáticas, por meio de um treinamento de aplicações: definição, exercício-modelo, exercício de aplicação. Neste contexto perguntas clássicas como: “Para que serve isso, professor? De onde veio? Por que é assim?”, revelam a inadequação do método de ensino, não permitindo, portanto, a oportunidade de desenvolver um trabalho intelectual mais profundo em sala de aula.(SADOVSKY, 2007, p. 7)

Nesse sentido, a autora propõe que o professor desafie seu estudante, proponha situações que ele considere complexas, mas não impossíveis, no sentido de gerar nele certa tensão que o anime a ousar, que o convide a pensar, a explorar, a usar conhecimentos adquiridos e a testar sua capacidade para a tarefa que tem em mãos.

Segundo Lopes e Rezende (2010), o ensino tradicional da Matemática que se baseia na apresentação oral do conteúdo pelo docente abordando definições e, posteriormente, demonstrações de propriedades, exercícios de fixação e de aplicação, tem se mostrado ineficaz. O autor apresenta a Resolução de Problemas como uma proposta para tornar o ensino de Matemática mais significativo para o estudante.

Para Moura (1992), a união entre jogo e a resolução de problemas está intimamente vinculada à intencionalidade do professor.

> É possível combinar jogo e resolução de problemas; porém, fazer isto é muito mais que uma simples atitude, é uma postura que deve serassumida na condução do ensino. E assumi-la com vistas ao desenvolvimento de conceitos científicos exige um projeto de ensino, inserido no projeto coletivo da Escola. Fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, à Educação Matemática. (MOURA, 1992, p. 51).

1.1 O ENSINO DA MATEMÁTICA SEGUNDO OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Mariano (2004) ressalta que falar acerca do ensino de Matemática, geralmente, é incorrer na equivocada ideia de uma disciplina feita para alguns. Hoje,ocorre uma discussão que vai de encontro aos tabus e mitos relacionados ao Ensino de Matemática e, nesse sentido , os PCN apostam em novas metodologias de trabalho.

> É consensual a ideia que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática (BRASIL,199, p. 32).

Ricardo, Custódio, Junior (2007), destacam que as atuaispropostas de reforma da educação básica do sistema educacional brasileiro, comprometidas com o acesso ao ensino, trazem um leque de orientações que tem como objetivo, entrar em sintonia com o mundo contemporâneo. Esugerem a revisão não só dos conteúdos escolares, como também das práticas docentes. Nesse sentido, cumpre destacar as manifestações de O'Brien(1999).

> O método tradicionalista de ensino se apoia na memorização de fatos e procedimentos totalmente desvinculados do contexto da vida real. O princípio é ao mesmo tempo básico e desprezível: empurrar conceitos que devem ser relembrados e recitados pelos alunos toda vez que o professor desejar. É mais ou menos o mesmo processo adotado com os papagaios ensinados (O'BRIEN,1999, p. 55).

Ainda, segundo Maurari

> Aprender a ensinar de maneiras diferentes pode não ser tão simples para os professores. A mudança em sua prática é um processo que exige mudanças de comportamento como, por exemplo, ser de novo aprendiz, desenvolver novas compreensões dos conteúdos ensinados e estar engajado em um grupo de pessoas que tenham, também, o objetivo de repensar ou mudar suas práticas(MAURARI,2011, p. 189).

Os PCN destacam dois aspectos básicos a respeito do ensino de Matemática, "um consiste em relacionar observações do mundo real com representações; outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos”. (BRASIL,1998, p. 56-57)

De acordo com os PCN de Matemática, para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o estudante, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

1.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO ATUAL

Ensinar Matemáticaé um desafio para os educadores, ora pela dificuldade na escolha metodológica aplicada em sala , ora pelo desinteresse dos estudantes. A escolha da metodologia de ensino é uma tarefa, que envolve muita responsabilidade, já que o professor, ao escolher uma proposta, deve conhecê-la, analisar suas vantagens e benefícios, assim como observar sua adequação ao ensino dos conteúdos que necessitam ser trabalhados.

> O desinteresse por parte dos educandos é resultado, muitas vezes, da utilização de práticas que não atendem aos interesses dos alunos em função, dentre outras coisas, do abismo existente entre o modo como professores e alunos percebem a matemática. O professor imagina que seus alunos terão o mesmo prazer que ele tem ao lidar com a matemática, no entanto, o aluno não consegue vê-la do mesmo modo, e por isso não a compreende (VIEIRA,2002, p. 155).

Muitas vezes, os estudantes desenvolvem uma visão incorretada Matemática, já que essa é transmitida com base na memorização, na repetição de resultados e fórmulas sem relação alguma com a realidade.

> Para acabar com esses entraves no ensino e na aprendizagem da matemática, considera-se que os educadores deveriam conhecer e adotar a proposta sociointeracionista. São inúmeros os benefícios da utilização de tal proposta pedagógica, e dentre eles podemos citar que a aprendizagem, ao tornar-se significativa, permite que o aluno aprenda para a vida, e não para determinado momento. Salienta-se também que, na perspectiva referida, o aluno aprende de acordo com suas possibilidades e seu ritmo, encaminhando-se para a autonomia ações, críticas e trocas (RANGEL, 2002, p. 45).

Nesse sentido, o professor de Matemática tem a importante tarefa de orientar a aprendizagem, auxiliar o estudante a encontrar estratégias cognitivas. O estudante é sujeito ativo de sua aprendizagem, cria hipóteses, experimenta, questiona e, dessa forma, vai construindo seu conhecimento. Para essa construção, deve ser considerada a bagagem de conhecimento que o estudante possui, pois é a partir dela que ele estabelecerá relações para aprendizagem e só por meio do que ele já sabe é que começa a compreender e dar significado a um conteúdo.

Segundo Coll(2003, p. 61) "tendo em vista que uma aprendizagem é tanto mais significativa quanto mais relações com sentido o estudante for capaz de estabelecer entre o que já conhece, seus conhecimentos prévios, e o novo conteúdo que lhe é apresentado como objeto de aprendizagem".

Adotada uma propostasociointeracionista[1], a relação professor/estudante torna-se mais próxima, pois há um maior diálogo, trocas de experiências, já que há uma aprendizagem mútua na qual todos os envolvidos no processo aprendem. O sociointeracionismo favorece, portanto, a relação afetivo-emocional entre professores e estudantes, e a afetividade é um fator que jamais deve ser esquecido no trabalho do professor, pois, por meio dela, o professor conhece melhor seu estudante, seus interesses, e pode criar, nas aulas, um clima mais favorável à aprendizagem.

Para o professor desenvolver um bom trabalho em sala de aula, é essencial trabalhar com resolução de problemas e por projetos, propordesafios que incitem os estudantes a mobilizar seus conhecimentos, utilizar recursos (como jogos).Tudo isso pressupõe uma pedagogia ativa, cooperativa.

Como subsídio para o professor em sala de aula,Flemming, Luz, Mello (2005) destacam as Tendências da Educação Matemática, que são formas de trabalho que sinalizam mudanças no contexto da Educação Matemática. Ao se mostrarem eficientes em sala de aula e ao serem utilizadas por muitos professores, esstas formas de trabalho passam a ser consideradas propostas didáticas relevantes e que podem contribuir com o trabalho docente na busca da inovação em sala de aula.

Segundo Flemming, Luz, Mello (2005)

[1]Abordagem Sociointeracionista, de Vygotsky, segundo a qual o desenvolvimento humano se dá em relação nas trocas entre parceiros sociais, por meio de processos de interação e mediação.

> A Educação Matemática surgiu no século XIX, em consequência dos primeiros questionamentos sobre o ensino de Matemática. Os matemáticos da época preocupavam-se em como tornar os conhecimentos mais acessíveis aos estudantes e buscavam uma renovação no ensino de Matemática. No Brasil, foi na década de 1950 que as discussões sobre Educação Matemática tiveram suas origens. No entanto, sua consolidação se deu em 1988, ano de fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM.(FLEMING, LUZ, MELLO, 2005, p 12)

Neste trabalho serão destacadas algumas tendências no Ensino de Matemática abordadas pelos autores, tais como: Modelagem Matemática, Etnomatemática, Resolução de Problemas e Jogos.

1.2.1- Modelagem Matemática

Modelagem tem como objetivo a compreensão dos diversos fenômenos que ocorrem em nosso cotidiano, utilizando a linguagem matemática. Bienbemgut, Hein (2000) completam expondoque “é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento.” (2000, p. 11).

Segundo Lopes e Borba (1994), Modelagem Matemática é uma maneira de tentar entender a Matemática no cotidiano, de traduzir um problema real para a linguagem Matemática.

1.2.2- Etnomatemática

O termo etnomatemática foi criado por Ubiratan D’Ambrosio com o objetivo de descrever as práticas matemáticas de grupos culturais, a partir de uma análise das relações entre conhecimento matemático e contexto cultural (FIEMING,LUZ,MELLO, 2005, p.16).

De acordo com SCANDUZZI (2009):

> A etnomatemática aponta que educar não é somente apresentar problemas contextualizados, uma vez que a contextualização depende de fatores vivenciados do grupo e estes nem sempre são do educador. Não é apenas dar exemplos para motivação, pois o grupo já se sente motivado em seu cotidiano para dar conta de seus

> problemas- a própria realidade que os envolve gera expectativas na busca de solução. Também não é tratar apenas do cotidiano, pois as relações intra e intergrupais exigem muito mais. Educar matematicamente é desenvolver no diálogo simétrico formas de um diálogo franco, aberto, que exigirá do educador e do educando um crescer no conhecimento de arte ou na técnica de explicar , de compreender, de entender, de interpretar, de relacionar, de manejar e lidar com o entorno sociocultural.(SCANDUZZI, 2009, p. 19)

1.2.3- Resolução de Problemas

De acordo com Onuchic

> ... o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem.(ONUCHIC,1999, p. 215, apud FLEMMING, LUZ E MELLO).

Lupinacci e Botin (2004) destacam que:

> aResolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os estudantes para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.(LUPINACCI, BOTIN, 2004, p. 01)

1.2.4- Jogos

O jogo tem papel fundamental no desenvolvimento do ser humano e pode ser utilizado como uma ferramenta eficiente no processo educativo. Como destaca Melo (2008, p.2,3),“ao falar sobre o jogo em sala de aula, o estudante aprende inconscientemente, pois a diversão alivia a pressão escolar e a necessidade constante de dominar o conteúdo – a pressão escolar é substituída pela descontração e os resultados são mais expressivos.“

Neste trabalho, foi dado um forte enfoque à utilização de jogos, por entendermos que essa tendência apresenta contribuições importantes ao Ensino de Matemática e, mais especificamente, no Ensino de conceitos probabilísticos.

1.3 A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DE JOGOS NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Os jogos podem ser utilizados como ferramentas estimuladoras, facilitadoras e enriquecedoras que, por meio do lazer, estimulam de forma satisfatória o processo de aprendizagem do indivíduo.

De acordo com Silva (2006,p. 20),“cabe ao educador fomentar o gosto pelo brincar em seus estudantes, tornando o processo educativo mais prazeroso por meio da prática lúdica, proporcionando autonomia do educando”.

Durante muito tempo, o estudante era tido como um agente passivo no processo de aprendizagem, e o professor um mero transmissor de conhecimento. Com o passar do tempo, sentiu-se a necessidade de ter um ensino despertado pelo interesse do estudante tornando as aulas mais significativas. Seu interesse passou a ser a força que comanda o processo da aprendizagem. É nesse contexto que o jogo ganha um espaço como ferramenta ideal da aprendizagem, na medida em que propõe estímulo ao interesse do estudante.

Segundo Russo (2012, p.23), “jogar é uma atividade vital para as crianças, propor situações com jogos em sala de aula é vantajoso, trabalha o interesse e a atenção, desafia o raciocínio e estimula uma postura ativa da criança.”.

Antunes (2002, p. 36) afirma que "o jogo ajuda o estudantea construir suas novas descobertas, desenvolve e enriquece sua personalidade e simboliza um instrumento pedagógico que leva o professor à condição de condutor, estimulador e avaliador da aprendizagem.”

O processo de ensino-aprendizagem tem que ser prazeroso e significativo para estudantes e professores, e o trabalho com jogos vem para estimular a participação e interação entre docente e discente.

> Os jogos podem ser empregados em uma variedade de propósitos dentro do contexto de aprendizado. Um dos usos básicos muito importante é a possibilidade de construir-se a autoconfiança. Outro é o incremento da motivação. (...) um método eficaz que possibilita uma prática significativa daquilo que está sendo aprendido. Até mesmo o mais simplório dos jogos pode ser empregado para proporcionar informações factuais e praticar habilidades, conferindo destreza e competência. (SILVEIRA e BARONE, 1998, p.02).

A utilização de jogos na disciplina de Matemática parte da reflexão do docente na necessidade de alternativas que aumentem a motivação para a aprendizagem do estudante, explorando a concentração, o raciocínio lógico e o senso cooperativo de uma maneira que haja uma interação do estudante com os demais.

1.4- CONTEXTO HISTÓRICO DE CONCEITO DE PROBABILIDADE

De acordo com Gadelha (2004), pode-se caracterizar cinco períodos no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade: pré-história, origens, maturação da probabilidade clássica, escola de São Petersburgo e período moderno.

1.4.1- Pré-História

O período chamado de Pré-História tem sido marcado pelo fato de que a humanidade tem lidado com a incerteza desde épocas mais remotas na tentativa de obter vantagens em disputas e evitar perdas advindas de fatores imprevisíveis. Há milhares de anos os jogos de azar têm feito parte do cotidiano de muitas civilizações.

Silveira (2001) aponta que os jogos de azar são tão velhos quanto a humanidade.O autor indica a existência de provas arqueológicas da prática do jogo do osso há 40.000 anos.

Segundo Coutinho (2007), na antiguidade, jogava-se com um osso chamado astrágalos, que era retirado de animais, ele era utilizado como se fosse dado (na falta deste) porque esse osso tem quatro faces irregulares: o lado plano, o côncavo e o sinuoso. Possibilitando quatro posições diferenciadas, os astrágalos eram atirados sobre uma superfície plana, ganhando o que acertasse com a face escolhida.

Silveira (2001, p. 01) destaca que "historicamente, o jogo do osso e do dado foram os jogos mais praticados, sendo que o jogo do dado foi uma evolução do jogo do osso e surgiu na Índia e Mesopotâmia 3.000 a.C.. A partir daí, propagou-se no mundo grego, romano e cristão".

"Os povos que viviam na Mesopotâmia ou no Egito Antigo associavam a ideia do acaso às intervenções divinas. Ao longo do tempo, é constante ter essa relação com o acaso, associando-o com a crença em intervenções divinas". (COUTINHO,2007,p 51).

Segundo Tomaz (2011), quando se fala em organização de dados e aplicação simples da Teoria da Probabilidade, o nome de GerolamoCardano (1501-1576) não pode deixar de ser citado. Ele foi o pioneiro na sistematização de dados e a entender a lógica de alguns processos que, até então, eram tidos como aleatórios. Na época em que Cardano viveu,a Matemática era pouco desenvolvida, um período no qual a álgebra e a geometria estavam dando os primeiros passos, fez estudos sobre a teoria dos jogos e acabou escrevendo um tratado de 32 capítulos, com o título "O livro dos jogos de azar", em que inicia um estudo simplificado, mas de grande valia, da Teoria da Probabilidade.

Para Silveira (2001),Cardano é o iniciador do estudo matemático das probabilidades.

> Cardano foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de probabilidades favoráveis num evento aleatório e, assim, poder calcular a probabilidade de ocorrência do evento como razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades(SILVEIRA, 2001, p. 01).

Apesar dos estudos desenvolvidos, Cardano limitou-se a resolver problemas com dados estritamente numéricos e não produziu teoremas.

Tomaz (2011) ressalta que a aleatoriedade de certos eventos foi objeto de estudos de outros matemáticos, como Pacioli (1445-1517), Tataglia (1500- 1557) e Galileu (1554-1642), porém, assim como Cardano,limitaram-sea resolver problemas concretos, estritamente numéricos. Segundo o autor, a Teoria da Probabilidade começou a existir, de fato, após os estudos dePalcal (1623- 1662) e Fermat (1601-1665), que tiveram como base os estudos de Cardano.

1.4.2- Origens

Nessa etapa da história da probabilidade segundo Gadelha (2004) tem-se trabalhos desenvolvidos por Pascal e Fermat, os quais se destacaram por apresentar uma solução para um famoso problema proposto por Chevallier de Meré, um rico nobre francês com gosto pelo jogo.

A questão apresentada a Pascal era conhecida como problema dos pontos, que enunciava o seguinte: “Como distribuir as apostas em um jogo de azar não terminado.” (BERLINGHOFF,GOUVEA, 2010, p.211). Segundo o autor, nos jogos de azar, é comum que logo que as apostas são feitas o dinheiro não pertença a ninguém até que o jogo seja concluído, ficando o ganhador com tudo o que foi apostado. Então, o questionamento de DeMeré era como fazer a divisão de um jogo não concluído, sendo conhecidos os resultados parciais dos jogadores.

Berlinghoff e Gouvêa (2010) apresentam uma versão simples do problema dos pontos

> Xavier e Yvone apostaram cada um \$10 em um jogo de arremesso de moedas. Cada jogador joga uma moeda em sua vez. Se der cara, o jogador que lançou a moeda ganha um ponto, se não, o outro jogador ganha um ponto. O primeiro jogador a obter três pontos ganha os \$20. Agora, suponha que o jogo tenha quer interrompido quando Yvone tem 1 ponto, Xavier tem 2 pontos e está prestes a

> lançar a moeda. Qual é o modo mais justo de dividir os $20?(BERLINGHOFF,GOUVÊA, 2010, p 211).

Pascal comunicou o problema a Fermatpor meio de correspondências. Usando métodos diferentes, os dois matemáticos chegaram à mesma resposta para o problema.

A seguir, Berlinghoff e Gouvêa (2010) apontam um modo de Pascal de resolver o problema proposto anteriormente:

> Uma moeda não viciada tem probabilidades iguais de dar cara ou coroa. Assim, se cada jogador tivesse dois pontos, cada um teria uma probabilidade igual de ganhar o jogo na próxima jogada, portanto, seria justo que cada jogador recebesse a metade da quantia apostada a essa altura. Neste caso, Xavier tem 2 pontos e Yvone 1. Se Xavier lançar a moeda e ganha, ele terá 3 pontos, portanto terá os $20. Se Xavier perde, cada jogador terá 2 pontos, portanto cada um terá direito a $10. Assim, Xavier tem direito a pelo ao menos $10dessa aposta. Como é igualmente provável que Xavier ganhe ou perca o lance, os outros $10 devem ser divididos igualmente entre os jogadores. Logo Xavier deve receber $15 e Yone $5. (BERLINGHOFF eGOUVÊA, 2010, p 211).

Pascal e Fermat estudaram outros casos de jogos interrompidos, procedendo da mesma forma, reduzindo cada um a uma situação previamente resolvida e dividindo o dinheiro de acordo com isso.

De acordo com Viali (2008), para resolver o problema dos pontos, Pascal teve que usar técnicas mais apuradas, que envolviam um grande número de possibilidades. Pascal pode contar com uma notação mais apurada, como ocálculo literal (utilização de letras para representar quantidades conhecidas ou desconhecidas) que foi introduzido, em 1600, pelo francês François Viète (1540 - 1603) na obra In ArtemAnalyticamIsagoge; teve suporte também a álgebra desenvolvida por outro francês, René Descartes (1596 - 1650) em sua obra La Géometrie de 1637.

Segundo Gadelha (2004), Pascal fez um estudo detalhado do triângulo compondo os coeficientes binomiais, hoje conhecido como triângulo de Pascal. Para encontrar a solução para o problema dos pontos, Pascal utilizou o triângulo aritmético, *se ao jogador A faltam m pontos para ganhar e a B faltam n pontos, então a razão das probabilidades de ganharem é dada por*:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{m+n-1}{0} + \ldots + \binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{0} + \ldots + \binom{m+n-1}{m-1}}$$

Para Vega (2002, p. 59), “o impacto que as soluções de Pascal e Fermatprovocaram foi tão profundo, que, para muitos historiadores, 1654 é o ano de nascimento da Teoria da Probabilidade.”

Segundo Viali (2008), as trocas de cartas entre Pascal e Fermat deixou o holandês Huygens (1629-1695) curioso sobre o assunto em uma de suas viagens a Paris em 1655. Ao voltar à Holanda, ele escreve De Ratiociniis in Ludo Aleae (Sobre o Raciocínio em Jogos de Dados), que seria a primeira obra impressa sobre a Teoria da Probabilidade.

1.4.3- Maturação da Probabilidade clássica

Contribuições importantes seguiram-se logo ao trabalho de Pascal, Fermate Huygens, as mais notáveis sendo dadas por Jakob Bernoulli (1654-1705), DeMoivre (1667-1754) e Laplace (1749-1827).

De acordo com Viali (2008), Bernoulli foi o autor de um dos primeiros teoremas da Teoria da Probabilidade, a lei dos grandes números. “Este resultado é uma prova de que a frequência relativa de um evento tendo para a Probabilidade deste evento, quando n= ‘número de repetições do experimento’, tende ao infinito.” (VIALI, 2008, p.06).

Esse teorema foi exposto em 1713 na publicação póstuma do livro *ArsConjectandi*, de Jakob Bernuolli. (SILVA e COUTINHO, 2005, p 194).

De acordo com Gadelha (2004,p. 06),“a lei dos grandes números é o primeiro teorema limite da Probabilidade, um resultado que estabelece uma relação entre os conceitos de Probabilidade e frequência relativa, que é fundamental para a teoria moderna de amostragem”.

Em 1718, o matemático francês, Abraham DeMoivre, publicou o livro Doctrineof Chances, que tratava sobre a teoria do acaso, onde expôs a definição de independência estatística e problemas relacionados com dados e outros jogos, por exemplo a Probabilidade de tirar bolas de cores diferentes de uma urna(FERREIRA; TAVARES e TURKMAN, 2002, p.08).

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010), Laplace publicou a *Teoria Analítica das Probabilidades* em que reunia seus trabalhos e de outros autores sobre a Teoria da Probabilidade e estatística. Por ser uma obra técnica e densa, tornava-a inacessível ao grande público, exceto aos leitores mais determinados e matemáticos mais sofisticados.

Para tornar suas ideias mais acessíveis, Laplace publicou outro livro: *Ensaio Filosófico sobre Probabilidades,* em que defendia a aplicabilidade da Probabilidade em diversas atividades humanas, entre elas a política.

1.4.4- Escola de São Petersburgo

Segundo Gadelha (2004), no final do século XIX, o russo PafnutyL'vovichChebyshev (1821–1884) fundou a denominada escola de São Petersburgo, onde grandes matemáticos russos foram formados e que apresentaram contribuições fundamentais à Teoria da Probabilidade. Um de seus estudantes de destaque foi *Andrei* Andreyevich *Markov (1856- 1922)*.

Markov "é particularmente lembrado pelas cadeias que levam seu nome, que são sequências de variáveis aleatórias nas quais uma variável é determinada pelo valor da anterior, mas são independentes no sentido de que o estado presente depende apenas do anterior." (VIALI, 2008, p 08).

1.4.5- Período moderno

De acordo com Gadelha (2004), no final do século XIX e início do século XX ,houve uma necessidade de se estabelecer uma fundamentação mais consistente e um significado preciso dos conceitos usados na Teoria de Probabilidade que foi enfatizada por paradoxos como os propostos por Joseph Bertrand (1822–1900) em seu livro CalculdesProbabilités.

O problema que ele propôs consiste em determinar a Probabilidade de que uma corda randômica de um círculo de raio unitário tenha um comprimento C maior ou igual a $\sqrt{3}$. Esse valor equivale às medidas dos lados de um triângulo equilátero inscrito no círculo citado (VICENTE, 2011, p 01).

A análise de processos estocásticos[2]exigiu um rigor matemático da Teoria da Probabilidade. Esse fato foi alcançado somente com a axiomatizaçãoproposta por Kolmogorov (1903–1987) emarcou o início do desenvolvimento da teoria moderna de Probabilidade. Ele publicou um importante artigo: *Métodos Analíticos na Teoria da Probabilidade* no qual estabelece os fundamentos da teoria modernade processos estocásticos (GADELHA,2004, p 13).

1.5O ENSINO DE PROBABILIDADE

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que a principal finalidade para o estudo de Probabilidade

> é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (BRASIL, 1998, p. 56).

Nos PCN, a Probabilidade é apresentada com a finalidade de promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos.

---

[2] São famílias de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto infinito, não necessariamente enumerável.

As Orientações Curriculares Nacionais (OCN) para o Ensino Médio destacam ainda que

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidade, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. (BRASIL, 2006, p.79)

De acordo com a Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (2008), a ideia de Probabilidade é trabalhada durante todo o Ensino Médio de tal forma que ao final da Educação Básica, o estudante seja capaz de

> estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento. Identificar a probabilidade da união e da interseção de eventos, os eventos disjuntos e o conceito de independência de eventos (PERNAMBUCO, 2008, p. 110).

Inicialmente, o cálculo de probabilidades era voltado para a previsão das chances de vitória em alguns jogos de azar. Atualmente, a Teoria da Probabilidade possui aplicações importantes nos mais diversos ramos da atividade humana, por exemplo: na Economia, na Política, na Medicina, etc. Ainda, a teoria de probabilidades é o fundamento matemático, que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística.

Existe uma insegurança por parte dos professores do Ensino Médio quando precisam abordar conteúdos de Probabilidade. Sãocomuns os conceitos probabilísticos não serem estudados no Ensino Fundamental e Médio e, quando são considerados, sua abordagem reduz-se à resolução mecânica de exercícios padrões, nos quais é suficiente aplicar uma fórmula (LOPES,TEODORO, REZENDE, 2011, p 76).

O conhecimento básico de Probabilidade é importante para a formação do cidadão, pois possibilita a compreensão dos acontecimentos de natureza aleatória do seu cotidiano. De acordo com Lopes (2008)

> A probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza e de mostrar aos estudantes como matematizar, como aplicar a matemática para resolver problemas reais. Para isso, recomenda-se um ensino das noções probabilísticas a partir de uma metodologia heurística e ativa, por meio da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados.(2008, p. 71)

Em consonância com essas necessidades, Bayeret al (2005) ressaltam que, na escola, as atividades com Probabilidade devem iniciar com jogos e atividades construtivistas pelos quais o estudante tenha interesse e curiosidade de resolver os problemas propostos, envolvendo materiais concretos como moedas, bolas, dados, urnas, etc. São métodos que familiarizam o estudante com as questões sobre a aleatoriedade de um experimento, e utilizam outros conceitos como eventos possíveis, impossíveis, prováveis, muito prováveis, certos, dentre outros.

Por meio dessas atividades, obtém-se uma abordagem experimental para o ensino de Probabilidade. Walle (2009) destaca algumas contribuições dessa pratica na aprendizagem do estudante.

> - É significativamente mais intuitiva. Os resultados começam a fazer sentido e não são oriundos de alguma regra abstrata.
>
> - Elimina apostar em probabilidades e se perguntar, "Eu fiz isso direito?". Contar ou tentar determinar o número de elementos em um espaço de amostra pode ser muito difícil sem algumas informações intuitivas básicas.
>
> - Fornece uma base experimental para examinar o modelo teórico. Quando começar a sentir que a probabilidade de duas caras em dois lançamentos de uma moeda honesta é $\frac{1}{4}$ em vez de $\frac{1}{3}$.(WALLE, 2009, p 517)

Walle (2009) estimula o professor a abordar Probabilidade de forma experimental em sala de aula, sugere ainda que, no início, o professornão corrija os erros dos estudantes, essa correção deve ser entendida pelos educandos por meio dos resultados experimentais obtidos.

CAPÍTULO 2

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais, que foi desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud, psicólogo pertencente à tradição Piagetiana, traz um suporte teórico aos professores que lhes permite compreender como os conceitos são construídos pelos estudantes, sendo, portanto, uma teoria da conceitualização do real. Permite também prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos.Nesse sentido Moreira diz que a Teoria dos Campos Conceituais

> É uma teoria cognitivista neopiagetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e nas técnicas, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio (MOREIRA, 2002,p 08).

Para Vergnaud, “o conhecimento está organizado em campos conceituais, cuja apropriação por parte do educando acontece ao longo do tempo, por meio da experiência, maturidade e aprendizagem” (MOREIRA, 2002, p. 02). Segundo Vergnaud (1996), um campo conceitual é um conjunto de situações, cujo domínio se dá de forma progressiva e exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em perfeita conexão.

> A teoria dos campos conceituais não é específica da matemática, mas começou por ser elaborada a fim de explicar o processo de conceptualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço, da álgebra (VERGNAUD, 1996, p. 155).

Maginadestaca:

> as competências e concepções dos estudantes se desenvolvem ao longo do tempo, por meio de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Quando se defrontamcom uma nova situação, usam o conhecimento adquirido por meio de experiência em situações anteriores, tentando adaptá-lo a esta nova situação. (MAGINA, 2005, p. 03)

Nesse sentido,Vergnaud (1996) destaca que a aprendizagem de um conceito pode ocorrer mediante duas classes de situações:

1. Quando o sujeito se depara com determinada circunstância e ele já detém todas as competências necessárias para o tratamento imediato da situação;

2. Quando o sujeito se depara com determinada circunstância e ele ainda não detém todas as competências necessárias para o tratamento imediato da situação, o que o obriga a refletir e explorar, sendo conduzido ao êxito ou ao fracasso.

A segunda situação é aquelana qual a aprendizagem ocorre de forma mais eficiente e duradoura, pois é o momento do desequilíbrio, no qual ocorre a descoberta do novo e, também, onde o estudante relaciona o novo conhecimento com situações que ele já conhece.

Para Vergnaud, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, ele adquire sentido para o aprendiz por meio da resolução de situações distintas.

Vergnaud (1996, p. 166) define conceito como sendo a tríada construída de

> **S**: conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência); **I**: conjunto de invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (o significado); **R**: conjunto das formas de linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

Para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, no decorrer da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três elementos simultaneamente. Os conceitos tornam-se significativos por meio de situações, que por mais simples que sejam, envolvem diversos conceitos e, por sua vez, um conceito pode ser tratado por mais de um tipo de situação.

Vergnaud (1996), compreende como situação, a tarefa realizada pelo estudante, na qual se deve conhecer a sua natureza e dificuldade, toda situação pode ser analisada como uma combinação de tarefas. O autor destaca, ainda,duas ideias principais em relação ao sentido de situação: *variedade e história.*

Em um campo conceitual, existe uma grande variedade de situações, os conhecimentos dos estudantes são formados pelas situações que eles vivenciam e que, progressivamente, dominam.

Para Moreira (2002, p. 05),“as situações são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito, um conceito torna-se significativo por meio de uma variedade de situações. O sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes”.

Nesse sentido, diante de uma determinada situação, o sujeito age de acordo com as suas representações, o elo entre essa representação e sua conduta é o que Vergnaud compreende como esquema. Podemos afirmar que a noção de esquema é para Vergnaud a maior contribuição de Piaget. “Chamaremos de esquema a organização invariante da conduta de uma dada classe de situações” (VERGNAUD, 1996, p. 157).

Para Vergnaud, quando um sujeito se depara com determinada situação, ele pode ter condutas organizadas por meio de um esquema único, ou desencadear diversos esquemas que entram em conflito. Tais esquemas devem ser acomodados, descombinados e recombinados para, então, atingir a solução procurada.

Segundo Vergnaud (1996), os invariantes operatórios, constituídos por *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*,são os conhecimentos contidos nos esquemas, outros componentes constituem um esquema. São eles: *antecipações do objeto, regras de ação e inferência.*

Moreira (2002) define invariantes operatórios da seguinte maneira

> invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas (p. 12).

Segundo Aguiar e Pedrosa (2009)

> O “teorema em ação” refere-se a ações pessoais mentais ou reais articuladoras de informações, procedimentos e atitudes, que constituem generalizações lógicas para o sujeito, no seu processo de construção progressiva do conhecimento. (AGUIAR, PEDROSA, 2009, p 393)

Maginaet al (2001) apontam que,quando um aprendiz se depara com uma situação-problema, ocorre a aplicação de estratégias e mobilização de conceitos,que se encontram no interior de um esquema cognitivo, chamados de teorema-em-ação.

Grings, Caballero, Moreira (2006) definem conceito-em-açãocomo

> um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante a uma dada situação. Há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas, e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos (GRINGS, CABALLERO, MOREIRA, 2006, p. 466).

Vergnaud (1996) defende também que a compreensão de um conceito sempre está associada a muitos outros conceitos e ideias; por isso, toda compreensão sobre determinado objeto requer um elo entre o que já é conhecido e o novo e nenhum conceito pode ser compreendido isoladamente, ou seja, o conhecimento organiza-se em campos conceituais.

Um campo conceitual é um conjunto de situações cuja apropriação requer o domínio de vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que estão interligados uns aos outros. Como exemplo, Vergnaud (1996) apresenta o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Segundo Vergnaud (1996)

> O campo conceitual das estruturas aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações cujo tratamento implica uma ou várias adições e subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas (VERGNAUD, 1996, p.168).

Magina (2005) afirma que,ao proporestudar um campo conceitual, ao invés de um conceito, Vergnaud está afirmando que, em uma situação, o conceito não aparece isolado. Como exemplo, a autora cita uma situação aditiva simples: *"Ana tinha 5 blusas e no seu aniversário sua avó lhe deu 2 blusas. Quantas blusas Ana tem agora"?*

Nessa situação, estão envolvidos vários conceitos, os quais a criança necessita ter adquirido para solucionar o problema. São eles: temporalidade (tinha, passado/tem agora, presente); contagem (depois do 5 vem o 6, depois o 7).

Ainda, de acordo com Vergnaud, é incorreto acreditar que a adição e a subtração são competências matemáticas para crianças pequenas. “Existem situações relativamente simples que vão ser compreendidas por uma extensão de um invariante operatório e existem outras que vão resistir por muito tempo” (VERGNAUD, 2005, p. 93).

Para exemplificar essa questão, Vergnaud (2005, p. 94) propôs o seguinte problema para uma plateia adulta em uma de suas palestras: *o Sr. Smiths compra um cavalo por $300 dólares e revende por $400 dólares; ele compra novamente o mesmo cavalo por $500 dólares e o revende por $600. Qual foi o lucro ou perda que ele teve e de quanto?*

Segundo Comério (2007), como houve divergência entre as respostas, Vergnaud apresentou a resposta correta (200 dólares de lucro), e fez uma análise das respostasapresentadas para solucionar o problema, levantando questões importantes acerca do ensino e aprendizagem de Matemática, tais como:*Por que nos enganamos? Por que hesitamos em entender asolução?*De acordo com o autor, fazemos o tratamento sequencial das informações, em nosso esquema de raciocínio e se as situações acontecessem sempre em ordem e se as informações forem recebidas etapa por etapa, a solução para determinada questão se apresentaria de forma mais clara.

Sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas,Magina, Merlinie Santana(2010, p. 3) destacam:

> Podemos nos referir ao Campo Conceitual Multiplicativo, ou simplesmente estruturas multiplicativas, como sendo um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros. Entre os conceitos podemos destacar: as funções linear e não-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, razão, proporção, número racional, multiplicação e a divisão.

A análise que Vergnaud fez das situações que envolvem a multiplicação e a divisão mostra que os problemas de estrutura multiplicativa situam-se em geral no contexto de três categorias: *isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas.*

O isomorfismo de medidas é uma estrutura que consiste em uma proporção direta entre duas grandezas, por exemplo: bens e custo, tempo e distância. Comério (2007) destaca a seguinte situação para explicar essa categoria: "*Tenho 3 bandejas de iogurte. Há 6 potinhos de iogurte em cada bandeja. Quantos iogurtes eu tenho?*".

De acordo com o esquema, esse problema envolve uma relação quaternária entre os elementos (bandejas e iogurtes),pois:

1 bandeja → 6 iogurtes

3 bandejas → x iogurtes

O produto de medidas consiste em uma relação ternária entre quantidades, das quais uma é o produto das outras duas;a essa estrutura pertencem problemas relativos à *área, volume, superfície e produto cartesiano.*

Exemplo: Paulo tem 2 calças (azul, preta) e 3 camisas (branca, preta, amarela). Vestindo calça e camisa de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Já, como exemplo de proporções múltiplas, podemos apresentar a seguinte situação: Bruno fez uma viagem com um grupo de amigos. No total havia5 pessoas e passaram 10 dias em um hotel. O gasto total com as diárias foi de R$ 4.000,00. Quanto foi cada diária?

CAPÍTULO 3

OBJETIVOS E MÉTODO

3.1-Objetivo geral

Analisar como estudantes do 2º ano do Ensino Médio compreendem os conceitos de Probabilidade e de Probabilidade Condicional.

3.1.1- Objetivos específicos

- Vivenciar com os estudantes do 2º ano do Ensino Médio jogos matemáticos que abordam conceitos probabilísticos;

- Identificar as potencialidades e dificuldades dos estudantes na compreensão de conceitos probabilísticos;

- Analisar, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, o processo de elaboração de conceitos probabilísticos por estudantes do Ensino Médio.

3.2-Coleta de dados

As atividades foram desenvolvidas com uma turma de 30 estudantes do 2° ano do Ensino Médio, na faixa etária de 16 a 17 anos, de uma escola estadual localizada em Petrolina-PE.

A escola possui mais de 1.500 estudantes, oferece do 7º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Ainda oferece Ensino Fundamental e Médio na Educação de Jovens e Adultos (EJA). A escola está localizada em um dos bairros mais populosos da cidade.

3.3-Etapas da pesquisa

Esta pesquisa foi realizada em dois momentos, o primeiro foi a aplicação de três jogos: *Sorteio na Caixa, Probabilidade Roxa e Árvore de Probabilidades*, sendo os dois primeiros, softwares educacionais, que tinham como objetivo propiciar ao estudante uma aplicação do conceito de Probabilidade.

No segundo momento, foi aplicado para doze estudantes um questionário com cinco quesitos,tendo em vista a obtenção de uma análise individual da aprendizagem, o número de alunos participantes foi menor que o da etapa anterior, pois alguns não dispuseram a responder o questionário e outros não haviam comparecido. Nesse questionário,foram abordados conceitos anteriormente trabalhados na aplicação dos jogos.

O desempenho dos estudantes foi analisado por meio de uma escala de acertos, utilizando as cores verde, amarelo e vermelho, para uma melhor compreensão do leitor, conforme descritono quadro 1.

Quadro 1- Frequência de acertos

	ACERTOS
	13-16
	7-12
	0-6

Ainda, para a elaboração e para a análise dos resultados, utilizamos também a teoria dos campos conceituais proposta pelo psicólogo francês GerárdVergnaud.

3.3.1- Descrição dos Jogos

Historicamente, os estudos de Probabilidade iniciaram-se com a troca de correspondência entre Pascal e Fermat acerca da chance de ganho em jogos de azar, como já discutido anteriormente.Os roteiros dessas atividades partem dessa tradição histórica, quando exige do estudante a escrita de frações que representam chances em sorteios. Essa justificativa torna-se importante para que fique clara a opção pelo estudo das probabilidades associado, inicialmente, ao estudo dos jogos. Não se trata, de forma alguma, de valorizar a compreensão dos mecanismos dos jogos de azar, com o objetivo de levar vantagens individuais durante seu exercício, mas apenas aproveitar o possível aprendizado do conteúdo matemático, que se esconde por trás das regras da atividade de maneira crítica e responsável.

Serão apresentadas três atividades, em que duas serão jogos digitais. Foi escolhida essa forma de jogo, pois a utilização de jogos digitais como objetos de aprendizagem tem sido difundida atualmente como uma forma diferente de abordar temas e tópicos aos estudantes. Além de um atrativo de forte apelo motivacional, os jogos e as simulações digitais podem amplificar o poder de exploração e imaginação dos estudantes, propiciando momentos de investigação, reflexão e aprendizagem.

Na seção seguinte, apresentamos os jogos utilizados neste estudo:

3.3.1.1- JOGO 1- Sorteio na caixa

Este jogo está disponível para download no link: http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/probabilidades/atividade1/atividade1.htm.O RIVED é um programa da Secretaria de Educação a Distância - SEED, que tem por objetivo a produção de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem. Tais conteúdos primam por estimular o raciocínio e o pensamento crítico dos estudantes, associando o potencial da informática às novas abordagens pedagógicas.

Neste jogo, os estudantespreenchem, inicialmente, uma tabela de dupla entrada, com quantidades de algumas “peças” que formarão o conjunto a partir do qual, posteriormente, será efetuado um sorteio. Esses elementos têm características que se interceptam. Há “peças” verdes, amarelas ou azuis e há “peças” triangulares e circulares distribuídas pelas 3 cores. O usuário poderá escolher uma das peças e escrever a chance que ela tem de ser sorteada dentre todos os elementos do conjunto, como mostra a figura 1.

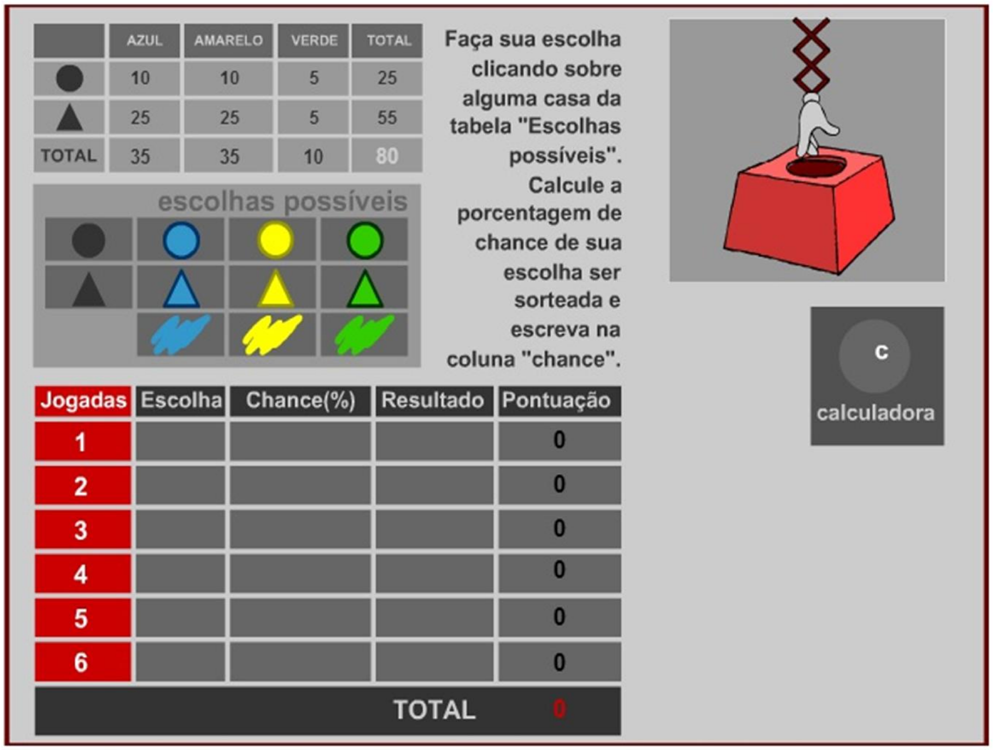

Figura 1- Tela inicial do jogo Sorteiona Caixa

A cada escolha do usuário, o sistema gera o sorteio aleatório de uma peça e testa a correção da escrita da chance e, também, se o usuário acertou em sua escolha, isto é, se a peça que escolheu foi ou não sorteada.

O tempo estimado para duração da atividade é de duas aulas de cinquenta minutos; os alunos poderão ser organizados em duplas. No final, o estudante será convidado a localizar seu rendimento em uma escala de valores. Esse rendimento leva em conta duas questões: a sorte e a correção dos cálculos, com maior valorização desta última variável. Levando em conta a digitação correta ou não da chance de sorteio pelo usuário, e também o sucesso ou o fracasso da escolha feita, o sistema atribui pontos a cada jogada, da seguinte maneira:

- Chance correta e sucesso no sorteio = +2

- Chance correta e fracasso no sorteio = +1

- Chance errada e sucesso no sorteio = 0

- Chance errada e fracasso no sorteio = - 1

Como o jogo consiste de 6 rodadas, o mínimo de pontos exigido para que o estudante mostre que entendeu a atividade é 6; mesmo assim, com a avaliação do professor sobre a digitação do estudante em cada rodada. O sistema emitirá mensagens, sugerindo aos estudantes que tenham obtido baixos índices de avaliação de retomar a atividade desde o início. Caberá ao professor acompanhar essas avaliações, com o objetivo de interferir nos casos em que não tenha ficado claro como é feito o cálculo da chance de ocorrência de cada evento.

3.3.1.2- JOGO 2- Probabilidade Roxa

Este objeto de aprendizagem explora o conceito de Probabilidade, focando, principalmente, a Probabilidade Condicional. Pressupõe-se que, ao final do jogo, o estudante saiba o conceito de Probabilidade, Espaço Amostral, Evento e Probabilidade Condicional.

Este jogo esta disponível para download no link: http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/921

A simulação apresenta como tema uma partida de futebol na qual é realizada uma entrevista entre alguns torcedores presentes no estádio. Assim, uma tabela, como na figura a baixo (FIGURA 1), é apresentada ao estudante com a quantidade total de pessoas entrevistadas, separadas por sexo e por time de sua preferência. A partir dos dados encontrados na tabela, o estudante deverá responder questões relacionadas à Probabilidade.

Figura 2- Tela inicial do jogo Probabilidade Roxa

Para cada questão, o estudante deverá escolher uma resposta certa. As respostas são contempladas em três formas de registros diferentes: a fracionária, a decimal e a porcentagem, e o professor poderá escolher qual a melhor representação a ser utilizada pelo estudante ou, ainda, a combinação das formas contempladas.

Por ter um objetivo mais de experimentação, talvez seja interessante que o conceito de Probabilidade Condicional sejaabordado e discutido anteriormente; porém, o jogo foi elaborado de forma a não necessitar de pré-requisitos, já que possui um tutorial de ajuda do conteúdo com exemplos e definições de conceitos. Assim, fica a critério do professor a forma como pode utilizar o recurso de acordo com seu planejamento. Estima-se que, para chegar ao final do jogo, leva-se de 20 a 25 minutos.

3.3.1.3 -JOGO 3- Árvore de Probabilidades

Este jogo explora o conceito de Probabilidade, tendo como foco a Probabilidade Condicional, com a construção da árvore de probabilidades. Pretende-se , que ao final do jogo, o estudante saiba o conceito de Probabilidade Condicional.

É interessante que o professor já tenha abordado com seus estudantes o conceito de Probabilidade condicional e a resolução de questões, envolvendo a construção das árvores de possibilidades. Sugerimos algumas atividades propostas no livro Lima et al (2006)..

O tempo estimado para a atividade é de duas aulas de 50 minutos; os estudantes serão divididos em dois grupos que, por sua vez,serão subdivididos em trios. Cada um dos dois grupos receberá um mural para construção da árvore de possibilidades a partir das situações-problema recebidas. O professor convidará um trio de cada grupo para receber a primeira questão, que será a mesma para os dois grupos. Esses estudantes receberão cartelas e pincel,que usarão na montagem da árvore. Para cada problema resolvido corretamente, o grupo recebe uma pontuação.

A seguir, serão apresentadas algumas sugestões de questões e suas resoluções,que podem ser propostas no jogo.

QUESTÃO 1

Em uma determinada cidade, o número de homens é igual ao número de mulheres. 5% dos homens são daltônicos e 0,4% das mulheres são daltônicas. Sorteia-se, aleatoriamente, uma pessoa dessa cidade e verifica-se que é daltônica. Qual é a Probabilidade de ter sido sorteada uma mulher?

Solução

Vamos resolver esse exemplo passo a passo. A primeira coisa a observar é que o espaço amostral é formado por todos os moradores da cidade. Os eventos de interesse são “homem” (H), “mulher” (M), “daltônico”, (D) e “não daltônico” ($\overline{D}$).

Para definir a partição apropriada, temos que observar quais são as probabilidades a priori fornecidas no problema, ou seja, probabilidades dadas sem conhecimento de qualquer outro evento. As probabilidades a priori se referem aos eventos “Homem” e “Mulher”. Veja a seguir num diagrama de árvore.

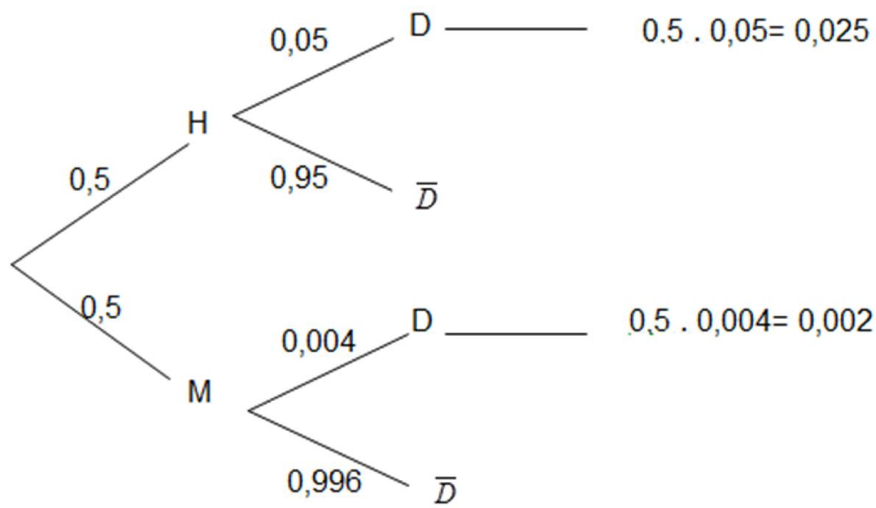

Figura 3- Árvore de probabilidade- Questão 1

Logo P(D)=0,025 + 0,002=0,027

Agora, vamos calcular a Probabilidade pedida, P(M|D), que é uma Probabilidade a *posteriori*, isto é, vamos atualizar a Probabilidade de o evento "ser mulher" sabendo que ocorreu o evento D.

$$P(M / D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}002}{0{,}027} = 0{,}074$$

QUESTÃO 2

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores do Flamengo. A Probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o cobrador for do Flamengo e de 70% em caso contrário. Um pênalti a favor do

Brasilacabou de ser marcado, qual a Probabilidade de o pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?

Solução

Vamos destacar os seguintes eventos:

(F): Cobrador é do Flamengo.

($\overline{F}$): Cobrador não é do Flamengo.

(C): Pênalti é convertido

($\overline{C}$): Pênalti não é convertido.

O diagrama apropriado para o problema em questão é dado na Figura 2.

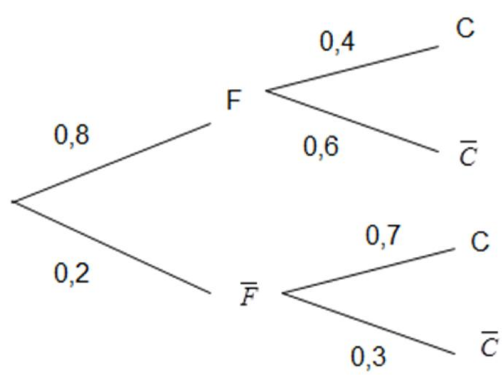

Figura 4 -Árvore de probabilidades - Questão 2

Sejam:

$P(F \cap C) =$: a Probabilidade de o cobrador ser do Flamengo e o pênalti ser convertidotemos que:

$P(F \cap C) =$ 0,8 . 0,4= 0,32

QUESTÃO 3

Uma determinada fábrica produz peças tipo A e B nas proporções 1/3 e 2/3, respectivamente. A Probabilidade de ocorrência da peça defeituosa do tipo A é de 20% e do tipo B é 10%. Retirando-se, ao acaso, uma peça produzida na fábrica, a Probabilidade de ser defeituosa é de:

Solução

Vamos considerar os seguintes eventos:

(A): Peça sorteada ser do tipo A

(B): Peça sorteada ser do tipo B

(D): Peça sorteada ser defeituosa

($\overline{D}$): Peça sorteada não ser defeituosa

O diagrama apropriado para o problema em questão é dado na Figura 2.2

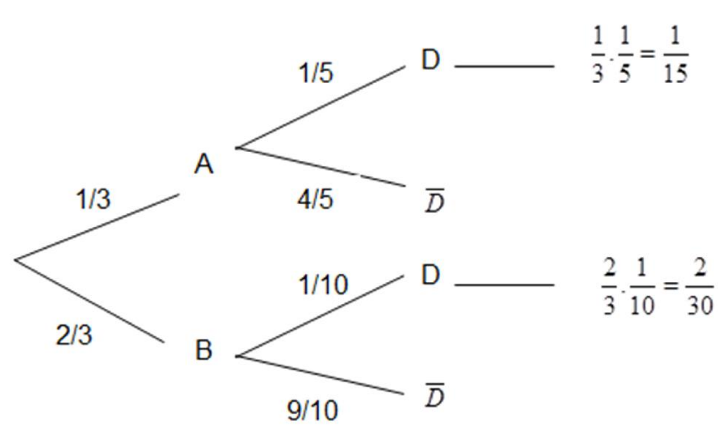

Figura 5 - Árvore de probabilidades - Questão 3

Seja P(D) a Probabilidade da peça sorteada ser defeituosa, teremos, então que:

P(D)= $\frac{1}{15}+\frac{2}{30}=\frac{4}{30}\cong$ 13,33%

QUESTÃO 4

Uma urna (I) contém 2 bolas brancas(B) e 3 vermelhas (V). Uma segunda urna (II) contém 4 bolas brancas e 2 vermelhas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a Probabilidade de que ela seja branca?

Solução

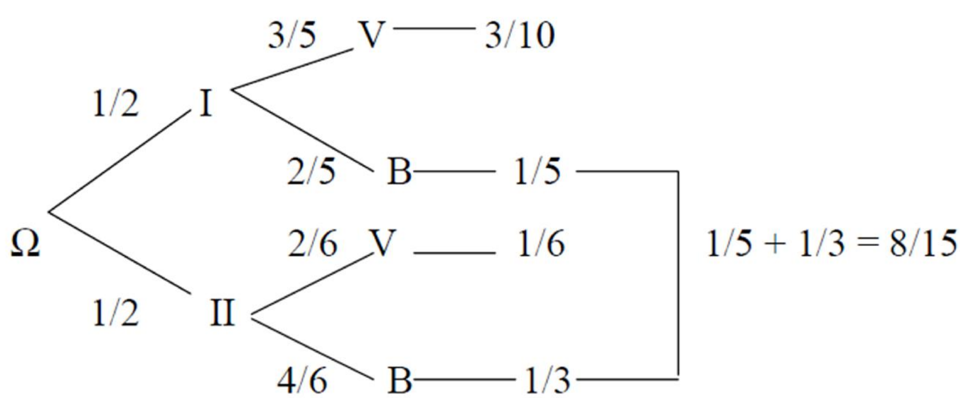

Figura 6- Árvore de probabilidades – Questão 4

Isso quer dizer que a Probabilidade da bola ser branca é de 8/15.

Ao trabalharmos com a árvore de probabilidades, precisamos conhecer algumas regras que favorecerão o seu tratamento. O ponto de partida dessa árvore é chamado raiz, que deveremos pensar em todo o nosso espaço amostral. No desenho acima, vem representada pelo símbolo Ω. Dessa raiz saem as ramificações, chamadas de galhos. Os números romanos colocados no final desses primeiros galhos constituem o primeiro nível da árvore. Sobre esses galhos, coloca-se a Probabilidade de cada um desses eventos acontecerem.

O segundo nível da árvore começa logo após os números romanos do primeiro. A região entre galhos e os seguintes é chamada de nó.

As probabilidades referentes aos segundos galhos serão probabilidades calculadas, sabendo-se que já ocorreu o primeiro evento, portanto, probabilidades condicionais.

QUESTÃO 5

---

100 cobaias são tratadas por três produtos que provocam uma doença M. 50 são tratadas pelo produto P_1 que provoca M com a Probabilidade de 0,25. 25 são tratadas pelo produto P_2 que provoca M com a Probabilidade de 0,3. Uma cobaia tirada ao acaso tem a doença M. Qual é a Probabilidade de ter sido tratada por P_1?

Solução

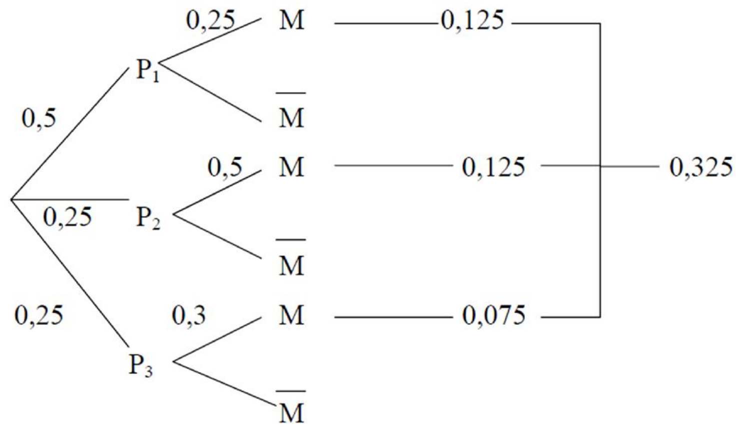

Figura 7- Árvore de probabilidades – Questão 5

$\overline{M}$ representa o evento a "ser tratado pelos produtos respectivos, mas não contrair a doença M".

M representa o evento "ser tratado pelos produtos respectivos e contrair a doença M".

Através das árvores, temos que 0,325 é a Probabilidade de uma cobaia, tratada por alguns dos produtos, ter contraído a doença M. Temos que calcular, ainda, a Probabilidade do produto utilizado ter sido $P_{1.}$

Sabemos que: $P(P_1 / M) = \dfrac{P(P_1 \cap M)}{P(M)}$

Em que: $P(P_1 / M)$:representa a Probabilidade de ocorrer o evento $P_{1,}$ dado que já ocorreu o evento M. Logo:

$$P(P_1 / M) = \frac{0{,}125}{0{,}325} = 0{,}384$$

QUESTÃO 6

Num jogo de diversão, dispomos de três caixas aparentemente idênticas. Elas contêm respectivamente um, dois e três papéis, dos quais somente um em cada caixa é um papel marcado. Uma partida consiste em o jogador escolher ao acaso uma caixa e tirar, igualmente ao acaso, um papel dessa caixa. Calcular a Probabilidade que o papel tirado seja o marcado.

Solução

Vamos considerar os seguintes eventos:

B_i(i=1,2,3): escolher a caixa nºi.

A: tirar um papel marcado

$\overline{A}$: tirar um papel não marcado

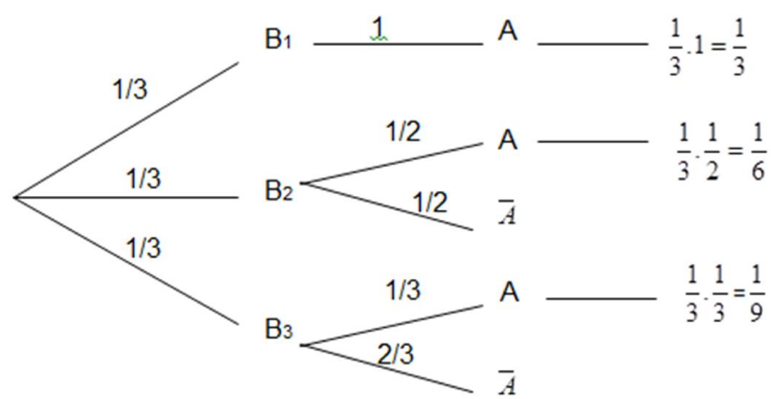

Figura 8- Árvore de probabilidades – Questão 6

Portanto a Probabilidade de que o papel retirado seja o marcado P(A) será:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}$$

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

4.1.1 ANÁLISE DOS JOGOS

A aplicação dos jogos ocorreu em dois dias, totalizando quatro aulas de 50 minutos. O primeiro jogoaplicado foi o Sorteio na Caixa, pois abordava questões em que o conceito de espaço amostral, casos favoráveis, Probabilidade na forma percentual, eram bem evidentes e de fácil compreensão para o estudante. Ao final de cada jogada, o estudante poderia verificar seu desempenho por meio de um gráfico, exibido no próprio software.Em uma escala de 0 a 9,80% dos estudantes ficaram com pontuação 7.

Em um momento deste jogo, a sorte também contava, pois havia um sorteio eletrônico na caixa e, se a escolha do estudanteacontecesse, sua pontuação aumentava, um estudante percebeu que se distribuíssem os elementos na caixa de forma que a quantidade de cada um ficasse próxima, as chances de obter êxito no sorteio era maior.

O jogo Probabilidade roxa foi o segundo a ser aplicado, pois já abordava conceitos de Probabilidade de união de eventos e eventos independentes. Alguns estudantes demostram dificuldadesnesse jogo, pois, em suas respostas,não consideravam a interseção dos eventos.

O terceiro jogo aplicado foi Árvore de Probabilidades, que abordava conceito de Probabilidade condicional. Esse jogo foi escolhido para ser trabalhado com a turma, pois, depois de uma análise no livro didático, observamos que o autor trabalhava Probabilidade condicional sem mencionar a utilização da árvore de Probabilidade. Antes da aplicação do jogo, foi feita uma explanação para os estudantes, do conceito de Probabilidade condicional e de como a construção da árvore de Probabilidade facilita a compreensão de algumas questões. Inicialmente, foi proposta a seguinte questão:

- *Uma urna (I) contém 2 bolas brancas(B) e 3 vermelhas (V). Uma segunda urna (II) contém 4 bolas brancas e 2 vermelhas. Escolhe-se ao acaso uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a Probabilidadede que ela seja branca?*

Na construção da árvore, os estudantes não se atentaram para o fato de que a urna era escolhida ao acaso, fazendo com que a escolha da mesma influenciasse no resultado.

Dos três jogos aplicados, Árvore de Probabilidade foi o jogo no qual os estudantes tiveram uma maior dificuldade em desenvolver, pois abordava conceitos de probabilidades mais avançados, que é condicionalidade de eventos.

4.1.2 Análise do questionário

Nesta seção, apresentamos o desempenho das questões propostas no estudo ora apresentado:

<u>QUESTÃO 01</u>

Observe a seguinte tabela que mostra a distribuição dos estudantes de uma determinada escola.

	HOMENS	**MULHERES**	**TOTAL**
ENSINO FUNDAMENTAL	400	100	500
ENSINO MÉDIO	100	200	300
TOTAL			800

Ao sortear um estudante dessa escola, calcule a Probabilidade de ser:

a) Homem;

b) Estudante do ensino médio;

c) Homem e estudante do ensino médio;

d) Homem ou estudante do ensino médio;

e) Homem, sabendo que é estudante do ensino médio.

f) Estudante do ensino médio, sabendo que é homem.

Quadro 2 – Frequência de acertos dos estudantes na Questão 1

ITEM	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPONDEU
A	9	3	0
B	8	4	0
C	8	4	0
D	4	8	0
E	3	5	4
F	3	3	6

QUESTÃO 02

Os estudantes da turma 9º ano C distribuem-se por idade e por sexo, de acordo com a tabela seguinte:

	14 anos	15 anos	16 anos
HOMENS	8	3	2
MULHERES	6	5	1

Escolhendo um estudanteda turma ao acaso, determine a Probabilidade de que esse:

a) Tenha 16 anos;

b) Seja uma mulher;

c) Seja um homem de 14 anos;

Quadro 3 – Frequência de acertos dos estudantes na Questão 2

ITEM	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPONDEU
A	9	3	0
B	7	5	0
C	9	3	0

<u>QUESTÃO 03</u>

Num saco, estão 10 bolas, das quais 6 são azuis e 4 são verdes. Retiram-se, sucessivamente, duas bolas. Responda os seguintes questionamentos:

a) Sabendo que não houve reposições das bolas retiradas, determine a Probabilidade de saírem duas bolas da cor verde. (Expresse o resultado na forma percentual)
b) Sabendo que houve reposições das bolas retiradas, determine a Probabilidade de saírem duas bolas da cor verde. (Expresse o resultado na forma percentual)

Quadro 4 – Frequência de acertos dos estudantes na Questão 3

ITEM	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPONDEU
A	3	8	1
B	4	4	4
C	7	0	5

<u>QUESTÃO 04</u>

Uma urna contém 5 bolas verdes e 7 bolas brancas. Retiramos duas bolas em seguida, sem reposição. Utilizando a árvore de probabilidades, responda:

a) Qual a Probabilidade de aprimeira bola ser branca e a segunda ser verde?

b) Qual a Probabilidade de as duas bolas serem brancas?

Quadro 5 – Frequência de acertos dos estudantes na Questão 4

ITEM	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPONDEU
A	2	7	3
B	2	5	5

QUESTÃO 05

Existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma de ouro e outra de prata, e a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso.

Responda, utilizando a Árvore de Probabilidades.

a) Qual a Probabilidade de a moeda escolhida ser de ouro?

b) Dado que a moeda escolhida foi de ouro, qual a Probabilidade de que ela pertença àprimeira caixa?

Quadro 6 – Frequência de acertos dos estudantes na Questão 5

ITEM	ACERTOS	ERROS	NÃO RESPONDEU
A	2	6	4
B	2	6	4

4.2 Discussão e análise dos resultados

De acordo com os resultados apresentados anteriormente,identificamos que os estudantes tiveram uma facilidade maior em resolver a questão 01, por ser uma questão que abordava, de forma mais evidente, o conceito de Probabilidade. Os itens dessa questão foram apresentados de forma que a sua resposta influenciasse na resposta do item anterior. Essa associação partiu da proposta de Vergnaud, ao apontar que,quando o estudante se depara com determinada situação e ela ainda não detém todas as competências necessárias para o tratamento imediato da situação, ele é obrigado a refletir e explorar todos os conhecimentos de que já dispõe sobre o problema dado, sendo conduzido ao êxito ou ao fracasso.

À medida que os itens dessa questão foram exigindo um conhecimento mais amplo de Probabilidade, o índice de acertos dos estudantes foi diminuindo, como pode ser observado nos itens *d*, *eef* da questão 1 (quadro 2).

No item D da questão 1, que abordava o conceito de Probabilidade de união de eventos, um estudante resolveu da seguinte forma:*efetuou a soma dos dois* *eventos, porém não subtraiu a interseção dos eventos, o que ocasionou uma resposta incorreta, c*onforme figura 9:

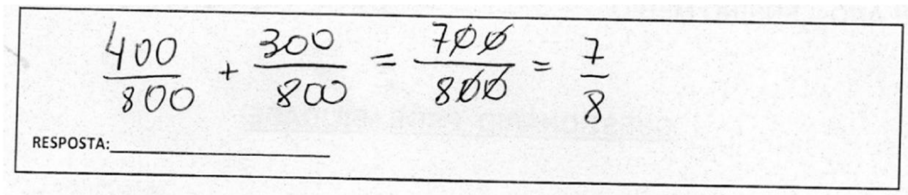

Figura9- Resposta do item D, questão 01

Na questão 2, os estudantesalcançaram um alto índice de acerto, possivelmente porque a questão abordava somente o conceito de espaço amostral e números de casos favoráveis para o calculo de Probabilidade. Esses valores eram obtidos de forma imediata no quadro 3.

Nesses termos, verificamos pelos resultados dasquestões1 e 2, queo conceito inicial de Probabilidade foi assimilado pelos estudantes, como também identificado no jogo sorteio na caixa.

As questões 3, 4 e 5, abordaram a resolução a partir da construção da árvore de Probabilidades e Probabilidade condicional, o índice de acertos foi baixo e a quantidade de estudantes que não responderam taisquestões foi bastante alto.Isso pode ser explicado pelo fato de que seria necessário um tempo ainda maior dos estudantes em contato com situações que abordassem esses conceitos.

Destacamos ainda que, nesta pesquisa, não era nosso objetivo realizar um estudo comparativo entre o desempenho dos estudantes nas situações de jogo e nas questões apresentadas no questionário para identificar qual das duas opções era mais eficiente no processo de compreensãode conceitosprobabilísticos pelos estudantes, mas sim, analisar o processo de compreensão dos estudantes sobre conceitos probabilísticos.

A análise do desempenho dos estudantes, nas situações propostas neste estudo,indicanão só que os estudantes ainda apresentam muitas dificuldades na compreensão dos conceitos de Probabilidade, mas também já apresentam muitas evidências de que as ideias iniciais associadas a esse conceito estão em construção, o que certamenteauxiliará numa compreensão mais consistente e duradoura, quando, no processo de amadurecimento, estes estudantes conhecerem outras situações relativas aosconceitos aqui estudados. Nesses termos, énecessário que outras situações sejam propostas para que haja apropriação do estudante sobre estes temas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa que, no momento, concluímos, buscou responder a seguinte questão: Como ocorre a compreensão dos conceitos probabilísticos por estudantes do 2º ano do Ensino Médio?

Na busca pela resposta a essa questão, este estudo foi organizado em dois momentos, a saber: vivência de jogos matemáticos tratando de conceitos probabilísticos com os participantes e elaboração, e aplicação de um questionário sobre os mesmos conceitos.

Participaram da pesquisa 30 estudantes no primeiro momento e 12 no segundo momento. A escolha dos estudantes, para participarem do segundo momento, deu-se em função da adesão dos mesmos. No primeiro momento, vivência de jogos matemáticos, os estudantes apresentaram maior motivação que na resolução das questões apresentadas no segundo momento, embora, não seja, nosso propósito tal comparação.

O objetivo do primeiro foi promover situações nas quais os estudantes tivessem a oportunidade de se colocarem, trazendo à tona a compreensão que já possuíam dos conceitos probabilísticos, guiando a elaboração e a análise do segundo momento, principalmente, porque, no primeiro momento, os estudantes foram organizados em grupo, o que pode estimular a participação dos mesmos nas atividades propostas nos jogos e nos questionamentos levantados.

A análise dos resultados aponta que as situações do questionário (segundo momento) nas quais sóse exigiam dos participantes apenas os conceitos de *evento*, *espaço amostral* e *probabilidade,* são mais facilmente compreendidas pelos estudantes. Já as questões, nas quais os estudantes necessitam mobilizar conceitos mais sofisticados, como Probabilidade da união de eventos, Probabilidade da intersecção de eventos e Probabilidade Condicional, requerem dos participantes habilidades que eles ainda não construíram plenamente. Nesses termos, podemos sintetizar, dizendo que os resultados indicam que as propostas desenvolvidas tiveram importante contribuição na elaboração do conceito de probabilidade, pelos estudantes participantes. Porém, para uma aprendizagem mais significativa, faz-se necessário que o estudante conheça outras situações relativas aosconceitos ora investigados.

Essa investigação teve como fundamentação a Teoria dos Campos Conceituais, que foi proposta por GerárdVergnaud. Conforme Vergnaud, um conceito não pode ser confundido com uma simples definição, de sorte que a definição pode ser repetida pelo estudante, mesmo sem compreendê-la, o que não acontece com o conceito, visto que o conceito é individual e considera variáveis que são intrínsecas ao sujeito.

Assim, mesmo os participantes apresentando diversas dificuldades, como já mencionamos, a leitura dos dados indicam que as respostas e estratégias utilizadas por cada estudante evidenciam que eles estão no caminho que os leva á compreensão dosconceitosrelativos à Probabilidade.

No decorrer deste estudo, surgiram outras questões que, embora nos inquietassem, respondê-las nesta pesquisa iria de encontro aos objetivos propostos, tais como: Qual seria o campo conceitual de Probabilidade? Qual sequência de ensino seria mais indicada para o entendimento dos estudantes sobre os conceitos, ora estudados? Qual a relação entre as formas didáticas utilizadas pelos professores e aquelas empregadas pelos estudantes na resolução de situações probabilísticas?

Assim, as questões que aqui apresentamos ficam como indicações para futuras investigações, com o intuito de compreendermos cada vez mais e, da melhor forma possível, como cada estudante compreende os conceitos matemáticos e de que forma possamos contribuir para que a repetição, a técnica e a simples apresentação de definição cedam espaço para a compreensão conceitual, que, certamente, motiva os estudantes e faz a Matemática assumir o seu lugar no campo das ciências, que deixa de existir,quando são feitas questões cujas respostas exigem apenas que sejam seguidos alguns passos e etapas para alcançá-las.

63

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M.C.A; PEDROSA, M.I.P.C. Desenvolvimento do conceito de espaço em crianças e a educação infantil**. Psicol. USP** v.20 n.3 São Paulo set. 2009.

ANTUNES, C. **Jogos para estimulação das múltiplas inteligências**. 10ª ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

BAYER, A. ; ECHEVESTE, S. ; ROCHA, J. ; BITTENCOURT, H. R.. **Probabilidade na Escola**. In: III Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2005, Canoas. Vol.1p.1-12. Disponível em:http://www.exatas.net/artigo_ciem2.pdf. Acesso em: 01 de junho de 2014.

BENITES, M,P.C**. Cálculo Mental nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Dúvidas e expectativas.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade do Oeste Paulista-Unoeste, Presidente Prudente – SP.

BERLINGHOFF, W.P. ;GOUVEA F.Q. **A matemática através dos tempos: Um guia fácil e prático para os professores e entusiastas.** Tradução: Elza. F. Gomide e helena Castro. Editora: Edgard Blucher Ltda. 2ªed. São Paulo-SP,2010.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília, DF: MEC/SEF, 1998

BRASIL, Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, DF: MEC/SEF, pg 79. 2006.

BURÍGO, E. Z . O movimento da matemática moderna no Brasil: encontro de certezas e ambiguidades. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18, p.35-47, maio./ago. 2006.

CARDOSO, T. F. L. **As Aulas Régias no Brasil**.In: STEPHANOU, M.; BASTOS, M. H. Câmara. **Histórias e Memórias da Educação no Brasil**. Petrópolis: Editora Vozes, 2004. p.179-191

COLL, C.**O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2003

COMÉRIO, M. S**. Interação Social e Solução de Problemas aritméticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental.**2007. Dissertação (Mestrado em

Educação)- Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas -SP

COUTINHO, C. Q.S**. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?** Revista Eletrônica de Educação Matemática. v. 2.3, p. 50-67, 2007.

CUNHA, L. A. **A universidade temporã – da Colônia à Era Vargas**. 2.ed. rev., ampl. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. Belo Horizonte: Papirus, 1996.

FERREIRA, M.J.;TAVARES,I. & TURKMAN,M.A. **Notas sobre a história da estatística.** Portugal: Instituto Nacional de Estatística, (2002). Disponível em:http://alea-estp.ine.pt/Html/statofic/html/dossier/doc/dossier6.pdf

FLEMMING, D.M.; LUZ, E. F.; MELLO,A. C. C. **Tendências em Educação Matemática.** Santa Catarina. - 2. ed. - Palhoça : UnisulVirtual, 2005.

GADELHA, A. **Uma pequena história da probabilidade**: Teoria de Probabilidade I. Março de 2004. 16f. Notas de aula.

GRINGS, E.T.O; CABALLERO, C.; MOREIRA,M.A. Possíveis indicadores de invariantes operatórios apresentados por estudantes em conceitos da termodinâmica**. Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 4, p. 463-471, 2006.

HAIDAR, M. L. M. **O ensino secundário no império brasileiro**. São Paulo: Grijalbo, EDUSP. 1972.

LIMA,E.L; CARVALHO,P.C.P;WAGNER,E;MORAGADO,A,C. **A matemática do Ensino Médio volume 2**. 6 ed. Rio de Janeiro- SBM 2006.

LOPES, A. R. L. V; BORBA, M. C. Tendências em educação matemática. **Revista Roteiro**, Chapecó, n. 32, p. 49-61, jul./dez., 1994.

LOPES**,** C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. CEDES,** vol.28 n°.74 Campinas Jan./Apr. 2008.

LOPES, J.M; TEODORO, J.V.; REZENDE,J.C. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké– FE/Unicamp** – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011.

LOPES,J.M; REZENDE,J.C. Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade.Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 657 a 682, agosto 2010.

LUPINACCI, M. L. V. e BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p. 1–5. 2004.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S. **A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente.** In: **XVIII ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA.** 2005, Campinas. Disponível em:http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf

MAGINA, S; MERLINI, V.L; SANTANA, E. O desempenho dos estudantes de 4ª série do Ensino Fundamental frente a problemas de estrutura multiplicativa .In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**. 2010, Salvador. Disponível em: http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T3_CC1039.pdf

MANACORDA, M. A. **História da educação: da Antiguidade aos nossos dias**. São Paulo: Cortez, 1997.

MARIANO, A.L.S. **Educação Para o Pensar, Educação Matemática e PCN: uma aproximação possível? .** Universidade de Brasília.2004. Disponível em:http://periodicos.unb.br/index.php/resafe/article/viewFile/5437/4536

Acesso em: 10 de agosto de 2014.

MAURARI,C.Experienciando Materiais Manipulativos para oEnsino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

MELO,A.V.F. **Jogo pedagógico, Brasil e sua dinâmica territorial: educação lúdica em geografia**. Universidade Cruzeiro do Sul. 2008. Disponível em: http://observatoriogeograficoamericalatina.org.mx/egal12/Ensenanzadelag emeografia/Investigacio

Acesso em : 01 de Julho de 2014.

MOREIRA, M. A. (org.) ***A teoria dos campos conceituais*, o ensino de Ciências e a Investigação nesta área**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2002.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1992. (Série Ideias, 10).

O'BRIEN, Thomas. **Desafios e Investigações***. São Paulo: Editora Callis, 1999.*

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática/** Secretaria de Educação – Recife: SE. 2008.

RICARDO, E. C.;CUSTODIO, J. F.;JUNIOR, M. F. R. A tecnologia como referência dos saberes escolares: perspectivas teóricas e concepções dos professores. **Rev. Bras. Ensino Fí**s. São Paulo , vol.29 no.1 ,2007.

ROXO, E. **A Matemática na educação secundária**. São Paulo: Ed. Nacional, 1937.

RUSSO, C.G. **O jogo e a brincadeira na Educação infantil**. 2012. 46f. Monografia (Pós-Graduação em Educação Infantil e Desenvolvimento). Universidade Candido Mendes. Rio de janeiro.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje- enfoques, sentidos e desafios-** tradução Antônio de Pádua Danesi-São Paulo: Ática,2007.

SCANDIUZZI, P,P. **Educação indígena x educação escolar indígena: uma relação etnocida em uma pesquisa etnomatemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

SILVA, C. B.; COUTINHO, C.Q. S. O nascimento das Estatísticas e sua relação com o surgimento da Teoria da Probabilidade. **Revista Integração**. v. ano XI, n. 41, p. 191-196, 2005.

SILVA, I. F. O. **O papel de atividades lúdicas na produção de textos dissertativos.** 2006.161f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Linguagem). Universidade Católica de Pernambuco-Unicap, Recife.

SILVEIRA, R. S; BARONE, D. A. C. **Jogos Educativos computadorizados utilizando a abordagem de algoritmos genéticos**. In: IV Congresso da Rede Iberoamericana de Informática na Educação, 1998, Brasília. Anais do IV RIBIE 98, 1998. Disponível em: http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342421140151.PDF, Acesso em 21 de julho de 2014.

SILVEIRA, J. F. **Os jogos de aza**r. Rio Grande do Sul: UFRGS. 2001. Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html>. Acesso em: Julho de 2014.

SOARES, F.; DASSIE,B. A. ;ROCHA,J. L .Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes,** Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004

SOARES, F.; DASSIE,B. A. ;ROCHA, J. L. Ensino de Matemática e Matemática Moderna em congressos no Brasil e no mundo. **Revista Diálogo Educacional**,Curitiba,v.8,n. 25, p. 727-744, set./dez. 2008

SUPERTI, E.**O Positivismo e a Revolução de 30: A Construção do Estado Moderno no Brasil.**1998. Dissertação (Mestrado em ciências sociais) - Programa de Pós Graduação em Ciências Sociais, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP.

TOMAZ, P.S.S**. GerolamoCardano: Pai da Teoria da Probabilidade ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar?**.In: IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011, Aracaju. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011. Disponível em:http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Tomaz_P_S_S_Gerolamo_Cardano.pdf

Acesso em 20 de julho de 2014.

VEGA-AMAYA, O. **Surgimiento de lateoría matemática de laprobabilidad**. Apuentes de historia de las matemáticas, v. 1, n. 1, p. 54 – 62

VERGNAUD, G. **Didática da Matemática**. Direção de Jean Brun. Horizontes Pedagógicos, 1996.

VERGNAUD, G. **Esquemas operatórios de pensamento: uma conversa com Gérard Vergnaud**. Em: E. P. Grossi (Org.), Ensinando que todos aprendem: fórum social pelas aprendizagens. 2005 (pp. 85-100). Porto Alegre: GEEMPA.

VIALI, L. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria daProbabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, pág. 143-153. 2008.

VICENTE, A. **O Paradoxo de Bertrand para um Experimento Probabilístico Geométrico.** In: XXII Semana Acadêmica da Matemática- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2011. Anais da XXII Semana da Matemática,2011. Disponível em:
http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/07.pdf
Acesso em: 10 de junho de 2014.

VIEIRA, E. **Oficina de Ensino: O quê? Por quê? Como?**3ª ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

WALLE, J.A.V. **Matemática no Ensino Fundamental: Formações de professores e aplicação em sala de aula**, Artmed, 6º ed. Tradução: Paulo Henrique Colonese, 2009.