UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

TRIGONOMETRIA: O RADIANO E AS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

Carlos André Carneiro de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Marques da Silva

Campina Grande - PB
Abril/2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

O48t Oliveira, Carlos André Carneiro de

Trigonometria : o radiano e as funções seno, cosseno e tangente / Carlos André Carneiro de Oliveira. – Campina Grande, 2014.

81 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Profª. Drª. Rosana Marques da Silva".

Referências.

1. Trigonometria - Ensino. 2. Recursos Tecnológicos. 3. Aprendizagem Significativa. I. Silva, Rosana Marques da. II. Título.

CDU 514.116:37.026(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

TRIGONOMETRIA: O RADIANO E AS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

por

Carlos André Carneiro de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

TRIGONOMETRIA: O RADIANO E AS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

por

Carlos André Carneiro de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Rosana Marq

Profa. Dra. Rosana Marques da Silva - UFCG
Orientadora

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Abril/2014

Dedicatória

À minha mãe que foi um exemplo de otimismo e sempre acreditou em mim, mesmo quando eu não acreditava.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por todos os objetivos conquistados com muito esforço e perseverança, e por manter-me sempre confiante que o estudo é a melhor forma de ascender social, intelectual e economicamente.

À UFCG e a todos os professores do programa PROFMAT, que contribuiram imensamente nos meus estudos. Em especial, aos professores Aparecido (Coordenador do curso), Luiz Antônio, Rosana, Jaqueline, Jesualdo, Jaime, Iraponil e Daniel e à secretária Andrezza por seus atendimentos realizados durante o curso.

À professora Rosana pela prestimosa colaboração e paciência em me orientar, fazendo dos nossos encontros momentos ricos e alegres, pois a professora nos ensina e nos corrige com um sorriso, fazendo com que o trabalho árduo pareça mais leve.

À Banca Examinadora, formada pelos professores José de Arimatéia Fernandes (UFCG) e Davis Matias de Oliveira (UEPB), pela valiosa contribuição para a conclusão deste trabalho.

Gostaria de agradecer a meus amigos do curso PROFMAT, os quais contribuíram muito para a conclusão do mestrado, pois tenho certeza que não conseguiria sozinho.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre o ensino da trigonometria no ensino médio, contemplando as recomendações sobre esse conteúdo encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e uma breve análise desses conteúdos em alguns dos livros recomendados pelo Guia de Livros Didáticos de Matemática - PNLP 2012. Destacando a formação do conceito de radiano; a extensão das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente definidas no triângulo retângulo para as funções Trigonométricas de domínio real, além das demonstrações geométricas das fórmulas da adição e da subtração de arcos das funções seno, cosseno e tangente. Apresenta, também, uma sequência didática, com atividades contemplando os conteúdos destacados acima. As atividades foram elaboradas tendo como referência a teoria da aprendizagem significativa e adaptadas ao uso do software GeoGebra.
Palavras Chaves: trigonometria, recursos tecnológicos, aprendizagem significativa.

Abstract

This work presents a study on the teaching of trigonometry in high school, in accordance with the recommendations about this subject found in National Curriculum Guidelines (Parâmetros Curriculares Nacionais) and a analysis of the content of some of the books recommended by the Mathematics Textbook Guide - PNLP 2012. It highlight the formation of the concept of radian; the extension of trigonometric ratios sine, cosine and tangent defined in the triangle for Trigonometric functions of real field, in addition to the geometrical proofs of the formula of addition and subtraction arches functions sine, cosine and tangent. It also presents a didactic sequence, with activities covering the highlighted contents above. The activities were developed with reference to the meaningful learning theory and adapted to the use of GeoGebra software.
Keywords: Trigonometry, technological resources, meaningful learning.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A matemática, tradicionalmente, considerada uma disciplina difícil carrega a grande responsabilidade de lapidar nosso pensamento crítico e desenvolver nossa autonomia intelectual, proporcionando-nos operar além das questões postas pelos livros didáticos; sua práxis converge para atitudes de confiança, ampliação da realidade, percepção da beleza, evolução do processo de questionamentos, construção do pensamento abstrato, construção de hipóteses e teses.

Essas competências, de uma forma geral, são exigências do mundo contemporâneo, o qual exige do individuo conhecimentos que o torne um cidadão crítico e capaz de tomar decisões, pois o impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo exige competências que vão além de lidar com máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornam rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa no início de sua vida profissional, portanto, aprender continuamente e de forma significativa é uma necessidade de todos.

Os conteúdos de matemática trabalhados no ensino básico devem ser abordados destacando as aplicações e as contextualizações, principalmente nas práticas sociais (cotidiano), facilitando, assim, o desenvolvimento das competências acima mencionadas. A trigonometria, conteúdo pertencente ao primeiro tema estruturador dos conteúdos de matemática do Ensino Médio (Álgebra: números e funções), deve ser abordada evidenciando os aspectos importantes das funções trigonométricas e análises de gráficos e evitando a memorização indiscriminada de fórmulas e algoritmos, que está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[3], que enfatizam as aplicações que o conteúdo trigonometria abrange e desaconselha o uso excessivo dos cálculos algébricos, assegurando a apresentação de um conteúdo de forma significativa para os alunos, com aplicações motivadoras, evitando o excesso de equações que muitas das vezes não carrega nenhum significado.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre as funções trigonométricas no Ensino Médio, destacando os conceitos de radiano e a definição das funções seno, cosseno e tangente; contextualizando com a história da matemática, além de apresentar as fórmulas da adição e subtração de arcos, que são pouco explorados nos livros didáticos, e atividades embasadas na teoria de aprendizagem significativa de David Ausubel [1] que apontem caminhos para promover uma aprendizagem significativa.

Estruturamos este documento nos seguintes capítulos:

Capítulo 1 - A introdução.

Capítulo 2 - Abordamos as principais características da teoria da aprendizagem significativa desenvolvida pelo psicólogo da educação David Ausubel, destacando a diferença entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica; as implicações dessa teoria no ensino e o papel do professor nesse contexto.

Capítulo 3 - Além de apresentar um estudo sobre as orientações dos PCN's sobre o ensino de matemática no ensino médio, em particular, no ensino de trigonometria, apresenta uma analise de como alguns livros didáticos abordam o conteúdo de trigonometria.

Capítulo 4 - Abordamos os conhecimentos básicos necessários para o ensino de trigonometria.

Capítulo 5 - Neste capítulo apresentamos um estudo bibliográfico, procurando na história destaques importantes que nortearam o desenvolvimento da trigonometria, onde destacamos os estudiosos gregos: Hiparco de Nicéia, considerado o pai da trigonometria e Ptolomeu, grande astrônomo, que sistematizou o estudo da trigonometria em 13 livros, obra que ficou conhecida como o almagesto.

Capítulo 6 - Desenvolvemos sistematicamente o estudo das funções trigonométricas, além de propormos uma abordagem metodológica para o ensino das fórmulas de adição e subtração de arcos das funções seno, cosseno e tangente, apoiados nas demonstrações geométricas dessas fórmulas, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas do triângulo retângulo.

Capítulo 7 - Apresentamos alguns sites que disponibilizam material pedagógico gratuitamente e que podem favorecer o ensino de matemática.

Capítulo 8 - Trouxemos uma sequência didática com atividades que abordam os conteúdos de Trigonometria destacados no texto de um forma dinâmica, utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra que pode ser encontrados no endereço "https://sites.google.com/site/aulamatematicaxxi/funcoes-trigonometricas".

Capítulo 9 - Apresentamos as considerações finais do nosso trabalho.

Capítulo 2

A Aprendizagem Significativa

Atualmente muitos trabalhos sobre educação (ensino e aprendizagem) se referem ao termo aprendizagem significativa, ou seja, que novos conteúdos trabalhados em sala de aula tenham significado para o aprendiz. Mas o que significa dar significados a conteúdos ou aprender de forma significativa? Veremos a seguir noções da teoria de aprendizagem desenvolvida, nos anos 60, pelo psicólogo David Ausubel [1, 20], na tentativa de responder as questões acima mencionadas.

De acordo com Moreira [20]

> Aprendizagem significativa, segundo Ausubel, é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não-literal) à estrutura cognitiva do aprendiz. É no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito.
>
> A não-arbitrariedade quer dizer que o material potencialmente significativo se relaciona de maneira não-arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Ou seja, o relacionamento com conhecimentos especificamente relevantes, os quais Ausubel chama subsunçores. O conhecimento prévio serve de matriz ideacional e organizacional para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos quando estes "se ancoram" em conhecimentos especificamente relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva. Novas ideias, conceitos, proposições, podem ser aprendidos significativamente (e retidos) na medida em que outras ideias, conceitos, proposições, especificamente relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do sujeito e funcionem como pontos de "ancoragem" aos primeiros.
>
> A substantividade significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva é o conceito (substância) do novo conhecimento, das novas ideias, não as palavras precisas usadas para expressá-las. Assim, uma aprendizagem significativa não pode depender do uso exclusivo de determinados signos em particular.

A essência do processo da aprendizagem significativa está, portanto, no relacionamento não-arbitrário e substantivo de ideias simbolicamente expressas a algum aspecto relevante da estrutura de conhecimento do sujeito, isto é, a algum conceito ou proposição que já lhe é significativo e adequado para interagir com a nova informação, propiciando ao aprendiz a construção do seu conhecimento.

Em contraposição à aprendizagem significativa, em outro extremo de um contínuo, está a aprendizagem mecânica que, conforme Ausubel [1], quando a nova informação não interage com o conhecimento já existente, não ocorre a aprendizagem significativa, mas pode ocorrer a aprendizagem mecânica. Na aprendizagem mecânica o novo conhecimento é armazenado de maneira arbitrária e literal, sem significado para o aprendiz. Ambas podem estar presentes em muitas situações de aprendizagem, ou seja, podem ocorrer situações de aprendizagem mais próximas da significativa e outras mais próximas da aprendizagem mecânica. A aprendizagem significativa é progressiva e complexa, no seguindo sentido, os significados dos novos conhecimentos vão sendo captados e internalizados progressivamente e nesse processo a linguagem e a interação pessoal são muito importantes.

Ainda de acordo com Ausubel, os fatores essenciais para ocorrer a aprendizagem significativa (indivíduo aprender) são:

- Disposição do aprendiz para aprender;
- Material potencialmente significativo;
- Existência de subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz.

A aprendizagem significativa requer não só que o material de aprendizagem seja potencialmente significativo (isto é, relacionável à estrutura cognitiva de maneira não-arbitrária e não-literal), mas também que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar o novo material de modo substantivo e não-arbitrário a sua estrutura de conhecimento. Independente de quão potencialmente significativa é a nova informação (um conceito ou uma proposição, por exemplo), se a intenção do sujeito for apenas a de memorizá-la de maneira arbitrária e literal, a aprendizagem será mecânica.

2.1 Implicações para o Ensino.

Segundo Novak, *apub* Moreira [20], uma teoria de educação deve considerar que seres humanos pensam, sentem e agem e qualquer evento educativo é uma ação para trocar significados (pensar) e sentimentos entre aprendiz e professor. A predisposição para aprender, colocada por Ausubel como uma das condições para ocorrer a aprendizagem significativa, está intimamente relacionada com a experiência afetiva que o aprendiz tem no evento educativo.

Predisposição para aprender e aprendizagem significativa guardam entre si uma relação praticamente circular: a aprendizagem significativa requer predisposição para aprender e, ao mesmo tempo, gera uma experiência afetiva. Atitudes e sentimentos positivos em relação à experiência educativa têm suas raízes na aprendizagem significativa e, por sua vez, a facilitam.

No que se refere à estrutura cognitiva do aluno, deve haver a disponibilidade de subsunçores – conceitos ou proposições claros, estáveis, diferenciados, especificamente relevantes – para ancorar os novos conhecimentos e, assim, ocorrer a aprendizagem significativa.

No caso de não existirem os subsunçores ou de estarem "esquecidos", a principal estratégia defendida por Ausubel, *apub* Moreira [20], é a dos organizadores prévios. Os organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si, em um nível mais alto de abstração e generalidade. Sua principal função é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber a fim de que o novo material possa ser aprendido de maneira significativa. Organizadores prévios podem ser usados também para "reativar" significados aprendidos e já esquecidos (isso é perfeitamente possível se a aprendizagem foi significativa).

Segundo Moreira [22] a teoria de Ausubel oferece diretrizes, princípios e uma estratégia que, ele crê, serem facilitadores da aprendizagem significativa. No que se refere à facilitação programática da aprendizagem, Ausubel [1] propõe quatro princípios programáticos do conteúdo: diferenciação progressiva, reconciliação integrativa, organização sequencial e consolidação.

A diferenciação progressiva é o princípio segundo o qual os conceitos devem ser trabalhados de forma hierarquizadas. Esse principio é baseado em duas hipóteses: 1) é menos difícil para o ser humano captar aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo, previamente aprendido, do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas previamente aprendidas; 2) a organização do conteúdo de um corpo de conhecimento na mente de um indivíduo é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas estão no topo da estrutura e, progressivamente, incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados.

A reconciliação integrativa é o princípio segundo o qual a programação do conteúdo deve explorar, explicitamente, relações entre conceitos e proposições, chamar atenção para diferenças e similaridades relevantes e reconciliar inconsistências reais ou aparentes.

A organização sequencial, consiste em sequenciar os tópicos de estudo de maneira coerente (observados os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa) com as relações de dependência naturalmente existentes na matéria de ensino.

O princípio da consolidação, esta relacionado com o domínio do conteúdo estudado, antes que novos materiais sejam introduzidos, assegurando contínua prontidão na matéria de ensino e condições para ocorrer a aprendizagem sequencialmente organizada. A consolidação é um princípio fundamental, já que o fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é o que o aprendiz já sabe. Saber superficialmente não é suficiente, é preciso saber significativamente. Assim, os conteúdos são real e efetivamente apreendidos quando o educando não somente os reproduz, mas deles se vale para resolver diferentes situações concretas.

2.1.1 O papel do professor

No processo de ensino e aprendizagem, segundo a teoria da aprendizagem significativa, professor e aluno têm responsabilidades distintas. O professor é responsável por verificar se os significados que o aluno capta são aqueles compartilhados pela comunidade de usuários da matéria de ensino. O aluno é responsável por verificar se os significados que captou são aqueles que o professor pretendia que ele captasse, isto é, os significados compartilhados no contexto da matéria de ensino. Se é alcançado o compartilhar significados, o aluno está pronto para decidir se quer aprender significativamente ou não. O ensino requer reciprocidade de responsabilidades, porém aprender de maneira significativa é uma responsabilidade do aluno que não pode ser compartilhada pelo professor [21].

O professor, ao planejar os seus cursos visando a aprendizagem significativa, segundo Moreira [21], deve analisar o currículo e identificar: 1) a estrutura de significados aceita no contexto da matéria de ensino; 2) os conhecimentos prévios (subsunçores significativos) necessários para a aprendizagem da matéria de ensino; 3) os significados preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz e 4) organizar sequencialmente o conteúdo, selecionando recursos materiais e didáticos, baseando-se nas ideias de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa como princípios programáticos; 5) ensinar usando organizadores prévios, para fazer pontes entre os significados que o aluno já tem e os que ele precisaria ter para aprender a matéria de ensino, bem como para o estabelecimento de relações explícitas entre o novo conhecimento e aquele já existente e adequado para dar significados aos novos materiais de aprendizagem.

Todo o material instrucional deve ter um potencial significativo para o aprendiz. Um professor pode preparar uma aula repleta de elementos bem elaborados; porém, se estes elementos não tiverem nenhuma relação com aquilo que o aluno já conhece, o material não tem potencial significativo. Isto é, se ocorrer uma aprendizagem nesta situação, é bem provável que esta seja mecânica.

Na sala de aula, o professor deve ter o cuidado de iniciar os conteúdos pelos aspectos mais simples da temática e avançar para aos mais complexos, traduzindo-se na ampliação dos conhecimentos, das habilidades e das atitudes. Os conteúdos devem ser trabalhados de forma gradual, com uma distribuição adequada, tanto no que diz respeito à qualidade quanto à quantidade, principalmente porque estas devem ser apresentadas tendo por base as experiências e os conhecimentos prévios dos alunos. O terceiro aspecto a ser considerado é a continuidade, conexões entre os conteúdos, de tal modo que estes se complementem e se integrem conforme o ensino e a aprendizagem se processam. O professor, ao respeitar esses aspectos, na organização sequencial na programação dos conteúdos, estará respeitando os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa e, portanto, promovendo à aprendizagem significativa.

A consolidação do conhecimento exige do professor muito cuidado e esmero para que não haja uma precipitação na introdução de outra temática. O compromisso docente na promoção da consolidação confere ao processo de avaliação da aprendizagem um sentido mais subjetivo. O professor deve, a partir das dificuldades de aprendizagem manifestadas por seus alunos, replanejar ações para à superação dessas dificuldades [27].

Quanto ao desenvolvimento das aulas o professor deve promover a participação ativa do aluno, lançando mão da diversidade de estratégias de ensino. O ensino baseado somente em aulas expositivas (o professor escreve no quadro, os alunos copiam, decoram e reproduzem) favorecem a aprendizagem mecânica. O uso de distintas estratégias instrucionais que impliquem participação ativa do estudante e, de fato, promovam um ensino centralizado no aluno é fundamental para facilitar a aprendizagem significativa e crítica [22]. Ainda segundo Moreira [22], para ser crítico de algum conhecimento, de algum conceito, primeiramente o sujeito tem que aprendê-lo significativamente.

Conforme Novak, *apub* Miskulin [19], quando estudantes trabalham em grupos pequenos e estabelecem uma colaboração implícita e explícita na aprendizagem de uma determinada temática ou assunto, resultados cognitivos e afetivos aparecem de forma positiva. Ressalta ainda que a aprendizagem significativa é favorecida quando professores e alunos trabalham em grupos, de forma colaborativa.

As tecnologias de Informação e comunicação (TICs) propiciam a criação de ambientes educacionais que promovem aprendizagem de forma colaborativa. O uso da tecnologia na promoção da aprendizagem, mais especificamente do computador, dinamizam o processo, através de sistemas que implementem um ambiente de colaboração e possuam um papel ativo e um controle desta colaboração. São ambientes que proporcionam aos alunos um envolvimento interativo na produção do conhecimento compartilhado podendo levar à aprendizagem significativa [19].

Capítulo 3

Os PCNs e o Ensino de Trigonometria

Neste capítulo vamos apresentar de forma sucinta como a trigonometria aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio [2, 3, 4] e em alguns dos livros didáticos indicados pelos Guia de Livros didáticos de matemática - PNLP 2012 [7], do ministério da Educação.

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são referenciais de qualidade elaboradas pelo Governo Federal, a partir da Lei de Diretrizes e Base da educação brasileira - LDB 9.394/96, com o objetivo de padronizar o ensino no país.

As bases legais do ensino médio seguem as premissas apontadas pela UNESCO que são: Aprender a conhecer; Aprender a fazer; Aprender a viver e Aprender a ser. O ensino médio destina-se à formação geral do educando e contém a dimensão de preparação para a continuidade de estudos e preparação para o trabalho, de modo que os avanços na cultura e na educação acompanhem as rápidas transformações econômicas e tecnológicas. Os PCNs elegem as Competências[1] e Habilidades que devem ser desenvolvidas no ensino médio baseadas na finalidade[2] desse nível de ensino.

[1]Competências que um aluno no final do ensino médio deve ter, Art. 36 § 1º da LDB 9394/96 [6], *in verbis*: Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que ao final do ensino médio o educando demonstre:

I domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;

II conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;

III domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania.

[2]Finalidades do Ensino Médio Artigo 35 da LDB 9394/96

O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

A contextualização e a Interdisciplinaridade dos conteúdos são princípios emanados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio [5] e recomendadas pelo PCNs [2]:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência .

Os PCNs [2, 3] sugerem uma estruturação para os conteúdos a serem desenvolvidos no ensino médio, chamando-os de temas estruturadores do ensino da matemática, a saber:

Álgebra: números e funções. Aqui são incluidos os conteúdos: Conjuntos numéricos, Funções, Seqüências numéricas, Matrizes, Sistemas de equações lineares, Polinômios, Equações algébricas e Trigonometria.

Geometrias e Medidas. Aqui são incluidos os conteúdos: Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e Medidas.

Análise de Dados. Aqui são incluidos os conteúdos: Matemática Financeira, Análise combinatória, Probabilidade e Estatística.

O assunto trigonometria aparece no primeiro tema estruturador e é indicado para ser trabalhado no primeiro e no segundo ano do ensino médio [4], quanto ao desenvolvimento das habilidades relacionadas a esse assunto os PCNs [3] destacam que:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas.

E quanto ao desenvolvimento dos conteúdos sugerem que:

III o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

> O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa.

Os Referenciais enfatizam as aplicações que o conteúdo trigonometria abrange e desaconselha o uso excessivo dos cálculos algébricos, recomendando que o conteúdo seja apresentado de forma significativa, com aplicações motivadoras, contextualizado no cotidiano.

É indispensável que quando do ensino de trigonometria, o aluno tenha o conhecimento de conjunto, ângulo, triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e os conceitos de correspondência entre conjuntos, proporcionalidade e de função. Esses conhecimentos são básicos para a boa compreensão do conteúdo Trigonometria.

Os PCNs [2] também reforçam a necessid do professor considerar os conhecimentos prévios dos alunos, tanto o conhecimento formal como o informal.

> O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico.

3.2 Livros Didáticos

O PNLD-2012 [7], com relação aos conteúdos de Trigonometria nos Livros didáticos recomendados, ressalta:

> [...] consideremos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a um número real x o numero real y, $y = f(x)$. Tomemos, então, um numero real k, diferente de zero, e formemos as funções dadas por:
>
> $$y = k + f(x) \qquad y = f(x+k) \qquad y = f(kx) \qquad y = kf(x)$$
>
> As relações entre o gráfico da função f e os gráficos das funções que acabamos de indicar são uma rica fonte de conexões entre as representações analítica e gráfica das funções em jogo. Em particular, isso permite interpretar mudanças de variáveis como transformações geométricas no plano cartesiano.

> Esse tema é abordado em todas as obras aprovadas, mas, em geral, para poucas classes de funções. Um dos casos estudados é a composição das transformações citadas à função $y = cos(x)$, para obter a família de funções:
>
> $$y = a + b cos(wx + c),$$
>
> em que a, b e c são números reais quaisquer e w é um número real positivo. Observamos que, apenas variando os parâmetros w e b nessa família, é possível construir funções periódicas de qualquer período e de qualquer amplitude. Podemos, também, variar os outros dois parâmetros, a e c, e aumentar a classe de fenômenos periódicos que podem ser modelizados pela família de funções acima. Assim, é inegável que essa família de funções é importante do ponto de vista da modelagem matemática e, por isso, deveria ocupar lugar de maior destaque no ensino das funções trigonométricas e constituir-se em um coroamento deste ensino. Convém adicionar que, para construirmos todas as "peças" dessa família de funções, são necessárias poucas relações trigonométricas, o que poderia contribuir para evitar o excesso de conteúdos nos livros didáticos. Observamos que as coleções dedicam em torno de 100 páginas ao estudo de trigonometria e de funções trigonométricas, de modo fragmentado e repetitivo.

No nosso estudo, analisamos 3 coleções de livros didáticos, entre as recomendadas pelo PNLD 2012, as quais denominaremos de Livro A, Livro B e Livro C, sendo:

- Livro A [11] - Coleção Novo Olhar, Ensino Médio de Joamir Roberto de Souza, volumes 1 e 2, São Paulo: Editora FTD S.A., 2012;
- Livro B [18] - MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO de Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole, Volumes 1 e 2, São Paulo: Editora Saraiva, 2010;
- Livro C [10] - Coleção MATEMÁTICA, CONTEXTO e APLICAÇÕES de Luiz Roberto Dante, Volume 1, São Paulo: Editora Àtica, 2011.

As coleções Livro A e B, trazem os conteúdos referentes a trigonometria divididos em duas unidades, uma no volume 1, que trata do triângulo retângulo e a outra no volume 2, que trata do círculo trigonométrico e das funções trigonométricas. A coleção Livro C, traz o assunto em uma única unidade do volume 1. Quanto a ordem em que os conteúdos são apresentados todas as coleções equivalem.

As três coleções motivam o estudo apresentando situações do cotidiano cujos modelos matemáticos envolvem trigonometria do triângulo retângulo ou funções trigonométricas e iniciam o desenvolvimento do conteúdo apresentando os teoremas de Tales e de Pitágoras e a seguir mostram as relações trigonométricas no triângulo retângulo, definindo o seno, cosseno e tangente de um ângulo, seguindo com as leis do seno e do cosseno, com vistas a resolver problemas que envolvem o cálculo de distâncias inacessíveis. Exploram esses tópicos na resolução de uma diversidade de exercícios de fixação e de situações-problema contextualizando o conteúdo. Apresentam o círculo trigonométrico e definem as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e as fórmulas para a soma e diferenças de arco para essas três funções. Apresentam, também, equações e inequações trigonométricas.

O estudo das funções trigonométricas é antecedido do estudo de ângulos e arcos. Os autores chamam a atenção para a medida de comprimento de um arco, e da medida angular de um arco, destacando que enquanto a medida angular depende apenas do ângulo central correspondente, o comprimento de um arco equivale a sua medida linear e depende do comprimento da circunferência, ou seja, do raio da circunferência. Definem radiano como uma medida angular da seguinte forma: "Um arco que mede um radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém (Livro A)."

O círculo trigonométrico (ciclo trigonométrico) é definido como um círculo de raio um (circulo unitário) e estabelece a identificacão entre a medida de um arco (comprimento do arco) do círculo unitário e do ângulo central medido em radianos. Apresentam exercícios de fixação explorando as transformações de radianos para graus e vice-versa.

Em todas as coleções as funções trigonométricas seno e cosseno são definidas a partir de uma tabela que relaciona alguns valores de arcos dados em radianos e o valor do seno desses arcos. Estudando a correspondência sugerida na tabela é gerado um gráfico. A partir do comportamento observado no gráfico gerado, como período, paridade e crescimento, é definida a função real de variável real seno. De forma análoga são definidas as funções cosseno e a tangente.

Sobre o Livro A, o PNLD 2012 destaca: "faz uma abordagem concisa das funções trigonométricas, sem os excessos comuns. A tangente é definida, porém, não é estudada como função".

Destacamos no Livro C, a contextualização histórica. O livro explora tópicos da história da matemática relacionados com o conteúdo. Na definição das funções trigonométricas o autor sugere uma leitura optativa que explora a função de Euler, evidenciando a preocupação com o significado de calcular seno, cosseno e tangente de números reais. Apresenta as fórmulas de adição e subtração de arcos, após narrar um fato histórico relacionado as dificuldades que os navegadores do século XVI enfrentavam para fazer os cálculos para navegação.

> Até que o matemático Alemão Christopher Clavius (1538-1612) encontrou um método eficiente para acelerar os cálculos. Ele utilizava um algoritmo que permitia calcular o produto de dois números usando fórmulas de trigonometria: dados dois números compreendidos entre 0 e 1, procurava-se numa tabela trigonométrica arcos cujos cossenos correspondessem a eles e, em seguida, calculava-se a média aritmética entre os cossenos da adição e da subtração entre esses arcos.

As fórmulas da adição e subtração de arcos, arco duplo e arco metade são apresentadas, em todas as coleções, de forma direta, sem nenhuma construção e exploradas através de exercícios.

Nos exemplos e exercícios todas as coleções exploram as influências dos parâmetros a, b, c e d no comportamento do gráfico da função dada por $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$, conforme recomendam explicitamente os PCNs, e apresentam muitas e interessantes situações-problema contextualizadas envolvendo alturas inacessíveis e eventos periódicos, como: respiração, ondas sonoras, movimento da terra, entre outros.

Os livros analisados, de uma forma geral, apresentam o conteúdo de forma satisfatória, trabalhando todos os tópicos sugeridos nos PCNs. Porém, destacamos três pontos: A introdução do conceito de radiano, a definição das funções seno, cosseno e tangente e as fórmulas da adição e da subtração de arcos, uma vez que, no nosso entendimento, o conceito de radiano é fundamental para o entendimento das funções trigonométricas. Segundo nossa análise, em todas as coleções, a introdução do conceito de radiano é feito de forma aligeirada e não muito clara para a maioria dos alunos. Como também a definição da função seno, função real de variável real, a partir de dados em uma tabela de valores. Quanto as fórmulas de adição e subtração de arcos, todas as coleções analisadas apresentam as fórmulas e trabalham somente com manipulações algébricas.

Nos capítulos a seguir, apresentaremos uma visão histórica do surgimento da trigonometria e do radiano; O estudo das funções seno e cosseno, a partir da função de Euler e as demonstrações, explorando semelhança de triângulos, das fórmulas de adição e subtração de arcos.

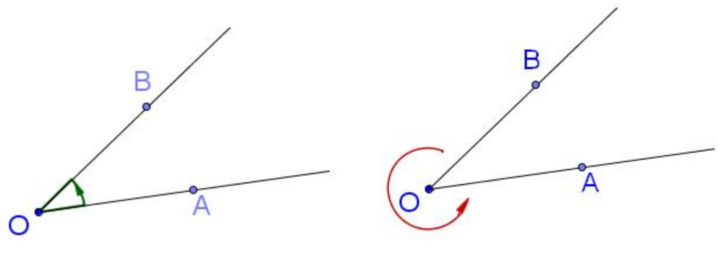
Capítulo 4

Trigonometria: Conceitos Iniciais

Neste capítulo vamos apresentar de forma sucinta alguns conteúdos que são a base para o estudo das funções trigonométricas, a saber, ângulo, o triângulo retângulo, semenlhança de triângulos, as relações trigonométricas do triângulo retângulo e o círculo trigonométrico.

4.1 O ângulo

O ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas formam os lados do ângulo e a origem é o vértice do ângulo. Por exemplo, se O é o vértice e os pontos A e B pertencem a cada uma das semirretas que formam o ângulo, o ângulo será representado por $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$. A Figura 4.1 (a) e (b) ilustra os ângulos $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$, respectivamente, com a orientação[1] anti-horária.



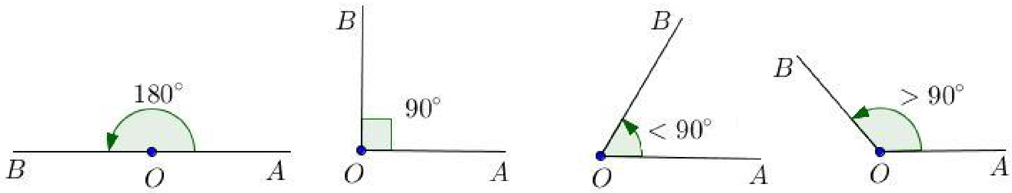
(a) (b)

Figura 4.1: Ângulos.

O grau, unidade de medida de ângulos, é a fração de $\dfrac{1}{360}$ do comprimento do círculo e é denotado por $^\circ$. Assim, um círculo completo corresponde a 360 graus ou 360°. O ângulo que corresponde a metade do círculo corresponde a 180° (Figura 4.2(a)). Os ângulos, de acordo com sua medida em graus, podem ser classificados em raso, reto, agudo e obtuso se

[1]Um círculo pode ser orientado em dois sentidos, horário ou anti-horário. Geralmente o sentido anti-horário é considerado o sentido positivo.

sua medida for igual a 180°, 90°, menor que 90° ou maior que 90°, respectivamente (Figura 4.2).



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.2: Ângulo raso (a), reto (b), agudo (c) e obtuso (d).

4.2 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes[2] quando existe uma correspondência biunívoca[3] entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (Figura 4.3) [23].

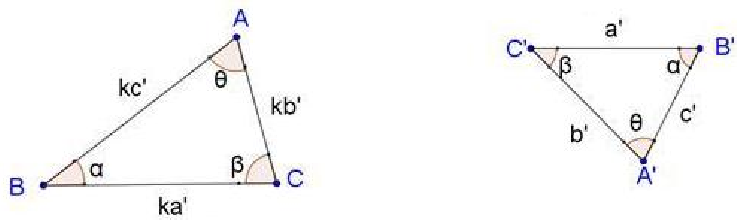


Figura 4.3: Triângulos semelhantes.

Os triângulos ABC e $A'B'C'$, dados na Figura 4.3, são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$,$B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ e as razões

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k,$$

onde, $\overline{XY}$ é o comprimento de um segmento XY e k é um real positivo denominado de razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$. Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para denotar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

[2]Dois triângulos são semelhantes de pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações.

[3]Dizemos de uma correspondência entre dois conjuntos é biunívoca, quando a cada elemento do primeiro corresponde um único elemento do segundo e reciprocamente.

4.2.1 Casos de Semelhança de triângulos no plano

Existem três casos de semelhança de triângulos, a saber:

Caso 1: Ângulo, Ângulo (AA) - Para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que eles tenham dois ângulos respectivamente congruentes.

Caso 2: Lado, Lado, Lado (LLL) - Para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que eles tenham os lados respectivamente proporcionais.

Caso 3: Lado, Ângulo, Lado (LAL) - Para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que eles tenham dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos compreendido entre esses lados congruentes.

Para informações mais detalhadas sobre semelhnaça de triângulos consultar Caminha [23].

4.3 Triângulos Retângulos

Os triângulos os ABB',ACC',ADD',AEE', ilustrados na Figura 4.4, são triângulos retângulos, já que os ângulos $A\widehat{B'}B$, $A\widehat{C'}C$, $A\widehat{B'}B$ e $A\widehat{D'}D$ e $A\widehat{E'}E$ são ângulos retos. Como o ângulo agudo α, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, é comum a todos os triângulos, pelo caso (AA), os triângulos são semelhantes. Logo, a razão entre o comprimento de lados correspondentes é constante.

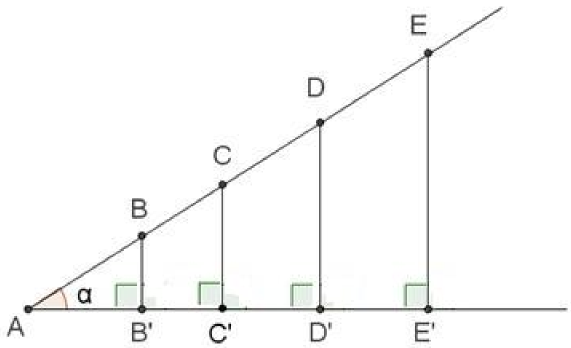


Figura 4.4: Triângulo retângulo.

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}. \tag{4.1}$$

4.3.1 Razões trigonométricas

A razão $k = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}$, dada em (4.2), depende apenas do ângulo α, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (Figura 4.4), e não dos comprimentos dos lados dos triângulos envolvidos, e é conhecida como seno do ângulo α e denotada por $\text{sen}(\alpha)$. Ou seja,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}.$$

De forma análoga as razões

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}, \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE'}},$$

também dependem apenas do ângulo α, para $0° < \alpha < 90°$, e são conhecidas, respectivamente, por cosseno e tangente do ângulo α, denotados por $\cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}, \quad \text{e} \\ \text{tg}(\alpha) &= \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE'}}. \end{aligned}$$

Usando as denominação de hipotenusa para lado do triângulo retângulo oposto ao ângulo reto, de cateto oposto ao lado posto ao ângulo agudo α e de cateto adjacente o lado adjacente ao ângulo α (Figura 4.5), podemos escrever: as razões na forma mais conhecida:

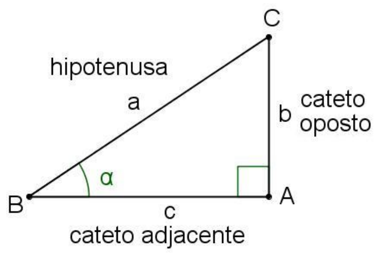


Figura 4.5: Triângulo retângulo.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \\ \text{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \\ \text{tg}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Calculando $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)$ e $\dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, usando as duas primeiras expressões de (4.2), obtemos

$$\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2},$$

usando o teorema de Pitagoras no triângulo retângulo dado na Figura 4.5, $b^2+c^2 = a^2$, obtemos a relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$. E o quociente $\dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \text{tg}(\alpha)$.

Com o conhecimento das razões trigonométrica do triângulo retângulo é possível resolver problemas envolvendo o cálculo de distâncias inacessíveis em algumas situações. A seguir, exemplos encontrados em livros textos do ensino médio.

1. (Herval Paccola,1997) Uma pessoa está na margem de um rio, onde existem duas árvores B e C, conforme ilustra a Figura 4.6. Na outra margem, em frente a B, existe outra árvore A, vista de C segundo um ângulo de 30°, com relação a B. Se a distância de B a C é de 150 m, qual é a largura do rio, nesse trecho?

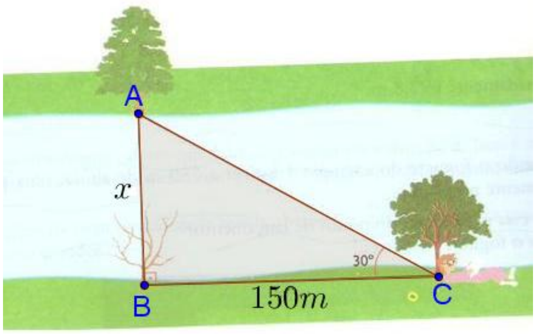


Figura 4.6: Herval Paccola,1997.

2. (Dante,1999.) Um matemático foi desafiado a encontrar a altura de uma árvore, usando apenas conhecimento de trigonometria. Então com a ajuda de um teodolito e de uma trena o matemático encontrou o ângulo em relação a horizontal do ponto mais alto da árvore, depois mediu a sua distância à árvore, e utilizando de uma tabela trigonométrica e a tangente de um ângulo, determinou a altura da árvore (Figura 4.7).

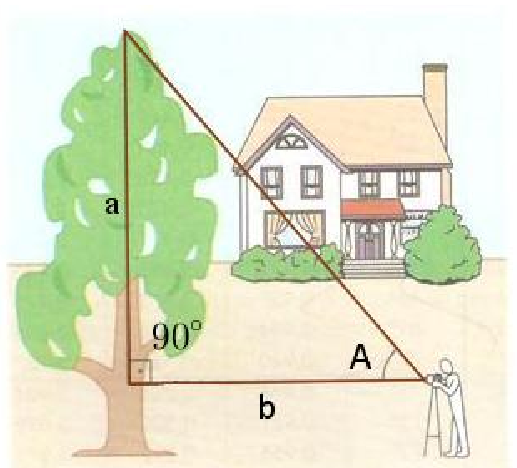


Figura 4.7: Dante,1999.

4.4 Ângulos e arcos

O comprimento de um segmento AB, denotado por $\overline{AB}$, está bem definido[4], porém, o comprimento de um um arco, trecho de um círculo, ligando os pontos A e B, subtendido pelo ângulo central do círculo[5] e denotado por $\widehat{AB}$, não tem definição simples [9]. Uma forma de medi-lo, de acordo com Carmo [9], é ajustar a ele um fio flexível e depois esticar o fio e determinar seu comprimento, mas isso não é uma definição de comprimento do arco. Como em Carmo [9], vamos assumir que o semi-círculo de raio 1 tem medida igual a π. Arcos de círculos que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios (Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em Elon [16]).

Sejam s e s' os comprimentos dos arcos $\widehat{BP}$ e $\widehat{CQ}$, subtendidos pelo mesmo ângulo central O, dos círculos de raios r_1 e r_2, respectivamente (Figura 5.8). Logo,

$$\frac{s}{s'} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{ou} \quad \frac{s}{r_1} = \frac{s'}{r_2}$$

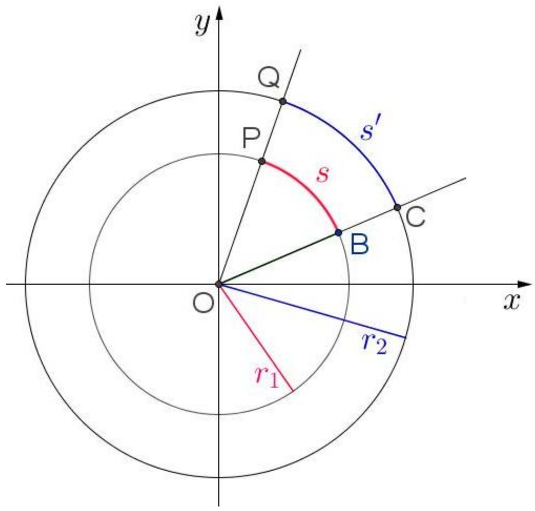


Figura 4.8: Arcos subtendidos pelo mesmo ângulo central.

[4]Se (a_1, a_2) e (b_1, b_2) são as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente, no plano cartesiano, então o comprimento do segmento AB é igual a distância de A até B, ou seja, $\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

[5]O ângulo central de um círculo é o ângulo cujo vértice é o centro do respectivo circulo, e as semirretas que o compõem, quando atravessam o círculo em dois pontos distintos, determinam um arco entre estes dois pontos, cuja medida é igual ao produto da medida do raio do círculo pela medida do ângulo central.

4.5 O Círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é um círculo orientado[6] unitário (círculo de raio 1), com orientação anti-horária, cuja origem dos arcos é o ponto A.

Associando ao círculo trigonométrico de centro O um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cuja origem é o centro do círculo trigonométrico e $A = (1,0)$, tomando um ponto $P = (x,y)$ do círculo (Figura 4.9), temos um triângulo retângulo OXP, onde $X = (x,0)$. Logo, as coordenadas de P podem ser dadas em função do ângulo α, a saber:

$$\begin{aligned} x &= \text{abscissa de P} = \cos(\alpha) \\ y &= \text{ordenada de P} = \text{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

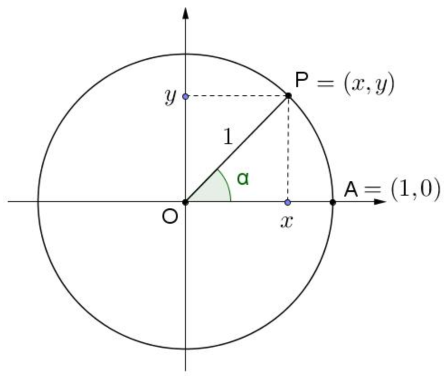


Figura 4.9: Círculo Trigonométrico.

[6]Um círculo pode ser orientado em dois sentidos, horário e anti-horário. Geralmente o sentido anti-horário é considerado o sentido positivo. Para percorrer um círculo orientado escolhe-se um ponto, digamos A, e este ponto é a origem dos arcos.

Capítulo 5

Um pouco da História da Trigonometria

A origem da trigonometria não é precisa, surgiu da curiosidade do homem, na antiguidade remota, em medir distâncias inacessíveis em problemas vinculadas a Astronomia, a Agrimensura e a Navegação. A palavra trigonometria significa medidas das partes de um triângulo (3 lados e 3 ângulos) [8].

Segundo Boyer [8] existe, no Egito, um documento chamado de Ahmes, conhecido como Papiro de Rhind, que data aproximadamente de 1650 a.C., que contém problemas que fazem referência ao *seked* [1] de um ângulo, o que hoje conhecemos por cotangente de um ângulo.

No mundo ocidental, o conhecimento dos egípcios foi seguido pelos Gregos [15]. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações. Hierônimos de Rodes atribui a Tales (624-548 a.C. aproximadamente) o método mais simples para medir a altura de uma pirâmide "conta-se que Tales mediu a altura das pirâmides pela sombra das mesmas, fazendo a medição na hora em que a sua própria sombra correspondia ao seu tamanho" (Figura 5.1) [8]. Tales funda-

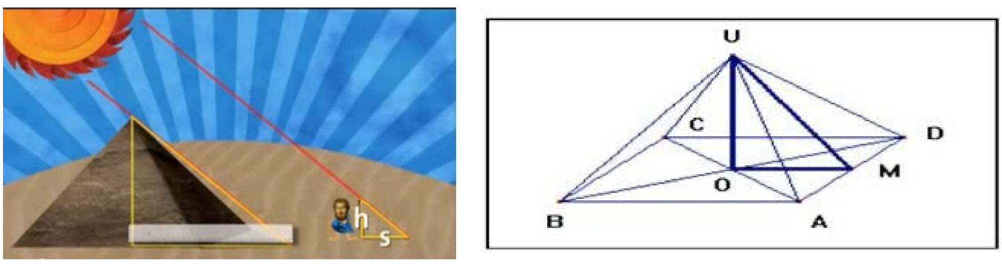


Figura 5.1: Tales e a altura da pirâmide (Fonte *site* [35]).

mentou a Trigonometria com seus estudos sobre a semelhança de triângulos e seu discípulo

[1] Segundo Pimtombeira [25], o *seked* era a unidade usada para medir inclinações. Ele se baseava na medida de comprimento chamada cúbito real. Cada cúbito era dividido em 7 palmos e cada palmo, por sua vez, era dividido em 4 dedos. A inclinação era medida como o número de palmos e dedos percorridos horizontalmente para subir um cúbito real.

Pitágoras (580 – 600 a.C. aproximadamente) fez a primeira demonstração do teorema "Em todo triângulo retângulo a área o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos" [8].

Ainda, segundo Boyer [8], muito do que é relatado sobre Tales e Pitágoras e suas obras são muito imprecisas.

> Não sobreviveu nenhuma obra de Tales ou Pitágoras, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos .

De acordo com Kennedy [15], atribui-se a primeira contribuição grega para a trigonometria a Hipsícles (em 180 a.C.) quando dividiu o círculo do zodíaco em 360 partes. Contudo, Hipsícles absorveu essa ideia da cultura babilônica, no entanto ele não usou essa divisão do círculo em 360 partes para outros círculos.

> Os babilônicos por volta de 300 a.C., optaram por dividir o ângulo total subtendido de uma circunferência em 360 partes, ou 360 graus (um múltiplo de 60, base do sistema de numeração usado pelos babilônicos), e definiram as subdivisões do grau, o minuto, $\frac{1}{60}$ de grau, e o segundo, $\frac{1}{60}$ de minuto. Hiparco, ao inaugurar a trigonometria, adotou o sistema babilônico de medidas [15].

De acordo com Boyer [8], foi com Erastóstenes de Cirene (276 – 196 a.C.) que se percebeu a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas, pois foi nesse período que se produziu a mais importante medida da Antiguidade para a circunferência da terra, usando para isso a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas. Por volta de 180 – 125 a.C., Hiparco de Nicéia, ampliou a idéia de Hipsícles, divindo qualquer circulo em 360 partes. É atribuído a Hiparco a construção da primeira tabela trigonométrica, tal fato leva Hiparco a ser conhecido como "O Pai da Trigonometria". Esse matemático e astrônomo grego foi uma figura da transição entre a Astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu (85 – 165 d.C.), conhecida como o Almagesto de Ptolomeu[2]. Nesta obra são encontrados resultados básicos sobre cordas.

[2]Segundo Kennedy [15] a *Syntaxis matematica* (síntese matemática) é a obra mais influente e significativa da Trigonometria da antiguidade, esta síntese era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores, como Aristarco (310 – 230 a.C., astrônomo e matemático grego, sendo o primeiro cientista a propor que a Terra gira em torno do Sol), por ser a obra de Ptolomeu chamada a coleção "maior" e a de Aristarco e outros a coleção "menor", e também devido às frequentes referências a primeira como magíster surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o Almagesto ("o maior"), ele é composto por treze livros, a maior parte desta obra é baseada nos trabalhos e estudos desenvolvidos por Hiparco, nos seus estudos sobre as tabelas trigonométricas e tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a terra está em seu centro (teoria geocêntrica, que será substituída, somente no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico (1473 – 1543 d.C.)).

5.1 Arcos e cordas

Atribui-se a Hiparco a construção de uma tábua trigonométrica de cordas, dos ângulos múltiplos de 7,5 graus, até 180 graus. O método de Hiparco para relacionar arcos e cordas, como descrito por Ptolomeu, é o seguinte: a circunferência de um círculo é dividida em 360 partes e o diâmetro é dividido em 120 partes. Cada parte da circunferência e do diâmetro é dividida em 60 partes, e cada uma dessas em mais 60. Então para determinado arco AB, com seu comprimento expresso em unidades de circunferência, Hiparco dá o número de unidades de corda. Desse modo ficaram definidas as unidades Ud (unidade de diâmetro) e Uc (unidade de circunferência), onde cada Ud é igual a 1/120 do diâmetro e cada Uc corresponde a 1/360 da circunferência [24].

Hiparco conhecia a aproximação sexagesimal para π, a qual era denotada por $3;8,30$ significando

$$3.60^\circ + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$$

que é uma aproximação para $\pi \approx 3,141666666...$

Com essa contribuição era possível determinar o raio de uma circunferência de comprimento C.

$$\begin{aligned} r &= \frac{C}{2\pi} \\ &= \frac{360^\circ \times 60'}{2 \times 3;8,30} \\ &= \frac{21600'}{2 \times 3,1416666...} \\ &= 3438' \end{aligned}$$

Segundo Oliveira [24], em seus cálculos para a construção da tábua trigonométrica Hiparco adotou uma circunferência de raio $3438'$, identificando através das propriedades de triângulos equiláteros que a corda referente ao ângulo de 60° é igual ao raio da circunferência, ou seja, $\text{corda}(60^\circ) = 3438'$. O outro valor conhecido da corda, estava relacionado com o ângulo de 90°, obtido usando o teorema de Pitágoras em um triangulo retângulo isósceles, onde a corda referente ao ângulo de 90° era a hipotenusa e o raio r era a medida dos outros dois lados, ou seja, $\text{corda}(90^\circ) = r \times \sqrt{2} = 3438' \times 1,414 = 4862'$.

Os cálculos realizados por Hiparco para encontrar os valores das outras cordas foram baseados em dois resultados, que em linguagem contemporânea, podem ser enunciado como:

Teorema 5.1 $\quad \text{corda}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - \text{corda}^2(\alpha)}.$

Demonstração. Seja α o ângulo central e $\text{corda}(\alpha)$ a corda subtendida por esse ângulo, conforme Figura 5.2. Por construção o triângulo ABC é retângulo em A e $\overline{AB} = \text{corda}(\alpha)$,

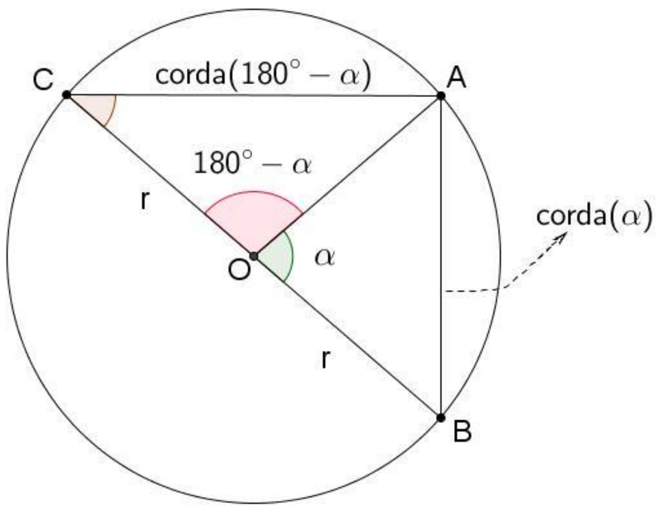


Figura 5.2: O ângulo central α e a corda(α). (Fonte Oliveira [24]).

$\overline{AC} =$ corda$(180^\circ - \alpha)$ e $\overline{BC} = 2r$, logo usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(2r)^2 = \text{ corda}^2(180^\circ - \alpha) + \text{ corda}^2(\alpha),$$

ou seja,

$$\text{corda}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - \text{ corda}^2(\alpha)}.$$

$\square$

Teorema 5.2 $\quad \text{corda}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = r[2r - \text{corda}(180^\circ - \alpha)].$

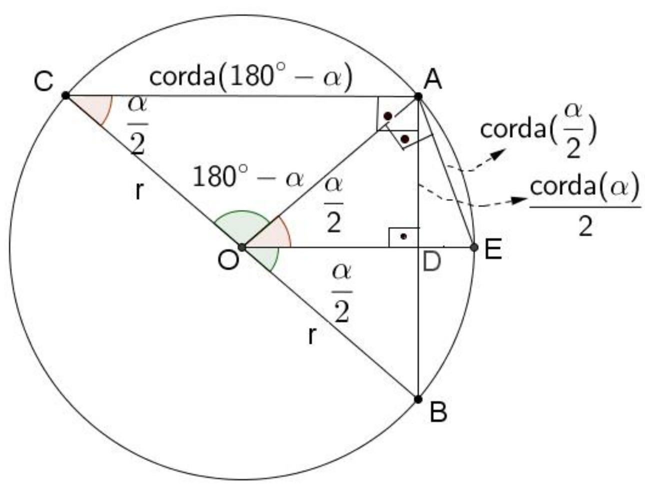


Figura 5.3: A meia corda e corda$\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Demonstração. Na Figura 5.3, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADO, donde segue que

$$\frac{\text{corda}(180^\circ - \alpha)}{\overline{OD}} = \frac{2r}{r},$$

ou seja,

$$\overline{OD} = \frac{\text{corda}(180^\circ - \alpha)}{2}.$$

Logo, no triângulo retângulo ADE a medida do lado DE, é igual a $r - \dfrac{\text{corda}(180^\circ - \alpha)}{2}$. Usado o teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}
\text{corda}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \left[\frac{\text{corda}(\alpha)}{2}\right]^2 + \left[r - \frac{\text{corda}(180^\circ - \alpha)}{2}\right]^2 = \\
&= \left[\frac{\text{corda}(\alpha)}{2}\right]^2 + \left[\frac{2r - \text{corda}(180^\circ - \alpha)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{\text{corda}^2(\alpha)}{4} + \frac{(2r)^2 - 4r\,\text{corda}(180^\circ - \alpha) + \text{corda}^2(180^\circ - \alpha)}{4}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.1, temos $\text{corda}^2(\alpha) = (2r)^2 - \text{corda}^2(180^\circ - \alpha)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\text{corda}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{(2r)^2 - \text{corda}^2(180^\circ - \alpha)}{4} + \frac{(2r)^2 - 4r\,\text{corda}(180^\circ - \alpha) + \text{corda}^2(180^\circ - \alpha)}{4} = \\
&= \frac{(2r)^2 + (2r)^2 - 4r\,\text{corda}(180^\circ - \alpha)}{4} = \frac{8r^2 - 4r\,\text{corda}(180^\circ - \alpha)}{4} = \\
&= r\,(2r - \text{corda}(180^\circ - \alpha)).
\end{aligned}$$

□

No século IV de nossa era, o conhecimento e domínio matemático começou a deslocar-se para a Índia, segundo Kennedy [15], e o que sabemos de trigonometria dos Hindus é devido o *Surya Siddhanta*, que quer dizer sistemas do sol e é um texto épico cujo autor é *Aryabhata*. É no *Surya* que vamos encontrar o aparecimento concreto do seno de um ângulo.

Segundo Kupkova, *apub* Quintaneiro [26], no período de 200 a 1200 d.C., os hindus fizeram avanços em trigonometria, seus estudos relacionavam a metade da corda com a metade do arco (Figura 5.4), tornando fácil a identificação de um triângulo retângulo na circunferência e a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, chamada na época de *jiva*.

Com essa abordagem, a trigonometria passou a ser tratada a partir de semelhanças de triângulos e não mais a partir de cordas de um círculo e de acordo com a Figura 5.4 temos a expressão:

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\text{corda}(\alpha)}{r}, \quad \text{ou seja,} \quad \text{corda}(\alpha) = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{5.1}$$

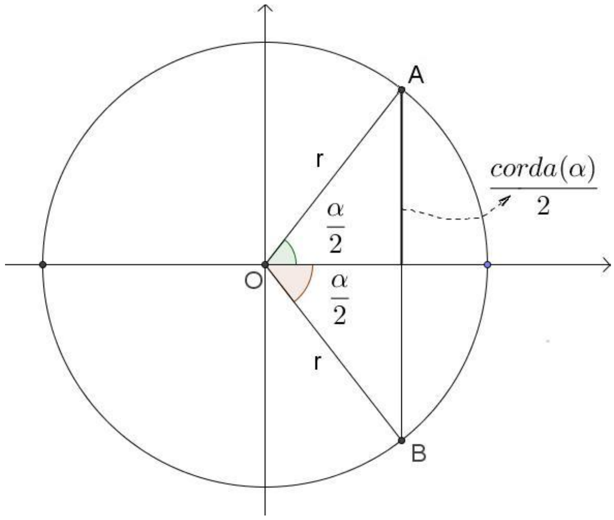


Figura 5.4: A meia corda e o arco.

Corolário 5.3 *Para ângulos* α, $0 \leq \alpha \leq 180°$, *a relação* $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1$ *equivale a* $\operatorname{corda}(180° - \alpha) = 2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Demonstração. Usando as identidades $\operatorname{corda}(\alpha) = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (5.1); $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1$ e o Teorema 5.1, $\operatorname{corda}(180° - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - \operatorname{corda}^2(\alpha)}$, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{corda}(180° - \alpha) &= \sqrt{(2r)^2 - (2r)^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= 2r\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= 2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Como consequência desses dois resultados e utilizando identidades trigonométricas contemporâneas, o Teorema 5.2, $\operatorname{corda}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r[2r - \operatorname{corda}(180° - \alpha)]$, representa a fórmula para o seno da metade do ângulo.

Pela expressão (5.1) e Colorário 5.3, temos:

$$\left[2r\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{4})\right]^2 = r\left[2r - 2r\cos(\frac{\alpha}{2})\right].$$

Trocando α por 2α obtemos:

$$\begin{aligned}
\left[2r\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{4}\right)\right]^2 &= r\left[2r - 2r\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right)\right] \\
\left[2r\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 &= r2r[1-\cos(\alpha)] \\
4r^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2r^2[1-\cos(\alpha)] \\
\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{2r^2[1-\cos(\alpha)]}{4r^2} \\
\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{2}.
\end{aligned}$$

□

5.1.1 Teorema de Ptolomeu

Um outro resultado central para o cálculo de cordas em uma circunferência é, ainda hoje, conhecido como o Teorema de Ptolomeu, o qual relaciona cordas (lados e diagonais) de um quadrilátero inscrito em uma circunferência[3]. Assim, com argumentos puramente geométricos, Ptolomeu criou a possibilidade de se construir uma tabela de cordas muito precisa.

Teorema 5.4 *(Teorema de Ptolomeu) Se A, B, C e D são quatro vértices consecutivos de um quadrilátero qualquer inscrito em uma circunferência, então* $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

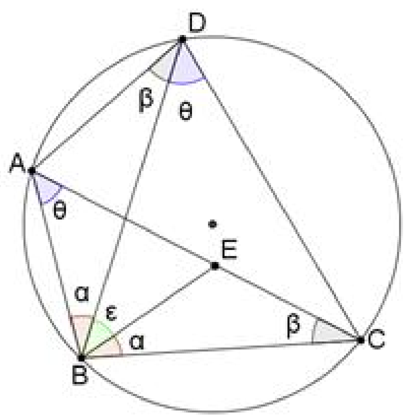


Figura 5.5: Representação geométrica do Teorema de Ptolomeu.

[3]De um caso especial do teorema de Ptolomeu conclui-se o que hoje conhecemos como as fórmulas de seno e cosseno da soma, diferença e arco metade.

Demonstração. Seja um ponto E sobre AC de modo que os ângulos C$\widehat{B}$E e A$\widehat{B}$D sejam congruentes, logo os triângulos CBE e ABD são semelhantes pelo caso (AA). Usando semelhança de triângulos e propriedades inerentes ao quadrilátero inscritível, temos

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{BD}\cdot\overline{CE}. \tag{5.2}$$

Considerando agora os triângulos ABE e DBC que também são semelhantes pelo caso (AA), temos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{AB}\cdot\overline{DC} = \overline{BD}\cdot\overline{AE}. \tag{5.3}$$

Adicionando as expressões (5.2) e (5.3) segue que:

$$\begin{aligned} \overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{DC} &= \overline{BD}\cdot\overline{CE}+\overline{BD}\cdot\overline{AE} \\ \overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{DC} &= \overline{BD}\cdot(\overline{CE}+\overline{AE}). \end{aligned}$$

Como $\overline{CE}+\overline{AE}=\overline{AC}$, temos

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{DC} = \overline{BD}\cdot\overline{AC}.$$

□

Do teorema de Ptolomeu podemos escrever, usando linguagem contemporânea, que

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha).$$

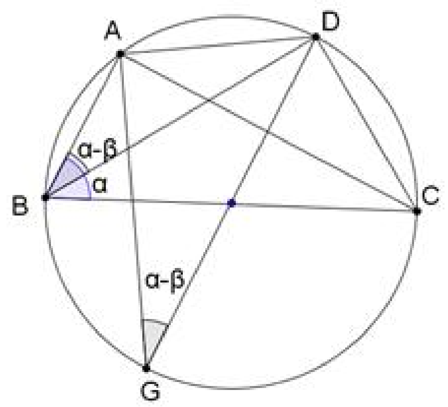


Figura 5.6: $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

Observando a Figura 5.6 vemos que os segmentos BC e GD passam pelo centro, portanto os triângulos *BCD*, *BCA* e *GDA* são retângulos, em C$\hat{D}$B, C$\hat{A}$B e D$\hat{A}$G, respectivamente.

Logo, usando as razões trigonométricas do seno e cosseno, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{AD} &= \overline{BC}\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta),\\
\overline{AB} &= \overline{BC}\cos(\alpha),\\
\overline{DC} &= \overline{BC}\,\mathrm{sen}(\beta),\\
\overline{BD} &= \overline{BC}\cos(\beta),\\
\overline{AC} &= \overline{BC}\,\mathrm{sen}(\alpha).
\end{aligned}$$

Sabendo que $\overline{BC}=\overline{GD}$ e substituindo as equações acima em: $\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{DC}=\overline{BD}\cdot\overline{AC}$, se segue que:

$$\overline{BC}\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)+\overline{BC}\cos(\alpha)\overline{BC}\,\mathrm{sen}(\beta)=\overline{BC}\cos(\beta)\overline{BC}\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

Dividindo todos os membros da equação acima por $\overline{BC}$, obtemos:

$$\mathrm{sen}(\alpha-\beta)+\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)=\cos(\beta)\,\mathrm{sen}(\alpha),$$

ou seja,

$$\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\cos(\beta)\,\mathrm{sen}(\alpha)-\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta).$$

□

Historicamente, de acordo com Kennedy [15], o termo "seno" surgiu por um problema de tradução

> De fato, a etimologia da palavra “seno” mostra uma ampla variação da experiência pregressa daqueles que lidaram com a função por ela designada. Os indianos chamavam-na de *ardhajya*, o que significa “semicorda” em sânscrito. Esta designação foi abreviada para *jya* e transliterada em três caracteres árabes, *jyb* o que pode ser lido como *jayb*, que em arábe significa “bolso” ou “golfo”. Assim foi interpretada pelos europeus, que a traduziram para o latim *sinus*, daí o nosso “seno”.

Com a necessidade de trabalhar com o ângulo complementar, chamado de *sinus complementi*, que foi modificado para *co. sinus* e, então evoluiu para o termo cosseno.

5.2 O Radiano

Segundo Kennedy [15] o termo radiano (radian) aparece impresso pela primeira vez em 1873, num exame escrito pelo físico James Thonson. O termo radian (radiano) provavelmente foi inspirado pela palavra radius (raio).

O uso da unidade radiano em trigonometria surgiu da necessidade de unificar as unidades de medidas do arco e da corda (ou meia corda), e o raio do círculo foi adotado como unidade de medida comum.

Ao trabalhar com o raio como unidade de medida comum para o arco e a meia corda, os dois objetos são tomados como grandezas de mesma espécie (ambos comprimentos) e neste caso, a razão entre a meia-corda e o arco tende a 1 quando o arco tende a *zero*[4]. A adoção do raio como unidade de medida permitiu articular a trigonometria de arcos e cordas com a trigonometria que relaciona razões de lados de triângulos retângulos. No caso, o comprimento da meia corda torna-se a razão entre os lados de um triângulo retângulo (Figura 5.7).

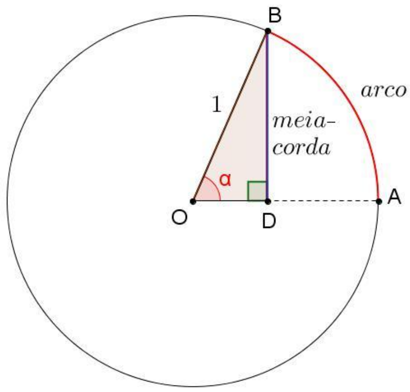


Figura 5.7: A meia corda, o arco e o triângulo retângulo.

Adotando o raio como unidade de medida, o radiano pode ser definido como medida angular e, também, como medida linear.

[4]Traduzindo para uma linguagem contemporânea, estamos afirmando que $\lim_{s \to 0} \frac{sen(s)}{s} = 1$. Mais detalhes veja Quintaneiro [26]

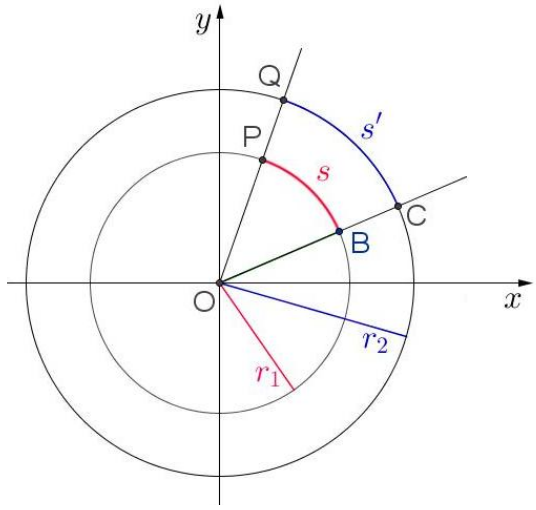


Figura 5.8: Arcos subtendidos pelo mesmo ângulo central.

Sejam s e s' os comprimentos dos arcos $\widehat{BP}$ e $\widehat{CQ}$, subtendidos pelo mesmo ângulo central O de raios r_1 e r_2, respectivamente (Figura 5.8). Como arcos de círculos que se subentendem o mesmo ângulo central são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios [16]. Logo,

$$\frac{s}{r_1} = \frac{s'}{r_2}.$$

Resumindo, dado um ângulo central, é constante a razão entre o comprimento do arco determinado e o raio. Isso, segundo Carmo [9], leva a seguinte definição de radiano:

Definição 5.1 *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo de um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.*

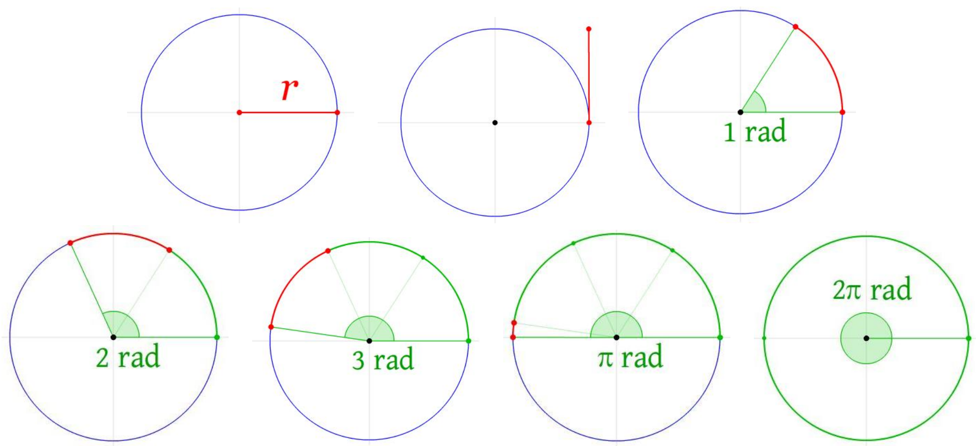


Figura 5.9: O radiano (Fonte *site* [34]).

Pela definição 5.1 o ângulo $B\widehat{O}P = \frac{s}{r_1}$ radianos = $\frac{s'}{r_2}$ radianos (Figura 5.8). Portanto, se s é o comprimento de arco determinado por um ângulo central α de um círculo de raio r, temos que

$$\alpha = \frac{s}{r} \qquad \text{ou} \qquad s = \alpha\, r. \tag{5.4}$$

Como o comprimento da uma semi-circunferência de raio 1 é igual π e, neste caso, o ângulo central é igual a 180°. Podemos estabelecer uma relação entre as medidas graus e radianos, ou seja,

$$180^\circ = \frac{\pi\, r}{r} = \pi \text{ radianos.}$$

Segundo Kupkova, *apub* Quintaneiro [26], a igualdade $\pi\, rad = 180^\circ$ muitas vezes aparece como $\pi = 180^\circ$, fazendo parecer que a referência ou o fundamental nessa nova unidade é o π, quando na verdade é a unidade radiano.

O radiano pode ser visto como a medida de um ângulo e como uma medida linear, observe que quando o raio da circunferência é igual a 1, temos por (5.4) que o comprimento do arco (medida linear), determinado por um ângulo central, é igual a medida do ângulo central (medida angular). A medida de um ângulo em radianos não depende da unidade de comprimento considerada, mas o comprimento de arco depende de uma unidade de comprimento. Mesmo identificando arcos e ângulos em círculos de raio 1, existe uma diferença conceitual e ela deve ficar bem clara.

A identificação de arcos e ângulos em círculos unitários permitiu a extensão das razões trigonométricas do triângulo retângulo para as funções trigonométricas definidas nos reais.

Segundo Eves [13] a trigonometria entre os gregos era motivada pela astronomia, mas no Renascimento, que foi a época da expansão marítima Europeia, exigiu o desenvolvimento da cartografia cujo ápice foi atingido por Euler (1707-1783) que adotou em seus estudos um círculo de raio unitário. Com Euler a trigonometria do triângulo retângulo evoluiu para funções aplicadas a um número. Por exemplo, a função seno deixou de ser uma grandeza e passou a ser um número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário.

Capítulo 6

Funções Trigonométricas

Neste capítulo apresentaremos a definição das funções trigonométricas seno e cosseno a partir da função de Euler e a demonstração das fórmulas de adição e subtração de arcos.

A transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para funções periódicas de domínio real, de aplicações mais amplas, começou com Viete, no século XVI, e culminou nos trabalhos de Euler, no século XVIII [13].

6.1 A função de Euler

Esta seção apresenta a função de Euler, tendo como principal fonte os trabalhos do professor Elon L. Lima [17].

Consideremos o ponto P no círculo trigonométrico (Figura 6.1), cujas coordenadas (x,y) satisfazem a equação da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $x^2+y^2=1$. A relação fundamental da trigonometria, $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, sugere que para todo ângulo α, os números $\cos(\alpha)$ e $\text{sen}(\alpha)$, são coordenadas de pontos da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

Denotamos por C o círculo unitário (ou círculo trigonométrico). Temos, portanto $C=\{(x,y)\in\mathbb{R};x^2+y^2=1\}$. Observemos que as coordenadas de todo ponto em C estão entre -1 e 1, ou seja, se $(x,y)\in C$, então $-1<x<1$ e $-1<y<1$.

A função de Euler é uma função $E:\mathbb{R}\to C$ e faz corresponder a todo número real t o ponto (x,y) de C, de tal forma que:

- $0\in\mathbb{R}$ coincida com o ponto $A=(1,0)$ de C, ou seja, $E(0)=(1,0)$;

- Dado um número real t, os pontos de C são percorridos no sentido positivo se $t>0$ e no sentido negativo se $t<0$, um comprimento igual a t e $E(t)$ é o ponto de C assim atingido, onde $E(t)=(x,y)$ para todo (x,y) pertencente ao circulo unitário C e $(x,y)=(\cos(t),\text{sen}(t))$, para todo $t\in\mathbb{R}$ (Figura 8.5).

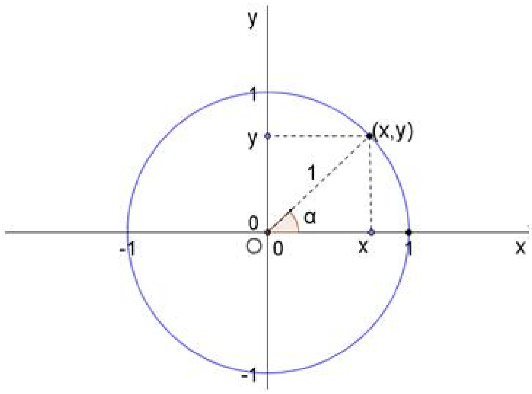


Figura 6.1: Círculo Unitário.

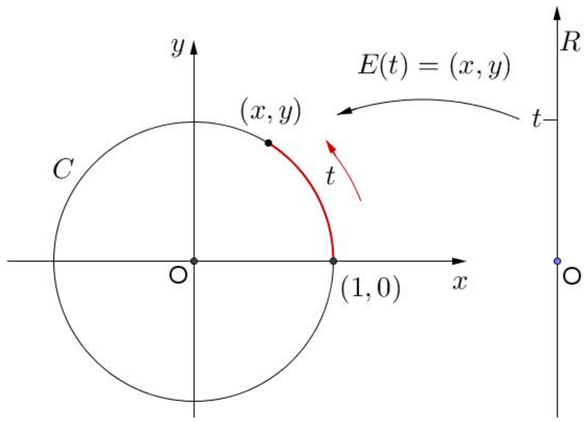


Figura 6.2: Função de Euler.

Por definição, quando t descreve na reta um intervalo de comprimento l, sua imagem $E(t)$ percorre sobre o círculo unitário C um arco de igual comprimento l. Como o círculo unitário C tem comprimento igual a 2π, quando o ponto t descreve na reta um intervalo de comprimento 2π, sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre C, retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se $E(t+2\pi) = E(t)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(t+2k\pi) = E(t)$, seja qual for $t \in \mathbb{R}$.

A função de Euler é uma função periódica[1] com período 2π, e $E(t+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, são as várias imagens de $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $E(t) = E(t+2k\pi)$. Reciprocamente, se $t < t'$, para $t, t' \in \mathbb{R}$, são tais que $E(t) = E(t')$, então quando um ponto $s \in \mathbb{R}$ varia de t a t', sua imagem $E(t)$ se desloca sobre C, no sentido positivo $(t < t')$, até $E(t')$ dando um número k de voltas e retornando ao ponto de partida. A distância percorrida sobre C é igual a $2k\pi$. Logo, $t' = t + 2k\pi$, já que, o comprimento percorrido por $E(s)$ é igual à distância percorrida por s sobre a reta $\mathbb{R}$.

A Figura 6.3 ilustra as várias propriedades de simetria da função de Euler:

[1] Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número p não nulo tal que $f(t+p) = f(t)$ para todo t real. Se isso ocorre, temos que $f(t+kp) = f(t)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. O número $p > 0$ tal que $f(t+p) = f(t)$ chama-se período de f [17].

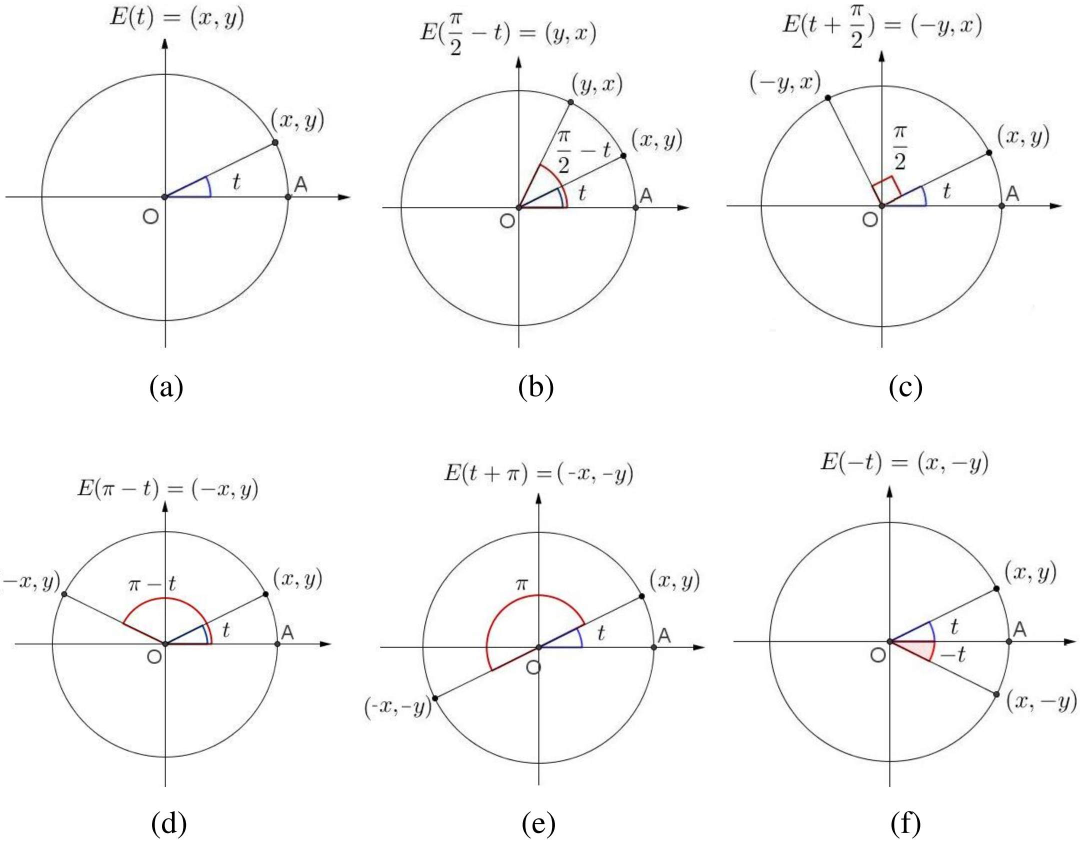


Figura 6.3: Função de Euler.

6.2 As Funções Trigonométricas

As funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas de função cosseno e de função seno respectivamente, são definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, a partir da função de Euler, ou seja,

$$E(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)), \quad \text{onde} \quad \cos(t) = x \quad e \quad \text{sen}(t) = y.$$

Quando $t = 0$ temos $E(0) = (1, 0)$, logo, $\cos(0) = 1$ e $\text{sen}(0) = 0$ e quando $t = \frac{\pi}{2}$, temos $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ e assim por diante.

Na seção anterior vimos que a função de Euler é periódica, com período 2π, $E(t + 2k\pi) = E(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Assim as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π, isto é, se conhecemos o comportamento destas funções no intervalo $[0, 2\pi]$, conhecemos o seu comportamento em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π.

Por exemplo, o gráfico da função $y = \text{sen}(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Podemos então restringir o estudo destas funções ao intervalo $[0, 2\pi]$ que corresponde ao estudo das coordenadas de um ponto que dá exatamente uma volta no círculo trigonométrico.

As funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto do círculo unitário, têm valores que dependem do quadrante em que se encontram. Apresentaremos a seguir um estudo dos valores da função seno em que a extremidade P do arco AP está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

- A função seno está assumindo valores no segundo quadrante, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.
  Traçamos por P uma reta r paralela ao eixo das abscissas que intersecta novamente C em P' (Figura 6.4). A medida do arco $\widehat{AP}$ é igual a t, a medida do arco $\widehat{PA'} = \pi - t$ e a medida do arco $\widehat{AP'}$ é igual a medida do arco $\widehat{PA'}$. Portanto, $\text{sen}(t) = \text{sen}(\pi - t)$.

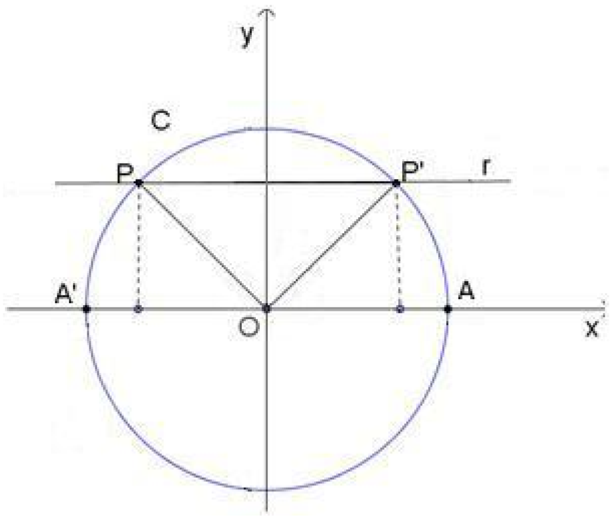


Figura 6.4: Comprimento do arco $\widehat{AP} = t$.

- A função seno está assumindo valores no terceiro quadrante, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.
  Tomando como r a reta que liga os pontos O a P (Figura 6.5). A medida do arco $\widehat{AP}$ é igual a t, a medida do arco $\widehat{A'P} = t - \pi$ e a medida do arco $\widehat{AP'}$ é igual a medida do arco $\widehat{A'P}$, portanto $\text{sen}(t) = -\text{sen}(t - \pi)$.

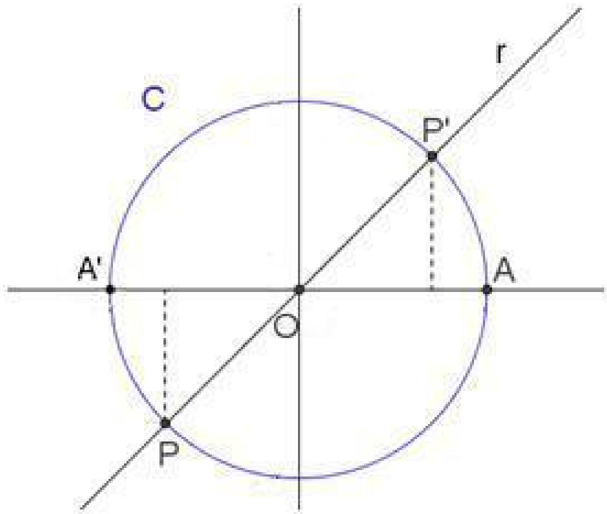


Figura 6.5: Comprimento do arco $\widehat{AP} = t$.

- A função seno está assumindo valores no quarto quadrante, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.
Tomando como r uma paralela ao eixo das ordenadas passando por P (Figura 6.6), a medida do arco $\widehat{AP}$=t, a medida do arco $\widehat{PA} = 2\pi - t$ e a medida do arco $\widehat{AP'}$ é igual a medida do arco $\widehat{PA}$, portanto $\text{sen}(t) = -\text{sen}(2\pi - t)$.

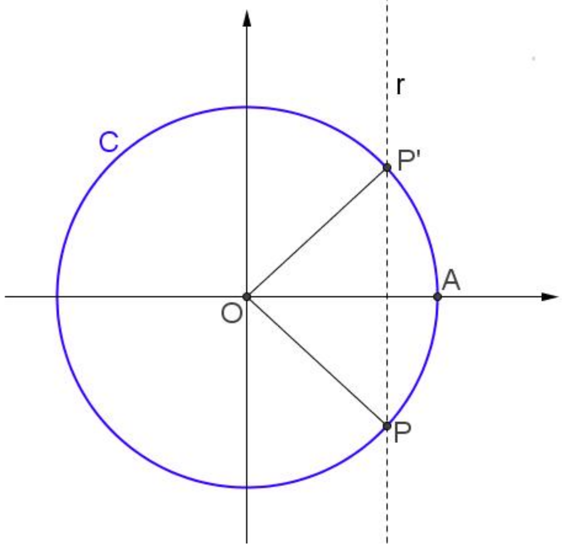


Figura 6.6: Comprimento do arco $\widehat{AP} = t$.

O mesmo processo, chamado de redução do seno ao primeiro quadrante, é aplicado ao cosseno (Observemos que a Figura 6.3, nas subfiguras (d), (e) e (f), ilustra esse processo). Resumindo, os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

6.2.1 Gráfico das funções seno e cosseno

A representação gráfica de uma função real, que geralmente é chamado de gráfico da função[2], é o lugar geométrico de todos os pontos de coordenadas $(x, f(x))$ no Plano $\mathbb{R}^2$ (ou simplismente no plano). O gráfico de uma função fornece, de uma forma bastante eficiente, uma ideia global do comportamento dessa função em todo o seu domínio.

O gráfico da função seno é o conjunto de todos os pontos $(t, \text{sen}(t))$ do plano com $t \in \mathbb{R}$ (Figura 6.9).

Da mesma forma, o gráfico da função cosseno é o conjunto dos pontos do plano de coordendas $(t, \cos(t))$, com $t \in \mathbb{R}$ (Figura 6.10).

Nos gráficos (Figura 6.9 e Figura 6.10) das funções seno e cosseno, podemos observar que a curva gerada no intervalo $(0, 2\pi)$ se repete indefinidamente, tanto para o lado positivo do eixo das abcissas, como para o lado negativo, ilustrando o comportamento periódico das

[2]Dada uma função $f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, o gráfico da função f, denotado por $G(f)$, é o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in A$, tais que $y = f(x)$, ou seja, $G(f) = \{(x, y), x \in a \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R} | y = f(x)\}$.

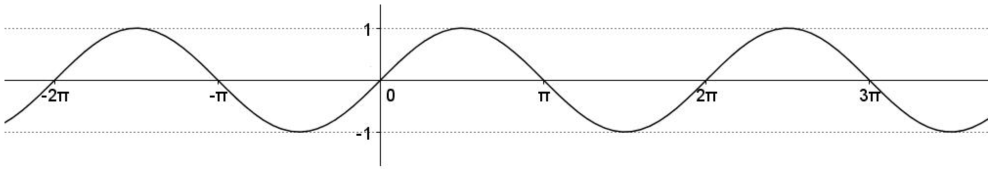


Figura 6.7: Gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$.

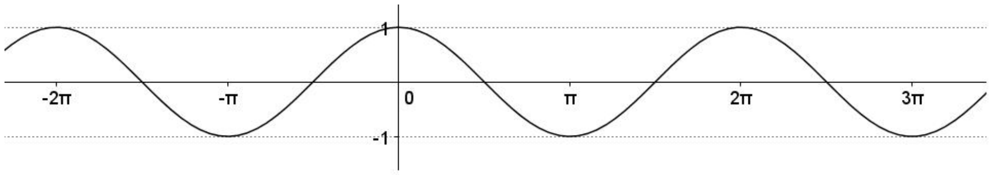


Figura 6.8: Gráfico da função $f(t) = \cos(t)$.

funções. Podemos observar, também, que o gráfico da função cosseno pode ser obtido do gráfico da função seno através de uma translação na abscissa de $\frac{\pi}{2}$, caracterizando as relações de simetria existente entre essas funções, já mencionadas na seção 6.1, quando do estudo da função de Euler e particularizadas para as funções seno e cosseno a seguir.

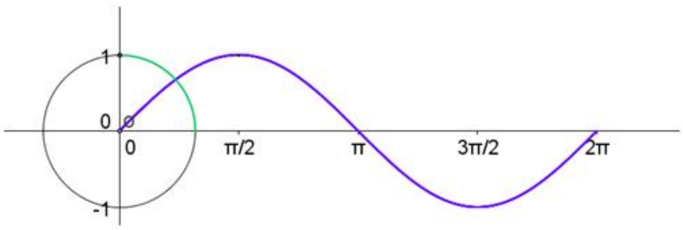


Figura 6.9: Gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

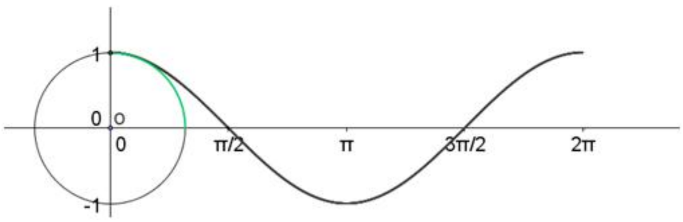


Figura 6.10: Gráfico da função $f(t) = \cos(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Pela simetria da função de Euler $E(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$E(\frac{\pi}{2} - t) = (y, x) \quad \text{(Figura 6.3 (b))} \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t); \tag{6.1}$$

$$E(t + \frac{\pi}{2}) = (-y, x) \quad \text{(Figura 6.3 (c))} \Rightarrow$$

$$\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t); \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} E(\pi - t) &= (-x, y) \quad \text{(Figura 6.3 (d))} \Rightarrow \\ & \cos(\pi - t) = -\cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(\pi - t) = \text{sen}(t); \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} E(t + \pi) &= (-x, -y) \quad \text{(Figura 6.3 (e))} \Rightarrow \\ & \cos(t + \pi) = -\cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(t + \pi) = -\,\text{sen}(t); \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} E(-t) &= (x, -y) \quad \text{(Figura 6.3 (f))} \Rightarrow \\ & \cos(-t) = \cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(-t) = -\,\text{sen}(t). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Observação 6.1 *Por definição uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par se $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e é impar se $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A função de Euler calculada em $(-t)$ é igual a $E(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ (6.5), onde $\cos(-t) = \cos(t)$ e $\text{sen}(-t) = -\,\text{sen}(t)$, ou seja, a função seno é uma função impar e a função cosseno é uma função par.*

6.2.2 A função Tangente

A função tangente é definida como o quociente entre as funções seno e cosseno, a saber

$$tg(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)},$$

cujo domínio é restrito aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero, ou seja, para todos os $t \in \mathbb{R}$ tais que a função $\cos(t)$ não se anula. Assim a função tangente tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\frac{\pi}{2}$, já que $\cos(t) = 0$ se, e somente se, $t = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, o domínio da função tangente é o conjunto formado pela reunião dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

A função tangente, assim como o seno e o cosseno, é uma função periódica, de período π, uma vez que,

$$\text{tg}(t + \pi) = \frac{\text{sen}(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} = \text{tg}(t),$$

para todo $t \in \{\mathbb{R} - \dfrac{(2k+1)\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

O gráfico da função tangente é o conjunto de todos os pontos $(t, \text{tg}(t))$, $t \in \mathbb{R} - \frac{(2k+1)\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$ do plano (Figura 6.11).

Em cada um dos intervalos, onde está definida, por exemplo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a função tangente é crescente e há uma correspondência biunivoca[3] entre as coordenadas t e $\text{tg}(t)$ em cada um desses intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, de comprimento π.

[3] Veja página 17.

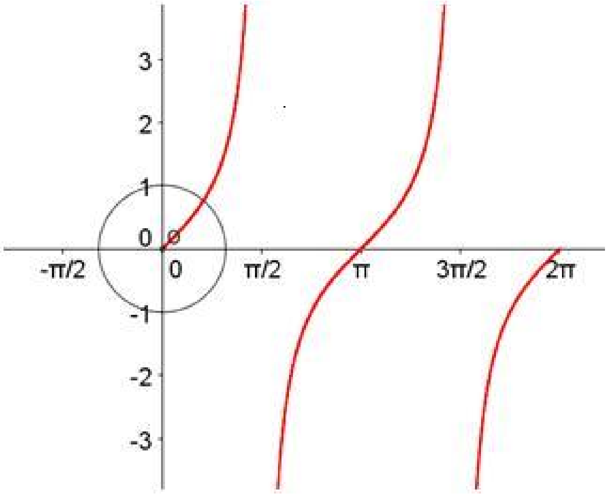


Figura 6.11: Gráfico da função $f(t) = tg(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

6.3 Fórmulas da adição e subtração de arcos

Apresentaremos nesta seção a dedução algébrica das fórmulas de adição e subtração de arcos de seno, cosseno e tangente e, também, suas respectivas demonstrações, usando argumentos geométricos.

Consideremos dois pontos P e Q em um círculo unitário (círculo trigonométrico) tais que a medida de $\widehat{AP} = b$ e a medida de $\widehat{AQ} = a$ (Figura 6.12).

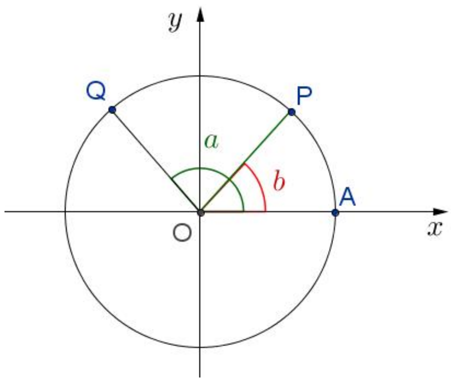


Figura 6.12: Círculo Unitário.

Temos que $P = (\cos(b), \text{sen}(b))$, $Q = (\cos(a), \text{sen}(a))$ e o quadrado da distância entre P e Q é dada por

$$d^2(P,Q) = (\cos(a) - \cos(b))^2 + (\text{sen}(a) - \text{sen}(b))^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e utilizando o fato de $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$, para todo x real, segue que

$$d^2(P,Q) = 2 - 2(\cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)). \tag{6.6}$$

Por outro lado, mudando o sistema de coordenadas através de uma rotação[4], em torno da origem, de um ângulo b (Figura 6.13), obtemos

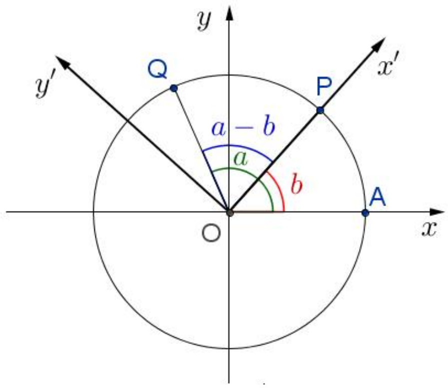


Figura 6.13: Novo sistema de coordenadas $x'y'$.

$$d^2(P,Q) = (\cos(a-b) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(a-b) - 0)^2 = 2 - 2\cos(a-b). \tag{6.7}$$

Igualando as expressões (6.6) e (6.7) obtemos

$$2 - 2(\cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)) = 2 - 2\cos(a-b)),$$

donde vem que:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b). \tag{6.8}$$

□

Usando a equação (6.8) e as identidades trigonométricas dadas em (6.1) e (6.5) podemos obter as demais fórmulas de adição e subtração de arcos para cosseno, seno e tangente, conforme segue:

1. Substituindo b por $-b$ em (6.8), obtemos

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(-b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b). \end{aligned} \tag{6.9}$$

2. Aplicando a fórmula (6.8) para $\frac{\pi}{2} - a$ e b, obtemos

$$\begin{aligned} \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b) &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(b) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a)\operatorname{sen}(b), \\ \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) &= \operatorname{sen}(a+b), \quad \text{logo} \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a). \end{aligned} \tag{6.10}$$

[4]Uma rotação em torno da origem girando os eixos de um b é uma transformação linear no plano dada por:

$$\begin{cases} x' = x\cos(a) + y\operatorname{sen}(a) \\ y' = -x\operatorname{sen}(a) + y\cos(a) \end{cases}$$

3. Substituindo b por $-b$ em (6.10), obtemos

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,(a)\,\cos\,(b) - \text{sen}\,(b)\,\cos\,(a). \tag{6.11}$$

4. Calculando o quociente das fórmulas (6.11) e (6.8) obtemos uma expressão para tangente de $(a-b)$.

$$\text{tg}\,(a-b) = \frac{\text{sen}(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\text{sen}\,(a)\,\cos\,(b) - \text{sen}\,(b)\,\cos\,(a)}{\cos\,(a)\,\cos\,(b) + \text{sen}\,(a)\,\text{sen}\,(b)} = \frac{\text{tg}\,(a) - \text{tg}\,(b)}{1 + tg\,(a)\,\text{tg}\,(b)}. \tag{6.12}$$

5. Substituindo b por $-b$ em (6.12), temos

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,(a) + \text{tg}\,(b)}{1 - tg\,(a)\,\text{tg}\,(b)}. \tag{6.13}$$

6. Substituindo b por a em (6.9), (6.10) e (6.13), obtemos

$$\begin{aligned} \cos\,(2a) &= \cos^2(a) - \text{sen}^2\,(a); \\ \text{sen}(2a) &= 2\,\text{sen}\,(a)\,\cos\,(a) \;\; e \\ \text{tg}\,(2a) &= \frac{2\,\text{tg}\,(a)}{1 - \text{tg}^2\,(a)}. \end{aligned}$$

A dedução das fórmulas de adição e subtração de arcos, exigem manipulações algébricas com resultados ainda não dominados pelos alunos do ensino básico. A seguir apresentaremos as demosntrações das fórmulas adição e subtração de arcos do cosseno e do seno e da tangente, usando selhança de triângulos. Segundo Elon [17], dentre as maneiras de provar a fórmula $sen(a+b)$, aquela usando semelhança de triângulos é a mais direta.

Consideremos um círculo unitário (Figura 6.14), onde $NQ \perp OM$; $PN \perp OA$, logo os ângulos $A\widehat{O}M$ e $P\widehat{N}Q$ são congruentes, assim os triângulos SOQ e RNQ são semelhantes. Observando a Figura 6.14 e usando a semelhança dos triângulos já mencionados, temos:

$$\begin{aligned} &\overline{OQ} = \cos(b); \\ &\overline{NQ} = \text{sen}(b); \\ &\frac{\overline{QR}}{\overline{NQ}} = \text{sen}(a) \quad \Rightarrow \quad \overline{QR} = \text{sen}(b)\,\text{sen}(a); \\ &\frac{\overline{NR}}{\overline{NQ}} = \cos(a) \quad \Rightarrow \quad \overline{NR} = \text{sen}(b)\,\cos(a); \\ &\frac{\overline{QS}}{\overline{OQ}} = \text{sen}(a) \quad \Rightarrow \quad \overline{QS} = \cos(b)\,\text{sen}(a); \\ &\frac{\overline{OS}}{\overline{OQ}} = \cos(a) \quad \Rightarrow \quad \overline{OS} = \cos(b)\,\cos(a); \\ &\overline{OP} = \cos(a+b); \\ &\overline{NP} = \text{sen}(a+b). \end{aligned}$$

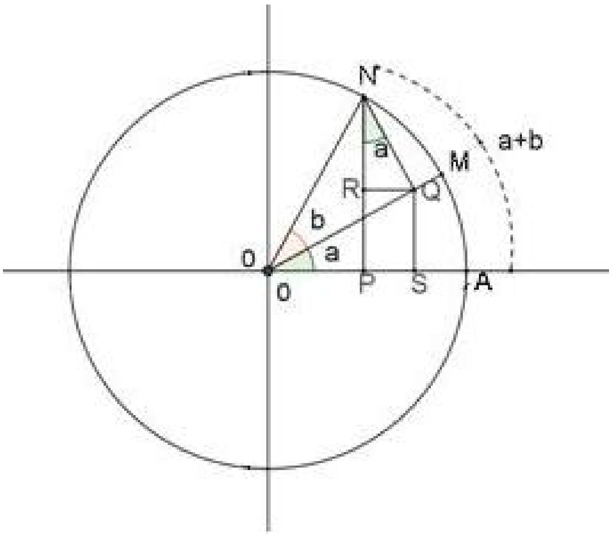


Figura 6.14: Construção para provar as fórmulas seno e cosseno de $(a+b)$

Como $\overline{OP} = \overline{OS} - \overline{PS}$ e $\overline{PS} = \overline{RQ}$, segue que $\overline{OP} = \overline{OS} - \overline{RQ}$, ou seja, $\overline{OP} = \cos(b)\cos(a) - \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(a)$ e $\overline{OP} = \cos(a+b)$. Assim, temos a fórmula

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(b)\cos(a) - \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(a).}$$

$\square$ Temos, ainda, que $\overline{NP} = \overline{NR} + \overline{RP}$ e $\overline{RP} = \overline{QS}$, donde segue que $\overline{NP} = \overline{NR} + \overline{QS}$, ou seja,

$\overline{NP} = \operatorname{sen}(b)\cos(a) + \cos(b)\operatorname{sen}(a)$. Como $\overline{NP} = \operatorname{sen}(a+b)$, temos a fórmula

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(b)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(b).}$$

$\square$ Como $\cos(-b) = \cos(b)$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$, substituindo b por $-b$ nas fórmulas acima, segue que:

$$\begin{aligned}
\cos(a+(-b)) &= \cos(a)\cos(-b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b) \\
&= \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \quad \text{e} \\
\operatorname{sen}(a+(-b)) &= \operatorname{sen}(a)\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos(a) \\
&= \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a).}$$

$\square$

Para mostrar as fórmulas para a tangente da adição e subtração de arcos, analogamente aos casos do seno e do cosseno, vamos considerar um círculo unitário (Figura 6.15), e os triângulos retângulos, convenientemente construídos, onde $EA \perp OD$; $BD \perp OA$, logo os ângulos $E\widehat{A}O$ e $O\widehat{D}B$ são congruentes, assim os triângulos EAO e EDC são semelhantes, como também CAB e ODB (caso (AA)). Observando a Figura 6.15, temos:

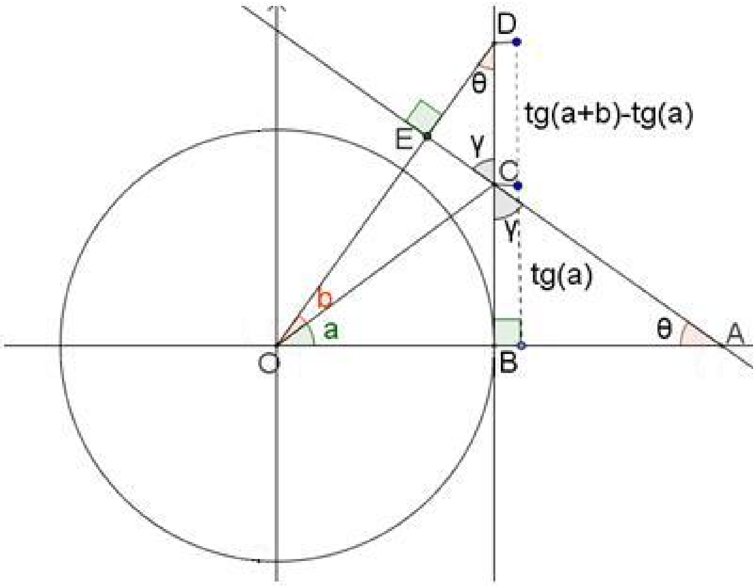


Figura 6.15: Construção usada para provar a fórmula tangente de $(a+b)$.

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \operatorname{tg}(a); \\ \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} &= \operatorname{tg}(b); \\ \overline{BD} &= \operatorname{tg}(a+b); \end{aligned}$$

Pela semelhança dos triângulos $EA0$ e EDC, decorre que

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OA}}.$$

Como $\overline{DC} = \overline{BD} - \overline{BC}$, segue que

$$\operatorname{tg}(b) = \frac{\operatorname{tg}(a+b) - \operatorname{tg}(a)}{\overline{OA}}.$$

Pela semelhança dos triângulos CAB e ODB, obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \overline{BD}\operatorname{tg}(a) \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a).$$

Mas, $\overline{AB} = \overline{OA} - 1$, assim $\overline{OA} - 1 = \text{tg}(a+b)\,tg(a)$. Daí, $\overline{OA} = \text{tg}(a+b)\ \text{tg}(a) + 1$. Substituindo $\overline{OA}$ em $\text{tg}(b) = \dfrac{\text{tg}(a+b) - \text{tg}(a)}{\overline{OA}}$, temos:

$$\text{tg}(b) = \frac{\text{tg}(a+b) - \text{tg}(a)}{[\text{tg}(a+b)\,\text{tg}(a) + 1]}.$$

Resolvendo para $tg(a+b)$, temos:

$$\begin{aligned} \text{tg}(b)[\text{tg}(a+b)\,\text{tg}(a)+1] &= \text{tg}(a+b) - \text{tg}(a), \\ \text{tg}(a+b) - \text{tg}(a+b)\,\text{tg}(a)\,\text{tg}(b) &= \text{tg}(a) + \text{tg}(b), \\ \text{tg}(a+b)[1 - \text{tg}(a)\,\text{tg}(b)] &= \text{tg}(a) + \text{tg}(b). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(b)}{1 - \text{tg}(a)\,\text{tg}(b)}.}$$

□

Para obter a fórmula para a diferença de arcos, vamos proceder de forma análoga. Consideremos um círculo unitário e os triângulos retângulos, conforme Figura 6.16, temos:

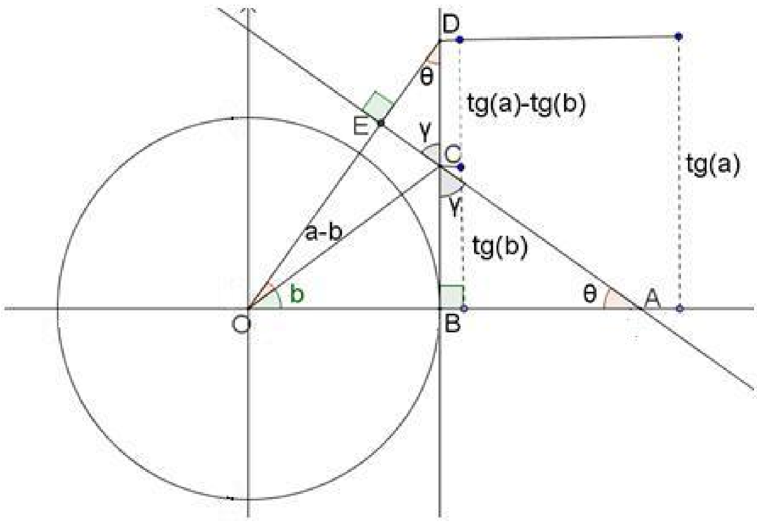


Figura 6.16: Construção usada para provar a fórmula tangente de $(a-b)$.

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \text{tg}(a); \\ \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} &= \text{tg}(a-b); \\ \overline{BC} &= \text{tg}(b). \end{aligned}$$

Da semelhança dos triângulos OAE e CDE, segue que:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{\overline{OA}}$$

Da semelhança entre os triângulos BOD e BCA, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{tg}(a)}{\overline{AB}} = \frac{1}{\operatorname{tg}(b)} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b).$$

Mas, $\overline{OA} = 1 + \overline{AB}$. Logo,

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}.}$$

$\square$

Capítulo 7

Tecnologia a Serviço do Ensino de Matemática

O uso do computador em sala de aula é cada vez mais frequente, no entanto também é evidente o despreparo em operá-los por parte de muitos docentes, ou porque não tiveram uma boa formação acadêmica nesse sentido ou porque não se sentem inseridos nessa nova forma de abordagem metodológica, a qual utiliza o computador como ferramenta auxiliar no ensino de matemática.

É fato ainda que muitos professores tem domínio em operar o computador, mas não têm conhecimentos de softwares e/ou ambientes computacionais que podem ser utilizados, como uma ferramenta didática, no ensino de matemática. Este capítulo tem como objetivo evidenciar alguns sítios da internet que disponibilizam materiais pedagógicos que poderão ajudar no ensino de matemática, em particular, no ensino da trigonometria.

7.1 Ambientes Computacionais na Internet

Existem diversos sítios na internet, apoiados pelo MEC, que buscam o aumento de banco de dados confiáveis e trazem uma perspectiva diferenciada à prática docente [24]. São exemplos desses sítios: Banco internacional de Objetos Educacionais (BIOE), Portal do professor e Educarbrasil.

7.1.1 BIOE - Banco Internacional de Objetos Educacionais

O BIOE [28] é um repositório que possui objetos educacionais de acesso público, em vários formatos e para todos os níveis de ensino. Em 08 de novembro de 2013 o Banco possuía 19.692 objetos publicados, 147 sendo avaliados ou aguardando autorização dos autores para a publicação e um total de 4.885.753 visitas de 184 países (Figura 7.1).

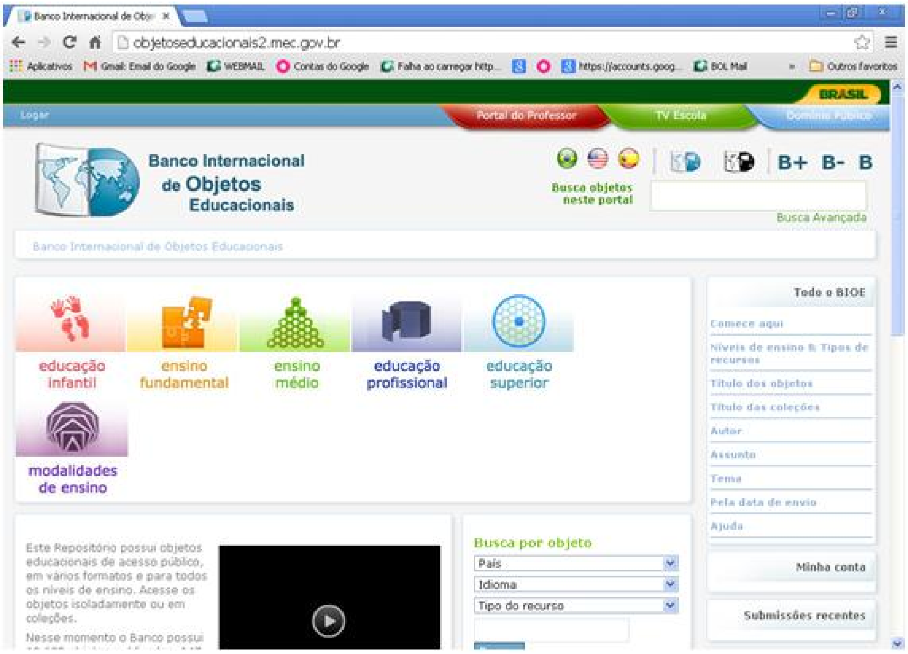


Figura 7.1: Tela inicial do BIOE.

A Figura 7.2 ilustra uma atividade de exploração das razões trigonométricas no triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente de um ângulo, que proporciona ao aluno a construção dos conceitos básicos em trigonometria, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico. Para encontrar a atividade no *site* do BIOE: Digite a palavra trigonometria na janela “Busca de objetos neste portal” no canto superior direito da página, depois clique no *link* escolhido.

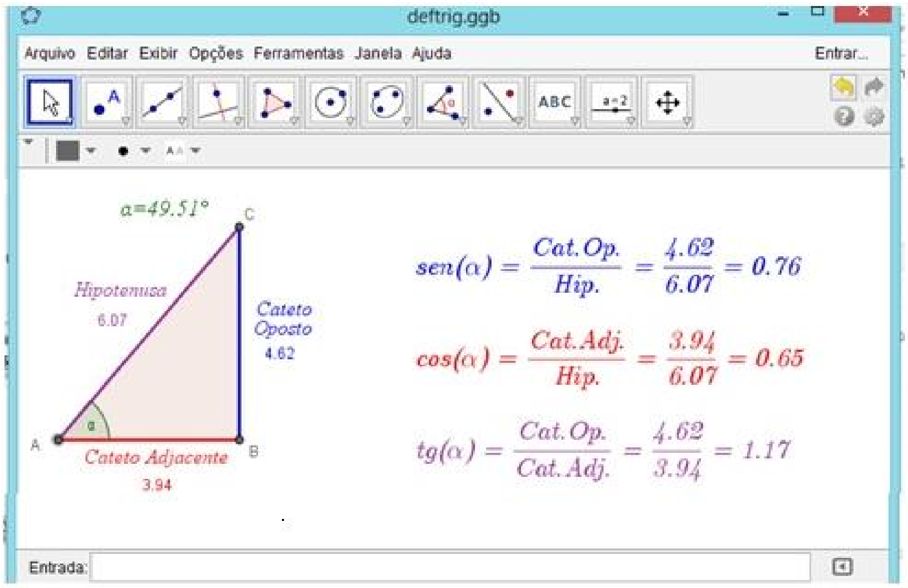


Figura 7.2: Atividades abordando Trigonometria no BIOE

7.1.2 O portal do professor

Este portal [32] é um espaço para o professor acessar sugestões de planos de aula, baixar mídias de apoio, ter notícias sobre educação e iniciativas do MEC ou até mesmo compartilhar um plano de aula, participar de uma discussão ou fazer um curso (Figura 7.3). O Portal, lançado em 2008 em parceria com o Ministério da Ciência e Tecnologia, tem

Figura 7.3: Interface inicial do site portal do professor.

como objetivo apoiar os processos de formação dos professores brasileiros e enriquecer a sua prática pedagógica. Este é um espaço público e pode ser acessado por todos os interessados.

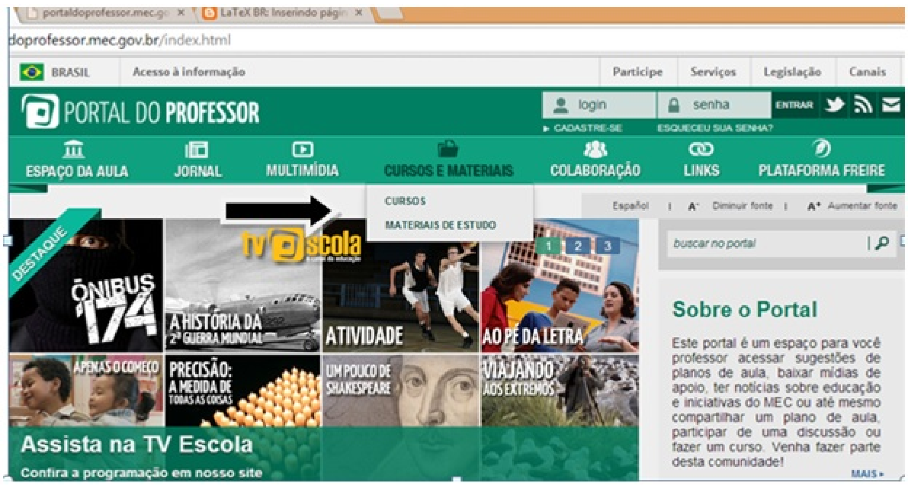


Figura 7.4: Exemplo de atividade

O portal do professor possui uma grande diversidade de material que pode ser utilizado como fonte de pesquisa, como exemplo, clique no *link* material de estudo indicado pela seta na (Figura 7.4), depois no campo de busca digite a palavra “trigonometria”. O professor encontrará alguns materiais que contribuirão para o ensino de trigonometria, como exemplo de material de pesquisa encontrado no portal, citamos o artigo “Trigonometria Dinâmica: unidade de aprendizagem online para o estudo de Trigonometria, de Moreira, L. S. et al”, publicado em 2009.

Figura 7.5: Link para materiais no portal do professor

7.1.3 EducarBrasil

Figura 7.6: Interface inicial do site portal educarbrasil.

O EducarBrasil [33] é um portal nacional de educação que tem como objetivo principal oferecer serviços digitais orientados aos diferentes participantes do sistema escolar: pais, estudantes, diretores e, especialmente, professores.

O intuito do EducarBrasil é contribuir significativamente para a melhoria da qualidade da educação em nosso país, com base no conhecimento do potencial educativo dos recursos digitais, que têm sido amplamente reconhecidos pelos cientistas, e teve seu impacto confirmado em inúmeras pesquisas. Entre esses impactos verificados, a título de exemplo, podemos listar as possibilidades de interatividade por meio do aprender fazendo, a maior facilidade na compreensão de informações, em razão das visualizações, simulações e o acesso às pesquisas e colaborações.

Neste portal também existem diversas ferramentas que podem ajudar o professor a melhorar sua aula. Nele encontramos diversos textos envolvendo o conteúdo de trigonometria, além de vídeos e outros.

7.1.4 Conteúdos Digitais - Sofware Educacionais

Neste site [30] desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense (Figura 7.7) podemos encontrar diversos aplicativos relacionados com os mais diversos conteúdos da matemática, que são divididos em: Softwares Educacionais, Experimentos Educacionais e Atividades de Áudio. Todo o material é facilmente manipulável sendo um ótimo site para ser visitado e utilizado como uma nova forma metodológica para abordagem dos conteúdos matemáticos.

Figura 7.7: Exemplo do ambiente software Educacionais da UFF.

Como exemplo de uma das diversas atividades presentes neste site, temos a construção do gráfico da funções seno (Figura 7.8), movimente o ponto P do círculo trigonométrico para gerar o gráfico.

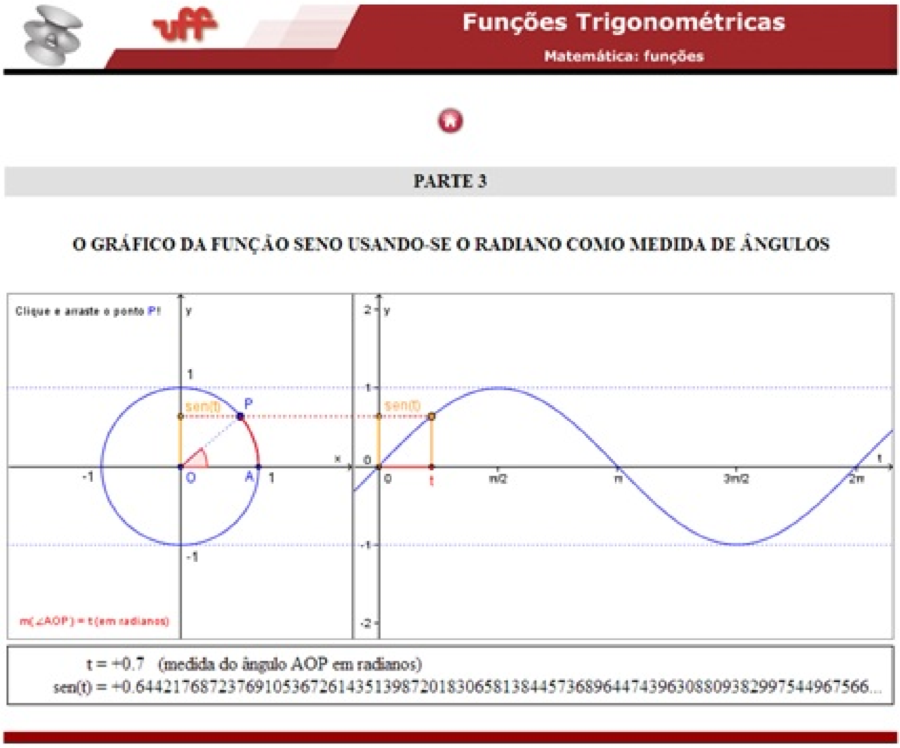


Figura 7.8: Um exemplo de atividade.

7.2 Software de geometria dinâmica GeoGebra

O software GeoGebra [29, 31], é um software livre, pode ser copiado, usado, modificado e redistribuído de acordo com a necessidade de cada usuário.

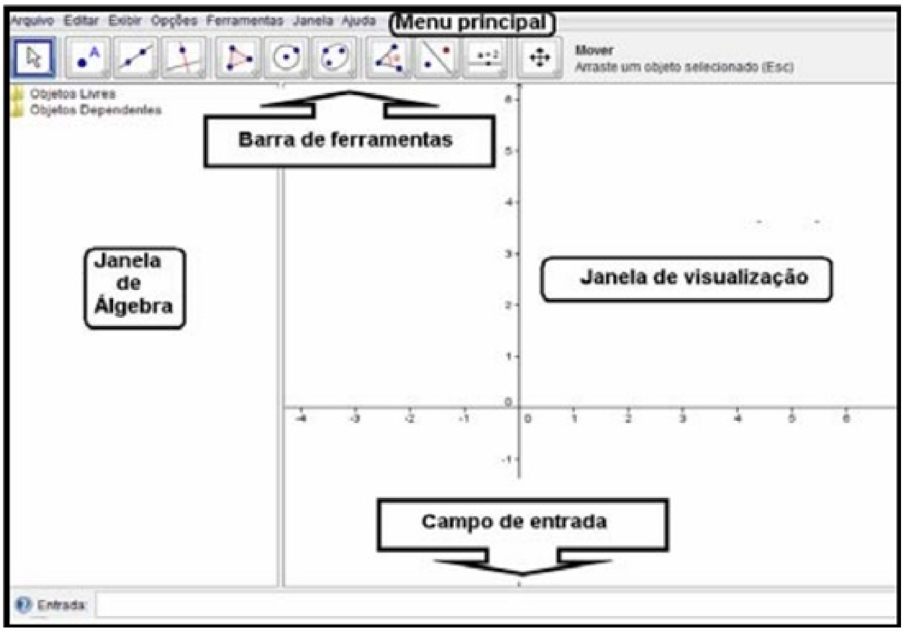


Figura 7.9: Interface do GeoGebra

O software GeoGebra foi construído em 2001, a partir de uma pesquisa de mestrado de Markus Hohenwarter na universidade de Salzburg, na Áustria. A princípio o GeoGebra foi desenvolvido para melhorar a abordagem metodológica dos conteúdos do ensino fundamental e médio, no entanto já foi utilizado como suporte para muitos conteúdos do ensino superior, a exemplo da Soma de Riemman (Figura 7.10), entre outros.

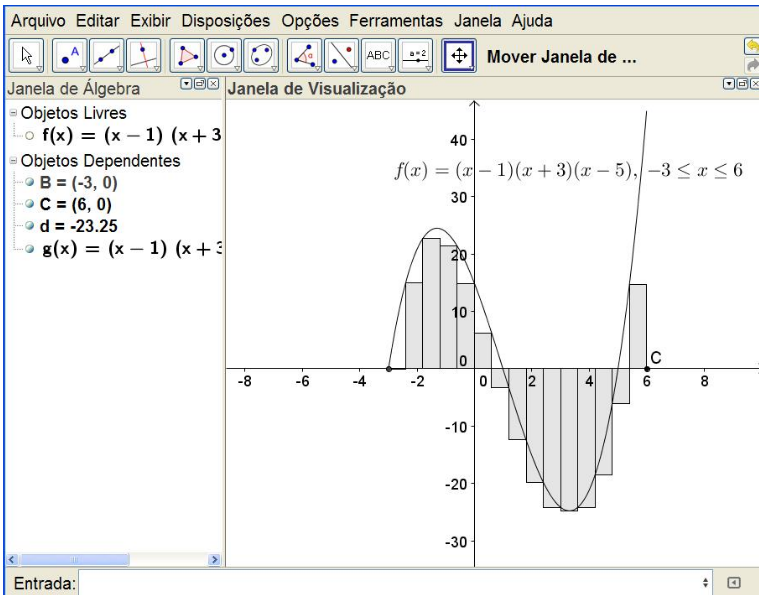


Figura 7.10: Um exemplo de atividade.

O GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções, como retas, polígonos, curvas como funções que podem ser posteriormente modificados de forma dinâmica.

Pelo fato de apresentar uma interface simples (Figura 7.9), possibilita ao aluno explorar conceitos de forma dinâmica. Uma característica importante do GeoGebra é a possibilidade de interação entre o usuário e os objetos que estão na sua área de trabalho, por exemplo, com o mouse é possível visualizar as modificações de seus parâmetros na janela de álgebra no lado esquerdo da tela. Com essa possibilidade, o aluno pode inferir sobre outras situações não elaboradas pelo professor, permitindo a reflexão dos conceitos explorados. Muitas das atividades de matemática que aparecem nos *sites* citados neste capítulo foram elaboradas usando o software GeoGebra.

Capítulo 8

Sequência didática

Este Capítulo apresenta 5(cinco) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho; radiano e as funções seno, cosseno e tangente. As atividades e os aplicativos desenvolvidos no GeoGebra podem ser encontrados no endereço "https://sites.google.com/site/aulamatematicaxxi/funcoes-trigonometricas".

No desenvolvimento das atividades contidas nesta sequência didática buscamos apoio nos sites e softwares apresentados no Capítulo 6, uma vez que os recursos disponíveis são bastante ricos e podem ser usados em sala de aula. As atividades propostas, são programadas para alunos do final do primeiro ou segundo ano do Ensino Médio, e podem ser usadas para consolidar o conhecimento previamente trabalhado em sala de aula, ou na introdução destes, para posterior sistematização.

Os Recursos Materiais, Tecnológicos e didáticos necessários para o desenvolvimento das atividades propostas são: papel, lápis e computador com softwares GeoGebra instalado ou um software de Geometria dinâmica similar.

O embasamento teórico para a escolhas das atividades foi a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel [1, 20], ou seja, as atividades favorecem a participação ativa dos alunos, propiciando a aprendizagem colaborativa, a qual, por sua vez, pode levar a aprendizagem significativa; as atividades são sugeridas de forma a organizar sequencialmente os conteúdos, iniciando o conteúdo pelos aspectos mais simples e avançando para os casos mais complexos; sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos, a primeira atividade, trabalha conteúdo que são estudados no Ensino Fundamental, e tem a finalidade de relembrar esses conteúdos; o material proposto é potencialmente significativo.

Como recomendações metodológicas para a aplicação das atividades propostas, sugerimos que o professor, durante a aula, seja um provocador, no seguinte sentido: o professor deve apresentar a tarefa e deixar claro quais são os seus objetivos e então observar o desenvolvimento das atividades pelos alunos, intervir quando solicitado ou quando perceber que os alunos estão se desviando do objetivo da aula ou não estão evoluindo como desejado.

8.1 Atividade I - *Razões trigonométricas no triângulo retângulo*

Esta atividade, é uma adaptação da atividade encontrada no *site* do BIOE (veja Seção 7.1.1) digitando a palavra trigonometria na janela “Busca de objetos neste portal” no canto superior direito da página, depois clicando no *link* “definições das razões trigonométricas” (Figura 8.1).

Figura 8.1: *Link* para o aplicativo.

O aluno, de posse do aplicativo *online* (Figura 8.2), explora as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo) a partir da manipulação desse aplicativo.

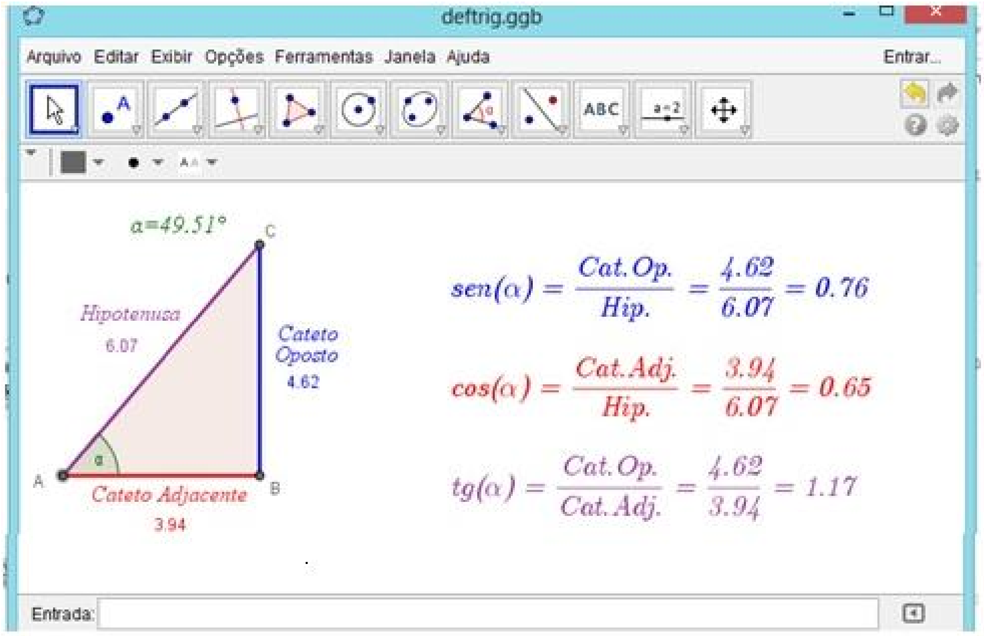


Figura 8.2: Estudo de razões trigonométricas

Descrição Geral e Objetivos

Esta atividade pode ser executada em uma aula de 50 minutos e tem como objetivo consolidar os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos básicos em trigonometria, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

Sugestões de procedimentos ou questionamentos

- Em um primeiro momento o professor deve apresentar o ambiente, onde os alunos irão trabalhar (Figura 8.2) e solicitar que os alunos, usando a ferramenta <mover> alterem as posição dos pontos B e C aleatoriamente, alterando assim as medidas dos catetos e do ângulo α.

- Depois desse primeiro contato, sugerir que os alunos encontrem o seno, cosseno e tangente de alguns ângulos, como por exemplo 30° (e anotem os valores encontrados $\text{sen}(30°)$, $\cos(30°)$ e $\text{tg}(30°)$), repetir o procedimento para 45°, 60°, 90°, 50°, 40°, etc.

- Convidar os alunos a fazer reflexões sobre os valores encontrados, para o seno e o cosseno e a tangente. Por exemplo: O que se pode observar nos valores de $\text{sen}(30°)$ e $\cos(60°)$; $\text{sen}(40°)$ e $\cos(50°)$? Por que não é possível determinar o valor de $\text{tg}(90°)$?. Os valores das razões trigonométricas dependem da medida dos catetos? ou da medida do ângulo?

- Após as reflexões o professor poderá definir ângulos complementares, ou relembrar essa definição com os alunos.

8.2 Atividade II - *Formação do conceito de radiano*

Para o desenvolvimento desta atividade é necessário um aplicativo, denominado "radiano.ggb"desenvolvido no GeoGebra (Figura 8.3) que representa vários círculos concêntricos subtendidos pelo mesmo ângulo central (Detalhes do seu desenvolvimento no Apêndice A).

Descrição geral e Objetivos

Esta atividade pode ser executada em uma aula de 50 minutos e tem como objetivo fazer com que o aluno adquira o conceito de radiano.

Durante a aula o professor deverá estimular os alunos a explorarem situações que possibilitem a identificação de relações entre ângulos e arcos, ou seja, perceberem que a medida do ângulo central é igual a medida do arco correspondente quando comparados com a mesma unidade de medida e, ainda, que o radiano é uma unidade de medida de ângulo e de arco, mas conceitualmente diferente em cada caso.

Sugestões de procedimentos e/ou questionamentos

- Solicitar aos alunos que abram o arquivo "radiano.ggb" (Figura 8.3), no GeoGebra e usando as ferramentas do software respondam as perguntas:
  - Qual o comprimento do arco $\widehat{BF}$?
  - Qual o comprimento do arco $\widehat{CG}$?
  - Qual o comprimento do arco $\widehat{DE}$?

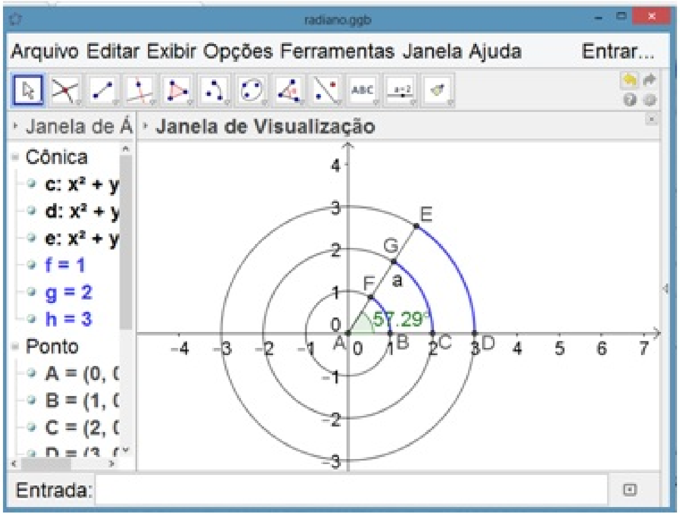


Figura 8.3: Círculos concêntricos

- Levar os alunos a refletir sobre as relações entre os comprimentos dos arcos correspondentes a um mesmo ângulo central e o raio dessas circunferências.

- Solicitar aos alunos que, usando os recursos do software, calculem a razão com relação a um mesmo ângulo central, entre o comprimento do arco e o raio de cada circunferência, independentemente.
  - Razão entre $\frac{\widehat{BF}}{AB}$
  - Razão entre $\frac{\widehat{CG}}{AC}$
  - Razão entre $\frac{\widehat{DE}}{AD}$

- Solicitar aos alunos que desloquem o ponto E sobre a circunferência de maior raio - Usando a ferramenta <mover> deslocar o ponto E e, consequentemente, deslocando os pontos G e F e alterando a medida do ângulo central, e calculem novamente as razões dadas no item anterior.

- Fazer questionamentos que levem os alunos a conclusão que, em relação a um mesmo ângulo central, a razão entre o comprimento do arco pelo seu raio é a mesma, independente da medida do raio da circunferência, ou seja, quando a unidade de medida é o raio a razão é constante.

- Neste momento, o professor pode intervir e definir radiano: Dada a medida l de um arco $\widehat{BP}$, no sentido anti-horário , $l \geq 0$, de uma circunferência de raio $r = 1$, dizemos que o arco $\widehat{BP}$ mede l radianos, denotado por $l\,rad$. Por esta definição, o ângulo $B\hat{A}P$ mede 1(um) radiano se, e somente se, o arco $\widehat{BP}$ por ele subentendido em uma circunferência de raio 1, tem comprimento 1, ou seja, é igual ao raio da circunferência. Generalizando, numa circunferência de raio r, a medida do ângulo central em radianos é igual a $\frac{l}{r}$, onde l é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo [17].

- Determinar novos arcos ($\widehat{BF}$, $\widehat{CG}$ e $\widehat{DE}$), usando a ferramenta <mover> para deslocar o ponto E, e determinar as medidas desses arcos em radianos.

- Para relacionar a medida de ângulos e arcos em graus e radianos, solicitar aos alunos, por exemplo, que desloquem o ponto E de forma que a medida dos arcos $\widehat{BF}$, $\widehat{CG}$ e $\widehat{DE}$ sejam aproximadamente 1,57 rad ($\frac{\pi}{2}$ rad) e respondam as seguinte questões:
  - Qual a medida do ângulo $B\hat{A}F$ em graus? E a medida do arco $\widehat{BF}$ em graus?
  - Qual a medida do ângulo $C\hat{A}G$ em graus? E a medida do arco $\widehat{CG}$ em graus?
  - Qual a medida do ângulo $D\hat{A}E$ em graus? E a medida do arco $\widehat{DE}$ em graus?

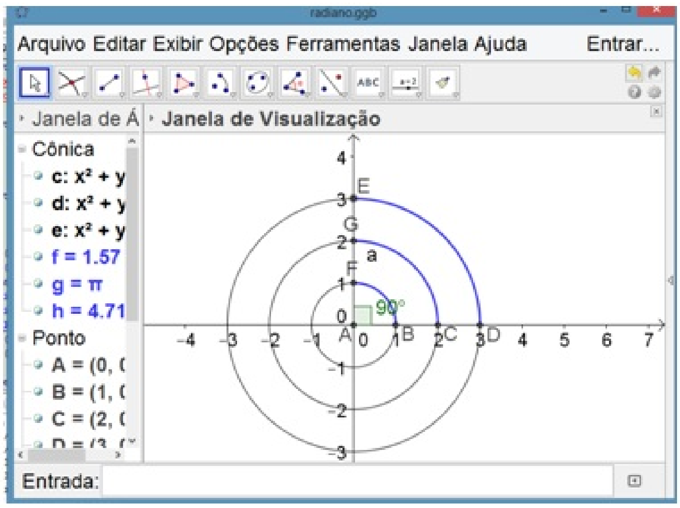


Figura 8.4: Círculos concêntricos.

8.3 Atividade III - *Função de Euler*

Para o desenvolvimento desta atividade é necessário um aplicativo desenvolvido no GeoGebra, que denominamos de "Função_de_Euler.ggb" (Figura 8.5) onde, usando a ferramenta <mover>, pode-se alterar a posição do ponto E (Detalhes do seu desenvolvimento no Apêndice A).

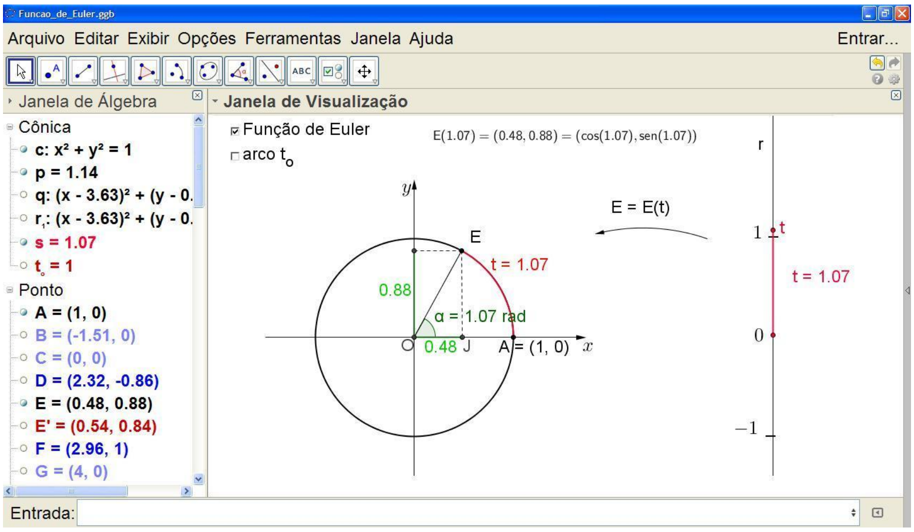


Figura 8.5: Função de Euler.

Descrição Geral e Objetivos

Esta atividade pode ser executada em 2(duas) aulas de 50 minutos, para consolidar os conceitos envolvidos ou 3(três) aulas de 50 minutos, no caso de introdução dos conteúdos, e está dividida em duas Etapas: Circulo Trigonométrico e Função de Euler. Tem como objetivos evidenciar a relação entre o comprimento de um arco no círculo trigonométrico e o ângulo dado em radianos; identificar a relação $180° = \pi\, rad$ e a construção das funções reais seno e cosseno a partir da função de Euler.

Sugestão de procedimentos e questionamentos

Etapa I - Circulo Trigonométrico.

- Com a `Função de Euler` e `arco` t_o desativadas no aplicativo "Função_de_Euler.ggb" (Figura 8.5), deslocar o ponto E (Figura 8.6) partindo da origem do arco, ponto $A = (1,0)$, e observar a correspondência entre o comprimento do arco e a medida do ângulo central em radianos.
  - A correspondência observada, entre o comprimento do arco e o ângulo central dado em radianos, ocorre em qualquer circunferência de raio r e centro $(0,0)$?

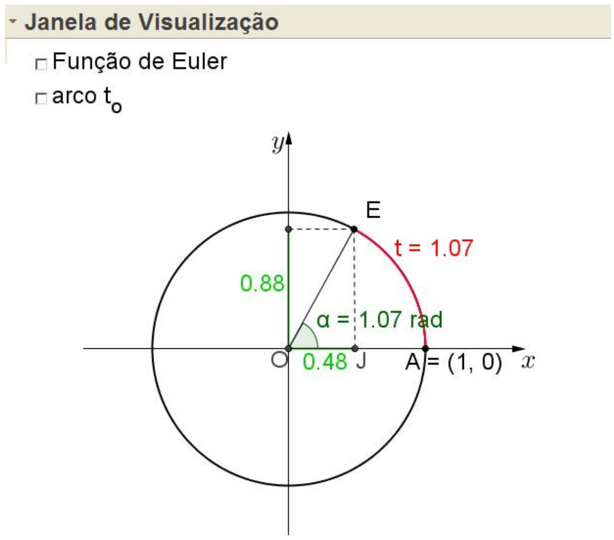


Figura 8.6: Circulo Trigonométrico.

- Deslocar o ponto E de tal forma que o comprimento do arco $\widehat{AE}$ seja $\frac{\pi}{2} \cong 1,57$. Qual a medida do arco em radiano? E considerando o comprimento do arco $\widehat{AE}$ seja $\pi \cong 3,14$. Qual a medida do arco em radiano?
- Em que condição o comprimento do arco de uma circunferência e a medida do ângulo central em radiano são numericamente iguais?

- Trocar a unidade de medida do ângulo central para graus - No menu principal escolher a ferramenta <opção> e então escolher <Avançado> em <Unidade de Medida de angulo> ativar a opção <Grau>.

- Deslocar o ponto E de tal forma que o comprimento do arco $\widehat{AE}$ seja: $\frac{\pi}{6} \cong 0,52$, $\frac{\pi}{4} \cong 0,79$, $\frac{\pi}{3} \cong 1,05$, $\frac{\pi}{2} \cong 1,57$ e $\pi \cong 3,14$. Qual a medida do ângulo central em graus, em cada caso?

- Usando a relação $180° = \pi\, rad$, transformar para radianos os ângulos dados em graus, por exemplo: 15°, 30°, 90°.

- Sugerir uma discussão sobre a equivalência entre a medida (linear) do arco e medida (angular) do ângulo central em radianos, salientando com isso que objetos, conceitualmente diferentes, estão identificados pela mesma medida.

Etapa II - Função de Euler.

- Considerando o triângulo retângulo OJE, inscrito no primeiro quadrante do circulo trigonométrico (Figura 8.6), determinar o cosseno e o seno do ângulo α e relacionar esses valores com as coordenadas do ponto E.

- Ativar a `Função de Euler` no aplicativo "Função de Euler.ggb" e convidar os alunos a olhar para o ponto E, como imagem da Função de Euler $E = E(t)$ (Figura 8.7).

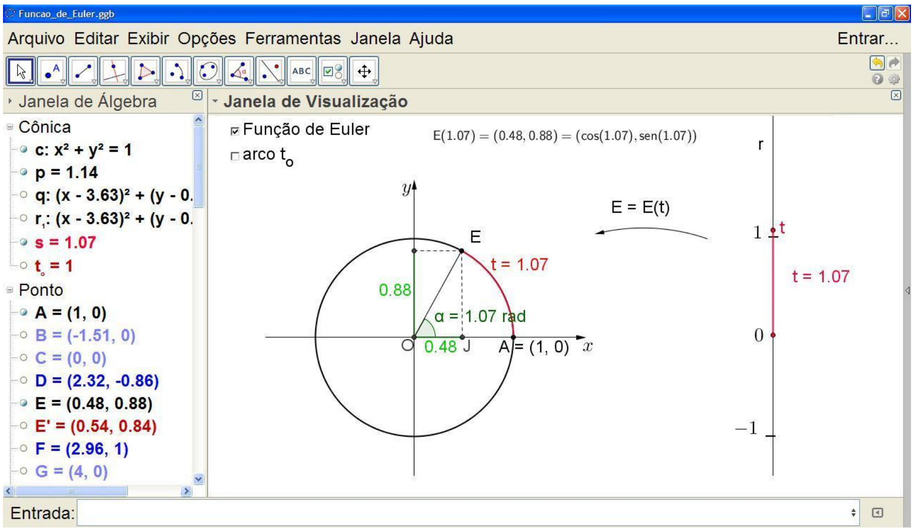


Figura 8.7: Função de Euler.

- Determinar as coordenadas do ponto E, agora como funções de t, ou seja, $E(t) = (x, y) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, ou ainda, $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$ como funções reais de variáveis reais. Calcular alguns valores para o seno e para o cosseno com t variando no primeiro quadrante, Por exemplo: $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \text{sen}(\frac{\pi}{6} rad) = 0,5$

- Deslocar o ponto E (variando o valor de t), percorrendo o segundo, o terceiro e o quarto quadrante, e determinar o valor do seno e do cosseno para os valores de t obtidos, observando o sinal do assumido pelos valores da função seno e da função cosseno cosseno em cada quadrante. Por exemplo: para $t = 2,2$, pertencente ao segundo quadrante, temos $E(2,2) = (-0,59, 0,81) = (\cos(2,2), \text{sen}(2,2))$, ou seja, $\cos(2,2) = -0,59$ e $\text{sen}(2,2) = 0,81$.

- Ativar `arco` t_o , $0 \leq t_o \leq \frac{\pi}{2}$, no aplicativo "Função de Euler.ggb" (Figura 8.8).

- Deslocar o ponto E de forma que $t = \frac{\pi}{2} - t_o$ e verificar a relação de $E(\frac{\pi}{2} - t_o)$ com $E(t_o)$.

- Repetir o procedimento com t assumindo os valores $t_o + \frac{\pi}{2}$, $\pi - t_o$, $\pi + t_o$ e $2\pi - t_o$ e, respectivamente, verificar a relação de $E(t_o + \frac{\pi}{2})$, $E(\pi - t_o)$, $E(\pi + t_o)$ e $E(2\pi - t_o)$ com $E(t_o)$ (Sugestão: para determinar os valores de t, usar a Entrada para calcular os valores. Por exemplo: $p_0 = \frac{\pi}{2} - t_o = 1,05$, fixando $t_o = 0,52$).

- Refletir sobre a "redução ao primeiro quadrante do seno e do cosseno".

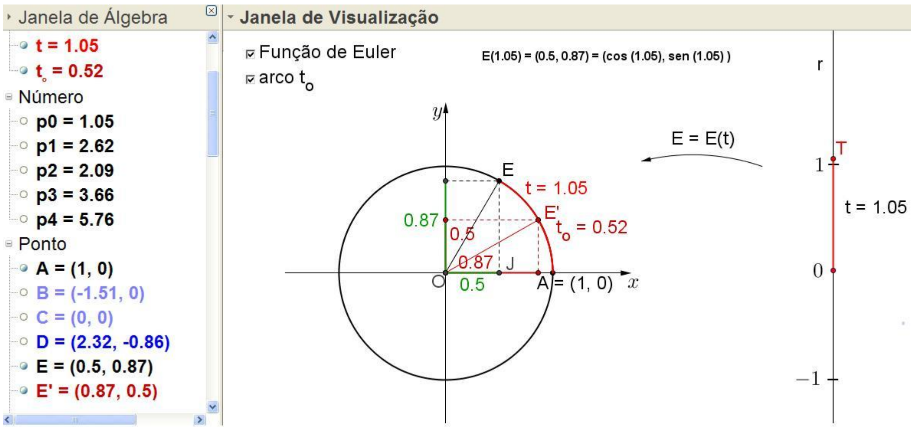


Figura 8.8: Função de Euler.

8.4 Atividade IV - *Gráficos das funções seno, cosseno e tangente*

Para o desenvolvimento desta atividade é necessário um aplicativo desenvolvido no GeoGebra, denominado de “funcões_seno_cosseno_tangente.ggb” (Figura 8.9) onde é possível construir os gráficos das funções seno, cosseno e tangente, independentemente (Detalhes do seu desenvolvimento no Apêndice A).

Descrição Geral e Objetivos

Esta atividade pode ser executada em 2(duas) aulas de 50 minutos e tem como objetivo consolidar, a partir do gráfico das funções, os conceitos de domínio e contra-domínio, periodicidade, crescimento e decrescimento, ponto de máximo e mínimo, das funções seno, cosseno e tangente.

Sugestões de procedimentos e questionamentos

- O professor deve apresentar o ambiente e solicitar aos alunos que ativem, clicando nos itens correspondentes as funções seno, cosseno e tangente.
- Depois desse primeiro contato, sugerir aos alunos que deixem somente o gráfico de uma das função ativo, por exemplo, da função seno, desativando os demais.
- Convidar os alunos a determinar, observando o gráfico, o valor da função para alguns valores x de seu domínio, por exemplo: $x = 0$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, etc.
- Repetir o mesmo procedimento para as funções cosseno e tangente.

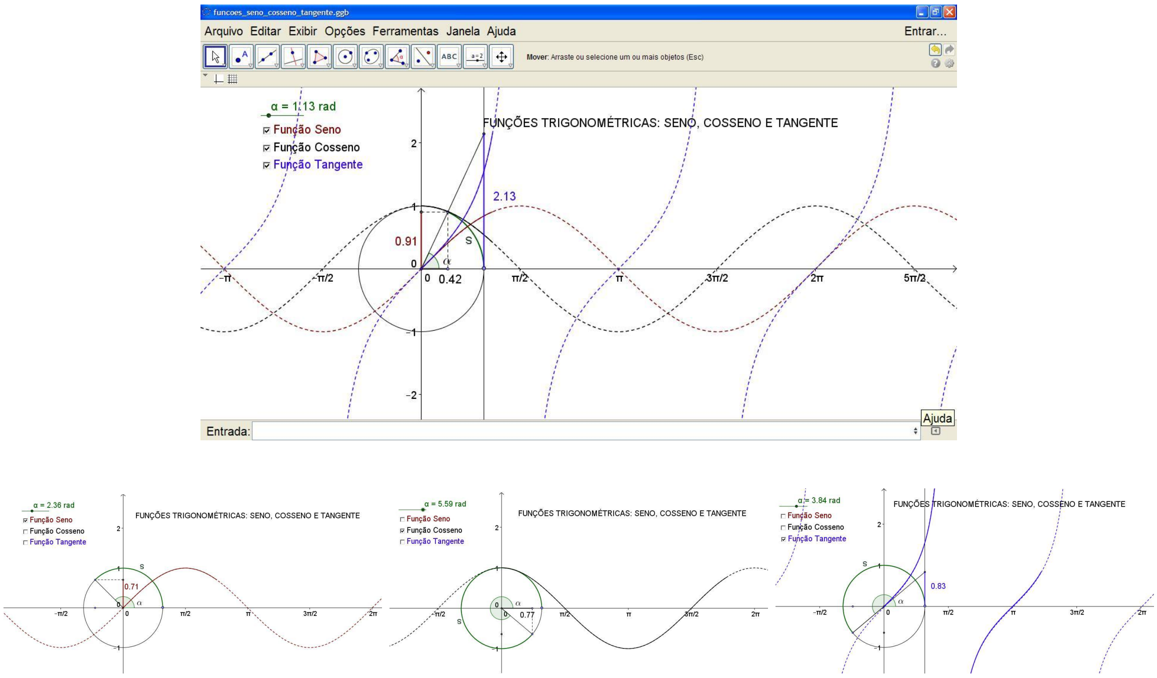


Figura 8.9: Gráfico das funções trigonométricas, seno, cosseno e tangente.

- Determinar outros valores para as funções estudadas, por exemplo: Fixando um valor de x, qual o valor de $\text{sen}(x)$? Qual o valor de $\text{sen}(x+\frac{\pi}{2})$? Qual o valor de $\text{sen}(x+\pi)$? Qual o valor de $\text{sen}(x+2\pi)$? Qual o valor de $\text{sen}(x+4\pi)$?
- Baseados na observação do gráfico e nos valores determinados, fazer reflexões sobre domíno e imagem, periodicidade das funções, intervalos de crescimento, valores máximos e mínimos, etc.

8.5 Atividade V - *Transformações geométrica no gráfico da função cosseno*

Para o desenvolvimento desta atividade é necessário um aplicativo desenvolvido no GeoGebra (Figura 8.10), denominado de "Funcao_cosseno.ggb", onde é possível estudar o comportamento do gráfico de $f(t) = a + b\cos(ct+d)$, alterando os valores dos parâmetros a, b, c e d, através da ferramenta <controle deslizante> (Detalhes do seu desenvolvimento no Apêndice A).

Descrição Geral e Objetivos

Esta atividade pode ser executada em 2(duas) ou 3(três) aulas de 50 minutos cada e tem como objetivo facilitar e dinamizar o estudo das transformações geométricas (simetria, translação e dilatação) causadas no gráfico das funções ($f(x) = a + b\cos(cx+d)$ e

$g(x) = a + b\,\text{sen}(cx+d)$) pela alteração dos parâmetros a, b, c e d, em relação as funções $f_1(x) = \cos(x)$ e $g_1(x) = \text{sen}(x)$, respectivamente.

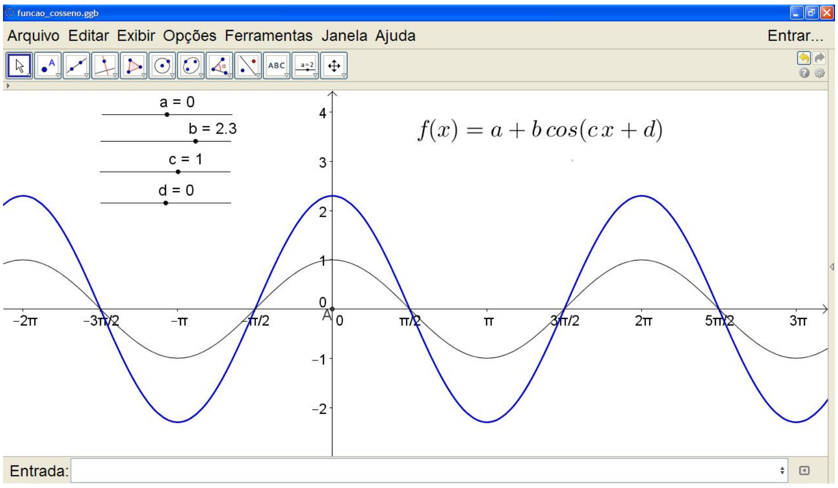


Figura 8.10: Transformação da função cosseno.

Sugestões de procedimentos e questionamentos

- Convidar os alunos a variar um dos parâmetros (Por exemplo: o parâmetro b), deixando os demais, parâmetros a, c e d, fixos) da função $f(x) = a + b\,\cos(cx+d)$, contemplando valores positivos e negativos, valores maiores que 1, valores entre zero e 1, entre zero e -1, menores que -1, etc. Observar as alterações que ocorrem no comportamento do gráfico em relação ao gráfico de $f_1(x) = \cos(x)$ e anotar em uma tabela. Repetir o procedimento com todos os parâmetros.

- Incentivar uma discussão sobre as transformações geométricas (translação, reflexão e dilatação) que ocorrem no gráfico da função.

- Esconder as funções $f(x) = a + b\,\cos(cx+d)$ e $y = \cos(x)$ - Selecionar o gráfico com o *mouse*, clique com o botão direito e na janela do objeto clique em exibir objeto.

- No campo de entrada digitar e $g_1(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = a + b\,\text{sen}(cx+d)$. Mudar o estilo da função $g_1(x) = \text{sen}(x)$ para pontilhado - Selecionar o gráfico com o *mouse*, clique com o botão direito e na janela do objeto clique em propriedades.

- Varie os parâmetros fazendo um estudo do gráfico da função seno, análogo ao estudo realizado com o gráfico da função cosseno.

- Para exemplificar a periodicidade das funcões seno e cosseno, o professor pode apresentar uma tabelas com os dados de marés e encontrar os parâmetros a, b, c e d da função $f(x) = a + b\,\cos(cx+d)$ dos dados obtidos. Como a seguir:

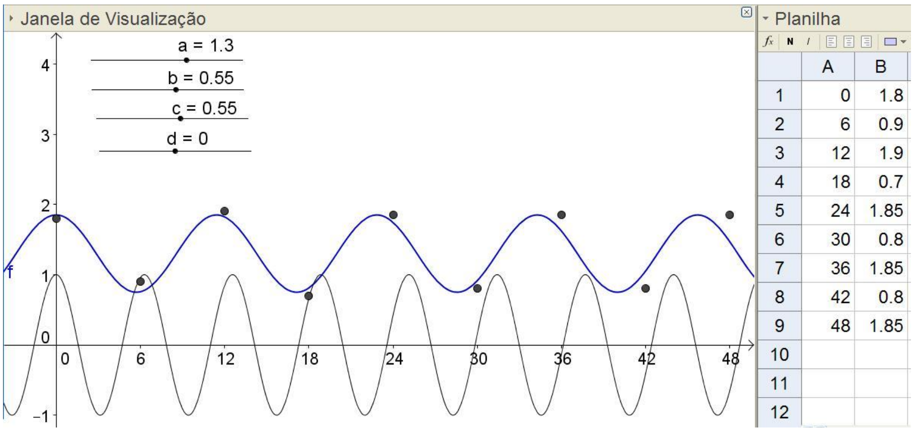


Figura 8.11: Aproximação da função cosseno de dados de marés.

1. Tomando a tábua das marés do Porto de Cabedelo-PB no dia $(09/04/2014)$ obtida em <www.pbagora.com.br/tabuadasmares.php>, (Figura 8.11) temos:
   (a) As marés altas ocorriam às $00h08$ e às $12h24$ com alturas iguais, respectivamente, a $1,8m$ e $1,9m$.
   (b) As marés baixas ocorriam às $06h13$ e às $18h56$ com alturas iguais, respectivamente, a $0,9m$ e $0,7m$.
2. Observando as variações das marés em outros dias, observa-se que as alterações entre as marés baixas e altas ocorrem em intervalos de tempo de aproximadamente 6(seis) horas, caracterizando um fenómeno periódico. Fenômenos periódicos podem ser modelados pelas funções trigonométricas, considerando um período de 12 horas - tempo entre duas marés altas (ou duas mares baixas) consecutivas.

   Para obter um modelo simplificado[1], consideramos valores aproximados pela média, tendo como base as dados observados em um único dia.
   (a) As marés altas ocorrem às $00h00$ e às $12h00$ de cada dia, com altura igual a $1,85m$.
   (b) As marés baixas ocorrem às $06h00$ e às $18h00$ de cada dia, com altura igual a $0,8m$.
3. Na janela Planilha do GeoGebra gerar uma tabela cuja primeira coluna contem valores variando de 6 em 6 unidadaes, indicando intervalos de tempo de 6 horas e a segunda contém as alturas da maré naquele determinado tempo, considerando um intervalo de tempo igual a 2 dias ou 48 horas. Marcar a tabela, clicar com o botão direito do *mouse* sobre a tabela e escolher a opção <criar> e <lista de pontos>. Gerando os pontos na janela gráfica.

[1]Um modelo completo para a previsão de marés, usando a função cosseno, pode ser encontrado no *site* <http://www.tabuademares.com/mares>.

4. Promover uma discussão sobre a escolha da função trigonométrica para modelar o movimento das marés: escolher a função seno ou a função cosseno? Como o primeiro valor (t=0) da nossa tabela indica uma maré alta, função cosseno parece ser mais adequada.
5. Voltar a exibir o gráfico da função $f(x) = a + b\cos(cx + d)$ e determinar os parâmetros que ajustam a curva (o gráfico) aos pontos dados.
6. Refletir sobre o que aconteceria se a função seno fosse a escolhida?
7. Promover uma discussão sobre aproximação de dados reais por uma curva. Modelos matemáticos de fenômenos naturais, as simplificações realizadas, etc.
8. Para encerrar essa atividade o professor pode convidar a turma a obter um modelo simplificado, calculando os valores dos parâmetros algebricamente, como segue:

   Assumindo que $f(x) = a + b\cos(cx + d)$ descreve o movimento das marés, o parâmetro c é responsável pelo período P da função e

   $$P = \frac{2\pi}{c}.$$

   Observemos que quando $c = 1$, temos $P = 2\pi$.

   Como duas mares altas (ou baixas) consecutivas ocorrem em um intervalo de tempo médio de 12 horas, temos que o período da função que modela o movimento das marés é 12. ($P = 12$). Logo,

   $$12 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}.$$

   Um valor máximo da função ocorre quando $t = 0$, então, o parâmetro d, responsável pelo deslocamento horizontal do gráfico da função, deve ser nulo, $d = 0$.

   Os valores de a e b podem ser obtidos fazendo $t = 0$ e $t = 6$, respectivamente, na função $f(t) = a + b\cos(\frac{\pi}{6}t)$.

   $$\begin{aligned} f(0) &= a + b\cos(0) = 1,85 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1,85; \\ f(6) &= a + b\cos(\pi) = 0,8 \quad \Rightarrow \quad a - b = 0,8. \end{aligned}$$

   Resolvendo o sistema formado pelas equações acima, temos $a = 1,32$ e $b = 0,53$. Então

   $$f(t) = 1,32 + 0,53\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Capítulo 9

Comentários Finais

Ao estudar a história da matemática observa-se que muitos dos conhecimentos que, na época de sua descoberta, pareciam ter aplicação bem definidas, tornam-se com o passar do tempo muito mais úteis do que o foram inicialmente. A trigonometria, quando do seu surgimento era utilizada para resolver problemas oriundos da astronomia, relacionados com distâncias inacessíveis, utilizando as relações métricas do triângulo retângulo. Mais tarde, a partir do renascimento, a trigonometria passou a ser usada na Cartografia e na Topografia. Nos tempos atuais a trigonometria e funções trigonométricas são essenciais para a resolução de muitos problemas de matemática e de física que envolvem fenômenos periódicos, como eletricidade, termodinâmica, óptica, etc. [9].

Apesar da grande oferta de material didático envolvendo trigonometria, tanto material impresso como material online na internet, buscamos com este trabalho, apresentar um estudo complementar aos conteúdos dos livros didáticos, dando ênfase a definição do radiano, da função seno e cosseno a partir da função de Euler e apresentar as demostrações de identidades trigonométricas apoiados em conhecimentos de geometria plana. Apresentamos também uma sequência didática com atividades que contemplam o estudo do radiano e das funções trigonométricas, os quais estão organizadas de forma a favorecer a aprendizagem significativa.

Um dos fatores que favorece a aprendizagem significativa é o uso de material potencialmente significativo, isto é, material didático que propicie a participação ativa do aluno (ensino centrado no aluno) e que seja apoiado nos conhecimentos prévios dos mesmos, que são características contempladas nas atividades propostas neste trabalho. Além disso, as atividades propostas, pela sua natureza dinâmica (foram elaboradas para serem desenvolvidas usando recursos computacionais), podem ser suficientemente motivadoras para que o aluno queira aprender. Segundo Ausubel [1], a motivação (predisposição) para aprender é determinante para que ocorra a aprendizagem significativa.

Esperamos que este trabalho seja mais um recurso didático disponível e acessível aos os professores do ensino básico e que contribua para o ensino e aprendizagem da trigonometria, como também, para a inclusão do computador na sala de aula de forma eficiente.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, David P. *Aquisição e retenção do conhecimento: Uma perspectiva cognitiva*. Tradução de Lígia Teopisto. Edição 1ª, Editora Plátano, janeiro de 2003.

[2] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF. 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculars Nacionais*. Brasília: MEC/SEF. 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

[4] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Volume 2. 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

[5] BRASIL. Resolução CNE/CEB Nº 2, de 30 de janeiro de 2012. *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Disponível em <http://www.sinepe-pe.org.br/wp-content/uploads/2012/05/Resolucao_CNE_02_2012_Ensino_Medio.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

[6] BRASIL. Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Diretrizes e bases da educação nacional*. Disponível em < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

[7] BRASIL. Guia de livros didáticos: PNLD 2012 - Matemática / Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011. disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-médio>. Acesso em 30 de março de 2014.

[8] BOYER, C. História da matemática. Edição 2ª - Trad. De Elza Gomide, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo,1996.

[9] CARMO, Manfredo Perdigão do, et al. *Trigonometria e Números Complexos*, Terceira Edição, Coleção do Professor em Matemática. SBM, 2005.

[10] Coleção MATEMÁTICA, CONTEXTO e APLICAÇÕES de Luiz Roberto Dante, Volume 1, São Paulo: Editora Àtica, 2011.

[11] Coleção Novo Olhar, Ensino Médio de Joamir Roberto de Souza, volumes 1 e 2, São Paulo: Editora FTD S.A., 2012;

[12] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. volume único, 1^a. edição. São Paulo: ática, 2005.

[13] EVES, H. *Introdução à História da Matemática* - Trad. Hygino H.Domingues, Editora da UNICAMP, 2004.

[14] GIRALDO, Victor et al. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[15] KENNEDY, E. S. *Tópicos de História da matemática para Uso em Sala de Aula, volume 5: Trigonometria*, trad. De Hygino H.Domingues - Ed Atual Ltda, 1992.

[16] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.

[17] LIMA, Elon Lages. *A matemática do ensino médio*. 9^a edição, Rio de Janeiro: SBM, 2006, v.1.

[18] MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO de Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole, Volumes 1 e 2, São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

[19] MISKULIN, R.G.S. PIVA JUNIOR, D. A Relação entre aprendizagem significativa e aprendizagem colaborativa: Um estudo de caso utilizando TICs e mapas conceituais. Publicado no 1º. Encontro Nacional de aprendizagem Significativa. Campo Grande, 2005. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/36057210/MAPASCONCEITUAISRosanaePiva>. Acesso em 15 de março de 2014.

[20] MOREIRA, M.A. et al. (orgs.) Aprendizagem significativa: Um conceito subjacente. Atas do Encontro Internacional de Aprendizagem significativa. Burgos, Espanha. 1997. Revisado em 2012. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ moreira/apsigsubport.pdf>. Acesso em 15 de março de 2014.

[21] MOREIRA, M.A. Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa. 2012. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ moreira/mapasport.pdf>. Acesso em 15 de março de 2014.

[22] MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: da visão classica a visão crítica. Atas do V encontro Internacional sobre aprendizagem significativa. Madri. Espanha, 2007. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ moreira/visaoclasicavisaocritica.pdf>. Acesso em 15 de março de 2014.

[23] NETO,A.C.M, Geometria Rio de Janeiro: SBM. 2013.

[24] OLIVEIRA, Thaís de. TRIGONOMETRIA: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciência Exatas. São Carlos. UFSC, 2010.

[25] PITOMBEIRA, João B. e ROQUE, Tatiana M. Tópicos em História da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[26] QUINTANEIRO, Wellerson. Representações e Definições formais em Trigonometria no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado em ensino de Matemática. Rio de Janeiro. UFRJ, 2010.

[27] SOUZA, N. A. e BORUCHOVITCH, e. Mapas Conceituais: Estratégia de Ensino/aprendizagem e ferramente avaliativa. Educação em Revista. v.26, nº 03. Belo Horizonte, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-46982010000300010&script=sci_arttext>. Acesso em 15 de março de 2014.

Portais na internet e softwares

[28] Banco Internacional de Objetos Educacionais. http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/

[29] Comunidade mundial do GeoGebra. http://www.geogebra.org/

[30] Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem de Matemática - Universidade Federal Fluminense. http://www.uff.br/cdme/.

[31] Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro. http://www.geogebra.im-uff.mat.br/

[32] Portal do professor - Mec. http://portaldoprofessor.mec.gov.br/

[33] Portal EducarBrasil. <http://www.portaleducarbrasil.org.br

[34] Radiano. http://pt.wikipedia.org/wiki/Radiano.

[35] Tales e a altura da pirâmide. http://www.youtube.com/watch?v=cWkU6fGoYA8.

Apêndice A

Roteiros para geração de arquivos ggb

Neste Apêndice apresentamos roteiros para a geração dos arquivos do GeoGebra, chamados de aplicativos nas Atividades II, III, IV e V.

Atividade II - Geração do aplicativo "radiano.ggb"

1. Abra o GeoGebra e na barra de ferramentas clique no ícone <Círculo dado seu centro e um de seus pontos>;

2. Gere um círculo de centro na origem e raio 1 (Clicando na interseção dos eixos x e y, logo em seguida no ponto $(1,0)$, denominando o ponto $(0,0)$ de A e o ponto $(1,0)$ de B);

3. Gere um círculo de centro na origem e raio 2 (clicando na interseção dos eixos x e y, logo em seguida no ponto $(2,0)$, denominando-o de C);

4. Gere um círculo de centro na origem e raio 3 (clicando na interseção dos eixos x e y, logo em seguida no ponto $(3,0)$, denominando-o de D);

5. Usando a ferramenta <segmento> crie o segmento AE, onde $A = (0,0)$ e $E = (0,3)$

6. Usando a ferramenta <Interseção de dois objetos>, crie os pontos F e G, onde F é a interseção do círculo de raio 1 e o segmento AE; e G é a interseção do círculo de raio 2 e o segmento AE;

7. Escolha a ferramenta <ângulos>, em seguida clique no eixo-x e no segmento AE, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o ângulo criado, escolha a opção propriedades, <exibir rótulo>, escolhendo a opção valor;

8. Com a ferramenta <Arco Circular>, clique sequencialmente em A,B e F, determinando o arco BF, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o arco criado, escolha a opção propriedades, cor(azul), estilo (espessura 5), faça o mesmo para determinar os arcos CG e DE;

9. Desloque o ponto E até que tenhamos um ângulo de aproximadamente, 57,29 graus;
10. Desloque o ponto E até que tenhamos um ângulo de $90°$;
11. Salve o arquivo com o nome *radiano.ggb*.

Atividade III Geração do aplicativo “funcao_de_euler.ggb”.

1. Abra o GeoGebra e na barra de menu clique em exibir e depois em <Janela de Álgebra>;
2. Usando a ferramenta <mover janela de visualização> desloque os eixos mais a esquerda;
3. Mova o botão de rolagem do *mouse* até que se tenha um espaçamento de uma unidade nos eixos coordenados;
4. Usando a ferramenta <Círculo dado seu centro e um de seus pontos> crie o círculo de raio 1;
5. Usando a ferramenta <segmento> crie o segmento de origem no centro do círculo e extremidade pertencente a circunferência;
6. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre a origem do segmento, escolha a opção renomear, digite O;
7. Com a ferramenta <Arco Circular>, clique sequencialmente em O,B e C, determinando o arco BC, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o arco criado, escolha a opção propriedades, cor(azul), estilo (espessura 5);
8. Escolha a ferramenta <ângulos>, em seguida clique no eixo-x e no segmento OC;
9. Na barra de menu clique sequencialmente em opções, avançado, unidade de medida de ângulos, radiano;
10. No *Campo de Entrada* digite $(x(C),0)$ e *enter*, em seguida no *Campo de Entrada* digite $(0,y(C))$ e *enter*;
11. Usando a ferramenta <segmento> crie o segmento de origem no ponto C e extremidade no ponto $(x(C),0)$, analogamente crie o segmento de origem no ponto C e extremidade no ponto $(0,y(C))$;
12. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre cada um dos segmentos criados anteriormente, um de cada vez, em seguida clique em propriedades, estilo e escolha a linha tracejada;

13. Usando a ferramenta <segmento> crie o segmento de origem no ponto O e extremidade no ponto $(x(C),0)$, analogamente crie o segmento de origem no ponto O e extremidade no ponto $(0,y(C))$;

14. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre cada um dos segmentos criados anteriormente, um de cada vez, em seguida clique em propriedades, cor(laranja) estilo (espessura 5);

15. Agora clique no ícone <segmento de comprimento fixo> na barra de ferramentas e digite o o rótulo do arco arco OBC;

16. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o comprimento de medida fixa em seguida clique em propriedades, nome e valor;

17. Use a ferramenta <Caixa para exibir/esconder objeto>, na janela que abrirá digite no *legenda* Função de Euler, em seguida clique em todos os objetos que caracterizam a função de euler;

18. Salve o arquivo com o nome *funcao_de_euler.ggb*.

Atividade IV Geração do aplicativo "funcao seno,cosseno e tangente.ggb".

1. Inicialmente siga exatamente os passos da atividade anterior, exceto o item 15;

2. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o eixo-x, em seguida em janela de visualização, eixo-x, distância $\frac{\pi}{2}$;

3. Usando a ferramenta <reta perpendicular> determine a reta perpendicular ao eixo-x passando por B;

4. No *Campo de Entrada* digite $(1,\tan(\alpha))$ e depois *enter*, gerando o ponto G;

5. Usando a ferramenta <segmento> clique no ponto C, logo depois clique no ponto determinado por $(1,\tan(\alpha))$;

6. Digite no *Campo de Entrada* "$tag(\alpha) ='' +tan(\alpha)$;

7. Leve o texto "$tag(\alpha) ='' +tan(\alpha)$ para junto do ponto G em seguida clique com o botão esquerdo do mouse sobre "$tag(\alpha) = " + tan(\alpha)''$ propriedades, posição, origem ponto G;

8. Digite no *Campo de Entrada* "$\text{sen}(\alpha) ='' + \text{sen}(\alpha)$;

9. Leve o texto “$\text{sen}(\alpha) ='' + \text{sen}(\alpha)$ para junto do ponto $(0, y(C)$ que é o ponto D em seguida clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre ”$\text{sen}(\alpha) =$ ”$+ \text{sen}(\alpha)$ propriedades, posição, origem ponto D, dessa forma o texto “$\text{sen}(\alpha) ='' + \text{sen}(\alpha)$ seguirá o ponto D;

10. Digite no *Campo de Entrada* “$\cos(\alpha) ='' + \cos(\alpha)$;

11. Leve o texto “$\cos(\alpha) ='' + \cos(\alpha)$ para junto do ponto $(x(C), 0)$ que é o ponto A em seguida clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre “$\cos(\alpha) ='' + \cos(\alpha)$ propriedades, posição, origem ponto A, dessa forma o texto “$\cos(\alpha) ='' + \cos(\alpha)$ seguirá o ponto A;

12. Usando a ferramenta <segmento> determine um segmento de origem no ponto B que é ponto $(1, 0)$ e extremidade no ponto G;

13. Lembrando que t é o comprimento do arco BC digite no *Campo de Entrada* $f(t) = \text{sen}(t)$;

14. Digite no *Campo de Entrada* $(t, \text{sen}(t))$ gerando o ponto H;

15. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre H, em seguida em propriedade, estilo, tamanho do ponto 1;

16. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre H, em seguida em habilitar rastro;

17. Lembrando que t é o comprimento do arco BC digite no *Campo de Entrada* $g(t) = \cos(t)$;

18. Digite no *Campo de Entrada* $(t, \text{sen}(t))$ gerando o ponto I;

19. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre I, em seguida em propriedade, estilo, tamanho do ponto 1;

20. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre I, em seguida em habilitar rastro;

21. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o grafico da função cosseno, propriedade, estilo, tracejado;

22. Lembrando que t é o comprimento do arco BC digite no *Campo de Entrada* $h(t) = tan(t)$;

23. Digite no *Campo de Entrada* $(t, \text{sen}(t))$ gerando o ponto J;

24. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre J, em seguida em propriedade, estilo, tamanho do ponto 1;

25. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre J, em seguida em habilitar rastro;
26. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o gráfico da função tangente, propriedade, estilo, tracejado;
27. Clique na ferramenta <Caixa para exibir/esconder objeto>, na janela que abrirá digite no *legenda* Função seno, em seguida clique em todos os objetos que caracterizam apenas a função seno;
28. Clique na ferramenta <Caixa para exibir/esconder objeto>, na janela que abrirá digite no *legenda* Função cosseno, em seguida clique em todos os objetos que caracterizam apenas a função cosseno;
29. Clique na ferramenta <Caixa para exibir/esconder objeto>, na janela que abrirá digite no *legenda* Função tangente, em seguida clique em todos os objetos que caracterizam apenas a função tangente;
30. Salve o arquivo com o nome *funcao seno,cosseno e tangente.ggb*.

Atividade V Geração do aplicativo “Funcao_cosseno.ggb”.

1. Abra o GeoGebra e na barra de menu clique em exibir e depois em <Janela de Álgebra>;
2. Usando a ferramenta <Mover janela de Visualização> desloque os eixos mais a esquerda;
3. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o eixo-x, em seguida em janela de visualização, eixo-x, distância $\frac{\pi}{2}$;
4. Usando a ferramenta <controle deslizante> crie os controles deslizantes a, b, c e d, clicando seguidamente na ferramenta <controle deslizante> em seguida tecle *enter* gerando os controles deslizantes a, b, c e d, respectivamete;
5. Digite no *Campo de Entrada* $f(t) = a + b\cos(ct + d)$ em seguida tecle *enter*;
6. Usando a ferramenta <Texto> digite o texto $f(t) = a + b\cos(ct + d)$;
7. Salve o arquivo com o nome *transformacao da funcao cosseno.ggb*.