2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Pentes de ovos, ovos e as quatro operações básicas da Matemática com números inteiros

Carlos Eustáquio Pinto [1]
Francinildo Nobre Ferreira[2]

Resumo: O presente trabalho trata-se de uma proposta metodológica de ensino para o aprendizado de como efetuar as operações fundamentais utilizando números inteiros. Nessa metodologia utiliza-se materiais concretos para facilitar a compreensão por parte dos alunos dos conhecimentos matemáticos abordados. A ideia principal da nossa dinâmica de ensino é explorar a noção de completude e propiciar a compreensão de adição, subtração e multiplicação de números inteiros, utilizando as operações aritméticas associadas ao material concreto. O ponto principal do nosso trabalho é propiciar ao aluno a compreensão aritmética do porque o produto de dois números inteiros negativos é positivo.

Palavras-chave: Aritmética. Completude. Materiais Concretos. Números Inteiros. Operações Fundamentais.

1 Introdução

A partir da primeira experiência docente numa turma do oitavo ano da Educação Básica de uma escola estadual da rede pública de ensino do Estado de Minas Gerais, foi percebido que os alunos não conseguiam realizar satisfatoriamente as quatro operações básicas da Matemática envolvendo os números inteiros, ou seja, cometiam erros variados na realização dessas operações. A dificuldade era maior quando os números inteiros negativos estavam presentes nas operações. Nos problemas matemáticos envolvendo situações reais de aplicação do conhecimento acerca dos números inteiros não era diferente, e tampouco em problemas puramente matemáticos envolvendo tais números. Foi verificado também que as ideias de sucessor e antecessor dos inteiros não foram assimiladas por grande parte dos alunos em especial quando os elementos em análise eram os inteiros negativos.

Ver aquela situação e permanecer com a consciência tranquila era algo inaceitável para um professor de matemática, então surgiu um pensamento em desenvolver uma metodologia de ensino-aprendizagem para sanar a dificuldade daqueles alunos em operar com números inteiros e solucionar problemas matemáticos envolvendo tais números.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: profmatcarlos@gmail.com
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: francinildonobre@gmail.com

Tinha que ser, de preferência, algo simples, barato e de fácil acesso na vida de todos aqueles alunos e alunas, algo que fosse dinâmico, manuseável, atraente para os discentes e inovador. Ao analisar alguns cadernos de matemática do ano anterior daqueles alunos foi verificado o uso da reta numérica dos inteiros e da matemática financeira (desta foram utilizadas as ideias de movimentações bancárias de uma conta, ganhos e perdas financeiras) no ensino-aprendizagem das operações fundamentais envolvendo os números inteiros. À mente veio à lembrança de uma cena do filme "O Preço do Desafio" cujo título original é "Stand and Deliver", em que o personagem principal, um professor de matemática, ensina a operação $-2+2$ utilizando uma ideia de "falta e sobra" dizendo para um aluno completar um buraco feito na praia com a própria areia retirada do mesmo. Estava claro que seria possível explorar aquela concepção, diferente da geométrica e da financeira, para ensinar os alunos a operar com os números inteiros, o problema seria como conseguir um material viável financeiramente e manipulável numa sala de aula?

Novamente a lembrança foi uma aliada nesse projeto, mostrando que na infância morava próximo a uma granja que produzia ovos vermelhos e estes eram embalados em pentes de papel. Surgiu a ideia de tratar o ensino-aprendizagem das operações dos inteiros de uma maneira aritmética e concreta associando os espaços vazios de um pente de ovos com números inteiros negativos e os números inteiros positivos com ovos. O zero seria representado pela "completude"dos pentes e ovos, ou seja, não faltava e nem sobrava ovos nos pentes.

Havia o problema de não poder trabalhar com ovos numa sala de aula, então estes foram substituídos por bolinhas de pingue-pongue.

A metodologia foi elaborada e aplicada na turma e os resultados obtidos foram mais que satisfatórios, mas o grande erro cometido foi o de não registrar aquele momento. O fato é que só foi pensado em sanar aquela dificuldade momentânea, ou seja, só havia o desejo de propiciar um aprendizado concreto para os alunos naquele momento, não se imaginava que aquilo seria útil para outros professores e alunos até que ao apresentar aquela situação para uma professora de Diretrizes Metodológicas do Ensino de Matemática, foi compreendida a riqueza daquela experiência de ensino-aprendizagem para outros professores de matemática e alunos de outras partes do país.

Nos anos seguintes a metodologia foi aplicada em inúmeras vezes, mas nunca houve o interesse em realizar uma pesquisa de campo com avaliação de resultados e nem mesmo registrar o método, pois apesar de existir a vontade de mostrar aquela experiência para outros professores não havia o apoio e nem se sabia da relevância de publicar tal experiência. Neste trabalho, exploramos este tema uma vez que ele está diretamente relacionado com o trabalho do professor de matemática em sala de aula da Educação Básica.

Cursando o PROFMAT na UFSJ foi possível transpor para o papel essa metodologia de ensino diferenciada de forma clara e que poderá ser aplicada por outros discentes. O PROFMAT propiciou a oportunidade de aprender uma matemática em maior nível de profundidade e a convivência com professores e colegas do curso, que possuem uma mente aberta e um ideal de disseminar essa matemática refinada para todos os alunos do Brasil.

1.1 Um pouco de história

Apesar da invenção dos inteiros negativos ser antiga, a sistematização do conjunto dos números inteiros e a forma de operar com os mesmos como conhecemos atualmente é bem recente no que se refere ao surgimento da matemática.

Segundo os autores Boyer (1996) e Eves (2004) os hindus foram os primeiros a utilizarem os números inteiros por volta dos séculos 6 e 7 a. C.. Também segundo Boyer (1996) e Eves (2004) o matemático Brahmagupta escreveu acerca desses números como raízes de equações quadráticas e também no seu uso em aritmética e álgebra. Apesar desses "novos"números serem pouco utilizados na época e, na maior parte das vezes em situações práticas, sua criação pelos hindus veio a ser a primeira ideia conhecida sobre assunto.

Acerca da história do ensino-aprendizagem desses números pouco se sabe, é evidente que o Ensino da ciência Matemática e sua História são recentes e muito está se produzindo nessas áreas de conhecimento. Pode-se apontar o uso da reta numérica dos inteiros, a ideia de conjunto dos inteiros, situações financeiras, sequências, regras operacionais, tabelas e a resolução de problemas envolvendo números inteiros como as estratégias metodológicas mais utilizadas no ensino-aprendizagem acerca desses números.

1.2 Erros comuns na realização de operações com números inteiros

Ao lecionar em turmas de sétimo, oitavo e nono anos da Educação Básica e também em turmas do Ensino Médio, verifica-se a ocorrência de alguns erros comuns na realização de operações aritméticas e/ou algébricas por parte dos alunos. A seguir estão listados os principais erros e algumas hipóteses acerca de como os alunos chegam a esses erros.

PARTE I

Erro (1): $2 - 7 = 5$.
Verifica-se nessa situação a incompreensão quase que total da ideia de número inteiro negativo e das regras operacionais, vendo que o aluno realizou a operação $7 - 2 = 5$.

Erro (2): $-8 + 3 = -11$ ou $-8 - 3 = -5$.
Nota-se nessa situação que o aluno considerou o primeiro sinal de "menos"como sendo uma entidade livre de associação com o número oito e, somente o considerou, no resultado.

Erro (3): $-7 + 5 - 3 + 8 = 8$ ou $5 + 3 + 8 - 7 = -7$.
Em (3) observa-se que o aluno já foi apresentado à reta numérica dos números inteiros, mas não compreendeu ainda como operar utilizando a ideia de simetria e oposição. Nesse caso, o aluno simplesmente "pula"(salta) de um número para outro seguindo a expressão como se fosse uma "rota"e sempre obterá como resultado da expressão o último número, ou seja, o número da direita.

Erro (4): $-9-4=13$ ou $-6+10-4=20$.
Geralmente o aluno comete esse erro após aprender a regra do "negativo vezes negativo é igual a positivo" ou "o produto de dois inteiros negativos é positivo" ou ainda "menos vezes menos dá mais". É bem provável que você já tenha ouvido, pelo menos, uma dessas regras, mas se não ouviu, talvez tenha ouvido "menos com menos dá mais", e esta, é com certeza, a regra que faz com que o aluno cometa o erro (4).

É uma questão simples de ser entendida e não será necessário realizar uma pesquisa de campo para verificar a seguinte situação: o aluno que comete o erro (4) memorizou a regra "menos com menos dá mais". Não é que a regra seja uma inimiga, o problema está na redação incorreta da regra, ou seja, na redação de uma regra que propicia ambiguidade de interpretação. Na verdade tal regra já é utilizada há muito tempo e

> [...] até o século 19, nenhum matemático conseguia explicar a regra, apesar de já ser conhecida há muito tempo. "[Johann Carl Friedrich] Gauss chegou a dizer em uma carta que a regra era conveniente e isso seria mais importante do que justificá-la." Então, somente no final do século 19, quando os matemáticos começaram a estudar a estrutura algébrica dos conjuntos numéricos, ficou claro o motivo da regra. (CÁLCULO, ed. 18, ano 2, 2012, p. 42 a 43)

Então, o professor deve se policiar para não apresentar redações ambíguas de regras, conceitos matemáticos, definições matemáticas etc., a seus alunos.

PARTE II

Agora vamos apontar os principais erros, observados por nós ao lecionarmos tal conhecimento, cometidos pelos alunos na resolução de operações de multiplicação e/ou divisão envolvendo números inteiros.

Erro (5): troca o sinal do produto de dois números inteiros. É o erro mais comum cometido pelos discentes e geralmente é cometido por aqueles que exercitaram poucas operações ou que já não resolvem essas operações há muito tempo e acabaram esquecendo como se faz.
Exemplos de erro (5): $(-2)\cdot(-7)=-14$; $(+3)\cdot(+5)=-15$.

Erro (6): ignora a multiplicação e realiza uma adição. O aluno que comete esse erro simplesmente ignora a operação de multiplicação, pois, hipoteticamente, é mais fácil para ele realizar uma adição.
Exemplos de erro (6): $(-2)\cdot(-7)=-9$; $(+3)\cdot(+5)=8$; $(-10)\cdot(+6)=-4$.

Erro (7): troca o sinal do quociente de dois números inteiros. Similar e pelas mesmas razões do Erro (v), esse tipo de erro também é comumente cometido por alunos que ainda não dominaram a resolução de operações com números inteiros.
Exemplos de erro (7): $(-12)\div(-4)=-3$; $(+132)\div(+11)=-12$.

Erro (8): ignora a divisão e realiza uma multiplicação por (-1). O aluno que comete esse erro simplesmente ignora a operação de divisão. Temos duas explicações simples para esclarecer o motivo da ocorrência desse erro: o primeiro é que o aluno confunde o sinal $(\div)$ com o sinal $(-)$ e, o segundo é que o discente, por não saber dividir, realiza a subtração por

ser a única possível e/ou a mais fácil para ele.
Exemplos de erro (8): $(-21) \div (-7) = -14$; $(+12) \div (+3) = 9$.

Para tirar a dúvida sobre qual das hipóteses que explicam o motivo da ocorrência do Erro (viii) o professor deve deixar bem claro que o sinal ($\div$) indica a divisão de dois números inteiros.

Com estes erros acreditamos estar justificado o motivo desta proposta, a seguir apresentamos a execução, viabilidade e simplicidade da nossa metodologia.

2 A proposta metodológica

Este estudo consiste numa proposta metodológica inovadora para a melhoria do ensino-aprendizagem das operações básicas envolvendo números inteiros. Essa metodologia de ensino é indicada como principal ou complementar e explora o uso de materiais concretos manipuláveis em sala de aula, baixo custo de confecção e atraentes aos olhos dos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática - indicam o uso de materiais concretos em sala de aula no ensino-aprendizagem dos conhecimentos matemáticos quando for possível. Lima (1998, p. 5) aponta que é importante relacionar os conteúdos matemáticos à realidade, ou seja, com o concreto, isso em vez de tratá-la em sala de aula de forma extremamente formal e desconectada do real.

Nossa proposta metodológica está dividida em objetivos, público alvo, pré-requisitos, materiais e tecnologias, recomendações metodológicas, dificuldades previstas, descrição geral e possíveis continuações ou desdobramentos da proposta metodológica. A metodologia do nosso trabalho não está descrita em um tópico inicial isolado e sim, dissolvida em todo o texto.

2.1 Objetivo geral

Propiciar ao aluno um desenvolvimento qualitativo e progressivo na resolução de operações fundamentais e problemas envolvendo números inteiros a partir do ensino-aprendizagem deste conteúdo matemático através de materiais concretos manuseáveis.

2.1.1 Objetivos específicos

Proporcionar ao aluno a internalização do significado dos números inteiros negativos através da ideia aritmética de completude e do manuseio de materiais concretos que permitem explorar tal ideia.

Propiciar ao aluno uma compreensão lógica e sem memorização de regras do motivo do produto de dois números inteiros negativos ser positivo, utilizando para tal a aritmética e o manuseio de materiais concretos.

Proporcionar ao aluno uma metodologia de ensino-aprendizagem diferenciada e inovadora que possibilita o manuseio de materiais concretos para aprender a resolver as quatro operações básicas da Matemática com números inteiros e desenvolver a capacidade de solucionar problemas matemáticos envolvendo tais números.

2.2 Público alvo

Recomendável para alunos do sétimo ano da Educação Básica (sexta série do Ensino Fundamental) ou para alunos dos anos posteriores da Educação Básica que apresentem dificuldade na realização de operações fundamentais envolvendo números inteiros.

Pela facilidade de assimilação do conhecimento estudado que essa metodologia propicia ela torna-se indicada até mesmo para alunos do quinto e do sexto ano da Educação Básica, desde que verificados os pré-requisitos e que não atrapalhe o andamento dos conteúdos previstos e planejados para o corrente ano.

2.3 Pré-requisitos

Considera-se essencial que os alunos destinados à aplicação dessa proposta saibam realizar as quatro operações fundamentais envolvendo números naturais, ou seja, os alunos devem saber somar, subtrair, multiplicar e dividir números naturais.

2.4 Materiais

Os materiais concretos utilizados nessa metodologia são pentes de ovos de galinha e bolinhas de pingue-pongue. Os pentes podem ser reciclados (já utilizados) desde que não estejam muito sujos, já as bolinhas podem ser de outro material desde que não seja pesado. As bolinhas de pingue-pongue também podem ser adquiridas em lojas de preço único, conhecidas como Lojas de um real e noventa e nove centavos.

Para que esses materiais fiquem mais atraentes aos olhos dos alunos indica-se que pinte tanto os pentes de ovos quanto as bolinhas. Nosso material concreto foi pintado de duas cores diferentes, sendo os pentes de ovos de vermelho e as bolinhas de verde. Caso verifique dificuldade ou impossibilidade de realizar a pintura do material concreto utilize o mesmo sem pintar, pois a ideia principal da nossa metodologia é a relação falta ou sobra bolinhas nos pentes e não as cores do material.

Os pentes de ovos devem ser cortados em unidades diferentes de espaços para ovos, isso é de suma importância para a aplicação da metodologia em sala de aula, pois cada espaço vazio de um pente será associado a uma unidade negativa e, em contrapartida, cada bolinha será associada a uma unidade positiva. Por exemplo: três espaços vazios do pente serão associados ao número -3 enquanto que oito bolinhas desalojadas serão associadas ao número 8. Esses blocos de espaços do pente facilitarão na aplicação da metodologia e no manuseio do material concreto pelos alunos. Neste texto, usaremos as palavras pente ou cartela, nos referindo a um pedaço de um pente de ovos cortado com um, dois, três etc., espaços vazios.

O quadro ”negro”e giz ou quadro branco e pincel são necessários para a aplicação da metodologia e servirão para realizar a transposição da ideia que explora o material concreto para a concepção formal escrita. Recomenda-se que utilize cores diferentes de giz ou pincel, se for o caso, se as cores forem as mesmas das cores dos pentes e bolinhas pintados, melhor ainda.

Não há uma recomendação específica sobre a disposição dos alunos na sala de aula, sendo assim, aplique a metodologia como acreditar ser mais ergonômico.

2.5 Recomendações metodológicas

Dedique pelo menos duas aulas de 50 minutos à aplicação da metodologia proposta, na primeira se trabalhará adição e subtração e, na segunda, multiplicação e divisão. É imperativo que seja dedicado um tempo maior para a subtração e a multiplicação, isso se deve ao fato de que compreender essas duas operações envolvendo inteiros negativos exige mais atenção dos alunos.

A recomendação de duas aulas de 50 minutos é o tempo mínimo para exposição da metodologia, isso é devido ao fato que há grades curriculares diferentes dependendo de onde esteja, mas quando a relação tempo/grade for mais flexível, então será interessante que seja dedicado um tempo maior à aplicação da metodologia.

A cada exemplo utilizando o material concreto faça uma associação no quadro, isso facilitará que o aluno internalize o conhecimento lecionado.

Se não houver material concreto para todos os alunos manipularem ao mesmo tempo, deixe parte desse material preferencialmente para os alunos que apresentarem dificuldades de compreensão, para que eles possam ter maior interação com os mesmos.

2.6 Dificuldades previstas

Os alunos podem se interessar pelo material antes de iniciar a aula, então não o apresente antes que estejam todos devidamente posicionados em sala, caso contrário, pode haver um alvoroço e perda do tempo de aula.

Dificuldades corriqueiras podem acontecer, apesar de que o apelo ao material concreto torna a aula diferente da normalidade e, consequentemente, mais atraente.

2.7 Descrição geral

A aplicação da metodologia deve ser precedida de uma aula introdutória acerca dos números inteiros explicando-se, por exemplo, que povo os inventou, onde e como eles são utilizados em nosso cotidiano. Dar exemplos de uma temperatura que está abaixo de zero ou um saldo de conta bancária devedor podem ser representados por números negativos, auxiliará na compreensão e aceitação, pelos alunos, que é útil o conhecimento acerca dos números inteiros. Além desses exemplos citados há inúmeras outras utilidades para os números negativos como: mudança de direção; desaceleração de um corpo em movimento; coordenadas; posição abaixo do nível do mar etc., nesse caso dependerá de cada professor o quanto ele deseja aprofundar na importância dos números negativos em nosso tempo. É possível realizar uma introdução do tipo com uma aula de 50 minutos e, no final da mesma, lançar o seguinte desafio: até o momento todos sabem resolver com facilidade a operação $13 - 7$, mas como resolvemos a operação $7 - 13$? Possivelmente um ou mais alunos responderá(ão) corretamente de imediato, mas geralmente isso não ocorre.

Inicie a aula apresentando o material confeccionado aos alunos, como por exemplo, os da Figura 1, peça para eles pensarem da seguinte maneira: cada espaço vazio dos pentes de ovos representa uma unidade negativa (-1) e cada ovo (bolinha de pingue-pongue) representa uma unidade positiva $(1 = +1)$. Não utilize demasiadamente os inteiros positivos precedidos do símbolo de adição principalmente nos resultados de operações aritméticas $(+4, +26, +2093)$, pois alguns alunos poderão acreditar que estes números precedidos do sinal de adição $(+1, +2, +3, ...)$ são elementos diferentes dos naturais não nulos $(1, 2, 3, ...)$ que ele já conhece desde a Educação Infantil. Sendo assim, deixe bem claro que $+1 = 1, +2 = 2, +3 = 3, ...$ e vice versa. No caso de expressões do tipo $3 - (3 - 7) = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7$ é evidente que deve-se usar o número $+4$.

O próximo passo será apresentar aos alunos a ideia de completude relacionada ao zero, ou seja, se não sobra e nem falta ovos nos pentes então aquela situação poderá ser representada matematicamente pelo zero (0) como, por exemplo, nas figuras 2, 3 e 4, em que representamos, respectivamente, um pente cheio com 3, 8 e 36 ovos (bolinhas). Note que a utilização desse material permite infinitas maneiras concretas de representar o zero, mesmo sabendo que não há material suficiente para a representação de pentes com número grande de espaços.

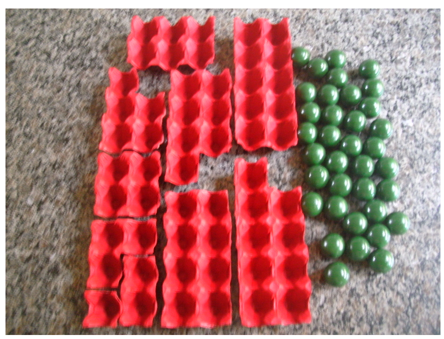

Figura 1: Material concreto.

Para mostrar a simplicidade de compreensão proposta apresentaremos a seguir como resolver $2 - 7$ (Figura 5), $-4 + 5$ (Figura 6), $-3 - 6$ (Figura 7) ou $-2 + 9 - 5$ (Figura 8) a partir do uso do material.

Figura 2: Primeiro exemplo de completude (zero).

Para fazer a operação $2-7$ pegue um pente com sete espaços vazios (que representa o número -7), e em seguida colocamos duas bolinhas que representam o número 2. Após este processo, quantos espaços vazios restaram no pente? Teremos cinco espaços vazios e como cada espaço vazio representa uma unidade negativa, então o resultado da operação será o número -5. A

Figura 3: Segundo exemplo de completude (zero).

Figura 4: Terceiro exemplo de completude (zero).

figura 5 a seguir, apresenta uma forma de como ficou a representação do procedimento.

De forma análoga ao procedimento anterior, temos que para realizar a operação $-4 + 5$ toma-se um pente com quatro espaços vazios, apresentando-o aos alunos e associando-o ao número -4, em seguida pegue cinco bolinhas, que representam o número $+5$, e coloque quatro delas nos quatro espaços vazios do pente utilizado. Depois deste procedimento, pergunte aos alunos se sobrou(aram) bolinha(s) desalojada(s) ou espaço(s) vazio(s) no pente. Teremos uma bolinha desalojada e como cada bolinha representa uma unidade positiva, então o resultado da operação será o número 1. Abaixo temos a figura 6 que ilustra o processo realizado.

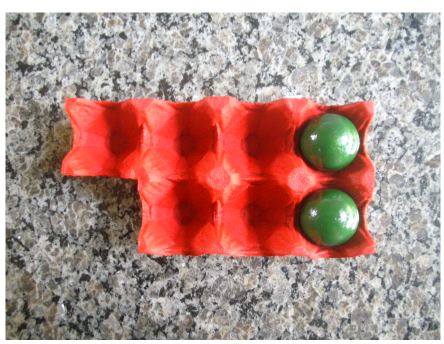

Figura 5: $2 - 7 = -5$.

É importante observar que o resultado da operação apresentado na figura 6 é 1 e não 10. Para fazer a operação $-3 - 6$ pegue um pente com três espaços vazios, que representa o número -3, e em seguida pegue um pente com seis espaços vazios, este por sua vez fará o papel do número -6. Coloque lado a lado, os dois pentes utilizados e pergunte aos alunos se

Figura 6: $-4 + 5 = 1$.

está faltando ou sobrando bolinhas nos pentes. Obteremos da manipulação do material, nove espaços vazios de pentes de ovos e como cada espaço vazio representa uma unidade negativa, então o resultado da operação será o número -9. Na figura 7 a seguir, está apresentada, uma forma, de como ficou o procedimento realizado.

Da mesma maneira que foi mostrado nos procedimentos anteriores, temos que para fazer a operação $-2+9-5$ pegue um pente com dois espaços vazios (que representam o número -2), em seguida tome nove bolinhas (que representam o número $+9$) e, para representar o número -5, pegue um pente com cinco espaços vazios. Utilize as bolinhas para ocupar os espaços vazios dos dois pentes utilizados aqui, uma bolinha em cada espaço, depois disso, peça que os alunos observem se estão faltando ou sobrando bolinhas nos espaços dos pentes. Neste exemplo, teremos duas bolinhas desalojadas e como cada bolinha desalojada representa uma unidade positiva, então o resultado da operação será o número 2. Abaixo temos a figura 8 que ilustra o processo realizado.

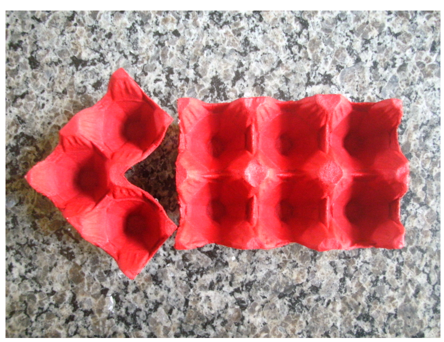

Figura 7: $-3 - 6 = -9$.

É nesse momento da aula que o professor deve verificar o grau de convencimento da metodologia aplicada e, fazendo algumas perguntas operacionais no quadro, poderá notar uma participação mais maciça dos alunos.
Durante a explicação é importante associar a situação concreta com a representação matemática da mesma no quadro, isso vai consolidar o aprendizado.

Dê quantos exemplos achar necessário e permita que o material seja manipulado sempre que houver interesse e necessidade do aluno "fazer para crer". Muitos discentes precisam dessa experiência concreta para internalizar o conhecimento apresentado.

Figura 8: $-2 + 9 - 5 = 2$.

Passe aos alunos uma lista de exercícios para que tentem fazer em sala, pois exercitar o que foi absorvido é muito importante para o real aprendizado e, a realização de exercícios durante a aula, é o melhor momento para que o professor verifique quais alunos ainda não compreenderam o conhecimento apresentado. O Anexo I deste trabalho, cujo endereço eletrônico se encontra nas referências, é uma proposta de atividade para ser aplicada durante a aula.

Deixe a multiplicação e a divisão de inteiros para serem trabalhadas na segunda aula, pois após a primeira aula, os alunos terão mais habilidade para operar com o material e assim vai facilitar a compreensão das mesmas.

Inicie a segunda aula relembrando rapidamente o que fora trabalhado na aula anterior e em seguida apresente, aritmeticamente, no quadro os fatos descritos a seguir, utilizando e, ao mesmo tempo, manipulando o material concreto com o intuito de propiciar a compreensão das ideias.

Adicionar um número positivo é o mesmo que acrescentar (colocar) esse número de bolinhas: $+(+3) = 3$. Na figura 9, à esquerda, está ilustrado, por exemplo, o número zero (representado pelos pentes completos sem faltar e nem sobrar bolinhas) e a da direita, a operação $+(+3) = 3$. Lembrando que o zero pode ser representado por um pente com qualquer quantidade de espaços desde que estejam ocupados por bolinhas.

Adicionar um número negativo é o mesmo que acrescentar (colocar) esse número de espaços vazios de pentes de ovos: $+(-7) = -7$. A Figura 10, à esquerda, ilustra, por exemplo, o número zero (representado pelos pentes completos sem faltar e nem sobrar bolinhas) enquanto a da direita, representa a operação $+(-7) = -7$.

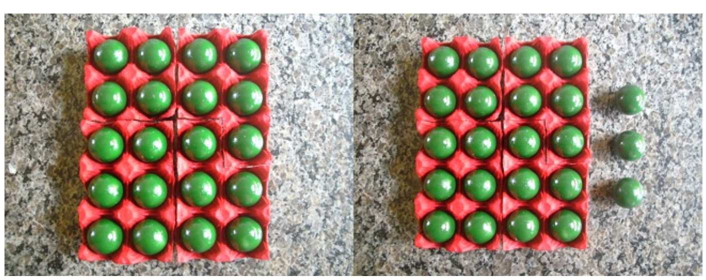

Figura 9: $+(+3) = 3$.

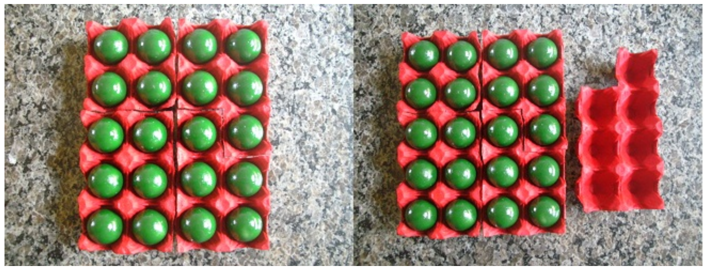

Figura 10: $+(-7) = -7$.

Subtrair um número positivo é o mesmo que retirar esse número de bolinhas de pingue-pongue da completude, ou seja, retirar esse número de ovos de um pente de ovos cheio: $-(+4) = -4 = +(-4)$. A Figura 11 ilustra um exemplo dessa operação, à esquerda temos a completude, ou seja, o número zero e, à da direita, está representada a operação $-(+4) = -4$. Observe que neste caso, antes de efetuar a operação, o pente cheio ou o conjunto de pentes cheios deve ser de no mínimo quatro espaços com bolinhas.

Lembrando que o professor precisa, à medida que ilustre essas operações utilizando o material, deve também registrá-las no quadro.

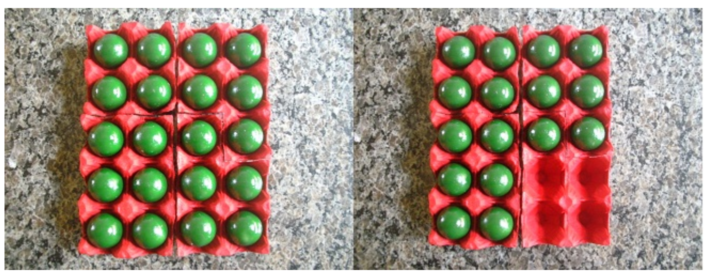

Figura 11: $-(+4) = -4$.

Mesmo que apresentamos até aqui somente três exemplos para ilustrar as três operações anteriores, se o professor julgar necessário deve apresentar mais exemplos até que fique claro aos alunos essas operações.

Subtrair um número negativo é o mesmo que retirar esse número de espaços vazios de pentes de ovos da completude, sendo assim, ao retirar os espaços vazios de pentes de ovos da completude sobrarão ovos desalojados: $-(-8) = 8$. A Figura 12 ilustra um exemplo dessa operação, à esquerda temos a completude, ou seja, o número zero e, à da direita, está representa a operação $-(-8) = 8$. Note que também neste caso, antes de efetuar a operação, a cartela completa ou o conjunto cartelas completas, como na parte esquerda da figura, deve ser de no mínimo oito bolinhas.

Obs.: o professor deve esclarecer ao aluno que $-(-8)$ é o mesmo que $(-1) \cdot (-8)$.
Vamos efetuar a operação $-(-11)$? A Figura 13 ilustra um exemplo dessa operação, à esquerda temos a completude, ou seja, o número zero e, à direita está representada a operação $-(-11) = 11$. Note que também neste caso, antes de efetuar a operação, o pente cheio ou o conjunto de pentes cheios, como apresentado na figura, deve ser de no mínimo onze espaços com bolinhas.

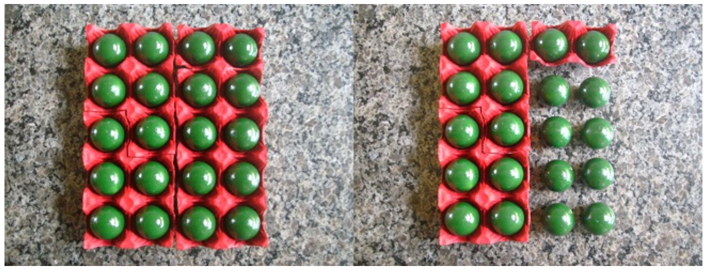

Figura 12: $-(-8) = 8$.

Obs.: o professor deve esclarecer ao aluno que $-(-11)$ é o mesmo que $(-1) \cdot (-11)$.

Figura 13: $-(-11) = 11$.

Agora vamos analisar o resultado da operação $(+2) \cdot (-3) = (2) \cdot (-3)$.

Multiplicar $(+2)$ por (-3) é o mesmo que adicionar duas vezes três espaços vazios de pentes de ovos à completude (zero), com isso temos que o resultado (produto) obtido é seis espaços vazios de pentes de ovos, que por sua vez, representam seis unidades negativas. A figura 14 representa uma maneira de realizar esta operação. À esquerda da figura temos a completude, ou seja, o número zero e, à direita está representada a operação $(+2) \cdot (-3) = -6$.

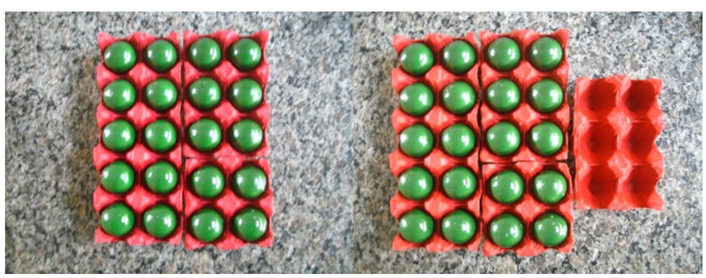

Figura 14: $(+2) \cdot (-3) = -6$.

Qual será o resultado da operação $(-4) \cdot (+3) = (-4) \cdot (3)$?

Multiplicar (-4) por $(+3)$ é o mesmo que subtrair quatro vezes três bolinhas da completude (zero), com isso temos que o resultado (produto) obtido é doze espaços vazios de pentes de ovos e como cada espaço vazio de pente de ovos representa uma unidade negativa temos que o produto será igual a -12. A figura 15 ilustra uma forma de realizar esta operação utilizando o material concreto. No lado esquerdo da figura temos a completude, e no lado direito está a representação da operação $(-4) \cdot (+3) = -12$.

Não vamos exemplificar operações como $(+4) \cdot (+3)$, $(2) \cdot (+5)$ ou $(+5) \cdot (3)$, pois o aluno do sétimo ano, e até mesmo do quarto, quinto e sexto anos da Educação Básica já está bem acostumado a realizá-las. Fica a critério do professor aplicador da metodologia dar exemplos desses tipos de operações.

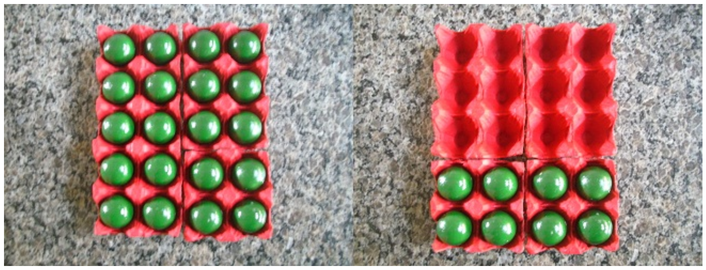

Figura 15: $(-4) \cdot (+3) = -12$.

Lembre-se que o resultado de uma operação é sempre o número de espaços vazios nos pentes ou a quantidade de bolinhas desalojadas.

A partir das operações $(-1) \cdot (-8)$ e $(-1) \cdot (-11)$, vamos apresentar mais dois exemplos de como a multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número positivo.

Qual o resultado da operação $(-2) \cdot (-5)$?

Multiplicar (-2) por (-5) é o mesmo que subtrair duas vezes cinco espaços vazios de pentes de ovos da completude (zero), sendo assim, o resultado (produto) obtido é duas vezes cinco ovos (bolinhas) desalojados, ou seja, dez bolinhas desalojadas. A figura 16 representa uma maneira de realizar esta operação. Observe que neste caso, antes de efetuar essa operação, o pente cheio ou o conjunto de pentes cheios, como na figura, deve ser de no mínimo dez espaços com bolinhas (que é o resultado de $(-2) \cdot (-5)$).

Por exemplo, o que vem a resultar de $(-3) \cdot (-8)$?

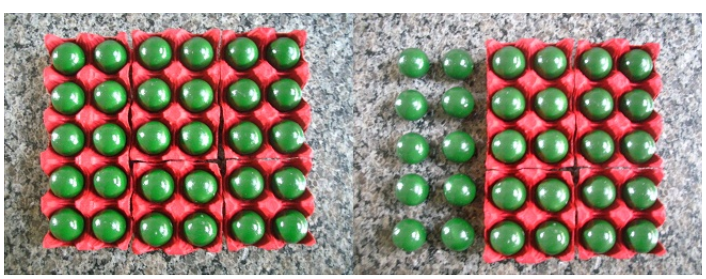

Figura 16: $(-2) \cdot (-5) = 10$.

Fazer a operação (-3) vezes (-8) é o mesmo que subtrair, ou seja retirar, três vezes oito espaços vazios de pentes de ovos da completude (zero), sendo assim, o resultado (produto) obtido é três vezes oito ovos (bolinhas) desalojados, isto é vinte e quatro bolinhas desalojadas. Em outras palavras $(-3) \cdot (-8) = 24$. Note que antes de efetuar essa operação, o pente cheio ou o conjunto de pentes cheios, como na figura, deve ser de no mínimo vinte e quatro espaços com bolinhas (que é o resultado de três vezes oito). Existem pentes de ovos comerciais para alojar até trinta ovos. A figura 17 ilustra como fica o procedimento dessa operação.

Lembramos aqui que o professor precisa, à medida que ele ilustre essas operações utilizando o material deve também registrá-las no quadro.

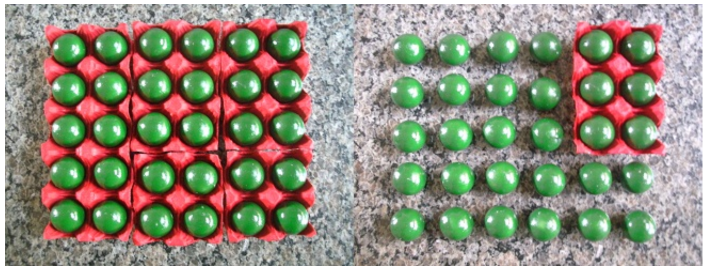

Figura 17: $(-3) \cdot (-8) = 24$.

Embora tenhamos neste trabalho apresentado somente quatro exemplos de multiplicação de dois números inteiros negativos $((-1) \cdot (-8)$, $(-1) \cdot (-11)$, $(-2) \cdot (-5)$, $(-3) \cdot (-8))$, se o professor julgar necessário deve apresentar mais exemplos até que fique claro aos alunos que o produto de dois números negativos é positivo.

Nosso objetivo ao utilizar o material concreto é que o aluno assimile as operações com números inteiros tratadas aqui. Uma vez que o aluno internalizou essas propriedades, o material concreto não deve mais ser utilizado, isto está de acordo com Brasil (1998) e também com Minas Gerais (2008).

A partir desse ponto, a divisão de números inteiros pode ser apresentada como operação inversa da multiplicação, a potenciação de números inteiros a partir da multiplicação e, a radiciação de números inteiros, como a operação inversa da potenciação.

Sugerimos novamente que seja passada para os alunos uma lista de exercícios como na primeira aula. Os Anexos II e III deste trabalho, cujo site está disponibilizado nas referências, são propostas de atividades para serem aplicadas durante a segunda aula e/ou como exercícios complementares.

2.8 Possíveis continuações e desdobramentos

Acreditamos que a partir desta proposta possam surgir outras ideias de melhoramento e utilização da mesma.

O aperfeiçoamento da nossa proposta metodológica e a realização de uma pesquisa de campo de caráter exploratório utilizando a presente metodologia, seriam continuações pertinentes.

3 Considerações finais

Acreditamos que a presente proposta metodológica de ensino-aprendizagem contribuirá para a valorização da compreensão de ideias matemáticas em detrimento do uso da memorização de regras, fórmulas, quadrinhas, paródias etc., para ensinar matemática.

O uso de material concreto e da aritmética ao lecionar as operações fundamentais com números inteiros a alunos do sétimo ano da Educação Básica fará com que o aluno participe mais na aula, pois do primeiro ao sexto ano eles estão acostumados com a aprendizagem a partir do concreto e familiarizados com as operações aritméticas.

Sabemos do potencial da metodologia proposta, mas também temos ciência que ela não é a panaceia para acabar com as dificuldades dos alunos perante assimilação do conteúdo matemático citado neste trabalho. A atitude do professor é fundamental para o sucesso da aplicação dessa proposta.

Nossa crença nesta proposta se dá ao fato dela já ter sido aplicada em turmas de sétimos, oitavos e nonos anos da Educação Básica, em aulas particulares de reforço para alunos de níveis de instrução variados e a alunos do sexto ano com aptidões matemáticas acima do comum.

Opiniões e críticas ao nosso trabalho serão muito bem vindas.

Referências Bibliográficas

ANEXOS I, II E III. Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/=
=File/profmat/anais/t2011/anexo_tcc06.pdf>.

BOYER, Carl B.. *História da matemática.* Revista por: Uta C. Merzbach. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Título original: A history of mathematics.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998, 148 p..

CÁUCULO: matemática para todos. São Paulo: Editora Segmento, a. 2, n. 18, jul. 2012.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução: Higino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. Título original: An introduction to the history of mathematics.

LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias.* 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. (Coleção do Professor de Matemática)

MENENDEZ, Ramon; MUSCA, Tom. *O preço do desafio.* Direção: Ramon Menendez. Hollywood: Warner Bros. Pictures, 1988. 1 DVD (103 min.), son., color., dolby, 4X3 fullscreen. Legendas em inglês (língua original), português e espanhol. Título original: Stand and deliver.

MINAS GERAIS. Proposta Curricular da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais: Conteúdos Básicos Comuns (CBCs), 2008.