Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Sobre o Teorema da Função Inversa

Leandro Tezoto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

2014

514 Tezoto, Leandro
T356s Sobre o Teorema da Função Inversa / Leandro Tezoto. - Rio Claro, 2014.
35 f.: il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Ricardo Parreira da Silva

1.Topologia. 2.Análise. 3.Contração. 4.Ponto Fixo de Banach. 5.Teorema do Valor Médio. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Leandro Tezoto
Sobre o Teorema da Função Inversa

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva
Orientador

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
IGCE - UNESP

Prof. Dr. Rodrigo Martins
Departamento de Matemática - UEM

Rio Claro, 26 de Setembro de 2014

Aos meus pais,
Dervile e Vanilde (in memoriam).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela minha vida e por ter me dado paz, perseverança e força nos momentos de maior dificuldade, onde algumas vezes pensei em desistir.

Agradeço minha mãe Vanilde Gianotto Tezoto (*in memoriam*) por ter me dado a base para a minha formação como cidadão, ao meu pai Dervile Modolo Tezoto, que desde minha infância cumpriu perfeitamente o papel de pai e muitas vezes o de mãe, nunca deixando faltar nada para nossa família, e especialmente apoiando-me e acreditando em meu potencial, ao meu irmão por sempre acreditar em mim e a minha madrasta, pelo companheirismo e gratidão.

A minha noiva Flávia Rosa Dias, por me acompanhar durante todo este período, pelo incentivo, compreensão, encorajamento e por estar sempre ao meu lado me dando forças e me apoiando.

Aos meus familiares, em especial meu saudoso tio Lupércio Bordini, que foi quem me inspirou a seguir na área da Matemática, me mostrando durante minha infância agilidade com contas e truques com números e baralhos.

Aos meus parceiros de mestrado Denis Vanucci Gisoldi e Maurício Evandro Eloy, pelas inúmeras horas de estudos, por dividirmos os momentos de ansiedade e pelas boas risadas durante os almoços.

Aproveito também para agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva pela orientação e paciência.

Aos demais professores da UNESP pela dedicação e incentivo, em especial a Profª. Drª. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato pelas palavras de incentivo nos momentos mais difíceis.

"Imagine uma nova história para a sua vida,
e acredite nela."
Paulo Coelho

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema da Função Inversa e algumas aplicações na resolução de equações. O caminho que seguimos para a demonstração do Teorema da Função Inversa foi através de um Teorema de Perturbação da Identidade, que por sua vez, é uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isso fazemos um estudo de elementos básicos dos espaços métricos e cálculo em espaços de Banach.

Palavras-chave: Topologia, Análise, Contração, Ponto Fixo de Banach, Teorema do Valor Médio.

Abstract

The aim of this work is to present the Inverse Function Theorem as well some applications on the existence of solution for equations. The demonstration of the Inverse Function Theorem is given by a identify perturbation theorem, which is a consequence of the Banach point fix Theorem. In order to prove such results, we present some basics elements of metric spaces and calculus in Banach spaces.

Keywords: Topology, Analysis, Contraction, Banach's fixed-point, Mean Value Theorem.

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho apresentaremos elementos de topologia geral que serão usados como ferramentas para mostrar a inversão de uma função em determinada vizinhança.

No primeiro capítulo trabalharemos com algumas noções básicas, como definição de métrica e espaços métricos.

Em seguida enunciaremos o Teorema do Valor Médio, Contração e Teorema do Ponto Fixo de Banach, seguidos de alguns exemplos.

Por fim, demonstraremos o Teorema da Função Inversa seguido por exemplos de equações não lineares onde garantiremos a existência de solução.

Este trabalho é uma continuação do estudo feito na referência [5].

2 Elementos dos Espaços Métricos

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e resultados elementares sobre a topologia dos espaços métricos que usaremos nas seções seguintes.

Definição 2.1. Seja M um conjunto não vazio. Uma distância ou métrica em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, satisfazendo:

i) $d(x, y) \geqslant 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;

iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$ *(desigualdade triangular).*

O par (M, d) onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M, é chamado um *espaço métrico.*

Exemplo 2.1. O conjunto dos números $\mathbb{R}$ juntamente com a métrica $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. A métrica d é chamada de *métrica usual de* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2. Seja $M = \mathbb{R}^n$, o conjunto formado por todas as n-uplas de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pontos arbitrários de $\mathbb{R}^n$, mostraremos a seguir que as três funções abaixo definem métricas sobre $\mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$
$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$
$$d''(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

A métrica d é chamada de *métrica euclidiana* e induz a distância usual entre dois pontos no espaço.

Para mostrarmos as três condições da definição, vamos estabelecer primeiro a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* no $\mathbb{R}^n$:

Lema 2.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ são números reais arbitrários, então*

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

Demonstração. A desigualdade $2rs \leqslant r^2+s^2$ é verdadeira para quaisquer $r,s\in\mathbb{R}$ uma vez que $(r-s)^2 = r^2-2rs+s^2 \geqslant 0$. Assim, se fizemos $p=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ e $q=\sqrt{y_1^2+\ldots\ y_n^2}$, é verdadeira a relação:

$$2\cdot\frac{|x_i|}{p}\cdot\frac{|y_i|}{q} \leqslant \frac{x_i^2}{p^2}+\frac{y_i^2}{q^2}$$

para qualquer $1\leqslant i\leqslant n$. Somando em relação ao índice i teremos

$$\frac{2}{p.q}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant 1+1$$

e portanto

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant p\cdot q = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}.$$

como queríamos. $\square$

Agora podemos provar que a função d satisfaz a desigualdade triangular.

De fato, sejam $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$ e $z=(z_1,\ldots,z_n)$ pontos de $\mathbb{R}^n$, então:

$$[d(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \ = \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2 =$$

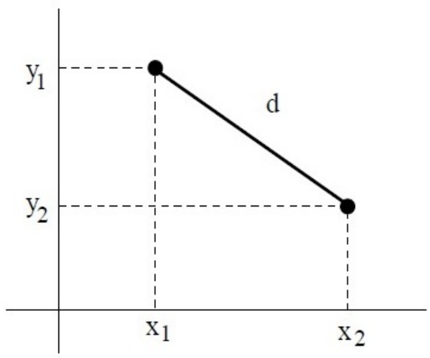
$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 =$$

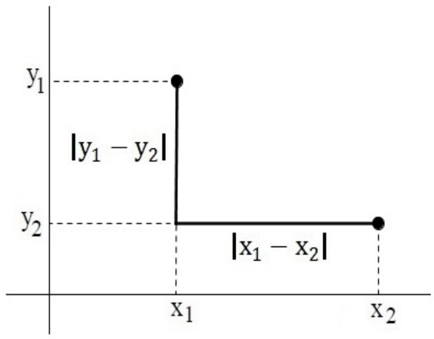
$$= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-zi)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}\right]^2 = [d(x,z)+d(z,y)]^2$$

donde tem-se $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

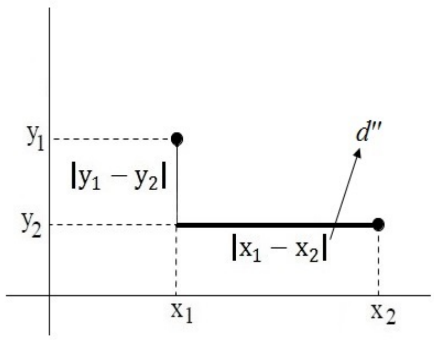
Geometricamente, no plano $\mathbb{R}^2$, a métrica $d(x,y)$ representa a distância euclidiana entre os pontos x e y.



Por sua vez, a métrica $d'(x, y)$, no espaço $\mathbb{R}^n$ é a soma das distâncias em cada direção. A figura abaixo mostra um exemplo geométrico em $\mathbb{R}^2$.

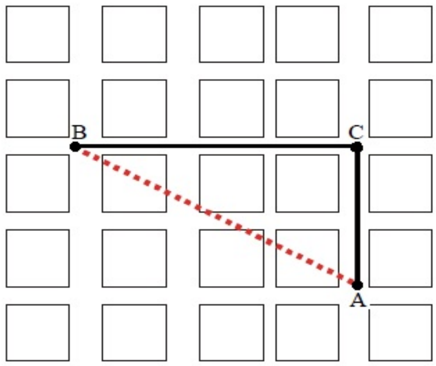


Por fim, a métrica $d''(x, y)$ calcula a distância entre dois pontos considerando a maior distância entre as distâncias em todas as direções. A figura abaixo mostra um exemplo geométrico em $\mathbb{R}^2$.



O exemplo a seguir, conhecido como *Geometria do Taxista* é um exemplo real da métrica $d'(x, y)$.

Exemplo 2.3. De acordo com a figura abaixo, suponhamos um motorista de táxi que apanha um cliente no ponto A e este lhe diz que irá ao local representado pelo ponto B.



O motorista não pode percorrer o caminho direto de A para B. Uma das opções é ir primeiro ao ponto C, e depois seguir para B. A distância percorrida é portanto, determinada pela métrica $d'(x, y)$.

Sejam $A = (x_a; y_a)$ e $B = (x_b; y_b)$ os pontos de origem e destino, respectivamente. A distância entre A e B, através da *Geometria do Taxista* é dada por:

$$d'(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Definição 2.3. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

i) A bola aberta de centro a e raio r,

$$B_d(a, r) := \{x \in M, d(x, a) < r\}$$

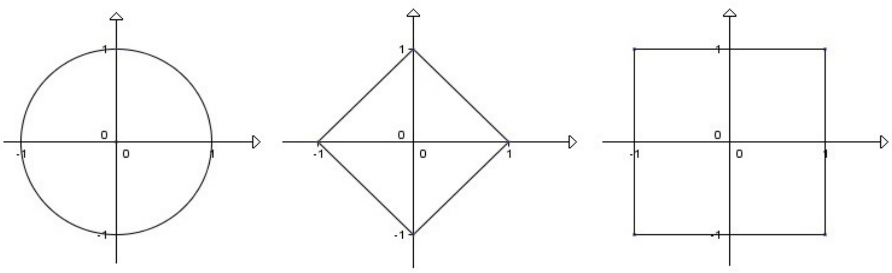
ii) A bola fechada de centro a e raio r,

$$B_d[a, r] := \{x \in M, d(x, a) \leqslant r\}$$

iii) A esfera de centro a e raio r,

$$S_d(a, r) := \{x \in M, d(x, a) = r\}$$

Exemplo 2.4. Sejam $M = \mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)$ e $r = 1$.
As esferas $S_d((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (0, 0)) = 1\}$ relativas às métricas d, d' e d'' do exemplo 2.2, possuem respectivamente as formas dadas na figura abaixo



De fato, para a métrica d temos $d((x,y),(0,0)) = 1 \Rightarrow d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$, ou seja, a expressão de uma circunferência de centro $0,0$ e raio $r = 1$.

Para a métrica d' temos $|x-0|+|y-0| = 1 \Rightarrow |x|+|y| = 1$, ou seja, um quadrado de diagonais paralelas aos eixos coordenados de comprimento igual a 2. Basta analisarmos os casos:

i) $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0 \Rightarrow x+y = 1$

ii) $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0 \Rightarrow x-y = 1$

iii) $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0 \Rightarrow -x+y = 1$

iv) $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0 \Rightarrow -x-y = 1$

Para a métrica d'' temos que $max\{|x-0|,|y-0|\} = 1 \Rightarrow max\{|x|,|y|\} = 1$, que geometricamente será um quadrado com lados paralelos aos eixos coordenados com comprimento igual a 2. Verificaremos analisando os casos:

i) Se o máximo é $|x|$, então $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$ e $|y| \leqslant |x| = 1 \Rightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1$, o que nos dará os lados paralelos ao eixo das ordenadas.

ii) Se o máximo é $|y|$, então $|y| = 1 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -1$ e $|x| \leqslant |y| = 1 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$, o que nos dará os lados paralelos ao eixo das abscissas.

Definição 2.4. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $x \in X$ é *ponto interior* de X, se existe $r > 0$ tal que $B_d(x,r) \subset X$.

O conjunto X é um *conjunto aberto* de M, se todos os seus pontos são interiores.

Proposição 2.5. Seja (M,d) um espaço métrico. Então:

i) $\emptyset$ e M são subconjuntos abertos de M.

ii) Se $A_1,...,A_n$ são subconjuntos abertos de M então $A_1 \cap ... \cap A_n$ é aberto de M.

iii) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}, A_\lambda$ aberto de M então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto de M.

Demonstração.

i) $\emptyset \subset M$ e $\emptyset$ é aberto por vacuidade. Quanto a M, toda bola de centro em $x \in M$ é um subconjunto de M, por definição.

ii) Seja $x \in A_1 \cap ... \cap A_n$. Para cada $i \in \{1,2,...,n\}$ existe $r_i > 0$ tal que $B_d(x,r_i) \subset A_i$. Seja $r = min\{r_1,...,r_n\}$. Segue que $B_d(x,r) \subset A_1 \cap ... \cap A_n$ e portanto $A_1 \cap ... \cap A_n$ é aberto.

iii) Seja $x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então $x \in A_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset A_{\lambda_0}$. Logo $B_d(x, r) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e portanto $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto.

□

2.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 2.6. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é uma *contração* se existe uma constante $0 \leqslant c < 1$, tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$

$$d_Y(f(x_1), (fx_2)) \leqslant c\, d_X(x_1, x_2).$$

Dizemos que c é uma *constante de contração* de f. Quando $Y = X$, dizemos que f é uma *contração* de X.

Exemplo 2.5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda cos(x)$, onde $0 < \lambda < 1$. Vejamos que essa função é uma contração.

Primeiramente relembremos a seguinte versão do Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.1. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b). Então, existe um real $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Agora voltemos ao exemplo.

Dados $x < y$, segue do Teorema do Valor Médio que $cos(x) - cos(y) = f'(t)(x - y)$, para algum $t \in (x, y)$. Então, $|cos(x) - cos(y)| = |-sen(t)|.|x - y| \leqslant |x - y|$, pois $|-sen(t)| \leqslant 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

À partir disso, basta verificarmos que:

$$d(f(x), f(y)) = d(\lambda cos(x), \lambda cos(y)) = \lambda|cos(x) - cos(y)| \leqslant \lambda|x - y| = \lambda d(x, y),$$

comprovando, de fato, que f é uma contração.

Exemplo 2.6. Considere agora a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\ln(1 + e^x)$, adotando a métrica usual.

Sabendo que $|f'(t)| = \left|-\dfrac{e^t}{1 + e^t}\right|$, e utilizando o Teorema do Valor Médio, temos:

$d(f(x), f(y)) = d(-\ln(1+e^x), -\ln(1+e^y)) = |-\ln(1+e^x) + \ln(1+e^y)| =$
$\left|-\dfrac{e^t}{1+e^t}\right| .|x-y| = \left|-\dfrac{e^t}{1+e^t}\right| .d(x,y),$

e como $0 \leqslant \dfrac{e^t}{1+e^t} < 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$, segue que f é uma contração.

Exemplo 2.7. Mostre que a função $f(x) = x - arctg(x)$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ é uma contração.

Utilizaremos novamente o Teorema do Valor Médio e a derivada $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

$d(f(x), f(y)) = |x - arctg(x) - y + arctg(y)| = \left|\dfrac{t^2}{t^2+1}\right| .|x-y|$

e como $0 \leqslant \left|\dfrac{t^2}{t^2+1}\right| < 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$, segue que f é uma contração.

Definição 2.7. Dizemos que uma sequência $x : \mathbb{N} \to M$ de um espaço métrico M é *convergente* para $x \in M$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$ temos $d(x_n, x) < \epsilon$.

Uma sequência x_n de um espaço métrico é uma *sequência de Cauchy* se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m > n_0$ temos $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Dizemos que um espaço métrico é *completo* se toda sequência de Cauchy for convergente.

Teorema 2.2. *(Teorema do Ponto Fixo de Banach). Sejam X um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração. Então:*

i) existe um e um só $\overline{x} \in X$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$;

ii) qualquer que seja $x_1 \in X$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = f^n(x_1)$, converge a $\overline{x}$;

iii) para todo n, temos $d(x_n, \overline{x}) \leqslant c^{n-1} d(x_1, x_2)/(1-c)$, onde c é uma constante de contração de f e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência definida em ii).

Para a prova deste resultado sugerimos ao leitor a referência [5] ou [1].

3 Espaços Normados

Neste capítulo consideramos espaços métricos que possuem estrutura de soma e multiplicação por escalar, os espaços normados. Nestes espaços podemos estudar estruturas similares ao do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.1. Dado um espaço vetorial E sobre o corpo K (K $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), uma *norma* sobre E é uma aplicação $x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:

i) para todo $x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$;

ii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in K$ e $x \in E$;.

Um espaço vetorial munido de uma norma se chama *espaço normado*. Num espaço normado a função $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica e consideramos sempre o espaço normado munido desta métrica. Um espaço normado completo se chama *espaço de Banach*.

Exemplo 3.1. Sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, a função

$$\lambda \in \mathbb{C} \mapsto |\lambda| \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma. Portanto $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ é um espaço normado. E do fato de $\mathbb{R}$ ser completo, segue que $\mathbb{C}$ é completo.

Definição 3.2. Sejam E e F espaços vetoriais sobre o corpo K. Dizemos que uma aplicação $T : E \to F$ é linear se $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$, para todos $x, y \in E$ e $\lambda \in K$.

Teorema 3.3. Sejam $(E, ||.||_E)$ e $(F, ||.||_F)$ espaços normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes propriedades:

a) T é contínua.

b) T é contínua na origem;

c) $sup_{||x|| \leqslant 1} ||T(x)||_F < \infty$;

d) existe um ponto $x_0 \in E$ e $a > 0$ tal que T é limitada na bola $B_d[x_0, a]$;

e) existe $M \geqslant 0$ tal que $||T(x)||_F \leqslant M||x||_E$ para todo $x \in E$:

Demonstração.

a) $\Rightarrow$ *b)* : Se T é contínua então T é contínua na origem.

b) $\Rightarrow$ *c)* : Sendo T contínua na origem, existe $\delta > 0$ tal que $||x||_E < \delta$ implica $||T(x)||_F < 1$ e, por homogeneidade temos, $||x||_E < 1$ implica $||T(x)||_F < 1/\delta$

c) $\Rightarrow$ *d)* : se $||x||_E \leqslant 1$ implica $||T(x)||_F \leqslant M$, então $x \in B_d[x_0, a]$ implica $||x||_E \leqslant a + ||x_0||_E$ e, portanto, $||T(x)||_F \leqslant M(a + ||x_0||_E)$

d) $\Rightarrow$ *e)* : seja $||T(x)||_F \leqslant L$, para todo $y \in B_d[x_0, a]$; então $||T(x)||_F \leqslant 2L\dfrac{||x||_E}{a}$ para todo $x \in E$, pois, dado $x \neq 0$, temos

$$y = x_0 + \frac{a}{||x_0||_E} x \in B_d[x_0, a]$$

e, de $T(y) = T(x_0) + \dfrac{a}{||x||_E} T(x)$, segue que

$$T(x) = \frac{||x||_E}{a}[T(y) - T(x_0)]$$

e, portanto,

$$||T(x)||_F \leqslant \frac{||x||_E}{a}[||T(y)||_F - ||T(x_0)||_F] \leqslant 2L\frac{||x||_E}{a}.$$

e) $\Rightarrow$ *a)* : $||T(x) - T(y)||_F = ||T(x - x_0)||_F \leqslant M||x - x_0||_E$

$\square$

Definição 3.4. Com as operações usuais de soma e produto por escalar o conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ das aplicações lineares contínuas é um espaço vetorial. Além disso a expressão

$$\|T\|_{\mathcal{L}} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y, \quad T \in \mathcal{L}(E, F),$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$. Pode ser mostrado que $\mathcal{L}(E, F)$ com a norma induzida acima é um espaço de Banach se, e somente se, F é um espaço de Banach.

Proposição 3.5. (Perturbação de Identidade) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset E$ um aberto e $f : U \to E$ uma contração; seja $g = I + f$, onde I é a aplicação identidade de E. Então g é um homeomorfismo de U sobre um aberto de E, i.e., existe um aberto $W \subset E$ tal que $g : U \to W$ é inversível com inversa $g^{-1} : W \to U$ contínua.

Demonstração. A demonstração será feita em dois passos.

(1) Dados $x_1, x_2 \in U$, temos
$||g(x_2) - g(x_1)|| = ||x_2 - x_1 + f(x_2) - f(x_1)|| \geqslant$
$\geqslant ||x_2 - x_1|| - ||f(x_2) - f(x_1)|| \geqslant ||x_2 - x_1|| - c||x_2 - x_1|| = (1-c)||x_2 - x_1||$, onde $c < 1$ é a constante de contração de f, portanto g é biunívoca e $g^{-1} : g(U) \to U$ é contínua (Lipschitiziana).

(2) Para provar que $g(U)$ é aberto em E, basta demonstrar que, dado $x_0 \in U$ e $\delta > 0$ temos

$$B_d[x_0, \delta] \subset U \Rightarrow B[g(x_0), (1-c)\delta] \subset g(B_d[x_0, \delta]) \subset g(U). \tag{3.1}$$

Façamos $y_0 = g(x_0)$; dado $y \in B[x_0, (1-c)\delta]$, precisamos achar uma solução $x \in B_d[x_0, \delta]$ de $y = g(x)$, isto é, da equação $y = x + f(x)$ ou, ainda, um ponto fixo da contração.

$$x \in B_d[x_0, \delta] \mapsto f_y(x) = y - f(x) \in E.$$

Pelo Teorema 2.2, basta mostrar que $f_y(B_d[x_0, \delta]) \subset B_d[x_0, \delta]$, o que é imediato, pois $||x - x_0|| \leqslant \delta$ e $||y - g(x_0)|| \leqslant (1-c)\delta$ implicam $||f_y(x) - x_0|| \leqslant \delta$. De fato,
$||f_y(x) - x_0|| = ||y - f(x) - x_0|| \leqslant ||y - f(x_0) - x_0|| + ||f(x) - f(x_0)|| =$
$= ||y - g(x_0)|| + ||f(x) - f(x_0)|| \leqslant (1-c)\delta + c||x - x_0|| \leqslant (1-c)\delta + c\delta = \delta$

□

3.1 Teorema da Função Inversa

Definição 3.6. Sejam E, F espaços de Banach sobre o corpo K. Dada a função $f : U \to E$ definida no aberto $U \subset E$ e $x_0 \in U$, dizemos que f é diferenciável em x_0 se existir uma aplicação linear $Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que para todo $h \in E$ tal que $x_0 + h \in U$ tem-se

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

A função r é definida em algum aberto contendo a origem de E pela expressão

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h.$$

Dizemos que f é diferenciável em U se f for diferenciável em todo $x_0 \in U$.

Exemplo 3.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função definida por $f(x) = x.sen\left(\frac{1}{x}\right)$ quando $x \neq 0, f(0) = 0$, é contínua e possui derivada em todo ponto $x \neq 0$.

Porém, no ponto 0, temos $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h.sen(1/h)}{h} = sen\left(\frac{1}{h}\right)$. E como não existe $\lim_{h\to 0} sen\left(\frac{1}{h}\right)$, segue que f não é diferenciável no ponto $x = 0$

Definição 3.7. Dizemos que a função diferenciável $f : U \subset E \to F$ é de classe C^1, se a aplicação

$$U \ni x \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$$

for contínua.

Teorema 3.8. (Desigualdade do Valor Médio) Sejam E e F espaços de Banach, $x, y \in E$, e $f : U \to F$ uma função de classe C^1, onde $U \subset E$ é um aberto que contém o segmento

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \in E, 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Então

$$||f(y) - f(x)|| \leqslant ||y - x|| \cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} ||f'(x + t(y - x))||$$

Demonstração. Seja $z = y - x$ e $\phi(t) = f(x + tz), 0 \leqslant t \leqslant 1$. Note que $\phi : [0, 1] \to F$ é de classe C^1, e da regra da cadeia temos $\phi'(z) = f'(x + tz)z$. Portanto,

$$||f(y) - f(x)|| = ||\phi(1) - \phi(0)|| = ||\int_0^1 \phi'(t)dt|| = ||\int_0^1 f'(x + tz)z\, dt|| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} ||f'(x + tz)z|| = ||y - x|| \cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} ||f'(x + t(y - x))||$$

□

Teorema 3.9. (Teorema da Função Inversa) Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ um aberto e $g : U \to F$ uma função de classe C^1 tal que, num ponto $x_0 \in U$, a aplicação linear $g'(x_0)$ é um homeomorfismo de E sobre F [quando $E = \mathbb{R}^n$, isso equivale a dizer que $F = \mathbb{R}^n$ e que o determinante da matriz jacobiana não é nulo]. Então existe um aberto A contendo x_0 e tal que $g_{|A}$ é uma aplicação biunívoca e continuamente diferenciável que leva A sobre um aberto $g(A)$ e $(g_{|A})^{-1}$ também é continuamente diferenciável.

Demonstração. Substituindo g por $g'(x_0)^{-1} \circ g$, podemos supor que $F = E$ (pela bijeção de $g'(x_0)$) e, neste caso temos $g'(x_0) = I_E$ $(g'(x_0)^{-1} \circ g)$. Além disso, substituindo x por $x - x_0$ e $g(x)$ por $g(x) - g(x_0)$, podemos supor que $x_0 = 0$ e $g(x_0) = 0$.

Seja então $f(x) = x - g(x)$. Logo $f'(x_0) = 0$ e, por continuidade, $||f'(x)|| \leqslant 1/2$ numa bola aberta $B(0, r)$ centrada na origem. Da desigualdade do valor médio temos:

$$||f(x) - 0|| \leqslant ||x - 0|| \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} ||f'(0 + t(x - 0))||, \text{ i.e.,}$$
$$||f(x)|| \leqslant ||x|| \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} ||f'(tx)||.$$

Logo para $x \in B(0,r)$, temos que $\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} ||f'(tx)|| \leq 1/2$, e assim $||f(x)|| \leqslant ||x||/2$, para todo $x \in B(0,r)$. Portanto, $f(B(0,r)) \subset B(0,r)$.

Da Proposição 3.5, segue que g ($g = I - f$) é um homeomorfismo do aberto $B(0,r) \subset E$ sobre um aberto $g(B(0,r))$. Temos $g(B(0,r)) \supset B(0,r/2)$: basta aplicar (3.1) com $U = B(0,r)$ e qualquer $\delta < r, x = 0$, lembrando que $g(0) = 0$ e $c = 1/2$.

Agora vamos demonstrar que $\psi = g^{-1}$ é diferenciável em $B(0,r/2)$ com derivada $\psi'(y) = g'[\psi(y)]^{-1}$: De fato, dados $y_1, y_2 \in B(0,r/2)$, sejam $x_1, x_2 \in B(0,r)$, tais que $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$; temos

$$\begin{aligned}
||\Psi(y_2) - \Psi(y_1) - g'[\Psi(y_1)]^{-1}(y_2 - y_1)|| &= ||x_2 - x_1 - g'(x_1)^{-1}[g(x_2) - g(x_1)]|| = \\
&= ||g'(x_1)^{-1}\{g'(x_1)[x_2 - x_1] - g(x_2) + g(x_1)\}|| \leqslant \\
&\leqslant ||g'(x_1)^{-1}|| \cdot ||g(x_2) - g(x_1) - g'(x_1)[x_2 - x_1]|| = \\
&= ||g'(x_1)||^{-1}||x_2 - x_1||\sigma(x_2 - x_1),
\end{aligned}$$

onde $\sigma(x_2 - x_1) \longrightarrow 0$ quando $x_2 \to x_1$, isto é, quando $y_2 \to y_1$, pois g é diferenciável.

Como $||g'(x)|| \geqslant 1/2$ quando $x \in B(0,r)$, temos

$$||g(x_2) - g(x_1)|| \geqslant ||x_2 - x_1||/2$$

para $x_1, x_2 \in B(0,r/2)$, isto é, $||x_2 - x_1|| \leqslant 2||y_2 - y_1||$, o que demonstra a diferenciabilidade de ψ em $B(0,r/2)$. Além disso, ψ' é contínua, pois a aplicação

$$y \mapsto \psi'(y) = g'[\psi(y)]^{-1}$$

é composta de três aplicações contínuas (ψ, g' e a inversão).

□

3.2 Exemplos

Exemplo 3.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (e^x cosy, e^x seny),$$

mostremos que f é localmente invertível, isto é, dado um ponto qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existe uma vizinhança V com $x_0 \in V$ na qual f é invertível.

Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o jacobiano de f nunca se anula.

$$Jf(x,y) = \begin{vmatrix} e^x cosy & -e^x seny \\ e^x seny & e^x cosy \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Com isso, para cada par $(w, z) \in \mathbb{R}^2$, podemos resolver (para x e y) o sistema (não linear) de equações:

$$e^x cos y = w \qquad e^x sen y = z.$$

Exemplo 3.4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2),$$

determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para **f**.

Uma vez que o jacobiano

$$Jf(x, y, z) = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 16xyz,$$

vemos que o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local na vizinhança de todos os pontos não pertencentes aos eixos ordenados.

Exemplo 3.5. A hipótese de f ser continuamente diferenciável não pode ser retirada.

Consideremos a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0, \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Temos que f é diferenciável e sua derivada é dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 2x sen\left(\dfrac{1}{x}\right) - cos\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Se f fosse invertível numa vizinhança de $x_0 = 0$, então f seria injetora nessa vizinhaça. Como $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$, f seria crescente. Mas isto é impossível, pois em toda vizinhança de x_0, uma vez que f muda de sinal.

Exemplo 3.6. Consideremos a função f definida por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix}, \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

No ponto

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

o jacobiano

$$Jf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2-2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x^2-2y^2+4xy \longrightarrow Jf\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

Como f é diferenciável, concluímos pelo Teorema da Função Inversa que em um conjunto aberto contendo x_0 a função f tem uma inversa f^{-1}.

4 Conclusão

Neste trabalho fizemos um estudo de propriedades elementares dos Espaços Métricos e Normados com o objetivo de provar o Teorema da Função Inversa na sua versão para espaços de Banach. Para isso generalizamos algumas noções do cálculo diferencial clássico e estudamos algumas propriedades de operadores lineares limitados em espaços de Banach. Concluímos com alguns exemplos de equações não lineares nos quais a garantia de existência de solução é altamente não trivial.

Com todos esses elementos as noções estudadas em disciplinas mais elementares começaram a fazer mais sentido e algumas hipóteses nos pareceram mais naturais.

Referências

[1] HÖNIG, Chaim Samuel: *Aplicações da topologia à análise*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2011.

[2] LIMA, Elon Lages: *Elementos de topologia geral*, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[3] DOMINGUES, Higino Hugueros: *Espaços métricos e introdução à topologia*, São Paulo: Editora Atual, 1982.

[4] SILVA, Mario Olivero da: *Cálculo III. v.2*, Mario Olivero da Silva, Nancy de Souza Cardim. - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

[5] Silva Jr., Pedro Alvaro: *Sobre a existencia de solução para equações*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pos-Graduação em Matemática em Rede Nacional, IGCE-UNESP, 2013.