



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

Christhian Karlo Lemos de Paiva

Uma Proposta Para o Cálculo De Volumes Introduzindo a Noção De Limite

Uberaba-MG

2014

Christhian Karlo Lemos de Paiva

Uma Proposta Para o Cálculo De Volumes Introduzindo a Noção De Limite

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro-UFTM, Departamento de Matemática.

Orientador: Professor Doutor Nelson Fernando Inforzato

Uberaba-MG

2014

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

P167p Paiva, Christian Karlo Lemos de
Uma proposta para o cálculo de volumes introduzindo a noção de
limite / Christian Karlo Lemos de Paiva. -- 2014.
71 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Na-
cional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG,
2014

Orientador: Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Cálculo. 3. Limite (Matemáti-
ca). 4. Ensino médio. I. Inforzato, Nelson Fernando. II. Universidade
Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 514(07)

CHRISTHIAN KARLO LEMOS DE PAIVA

UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE VOLUMES INTRODUZINDO A NOÇÃO DE LIMITE

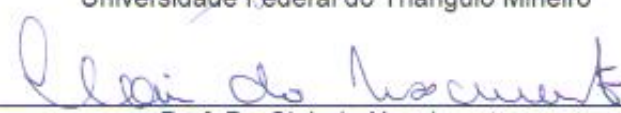
Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

24 de outubro de 2014

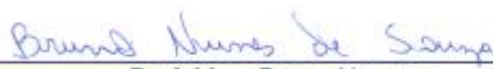
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato
Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dr. Clair do Nascimento
Universidade Federal de Uberlândia



Prof. Msc. Bruno Nunes
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dedico a Deus todos os méritos da produção desse trabalho e a Ele agradeço por ter me dado força de sempre buscar o melhor.

Dedico este trabalho aos meus pais Paiva e Zezé com todo meu amor e gratidão, vocês que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade. Espero ser merecedor de todos os esforços a mim dedicados, levarei vocês como exemplo de vida, os verdadeiros chefes de uma família exemplar formadas por meus irmãos César e Junior, irmãs Cynthia e Cynara, cunhados, cunhadas e sobrinhos de João Arthur a Isabela, que de forma direta ou indireta fazem parte dessa conquista, amo muito vocês.

Dedico aos meus filhos João Vitor e Lívia por suportarem minha ausência em alguns bons momentos de suas vidas e a minha esposa Anna Luiza pessoa guerreira, companheira, que suportou e me apoiou em todas as etapas desse curso. Agradeço a Deus por ter colocado você em meu caminho, sou muito grato por tudo Anna, amo você.

AGRADECIMENTOS

Ao término desse trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ao meu orientador o Professor Doutor Nelson Fernando Inforzato por ter aceitado de imediato caminhar ao meu lado neste projeto e pelos ensinamentos a mim repassados.

Agradeço ao IMPA e a CAPES por terem acreditado e investido neste projeto.

Aos coordenadores e professores do PROFMAT – Uberaba pelo empenho e dedicação.

Agradeço ao Professor Doutor Clair Nascimento e ao Professor Mestre Bruno Nunes de Souza por terem aceitado o convite para fazerem parte da minha banca de defesa.

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos um estudo sobre o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Para isso mostramos a forma como se apresenta os volumes dos principais sólidos aos alunos do ensino médio usando o Princípio de Cavalieri e apresentamos outra forma de calcular volumes introduzindo a noção de limite.

Palavras-chave: volumes, sólidos-fórmulas.

ABSTRACT

In this paper we present a study on the calculation of volumes of geometric solids. To show how this presents major volumes of solids at high school students using the Cavalieri principle and present another way of computing volumes introducing the notion of limit.

Keywords: volume, solid-formulas.

SUMÁRIO

1.Introdução.....	01
1.1 As dificuldades encontradas.....	02
1.2 Como é calculado os volumes dos sólidos geométricos no ensino médio	03
1.3 A abordagem do cálculo de volumes dos livros didáticos.....	04
1.4 As etapas do trabalho.....	04
2. Desenvolvimento.....	06
2.1 A apresentação das fórmulas de volumes dos principais Sólidos Geométricos.....	06
2.1.1Prisma.....	06
2.1.2Cilindro.....	09
2.1.3 Pirâmide.....	11
2.1.4 Cone.....	16
2.1.5 Esfera.....	18
2.2 O Cálculo de volumes com a noção de limite.....	20
2.2.1 Volume de um sólido.....	20
2.2.2 Definição de volume.....	21
2.2.3 Volume do Cilindro.....	22
2.2.4 Volume do Cone.....	23
2.2.5 Volume da Esfera.....	30
2.2.6 Volume do Prisma.....	45
2.2.7 Volume da Pirâmide.....	47
3.A Ideia de Limite Aplicada a outros Sólidos Geométricos.....	56
3.1 Volume do sólido obtido após a rotação da hipérbole	56
3.2 Volume do sólido rotacionando uma elipse.....	60
3.3 Volume do sólido obtido rotacionando uma função qualquer.....	65
4. Considerações Finais.....	67
5. Referências.....	68

1. Introdução

O primeiro relato de como se calculava o volume de um sólido está descrito no Papiro de Moscovo, também conhecido como Papiro de Golenishchev em homenagem ao egiptólogo que o comprou em 1893 no Egito. Este papiro de 8cm de largura e 5m de comprimento escrito por um escriba desconhecido a cerca de 1850ac contém 2 problemas, sendo impossível interpretá-los devido ao grau de degradação do manuscrito.

Neste papiro é apresentada uma forma de cálculo do volume do tronco de pirâmide de bases quadradas.

“um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base por 2 cúbitos no topo. Qual o volume?”

Com esse problema os egípcios teriam chegado à conhecida fórmula:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

Já em (408 - 355ac) Eudoxus de Cnido usou o método conhecido como método da exaustão para calcular áreas e volumes e Arquimedes por volta de 287 – 212ac levou essa ideia além, criando a heurística que é o método criado para encontrar soluções a um problema que diante de questões difíceis são substituídas por outras de resolução mais fácil a fim de encontrar respostas viáveis mesmo que imperfeitas. Este método é que mais se aproxima do cálculo integral.

O método da exaustão é um método para se encontrar áreas e volumes de figuras planas e sólidos geométricos inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos (sólidos geométricos) cujas somas das áreas (volumes) irão convergir para área de uma figura (volume de um sólido) desejada. Se a sequência for corretamente construída, a diferença entre o n-ésimo polígono (sólido) e a figura que os contém se tornará pequena à medida que n se tornar grande. Com isso se determinava a área e o volume das figuras e dos sólidos geométricos pela limitação inferior. O primeiro uso dessa expressão foi feita por Gregorie de Saint-Vicent na obra *Opus geometriumquadraturaecirculietsectionumconi*, de 1647. Sua demonstração era feita por absurdo (*reductio ad absurdum*) onde se assumia que a área verdadeira era maior que uma segunda área e então provar que essa suposição era falsa e depois assumir que a área verdadeira era menor que a

segunda e também provando que essa afirmação era falsa. Foi o método que deu início aos métodos usados em cálculo. Pelo método da exaustão foram obtidos alguns resultados importantes como:

- O valor de π usando o quociente entre a área da circunferência e o quadrado do seu raio (Arquimedes)
- A área delimitada pela intersecção de uma linha e uma parábola é $\frac{4}{3}$ da área de um triângulo que tenha a mesma base e a mesma altura.
- O volume de uma esfera é 4 vezes o de um cone de base e altura iguais ao seu raio.
- O volume de um cilindro equilátero é $\frac{3}{2}$ do de uma esfera com o mesmo diâmetro.

1.1 As dificuldades encontradas

O processo ensino-aprendizagem de geometria principalmente no que se refere o cálculo de volume de algumas figuras é um desafio ao professor. Desafio porque os alunos se encontram diante de ferramentas muito modernas que já fazem parte do seu dia-dia e encaram os métodos tradicionais de aprendizagem de forma repressiva. Diante disso cabe a nós professores uma busca interminável de motivação para os alunos atrás de métodos inovadores sem deixar de lado a essência das demonstrações, das descobertas matemáticas de antigamente, sendo necessário recorrermos aos recursos computacionais a fim de mostrar aos nossos alunos de forma mais nítida a beleza que se tem a matemática e aproximando cada vez mais a matemática em seu cotidiano. Mas para isso deveríamos encontrar nas escolas públicas condições de colocarmos todas as ferramentas que temos a nosso favor em prática para tentar evitar que a matemática/geometria se torne um objeto abstrato de compreensão restrita a uma pequena parcela da população, que são os seus admiradores. Com isso, apresentaremos neste trabalho as fórmulas de cálculo de volumes dos principais sólidos geométricos a partir de seu fatiamento em n partes e fazendo este n tender ao infinito com o intuito de facilitar a compreensão dos alunos sobre o surgimento dessas fórmulas e o dia a dia do professor em sala de aula.

1.2 Como é calculado o volume de sólidos geométricos no ensino médio

Para se dar início a abordagem do ensino de volumes aos nossos alunos do ensino médio devemos perceber que a simples apresentação das fórmulas fará o assunto ficar metódico e não conseguiríamos despertar o interesse dos alunos em tal assunto. Assim, nós professores antes de qualquer tentativa de uma definição formal, deveríamos mostrar alguns exemplos práticos para os alunos sobre o que será falado no decorrer do curso de geometria espacial. Tais exemplos poderiam ser iniciados com a comparação de dois sólidos semelhantes e verificar qual teria o maior volume e o porquê de se ter o maior volume, e depois de analisar alguns sólidos semelhantes começarmos a introduzir a comparação dos volumes de figuras diferentes. A partir daí podemos começar a introduzir outra situação que é a que mais os alunos se depararão e manifestarão mais interesse.

Imaginemos um engenheiro que diante da montagem de um projeto para um cliente, além de mostrar toda parte estrutural de um prédio, tenha também que fazer um levantamento da quantidade de concreto que será gasto nesta obra. Observe que em algumas partes se gastará mais em outras nem tanto e isso tudo deverá ser apresentado ao cliente antes do início da construção. Com isso se vem à necessidade do uso de recursos para o cálculo de volumes.

Após estas apresentações podemos agora iniciar a apresentação, em sala de aula, do cálculo de volumes de forma mais específica, mostrando aos alunos que: “o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada” e que para se medir este espaço ocupado pelo sólido devemos analisar o formato e as dimensões dele, e também mostrar que o sólido de comparação para se obter o volume de qualquer outro sólido é o cubo de aresta unitária assim quando concluirmos que o volume de um sólido é de trinta e duas unidades de volume é porque nele conseguiremos inserir 32 cubos de aresta 1.

Iniciando assim a apresentação do cálculo de volume de sólidos aos alunos teríamos um maior interesse desses em relação às várias fórmulas do cálculo de volumes e despertaríamos nestes alunos a curiosidade, a motivação, o interesse de verificar de onde surgiram outras fórmulas em geometria, álgebra, trigonometria e nas outras áreas que farão parte de sua vida escolar.

1.3 A abordagem do cálculo de volumes nos livros didáticos

Após analisarmos alguns livros didáticos do ensino fundamental e médio, mais precisamente das séries finais do ensino fundamental e do 2º ano do ensino médio, constataremos que o ensino de volume é condicionado ao uso de fórmulas no ensino médio e transformações de unidades no ensino fundamental.

É fácil de observar que poucos são os livros de ensino fundamental que começam a abordar o cálculo de volumes de alguns sólidos. Estes se dedicam mais às apresentações de unidades de medida e suas transformações deixando a apresentação das fórmulas e os cálculos todos para o ensino médio. Já nos livros de ensino médio, mais específico em livros do 2º ano, que é onde o assunto mais aparece, pouco são os livros que se dedicam a mostrar a maneira de se chegar/concluir as fórmulas de volumes de alguns sólidos geométricos, encontra-se muito, por exemplo, a explicação de que o volume de uma pirâmide $\left(V = \frac{A_b H}{3}\right)$ surgiu após a divisão de um prisma em 3 partes de mesmo volume.

Percebemos claramente também que na maioria dos livros analisados os conteúdos de geometria espacial (mais específico o cálculo de volumes) são trabalhados no ensino médio nos últimos capítulos do volume dois de cada coleção e no ensino fundamental também nos últimos capítulos, o que acarretará na maior parte das escolas públicas como um conteúdo mal trabalhado ou até mesmo não trabalhado pela “falta de tempo”.

1.4 As etapas do trabalho

No primeiro capítulo desse trabalho mostraremos como as fórmulas de volumes poderiam ser apresentadas aos alunos e analisaremos algumas questões propostas pelos livros didáticos.

No segundo capítulo mostraremos as fórmulas de volumes de alguns sólidos geométricos fazendo uso de cortes ou secções transversais. Em seguida usaremos essa idéia dos cortes em alguns sólidos para verificarmos que a medida que aumentamos a quantidade de cortes, o volume se aproxima do valor exato, é neste momento que a noção do limite (no infinito) é introduzida.

No terceiro capítulo, calculamos volumes de alguns sólidos mais gerais, como por exemplo, sólidos formados pela rotação de uma função limitada em torno de um eixo. Desta forma, mostramos que o método é mais geral e engloba uma classe maior de sólidos do que os trabalhados no ensino médio.

2. Desenvolvimento

Neste capítulo mostraremos como as fórmulas de volumes dos sólidos: prisma, cilindro, cone, pirâmide e esfera são apresentados aos alunos principalmente do ensino médio e a partir daí mostraremos uma maneira para que as fórmulas não sejam impostas e sim construídas com a introdução de cortes ou secções transversais para observarmos que a medida que aumentamos o número de cortes mais próximos chegamos ao volume do sólido.

2.1 A apresentação das fórmulas de volumes dos principais sólidos geométricos

2.1.1 Prisma

Veja a coleção de objetos:



Figura 1.

Definição:

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta r secante a esses planos e uma região poligonal convexa $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ contida em α e outra região poligonal convexa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ contida em β . Definimos o prisma como a união de todos os segmentos de reta, paralelos a r , de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente à região poligonal α e o outro extremo pertencente a β .

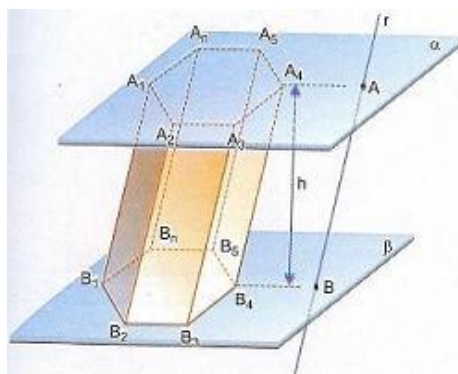


Figura 2.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de prisma limitado ou simplesmente prisma.

A apresentação do volume de um prisma na maioria dos livros didáticos analisados é feito de maneira informal com certa dose de intuição e recorrendo ao princípio enunciado pelo matemático italiano Bonaventura Cavalieri: “sejam dois sólidos P_1 e P_2 e um plano α . Se qualquer plano β , paralelo a α , que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nesses sólidos secções de áreas iguais, então os sólidos P_1 e P_2 têm volumes iguais.”

Para deduzirmos os volumes de um prisma a partir do princípio de Cavalieri observemos primeiramente o volume de um paralelepípedo reto retângulo.

O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é obtido a partir da comparação com a porção do espaço ocupada por um cubo (hexaedro regular) de aresta 1 cm que é uma unidade de volume definido por 1cm^3 . (1 centímetro cúbico)

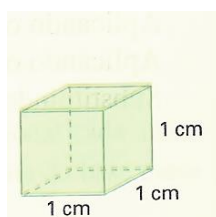


Figura 3.

A conclusão que os livros didáticos chegam em relação ao paralelepípedo reto-retângulo é que devemos calcular a quantidade desses cubos (de aresta 1 cm) que são necessários para formar o paralelepípedo reto-retângulo apresentado. Assim, se considerarmos um de dimensões 5 cm, 3 cm e 4 cm, temos:

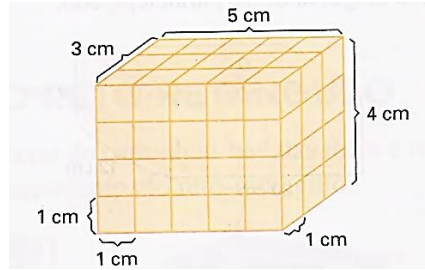


Figura 4.

Observe que empilhando 4 camadas de cubos com aresta 1 cm, havendo em cada camada 15 cubos logo, o total de cubos seria $15 \times 4 = 60$ cubos. Portanto concluiríamos com os alunos de que o volume do paralelepípedo reto-retângulo é:

$$V = 15 \cdot 4$$

$$V = 5 \cdot 3 \cdot 4$$

Como 5×3 é a área da base e 4 é a altura, então:

$$V = A_b \cdot H \quad \begin{cases} A_b = \text{área da base} \\ H = \text{altura} \end{cases}$$

Vejamos agora como o volume de outros prismas poderá ser obtido pela comparação do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e a utilização do princípio de Cavalieri.

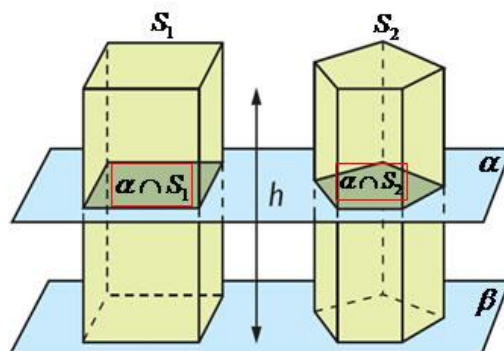


Figura 5.

Note que qualquer plano α paralelo a β , que intercepta um dos prismas também intercepta o outro. Como qualquer secção transversal de um prisma é congruente as suas bases então, qualquer plano α , nas condições anteriores,

determina nesses prismas secções de mesma área. O princípio de Cavalieri nos garante que, obedecidas a essas condições, os prismas têm volumes iguais. Se as arestas da base do paralelepípedo medem m e n , então o seu volume é $V = m \cdot n \cdot H$ com $m \cdot n = A_b$ (A_b : área da base) o volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura (H), ou seja, $V = A_b \cdot H$, que é também o volume do outro prisma.

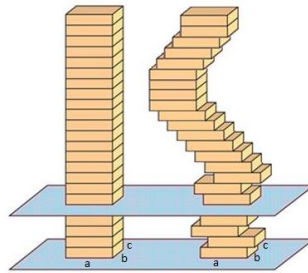


Figura 6.

A figura representa duas pilhas de placas retangulares de madeira, dispostas de maneiras diferentes. É fácil aceitar que elas têm o mesmo volume, pois suas dimensões a , b e c são as mesmas.

Com isso, pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume do prisma é:

$$V = A_b \cdot H \quad \begin{cases} A_b : \text{área da base} \\ H : \text{altura} \end{cases}$$

2.1.2 Cilindro

Veja a coleção dos objetos:



Figura 7.

Os cilindros são sólidos que têm a definição bastante semelhante à dos prismas.

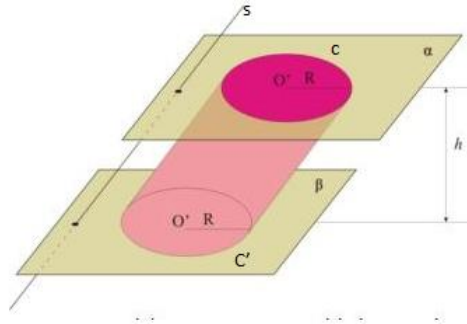


Figura 8.

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α . Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a s , de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β .

A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de cilindro circular limitado de bases C e C' ou simplesmente, cilindro circular.

Os livros didáticos analisados, agora em poucos exemplares, recorrem ao princípio de Cavalieri para deduzir a fórmula de volume de um cilindro.

Consideremos um cilindro de altura h com raio da base r e um prisma quadrangular regular de mesma altura h e aresta de base $r \cdot \pi^{1/2}$. Considerando que estes sólidos possuem as suas bases sobre um plano α ,

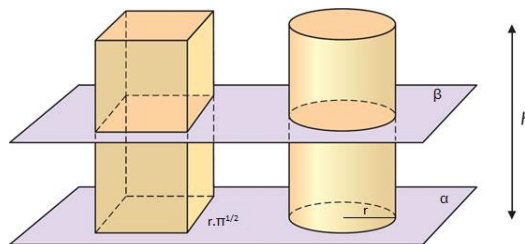


Figura 9.

Observe que a área da base do cilindro circular é $\pi \cdot r^2$ e a área da base do prisma é $l^2 = \pi \cdot r^2$

Como as figuras possuem a mesma área da base e considerando que as figuras são intersectadas por um plano β paralelo a α então também a mesma altura. Assim, pelo princípio de Cavalieri esses sólidos têm volumes iguais.

Como o volume do prisma é o produto da área da base pela altura, concluímos que:

“o volume V de um cilindro circular qualquer é igual ao produto da área da base, $\pi \cdot r^2$, pela altura h .”

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Um exemplo prático que podemos recorrer em sala de aula é fazer o seguinte experimento com os alunos:

- Primeiramente construímos dois recipientes um cilindro e um prisma de tal forma que as alturas e as áreas das bases sejam iguais.
- Posicionando estes recipientes sobre uma superfície plana podemos escolher um desses recipientes, o cilindro, por exemplo, e preenchê-lo com bolinhas de isopor e assim que estiver totalmente cheio poderemos retirar essas bolinhas do cilindro e colocá-las no prisma e verificaremos que a quantidade de bolinhas gastas para encher os dois recipientes é a mesma.

Com este experimento deixaremos mais claro aos alunos de que o princípio de Cavalieri é válido e, então, a forma que foi apresentada aqui para os volumes de prismas e cilindros também são válidos.

2.1.3 Pirâmide

Veja a coleção dos objetos:

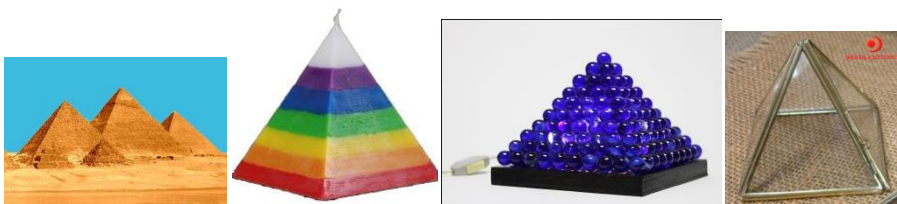


Figura 10.

Seja uma região poligonal convexa $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ contida em um plano α , e um ponto V , não pertencente a α . Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente à região poligonal e o outro extremo V .

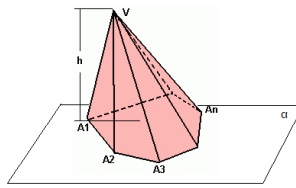


Figura 11.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de pirâmide limitada ou simplesmente pirâmide de vértice V e base $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

A apresentação da fórmula de volume desse sólido em todos os livros analisados é apresentada como sendo $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma: “o volume de uma pirâmide triangular ($DABC$, por exemplo) é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma triangular ($ABCDEF$) de mesma base e mesma altura, como é sugerido pelas figuras abaixo, as quais mostram a decomposição de um prisma triangular em 3 tetraedros de mesmo volume”.

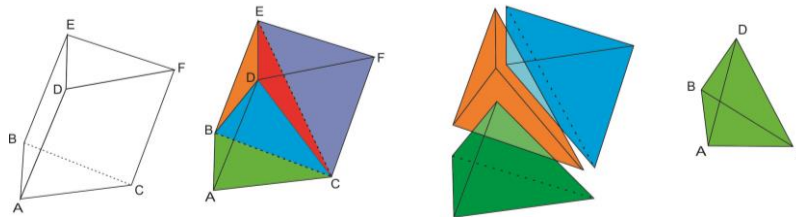


Figura 12.

Após isso, os livros concluem que o processo é análogo a qualquer outro tipo de pirâmide (quadrangular, pentagonal, etc.).

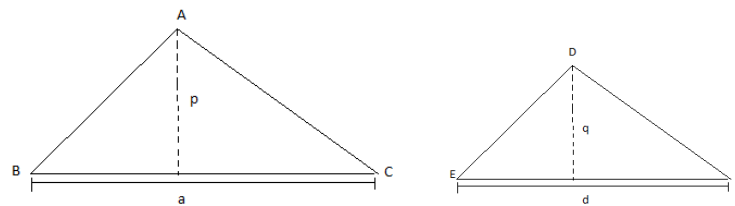
A forma construída e deduzida a partir de conteúdos já vistos pelos alunos está apresentada no livro de matemática volume único de Manoel Paiva, a maneira apresentada por ele faz com que o aluno busque informações de semelhança de triângulos lá na geometria plana e traga para a geometria espacial a fim de concluir esta fórmula. Mesmo esta sendo uma maneira mais abstrata da demonstração do volume da pirâmide com certeza deixará os alunos mais seguros do resultado encontrado.

Proposição 1:

“A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança”

Demonstração:

Considere os triângulos ABC e DEF semelhantes, tais que a razão de semelhança do primeiro com o segundo seja K .



$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = K$$

A razão entre as áreas:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{a \cdot p}{2}}{\frac{d \cdot q}{2}} = \frac{a \cdot p}{2} \cdot \frac{2}{d \cdot q} = K \cdot K = K^2 \text{ c.q.d.}$$

Proposição 2:

“Duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases de mesma área têm o mesmo volume”.

Demonstração:

As pirâmides triangulares representadas abaixo têm a mesma altura H e bases com a mesma área B , contidos em um plano α . O plano β é paralelo a α e pode estar em qualquer posição, determinando nessas pirâmides os triângulos S_1 e S_2 .

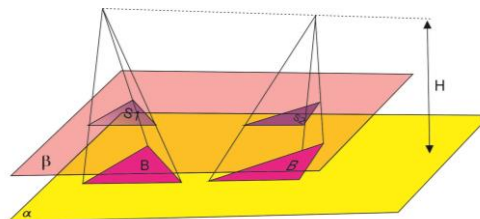


Figura 13.

Em cada pirâmide a secção determinada pelo plano β é semelhante à base, e a razão de semelhança entre cada seção e a base da respectiva pirâmide é o mesmo número K , logo:

$$\frac{B}{S_1} = K^2 \quad e \quad \frac{B}{S_2} = K^2 \quad \text{então: } S_1 = S_2$$

Assim recorrendo novamente ao princípio de Cavalieri, concluímos que as duas pirâmides têm o mesmo volume.

Observe a decomposição do prisma triangular $LMNPQR$:

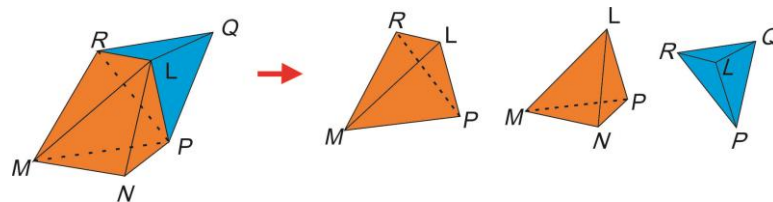


Figura 14.

I. As pirâmides $LMNP$ e $PLQR$ têm volumes iguais, pois:

- $\triangle MNP \cong \triangle RLQ$ são as bases do prisma.
- A altura do prisma $LMNPQR$ é a altura das pirâmides $LMNP$ e $PLQR$.

Assim podemos concluir que as pirâmides apresentadas possuem a mesma altura e a mesma área da base e, portanto possuem o mesmo volume.

II. As pirâmides $LRQP$ e $LRMP$ têm volumes iguais, pois:

- RP é a diagonal do paralelogramo $MRQP$ e, portanto, $\triangle RPQ \cong \triangle RPM$.
- Suas alturas relativas às bases RPQ e RPM são iguais à distância do ponto L ao plano do paralelogramo $MRPQ$.

Assim podemos concluir que as pirâmides apresentadas possuem a mesma altura e a mesma área da base e, portanto possuem o mesmo volume.

Assim, por I e II, temos:

$$V_{LMNP} = V_{PLQR} = V_{LRQP} = V_{LRMP}$$

Logo:

$$V_{LMNP} = V_{PLQR} = V_{LRMP}$$

Provando desse modo que o volume de um prisma triangular $MNPLQR$ é composto de três pirâmides de volumes iguais. Sendo H a altura do prisma e A_b a área de sua base podemos afirmar que o volume de uma dessas pirâmides é:

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

c.q.d.

Volume de uma pirâmide qualquer:

Observe a pirâmide:

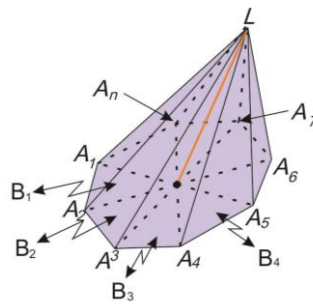


Figura 15.

Consideremos uma pirâmide $LA_1A_2A_3 \dots A_n$ de altura H e área da base B . Seja P um ponto interior à base $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Essa pirâmide é composta das n pirâmides triangulares $LA_1A_2P, LA_1A_3P, LA_3A_4P, \dots, LA_nA_1P$ com áreas cujas bases são $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ respectivamente.

Note que todas as pirâmides $LA_1A_2P, LA_2A_3P, LA_nA_1P$ têm a mesma altura H e $B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n$. Sendo $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ os volumes dessas pirâmides triangulares, respectivamente, temos:

$$V_1 = \frac{1}{3}B_1 \cdot H ; V_2 = \frac{1}{3}B_2 \cdot H ; V_3 = \frac{1}{3}B_3 \cdot H ; \dots ; V_n = \frac{1}{3}B_n \cdot H$$

Assim temos,

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \frac{1}{3}B_1.H + \frac{1}{3}B_2.H + \frac{1}{3}B_3.H + \dots + \frac{1}{3}B_n.H$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \frac{1}{3}H.(B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n)$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \frac{1}{3}.H.B$$

$$V = \frac{1}{3}.H.B$$

c.q.d.

Isto é:

“o volume de uma pirâmide qualquer é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura”.

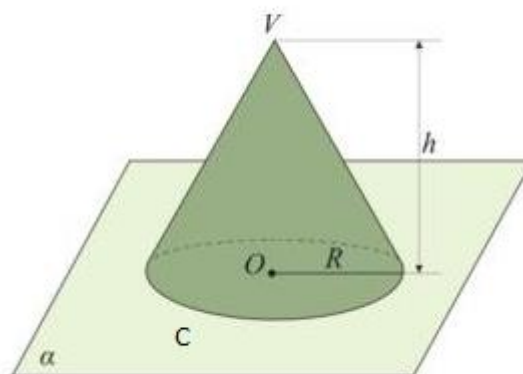
2.1.4 Cone

Veja a coleção dos objetos:



Figura 16.

“considere um plano α , uma região circular C desse plano e um ponto V não pertencente a α . O conjunto de todos os segmentos que ligam cada ponto de C ao ponto V forma um cone circular”.



O volume do cone:

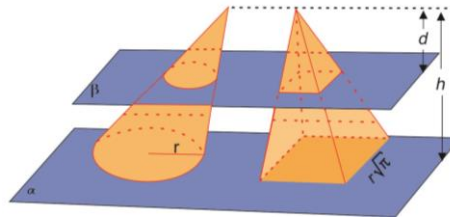


Figura 17.

Considere um cone de raio da base r e altura h e uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base $r\sqrt{\pi}$ e altura h ambas com suas bases contidas em um plano α . Observe que a área da base do cone é $A_b = \pi r^2$ e a área da base da pirâmide é $A_B = (r\sqrt{\pi})^2 = \pi r^2$ todo plano β , paralelo a α , que intersecta o cone e a pirâmide determina nelas secções de áreas $A_{b'}$ no cone e $A_{B'}$ na pirâmide, tal que:

$$\frac{A_b}{A_{b'}} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \qquad \frac{A_B}{A_{B'}} = \left(\frac{d}{h}\right)^2$$

Assim:

$$\frac{A_b}{A_{b'}} = \frac{A_B}{A_{B'}}, \quad \text{como} \quad A_b = A_B$$

Logo:

$$A_{b'} = A_{B'}$$

Assim podemos afirmar que:

- O cone e a pirâmide possuem áreas equivalentes
- Todo plano β , paralelo a α , que secciona um dos sólidos também secciona o outro, determinando neles secções equivalentes.

Assim recorrendo novamente ao princípio de Cavalieri, os sólidos têm volumes iguais.

Com isso, temos:

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

c.q.d.

“O volume de um cone circular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base por sua altura”.

2.1.5 Esfera

Veja a coleção dos objetos:



Figura 18.

Consideremos um ponto o e um segmento de medida r . Chamamos de esfera de centro o e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância de P até o seja menor ou igual que r .

O volume da esfera:

Novamente que a maioria dos livros didáticos não apresenta uma maneira construtiva para a obtenção da fórmula de volume da esfera e uma forma fácil e possível de compreensão dos alunos é a seguinte.

Consideremos um cilindro equilátero ($h = 2r$) de raio da base r e seja s o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e s como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado clépsidra).

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido é chamado de anticlépsidra)

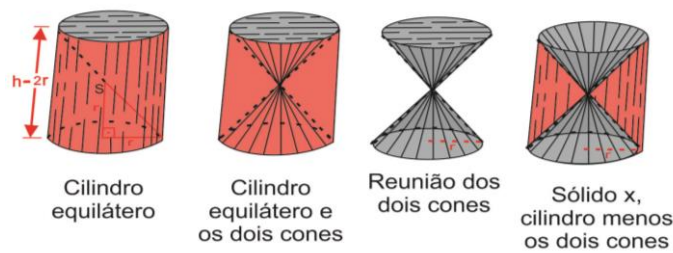


Figura 19.

Consideremos agora uma esfera de raio r e o sólido X descrito acima.

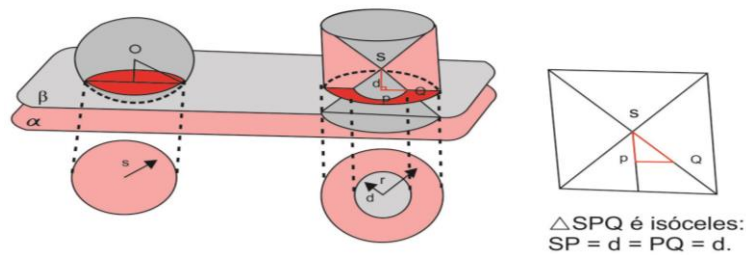


Figura 20.

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α e que o cilindro que formou o sólido X tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X , estejam num mesmo semi-espaco dos determinados por α .

Qualquer plano β secante e paralelo a α distando d do centro da esfera e do vértice do sólido X , também secciona o sólido X , temos:

- Área do círculo formado na esfera: $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$
- Área da coroa circular formada em X : $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$

Observe que os sólidos possuem a mesma área da base, então pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{esfera}} &= V_{\text{sólido } X} \\
 V_{\text{esfera}} &= V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} \\
 V_{\text{esfera}} &= \pi \cdot r^2 \cdot h - 2 \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \\
 V_{\text{esfera}} &= \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{3}
 \end{aligned}$$

$$V_{esfera} = \pi \cdot r^3 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{6 \cdot \pi \cdot r^3 - 2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Assim,

“O volume de uma esfera de raio r é: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ ”.

c.q.d.

2.2 O cálculo de volumes com a noção de limite

2.2.1 Volume de um sólido

Para um sólido S qualquer, nós primeiro “cortamos” S em pedaços e aproximamos cada parte por um cilindro. Estimamos o volume de S adicionando os volumes dos cilindros. Chegamos ao volume exato de S através de um processo de limite em que o número de partes tornar-se grande.

Começamos interceptando S com um plano e obtendo uma região plana que é chamada secção transversal de S . Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto X , onde $a \leq x \leq b$ como na figura abaixo. (Pense em fatiar S com uma faca passando perpendicularmente a X e calcule a área da fatia). A área da secção transversal $A(x)$ irá variar conforme x aumenta de a para b .

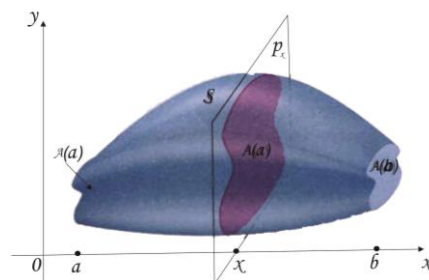


Figura 21.

Vamos dividir S em n fatias de larguras iguais a Δx usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \dots$ para fatiar o sólido. (pense em fatiar um pão). Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i – ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área da base $A(x_i^*)$ e “altura” Δx (veja figura).

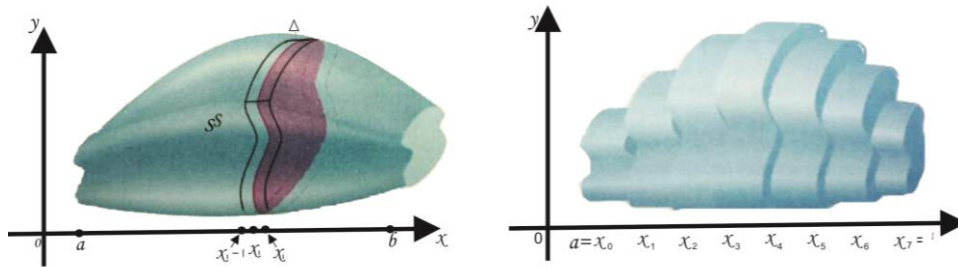


Figura 22.

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\Delta x$, assim, uma aproximação para a nossa concepção intuitiva do volume da i – ésima fatia S_i é:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume).

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x$$

Esta aproximação parece melhorar quando n aumenta ($n \rightarrow \infty$), (Pense nas fatias tornando-se cada vez mais finas). Portanto definimos o volume como o limite dessas somas quando $n \rightarrow \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

2.2.2 Definição de volume

Seja S um sólido que está compreendido entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por X e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Quando usamos a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x) dx$, é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em X perpendicularmente ao eixo x . Observe que, para um cilindro de eixo paralelo ao eixo x , a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x . Então nossa definição de volume resulta em $V = \int_a^b A dx = A(b - a)$; isso coincide com a fórmula $V = Ah$.

2.2.3 Volume do cilindro

Usando o cálculo integral mostraremos que o volume de um cilindro reto, de altura h e cuja base é um círculo de raio r é $V = \pi r^2 h$.

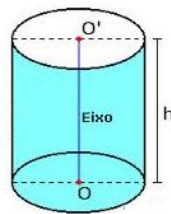


Figura 23.

Transportando este cilindro para o plano cartesiano de tal forma que a origem do plano esteja no centro da base do cilindro e o eixo x seja perpendicular à base desse cilindro, temos:

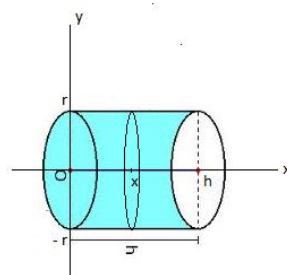


Figura 24.

Para cada corte que fizermos de forma transversal na altura x , temos que a secção obtida é um círculo, paralelo à base, cuja área é $\pi \cdot r^2$.

Assim, o volume do cilindro é:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = \int_0^h \pi r^2 dx$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot x \Big|_0^h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot 0$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

c.q.d.

2.2.4 Volume do cone

Usando o cálculo integral mostraremos que o volume de um cone reto, de altura h e cuja base é um círculo de raio r é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

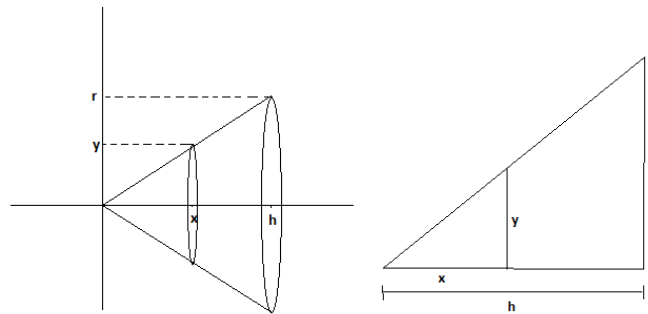


Figura 25.

Para cada corte transversal na altura x , temos que a secção obtida é um círculo, paralelo a base, cuja área é πy^2 .

Analisando o corte longitudinal ao lado por semelhança de triângulos, podemos escrever que:

$$\frac{r}{h} = \frac{y}{x} \rightarrow y = \frac{r \cdot x}{h}$$

Ou seja, a área de cada secção transversal é:

$$A(x) = \pi \left(\frac{r \cdot x}{h} \right)^2$$

$$A(x) = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot x^2}{h^2}$$

Logo, o volume do cone é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x) dx \\ V &= \int_0^h \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 dx \\ V &= \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\ V &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ V &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h^3}{3 \cdot h^2} \\ V &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \end{aligned}$$

c.q.d.

Mostraremos agora que o volume de um cone é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Se colocarmos o cone de tal forma que seu vértice coincida com o centro do plano cartesiano então o plano P_x intercepta o cone em um triângulo isósceles de altura h e raio da base r .

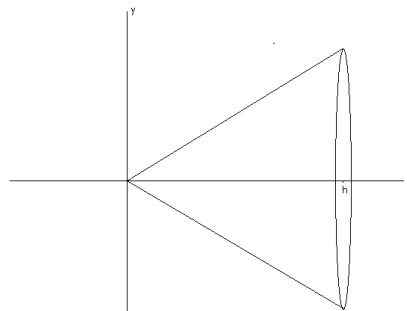


Figura 26.

➤ **Dividindo o cone e dois cilindros de mesma altura:**

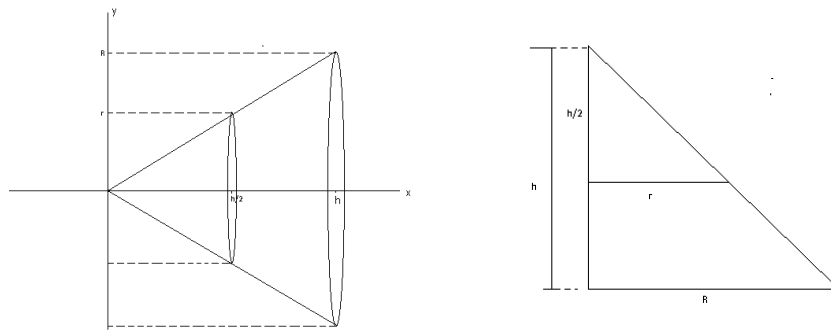


Figura 27.

$$\bullet \quad \frac{r}{R} = \frac{\frac{h}{2}}{h} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

Assim:

$$V_{cone} \cong V_{cilindro\ 1} + V_{cilindro\ 2}$$

$$V_{cone} \cong \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{2} + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$V_{cone} \cong \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$V_{cone} \cong \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{8} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{2}$$

$$V_{cone} \cong \frac{5\pi R^2 h}{8}$$

➤ **Dividindo o cone em três cilindros de mesma altura:**

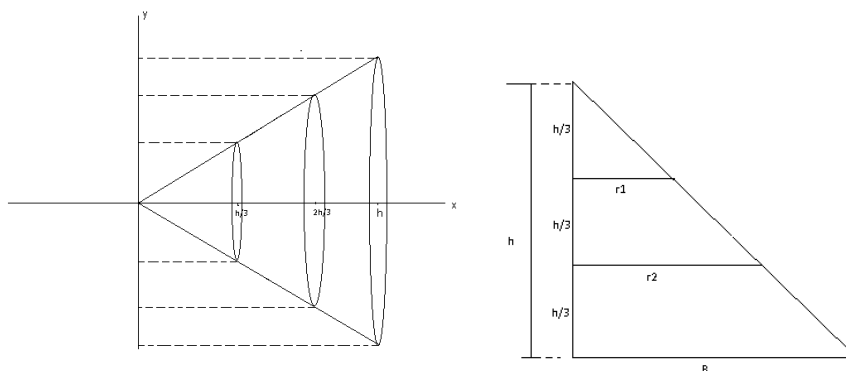


Figura 28.

$$\bullet \quad \frac{r_1}{R} = \frac{\frac{h}{3}}{h} \Rightarrow \frac{r_1}{R} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{R}{3}$$

$$\bullet \quad \frac{r_2}{R} = \frac{\frac{2h}{3}}{h} \Rightarrow \frac{r_2}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow r_2 = \frac{2R}{3}$$

$$\begin{aligned}
 V_{cone} &\cong V_{cilindro\ 1} + V_{cilindro\ 2} + V_{cilindro\ 3} \\
 V_{cone} &\cong \pi \cdot (r_1)^2 \cdot \frac{h}{3} + \pi \cdot (r_2)^2 \cdot \frac{h}{3} + \pi \cdot (R)^2 \cdot \frac{h}{3} \\
 V_{cone} &\cong \pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot \frac{h}{3} + \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot R}{3}\right)^2 \cdot \frac{h}{3} + \pi \cdot (R)^2 \cdot \frac{h}{3} \\
 V_{cone} &\cong \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{27} + \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{27} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \\
 V_{cone} &\cong \frac{14\pi R^2 h}{27}
 \end{aligned}$$

➤ **Dividindo o cone em quatro cilindros de mesma altura:**

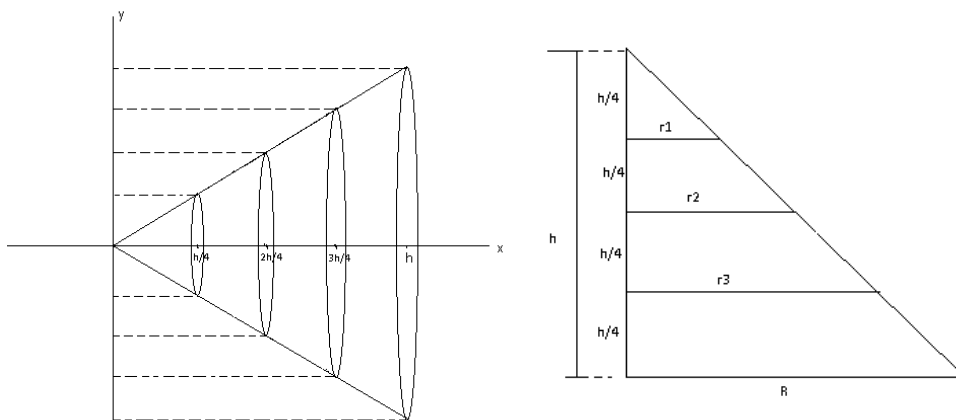


Figura 29.

- $\frac{r_1}{R} = \frac{\frac{h}{4}}{h} \Rightarrow \frac{r_1}{R} = \frac{1}{4} \Rightarrow r_1 = \frac{R}{4}$
- $\frac{r_2}{R} = \frac{\frac{2 \cdot h}{4}}{h} \Rightarrow \frac{r_2}{R} = \frac{2}{4} \Rightarrow r_2 = \frac{2 \cdot R}{4}$
- $\frac{r_3}{R} = \frac{\frac{3 \cdot h}{4}}{h} \Rightarrow \frac{r_3}{R} = \frac{3}{4} \Rightarrow r_3 = \frac{3 \cdot R}{4}$

$$V_{cone} \cong V_{cilindro\ 1} + V_{cilindro\ 2} + V_{cilindro\ 3} + V_{cilindro\ 4}$$

$$V_{cone} \cong \pi \cdot (r_1)^2 \cdot \frac{h}{4} + \pi \cdot (r_2)^2 \cdot \frac{h}{4} + \pi \cdot (r_3)^2 \cdot \frac{h}{4} + \pi \cdot (R)^2 \cdot \frac{h}{4}$$

$$V_{cone} \cong \pi \cdot \frac{R^2}{16} \cdot \frac{h}{4} + \pi \cdot \frac{4 \cdot R^2}{16} \cdot \frac{h}{4} + \pi \cdot \frac{9 \cdot R^2}{16} \cdot \frac{h}{4} + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h}{4}$$

$$V_{cone} \cong \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{64} + \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{64} + \frac{9 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{64} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{4}$$

$$V_{cone} \cong \frac{30 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{64}$$

➤ **Dividindo o cone em cinco cilindros de mesma altura:**

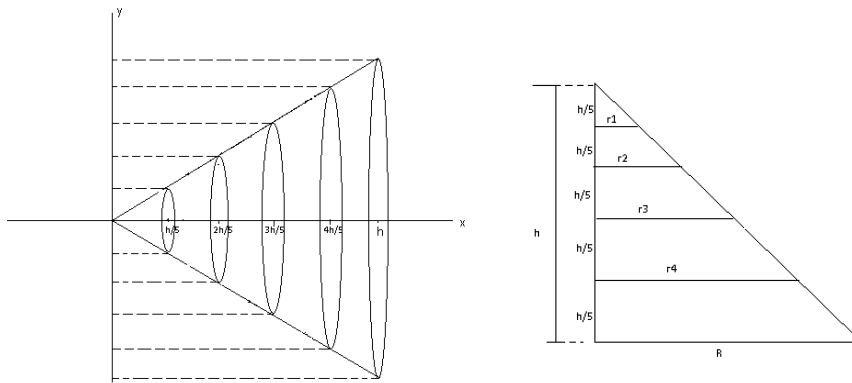


Figura 30.

- $\frac{r_1}{R} = \frac{\frac{h}{5}}{h} \Rightarrow \frac{r_1}{R} = \frac{1}{5} \Rightarrow r_1 = \frac{R}{5}$
- $\frac{r_2}{R} = \frac{\frac{2 \cdot h}{5}}{h} \Rightarrow \frac{r_2}{R} = \frac{2}{5} \Rightarrow r_2 = \frac{2 \cdot R}{5}$
- $\frac{r_3}{R} = \frac{\frac{3 \cdot h}{5}}{h} \Rightarrow \frac{r_3}{R} = \frac{3}{5} \Rightarrow r_3 = \frac{3 \cdot R}{5}$
- $\frac{r_4}{R} = \frac{\frac{4 \cdot h}{5}}{h} \Rightarrow \frac{r_4}{R} = \frac{4}{5} \Rightarrow r_4 = \frac{4 \cdot R}{5}$

Assim,

$$V_{cone} \cong V_{cilindro\ 1} + V_{cilindro\ 2} + V_{cilindro\ 3} + V_{cilindro\ 4} + V_{cilindro\ 5}$$

$$\begin{aligned}
 V_{cone} &\cong \pi \cdot (r_1)^2 \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot (r_2)^2 \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot (r_3)^2 \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot (r_4)^2 \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot (R)^2 \cdot \frac{h}{5} \\
 V_{cone} &\cong \pi \cdot \frac{R^2}{25} \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot \frac{4 \cdot R^2}{25} \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot \frac{9 \cdot R^2}{25} \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot \frac{16 \cdot R^2}{25} \cdot \frac{h}{5} + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h}{5} \\
 V_{cone} &\cong \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{125} + \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{125} + \frac{9 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{125} + \frac{16 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{125} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{5} \\
 V_{cone} &\cong \frac{55 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{125}
 \end{aligned}$$

➤ **Dividindo o cone em n cilindros de mesma altura:**

O volume do cone é o somatório do volume de n cilindros e a altura dos cilindros é dado por $\frac{h}{n}$,

Já os raios desses cilindros são encontrados usando semelhança entre triângulos.

Quantidade de cilindros formados sobre o cone	Raios obtidos
1	R
2	$\frac{R}{2}, \frac{2 \cdot R}{2}$
3	$\frac{R}{3}, \frac{2 \cdot R}{3}, \frac{3 \cdot R}{3}$
4	$\frac{R}{4}, \frac{2 \cdot R}{4}, \frac{3 \cdot R}{4}, \frac{4 \cdot R}{4}$
5	$\frac{R}{5}, \frac{2 \cdot R}{5}, \frac{3 \cdot R}{5}, \frac{4 \cdot R}{5}, \frac{5 \cdot R}{5}$
.	.
.	.
.	.
n	$\frac{R}{n}, \frac{2 \cdot R}{n}, \frac{3 \cdot R}{n}, \frac{4 \cdot R}{n}, \dots, \frac{n \cdot R}{n}$

Assim, temos:

$$V_{cone} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi \cdot \frac{R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} + \pi \cdot \frac{4 \cdot R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} + \pi \cdot \frac{9 \cdot R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} + \dots + \pi \cdot \frac{n^2 \cdot R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} \right)$$

$$V_{cone} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{n^3} \cdot (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) \right]$$

$$V_{cone} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right]$$

$$V_{cone} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6 \cdot n^3} \right]$$

$$V_{cone} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \left(\frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6 \cdot n^3} \right) \right]$$

$$V_{cone} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6 \cdot n^2} \right) \right]$$

$$\therefore V_{cone} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

c.q.d.

Exemplo:

Considere um cone circular reto de raio 1 e altura h igual a 3,

$$\text{Assim usando, } V_{cone} \cong \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6 \cdot n^2} \right)$$

Temos:

Valores atribuídos para n	Volume encontrado para o cone
2	5,890486225480
3	4,537856055185
5	4,146902302738
10	3,628539514896
20	3,381139093426
50	3,236468751728
100	3,188873623026
500	3,151023714735
1000	3,146306613366

10000	3,142063908195
100000	3,141639777636
1000000	3,141597365980

Observe que o volume do cone de raio da base igual a 1 e altura 3 é $V = 3,14592653589$ e quanto mais cilindros formamos nesse cone mais próximo chegamos ao seu volume.

2.2.5 Volume da esfera

Usando o cálculo integral mostraremos que o volume de uma esfera, de raio r é $V = \frac{4\pi.r^3}{3}$.

Observe que a esfera de raio r é gerada pela rotação em torno do eixo x da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

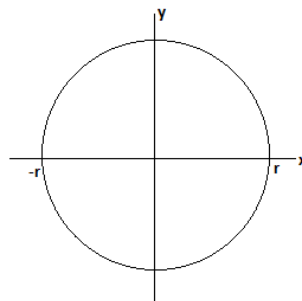


Figura 31.

Assim,

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ com } r > 0 \text{ e } -r \leq x \leq r$$

Logo,

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = \int_{-r}^r \pi \cdot (f(x))^2 dx$$

$$V = \int_{-r}^r \pi. (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$V = \pi. \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \pi. \int_{-r}^r (r^2) dx - \pi. \int_{-r}^r (x^2) dx$$

$$V = \pi. r^2. x \Big|_{-r}^r - \pi. \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r$$

$$V = \pi. r^2 [r - (-r)] - \pi. \left[\frac{r^3}{3} - \frac{(-r)^3}{3} \right]$$

$$V = 2. \pi. r^3 - \pi. \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} \right]$$

$$V = 2. \pi. r^3 - 2. \pi. \frac{r^3}{3}$$

$$V = \frac{6. \pi. r^3 - 2. \pi. r^3}{3}$$

$$V = \frac{4. \pi. r^3}{3}$$

c.q.d.

Mostraremos agora a fórmula que determina o volume de uma esfera a partir da divisão dessa esfera em n cilindros para uma melhor compreensão dos alunos do ensino médio.

Se colocarmos a esfera de tal forma que o seu centro coincida com o centro do plano cartesiano então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio será determina pelo Teorema de Pitágoras.

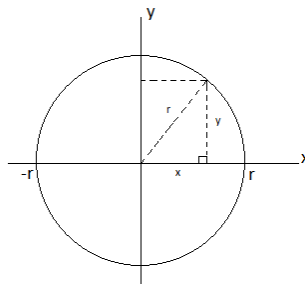


Figura 32.

Assim pelo teorema de Pitágoras podemos afirmar que: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

➤ **Dividindo a esfera em 2 cilindros:**

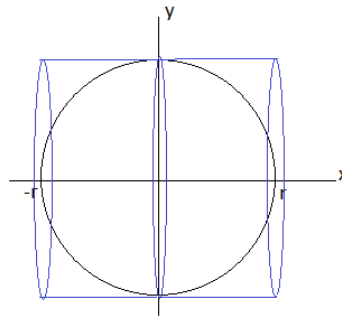


Figura 33.

Temos que estes cilindros formados apresentam o mesmo raio da base e a mesma altura por consequência o mesmo volume, assim:

$$V_{esfera} < 2 \cdot V_{cilindro}$$

$$V_{esfera} < 2 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$V_{esfera} < 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r$$

$$V_{esfera} < 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

➤ **Dividindo a esfera em 3 cilindros:**

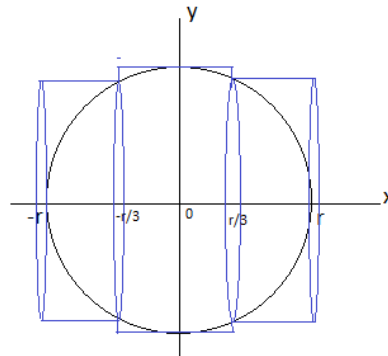


Figura 34.

As alturas dos cilindros são $\frac{2r}{3}$ e os centros de suas bases representadas no eixo x são:

$$1) -r + \frac{2r}{3} = -\frac{r}{3}$$

$$2) -\frac{r}{3} + \frac{2r}{3} = \frac{r}{3}$$

$$3) \frac{r}{3} + \frac{2r}{3} = r$$

Calculando o volume do primeiro cilindro, temos:

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(-\frac{r}{3}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{9}}$$

$$y = \sqrt{\frac{8 \cdot r^2}{9}}$$

Assim:

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_1 = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{8 \cdot r^2}{9}} \right)^2 \cdot \frac{2r}{3}$$

$$V_1 = \frac{16 \cdot \pi \cdot r^3}{27}$$

Calculando o volume do segundo cilindro, temos:

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - 0^2}$$

$$y = \sqrt{r^2}$$

Assim: $V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$

$$V_2 = \pi \cdot \left(\sqrt{r^2} \right)^2 \cdot \frac{2r}{3}$$

$$V_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Calculando o volume do terceiro cilindro, temos:

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{9}}$$

$$y = \sqrt{\frac{8r^2}{9}}$$

Assim:

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_3 = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{8 \cdot r^2}{9}} \right)^2 \cdot \frac{2r}{3}$$

$$V_3 = \frac{16 \cdot \pi \cdot r^3}{27}$$

Logo, o volume total é:

$$V_{total} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_{total} = \frac{16 \cdot \pi \cdot r^3}{27} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} + \frac{16 \cdot \pi \cdot r^3}{27}$$

$$V_{total} = \frac{50 \cdot \pi \cdot r^3}{27}$$

➤ **Dividindo a esfera em 4 cilindros:**

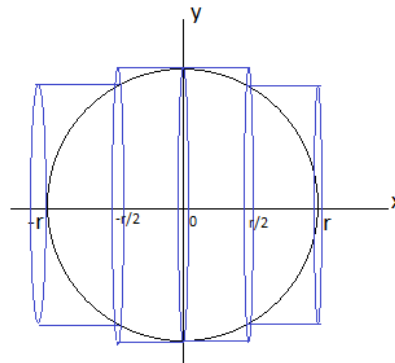


Figura 35.

As alturas dos cilindros são $\frac{2r}{4}$ e os centros de suas bases representadas no eixo x são:

- 1) $-r + \frac{2r}{4} = -\frac{r}{2}$
- 2) $-\frac{r}{2} + \frac{2r}{4} = 0$
- 3) $0 + \frac{2r}{4} = \frac{r}{2}$
- 4) $\frac{r}{2} + \frac{2r}{4} = r$

Calculando o volume do primeiro cilindro, temos:

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

$$y = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

Assim,

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_1 = \pi \cdot \frac{3 \cdot r^2}{4} \cdot \frac{r}{2}$$

$$V_1 = \frac{3 \cdot \pi \cdot r^3}{8}$$

Calculando o volume do segundo cilindro, temos:

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - 0}$$

$$y = \sqrt{r^2}$$

Assim,

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{r}{2}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot r^3}{2}$$

Calculando o volume do terceiro cilindro, temos:

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - 0}$$

$$y = \sqrt{r^2}$$

Assim,

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_3 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{r}{2}$$

$$V_3 = \frac{\pi \cdot r^3}{2}$$

Calculando o volume do quarto cilindro, temos:

$$V_4 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

$$y = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

Assim,

$$V_4 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_4 = \pi \cdot \frac{3 \cdot r^2}{4} \cdot \frac{r}{2}$$

$$V_4 = \frac{3 \cdot \pi \cdot r^3}{8}$$

Logo, o volume total é:

$$V_{total} = \frac{3 \cdot \pi \cdot r^3}{8} + \frac{\pi \cdot r^3}{2} + \frac{\pi \cdot r^3}{2} + \frac{3 \cdot \pi \cdot r^3}{8}$$

$$V_{total} = \frac{14 \cdot \pi \cdot r^3}{8}$$

➤ **Dividindo a esfera em 5 cilindros:**

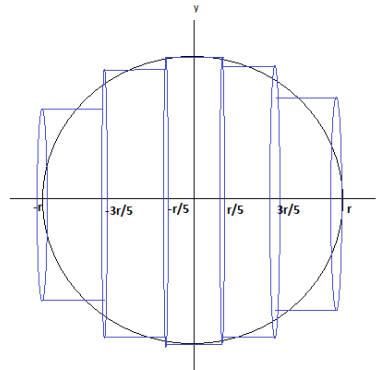


Figura 36.

As alturas dos cilindros são $\frac{2r}{5}$ e os centros de suas bases representadas no eixo x são:

- 1) $-r + \frac{2r}{5} = -\frac{3r}{5}$
- 2) $-\frac{3r}{5} + \frac{2r}{5} = -\frac{r}{5}$
- 3) $-\frac{r}{5} + \frac{2r}{5} = \frac{r}{5}$
- 4) $\frac{r}{5} + \frac{2r}{5} = \frac{3r}{5}$
- 5) $\frac{3r}{5} + \frac{2r}{5} = r$

Calculando o volume do primeiro cilindro, temos:

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(-\frac{3 \cdot r}{5}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{16 \cdot r^2}{25}}$$

Assim,

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_1 = \pi \cdot \frac{16 \cdot r^2}{25} \cdot \frac{2r}{5}$$

$$V_1 = \frac{32 \cdot \pi \cdot r^3}{125}$$

Calculando o volume do segundo cilindro, temos:

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(-\frac{r}{5}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{24 \cdot r^2}{25}}$$

Assim,

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_2 = \pi \cdot \frac{24 \cdot r^2}{25} \cdot \frac{2r}{5}$$

$$V_2 = \frac{48 \cdot \pi \cdot r^3}{125}$$

Calculando o volume do terceiro cilindro, temos:

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - 0^2}$$

$$y = \sqrt{r^2}$$

Assim,

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_3 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{2r}{5}$$

$$V_3 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{5}$$

Calculando o volume do quarto cilindro, temos:

$$V_4 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{5}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{24 \cdot r^2}{25}}$$

Assim,

$$V_4 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_4 = \pi \cdot \frac{24 \cdot r^2}{25} \cdot \frac{2r}{5}$$

$$V_4 = \frac{48 \cdot \pi \cdot r^3}{125}$$

Calculando o volume do quinto cilindro, temos:

$$V_5 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Raio da base:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3 \cdot r}{5}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{16 \cdot r^2}{25}}$$

Assim,

$$V_5 = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_5 = \pi \cdot \frac{16 \cdot r^2}{25} \cdot \frac{2r}{5}$$

$$V_5 = \frac{32 \cdot \pi \cdot r^3}{125}$$

Logo, teremos um volume total igual a:

$$V_{total} = \frac{32 \cdot \pi \cdot r^3}{125} + \frac{48 \cdot \pi \cdot r^3}{125} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{5} + \frac{48 \cdot \pi \cdot r^3}{125} + \frac{32 \cdot \pi \cdot r^3}{125}$$

$$V_{total} = \frac{210 \cdot \pi \cdot r^3}{125}$$

Observe o que está acontecendo:

- 1) Quando dividimos a esfera em 2 partes: $V_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r^3$
- 2) Quando dividimos a esfera em 3 partes: $V_{total} = \frac{50 \cdot \pi \cdot r^3}{27} \cong 1,85 \cdot \pi \cdot r^3$
- 3) Quando dividimos a esfera em 4 partes: $V_{total} = \frac{14 \cdot \pi \cdot r^3}{8} \cong 1,75 \cdot \pi \cdot r^3$
- 4) Quando dividimos a esfera em 5 partes: $V_{total} = \frac{210 \cdot \pi \cdot r^3}{125} \cong 1,68 \cdot \pi \cdot r^3$

Pelo capítulo anterior sabemos que o volume de uma esfera é representado por

$$V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \cong 1,33 \cdot \pi \cdot r^3$$

Dessa forma podemos concluir que quanto mais se divide a esfera mais próximo se chega ao seu volume.

➤ **Analisando agora a divisão da esfera em n cilindros de mesma altura:**

- O volume da esfera é o somatório do volumes de n cilindros,
- A altura dos n cilindros é dada por: $H = \frac{2 \cdot r}{n}$
- Os raios desses cilindros são obtidos substituindo os valores de x em $y = \sqrt{r^2 - x^2}$,

Assim:

Valor de x	Valor do raio ao quadrado
$-r + \frac{2.r}{n}$	$r^2 - \left(-r + \frac{2.r}{n}\right)^2$
$\left(-r + \frac{2.r}{n}\right) + \frac{2.r}{n}$	$r^2 - \left[\left(-r + \frac{2.r}{n}\right) + \frac{2.r}{n}\right]^2$
$\left[\left(-r + \frac{2.r}{n}\right) + \frac{2.r}{n}\right] + \frac{2.r}{n}$	$r^2 - \left\{\left[\left(-r + \frac{2.r}{n}\right) + \frac{2.r}{n}\right] + \frac{2.r}{n}\right\}^2$
.	.
.	.
.	.
$-r + \frac{2.r.i}{n}$	$r^2 - \left(-r + \frac{2.r.i}{n}\right)^2$

Assim o volume da esfera é:

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot \left[r^2 - \left(-r + \frac{2.r.i}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{2.r}{n}$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left[r^2 - \left(-r + \frac{2.r.i}{n}\right)^2 \right] \cdot r$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left[r^2 - \frac{4.r^2.i^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{2.r.i}{n} \cdot r - r^2 \right] \cdot r$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{4.r^2.i^2}{n^2} + \frac{4.r^2.i}{n} \right] \cdot r$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{4.r^3.i}{n} - \frac{4.r^3.i^2}{n^2} \right]$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{4.r^3}{n} \left[i - \frac{i^2}{n} \right]$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.\pi}{n} \cdot \frac{4.r^3}{n} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{i^2}{n} \right)$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8.\pi.r^3}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n} \right)$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 \right)$$

Observe a demonstração de $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ abaixo.

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{n^2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2 + n}{2} - \frac{2n^2 + n + 2n + 1}{6} \right)$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{n^2} \cdot \frac{3n^2 + 3n - 2n^2 - 3n - 1}{6}$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{n^2} \cdot \frac{n^2 - 1}{6}$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2}{6} - \frac{1}{6} \right) \right]$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6} - \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6 \cdot n^2} \right)$$

$$V_{esfera} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6 \cdot n^2}$$

$$V_{esfera} = \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6}$$

$$V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

c.q.d.

Demonstração

Vamos mostrar agora que:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \quad (\text{afirmação 1})$$

Note que:

$P(1): 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6}$ é verdadeira.

Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ é verdadeira, isto é, a afirmação 1 é válida. Somando $(n+1)^2$ a ambos os lados da igualdade da afirmação 1, temos:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot 6 \cdot (n+1)^2}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot [n \cdot (2n+1) \cdot 6 \cdot (n+1)]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot [(n+1) + 1] \cdot [2 \cdot (n+1) + 1]}{6}$$

Estabelecendo assim a veracidade de $P(n+1)$.

Portanto a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação

Considere uma esfera de raio 1, vamos usar a aproximação:

$$V_{esfera} \cong \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6} - \frac{8 \cdot \pi \cdot r^3}{6 \cdot n^2} \right)$$

Para obter a seguinte tabela:

Valores atribuídos para n	Volume encontrado para esfera
2	3,141592653589
3	3,723369070921
5	4,021238596594
10	4,146902302738
20	4,178318229274
50	4,187114688704
100	4,188371325765
500	4,188773449625

1000	4,188786015996
10000	4,188790162898
100000	4,188790204367
1000000	4,188790204782

Observe que o volume da esfera de raio 1 é aproximadamente 4,188790204786 e pela tabela verificamos que quanto mais cilindros utilizamos mais próximo chegamos nesse valor.

2.2.6 Volume do Prisma

Usando o cálculo integral mostraremos que o volume de um prisma reto, de altura c e cuja base é um retângulo de dimensões a e b , é: $V = abc$

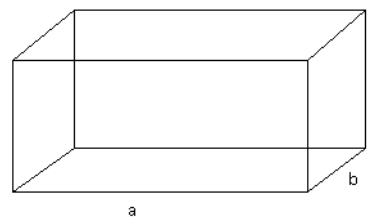


Figura 37.

Transportando este prisma para o plano cartesiano de tal forma que a origem do plano esteja em um dos vértices do prisma e que uma aresta do prisma esteja sobre o eixo x , temos:

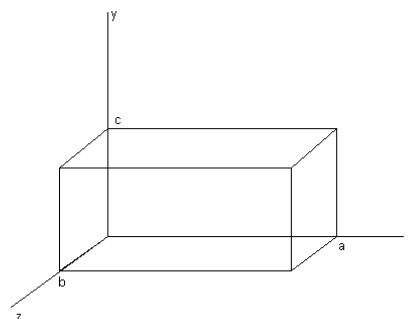


Figura 38.

Para cada corte que fizemos de forma transversal na altura, temos que a secção obtida é um retângulo paralelo à base, cuja área é $b \cdot c$.

Assim, o volume do prisma, é:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = \int_0^a b \cdot c dx$$

$$V = b \cdot c \cdot x \Big|_0^a$$

$$V = b \cdot c \cdot a - b \cdot c \cdot 0$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

c.q.d.

O cálculo é feito de fórmula análoga para qualquer prisma:

Observe o prisma triangular:

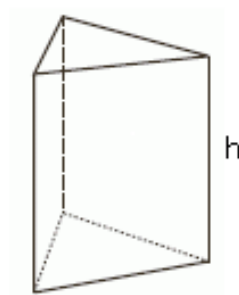


Figura 39.

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Considerando que a área do triângulo seja A_b (área da base) temos,

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = \int_a^b A_b dx$$

$$V = A_b \cdot x \Big|_0^h$$

$$V = A_b \cdot (h - 0)$$

$$V = A_b \cdot h$$

2.2.7 Volume da Pirâmide

Considerando uma pirâmide de base quadrada de lado L e altura h .

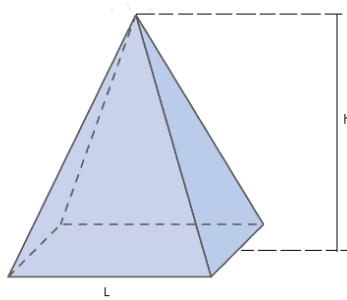


Figura 40.

Colocamos a origem o no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo de seu eixo central. Qualquer plano P_x que passa por x sendo perpendicular ao eixo x intercepta a pirâmide em um quadrado com lado de comprimento s . Podemos expressar s em termos de x observando que, pelos triângulos semelhantes, temos:

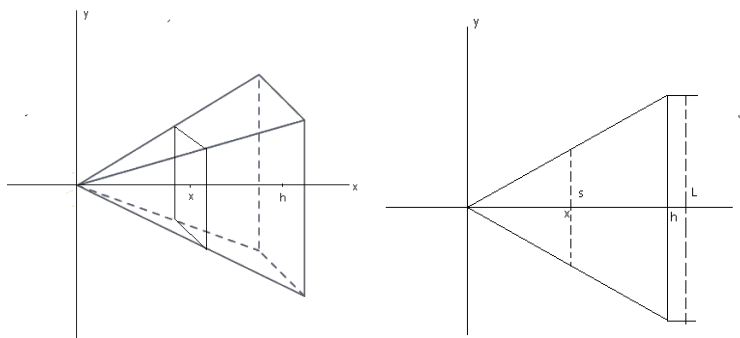


Figura 41.

Usando semelhança entre triângulos, temos:

$$\frac{x}{h} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{s}{L}$$

De modo que $s = \frac{Lx}{h}$. Portanto, a área da secção transversal é:

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2} \cdot x^2$$

A pirâmide está entre $x = 0$ e $x = h$, então o seu volume é:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h A(x) dx \\
 V &= \int_0^h \frac{L^2}{h^2} \cdot x^2 dx \\
 V &= \frac{L^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx \\
 V &= \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h \\
 V &= \frac{L^2}{h^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\
 V &= \frac{L^2 \cdot h}{3}
 \end{aligned}$$

c.q.d.

Onde L^2 é a área da base da pirâmide.

$$\therefore \text{Volume da pirâmide é: } V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

De maneira análoga se conclui a fórmula para qualquer pirâmide não importando a figura poligonal que formar a base.

Podemos pensar também na conclusão da fórmula do volume da pirâmide como concluimos o volume do cone.

Se fatiarmos a pirâmide em n partes, em cada parte formará um prisma a mesma metodologia das seções anteriores concluiremos a fórmula de volume da pirâmide.

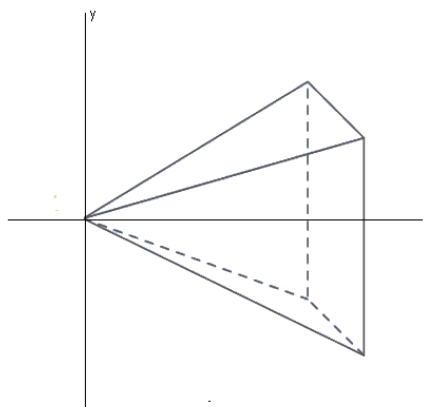


Figura 42.

➤ **Se dividirmos a pirâmide em dois prismas:**

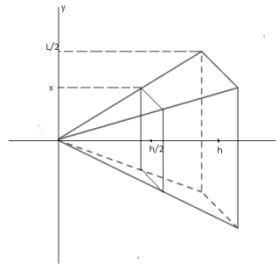


Figura 43.

Por semelhança entre triângulos conseguimos encontrar um valor para x em função de L e h .

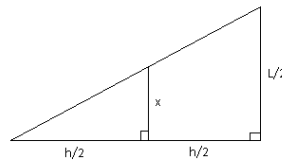


Figura 44.

$$\frac{x}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{h}$$

$$x \cdot h = \frac{L \cdot h}{4}$$

$$x = \frac{L}{4}$$

$$V_{pirâmide} \cong V_{prisma1} + V_{prisma2}$$

$$V_{pirâmide} \cong L^2 \cdot \frac{h}{2} + (2 \cdot x)^2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$V_{pirâmide} \cong L^2 \cdot \frac{h}{2} + \left(2 \cdot \frac{L}{4}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$V_{pirâmide} \cong L^2 \cdot \frac{h}{2} + \frac{4 \cdot L^2}{16} \cdot \frac{h}{2}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(1 + \frac{4}{16}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{2}$$

$$V_{pirâmide} \cong \frac{20}{16} \cdot \frac{L^2 \cdot h}{2}$$

$$V_{pirâmide} \cong \frac{20.L^2.h}{32}$$

➤ Se dividirmos a pirâmide em três prismas:

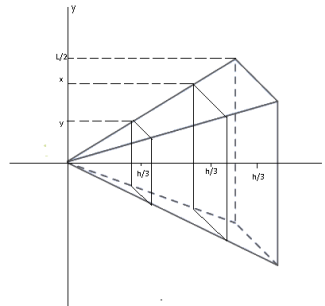


Figura 45.

Por semelhança entre triângulos conseguimos encontrar um valor para x e y em função de L e h .

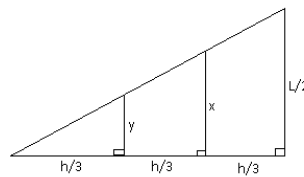


Figura 46.

$$\frac{x}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{2.h}{3}}{h} \cdot \frac{y}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{h}{3}}{h}$$

$$x.h = \frac{2.L.h}{6}$$

$$y.h = \frac{L.h}{6}$$

$$x = \frac{2.L}{6}$$

$$y = \frac{L}{6}$$

$$V_{pirâmide} \cong V_{prisma1} + V_{prisma2} + V_{prisma3}$$

$$V_{pirâmide} \cong L^2 \cdot \frac{h}{3} + (2.x)^2 \cdot \frac{h}{3} + (2.y)^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V_{pirâmide} \cong L^2 \cdot \frac{h}{3} + \left(2 \cdot \frac{2.L}{6}\right)^2 \cdot \frac{h}{3} + \left(2 \cdot \frac{L}{6}\right)^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(1 + \frac{4.4}{36} + \frac{4}{36}\right) \cdot \frac{L^2.h}{3}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(1 + \frac{16}{36} + \frac{4}{36}\right) \cdot \frac{L^2.h}{3}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(\frac{36 + 16 + 4}{36} \right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{3}$$

$$V_{pirâmide} \cong \frac{56 \cdot L^2 \cdot h}{108}$$

➤ Se dividirmos a pirâmide em quatro prismas:

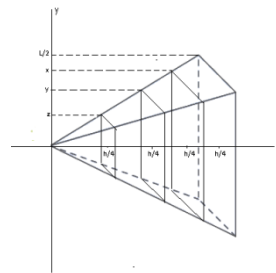


Figura 47.

Por semelhança entre triângulos conseguimos encontrar um valor para x, y e z em função de L e h .

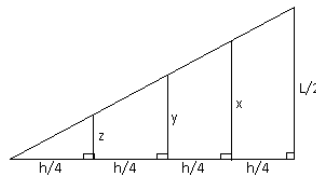


Figura 48.

$$\frac{x}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{3 \cdot h}{4}}{h} \cdot \frac{y}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{2 \cdot h}{4}}{h} \cdot \frac{z}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{h}{4}}{h}$$

$$x \cdot h = \frac{3 \cdot L \cdot h}{8}$$

$$y \cdot h = \frac{2 \cdot L \cdot h}{8}$$

$$z \cdot h = \frac{L \cdot h}{8}$$

$$x = \frac{3 \cdot L}{8}$$

$$y = \frac{2 \cdot L}{8}$$

$$z = \frac{L}{8}$$

$$V_{pirâmide} \cong V_{prisma1} + V_{prisma2} + V_{prisma3} + V_{prisma4}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(\frac{2 \cdot L}{2} \right)^2 \cdot \frac{h}{4} + (2 \cdot x)^2 \cdot \frac{h}{4} + (2 \cdot y)^2 \cdot \frac{h}{4} + (2 \cdot z)^2 \cdot \frac{h}{4}$$

$$V_{pirâmide} \cong L^2 \cdot \frac{h}{4} + \left(2 \cdot \frac{3 \cdot L}{8} \right)^2 \cdot \frac{h}{4} + \left(2 \cdot \frac{2 \cdot L}{8} \right)^2 \cdot \frac{h}{4} + \left(2 \cdot \frac{L}{8} \right)^2 \cdot \frac{h}{4}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(1 + \frac{4.9}{64} + \frac{4.4}{64} + \frac{4}{64}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{4}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(\frac{64 + 36 + 16 + 4}{64}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{4}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(\frac{120}{64}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{4}$$

$$V_{pirâmide} \cong \frac{120 \cdot L^2 \cdot h}{256}$$

➤ Se dividirmos a pirâmide em cinco prismas:

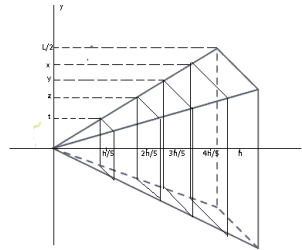


Figura 49.

Por semelhança entre triângulos conseguimos encontrar um valor para x, y, z e t em função de L e h .

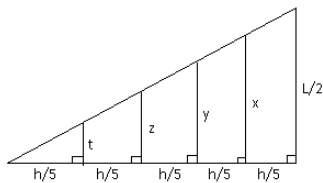


Figura 50.

$$\frac{x}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{4.h}{5}}{h} \frac{y}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{3.h}{5}}{h} \frac{z}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{2.h}{5}}{h} \frac{t}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{h}{5}}{h}$$

$$x \cdot h = \frac{4 \cdot L \cdot h}{10}$$

$$y \cdot h = \frac{3 \cdot L \cdot h}{10}$$

$$z \cdot h = \frac{2 \cdot L \cdot h}{10}$$

$$t \cdot h = \frac{L \cdot h}{10}$$

$$x = \frac{4 \cdot L}{10}$$

$$y = \frac{3 \cdot L}{10}$$

$$z = \frac{2 \cdot L}{10}$$

$$t = \frac{L}{10}$$

$$V_{pirâmide} \cong V_{prisma1} + V_{prisma2} + V_{prisma3} + V_{prisma4} + V_{prisma5}$$

$$V_{pirâmide} \cong \left(\frac{2 \cdot L}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} + (2 \cdot x)^2 \cdot \frac{h}{5} + (2 \cdot y)^2 \cdot \frac{h}{5} + (2 \cdot z)^2 \cdot \frac{h}{5} + (2 \cdot t)^2 \cdot \frac{h}{5}$$

$$\begin{aligned}
V_{pirâmide} &\cong L^2 \cdot \frac{h}{5} + \left(2 \cdot \frac{4 \cdot L}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} + \left(2 \cdot \frac{3 \cdot L}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} + \left(2 \cdot \frac{2 \cdot L}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} + \left(2 \cdot \frac{L}{10}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} \\
V_{pirâmide} &\cong \left(1 + \frac{4 \cdot 16}{100} + \frac{4 \cdot 9}{100} + \frac{4 \cdot 4}{100} + \frac{4}{100}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{5} \\
V_{pirâmide} &\cong \left(\frac{100 + 64 + 36 + 16 + 4}{100}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{5} \\
V_{pirâmide} &\cong \left(\frac{220}{100}\right) \cdot \frac{L^2 \cdot h}{5} \\
V_{pirâmide} &\cong \frac{220 \cdot L^2 \cdot h}{500}
\end{aligned}$$

➤ **Se dividirmos a pirâmide em n prismas:**

A altura será dividida em n partes iguais. A altura de cada prisma formado será $\frac{h}{n}$.

Os lados dos quadrados que serão formados como base de cada prisma possui medidas iguais a:

$$2 \cdot \frac{L}{2}, 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot L}{2n}, 2 \cdot \frac{(n-2) \cdot L}{2n}, \dots, 2 \cdot \frac{L}{2n}$$

Assim, o volume da pirâmide é:

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(2 \cdot \frac{L}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} + \left(2 \cdot \frac{(n-1) \cdot L}{2n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} + \left(2 \cdot \frac{(n-2) \cdot L}{2n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} + \dots + \left(\frac{2 \cdot L}{2n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} \right] \\
V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[L^2 \cdot \frac{h}{n} + \left(\frac{(n-1) \cdot L}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} + \left(\frac{(n-2) \cdot L}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} + \dots + \left(\frac{L}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{n} \right] \\
V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 + \left(\frac{(n-2)}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right] \cdot L^2 \cdot \frac{h}{n} \\
V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot \left[\frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1}{n^2} \right] \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Observe que, com $n \geq 2$: $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$

Assim,

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot \left[\frac{1 + 4 + 9 + \dots + n^2}{n^2} \right] \cdot \frac{1}{n} \\
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot [1 + 4 + 9 + \dots + n^2] \cdot \frac{1}{n^3} \\
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot \frac{1}{6 \cdot n^3} \cdot (n^2 + n) \cdot (2n+1) \\
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot \frac{1}{6 \cdot n^3} \cdot (2 \cdot n^3 + n^2 + 2 \cdot n^2 + n) \\
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^2 \cdot h \cdot \left(\frac{2 \cdot n^3}{6 \cdot n^3} + \frac{3 \cdot n^2}{6 \cdot n^3} + \frac{n}{6 \cdot n^3} \right) \\
 V &= L^2 \cdot h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \\
 V &= \frac{L^2 \cdot h}{3} \\
 V &= \frac{A_b \cdot h}{3}
 \end{aligned}$$

c.q.d.

Observação:

Considere uma pirâmide base quadrada de lado 1 e altura h igual a 3, usando a aproximação:

$$V \cong L^2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

Obtemos a seguinte tabela.

Valores atribuídos para n	Volume encontrado para pirâmide
2	1,875000000000
3	1,555555555555
5	1,320000000000

10	1,155000000000
20	1,076250000000
50	1,030200000000
100	1,015050000000
500	1,003002000000
1000	1,001500500000
10000	1,000150005000
100000	1,000015000050
1000000	1,000001500000

Observe que o volume da pirâmide de base quadrada de lado 1 e altura 3 é $V = 1$ e quanto mais prismas formamos nessa pirâmide mais próximo chegamos deste valor.

3. A ideia de limite aplicada a outros sólidos geométricos

Neste capítulo, utilizaremos cortes transversais nas figuras, como analisado no capítulo anterior, em figuras espaciais mais conhecidas como a esfera, o cone e a pirâmide. Em seguida, aplicaremos esta ideia em figuras formadas pela rotação sobre o eixo x de uma equação, como a hipérbole, elipse e no fim generalizaremos este procedimento para qualquer função.

3.1 Volume do sólido obtido rotacionando uma hipérbole

Considere a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$, isolando y e tomando a parte positiva ficamos com $f(x) = y = \sqrt{1 + x^2}$. Para efeito deste cálculo vamos considerar esta função, com domínio $[-1, 1]$. Rotacionando o gráfico desta função em torno do eixo x teremos um sólido S parecido com um banquinho, (carretel de linha).

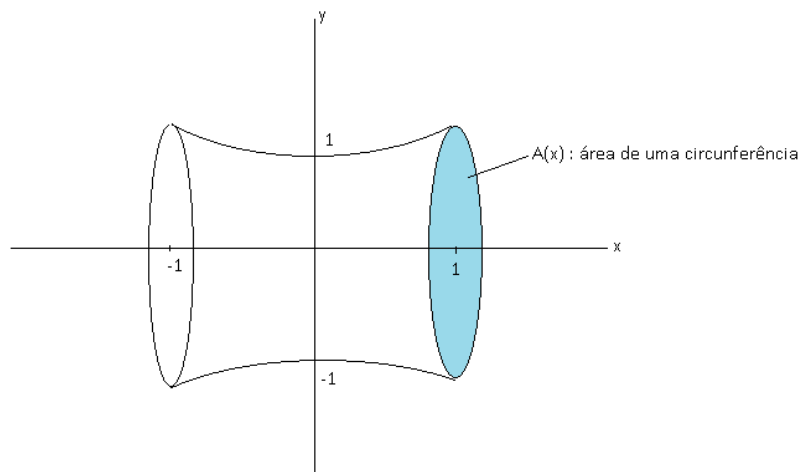


Figura 51.

Calculando o volume desse sólido S , temos:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = 2 \cdot \int_0^1 A(x) dx$$

$$V = 2. \int_0^1 \pi. R^2 dx$$

$$V = 2. \int_0^1 \pi. \left(\sqrt{1+x^2} \right)^2 dx$$

$$V = 2. \int_0^1 \pi. (1+x^2) dx$$

$$V = 2. \pi. \int_0^1 (1+x^2) dx$$

$$V = 2. \pi. \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$V = 2. \pi. \left[\left(1 + \frac{1}{3} \right) - \left(0 + \frac{0}{3} \right) \right]$$

$$V = 2. \pi. \frac{4}{3}$$

$$V = \frac{8. \pi}{3}$$

➤ Resolvendo a questão por partições apenas na parte positiva do eixo x , pois o valor do volume do sólido será o mesmo na parte negativa do eixo:

- Dividindo a figura em n planos perpendiculares ao eixo x , assim:

$$\checkmark \quad x_1 = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{n}$$

$$\checkmark \quad x_2 = \frac{2}{n} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{n}$$

$$\checkmark \quad x_3 = \frac{3}{n} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{1 + \frac{9}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{n}$$

·
·
·

$$\checkmark \quad x_n = \frac{n}{n} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{1 + \frac{n^2}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{n}$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \pi \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \pi \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{9}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots \right. \\ \left. + \pi \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{n^2}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} + 1 + \frac{4}{n^2} + 1 + \frac{9}{n^2} + \dots + 1 + \frac{n^2}{n^2} \right)$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \left(n + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{9}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right)$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{9}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \right)$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{n^3} \cdot (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6} \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{2 \cdot n^3}{6} + \frac{3 \cdot n^2}{6} + \frac{n}{6} \right) \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6 \cdot n^2} \right]$$

$$V = \pi \cdot \frac{4}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi}{3}$$

Como este volume encontrado está relacionado somente ao semi – eixo positivo de x , então, este resultado deverá ser multiplicado por 2, assim o volume do sólido S formado é:

$$V_S = \frac{8 \cdot \pi}{3}$$

Observação:

Analisando esta hipérbole rotacionada sobre o eixo x , limitada de $[-1, 1]$ e atribuindo alguns valores para n e

$$Usando, \quad V = \pi \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6 \cdot n^2} \right]$$

Temos:

Valores para n	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{6 \cdot n^2}$	$V_S = 2V$
2	0,2500000000	0,0416666667	10,2101761242
3	0,1666666667	0,0185185185	9,5411332442
5	0,1000000000	0,0066666667	9,0477868423
10	0,0500000000	0,0016666667	8,7022116504
20	0,0250000000	0,0004166667	8,5372780361
50	0,0100000000	0,0000666667	8,4408311417

100	0,0050000000	0,0000166667	8,4091010559
500	0,0010000000	0,0000006667	8,3838677837
1000	0,0005000000	0,0000001667	8,3807230494
10000	0,0000500000	0,0000000017	8,3778945793
100000	0,0000050000	0,0000000007	8,3776118256
1000000	0,0000005000	0,0000000000	8,3775835517

- Volume exato da hipérbole da hipérbole limitada rotacionado sobre o eixo x :

$$V_S = \frac{8\pi}{3}$$

- Usando o valor de π , teremos um volume aproximado com dez casas decimais de:

$$V = 8,3775804096$$

Observe que quanto maior o valor atribuído para n , mais próximos de zero $\frac{1}{2n}$ e $\frac{1}{6n^2}$ se tornam e o volume se aproxima cada vez mais do volume exato do sólido S .

3.2 Volume do sólido obtido rotacionando uma elipse

Considere a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Isolando y teremos: $f(x) = y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - x^2}$ com domínio $[-2, 2]$. Rotacionando o gráfico desta função em torno do eixo x ficaremos com um sólido S parecido com um barril.

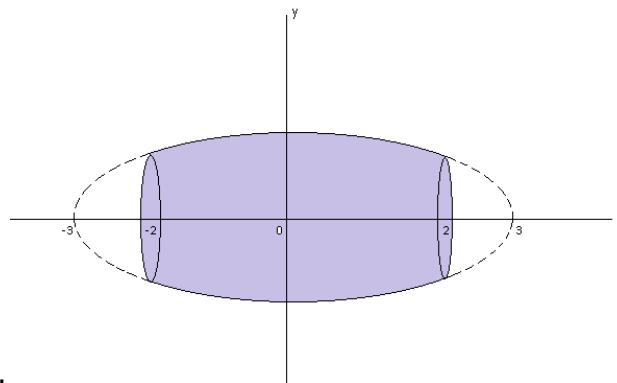


Figura 52.

Calculando o volume dessa figura usando integral, temos:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = 2 \cdot \int_0^2 \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx$$

$$V = 2 \cdot \int_0^2 \pi \cdot \frac{4}{9} \cdot (9 - x^2) dx$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{4}{9} \cdot \int_0^2 (9 - x^2) dx$$

$$V = \frac{8 \cdot \pi}{9} \cdot \left[9x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^2$$

$$V = \frac{8 \cdot \pi}{9} \cdot \left[\left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(9 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \frac{8 \cdot \pi}{9} \cdot \left[\left(18 - \frac{8}{3} \right) \right]$$

$$V = \frac{8 \cdot \pi}{9} \cdot \frac{46}{3}$$

$$V = \frac{368 \cdot \pi}{27}$$

➤ Resolvendo a questão por partições:

- Dividindo a figura em n planos perpendiculares ao eixo x , e calculando o volume V do sólido gerado pela rotação apenas no eixo positivo, temos:

$$\checkmark \quad x_1 = \frac{2}{n} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{n}$$

$$\checkmark \quad x_2 = \frac{4}{n} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{16}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{n}$$

$$\checkmark \quad x_3 = \frac{6}{n} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{36}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{n}$$

$$\checkmark \quad x_n = \frac{2.n}{n} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{4.n^2}{n^2}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{n}$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{n} + \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{16}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{n} + \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{36}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{n} + \dots \right. \\ \left. + \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9 - \frac{4.n^2}{n^2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{n} \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{n} \cdot \left(9 - \frac{4}{n^2} \right) + \pi \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{n} \cdot \left(9 - \frac{16}{n^2} \right) + \pi \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{n} \cdot \left(9 - \frac{36}{n^2} \right) + \dots \right. \\ \left. + \pi \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{n} \cdot \left(9 - \frac{4.n^2}{n^2} \right) \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8.\pi}{9.n} \cdot \left(9 - \frac{4}{n^2} + 9 - \frac{16}{n^2} + 9 - \frac{36}{n^2} + \dots + 9 - \frac{4.n^2}{n^2} \right) \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8.\pi}{9.n} \cdot \left(9.n - \frac{1}{n^2} \cdot (4 + 16 + 36 + \dots + (2.n)^2) \right) \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8.\pi - \frac{8.\pi}{9.n^3} \cdot (4 + 16 + 36 + \dots + (2.n)^2) \right]$$

Observe que:

$$4 + 16 + 36 + \dots + (2.n)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2.n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 4.n^2 = 4. \sum_{n=0}^{\infty} n^2 = 4. \left(\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6} \right)$$

Assim:

$$4 + 16 + 36 + \dots + (2.n)^2 = \frac{8.n^3}{6} + \frac{12.n^2}{6} + \frac{4.n}{6}$$

Com isso, retornando ao limite podemos afirmar que:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8.\pi - \frac{8.\pi}{9.n^3} \cdot \left(\frac{8.n^3}{6} + \frac{12.n^2}{6} + \frac{4.n}{6} \right) \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8.\pi - \frac{64.\pi}{54} - \frac{96.\pi}{54.n} - \frac{32.\pi}{54.n^2} \right]$$

$$V = \left[8.\pi - \frac{64.\pi}{54} \right]$$

$$V = \frac{432.\pi - 64.\pi}{54}$$

$$V = \frac{368.\pi}{54}$$

Como este volume encontrado está relacionado somente ao semi – eixo positivo de x , então, este resultado deverá ser multiplicado por 2, assim o volume da figura formada é:

$$V = \frac{368.\pi}{27}$$

Observação:

Analisando esta elipse rotacionada sobre o eixo x , limitada de $[-2, 2]$ e atribuindo alguns valores para n e usando,

$$V(n) = \left[8.\pi - \frac{64.\pi}{54} - \frac{96.\pi}{54.n} - \frac{32.\pi}{54.n^2} \right]$$

Temos:

Valores para n	$\frac{96.\pi}{54.n}$	$\frac{32.\pi}{54.n^2}$	$2V(n)$
2	2,7925268032	04654211339	36,3028484415
3	1,8616845355	0,2068538373	38,6816675701
5	1,1170107213	0,0744673814	40,4357881102
10	0,5585053606	0,0186168453	41,6644999036
20	0,2792526803	0,0046542113	42,2509305323
50	0,1117010721	0,0007446738	42,5938528237
100	0,0558505361	0,0001861684	42,7066709067
500	0,0111701072	0,0000074467	42,7963892077
1000	0,0055850536	0,0000018617	42,8075704850
10000	0,0005585054	0,0000000186	42,8176272676
100000	0,0000558505	0,0000000002	42,8186326141
1000000	0,0000055850	0,0000000000	42,8187331455

➤ Volume exato da elipse: $V = \frac{368.\pi}{27}$

➤ Usando o valor de π , teremos um volume aproximado com dez casas decimais de:

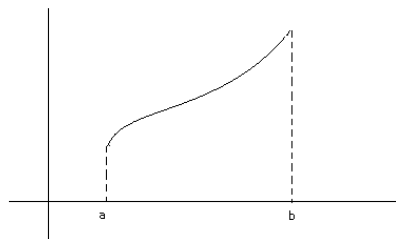
$$V = 42,8187443156$$

Observe que quanto maior o valor atribuído para n , $\frac{96.\pi}{54.n}$ e $\frac{32.\pi}{54.n^2}$ ficam mais próximos de zero e o volume se aproxima cada vez mais do volume exato da do sólido S (elipse rotacionada).

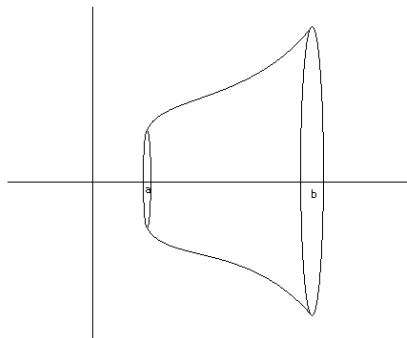
3.3 Volume do sólido obtido rotacionando uma função qualquer

Vamos agora generalizar este resultado:

Considere uma função $f(x)$ limitada e positiva no intervalo $[a, b]$.



Rotacionando o gráfico de f em torno do eixo x obtemos o seguinte sólido:



Cujo volume é calculado da seguinte forma.

$f(x_n)$: raio da circunferência formada após os cortes perpendiculares ao eixo x .

$\frac{b-a}{n}$: altura dos n cilindros formados.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot [f(x_n)]^2 \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \left[(f(x_1))^2 \cdot \frac{b-a}{n} + (f(x_2))^2 \cdot \frac{b-a}{n} + (f(x_3))^2 \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + (f(x_n))^2 \cdot \frac{b-a}{n} \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{b-a}{n} \cdot [(f(x_1))^2 + (f(x_2))^2 + (f(x_3))^2 + \dots + (f(x_n))^2]$$

Exemplo: Voltando no capítulo 2 seção 2.2.4 e fazendo uso da generalização, observamos um cone formado pela rotação da reta $y = \frac{R}{h} \cdot x$.

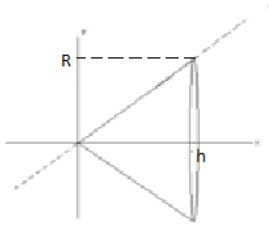


Figura 53.

Considerando: $a = 0$; $b = h$ e $x_i = i \frac{h}{n}$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \left[\left(\frac{R}{h} \cdot x_1 \right)^2 + \left(\frac{R}{h} \cdot x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{R}{h} \cdot x_n \right)^2 \right]$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{R}{h} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{R}{h} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{i \cdot h}{n} \right)^2$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i^2$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{h}{n^3} \cdot R^2 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

c.q.d.

4. Considerações Finais

Na época em que tive que decidir qual seria o tema de minha dissertação, já sabia que estaria relacionado a geometria. Escolha esta por achar que é uma das áreas da matemática mais aplicável no cotidiano das pessoas, mesmo sabendo que é uma barreira para a maioria delas.

Com a aplicabilidade e com a resistência dos alunos me dediquei junto ao meu orientador a mostrar que na geometria, em particular na geometria espacial, podemos trabalhar a apresentação das fórmulas de volumes de uma maneira diferente e não só impostas aos alunos como é feito por muitos.

A apresentação das fórmulas de volumes por desenvolvimento de alguns conteúdos mesmo que não sejam do conhecimento dos alunos, como foi feito neste trabalho com uso de limite, mostra a estes que as fórmulas aplicadas não surgem ao acaso e por isso criamos este trabalho para se tornar mais uma ferramenta para o professor mostrar aos alunos uma geometria mais agradável e motivante.

E é seguindo esta linha de raciocínio, de mostrar aos alunos a origem ou pelo menos a ideia de como surgem algumas fórmulas principalmente em geometria espacial, que este trabalho foi desenvolvido, a fim de solucionar ou minimizar um problema que há muito tempo vem dispersando três pontos fundamentais da Educação Matemática: Professor – interesse – aluno.

Referências

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. 1985. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual.

GUIDORIZZI, H. L. 1998. **Um curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. 2011. **Matemática**. Editora Atual.

PAIVA, M. 2004. **Matemática**. São Paulo: Moderna.

SOUZA, M. H.; SPINELLI, W. 1996. **Matemática**. 2º grau. Ensino Médio. São Paulo: Scipione.

STEWART, J. 2001. **Calculus**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarraet al. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

THOMAS, G. B. 2002. **Cálculo** - Volume 1. Tradução: Paulo Boschcov. São Paulo: Pearson Education do Brasil.