UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CÍCERO DOS SANTOS ALVES

AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UMA ABORDAGEM PARA O PROFESSOR DO ENSINO BÁSICO

JUAZEIRO DO NORTE
2014

CÍCERO DOS SANTOS ALVES

AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UMA ABORDAGEM PARA O PROFESSOR DO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz

JUAZEIRO DO NORTE
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A478f Alves, Cícero dos Santos
As Funções Exponencial e Logarítmica: uma abordagem para o professor do ensino básico / Cícero dos Santos Alves. – 2014.
65 f. : il., enc.; 31cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz

1. Potências. 2. Função exponencial. 3. Função logarítmica. I. Título

CDD 372.7

CÍCERO DOS SANTOS ALVES

AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UMA ABORDAGEM PARA O PROFESSOR DO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Flávio França Cruz

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Calvi D. Cruz Junior

Prof. Ms. Francisco Calvi da Cruz Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Juscelino Pereira Silva

Prof. Dr. Juscelino Pereira da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho à minha amada mãe, Maria das Graças.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder saúde e disposição necessárias para concluir este trabalho.

À minha mãe, minha tia e a meus irmãos pelo apoio incondicional em tudo que construí na vida.

A meus amigos pela ajuda e companheirismo.

Ao professor Flávio França Cruz, por todo apoio, incentivo, orientação além da escolha deste tema.

A todos os professores da URCA e da UFC que contribuíram direta e/ou indiretamente para a conclusão deste curso e deste trabalho.

Finalmente, a CAPES pelo suporte financeiro e ao PROFMAT pelo aprimoramento profissional.

[...]
O meu Deus é o Deus do impossível
e fará o impossível pra voce
e fará o impossível.

Ele é o Senhor,
Ele fará
por ti
o impossível
que ninguém faz;
Ele fará
por mim
por ti
o impossível.
Somente Jesus
o Rei dos Reis e Senhor
transformará
meu viver
assim.
(Trecho da música Deus do Impossível, da cantora Aline Barros.)

RESUMO

Neste trabalho vamos fazer uma abordagem elementar sobre a função exponencial visando entender o significado de potências com expoente natural, inteiro, racional e irracional bem como as propriedades que fazem dela uma das funções mais importantes da Matemática. Paralelamente, será feita outra abordagem mostrando essas propriedades usando uma ferramenta poderosa da Matemática: o cálculo diferencial e integral. Também vamos tratar da função logarítmica por ela ser a inversa da função exponencial e por ser tão importante quanto esta.

Palavras-chave: Potências. Função Exponencial. Função Logarítmica.

ABSTRACT

In this work we make an elementary approach to the exponential function in order to understand the meaning of powers with natural exponent, integer, rational and irrational as well as the properties that make it one of the most important functions of mathematics. In parallel, another approach will be showing these properties using a powerful tool of mathematics: differential and integral calculus. We will also discuss the logarithmic function because it is the inverse of the exponential function and being as important as this.

Keywords: Powers. Exponential Function. Logarithmic Function.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de potências cujo expoente é um número natural, inteiro e até racional no ensino básico é relativamente simples. O problema surge quando queremos ensinar o que é uma potência cujo o expoente é um número irracional. Como vamos justificar, por exemplo, o fato do gráfico de função exponencial $y = a^x$ ser uma curva sem nenhum "buraco" quando x assumir um valor irracional. Agora que isso foi mencionado, começamos a entender a real dimensão deste problema. Exposto tal problema, vamos buscar entender as dificuldades inerentes a ele e explicar como pode ser abordado tal questão no decorrer do texto.

No capítulo 2, será apresentada a função exponencial $y = a^x$ visando dar sentido a potências com expoente natural, inteiro, racional e irracional de forma elementar para que o professor do ensino básico, que venha a ler este trabalho, tenha como explicar a seus alunos, por exemplo, o que é matematicamente uma potência como $3^{\sqrt{2}}$. Também será mostrado o significado, de forma explícita, do termo "crescimento exponencial" e como a função exponencial está relacionada com a progressão geométrica.

No capítulo 3, será feita a apresentação da função logarítmica como sendo a inversa da função exponencial e serão demonstradas as suas propriedades de forma elementar. A representação algébrica e gráfica desta e daquela função serão utilizadas para melhor comparar características entre as duas ou entre elas próprias.

No capítulo 4, será feita a apresentação das funções exponencial e logarítmica a partir da definição do número e e das propriedades da derivada e da integral. Vamos mudar aqui a ordem natural de aparecimento destas funções para melhor organizar e desenvolver as definições e propriedades de tais funções.

No capítulo 5, vamos ver como é feita a apresentação das funções exponencial e logarítmica em alguns livros do ensino médio e vamos comentar a respeito quando julgarmos ser necessário. Com base nas discussões expostas em ÁVILA(1), ÁVILA(2), BONGIOVANNNI(3), DANTE(4), FRAENKEL(6), LIMA(10), LIMA(13) e MANDEL(17) será apresentada uma tabela contendo itens que julgamos ser necessários para que haja de fato uma satisfatória compreensão dos conceitos e propriedades destas funções a qual vai mostrar se DANTE(5), IEZZI *et al*(8), PAIVA(18) e SMOLE e DINIZ(20) tem ou não determinado item para poder melhorar a aprendizagem do leitor.

2 A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos estudar a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = a^x, \text{ onde } a \text{ é uma constante real.}$$

Isso será feito inicialmente estudando os casos em que x é um número natural, inteiro, racional e irracional. Queremos entender, principalmente, o que significa matematicamente potências com expoentes irracionais tais como

$$2^{\sqrt{3}} \quad , \quad 3^{\pi} \quad , \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{e} \quad \text{e} \quad (\sqrt{3})^{\phi}.$$

2.1 Entendendo a potência a^x

Para bem entender o que significa a potência a^x, é preciso estudar tanto a base a quanto o expoente x. Então comecemos pela base. Como estamos visando a função exponencial e ainda não foi dito nada sobre a base a, nosso desejo imediato é definir tal função para todo número real a. Mas, infelizmente, isso não é possível. Vejamos o porquê:

Se $a < 0$, pode não existir o número real a^x como $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$.

Se $a = 0$, $y = 0^x = 0$ somente se x for um número real positivo. Pois se x for um número real negativo ou zero, a expressão 0^x não tem significado[1].

Se $a = 1$, $y = 1^x = 1$ para todo número real x.

Logo, precisamos restringir a função exponencial à potência cuja base seja um número real positivo e diferente de 1. Fazendo isto, o expoente x pode variar livremente pelos números reais sem corrermos o risco de termos uma expressão indeterminada ou, até mesmo, um número inexistente no conjunto dos números reais.

Agora, vamos ver como se define a^x quando x é um número racional ou irracional.

Quando x é um número natural n, temos as igualdades abaixo:

$$a^1 = a \quad , \quad a^2 = a \cdot a \quad , \ldots , \quad a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

Assim, a^n é o produto da multiplicação de a por ele mesmo n vezes.

Quando x é um número inteiro negativo, temos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ onde } n \text{ é um número natural.}$$

Ou seja, a^{-n} é o inverso multiplicativo de a^n.

Quando x é zero, definimos $a^0 = 1$. Uma justificativa para isso está na forma natural em que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, que será mais à frente enunciada, a faz surgir.

[1] 0^0, $0^{-1} = \frac{1}{0}$ e $0^{-\pi} = \frac{1}{0^{\pi}}$ são expressões indeterminadas.

Assim, se fizermos $m = 0$ nessa propriedade, teremos $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \Rightarrow a^n \cdot (a^0 - 1) = 0$. Donde concluímos que a única possibilidade é $a^0 = 1$, já que $a \neq 0$.

Quando x é a fração $\frac{1}{n}$ onde n é um número natural, a potência $a^{\frac{1}{n}}$ é definida como a raiz n-ésima de a e denotamos isto pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$. Assim, dado uma base a e um número natural n, existe um único número real positivo y tal que $y = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. A existência desta raiz provém de resultados como o Teorema do Valor Intermediário, enunciado e demonstrado no Apêndice B, e, mais indiretamente, do Axioma da Completeza de $\mathbb{R}$.

De modo geral, dado um número natural n, teremos

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{e} \quad a^{\frac{1}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}},$$

onde $\sqrt[n]{a}$ é a raiz n-ésima de a,

a é o radicando e

n é o índice.

Veja, por exemplo, que $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \quad \text{e} \quad 5^{\frac{1}{-4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

Quando x é um número racional, ou seja, quando x é uma fração $\frac{m}{n}$ onde m é um número natural e n é um número inteiro não-nulo, então teremos

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \begin{cases} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} & \text{se } n > 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[-n]{a}}\right)^m = \frac{1}{(\sqrt[-n]{a})^m} = \frac{1}{\sqrt[-n]{a^m}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Assim, $a^{\frac{m}{n}}$ é o produto da multiplicação da potência $a^{\frac{1}{n}}$ por ela mesma m vezes.

A função exponencial $y = a^x$, quando x é um número racional, é crescente se $a > 1$, decrescente se $a < 1$ e constante se $a = 1$, pois intuitivamente se $a > 1$ quanto maior o expoente x, maior é a potência a^x e se $a < 1$ quanto maior o expoente x, menor é a potência a^x. Como, por exemplo, $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Podemos fazer um esboço do gráfico com base nessa monotonicidade[2].

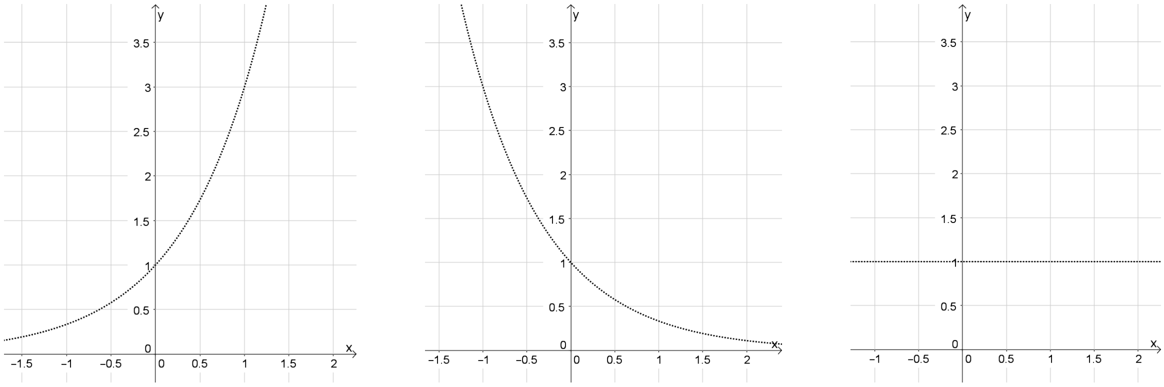
Note que o caso em que a base a for igual a 1 não será considerado quando tratarmos da função exponencial de agora em diante, já que se trata de um caso degenerado. Quando usarmos a expressão *base a*, ficará entendido que a é um número real positivo e diferente de 1;

Quando x é um número irracional, infelizmente não há uma expressão como às que foram usadas para x racional. Assim, precisamos recorrer à expressão decimal de um número real para podermos introduzir uma definição adequada para este caso.

Tal definição está relacionada precisamente na própria definição de número irracional como uma aproximação por números racionais. Ou seja, vamos determinar uma aproximação de a^x por números racionais em função de uma aproximação para

[2] Uma função que é crescente, decrescente ou constante é chamada de função monótona.

Figura 1 – Gráficos de $y = a^x$ para $a = 3, 1/3, 1$, respectivamente, e para $x \in \mathbb{Q}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

o número irracional x por números racionais. Comecemos com um exemplo para motivar tal definição.

Exemplo 2.1. Determine uma aproximação racional para $\sqrt{6}$ com 6 casas decimais exatas.

Vamos aproximá-lo por racionais menores que $\sqrt{6}$ (por falta) e por racionais maiores que $\sqrt{6}$ (por excesso):

$$\begin{aligned} 2 < &\sqrt{6} < 3 \\ 2,4 < &\sqrt{6} < 2,5 \\ 2,44 < &\sqrt{6} < 2,45 \\ 2,449 < &\sqrt{6} < 2,450 \\ 2,4494 < &\sqrt{6} < 2,4495 \\ 2,44948 < &\sqrt{6} < 2,44949 \\ 2,449489 < &\sqrt{6} < 2,449490 \\ 2,4494897 < &\sqrt{6} < 2,4494898 \\ \vdots \quad < &\sqrt{6} < \quad \vdots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das desigualdades acima, concluímos que $\sqrt{6} \cong 2,449489$ com 6 casas decimais exatas. Assim, os números

$$r_1 = 2\ ,\ r_2 = 2,4\ ,\ r_3 = 2,44\ ,\cdots\ ,\ r_n = 2,4494897\ ,\ \cdots$$

são as aproximações racionais de $\sqrt{6}$ por falta, ao passo que os números

$$s_1 = 3\ ,\ s_2 = 2,5\ ,\ s_3 = 2,45\ ,\cdots\ ,\ s_n = 2,4494898\ ,\ \cdots$$

são as aproximações racionais de $\sqrt{6}$ por excesso.

Como explicamos anteriormente, a função exponencial $y = a^x$, onde x é um número racional, é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$. Portanto, para $a > 1$, as desigualdades expressas em 2.1 implicam que

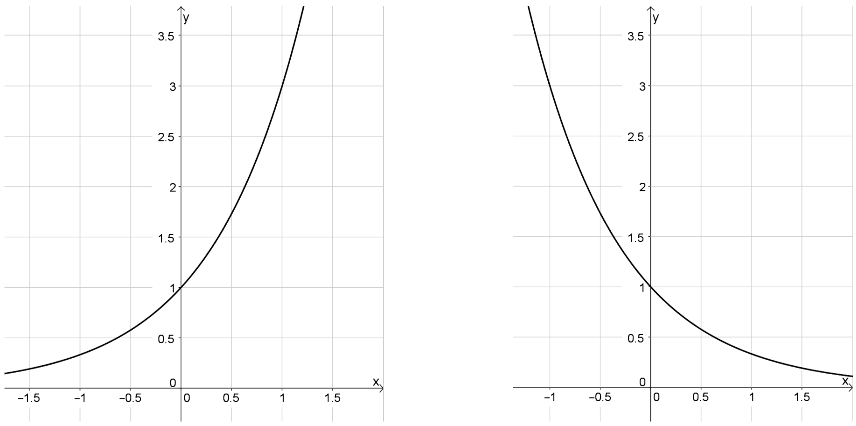
$$
\begin{aligned}
a^2 &< a^{\sqrt{6}} < a^3 \\
a^{2,4} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,5} \\
a^{2,44} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,45} \\
a^{2,449} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,450} \\
a^{2,4494} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,4495} \\
a^{2,44948} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,44949} \\
a^{2,449489} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,449490} \\
a^{2,4494897} &< a^{\sqrt{6}} < a^{2,4494898} \\
\vdots \quad &< a^{\sqrt{6}} < \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Logo, a potência $a^{\sqrt{6}}$ é entendida como o número real cujo valor aproximado é a potência com expoente racional $a^{2,449489}$. Mais precisamente,

Definição 2.1. Dada a potência a^x, onde x é um número irracional, é possível determinar números racionais r_n e s_n tais que $r_n < x < s_n$ impliquem que $a^{r_n} < a^x < a^{s_n}$ caso $a > 1$ ou $a^{s_n} < a^x < a^{r_n}$ caso $a < 1$, onde r_n é uma aproximação por falta e s_n por excesso. Assim, a potência a^x é o número real cuja aproximação por falta é a^{r_n} e por excesso é a^{s_n} caso $a > 1$. No caso $a < 1$, a^{s_n} é uma aproximação de a^x por falta e a^{s_n} por excesso. E tais aproximações podem ser conseguidas com tantas casas decimais exatas quanto se queira, bastando para isto aumentar o valor de n.

Observe que r_n e s_n existem em virtude do Axioma da Completeza de $\mathbb{R}$.

Figura 2 – Gráficos de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, respectivamente, para $x \in \mathbb{R}$

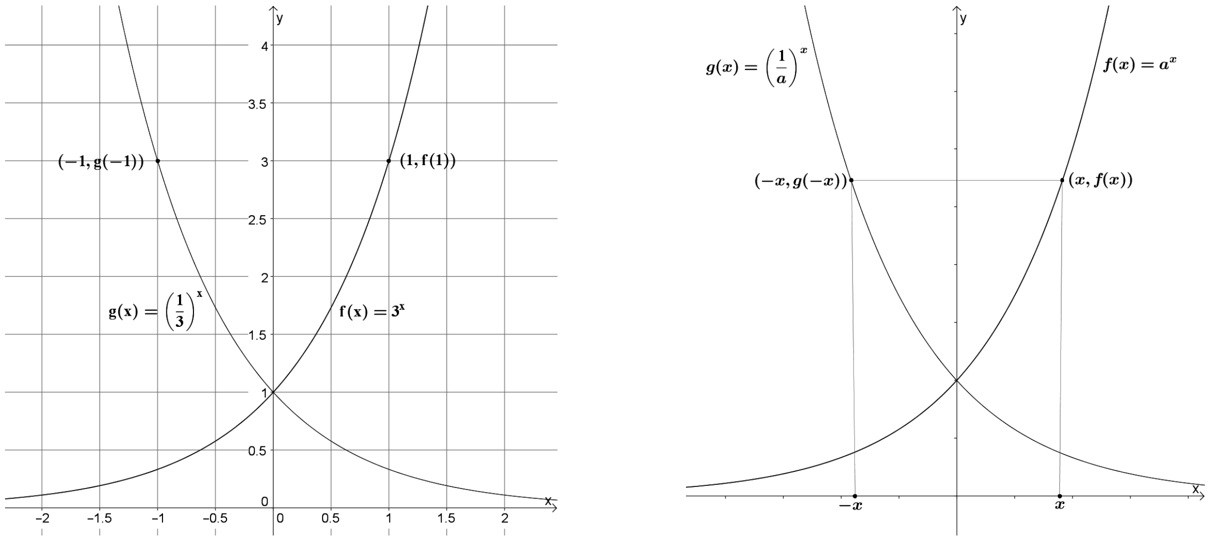


Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora que definimos a potência a^x para todo número real x, entendemos que o gráfico da função exponencial $y = a^x$ pode ser esboçado de modo a preencher os "buracos" antes apresentados quando x variava apenas no conjunto dos números racionais. Com isto, a imagem de $y = a^x$ é o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+^*$ (Figura 2).

Há alguma relação entre os gráficos de $f(x) = a^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ para $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$? Sim. Como $f(x) = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = g(-x)$, segue que as funções f e g são simétricas[3] em relação ao eixo y, conforme

Figura 3 – Gráficos de f e g para $a = 3$ e para $a > 1$ qualquer, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que:

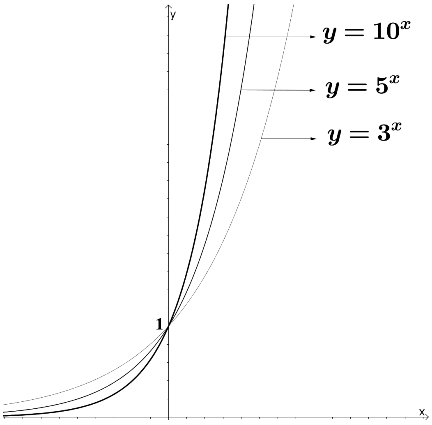
- Para $a > 1$, observamos que, quanto maior for a base a, mais rápido cresce a^x quando x cresce e mais próximo dos eixos x e y fica o gráfico de $y = a^x$ (Figura 4);
- Para $a < 1$, observamos que, quanto menor for a base a, mais rápido decresce a^x quando x cresce e mais próximo dos eixos x e y fica o gráfico $y = a^x$ (Figura 5).

Proposição 2.1. A função exponencial é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$. Assim, podemos supor que $x_1 < x_2$. Como $y = a^x$ é crescente para $a > 1$, resulta que $a^{x_1} < a^{x_2}$. Logo, $y_1 = a^{x_1} \neq a^{x_2} = y_2$. O caso $a < 1$ é análogo. $\square$

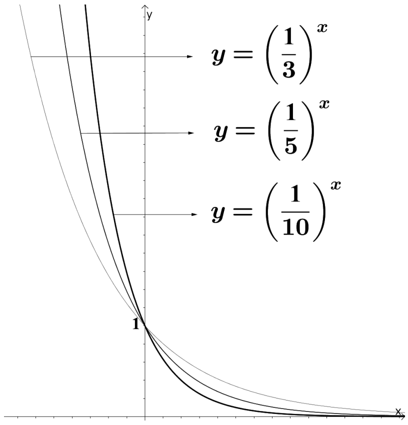
[3] Duas funções f e g são simétricas em relação ao eixo y se $f(x) = g(-x)$ para todo x no domínio de f e g.

Figura 4 – Gráfico de $y = a^x$ para $a = 3$, 5 e 10



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5 – Gráfico de $y = a^x$ para $a = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Propriedades da função exponencial

Algumas das razões para a função exponencial ser tão importante estão nas suas propriedades operatórias, as quais listamos abaixo:

E1 : $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad x, y \in \mathbb{R};$

E2 : $a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad x \in \mathbb{R};$

E3 : $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad x, y \in \mathbb{R};$

E4 : $(a^x)^y = a^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R};$

E5 : $(ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad x \in \mathbb{R};$

e nas suas propriedades funcionais, listadas abaixo:

E6 : A taxa de variação média de f é proporcional a ela mesma:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = f(x) \cdot C,$$

onde h e $C = \dfrac{a^h - 1}{h}$ são constantes.

Esta propriedade será utilizada para entendermos como surge o número e definido como uma base especial da função exponencial no capítulo 4.

E7 : A taxa de variação relativa de f é constante:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = \frac{a^{x+h}-a^x}{a^x} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{a^x} = C,$$

onde h e $C = a^h - 1$ são constantes.

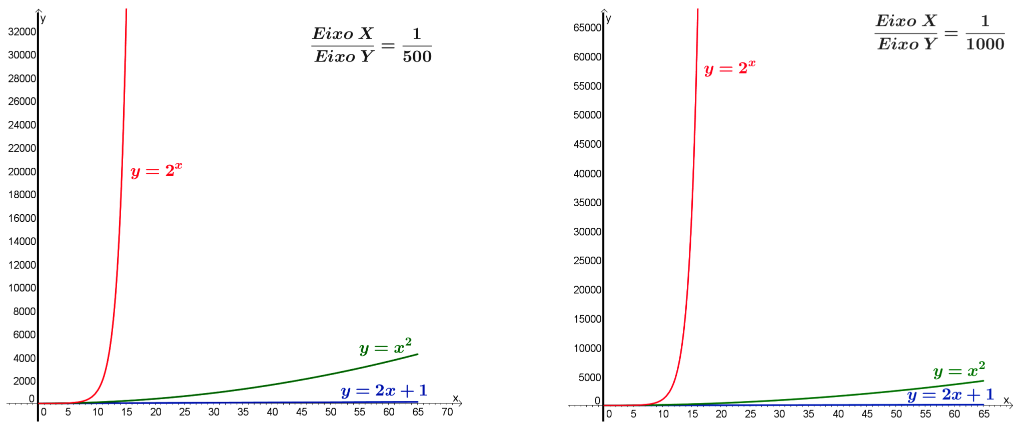
Esta propriedade caracteriza as grandezas que variam com taxa de crescimento constante como as progressões geométricas que aparecem mescladas com a função exponencial em aplicações[4] como juros compostos, crescimento populacional, desintegração radioativa, lei do resfriamento de Newton[5], eliminação de uma substância de certa mistura, etc.

2.3 O crescimento exponencial

A função exponencial tem um crescimento muito rápido se comparado com outras funções. Esta característica precisa ser explicada de forma explícita para que o leitor (aluno) a perceba. Um recurso à disposição do professor é comparar, através de tabelas e gráficos, os valores dessa função com os de outras funções como a função afim e a função quadrática, que são funções estudadas no ensino básico.

Exemplo 2.2. Compare os valores das funções $y = 2x+1$, $y = x^2$ e $y = 2^x$, para $x \in [0, 65]$, por meio de tabela e gráficos.

Figura 6 – Gráficos das funções $y = 2x + 1$, $y = x^2$ e $y = 2^x$ em escalas diferentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que o crescimento da função exponencial $y = 2^x$, à medida que x cresce, é bastante acentuado se comparado com as outras funções em questão. Enquanto o

[4] Para maiores detalhes dessas aplicações, veja LIMA(11) (1996, p. 93) e SIMMONS(19) (1987, p. 377).

[5] Isaac Newton(1642-1727), foi cientista inglês; descobriu a lei da gravitação do Universo e o cálculo diferencial e integral; é um dos grandes nomes da Física e da Matemática.

Tabela 1 – Valores das funções $y = 2x + 1$, $y = x^2$ e $y = 2^x$

x	$y = 2x + 1$	$y = x^2$	$y = 2^x$
0	1	0	1
5	11	25	32
10	21	100	1.024
15	31	225	32.768
20	41	400	1.048.576
25	51	625	33.554.432
30	61	900	1.073.741.824
35	71	1.225	34.359.738.368
40	81	1.600	1.099.511.627.776
45	91	2.025	35.184.372.088.832
50	101	2.500	1.125.899.906.842.620
55	111	3.025	36.028.797.018.964.000
60	121	3.600	1.152.921.504.606.850.000
65	131	4.225	36.893.488.147.419.100.000

Fonte: Elaborada pelo autor.

gráfico da função $y = 2^x$ é quase vertical, os gráficos das funções $y = 2x + 1$ e $y = x^2$ são quase horizontais (Figura 6). Notamos, também, um crescimento rápido se olharmos a Tabela 1.

Em MANDEL(17) (2007, p. 10), há uma questão que deixa bastante evidente o que significa esse crescimento exponencial. Vamos fazer a sua transcrição aqui como o

Exemplo 2.3. Supondo que uma certa bactéria se duplica a cada minuto e que, ao meio-dia, um vasilhame fique cheio de bactérias. Em que instante estava ocupado apenas até a metade?

Um minuto antes do meio-dia, ou seja, vemos que, em apenas um minuto, houve um extraordinário crescimento.

Vejamos um exemplo que envolve a propriedade[6] operatória **E1**:

Exemplo 2.4. Imagine o crescimento populacional onde o número de bactérias B em um meio duplica a cada minuto. Se, inicialmente, existem 10 bactérias no meio, faça uma tabela para ver esse crescimento sendo t a variável tempo dada em minutos.

Note que havendo uma variação constante no domínio (a cada 1 minuto, 2 minutos, . . .), há também um aumento constante na imagem (o dobro, o quádruplo, . . .) (Tabela 2). Em símbolos, temos

$$B(t + 1) = 10 \cdot 2^{t+1} = 10 \cdot 2^t \cdot 2^1 = 2 \cdot B(t) \text{ e } B(t + 2) = 10 \cdot 2^{t+2} = 10 \cdot 2^t \cdot 2^2 = 4 \cdot B(t).$$

[6] Essa propriedade diz que a função exponencial transforma soma em multiplicação.

Tabela 2 – Valores da função $B = 10 \cdot 2^t$

t	$B = 10 \cdot 2^t$
0	10
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320
6	640

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analogamente, pode-se fazer exemplos em que o decrescimento seja rápido, bastando para isto tomar a base a menor que 1.

2.4 Progressão geométrica ou exponencial?

No ensino da função exponencial, é interessante perceber como se pode introduzir a noção de progressão geométrica como a restição desta função ao conjunto dos números naturais. Ao fazer isto, o aluno saberá que uma progressão geométrica é só um caso (aplicação) de uma função exponencial e terá menos dificuldade para entender a seguinte definição de progressão geométrica:

Uma sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao seu anterior multiplicado por um fator constante é uma progressão geométrica e esse fator constante é chamado de razão da progressão.

Ou, de modo semelhante:

Toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente entre cada termo e o termo anterior, a começar pelo segundo, é uma progressão geométrica e esse quociente é chamado de razão da progressão.
Em símbolos,

$$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ é uma constante real não nula.} \tag{2.2}$$

Nesta definição, não fica clara a denominação "geométrica". Por trás de (2.2) se "esconde" o significado de tal expressão. Para mostrá-lo, é preciso, ainda, obter uma relação entre os termos da progressão. Tomando-se três termos consecutivos, digamos, a_n, a_{n+1} e a_{n+2}, temos devido a (2.2) que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}},$$

ou seja,

$$a_{n+1}{}^2 = a_n \cdot a_{n+2}. \tag{2.3}$$

Donde obtemos

$$a_{n+1} = \pm \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}. \tag{2.4}$$

Assim, (2.4) significa que os termos de uma progressão geométrica estão relacionados entre si segundo uma média geométrica. Porém, esta relação não vale para todas as progressões geométricas. Vejamos dois exemplos para notar isso:

Exemplo 2.5. Considere a progressão geométrica (-3, -6, -12, -24, ...). Determine a média geométrica entre os seus primeiros termos a_1, a_2 e a_3.

Considerando os três primeiros termos dessa progressão, temos

$$\sqrt{(-3) \cdot (-12)} \neq -6.$$

Em outro exemplo, notamos o mesmo problema:

Exemplo 2.6. Considere a progressão geométrica (6, -12, 24, -48, ...). Determine a média geométrica entre os seus primeiros termos a_1, a_2 e a_3.

Considerando os três primeiros termos dessa progressão, temos

$$\sqrt{6 \cdot 24} \neq -12.$$

Assim, o que (2.2) pode expressar é que os termos de uma progressão geométrica estão relacionados segundo (2.3) e só no caso em que todos os termos da progressão geométrica forem positivos é que esses termos estarão, três a três, relacionados segundo uma média geométrica.

A denominação "geométrica" pode inibir o essencial a saber de uma progressão deste tipo: é apenas uma restrição da função exponencial cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Seria interessante modificar a expressão progressão *geométrica* para progressão *exponencial*. Com isso ficaria mais simples e claro que uma progressão geométrica se comporta segundo uma função exponencial. Esse modo de ver uma progressão geométrica já é recomendado em LIMA *et al*(15) (2006, p. 42):

> Tenha sempre em mente que uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma e esse instrumento matemático foi criado para descrever grandezas que variam com taxa de crescimento constante. É absurdo, mas infelizmente é comum, ensinar progressões geométricas e não relacioná-las à ideia de taxa de crescimento.

Observando as expressões

$$f(x) = b \cdot a^{x-1} \quad \text{e} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{2.5}$$

podemos relacionar:

- a base a com a razão q da progressão;
- o valor inicial b com o primeiro termo a_1;
- a variável x com a posição n do termo na sequência.

Fazendo isso, obtemos uma identificação entre a função f e a sequência a_n dadas em (2.5).

2.5 Quando a^x é racional ou iracional?

Note, primeiramente, que a função exponencial pode ser sobrejetiva se considerarmos o contra-domínio formado apenas por números reais positivos. A garantia de que um número real positivo y pode ser escrito como uma potência a^x é resultante do Teorema do Valor Intermédiario mostrado no Apêndice B. Assim, dado um número real positivo y, sempre existe um (único) $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$. Exposto isto, podemos resolver o

Exemplo 2.7. Mostre que o expoente[7] x na equação $2^x = 3$ é irracional.

Supondo, por contradição, que x seja racional, teríamos $x = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\frac{p}{q} > 0$. Assim, $2^{\frac{p}{q}} = 3$ implicaria $2^p = 3^q$, o que é impossível para p e q inteiros não nulos, pois 2^p é um número par e 3^q é um número ímpar. Portanto, x é irracional.

Quanto à base e ao expoente, uma potência pode ser racional ou irracional conforme a tabela abaixo:

Tabela 3 – Possibilidades para base, expoente e potência

Caso	Base	Expoente	Potência
1	$a \in \mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{Q}$
2	$a \in \mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
3	$a \in \mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{Q}$
4	$a \in \mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
5	$a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{Q}$
6	$a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
7	$a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{Q}$
8	$a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$a^x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos dar um exemplo para mostrar que é possível ter cada caso da Tabela 3.

Exemplo 2.8. Dê exemplos de cada caso dado na Tabela 3.

[7] Esse expoente x será definido como o logaritmo de 3 na base 2 no capítulo 3. Ele é igual a 1,58496250072116...

Vamos enumerar cada exemplo conforme cada caso da Tabela 3.

1. $2^2 = 4$
2. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
3. $2^x = 3$
4. $2^x = \sqrt{3} \Rightarrow (2^x)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow (2^2)^x = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 4^x = 3$
5. $(\sqrt{2})^2 = 2$
6. $(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$
7. $(\sqrt{2})^x = 3 \Rightarrow \left[(\sqrt{2})^x\right]^2 = 3^2 \Rightarrow \left[(\sqrt{2})^2\right]^x = 9 \Rightarrow 2^x = 9$
8. $(\sqrt{2})^x = \sqrt{3} \Rightarrow \left[(\sqrt{2})^x\right]^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2^x = 3$

O x no expoente da potência dada nos casos 4, 7 e 8 é um número irracional. A demonstração desta afirmação é semelhante à resposta dada no Exemplo 2.7.

Uma questão interessante a respeito de uma potência ser racional ou irracional se encontra enunciada em LIMA(11) (1996, p. 105), e resolvida em BONGIOVANNNI(3) (1994, p. 14). Por ela ser muito importante para a discussão iniciada nesta seção, vamos transcrevê-la aqui como o

Exemplo 2.9. Use a igualdade $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ para concluir que existem números irracionais α, β tais que α^β é racional.

Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ for irracional, tome $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $\beta = \sqrt{2}$. Assim, $\alpha^\beta = 2$ é racional.
Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ for racional, tome $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = \sqrt{2}$. Assim, $\alpha^\beta = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional.

3 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O logaritmo e a função exponencial são alguns dos meios para introduzir a função logarítmica. O logaritmo surge da tentativa de resolver uma equação exponencial do tipo $3^x = 7$.

Porém, a história mostra que a propriedade do logaritmo de transformar (reduzir) multiplicação em soma, divisão em subtração e potência em multiplicação, em uma época[1] em que não havia calculadora científica, foi a maior motivação para seu uso e disseminação na navegação, no comércio e na Astronomia. Sendo *John Napier*[2] e *Jost Bürgi*[3] os inventores do logaritmo trabalhando de forma independente.

Como a função exponencial:

- é injetiva para todo $x \in \mathbb{R}$ e
- tem como imagem o conjunto $\mathbb{R}_+^*$,

resulta daí que, dado um número $y \in \mathbb{R}_+^*$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$. Assim, podemos fazer a

Definição 3.1. O logaritmo de um número real positivo y na base a é o número real x em que $a^x = y$ e o denotamos por $\log_a y = x$.

A Definição 3.1 de logaritmo conduz imediatamente à definção de função logarítmica como sendo a função inversa da função exponencial, a saber, a

Definição 3.2. A função logarítmica na base a é a função

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \ \text{ dada por } \ f(x) = \log_a x,$$

onde $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Da relação funcional inversa entre as funções exponencial e logarítmica, obtemos a lei de cancelamento abaixo:

$$y = a^x \ \Leftrightarrow \ \log_a y = x. \tag{3.1}$$

Aplicando, por exemplo, esta lei nas funções $y = 4^x$ e $x = \log_4 y$, temos

$$y = 4^x \Rightarrow \log_4 y = \log_4 4^x \Rightarrow \log_4 y = x \Rightarrow 4^{\log_4 y} = 4^x \Rightarrow y = 4^x.$$

[1] Nos séculos XVI e XVII.
[2] John Napier(1550-1617), matemático escocês.
[3] Jost Bürgi(1552-1632), matemático suíço.

3.1 Propriedades da função logarítmica

A função logarítmica recebe várias propriedades da sua inversa, a função exponencial, as quais descrevemos na

Proposição 3.1. Para quaisquer $a, b, c, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$, valem

L1: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

L2: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

L3: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

L4: $\log_a b^x = x \log_a b$.

L5: $\log_a a^x = x$.

L6: $a^{\log_a y} = y$.

L7: $\log_a y$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.

Demonstração. Todas as propriedades acima serão mostradas usando as propriedades operatórias da função exponencial:

L1: Sejam

$$u = \log_a b \text{ e } v = \log_a c. \tag{3.2}$$

Aplicando (3.1), obtemos

$$a^u = b \text{ e } a^v = c.$$

Multiplicando essas equações, obtemos

$$a^{u+v} = bc.$$

Aplicando (3.1), novamente, obtemos

$$\log_a bc = u + v. \tag{3.3}$$

Comparando (3.2) e (3.3), concluímos que

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

L2: Seja

$$u = \log_a \frac{1}{b}. \tag{3.4}$$

Aplicando (3.1), obtemos

$$\frac{1}{b} = a^u.$$

Elevando esta igualdade a -1, obtemos

$$b = a^{-u}.$$

Aplicando (3.1), novamente, obtemos

$$\log_a b = -u. \tag{3.5}$$

Comparando (3.4) e (3.5), concluímos que

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

L3: Segue de **L1** e **L2**.

L4: Seja

$$u = \log_a b. \tag{3.6}$$

Aplicando (3.1), obtemos

$$a^u = b.$$

Elevando a x esta equação, obtemos

$$(a^u)^x = a^{ux} = b^x.$$

Aplicando (3.1), novamente, obtemos

$$\log_a b^x = ux. \tag{3.7}$$

Comparando (3.6) e (3.7), concluímos que

$$\log_a b^x = x \log_a b.$$

L5 e **L6**: Seguem imediatamente de (3.1).

L7: Dados $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $y_1 < y_2$, mostremos que $\log_a y_1 < \log_a y_2$. Supondo $a > 1$ (o caso $a < 1$ é análogo), sejam

$$x_1 = \log_a y_1 \text{ e } x_2 = \log_a y_2.$$

Aplicando (3.1), obtemos

$$a^{x_1} = y_1 \text{ e } a^{x_2} = y_2.$$

Como $y_1 < y_2$, obtemos desta última igualdade que

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Como $a > 1$, concluímos que $x_1 < x_2$, ou seja, $\log_a y_1 < \log_a y_2$.

$\square$

3.2 Relação entre duas funções logarítmicas

Considere a equção exponencial $a^x = b$ em que a é a base da potência a^x. Aplicando o logaritmo na base c, obtemos

$$\log_c a^x = \log_c b.$$

Assim,

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

De outro modo, aplicando (3.1) na equção $a^x = b$, obtemos

$$x = \log_a b.$$

Logo,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{ou} \quad \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b. \tag{3.8}$$

Assim, conseguimos determinar mais uma propriedade da função logarítmica: a chamada fórmula de mudança de base dada em (3.8).

Observe que se fizermos $b = x$ na fórmula de mudança de base, teremos

$$\log_a x \cdot \log_c a = \log_c x.$$

Fazendo $f(x) = \log_c x$, $g(x) = \log_a x$ e $k = \log_c a$, teremos

$$f(x) = k \cdot g(x).$$

Sendo k uma constante e $a \neq c$, notamos que f e g são funções logarítmicas múltiplas entre si.

3.3 Gráfico da função logarítmica

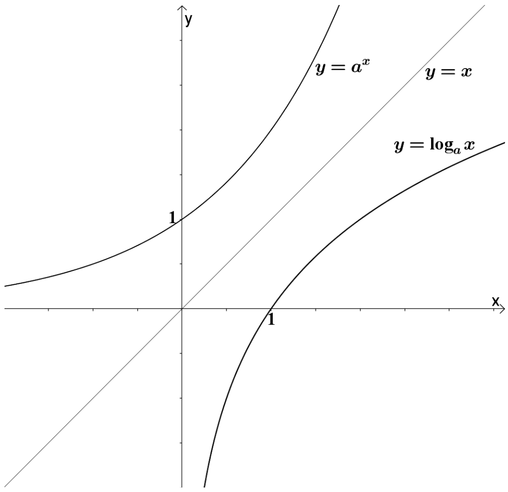
A função logarítmica é a inversa da função exponencial; portanto, seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$. Por isso, podemos esboçar o gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da função exponencial (Figuras 7 e 8).

Analogamente à função exponencial, os gráficos das funções $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ para $a > 1$ são simétricos[4] em relação ao eixo x (Figura 9), pois

$$f(x) = \log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x = -g(x).$$

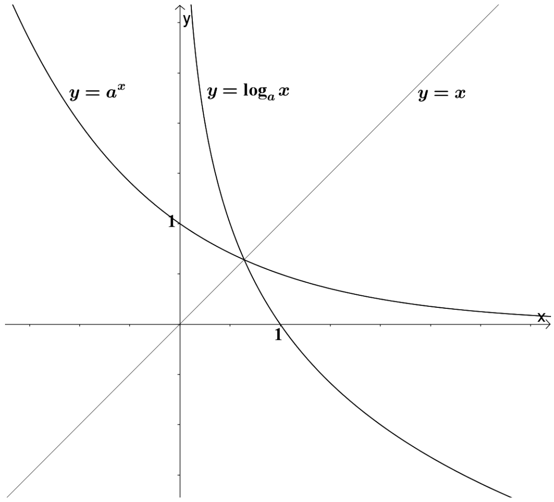
[4] Duas funções f e g são simétricas em relação ao eixo x, se $f(x) = -g(x)$ para todo x no domínio de f e g.

Figura 7 – Gráficos no caso $a > 1$



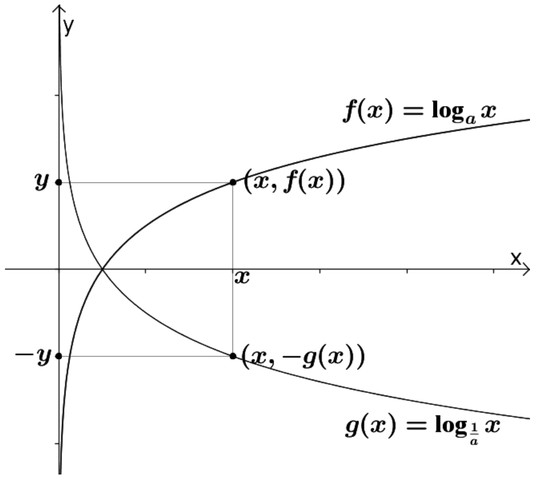
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Gráficos no caso $a < 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Gráficos de f e g

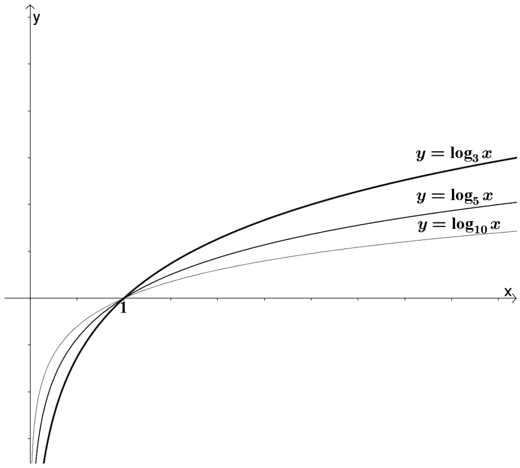


Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que:

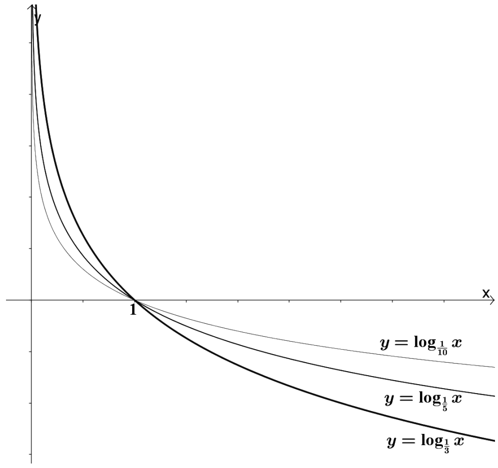
- Se $a > 1$, $y = \log_a x$ cresce lentamente conforme x cresce e quanto maior o valor de a, mais lentamente cresce $y = \log_a x$ à medida que x cresce e mais próximo dos eixos x e y fica o gráfico dessa função (Figura 10);
- Se $a < 1$, $y = \log_a x$ decresce lentamente conforme x cresce e quanto menor o valor de a, mais lentamente decresce $y = \log_a x$ à medida que x cresce e mais próximo dos eixos x e y fica o gráfico dessa função (Figura 11);

Figura 10 – Gráfico de $y = \log_a x$ para $a = 3, 5$ e 10



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Gráfico de $y = \log_a x$ para $a = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{3}$



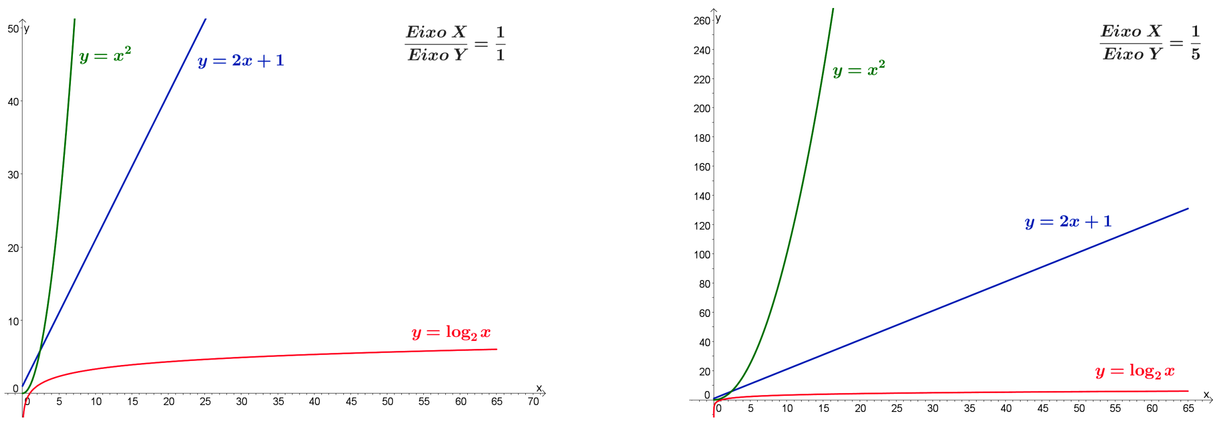
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 O crescimento da função logarítmica

A função logarítmica cresce vagarosamente se comparado com outras funções. Esta característica é semelhante à da função exponencial, porém, como a função logarítmica é a inversa dela, ocorre o inverso. Vamos comparar novamente, através de tabela e gráficos, os valores dessa função com os de outras funções como a função afim e a função quadrática.

Exemplo 3.1. Compare os valores das funções $y = 2x + 1$, $y = x^2$ e $y = \log_2 x$, para $x \in [0, 65]$, por meio de tabela e gráficos.

Figura 12 – Gráficos das funções $y = 2x + 1$, $y = x^2$ e $y = \log_2 x$ em escalas diferentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que o crescimento da função logarítmica $y = \log_2 x$ quando x cresce é muito pouco se comparado com as funções afim, $y = 2x + 1$, e quadrática, $y = x^2$ (Figura 12)

Tabela 4 – Valores das funções $y = 2x + 1$, $y = x^2$ e $y = \log_2 x$

x	$y = 2x + 1$	$y = x^2$	$y = \log_2 x$
1	3	1	0
5	11	25	2,3219280...
10	21	100	3,3219280...
15	31	225	3,9068905...
20	41	400	4,3219280...
25	51	625	4,6438561...
30	61	900	4,9068905...
35	71	1.225	5,1292830...
40	81	1.600	5,3219280...
45	91	2.025	5,4918530...
50	101	2.500	5,6438561...
55	111	3.025	5,7813597...
60	121	3.600	5,9068905...
65	131	4.225	6,0223678...

Fonte: Elaborada pelo autor.

e que o valor da função logarítmica $y = \log_2 x$ fica bem abaixo dos valores das outras funções já citadas (Tabela 4).

Exemplo 3.2. Um foguete é lançado de uma altura de 5 metros e, a partir daí, atinge 50 metros em 1 segundo, 500 metros em 2 segundos e assim em diante. Faça uma tabela e escreva explicitamente a lei que associa o tempo t, em segundos, à altura h, em metros, desse foguete. Esboce um gráfico.

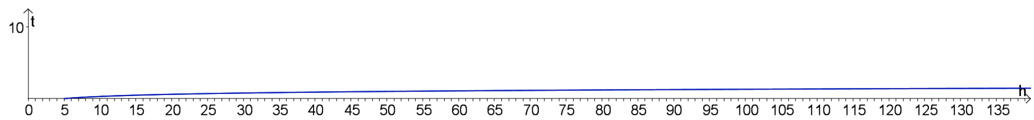
Tabela 5 – Valores da função $t = \log_{10} \frac{h}{5}$

h	t
5	0
50	1
500	2
5000	3
50000	4
500000	4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos $h = 5 \cdot 10^t \Rightarrow \frac{h}{5} = 10^t \Rightarrow t = \log_{10} \frac{h}{5}$. Logo, $t = \log_{10} \frac{h}{5}$.

Figura 13 – Gráfico de $t = \log_{10} \frac{h}{5}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 ABORDAGEM SEGUNDO O CÁLCULO

Vamos usar as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral (limites, derivadas, integrais, etc) para fundamentar as propriedades apresentadas nos capítulos 2 e 3 sobre as funções exponencial e logarítmica.

4.1 O número e e suas implicações

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \text{ou} \quad f'(x) = f(x).$$

No intuito de obter uma solução para ela, vamos derivar a função $f(x) = a^x$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Com isto, basta encontrar uma base a tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1. \tag{4.1}$$

O limite expresso na equação (4.1) é a derivada da função $f(x) = a^x$ em $x = 0$. De fato,

$$f'(0) = a^0 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1.$$

A derivada $f'(0) = 1$ indica que a reta tangente[1] ao gráfico de $f(x) = a^x$ no ponto $(0, 1)$ tem inclinação 1. Portanto, a equação desta reta tangente é $y = x + 1$.

Agora, podemos fazer a

Definição 4.1. O número e é a base da função exponencial cuja reta tangente ao gráfico dela tem inclinação 1. Assim,

$$\text{o número } e \text{ é tal que } \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

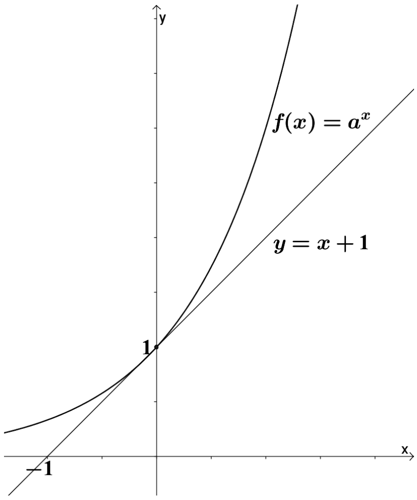
Mostremos que não há outra função f com a propriedade $f'(x) = f(x)$ para todo x real através da

Proposição 4.1. Se f é uma função tal que $f'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, então $f(x) = c\,e^x$, onde c é uma constante real.

---

[1] $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$

Figura 14 – Gráficos de $y = a^x$ e $y = x + 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Derivando a expressão $\dfrac{f(x)}{e^x}$, obtemos

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{0}{(e^x)^2} = 0.$$

Logo

$$\frac{f(x)}{e^x} = c, \text{ para alguma constante } c.$$

Ou seja,

$$f(x) = c\,e^x, \text{ para alguma constante } c.$$

□

Definição 4.2. A função logarítmica natural é a função

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = \ln x,$$

onde $\ln x = \log_e x$

O limite que define o número e é conhecido também pelo limite abaixo

$$e = \lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h.$$

Assim, vamos mostrar que esses limites são equivalentes usando a

Proposição 4.2.

$$e = \lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Demonstração. Usaremos que a função exponencial é contínua nesta demonstração, fato que está provado no Apêndice A. Embora não sirva como prova da continuidade desta função, na Seção 2.1, definimos a função exponencial $y = a^x$ para todo valor real de x de modo a preencher todos os buracos no gráfico dela. Assim, por esta definição, ela seria contínua.

($\Rightarrow$): Seja $u = e^h - 1$. Assim

- $\log_e(1+u) = \log_e e^h = h \cdot \log_e e = h$ e
- $h \to 0$ implica $u \to 0$.

Logo
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\log_e(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u}\cdot \log_e(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\log_e(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

Seja $x = \dfrac{1}{u}$.Com isto

- $u = \dfrac{1}{x}$ e
- $u \to 0$ implica $x \to \infty$.

Assim,
$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\log_e(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log_e(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\log_e e} = \frac{1}{1} = 1.$$

Logo
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

$\Leftarrow$: Temos da implicação anterior que
$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\log_e(1+u)^{\frac{1}{u}}} = 1.$$

Assim, seguem as implicações abaixo;
$$u \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_e(1+u)^{\frac{1}{u}}} \to 1 \Rightarrow \log_e(1+u)^{\frac{1}{u}} \to 1 \Rightarrow (1+u)^{\frac{1}{u}} \to e.$$

Ou seja,
$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

Seja $u = \dfrac{1}{x}$. Assim

- $x = \dfrac{1}{u}$ e
- $u \to 0$ implica $x \to \infty$.

Logo
$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$
$\square$

O próximo resultado nos diz qual é a derivada das funções exponencial e logarítmica.

Teorema 4.1. Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$. Então

(a): $f'(x) = a^x \ln a$;

(b): $g'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Demonstração. Vamos usar novamente a continuidade da função exponencial.

$$\begin{aligned}\textit{(a):}\quad f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h - a^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} a^x\cdot\frac{a^h-1}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.\end{aligned}$$

Seja $u = a^h - 1$. Assim,

- $a^h = 1+u \Rightarrow \ln a^h = \ln(1+u) \Rightarrow h = \dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$ e
- $h \to 0$ implica $u \to 0$.

Logo
$$\begin{aligned}f'(x) &= a^x\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln a}} = a^x\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{u}\cdot\ln(1+u)} = a^x\cdot\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}\\ &= a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln e} = a^x\ln a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{(b):}\quad g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.\end{aligned}$$

Seja $u = \dfrac{x}{h}$. Assim,

- $\dfrac{1}{h} = \dfrac{u}{x}$ e
- $h \to 0$ implica $u \to \infty$.

Logo

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{x}} = \lim_{u\to\infty}\log_a\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x}\cdot\lim_{u\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{\ln e}{\ln x} = \frac{1}{x\ln a}. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.1. Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$ então

(a) $f'(x) = e^x$;

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demonstração. Seja $a = e$ no teorema 4.1. Assim

(a): $f'(x) = e^x \ln e = e^x$;

(b): $g'(x) = \dfrac{1}{x\cdot\ln e} = \dfrac{1}{x}$.

□

4.2 A função logarítmica natural via integral

Alguns objetos matemáticos podem admitir mais de uma definição como será o caso da função logarítmica natural. Assim, vamos definí-la por meio de uma função integral e depois vamos mostrar que as duas definições são equivalentes.

Definição 4.3. A função logarítmica natural é a função

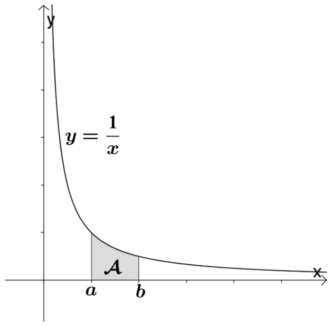
$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

Observamos que:

A derivada da função $y = \ln x$ é a função $y = \frac{1}{x}$;

A área $\mathcal{A}$ sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ e acima de $y = 0$ entre as retas $x = a$ e $x = b$ é a integral definida $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx$ (Figura 15)

Figura 15 – Gráfico representando a área $\mathcal{A}$ sob a curva $y = \frac{1}{x}$ entre $x = a$ e $x = b$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostremos agora que as Definições 4.2 e 4.3 são equivalentes.

Proposição 4.3. As funções $f(x) = \log_e x$ e $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ para $x > 0$ são iguais.

Demonstração. Sejam

$$f(x) = \log_e x \ \text{ e } \ g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \text{ com } x > 0.$$

Derivando-as, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ \text{ e } \ g'(x) = \frac{1}{x}$$

Assim,

$$f(x) = g(x) + c, \text{ para alguma constante } c.$$

Se fizermos $x = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + c, \\ \log_e 1 &= \int_1^1 \frac{1}{t}dt + c, \\ 0 &= 0 + c, \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Logo

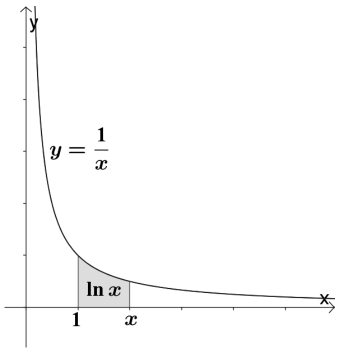
$$f(x) = g(x).$$

□

Agora vamos mostrar uma interpretação geométrica da função $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \ x > 0$:

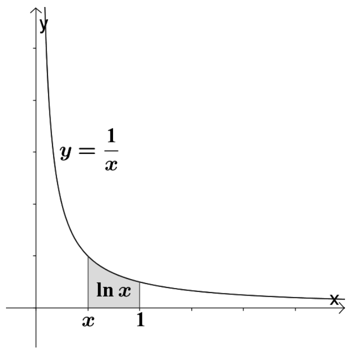
Se $x > 1$, $\ln x$ é a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ entre 1 e x (Figura 16).
Se $0 < x < 1$, $\ln x$ é menos a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ entre x e 1 (Figura 17).

Figura 16 – Gráfico representando a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ entre 1 e x



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Gráfico representando a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ entre x e 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim

$$\ln x = \begin{cases} -\int_x^1 \frac{1}{t}dt, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } x = 1, \\ \int_x^1 \frac{1}{t}dt, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

A definição de $\ln x$ como área indica que tal função é crescente em todo o seu domínio, pois

1. quanto mais distante de $x = 1$ à esquerda x estiver, menor será a área e, portanto, menor será $\ln x$. Precisamente,

$$0 < x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow -\int_{x_1}^1 \frac{1}{t}dt < -\int_{x_2}^1 \frac{1}{t}dt < \int_1^1 \frac{1}{t}dt \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 < 0.$$

2. quanto mais distante de $x = 1$ à direita x estiver, maior será a área e, portanto, maior será $\ln x$. Precisamente,

$$1 < x_1 < x_2 \Rightarrow \int_1^1 \frac{1}{t}dt < -\int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt < \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt \Rightarrow 0 < \ln x_1 < \ln x_2.$$

3. De modo geral, temos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt < \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2.$$

4.3 Propriedades da função logarítmica natural

A seguir, listamos algumas propriedades da função logarítmica natural na

Proposição 4.4. Dados $y, z \in \mathbb{R}_+^*$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

Ln1 : $\ln yz = \ln y + \ln z$;

Ln2 : $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$;

Ln3 : $\ln \frac{y}{z} = \ln y - \ln z$;

Ln4 : $\ln z^x = x \ln z$;

Ln5 : $\log_y z = \dfrac{\ln z}{\ln y}, \quad y \neq 1$;

Ln6 : $\ln e^x = x$;

Ln7 : $e^{\ln y} = y$;

Ln8 : A restrição de $f(x) = \ln x$ ao intervalo $(0, +\infty)$ é bijetiva;

Demonstração. Nas demosntrações dessas propriedades, vamos usar a regra da cadeia para a derivação, a derivação implícita e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Ln1: Por definição,

$$\ln y + \ln z = \int_1^y \frac{1}{t}dt + \int_1^z \frac{1}{t}dt.$$

Seja $u = yt$. Assim $du = ydt$ e

$$\int_1^z \frac{1}{t}dt = \int_y^{yz} \frac{y}{u} \cdot \frac{1}{y}du = \int_y^{yz} \frac{1}{u}du.$$

Logo

$$\ln y + \ln z = \int_1^y \frac{1}{t}dt + \int_y^{yz} \frac{1}{t}dt = \int_1^{yz} \frac{1}{t}dt = \ln yz.$$

De outro modo

Sejam $f(z) = \ln yz$ e $g(z) = \ln y + \ln z$, onde y é um número real fixado. Derivando f e g, temos

$$f'(z) = \frac{1}{yz}y = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad g'(z) = 0 + \frac{1}{z} = \frac{1}{z}.$$

Logo

$$f(z) = g(z) + c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante real.}$$

Fazendo $z = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + c, \\ \ln y &= \ln y + c, \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$f(z) = g(z).$$

Ln2: Por definição,

$$\ln \frac{1}{y} = \int_1^{\frac{1}{y}} \frac{1}{t} dt.$$

Seja $u = yt$. Assim $du = ydt$ e

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \frac{1}{t} dt = \int_y^1 \frac{y}{u} \cdot \frac{1}{y} du = \int_y^1 \frac{1}{u} du = -\int_1^y \frac{1}{u} du = -\ln y.$$

Logo

$$\ln \frac{1}{y} = -\ln y.$$

Ln3: Segue de **Ln1** e **Ln2**.

Ln4: Sejam $f(x) = \ln z^x$ e $g(x) = x \cdot \ln z$, onde z é um número real fixado. Derivando f e g obtemos

$$f'(x) = (\ln z^x)' = \left(\frac{1}{z^x}\right) \cdot (z^x \ \ln z) = \ln z \quad \text{e} \quad g'(x) = \ln z.$$

Logo

$$f(x) = g(x) + c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante real.}$$

Fazendo $x = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + c, \\ \ln z^1 &= 1 \cdot \ln z + c, \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$f(x) = g(x).$$

Ln5: Sejam $f(z) = \log_y z$ e $g(z) = \dfrac{\ln z}{\ln y}$, onde y é um número real positivo e diferente de 1 fixado. Derivando f e g, obtemos

$$f'(z) = \frac{1}{z \ln y} \quad \text{e} \quad g'(z) = \frac{1}{z \ln y}.$$

Logo

$$f(z) = g(z) + c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante real.}$$

Fazendo $z = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + c, \\ \log_y 1 &= \frac{\ln 1}{\ln y} + c, \\ c &= 0, \end{aligned}$$

Logo

$$f(z) = g(z).$$

Ln6: Fazendo $z = e$ em **Ln4**, obtemos o resultado desejado. Em particular, $\ln e = 1$.

Ln7: Seja $f(y) = \dfrac{y}{e^{\ln y}}$. Derivando f, obtemos

$$f'(y) = \frac{e^{\ln y} - y \cdot e^{\ln y} \cdot \frac{1}{y}}{\left(e^{\ln y}\right)^2} = \frac{0}{\left(e^{\ln y}\right)^2} = 0.$$

Logo

$$f(y) = c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante real.}$$

Fazendo $y = 1$, obtemos

$$f(1) = \frac{1}{e^{\ln 1}} = \frac{1}{e^0} = 1 = c.$$

Assim

$$f(y) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y}{e^{\ln y}} = 1.$$

Logo

$$e^{\ln y} = y.$$

Ln8: Mostremos que f é injetiva e sobrejetiva.
Vimos que a função f é crescente. Assim, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x_1 < x_2$, segue que $\ln x_1 < \ln x_2$. Logo $x_1 \neq x_2$ implica $\ln x_1 \neq \ln x_2$. Assim, temos que f é injetiva.
A sobrejetividade da função f será mostrada na seção 4.4.

□

4.4 Gráfico da função logarítmca natural

Para fazer o esboço do gráfico da função logarítmca natural, precisamos verificar o sinal das suas derivadas de primeira e segunda ordens bem como verificar se há interseção com os eixos coordenados ou se há alguma assíntota vertical ou horizontal.

Derivando duas vezes a função $y = \ln x$, obtemos

$$y' = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y'' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

Concluímos o seguinte:

- Como $\frac{1}{x} > 0$ para todo x no domínio de $y = \ln x$, segue que ela é estritamente crescente;
- Como $-\frac{1}{x^2} < 0$ para todo x no domínio de $y = \ln x$, segue que a concavidade do gráfico é voltada para baixo em todo o seu domínio;
- Como $y = \ln x$ é derivável em todo o seu domínio, ela é contínua nele;
- $\ln x = 0$ somente para $x = 1$;
- Calculando os limites para saber seu comportamento próximo a $x = 0$ e ao longo de todo o semieixo positivo x, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \tag{4.2}$$

pois, dado um número real positivo A, seja $x_0 = e^A$. Assim,

$$x > x_0 \Rightarrow \ln x > \ln x_0 = \ln e^A = A.$$

Logo

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

De modo análogo,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \tag{4.3}$$

pois, fazendo $x = \dfrac{1}{t}$ em (4.2), notamos que

$$\ln x = \ln \frac{1}{t} = \ln 1 - \ln t = -\ln t$$

e

$$x \to +\infty \text{ implica } t \to 0^+.$$

Logo

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{t\to 0^+} -\ln t = -\lim_{t\to 0^+} \ln t \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty.$$

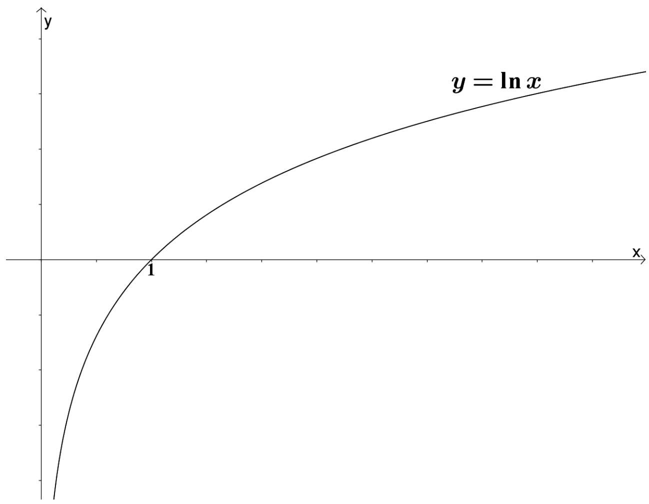
- Como

$$y = \ln x \text{ é contínua}, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$$

Obtemos, pelo Teorema do Valor Intermediário (Ver Apêndice B), que a imagem de f é o conjunto $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Logo f é sobrejetiva.

Reunindo as informações acima, obtemos o gráfico abaixo.

Figura 18 – Gráfico de $y = \ln x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5 A função logarítmica

Podemos definir a função logarítmica em uma base qualquer em termos da função logarítmica natural através da propriedade **Ln5**. Assim,

Definição 4.4. Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. A função logarítmica de base a é a função

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

A função $\log_a$ recebe as propriedades da função logarítmica natural. Mais precisamente,

Proposição 4.5. Sejam $a, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $z \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$. Então valem

Log1: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

Log2: $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$;

Log3: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

Log4: $\log_a x^z = z \log_a x$;

Log5: $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \quad y \neq 1$;

Log6: $\log_a a^z = z$;

Log7: $a^{\log_a x} = x$;

Log8: $\log_a$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$;

Log9: $\log_a$ é bijetiva;

Demonstração. Como todas essas propriedades seguem da função logarítmica natural, vamos mostrar apenas a propriedade **Log1**.

Log1: $\log_a xy = \dfrac{\ln xy}{\ln a} = \dfrac{\ln x}{\ln a} + \dfrac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y.$ □

Para fazer o esboço do gráfico da função logarítmca $\log_a$, vamos seguir o mesmo roteiro feito para a função logarítmica natural.

Derivando duas vezes a função $y = \log_a x$, obtemos

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{e} \quad y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$. Neste caso, temos o seguinte:

- Como $y' > 0$ para todo x no domínio de $y = \log_a x$, segue que ela é estritamente crescente;
- Como $y'' < 0$ para todo x no domínio de $y = \log_a x$, segue que a concavidade do gráfico é voltada para baixo em todo o seu domínio;
- Como $y = \log_a x$ é derivável em todo o seu domínio, ela é contínua;
- $\log_a x = 0$ somente para $x = 1$;
- Calculando os limites para saber seu comportamento próximo a $x = 0$ e ao longo de todo o semieixo positivo x, obtemos

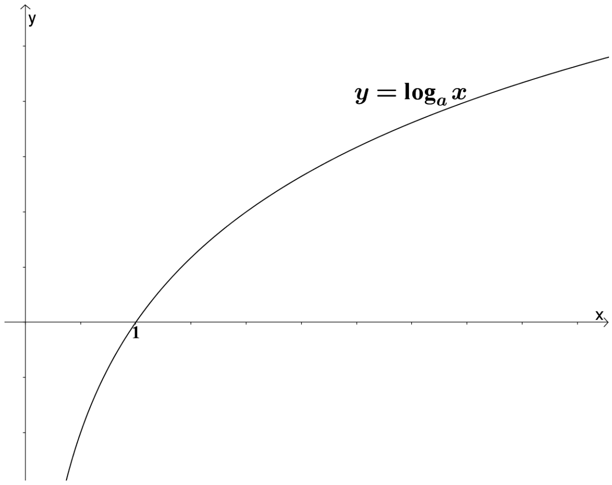
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x\to0^+} \ln x = \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$$

Reunindo as informações acima, obtemos o gráfico abaixo:

Figura 19 – Gráfico de $y = \log_a$ com $a > 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $a < 1$, então $\ln a < 0$. Neste caso, temos o seguinte:

- Como $y' < 0$ para todo x no domínio de $y = \log_a x$, segue que ela é estritamente decrescente;
- Como $y'' > 0$ para todo x no domínio de $y = \log_a x$, segue que a concavidade do gráfico é voltada para cima em todo o seu domínio;
- Como $y = \log_a x$ é derivável em todo o seu domínio, ela é contínua;
- $\log_a x = 0$ somente para $x = 1$;
- Calculando os limites para saber seu comportamento próximo a $x = 0$ e ao longo de todo o semieixo positivo x, obtemos

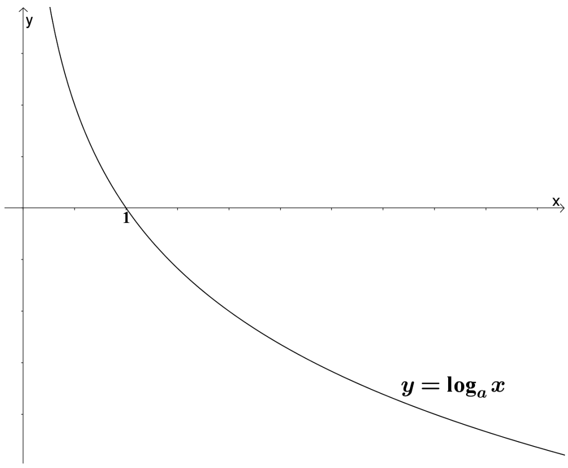
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty.$$

Reunindo as informações acima, obtemos o gráfico abaixo:

Figura 20 – Gráfico de $y = \log_a$ com $a < 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 A função exponencial natural

Como a função logarítmica natural é bijetiva, ela admite uma função inversa. Vamos chamá-la de função exponencial natural e notá-la, precisamente, na

Definição 4.5. A função exponencial natural é a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

dada por

$$f(x) = e^x.$$

A função exponencial natural recebe as propriedades da função logarítmica natural. Mais precisamente,

Proposição 4.6. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então, valem

***e*1**: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$;

***e*2**: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;

***e*3**: $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;

***e*4**: $(e^x)^y = e^{xy}$;

***e*5**: $\ln e^x = x$;

***e*6**: $e^{\ln x} = x, \quad x > 0$;

$e7$: $f(x) = e^x$ é crescente;

$e8$: O gráfico de $f(x) = e^x$ é côncavo para cima;

$e9$: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;

$e10$: $f(x) = e^x$ é bijetiva;

Demonstração. Vamos usar o fato da função exponencial natural ser a inversa da função logarítmica natural.

$e1$: $\ln e^{x+y} = x + y = \ln e^x + \ln e^y = \ln e^x \cdot e^y \;\Rightarrow\; e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

$e2$: $\ln e^{-x} = \ln(e^x)^{-1} = \ln \dfrac{1}{e^x} \;\Rightarrow\; e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

$e3$: $\ln e^{x-y} = x - y = \ln e^x - \ln e^y = \ln \dfrac{e^x}{e^y} \;\Rightarrow\; e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

$e4$: $\ln(e^x)^y = y \cdot \ln e^x = xy = \ln e^{xy} \;\Rightarrow\; (e^x)^y = e^{xy}$.

$e5$ e $e6$: Seguem da definição de inversa.

$e7$: Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$, mostremos que $e^{x_1} < e^{x_2}$.
Como a função logarítmica natural é crescente, sabemos que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2.$$

Logo

$$\ln e^{x_1} < \ln e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}.$$

$e8$: Como $f''(x) = e^x > 0$, segue que o gráfico de f é côncavo para cima.
$e9$: Usando os limites expressos em (4.2) e (4.3) e a propriedade $e6$, seguem as implicações

$$x \to +\infty \Rightarrow \ln x \to +\infty \Rightarrow e^{\ln x} \to +\infty.$$

Logo

$$\lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty, \text{ onde } u = \ln x.$$

Analogamente,

$$x \to 0^+ \Rightarrow \ln x \to -\infty \Rightarrow e^{\ln x} = x \to 0.$$

Logo

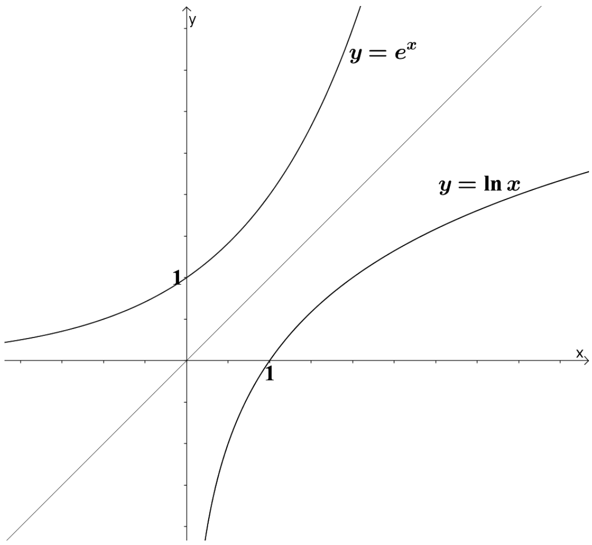
$$\lim_{u \to -\infty} e^u = 0, \text{ onde } u = \ln x.$$

***e*10**: Segue pelo fato de $y = e^x$ e $y = \ln x$ serem uma inversa da outra.

$\square$

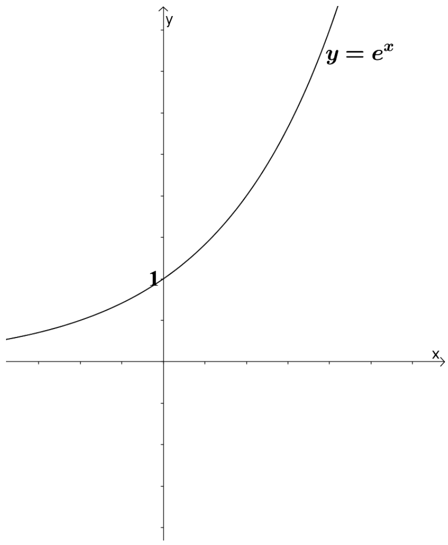
O gráfico de $y = e^x$ é obtido como uma reflexão do gráfico de $y = \ln x$ em torno da reta $y = x$ ou usando as informações obtidas na Proposição 4.6.

Figura 21 – Gráfico de $y = e^x$ e $y = \ln x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Gráfico de $y = e^x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.7 A função exponencial

Vamos usar a relação entre as funções exponencial natural e logarítmica natural para encontrar uma maneira de exprimir a função exponencial em uma base a através de uma potência com expoente natural, inteiro, racional e irracional em uma única fórmula matemática.

Temos

$$\ln a^x = x \cdot \ln a \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a função $y = e^x$, obtemos

$$e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}. \tag{4.4}$$

Como

$$a^x = e^{\ln a^x},$$

segue que

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Isso justifica a seguinte

Definição 4.6. Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. A função exponencial de base a é a função

$$Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$Exp(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Note que, como a função logarítmica $y = \log_a x$ é bijetiva, ela admite uma inversa. Esta inversa é precisamente a função dada na Definição 4.6 restringindo, é claro, seu contradomínio ao conjunto $\mathbb{R}$. Além disso, ela nos diz como uma potência a^x está relacionada a uma potência na base e. Assim, o que vale para $y = e^x$ vale também para $y = a^x$ através da

Proposição 4.7. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$ temos

Exp1: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

Exp2: $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;

Exp3: $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;

Exp4: $(a^x)^y = a^{xy}$;

Exp5: $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

Exp6: $\log_a a^x = x$;

Exp7: $a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$;

Exp8: $Exp(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$;

Exp9: O gráfico de $Exp(x) = a^x$ é côncavo para cima;

Exp10: Se $a > 1$ então

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0;$$

Exp11: Se $a < 1$ então

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty;$$

Exp12: A função $Exp(x) = a^x$ é bijetiva sobre sua imagem.

Demonstração.

Exp1: $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} \cdot e^{y\ln a} = a^x \cdot a^y$.

Exp2: $a^{-x} = e^{-x\ln a} = \dfrac{1}{e^{x\ln a}} = \dfrac{1}{a^x}$.

Exp3: $a^{x-y} = e^{(x-y)\ln a} = e^{x\ln a - y\ln a} = \dfrac{e^{x\ln a}}{e^{y\ln a}} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

Exp4: $(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{xy\ln a} = a^{xy}$.

Exp5: $(ab)^x = e^{x\ln ab} = e^{x\ln a + x\ln b} = e^{x\ln a} \cdot e^{x\ln b} = a^x \cdot b^x$.

Exp6 e **Exp7**: Seguem da definição de inversa.

Exp8: Calculando a derivada de $Exp(x) = a^x = e^{x\ln a}$, obtemos

$$Exp'(x) = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)' = \ln a \cdot e^{x\ln a}.$$

Assim

- $a > 1 \;\Rightarrow\; \ln a > 0 \;\Rightarrow\; Exp'(x) > 0$. Logo Exp é crescente;
- $a < 1 \;\Rightarrow\; \ln a < 0 \;\Rightarrow\; Exp'(x) < 0$. Logo Exp é decrescente.

Exp9: Calculando a derivada de $Exp'(x) = \ln a \cdot e^{x\ln a}$, obtemos

$$Exp''(x) = (\ln a \cdot e^{x\ln a})' = (\ln a \cdot e^{x\ln a}) \cdot (x\ln a)' = (\ln a)^2 \cdot e^{x\ln a}.$$

Assim, $Exp''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo o gráfico de Exp é côncavo para cima.

Exp10: Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0.$$

Exp11: Como $a < 1$, temos $\ln a < 0$. Assim,

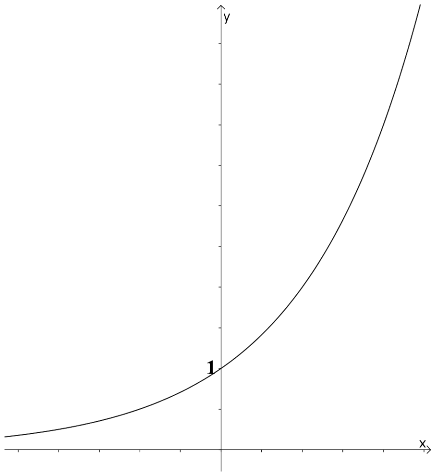
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty.$$

Exp12: e^x é bijetiva $\Rightarrow e^{x\ln a = a^x}$ é bijetiva.

$\square$

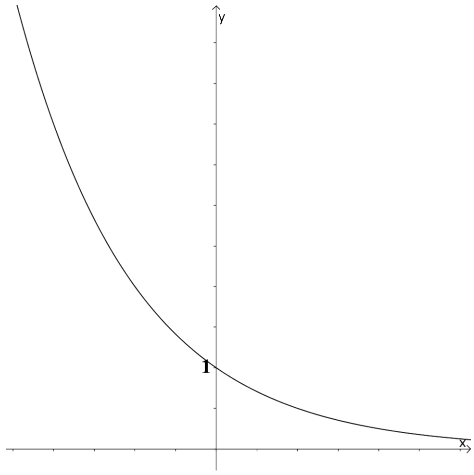
Com os dados obtidos na Proposição 4.7 podemos fazer um esboço do gráfico da função exponencial de base a (Figuras 23,24).

Figura 23 – Gráfico da função $Exp(x) = a^x, a > 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Gráfico da função $Exp(x) = a^x, a < 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.8 A função $y = x^x$

Essa função é um tipo especial de função exponencial em que a base é uma variável assim como o expoente. Nossa intuição é levada a pensar que se $x > 1$ então ela é crescente e se $x < 1$ ela é decrescente. Vamos usar o cálculo para estudar o comportamento desta função. Observe o seguinte:

- Como $y = x^x > 0$, o gráfico dessa função está completamente no primeiro quadrante;
- Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned} y = x^x &\Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow (\ln y)' = (x \ln x)' \\ &\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) \\ &\Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1); \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$y'' = [x^x(\ln x + 1)] \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x \cdot (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}.$$

Assim, fazendo $y' = 0$ em (4.5), obtemos

$$x^x(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$$

- Como $y'' > 0$, segue que $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ é um valor mínimo e o gráfico de $y = x^x$ é côncavo para cima;
- Como

$$x < \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x < \ln \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x < -1 \Rightarrow \ln x + 1 < 0 \Rightarrow x^x(\ln x + 1) < 0,$$

segue que ela é decrescente para $x < \frac{1}{e}$. Analogamente, ela é crescente para $x > \frac{1}{e}$;

- Calculando os limites para saber seu comportamento próximo a $x = 0$ e ao longo de todo o semieixo positivo x, temos

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}}.$$

  Aplicando a Regra de L'hopital, obtemos

$$e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -x} = e^0 = 1.$$

  Analogamente,

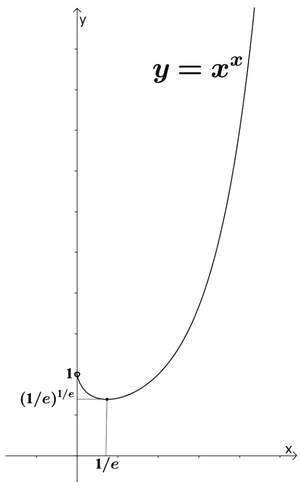
$$x \to +\infty \Rightarrow \ln x \to +\infty \Rightarrow x\ln x \to +\infty.$$

  Logo

$$\lim_{u\to -\infty} e^u = +\infty, \quad \text{onde} \quad u = x\ln x.$$

Reunindo as informações acima, obtemos o gráfico abaixo.

Figura 25 – Gráfico da função $y = x^x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 AS FUNÇÕES $y = a^x$ E $y = \log_a x$ EM LIVROS DO ENSINO MÉDIO

A Revista do Professor de Matemática (RPM) foi (e continua sendo) uma das melhores fontes de aprendizagem dos professores do ensino básico. Ela dá resposta a problemas do ensino básico e mostra caminhos sobre como lidar com determinados conteúdos a fim de melhor ensiná-los. As recomendações da RPM vão servir de base para podermos discutir a apresentação dessas funções em quatro livros do ensino médio, a saber, DANTE(5), IEZZI *et al*(8), PAIVA(18) e SMOLE e DINIZ(20).

5.1 Apresentação feita em DANTE(5)

Introduz a função exponencial por meio de um exemplo motivador sobre crescimento de bactérias e, em seguida, faz uma revisão sobre potências objetivando dar sentido a expressão a^x quando x for um número natural, inteiro, racional e irracional. Define a função exponencial e esboça seu gráfico, mas não explica o significado do termo "crescimento exponencial". Mostra uma das caracterizações fundamentais da função exponencial, a saber, acréscimosciguais dados a x fazem com que $y = a^x$ fique multiplicada por uma mesma constante real. Faz uma relação entre função exponencial e progressão geométrica e mostra uma aplicação interessante sobre a composição dos juros compostos. Define também uma progressão geométrica através da taxa de crescimento dela conforme nos recomenda LIMA *et al*(15) (2006, p. 42). Com isto, podemos dizer que, dos quatro livos pesquisados, apenas este seguiu essa recomendação de fato. Nos outros livros pesquisados, nem a taxa de variação relativa da função exponencial foi definida. Enuncia um resultado delicado (porém, relevante) como uma das caracterizações[1] da função exponencial, a saber,

> se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, com $y_n = f(x_n)$, e pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, então teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. DANTE(5) (2010, p. 248).

Para ficar mais acessível ao aluno, poderia dizer apenas que uma função exponencial, através da propriedade **E1**, associa uma progressão aritmética[2] a uma progressão geométrica. Apresenta o número e através da sequência $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, fazendo n crescer infinitamente.

No capítulo seguinte, faz uma abordagem histórica do logaritmo, o que enriquece o conteúdo a ser apresentado. Em seguida, é feito um exemplo para motivar a sua definição. Apresenta as propriedades do logaritmo e vários exemplos envolvendo tais propriedades. Define a função logarítmica como a inversa da função exponencial, mas não dar um exemplo para motivar a sua introdução. Acho que devido a ter discorrido

[1] Essa caracterização é igual à feita no livro LIMA *et al*(14) (2006, p. 186).

[2] Percebi aqui que a progressão aritmética constante é levada a uma progressão geométrica constante através de uma função exponencial de base 1. Fica assim notado que o caso degenerado da função exponencial tem alguma serventia.

bastante sobre logaritmo e suas propriedades. Faz o esboço do gráfico da função logarítmica e menciona duas vezes que essa e explica que os gráficos das funções exponencial e logarítmica são simétricos em relação à reta $y = x$.

5.2 Apresentação feita em IEZZI *et al*(8)

A função exponencial é apresentada através de exemplo motivador sobre a taxa de crescimento percentual da área de uma superfície coberta por algas. Em seguida, é feita uma revisão sobre os tipos de potências e suas propriedades, desde potências com expoente natural até potências com expoente irracional. Após essa revisão, é definida a função exponencial e é esboçado o gráfico desta função sem mencionar o seu rápido crescimento. Também são esboçados os gráficos das funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ sem dizer que são funções simétricas em relação ao eixo y. O número e é introduzido pela expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, fazendo x se aproximar de zero e esse fato é denotado pelo limite $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. Após breve nota histórica sobre o número e, é feita a definição da função exponencial de base e. Apresenta as propriedades da função exponencial e mostra como esboçar o gráfico da função exponencial $y = a^x + k$, onde k é uma constante real.

No capítulo seguinte, apresenta o logaritmo com um exemplo motivador no qual não é possível resolver uma equação exponencial a não ser com o uso do logaritmo e faz uma breve nota histórica sobre a invenção do logaritmo. Apresenta as propriedades do logaritmo e vários exemplos envolvendo tais propriedades. Em seguida, a função logarítmica é apresentada através de exemplo motivador sobre a aplicação dos juros compostos. Faz o esboço do gráfico da função logarítmica sem mencionar o seu crescimento lento e faz, também, uma tabela de valores das funções exponencial $y = 2^x$ e logarítmica $y = \log_2 x$ para mostrar que seus valores são um inverso do outro (mas não diz, explicitamente, que elas são funções inversas) e que, por isso, os gráficos dessas funções são simétricos em relação à reta $y = x$. Assim, ele mostra a relação de inversibilidade entre as funções exponencial e logarítmica graficamente. Por fim, apresenta as propriedades do gráfico da função logarítmica.

5.3 Apresentação feita em PAIVA(18)

A função exponencial é introduzida através de um exemplo motivador sobre a reprodução de bactérias e mostra, com esse mesmo exemplo, o rápido crescimento da função exponencial. Também comenta o decrescimento rápido dessa função no caso em que $a < 1$. Faz uma revisão sobre potenciação e radiciação, definindo as potências com expoente natural, inteiro, racional e irracional. Apresenta outro exemplo motivador sobre a função exponencial envolvendo juros compostos para definir tal função e, em seguida, faz o esboço do gráfico dessa função.

No capítulo seguinte, faz rápida nota histórica sobre o aparecimento e aplicação do logaritmo para depois definí-lo. Apresenta as propriedades do logaritmo e resolve vários exemplos envolvendo tais propriedades. Introduz a função logarítmica através de um exemplo motivador sobre o decaimento radioativo de uma substância química e, em seguida, faz o esboço do gráfico dessa função, mas não menciona seu crescimento ou decrescimento lento. Mostra a relação de inversibilidade entre as funções exponencial e logarítmica tanto algébrica quanto graficamente.

5.4 Apresentação feita em SMOLE e DINIZ(20)

A função exponencial é apresentada através de um exemplo motivador sobre o crescimento do diâmetro de uma folha de uma planta aquática e, nesse mesmo exemplo, mostra o significado do termo "crescimento exponencial". Define-a e, logo em seguida, faz uma revisão sobre potências de forma bem resumida, explicando o sentido da expressão a^x quando x for um número natural, inteiro, racional e irracional. Apresenta as propriedades da função exponencial e faz uma nota para explicar a realção entre essa função e a progressão geométrica. Faz o esboço do gráfico dessa função e, em outra nota, esboça os gráficos das funções $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$ em um mesmo plano cartesiano, usando o aplicativo *Winplot*, para compará-los. Neste livro, o autor incentiva o uso desse aplicativo para esboçar o gráfico dessas funções.

No capítulo seguinte, faz uma nota histórica sobre a invenção do logaritmo e, em seguida, é feito um exemplo para motivar a sua definição. Apresenta as propriedades do logaritmo e vários exemplos envolvendo tais propriedades. Define a função logarítmica usando a ideia de logaritmo e faz o esboço do gráfico dessa função, explicando a relação de inversibilidade entre as funções exponencial e logarítmica tanto algébrica quanto graficamente.

5.5 Resumo das observações feitas nesses livros

Vamos resumir o que foi exposto nesses livros através da Tabela 6. Cada item dessa

Tabela 6 – Registro dos itens que indicam características importantes para melhor entender as funções exponencial e logarítmica

LIVROS	ITENS									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DANTE(5)	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
IEZZI *et al*(8)	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim
PAIVA(18)	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim
SMOLE e DINIZ(20)	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Elaborada pelo autor.

tabela está denotado abaixo:

ITEM 1: Apresenta a função exponencial através de exemplo motivador;
ITEM 2: Explica o significado da potência com expoente irracional;
ITEM 3: Explica o significado do termo “crescimento exponencial”;
ITEM 4: Explica o que é taxa de variação relativa ou taxa de crescimento ou decrescimento da função exponencial;
ITEM 5: Apresenta a função logarítmica através de exemplo motivador;
ITEM 6: Explica o crescimento lento da função logarítmica;
ITEM 7: Relaciona a função exponencial à progressão geométrica;
ITEM 8: Explica que as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra;
ITEM 9: Explica que os gráficos das funções exponencial e logarítmica são simétricos em relação à reta $y = x$;
ITEM 10: Mostra aplicações das funções exponencial e logarítmica.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A potência com expoente irracional é um tema bastante delicado e, por isso, discorremos sobre ele para tentar dirimir as dúvidas a cerca do mesmo. As propriedades das funções exponencial e logarítmica foram bem discutidas a fim de podermos entendê-las assim como sua fundamentação utilizando os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral.

Com a apresentação dessas funções feita em livros do ensino médio, pudemos entender a necessidade de abordar esses conteúdos de forma a levar aluno e professor a usarem os conceitos de modo a facilitar o aprendizado. Se o livro não cumpre esse objetivo então estamos fadados a continuar cometendo os mesmos erros apontados em ÁVILA(1) (1993, p. 4):

> ... os autores e editores de livros-textos também são responsáveis pela presente situação, pois são eles que põem no mercado o instrumental básico do professorado de todo o país. É evidente, pois, que não haverá mudanças no ensino enquanto não houver mudanças nos livros-textos. Como se vê depende desses profissionais, mais que de qualquer outros, a possibilidade das mudanças desejadas. Possam eles tomar consciência das melhorias possíveis, eliminando dos livros os elementos negativos e prejudiciais no ensino-aprendizagem da Matemática, abrindo assim o caminho para o trânsito livre e fácil das idéias.

É bem difícil ensinar uma teoria que por natureza só se desenvolve através de teoremas rigorosamente demonstrados. Apesar do pensamento humano, às vezes, superar tais dificuldades, a sala de aula ainda é um lugar onde os alunos, na sua maioria, tem extrema dificuldade em acompanhar uma aula de Matemática mesmo que essa aula seja dada em um nível mínimo.

Finalmente, espero, com este trabalho, poder contribuir de alguma forma para melhorar a difícil missão do professor de Matemática em ensiná-la.

REFERÊNCIAS

1 ÁVILA, Geraldo. O ensino da matemática. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 23, p. 1-7, 1993.

2 ———— . Números muito grandes. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 25, p. 1-9, 1994.

3 BONGIOVANNNI, Vincenzo. "Perigos" da profissão. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 26, p. 8-11, 1994.

4 DANTE, Luiz Roberto. Como ensinamos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 6, p. 32-35, 1985.

5 ———— . *Matemática: contexto e aplicações*. vol. 1. São Paulo: Ática, 2010.

6 FRAENKEL, Renato. Logaritmos: um curso alternativo. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 4, p. 16-20, 1984.

7 GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

8 IEZZI, Gelson *et al*. *Matemática: ciência e aplicações*. vol. 1. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

9 ———— . *Fundamentos de matemática elementar*, Vol. 2. 3 .ed. São Paulo:Atual, 1977.

10 LIMA, Elon Lages. Conceitos e controvérsias. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 2, p. 6-12, 1983.

11 ———— . *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

12 ———— . *Meu professor de matemática e outras histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

13 ———— . Sistemas de logaritmos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 18, p. 24-31, 1992.

14 LIMA, Elon Lages *et al*. *A matemática do ensino médio*. vol. 1, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

15 ———— . *A matemática do ensino médio*. vol. 2, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

16 ———— . *Temas e problemas elementares*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

17 MANDEL, Sylvia. Crescimento exponencial? O que é isso?. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 62, p. 8-11, 2007.

18 PAIVA, Manoel. *Matemática*, vol. 1. São Paulo: Moderna, 2009.

19 SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica*. Tradução de Seiji Hariki. vol. 1. Rio de Janeiro: Makron Books, 1987.

20 SMOLE, Kátia Cristina Stocco, DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. *Matemática: ensino médio*. vol. 1. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

21 STEWART, James. *Cálculo*. Tradução de Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. vol. 1. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

APÊNDICE A – CONTINUIDADE DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos demonstrar agora que a função exponencial é contínua, resultado que usamos para demonstrar a Proposição 4.2 e o Teorema 4.1 da Seção 4.1.

Teorema (Continuidade da Função Exponencial $y = a^x$). Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. Então a função exponencial $f(x) = a^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja x_0 um número real qualquer e $a > 1$. Pelo Axioma da Completeza de $\mathbb{R}$, dado um $\epsilon > 0$, existem racionais r e s com $r < x_0 < s$, tais que

$$a^s - a^r < \epsilon.$$

Para todo $x \in (r, s)$, temos

$$a^r < a^x < a^s \Rightarrow o < a^x - a^r < a^s - a^r < \epsilon.$$

Assim,

$$|f(x) - f(x_0)| = |a^x - a^{x_0}| < a^s - a^r < \epsilon.$$

Logo f é contínua em x_0. Como x_0 foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

No caso $a < 1$, seja a função $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$. Como ela se enquadra no caso acima, segue o resultado.

APÊNDICE B – TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Vamos demonstrar este teorema o qual usamos para explicar que existe e é única a raiz n-ésima de um número real positivo na Seção 2.1 e que a função exponencial é sobrejetiva se restringirmos o seu contradomínio ao conjunto $\mathbb{R}_+^*$ na Seção 2.5.

Teorema (do Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < d < f(b)$. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função dada por $g(x) = f(x) - d$. Claramente, g é contínua. Assim, basta mostrar o teorema para o caso em que $d = 0$. Então podemos supor que $f(a) < 0 < f(b)$. Portanto queremos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Para isso, vamos construir duas sequências monótonas contidas em [a,b]. Assim, como elas são monótonas e limitadas, pelo Axioma da Completeza de $\mathbb{R}$, elas são convergentes. Além disso, a sequência formada pela distância entre os seus termos converge para 0. Portanto, elas convergem para um mesmo número c. esse número c é o provável candidato 'a solução da equação $f(x) = 0$. Agora, vamos construir as sequências (a_n) e (b_n) de modo que $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Seja m_1 o ponto médio do intervalo $[a, b]$, ou seja, $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Assim, teremos apenas uma possibilidade para $f(m_1)$:

- $f(m_1) = 0$;
- $f(m_1) < 0$;
- $f(m_1) > 0$.

Se $f(m_1) = 0$, seja $c = m_1$. Assim, o teorema está demonstrado.

Se $f(m_1) < 0$, escolha $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Assim, ficamos com metade do intervalo $[a, b]$.

Se $f(m_1) > 0$, escolha $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$. Assim, ficamos com a outra metade do intervalo $[a, b]$.

Repetimos este processo fazendo $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$. E, de novo, se $f(m_2) = 0$, então acaba a demonstração. Se $f(m_2) < 0$, escolha $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$ e Se $f(m_2) > 0$, escolha $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$.

Prosseguindo desta forma, ou iremos obter uma solução para $f(x) = 0$ em algum ponto ḿedio desses subintervalos ou iremos determinar duas sequências monótonas, (a_n) e (b_n), tais que para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$;

- $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$;
- $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

A primeira afirmação implica que as duas sequências convergem por serem monótonas e limitadas. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c_1 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} b_n = c_2$$

A segunda afirmação garante que $c_1 = c_2$. Pois,

$$c_2 - c_1 = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0.$$

Logo $c_1 = c_2$.
Seja $c = c_1 = c_2$. Como f é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

A terceira afirmação garante que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0.$$

Logo

$$f(c) = 0.$$