Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

O problema da Basileia

Wilbertt José de Oliveira Moura

Teresina - 2013

Wilbertt José de Oliveira Moura

Dissertação de Mestrado:

O problema da Basileia

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática. Orientador:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

Serviço de Processamento Técnico

M929p Moura, Wilbertt José de Oliveira.

O problema da Basileia./Wilbertt José de Oliveira Moura_

Teresina: 2013.

40f.

Dissertação(Mestrado em Matemática)Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

Orientador: Prof. Dr.Jurandir de Oliveira Lopes.

1. Matemática-Ensino.2. Problema da Basileia.I. Título.

CDD 510.7

Dedicatória. (Aos meus pais Washington José de Moura e Ricardina Rejane da C. Oliveira Moura, aos meus avós (In memoriam), ao meu filho Heiror José Soares Moura e à minha esposa Marcela Soares do Nascimento).

Agradecimentos

Ao professor João Xavier por ter idealizado esse programa de mestrado no Piauí e ao professor Elon pela brilhante ideia de criação do PROFMAT. E além disso por terem "enxergado" uma modalidade de mestrado em matemática onde sua aplicação para fins sociais e de construção de conhecimento na educação básica é muito maior do que qualquer mestrado acadêmico dentro da nossa área.

Aos amigos de PROFMAT: Acenilson e Janilson. E aos excelentes professores que contribuíram com o programa, vale aqui também dizer obrigado a todos: Prof. Humberto, Prof. Juscelino, Prof. Paulo Alexandre, Prof. Newton, Prof. Jefferson, Prof. Roger, Prof. Liane.

Ao meu amigo e orientador Prof. Jurandir que sempre me incentivou, não somente nos estudos, mas em algumas decisões importantes da minha vida. Obrigado é pouco, para as muitas vezes que pedi "socorro" ao longo da minha graduação e agora na pós-graduação. Estas palavras são poucas para agradecer.

A outros dois amigos do PROFMAT que se dispuseram a ir até minha casa para avaliar minha apresentação, para o concurso do IFPI, são eles: Dayonne Soares, pessoa que conhecia desde minha graduação e que agora também posso chamar de amigo; Salvino, um grande amigo, que talvez ajudou mais a mim do que eu a ele. Várias vezes estudamos juntos e muitas vezes me deu conselhos que somente irmãos nos dão, tanto a nível profissional como a nível pessoal, muito obrigado Salvino por tudo. Agradeço a CAPES por proporcionar a bolsa, já que sem ela eu não teria se quer iniciado o programa. Agradeço também ao IFPI - Campus Floriano pela compreensão na flexibilidade de horários de trabalho.

À minha família, que concerteza eu não seria nada sem ela. Muito obrigado a minha esposa, Marcela Soares do Nascimento, pela compreensão nas horas que estive ausente para me dedicar aos estudos e também desculpa pelos momentos de stress.

Em especial ao meu filho Heitor José Soares Moura, que me devolveu a vontade de estudar que por algum tempo estava esquecida. Muito obrigado também aos meus irmãos Washington Filho e Wilka, por saber que em qualquer momento de fraqueza poderia contar com eles.

Aos professores Arnaldo Silva Brito e Sissy da Silva Souza por terem aceitado fazer parte da minha banca, e por contribuirem efetivamente para este trabalho.

Aos meus avós já falecidos: Paulo, Antônio, Laura e meu anjo "vó Santinha".

A Deus, por ter colocado estas pessoas na minha vida. E por hoje poder dizer sem dúvidas, que sou feliz por ser professor e concerteza o PROFMAT tem uma grande parcela de culpa nessa felicidade. Obrigado Deus!

A minha mãe que também foi professora e que talvez desiludida dessa carreira massacrante e desvalorizada, não quiz que me tornasse professor e que por ironia do destino me deu o nome de Wilbertt que por muitos ex-professores e pelo maior de todos que já tive (Prof. Barnabé) dizia que se parecia muito com Hilbert, mas infelizmente essa semelhança é só no nome. Queria dizer mãe que te entendo, e desculpa pelas muitas vezes que me revoltei. Agora o meu obrigado final, ao meu pai Washington José de Moura, que me apoiou desde minha escolha no vestibular e em tudo que eu quizesse ter feito na vida. Uma pessoa muito inteligente e que por várias vezes lembra que não tem diploma. Pai essa conquista também é sua! Obrigado!

"*A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela*".

Albert Einstein.

Resumo

Um dos problemas mais famosos do século XVII foi o Problema da Basileia, que consiste em determinar a soma infinita dos inversos dos quadrados de números naturais ($\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$). Neste trabalho mostraremos um método didático para apresentar uma demonstração atual do mesmo. Iniciamos o documento com uma abordagem histórica e apresentamos a demonstração de Leonard Euler para a série estudada, logo após faremos uma verificação computacional para observar sua convergência e em seguida apresentamos uma prova atual para este resultado. Os resultados do problema estudado neste trabalho foram extraídos de [3] e [7].

Palavras-chave: Problema da Basileia, método didático, Leonard Euler, resultado.

Abstract

One of the most famous mathematical problems of the 17th century was the Basel problem, which consists in determining the infinite summation of the inverse squares of natural numbers ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$). In this work we show a method to present a didactic demonstration today of the same. We initiated the document with and historical approach and presented Leonard Euler's demonstration to the series studied, soon after we will start a computational verification to observe its convergence, followed by a presentation of an actual proof to its result. The results of the problem studied in this work were extracted of the articles [3] and [7].

Keywords: Basel's problem, didactic method, Leonard Euler, result.

Sumário

Introdução

Os problemas sobre somas infinitas de números reais despertaram a curiosidade de muitos pensadores desde antes de Cristo. Para evidenciarmos isso relembramos aqui o Paradoxo de Zenão, encontrado em [1]:

"Imaginem Aquiles perseguindo uma tartaruga, e suponha que Aquiles está a uma velocidade de $1\mathfrak{m}/\mathfrak{s}$, e que a tartaruga está rastejando em $0,1\mathfrak{m}/\mathfrak{s}$. A tartaruga começa $0,9\mathfrak{m}$ à frente de Aquiles. Aquiles deveria pegar a tartaruga depois de 1 s , a uma distância de 1 m de onde ele estava (e assim por 0,1 m de onde a tartaruga começou o seu movimento). Nós poderíamos "quebrar"o movimento de Aquiles do seguinte modo: antes de Aquiles poder pegar a tartaruga ele deve chegar ao ponto onde a tartaruga começou. Mas o tempo que ele leva para fazer isso a tartaruga se arrasta um pouco mais para a frente. Então Aquiles no passo seguinte deve chegar a este novo ponto. Mas no tempo que leva Aquiles para alcançar este "último ponto"a tartaruga rasteja para a frente um pouquinho mais. E assim sucessivamente: cada vez que Aquiles chega ao lugar onde a tartaruga estava, ela já tenha tido tempo suficiente para obter um pouco mais de distância, e assim Aquiles tem outra corrida para fazer antes que ele possa pegar a tartaruga, conclui Zeno, que ele nunca a pegará."

A origem do paradoxo é que não podemos realizar um número infinito de tarefas num tempo finito. Podemos traduzir este pensamento através da seguinte expressão:

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{100} + \cdots .$$

Outro problema envolvendo séries é o problema da quadratura da parábola. A fim de obter a área de um segmento parabólico, Arquimedes de Siracusa $(287 - 212\mathfrak{a}.\mathrm{C})$ necessitou calcular a soma da progressão

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots .$$

Este foi um dos primeiros cálculos de somas infinitas.

Somente muito tempo depois (quase mil anos) ressurgiram séries infinitas no ocidente tendo seu ápice no século XVII, quando tornou-se um esporte entre os matemáticos, estes por sua vez procuravam resultados exatos para tais somas infinitas. O problema da Basileia foi proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli (1626 - 1686), professor de Mecânica na Universidade de Bolonha, alguns autores afirmam que isto aconteceu por volta de 1647 e tendo fracassado Pietro publicou o problema em um livro, no ano de 1650, ver [2].

O problema da Basileia consiste em determinar a convergência da série:

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{k}^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

Na realidade, para entendermos o contexto da solução deste problema, começamos falando de perseguições religiosas que ocorreram no final do século XVII, obrigando a família Bernoulli a deixar a Antuérpia, que hoje é a segunda maior cidade da Bélgica, localizada na região de Flandres e conhecida como centro mundial da lapidação de diamantes. A família emigrou para a cidade suiça Basiléia e conseguentemente tornou a cidade suiça em terra natal de vários matemáticos, mundialmente conhecidos.

Leonhard Paul Euler nasceu em 15 de Abril de 1707 na cidade de Basileia, filho do pastor calvinista Paul Euler (lê-se: Óiler) e de Marguerite Brucker, filha de um pastor. Pouco depois do seu nascimento, sua família mudou-se para a cidade de Riehen, onde passou a maior parte da sua infância. O seu pai, sacerdote calvinista, que lhe reservou um futuro religioso, ensinou-lhe em casa as primeiras letras. Seu dom para a Matemática manifestou-se desde criança, aos oito anos mudou-se para Basileia e foi morar com sua avó para prosseguir os estudos. Seu pai determinou que ele estudaria Teologia e seguiria a carreira religiosa. Paul Euler era um amigo da família Bernoulli, e Jean Bernoulli (1667 - 1748) que foi um dos matemáticos mais importantes da Europa tornou-se uma influência no pequeno Euler, uma vez que o pai de Euler havia estudado com Jacques Bernoulli (1654 - 1705).

Em 1720, com 13 anos de idade, inscreve-se na Universidade de Basileia, na Faculdade de Filosofia, para dar continuidade aos estudos religiosos tão do agrado de seu pai. Nesta altura já recebia aos sábados à tarde lições de Jean Bernoulli, que rapidamente percebeu o seu talento para a matemática. Euler estudava teologia, grego e hebreu pela vontade de seu pai, para mais tarde se tornar pastor. Porém Jean Bernoulli resolveu intervir e convenceu Paul Euler que o seu filho estava destinado a ser um grande matemático, apesar de também estudar Teologia, Medicina e outras disciplinas. Na universidade, Euler foi aluno de Jean Bernoulli. Em 1723 terminou a graduação em Filosofia, obtendo o grau de Magister, dissertando em latim sobre os trabalhos de Descártes (1596 - 1650) e Newton (1643 - 1727).

Tendo-se inscrito no curso de Teologia, mas preferindo a Matemática, teve a aprovação de seu pai para mudar de objetivos acadêmicos. Assim, em 1726, participa no concurso da Academia de Paris, que costumava propor problemas e premiar as melhores soluções. A questão que abordou relacionava-se com a colocação de mastros num navio. Embora só tenha obtido uma menção honrosa, perdendo o primeiro prêmio para um engenheiro francês, o seu espírito matemático está bem patente nas palavras finais da sua candidatura: "Não senti necessidade de testar experimentalmente a solução que proponho, porque esta se baseia nos mais sólidos princípios da Mecânica, o que leva a que nenhuma questão se possa levantar sobre o que sucederá na prática". Mais tarde ele frequentemente apresentou ensaios em concursos organizados pela mesma academia, ganhando o cobiçado prêmio por doze vezes. Mesmo antes disso em 1724 Euler partilhou com Maclaurin e Daniel Bernoulli um prêmio para ensaio sobre marés.

Em 1727, quando tinha apenas 20 anos de idade, os irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli que tinham ido como professores de matemática para Academia de São Petesburgo, fundada por Catarina I segundo os moldes fixados por seu falecido marido Pedro o Grande, conseguiram com que ela aconselhada por Leibniz convidassem Euler para ocupar um lugar vago na academia de medicina. Porém no dia em que Euler chegou, Catarina morreu. O seu amigo Nicolaus Bernoulli tinha morrido afogado em S. Petersburgo no ano anterior ao de sua chegada.

Euler partilhou com Daniel Bernoulli uma casa, além de colegas eram amigos, e trabalhavam frequentemente juntos. Euler começou a dominar a língua russa e criou a sua vida em S. Petersburgo. Também aceitou um trabalho adicional como médico na Marinha Russa, e em 1733 Daniel Bernoulli deixou a Rússia para ocupar a cadeira de matemática em Basiléia. Com isso aos 26 anos, Euler tornou-se o principal matemático da Academia de São Petersburgo.

Em 7 de Janeiro 1734 Euler casa com Katharina Gsell, filha de um pintor da Academia Gymnasium. O casal comprou uma casa perto do Rio Nevae tiveram 13 filhos, dos quais apenas 5 sobreviveram à infância. Euler cedo conquistou reputação internacional em 1735 após resolver o Problema da Basiléia.

Para um maior aprofundamento sobre a biografia e contribuições de Euler, sugerimos ler as referências [4] e [5].

O problema não foi resolvido pelos matemáticos mais importantes da época, dentre eles Jacques Bernoulli (1654-1705) que teve a hulmildade de admitir seu fracasso e mais uma vez tornou público o problema em sua publicação *"Tractatus de seiebus infinitis"*, Jacques era professor na Universidade de Basileia. A solução então foi feita por Euler de maneira tão didática e clara que o tornou notável e famoso aos vinte e oito anos de idade. Inclusive suas idéias foram tomadas anos depois por Bernhard Riemann em seu artigo de 1859, ver [6], onde definiu sua função zeta e demonstrou suas propriedades básicas. O problema deve seu nome à cidade onde residia Euler (Basileia), cidade onde vivia também a família Bernoulli, que tentou resolver o problema sem êxito.

O problema da Basileia foi escolhido como tema desta dissertação após perceber, que às vezes professores omitem sua demonstração e utilizam o seu resultado para encontrar a convergência de algumas outras séries. Outro ponto importante desta escolha, foi pela engenhosidade e didática de Euler para resolvê-lo em sua época, e não esquecendo também a importância histórica do problema. O trabalho foi idealizado a partir de um artigo da Revista Matemática Universitária, ver [3] e também do artigo de Dan Kalman, ver [7].

A dissertação é dividida da seguinte forma: no primeiro capítulo, resultados e definições que serão necessários para compreensão do trabalho, tais como: Teorema Fundamental da Álgebra, Polinômios, Relações entre coeficientes e raízes de um polinômio, Sequências e Séries de números reais, Séries de Funções, Teorema da Integração termo a termo, Teorema de Fubini e Teorema da mudança de variáveis. No segundo capítulo, apresentaremos a demonstração de Euler para o problema. O terceiro capítulo, consiste em realizar uma demonstração interessante através de integrais duplas, para obter o resultado do problema. No último capítulo, iremos apresentar algumas conclusões sobre nosso trabalho.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados e definições importantes para a compreensão do nosso trabalho, tais como: Polinômios, Teorema Fundamental da Álgebra, Relações entre coeficientes e raízes de polinômios, Sequências e Séries de números reais, Séries de funções, Teorema da Integração termo a termo e alguns teoremas sobre integrais duplas: Teorema de Fubini, Teorema da Mudança de Variáveis.

A partir de agora consideraremos conjunto dos números naturais o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

1.1 Polinômios e Equações algébricas

Nesta seção alguns resultados e definições foram extraídos de [8].

Definição 1. *Um polinômio é uma expressão formal do tipo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, onde* $(a_0, a_1, \ldots, a_n;\ n \in \mathbb{N})$ *é uma lista ordenada de números reais e* x *é um símbolo (chamado indeterminada), sendo* x^i ($i \in \mathbb{N}$) *uma abreviatura para* $x \cdot x \cdot x \cdots x$ (*i fatores*).

Quando dizemos "expressão formal"queremos dizer que, essencialmente, vemos um polinômio como a lista ordenada de seus coeficientes e que somamos e multiplicamos polinômios através das regras usuais de adição multiplicação de números reais. Em particular, dizemos que dois polinômios são iguais quando possuem exatamente os mesmos coeficientes.

Se $a_n \neq 0$, dizemos que n é o grau do polinômio e representaremos por $\partial(p) = n$, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ são denominados de coeficientes do polinômio. O coeficiente a_n

é chamado coeficiente líder.

Observação 1. *Denominamos* $p(x)$ *de polinômio nulo quando* $a_i = 0$ *para* $0 \leqslant i \leqslant n$, *sendo* $i \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. $f(x) = \frac{2}{3}x + x^2 - 5x^3 - 4x^4 - 5x^5$.

Exemplo 2. $p(x) = \sqrt{2}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - 3x^3 + 6$

Podemos definir operações de adição e multiplicação de polinômios, a partir das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$. Sabemos que este conjunto, munido destas duas operações nesta ordem é um anel de integridade, para mais detalhes ver [14].

Definição 2. *Dividir um polinômio* $D(x)$ *por um polinômio* $d(x)$ *não identicamente nulo consiste em obter polinômios* $q(x)$ *e* $r(x)$*, chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram:*

$$\partial(r(x)) < \partial(d(x)) \text{ e } D(x) = d(x)q(x) + r(x). \tag{1.1}$$

Teorema 1. *O quociente e o resto da divisão de um polinômio* $D(x)$ *por um polinômio* $d(x)$ *(não identicamente nulo) existem e são únicos.*

Demonstração. Comecemos com a unicidade. Suponhamos que existam dois pares de polinômios $(q_1(x), r_1(x))$ e $(q_2(x), r_2(x))$ satisfazendo, a definição 2, de divisão de $D(x)$ por $d(x)$. Isto é:

$$D(x) = d(x)q_1(x) + r_1(x)$$

$$D(x) = d(x)q_2(x) + r_2(x).$$

Temos que:

$$d(x)q_1(x) + r_1(x) = d(x)q_2(x) + r_2(x) \Rightarrow d(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x). \tag{1.2}$$

Na última igualdade de (1.2), observe que o polinômio do lado direito tem grau menor que o de $d(x)$, por ser a diferença de dois polinômios de grau menor do que o grau de $d(x)$. Já o polinômio da esquerda tem grau maior ou igual ao de $d(x)$, a menos que $(q_1(x) - q_2(x))$ seja identicamente nulo. Logo, a identidade ocorre somente quando os polinômios em ambos os lados são identicamente nulos. Portanto, necessariamente, $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$.

Para a demonstração da existência, empregaremos um processo algorítmico através do qual reduziremos sucessivamente o grau do dividendo até que ele se torne menor que o do divisor e a divisão se torne imediata. Note que, se $D(x)$ tem grau menor que $d(x)$, já que $q(x) = 0$ e $r(x) = D(x)$ cumprem as condições de (1.1). Suponhamos, então, que $D(x)$ tenha grau n e $d(x)$ tenha grau m. Se $m > n$, não há nada a fazer: o quociente da divisão é $q(x) = 0$ e o resto é $r(x) = D(x)$. Caso contrário, consideraremos os termos a_0x^n e b_0x^m, que são os termos de mais alto grau em $D(x)$ e $d(x)$, respectivamente. Seja $r_1(x)$ o polinômio definido por

$$r_1(x) = D(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x).$$

(Note que $r_1(x)$ é obtido subtraindo de $D(x)$ o resultado da multiplicação de $d(x)$ pelo quociente dos termos de mais alto grau de $D(x)$ e $d(x)$; $r_1(x)$ é chamado de primeiro resto parcial no processo de divisão, por motivos que se tornarão claros a seguir).

Observe que

$$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x)$$

é um polinômio de grau n cujo termo de mais alto grau é igual ao termo de mais alto grau a_nx^n de $D(x)$. Logo $r_1(x)$ tem grau no máximo igual a $n-1$. Não sabemos ainda se $r_1(x)$ pode ser dividido por $d(x)$; isto é, se existem polinômios $q_1(x)$ e $r(x)$ (com $\partial(r(x)) < \partial(d(x))$) tais que $r_1(x) = q_1(x)d(x) + r(x)$. Mas, se tais polinômios existirem, então $D(x)$ também pode ser dividido por $d(x)$, já que teremos:

$$\begin{aligned} D(x) &= \left(\frac{a_n}{b_m}\right)x^{n-m}d(x) + r_1(x) \\ &= \left(\frac{a_n}{b_m}\right)x^{n-m}d(x) + q_1(x)d(x) + r(x) \\ &= \left(\left(\frac{a_n}{b_m}\right)x^{n-m} + q_1(x)\right)d(x) + r(x). \end{aligned}$$

Isto é, o resto é o mesmo que na divisão de $r_1(x)$ por $d(x)$, enquanto o quociente é obtido somando ao polinômio $q(x)$, cujo grau é no máximo $n-m-1$, o termo

$$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.$$

Desta forma, reduzimos o problema de dividir $D(x)$ por $d(x)$ ao de dividir $r_1(x)$ por $d(x)$, onde $r_1(x)$ tem grau mais baixo. Mas podemos aplicar o mesmo processo a $r_1(x)$, obtendo um novo resto parcial $r_2(x)$ e assim por diante, sempre obtendo um polinômio de grau inferior ao do anterior. Após um número finito de passos, obteremos um resto parcial $r_k(x)$ de grau menor que m, para o qual a divisão é possível e imediata: $q_k(x) = 0$ e o resto $r(x) = r_k(x)$. Retornando aos nossos passos, concluímos que cada resto parcial pode ser dividido por $d(x)$. O resto da divisão original é igual ao último resto parcial $r_k(x)$ e o quociente é formado colecionando os termos obtidos em cada passo.

■

Exemplo 3. *Dividir* $D(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ *por* $d(x) = x^2 + 1$. *Temos*

$$\begin{aligned} r_1(x) &= D(x) - \frac{2}{1}x^2 d(x) \\ &= (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1) - 2x^2(x^2 + 1) \\ &= x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2(x) &= r_1(x) - \frac{1}{1}x d(x) \\ &= (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - x(x^2 + 1) \\ &= -5x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3(x) &= r_2(x) - \left(\frac{-5}{1}\right) d(x) \\ &= (-5x^2 + x - 1) - (-5)(x^2 + 1) \\ &= x + 4. \end{aligned}$$

Como $\partial(r_3(x)) < \partial(d(x))$, *o processo está terminado, com quociente* $q(x) = 2x^2 + x - 5$ *e o resto* $r(x) = x + 4$.

Definição 3. *Dado um polinômio* $f(x)$ *denominamos raiz, todo número complexo* α *tal que* $f(\alpha) = 0$.

Quando um polinômio $p(x)$ se expressa como um produto da forma $h(x)i(x)$, onde $h(x)$ e $i(x)$ são também polinômios, dizemos que $p(x)$ é divisível por $h(x)$ e por $i(x)$.

Exemplo 4. *O polinômio* $p(x) = x^n - \alpha^n$ *é divisível por* $x - \alpha$, *onde* α *é um número real qualquer. Basta observar que*

$$(x - \alpha)^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}).$$

1.1.1 Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema a seguir é um resultado importante, porém omitiremos sua demonstração por estar além do nível do nosso trabalho.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.*

Teorema 3. *Todo polinômio* $p(x)$ *de grau* n *pode ser fatorado na forma* $p(x) = c(x - r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$*, onde* c *é um número complexo e* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *são as raízes de p(x) (possivelmente repetidas). Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. Ver página 219 de [8]. ■

1.1.2 Relações entre coeficientes e raízes

Consideremos um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ suas n raízes complexas (não necessariamente distintas). Como vimos pelo teorema 3, $p(x)$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

Observamos que o desenvolvimento do produto produz 2^n termos ("x ou $-x_i$") em cada fator. Agrupando os termos semelhantes (isto é, no qual figurem a mesma potência de x), podemos exprimir os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ de $p(x)$ em termos das suas n raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Começamos com o termo em x^n, que é formado tomando a parcela "x", em todos os fatores e que é, portanto, igual a cx^n.

A seguir, formamos o termo em x^{n-1}, obtido escolhendo-se "x"em cada fator exceto em um deles. Obtém-se assim

$$c(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)x^{n-1} = -c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = -cS_1 x^{n-1},$$

onde S_1 denota a soma das raízes de $p(x)$.

Formamos a seguir o termo em x^{n-2}, que é igual a

$$\begin{aligned} c((-x_1)(-x_2) + (-x_2)(-x_3) + \cdots + (-x_{n-1})(-x_n))x^{n-2} &= \\ c(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} &= cS_2x^{n-2}, \end{aligned}$$

onde S_2 é a soma dos produtos das raízes de $p(x)$, tomadas duas a duas.

De modo geral, o termo em x^{n-k} envolve produtos de k fatores da forma

$$(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_k)$$

e é igual a

$$c(-1)^kS_kx^{n-k},$$

onde S_k é a soma dos produtos das raízes de $p(x)$, tomadas k a k.

Em particular, o termo independente a_0 é dado por:

$$c(-1)^nS_n,$$

onde S_n é o produto de todas as raízes de $p(x)$.

Resumindo a discussão acima, o desenvolvimento de

$$c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

fornece

$$p(x) = cx^n - cS_1x^{n-1} + cS_2x^{n-2} + \cdots + c(-1)^kS_kx^{n-k} + \cdots + c(-1)^nS_n.$$

Igualando os termos nesse desenvolvimento aos correspondentes em

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

podemos, enfim, relacionar os coeficientes de um polinômio às somas de produtos de suas raízes. A comparação dos termos de mais alto grau fornece $c = a_n$ e, a partir daí, obtemos:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_k &= (-1)^k\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Estas são as relações existentes entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes.

Exemplo 5. *Resolva a equação* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$*. Sejam* r_1, r_2 *e* r_3 *as raízes do polinômio* $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$*. Pelas relações entre os coeficientes e raízes de um polinômio, temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 &= 6 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= 11 \\ r_1r_2r_3 &= 6 \end{cases}$$

Ao realizarmos o produto da segunda equação por r_3*, obtemos* $r_1r_2r_3 + r_1r_3{}^2 + r_2r_3{}^2 = 11r_3$*. Agora ao utilizarmos o fato de* $r_1 + r_2 = 6 - r_3$ *e* $r_1r_2r_3 = 6$*, chegaremos ao seguinte resultado:* $r_3{}^3 - 6r_3{}^2 + 11r_3 - 6 = 0$*. Por fim, esta última equação é equivalente ao problema inicial. Este exemplo nos mostra que as relações entre os coeficientes e as raízes não consiste em um método para resolução de equações polinomiais. Porém se tivermos alguma informação adicional sobre as raízes, pode-se chegar às soluções.*

Exemplo 6. *Resolva a equação* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$*, sabendo que as raízes estão em progressão aritmética. Sejam novamente* r_1, r_2 *e* r_3 *as raízes do polinômio* $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$*. Pelas relações entre os coeficientes e raízes de um polinômio, temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 &= 6 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= 11 \\ r_1r_2r_3 &= 6 \end{cases}$$

Do fato das raízes estarem em progressão aritmética, temos que $r_1 + r_3 = 2r_2$ *e ao realizarmos esta substituição na primeira equação do sistema, concluiremos que* $r_2 = 2$*. Nosso problema se resumirá em resolver o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} r_1 + r_3 &= 4 \\ r_1r_3 &= 3 \end{cases}$$

Logo $r_1 = 1$ *e* $r_3 = 3$*. Note agora que com a informação de que as raízes do polinômio estão em progressão aritmética, foi possível resolver o problema.*

1.2 Sequências de Números Reais

Nesta seção alguns resultados e definições foram extraídos de [9].

1.2.1 Sequências

Definição 4. *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, definida no conjunto dos números naturais e tomando como imagem números reais.*

Observação 2. *Adotaremos aqui* x_n *para as imagens* $x(n)$ *de todo* $n \in \mathbb{N}$*, onde* x_n *é o n-ésimo termo da sequência. Como notação utilizaremos* (x_n) *para indicar a sequência* x*, que podemos representar também da seguinte forma* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *ou* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$*.*

Note que:

- a função x não necessariamente é injetiva, podendo ocorrer $x_m = x_n$ com $m \neq n$. Ver exemplo 7 abaixo;
- o conjunto $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ pode também ser finito, ainda também podendo reduzir-se a um só elemento. Ver exemplo 8 abaixo.

Exemplo 7. $x_n = (-1)^n$*, com* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 8. $y_n = 2$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 9. $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *com* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição 5. *Diz-se que uma sequência* (x_n) *é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais* a *e* b*, tais que* $a \leqslant x_n \leqslant b$*para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Sendo assim todo termo da sequência pertence ao intervalo* $[a, b]$*.*

As sequências podem ser classificadas da seguinte forma:

- *Crescente*, se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- *Não-Decrescente*, se $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- *Derescente*, se $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- *Não-Crescente*, se $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sequências dos tipos mencionadas acima são denominadas *sequências monótonas*.

1.2.2 Limite de uma sequência

Afirmar que um número real L é o limite de uma sequência, significa dizer que para valores muito "grandes"de n, os termos x_n tornan-se tão próximos de L quanto desejarmos. Assim especulando-se um suposto "erro" que simbolizaremos por $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que todos os termos x_n da sequência que têm índice maior do que n_0 são valores próximos de L com um erro inferior a ε. Logicamente que o índice n_0 deve depender de ε, ao passo que para valores cada vez menores de ε, necessita-se tomar n_0 cada vez maior.

Definição 6. *Dada uma sequência x_n de números reais e um número real L, diz-se que o limite de x_n com n tendendo ao infinito é L e indica-se por:*

$$\lim_{x \to +\infty} x_n = L,$$

se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que, se $n > n_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$. E neste caso x_n é dita convergente.

Exemplo 10. *Se $a_n = q^n$, com $0 < |q| < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.*

Demonstração. Podemos escrever $\dfrac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Elevando a n ambos os membros desta igualdade e ao aplicarmos a desigualdade de Bernoulli, temos:

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \Rightarrow |a_n - 0| = |q|^n \leqslant \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Assim se queremos que $|a_n - 0| < \varepsilon$, basta impormos que $\dfrac{1}{1+n\alpha} < \varepsilon$. ■

Observação 3. *Uma sequência que não converge é dita divergente.*

Teorema 4. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja $A = \{x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant ...\}$ um conjunto de termos de uma sequência não-decrescente e limitada. Tomemos $a = \sup\{x_n, n = 1, 2, 3, ...\}$. Mostraremos que $a = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Dado algum $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto A. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon \leqslant x_{n_0}$. Como a sequência é monótona não-decrescente, $n_0 < n \Rightarrow x_{n_0} \leqslant x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leqslant a$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos de fato $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. ■

1.3 Séries de Números Reais

Os resultados e definições desta seção foram extraídos de [11].

Definição 7. *Consideremos uma sequência* $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$*. A partir dela formamos uma nova sequência* $(s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...)$ *de tal modo que:*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots &= \vdots \\ s_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

A sequência infinita (s_n) *é denominada série associada à sequência* (x_n) *e pode ser representada por* $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$.

Observação 4. *Os números* x_k *são os termos da série.*

Observação 5. *Os números* $s_1, s_2, ...$ *são denomidados somas parciais de ordem* $1, 2, ...$ *respectivamente.*

Definição 8. *Se existir um número* s *tal que* $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$*, tal número é denominado de soma da série.*

Observação 6. *No caso da existência de* s*, a série é denominada convergente. Caso contrário, divergente.*

Proposição 1. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Perceba que

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \\ &= S_n - S_{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = 0.$ ∎

1.3.1 Propriedades das séries

Propriedade 1. *Seja α um número real dado. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ for convergente, então $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha a_k$ será convergente e*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Propriedade 2. *Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ forem convergentes, então $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ será convergente e*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

Propriedade 3. *$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ será convergente se, e somente se, para todo natural p, $\sum_{k=p}^{+\infty} a_k$ for convergente.*

Faremos aqui a demonstração da terceira propriedade. Para as demmais, ver [11].

Demonstração. Dado p um número natural maior ou igual a 1, temos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k.$$

Como $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ é uma constante, segue que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se, e somente se, $\sum_{k=p}^{+\infty} a_k$ também converge. ■

Exemplo 11. *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente.*

De fato, podemos escrever $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Note que suas somas parciais são da forma

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

e esta pode ser reescrita por

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to \infty} s_n = 1.$

Exemplo 12. *Mostraremos aqui que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ é limitada.*

Podemos perceber facilmente que $1 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. *Provaremos agora que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$. *Com efeito, de* $k > 0$ *temos* $k^2 - k < k^2$ *para todo* $k \geqslant 2$. *Sendo assim podemos escrever*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k}.$$

Utilizando o exemplo 11, a última série da desigualdade acima e fazendo a seguinte mudança: $k - 1 = m$, *donde* $k = m + 1$. *Então,*

$$1 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 2.$$

Proposição 2. *Seja a sequência* (s_n), *associada à sequência* $x_n = \frac{1}{n^2}$ *de tal forma que:*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots &= \vdots \\ s_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Então s_n *é convergente.*

Demonstração. Obviamente (s_n) é monótona e além disso limitada como foi provado no exemplo 12. Segue então pelo teorema 4, que a sequência é convergente. Logo o nosso problema possui solução. ■

1.4 Séries de Funções

Os resultados e definições desta seção foram extraídos de [11].

1.4.1 Convergência Simples e Convergência Uniforme de Séries de Funções

Considere as funções $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definição 9. *Uma série de funções é uma série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *onde cada* f_n *é uma função. Dizemos que a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge, em* $B \subset U$*, à função* $s : B \to \mathbb{R}$ *se, para cada* $x \in B$*,*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

o que significa, para cada $x \in B$*,* $s(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Observação 7. *Quando nos referirmos à função* $s(x)$ *como a soma da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *ficará subentendido que o domínio de* $s(x)$ *é o conjunto de todos os* x *para os quais a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge.*

Definição 10. *A série de funções* $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ *converge uniformemente, em B, à função* $s : B \to \mathbb{R}$ *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existir um número natural* n_0 *tal que, para todo* $x \in B$*,*

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - s(x) \right| < \varepsilon.$$

Exemplo 13. *Sabemos que, para todo* $x \neq 0$*, com* $|x| < 1$*,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Assim a série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ *converge, em* $]-1, 1[$*, à função* $s(x) = \dfrac{1}{1-x}, |x| < 1$.

1.4.2 Critério M de Weierstrass para Convergência Uniforme de Uma Série de Funções

(**Critério M de Weierstrass**): Seja $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ uma série de funções e suponhamos que exista uma série numérica $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$ tal que, para todo $x \in B$ e para todo número natural k,

$$|f_k(x)| \leqslant M_k.$$

Nestas condições, se a série $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$ for convergente, então a série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ convergirá uniformemente, em B, à função $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

Exemplo 14. *Verifique que a série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$ *converge uniformemente, em* $\mathbb{R}$ *à função*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2}.$$

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ *e para todo número natural* $k \geqslant 1$,

$$\left|\frac{1}{x^2+k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Pela proposição 2, temos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *é convergente, segue assim pelo Critério M de Weierstrass que a série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$ *converge uniformemente, em* $\mathbb{R}$, *à função*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2}.$$

1.4.3 Séries de Potências

Definição 11. *Seja* a_n, n *um número natural, uma sequência numérica dada e* x_0 *um número real dado. Uma série da forma série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1x + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

denomina-se série de potências, centrada em x_0 *e de coeficientes* a_n.

Observação 8. *Se A é o conjunto de números reais x tal que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *é convergente, podemos definir uma função f, de domínio A, dada por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

(A é a região de convergência da série).

Observação 9. *Note que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *é uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

Exemplo 15. *A série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é uma série de potências centrada em zero e com coeficientes* $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

Teorema 5. *Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *for convergente para* $x = x_1$, *com* $x_1 \neq 0$, *então a série convergirá absolutamente*[1] *para todo* x *no intervalo aberto* $]-|x_1|, |x_1|[$.

[1] Dizemos que uma série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolutamente se $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ for convergente.[11]

Demonstração. Ver página 129 de [11]. ■

Teorema 6. *Seja a série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *Existem apenas três possibilidades:*

I) ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge apenas para $x = 0$;

II) ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x real;

III) ou existe $R > 0$ tal que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x no intervalo $]-R, R[$ e diverge para todo x, com $|x| > R$. Nos extremos $-R$ e R a série poderá convergir ou não.

Demonstração. Seja A o conjunto de todos $x \geqslant 0$ para os quais a série converge.

1.º *Caso.* $A = \{0\}$

Se a série convergisse para algum $x_1 \neq 0$, pelo teorema anterior, convergiria, também, para todo $x \in]-|x_1|, |x_1|[$, o que contradiz a hipótese. Logo se $A = 0$ a série convergirá apenas para $x = 0$.

2.º *Caso.* $A = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$)

Para todo x real, existe $x_1 > 0$ tal que

$$|x| < x_1.$$

Como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ é convergente, pelo teorema anterior, a série convergirá absolutamente para todo x, com $|x| < x_1$. Portanto a série converge absolutamente para todo x.

3.º *Caso.* $A \neq \mathbb{R}_+$ e $A \neq 0$

Se, para todo $r > 0$, existisse $x_1 > r$ tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$$

fosse convergente, pelo teorema anterior, a série seria absolutamente convergente para todo x, que contradiz $A \neq \mathbb{R}_+$. Portanto, se $A \neq \mathbb{R}_+$, então A será limitado superiormente; logo, admitirá supremo R:

$$R = \sup A.$$

Como $A \neq \{0\}$, teremos, evidentemente, $R > 0$. Sendo R o supremo de A, para todo x com $|x| < R$, existe $x_1 \in A$, com $|x| < x_1$. Resulta, novamente do teorema anterior, que a série converge absolutamente para todo $x \in]-R, R[$. Ficando a cargo do leitor verificar que a série diverge para todo x, com $|x| > R$. ■

Proposição 3. *O raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *onde* $a_n \neq 0$ *para* $n \geqslant p$, *é dado pela fórmula*

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

desde que o limite exista, finito ou infinito.

Demonstração. Ver página 132 de [11]. ■

Exemplo 16. *Determine o domínio da função* $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$.

Observe que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ *é uma série de potências com* $a_n = n^n$. *Determinemos seu raio de convergência utilizando a proposição 3.*

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

Portanto a série converge apenas para $x = 0$, *ou seja, o domínio de* $f(x)$ *é* $\{0\}$.

Exemplo 17. *Determine o domínio da função* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Sendo $a_n = \frac{1}{n^n}$. *Determinaremos raio de convergência de* $f(x)$, *utilizando a proposição 3.*

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \right] = +\infty.$$

Logo, pelo Teorema 6 a série convergirá para todo x *real.*

1.4.4 Integração termo a termo

A referência desta subseção foi [11].

Teorema 7 (Integração termo a termo)**.** *Seja* $s = s(x)$, $x \in [a, b]$, *dada por*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Se cada f_k *for contínua em* $[a, b]$ *e se a série* $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ *convergir uniformemente a* s *em* $[a, b]$*, então*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_a^b \left[\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Demonstração. Ver página 122 de [11]. ■

1.5 Séries de Taylor

As definições e resultados desta seção foram extraídos de [9].

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função que possua derivadas de todas as ordens. Se a é interior ao intervalo I e $a + h \in I$, então podemos escrever, para todo número natural n:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)(a)}}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + r_n(h),$$

onde $r_n(h) = \dfrac{f^{(n)}(a + \theta_n h)}{n!} \cdot h^n$, com $0 < \theta_n < 1$.

Definição 12. *Denomina-se série de Taylor no ponto* a *a série de potência*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(a)}{n!} h^n$$

onde $f^{(n)}(a)$ *representa a derivada de ordem* n *de* f *no ponto* a*. No caso em que* $a = 0$ *a série é denominada Série de Maclaurin.*

Observação 10. *Para* $n = 0$ *temos que* $f^{(0)} = f(a)$*.*

Definição 13. *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$*, definida num intervalo aberto* I*, chama-se analítica quando, para cada* $a \in I$ *existe um* $\varepsilon > 0$ *tal que a série de Taylor* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(a)}{n!} h^n$ *converge para* $f(a + h)$ *desde que* $|h| < \varepsilon$*.*

Observação 11. *A fim de que a série de Taylor* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(a)}{n!} h^n$ *convirja para* $f(a + h)$ *é necessário e suficiente que* $\lim_{n\to+\infty} r_n(h) = 0$*.*

Exemplo 18. *Considerando a função* $f(x) = \mathrm{sen}(x)$*, temos que*

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad &, \quad f^4(0) = \mathrm{sen}(0) = 0 \\ f^1(0) = \cos(0) = 1 \quad &, \quad f^5(0) = \cos(0) = 1 \\ f^2(0) = -\mathrm{sen}(0) = 0 \quad &, \quad f^6(0) = -\mathrm{sen}(0) = 0 \\ f^3(0) = -\cos(0) = -1 \quad &, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

A série de Taylor em torno de 0 corrresponderá fornece $\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+2}(x)$*, onde* $r_n(x) = \frac{[\mathrm{sen}^{(n)}](c)}{n!} \cdot x^n, |c| < |x|$*. Como a* $n-$ *ésima derivada de* $\mathrm{sen}(x)$ *é* $\pm\mathrm{sen}(x)$ *ou* $\pm\cos(x)$*, temos* $|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Sabemos porém, que para todo número real $a > 0$*, tem-se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$*. Com efeito, seja* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{n_0}{a} > 2$*. Escrevamos* $k = \frac{n_0!}{a^{n_0}}$*. Para todo* $n > n_0$*, teremos* $\frac{n!}{a^n} = k \cdot \frac{n_0+1}{a} \cdot \frac{n_0+2}{a} \cdots \frac{n}{a} > k \cdot (2)^{n-n_0}$*. Segue-se que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$*, ou seja, que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$*. Sendo assim* $\lim_{n\to+\infty} r(x) = 0$*.*

Concluímos então, que vale o desenvolvimento em série de Taylor:

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*. Ou seja a série de Taylor de* $\mathrm{sen}(x)$ *em torno de* 0 *converge em toda a reta.*

Exemplo 19. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função exponencial:* $f(x) = e^x$*. Então suas derivadas sucessivas são todas iguais a* e^x*. A fórmula de Taylor em torno do* 0 *tem o aspecto:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ com } |c_n| < |x|.$$

Evidentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$ *fixo, o resto* $r_{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$ *tende a* 0 *quando* $n \to +\infty$*. Logo, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *vale*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

A função exponencial é analítica em toda a reta pois, para a *e* h *reais quaisquer, temos* $e^{a+h} = e^a \cdot e^h = e^a + e^a \cdot h + e^a \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$ *.*

1.6 Teoremas de Integrais Duplas

Os resultados apresentados a seguir foram extraídos de [12].

1.6.1 Teorema de Fubini

O Teorema de Fubini, em homenagem a Guido Fubini[2], é um resultado que fornece condições sob as quais é possível calcular uma integral dupla por meio de integrais iteradas. Como consequência, ele permite a inversão da ordem de integração em integrais iteradas.

Teorema 8. *Seja* $f(x,y)$ *integrável no retângulo* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. *Suponhamos que* $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ *exista, para todo* $y \in [c,d]$, *e que* $\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ *exista, para todo* $x \in [a,b]$. *Então*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

Demonstração. Sejam

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

uma partição de $[a,b]$ e

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_m = d$$

uma partição de $[c,d]$. Sejam

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) | x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \,\text{e}\, y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

e

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) | x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \,\text{e}\, y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}.$$

Para todo (x,y) no retângulo A_{ij}, dado por $x_{i-1} \leqslant x \geqslant x_i \,\text{e}\, y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$,

$$m_{ij} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{ij}.$$

Daí, para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$,

$$m_{ij}\Delta x_i \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)dx \leqslant M_{ij}\Delta x_i.$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \leqslant \int_a^b f(x,y)dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i$$

[2]Guido Fubini nasceu em Veneza, 19 de janeiro de 1879, e morreu em New York, 6 de junho de 1943; foi um matemático italiano que estudou e doutorou-se em Pisa, orientado por Luigi Bianchi. Foi desde então professor em Turim. Em 1939 emigrou para os Estados Unidos, malogrado por maquinações rassístico-políticas do ditador Benito Mussolini.

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \leqslant \alpha(y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i$$

para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$, onde $\alpha(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$. Tomando-se $\overline{y}_j$ em $[y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, ..., m$, vem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i\right)\Delta y_j \leqslant \alpha(\overline{y}_j)\Delta y_j \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i\right)\Delta y_j.$$

Daí

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha(\overline{y}_j)\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

Para $\Delta \to 0$, as somas superior e inferior tendem para $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$; logo, $\alpha(y)$ é integrável em $[c, d]$ e

$$\int_c^d \alpha(y)dy = \iint_A f(x,y)dxdy,$$

ou seja

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

■

Corolário 1. *, Se* $g(x)$ *e* $h(y)$ *são contínuas em* $[a, b]$ *e* $[c, d]$*, respectivamente, então*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dxdy = \left[\int_a^b g(x)dx\right] \cdot \left[\int_c^d h(y)dy\right].$$

Demonstração. Exercício para o leitor. ■

Exemplo 20. *Para calcular o produto* $\displaystyle\int_0^2 xdx \cdot \int_{-1}^1 y^2dy$*, aplicaremos o corolário 1 e em seguida o Teorema de Fubini.*

Sendo assim

$$\begin{aligned}
\int_0^2 xdx \cdot \int_{-1}^1 y^2dy &= \int_{-1}^1\int_0^2 xy^2dxdy \\
&= \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 xy^2dx\right] dy \\
&= \int_{-1}^1 2y^2dy \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 21. *Para calcular* $\iint_B (x^3+4y)dydx$ *onde* B *é a região delimitada pelos os gráficos de* $y=2x$ *e* $y=x^2$*, aplicaremos o Teorema de Fubini.*

Sendo assim

$$\begin{aligned}
\iint_B y\,dydx &= \int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^3+4y)dydx\\
&= \int_0^2\left[\int_{x^2}^{2x}(x^3+4y)dy\right]dx\\
&= \int_0^2\left[x^3y+4\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_{x^2}^{2x}dx\\
&= \int_0^2(8x^2-x^5)dx\\
&= \left[\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{6}x^5\right]_0^2\\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

1.6.2 Teorema da Mudança de Variáveis

Teorema 9 (Teorema da Mudança de Variáveis na Integral Dupla)**.** *Seja* $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *uma função com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em* D*, contendo uma região* R_{xy}*. Se as funções* $x=x(u,v)$ *e* $y=y(u,v)$ *têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região* R_{uv} *e o Jacobiano* $J(uv)$ *não se anula em* R_{xy}*, então*

$$\int\int_{R_{xy}} f(x,y)dxdy=\int\int_{R_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

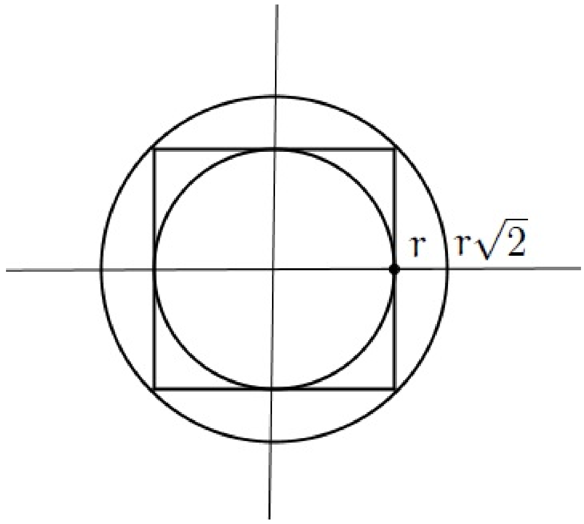
Demonstração. Ver página 385 de [10]. ∎

Exemplo 22. *Utilizaremos o Teorema da Mudança de variáveis para calcular* $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Façamos $I(r)=\int_{-r}^{r}e^{-x^2}dx=\int_{-r}^{r}e^{-y^2}dy$ *com* $(r>0)$*. Temos:*

$$\begin{aligned}
[I(r)]^2 &= \int_{-r}^{r}e^{-x^2}dx\int_{-r}^{r}e^{-y^2}dy\\
&= \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r}e^{-x^2-y^2}dx \qquad\qquad \textit{pelo corolário}\,1.
\end{aligned}$$

Sejam B *e* B_1 *os círculos inscritos e circunscritos, respectivamente, ao quadrado* $-r\leqslant x\leqslant r$, $-r\leqslant y\leqslant r$*, onde o raio de* B *é* r *e o raio de* B_1 *é* $r\sqrt{2}$*. Temos:*



$$\iint\limits_{B} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqslant [I(r)]^2 \leqslant \iint\limits_{B_1} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Pela mudança de variáveis $x = p\cos\theta$ *e* $y = p\operatorname{sen}\theta$ *e ao aplicarmos o teorema 9 obtemos*

$$\iint_B e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^r e^{-p^2}\,p\,dpd\theta = \pi[1-e^{-r^2}].$$

De modo análogo

$$\iint_{B_1} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi[1-e^{-2r^2}].$$

Assim,

$$\pi[1-e^{-r^2}] \leqslant [I(r)]^2 \leqslant \pi[1-e^{-2r^2}]$$

ou

$$\sqrt{\pi[1-e^{-r^2}]} \leqslant I(r) \leqslant \sqrt{\pi[1-e^{-2r^2}]}.$$

Como

$$\lim_{r\to+\infty}\sqrt{\pi[1-e^{-r^2}]} = \sqrt{\pi} = \lim_{r\to+\infty}\sqrt{\pi[1-e^{-2r^2}]}$$

segue pelo teorema do confronto,

$$\lim_{r\to+\infty} I(r) = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Capítulo 2

A Prova de Euler

Nesta seção apresentaremos a demonstração de Leonard Euler para problema da Basileia, extraída de [3] e uma crítica extraída de [7].

2.1 Sua demonstração

Em 1735 Euler resolve o problema. A prova de Euler é brilhante pelo aspecto didático pelo qual ela foi construída.

Sabemos que através do Exemplo 18:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

e esta converge para todo x real.

Consideremos agora a função

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots.$$

Note que $sen(x) = x \cdot f(x)$. Euler utiliza de maneira implícita o Teorema Fundamental da Álgebra, sendo que o mesmo seria demonstrado após alguns anos.

Lembremos assim, que todo polinômio de grau n, seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, possui n raízes e sejam elas $x_1, x_2, ..., x_n$ e $p(x)$ decompõe-se em fatores de grau 1 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

Quando $a_0 \neq 0$, todas as raízes serão diferentes de zero (Obviamente pelas relações entre os coeficientes, que $r_1 \cdot r_2 \dots r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n}$, assim nenhuma raiz poderá ser nula) e se $a_0 = 1$, podemos portanto escrever a decomposição da seguinte forma se:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) ... \left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Euler aqui recorre à série de potências da função seno e trata a mesma como um polinômio, sendo assim a função $f(x) = sen(x)/x$ tem raízes da forma $k\pi$, com $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, Euler escrevendo-a através de produtos de fatores do primeiro grau, obtém:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots && (2.1) \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots && (2.2) \end{aligned}$$

Em (2.2) o coeficiente do termo x^2, é:

$$-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{25\pi^2} - \dots .$$

E em (2.1) é $-\dfrac{1}{3!}$, sendo assim Euler conclui que:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{25\pi^2} - \dots \tag{2.3}$$

Já multiplicando (2.3) por π^2 em ambos os membros, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler chega assim ao resultado exato do problema.

Fica assim a seguinte pergunta: Por que esta prova não é válida hoje?

Refletindo um pouco, chegaremos a seguinte conclusão: séries de potências não são polinômios, portanto não gozam de todas as propriedades de polinômios. Para observarmos isso, considere o seguinte polinômio $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com raízes r_1, r_2, r_3, r_4.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$. Pelas relações entre coeficientes e raízes de um polinômio já vistas no capítulo 1,

$$a_0 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

e

$$a_1 = -r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Evidentemente que:

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}. \tag{2.4}$$

Note que o argumento acima não funcionaria para um "polinômio infinito". No exemplo 13, temos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + \cdots$$

quando $|x| < 1$.

Agora considere a seguinte função $g(x) = 2 - \dfrac{1}{1-x}$. Perceba que $g(x)$ possui $\dfrac{1}{2}$ como única raiz. Além disso a expansão de $g(x)$ em série de potências seria:

$$g(x) = 1 - x - x^2 - x^3 - \cdots .$$

Assim $a_0 = 1$ e $a_1 = -1$. Mas a soma dos recíprocos das raízes não é $-\dfrac{a_1}{a_0}$.

Sendo assim vale lembrar, que em sua época Euler não dispunha da teoria de convergência de séries que dispomos hoje em qualquer livro de Cálculo em nível de graduação. Tal conhecimento no tempo de Euler era puramente informal.

Podemos aqui também perceber que matemáticos do século XVIII valiam-se também de manipulações meramente informais, lógico que os procedimentos de Euler para os padrões de hoje não teriam ampla aceitação, pois sabemos que existe uma diferença nítida entre funções e séries infinitas.

Não é fácil aceitar por exemplo, que as propriedades de raízes de um polinômio sejam necessariamente válidas para séries infinitas, porém temos que considerar o contexto ao qual Euler estava inserido, devemos então avaliar a sua obra sob a ótica científica da época.

2.2 Verificação computacional

Mostraremos agora a convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ para $1,644...$ com o uso do Excel após 2500 parcelas do seu desenvolvimento.

Verificação com o uso do Excel		
x_i	$\frac{1}{x_i^2}$	S_i
1	1	1
2	0,25	1,25
3	0,111111111	1,361111111...
4	0,0625	1,423611111...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	0,000001	1,643934567...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2000	0,00000025	1,644434192...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2500	0,00000016	1,644534147...

Tabela 2.1: Somas parciais

Note que após 2500 parcelas, já possuímos a seguinte aproximação: $\frac{\pi^2}{6} \cong 1,644...$. Denominaremos de série 1, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. O gráfico abaixo nos permite visualizar geometricamente a convergência da série estudada.

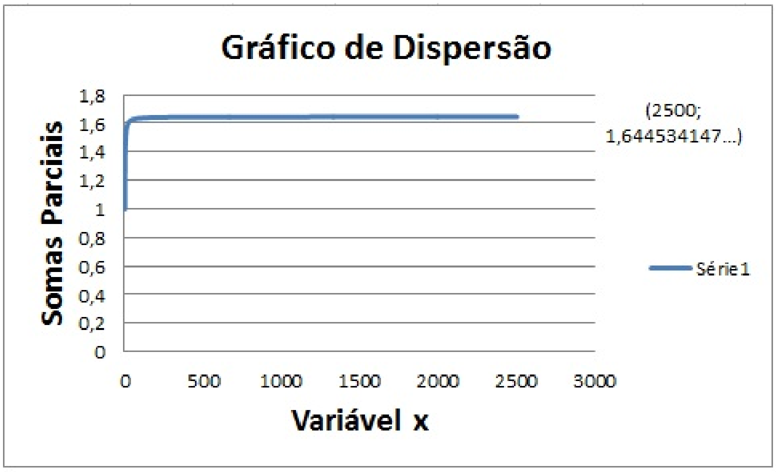


Figura 2.1: Série 1

Após um primeiro curso de cálculo uma metologia também interesante é especularmos a soma da série através da soma das áreas de retângulos justapostos (Somas de Riemann).

Para isso utilizaremos um programa de múltiplas aplicabilidades em Matemática cujo nome é Geogebra.

Inicialmentes definiremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e nos restringimos somente a região cujo domínio sejam números reais positivos. Impondo que todos os retângulos tenham base de comprimento 1 e altura $f(x_i)$ para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Por exemplo, o primeiro retângulo terá base de comprimento 1 e altura de comprimento 1 (está definido no intervalo [0,1]), já o segundo terá base de comprimento 1 e altura de comprimento $\dfrac{1}{4}$ (está definido no intervalo [1,2]), ao passo que o programa representará por a, a soma das áres de todos os retângulos construidos no intervalo de $[0, 2500]$. Observe o gráfico da figura 2.2.

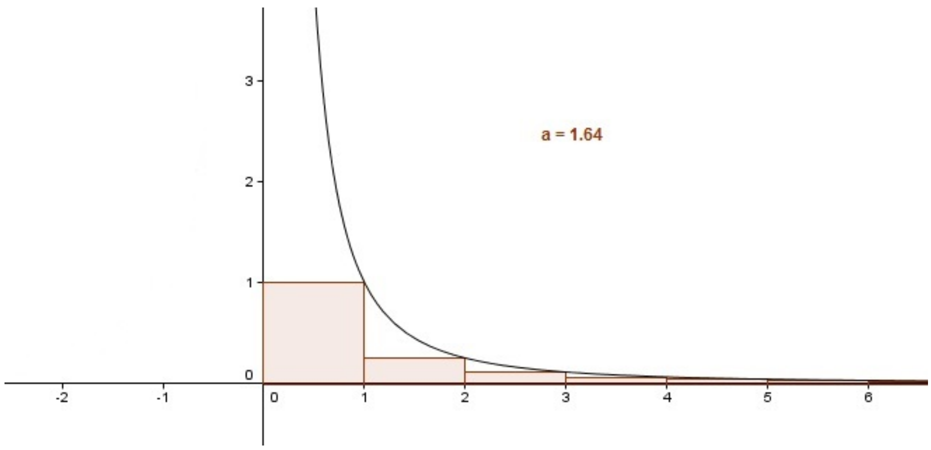


Figura 2.2: Aproximação por somas de Riemann

Agora a pergunta é: Como faremos para provar com o uso do Cálculo a convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$? Esta reposta daremos no próximo capítulo!

Capítulo 3

Uma Prova

3.1 Prova

A prova que iremos fazer a seguir pode ser vista em [7]. Vimos na Proposição 2, que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente ($k \in \mathbb{N}$).

Considere $E = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Nosso objetivo consiste em mostrar que $E = \frac{\pi^2}{6}$. Analisando apenas os termos de ordem par, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot E. \end{aligned}$$

Assim, os termos de ordem ímpar serão representados por:

$$\frac{3}{4} \cdot E = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}. \tag{3.1}$$

Agora considere a seguinte integral definida:

$$\int_0^1 x^{2k} dx = \left. \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|_0^1 = \frac{1}{2k+1}.$$

E para cada k fixo, pelo Corolário 1,

$$\int_0^1\int_0^1 x^{2k}y^{2k}dxdy = \int_0^1 x^{2k}dx\int_0^1 y^{2k}dy = \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2. \tag{3.2}$$

Ao tomarmos o somatório em ambos os membros em (3.2), temos:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\int_0^1 x^{2x}y^{2k}dxdy = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\cdot E. \tag{3.3}$$

Note que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}y^{2k} = 1 + (xy)^2 + (xy)^4 + \ldots = \frac{1}{1-(xy)^2}.$$

Pois x e y pertencenm ao intervalo $]0,1[$.

Podemos afirmar então:

$$\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(xy)^{2k}dxdy = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-(xy)^2}dxdy. \tag{3.4}$$

Mostraremos que

$$\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(xy)^{2k}dxdy = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}. \tag{3.5}$$

De fato,

$$\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(xy)^{2k}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(xy)^{2k}dx\right]dy.$$

Façamos a seguinte mudança de variáveis na integral interior:

$$z = xy \Rightarrow dx = \frac{1}{y}dz.$$

Teremos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(xy)^{2k}dxdy &= \int_0^1\left[\frac{1}{y}\int_0^y\sum_{k=0}^{+\infty}z^{2k}dz\right]dy \\
&= \int_0^1\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y z^{2k}dz\right]dy \\
&= \int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{y^{2k}}{2k+1}dy \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{y^{2k}}{2k+1}dy \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \\
&= \frac{3}{4}E.
\end{aligned}$$

Concluímos de (3.3), (3.4) e (3.5) que

$$\frac{3}{4}E = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2} dxdy. \tag{3.6}$$

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

e

$$D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2} - u\}.$$

e seus respectivos interiores:

$$\text{Int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$$

e

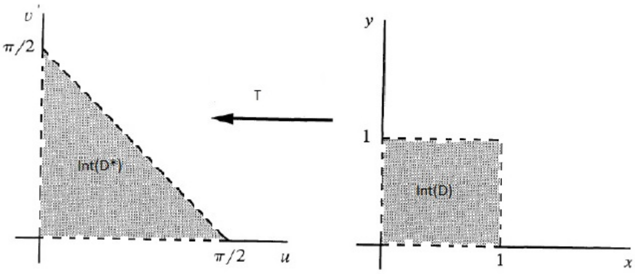
$$\text{Int}(D^*) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 < v < \frac{\pi}{2} - u\}.$$

Definimos a seguinte transformação:

$$T : \text{Int}(D) \to \text{Int}(D^*)$$

$$T(x, y) = \left(\arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \arccos \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}} \right).$$

Note a seguinte mudança na região de integração:



Proposição 4. $T(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, *onde*

$$u = \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}$$

e

$$v = \arccos \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$$

é bijetiva.

Demonstração. A expressão $\dfrac{1-x^2}{1-x^2y^2}$ é sempre menor que 1 e maior que 0 (trivial). Com efeito, suponhamos que existem $(x,y) \in \text{Int}(D)$ tal que $\dfrac{1-x^2}{1-(xy)^2} > 1$, diante disso teremos que $1 < y^2$ (Contradição!). O mesmo ocorre para $\dfrac{1-y^2}{1-x^2y^2}$. Devido à bijetividade da função arcocosseno, podemos afirmar então que a transformação é bijetiva, ou seja, para todo $(x,y) \in \text{Int}(D)$ existirá um único correspondente $(u,v) \in \text{Int}(D^*)$. ■

Observação 12. *Perceba que a demonstração da proposição acima segue dos fatos abaixo:*

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{1-x^2}{1-x^2y^2} < 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 < \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} < 1 \\
&\Rightarrow \quad \arccos 0 > \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} > \arccos 1 \\
&\Rightarrow \quad \arccos 0 > u > \arccos 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

De modo análogo o mesmo acontece para v. Sendo assim $u, v \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Proposição 5. *O determinante da matriz jacobiana* $J(T)$ *é positiva e as derivadas parciais de* u *e* v *são contínuas no* $\text{Int}(D)$.

Demonstração. Sendo $u = \arccos\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-x^2y^2}}$. Temos:

$$\frac{\partial(u)}{\partial(x)} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x^2y^2)},$$
$$\frac{\partial(u)}{\partial(y)} = -\frac{xy\cdot\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2y^2)\cdot\sqrt{1-y^2}}.$$

Ao mesmo tempo que $v = \arccos\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$. Segue de modo análogo:

$$\frac{\partial(v)}{\partial(x)} = -\frac{xy\cdot\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x^2y^2)},$$
$$\frac{\partial(v)}{\partial(y)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}\cdot(1-x^2y^2)}.$$

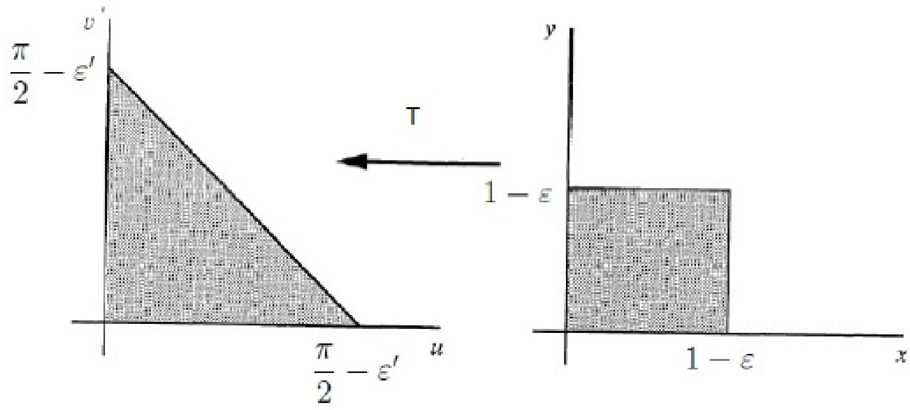
Portanto,

$$|J(T)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1-x^2y^2} > 0.$$

E suas derivadas parciais são contínuas no interior.

■

Para todo ε tal que $0 < \varepsilon < 1$, podemos aplicar o teorema 9 em $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x, y \leqslant 1 - \varepsilon\}$.



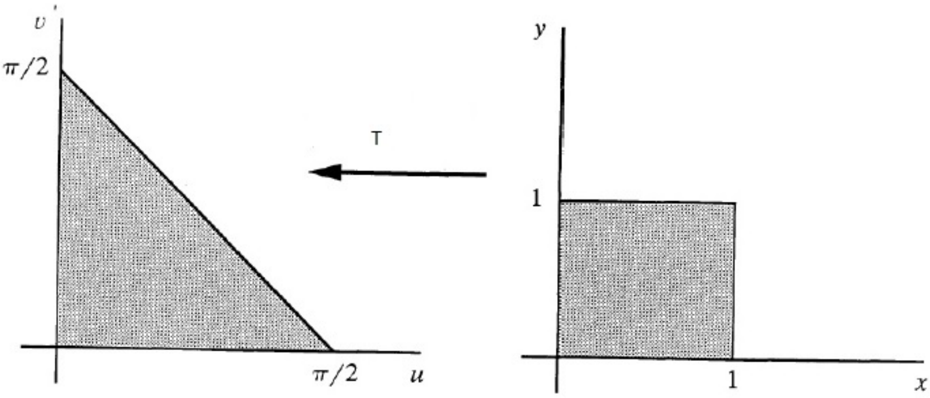
Atendidas as devidas condições,

$$\iint_{D\varepsilon} \frac{1}{1 - x^2 y^2} dx dy = \iint_{T(D_\varepsilon)} du dv = \text{área de}\, T(D_\varepsilon). \quad (3.7)$$

Agora analisaremos o que acontece com os pontos da fronteira do conjunto D quando aplicada à transformação T:

- $T(0, 0) = (\arccos(1), \arccos(1)) = (0, 0)$;
- $T(1, 0) = (\arccos(0), \arccos(1)) = (\frac{\pi}{2}, 0)$;
- $T(0, 1) = (\arccos(1), \arccos(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$;
- $T(x, 0)_{x \in]0,1[} = (\arccos \sqrt{1 - x^2}, \arccos(1)) = (u, 0)_{u \in]0, \frac{\pi}{2}[}$;
- $T(0, y)_{y \in]0,1[} = (\arccos(1), \arccos \sqrt{1 - y^2}) = (0, v)_{v \in]o, \frac{\pi}{2}[}$;
- $T(x, 1)_{x \in]0,1[} = (\arccos(1), \arccos(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$;
- $T(1, y)_{y \in]0,1[} = (\arccos(0), \arccos(1)) = (\frac{\pi}{2}, 0)$;

Concluímos que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} T(D_\varepsilon) = D^*$. Logo de (3.7) o $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ área de $T(D_\varepsilon) =$ área de (D^*). Portanto,



$$\frac{3}{4} \cdot \mathsf{E} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Finalmente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathsf{k}^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}.$$

Capítulo 4

Considerações Finais

Escrevemos aqui neste trabalho um modo que consideramos didático para estudarmos a convergência da série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

Como já mencionamos anteriormente muitos professores às vezes omitem uma demonstração mais formal da convergência da mesma. Um aluno munido dos pré-requisitos básicos mencionados aqui neste trabalho, poderá ter uma aprendizagem significativa no momento em que o professor trabalhar a História da Matemática como recurso pedagógico, fazendo o estudante compreender como Euler fez para resolver um problema que em sua época estava a quase um século em aberto. Devendo o professor também colocá-lo no contexto histórico matemático no qual Euler estava inserido.

Outro ponto importante é utilizar recursos computacionais para que o estudante visualize a convergência da série estudada, através de gráficos e tabelas, mostrando assim que a tecnologia é uma ferramenta essencial para nossos estudos. Vale também despertar o lado crítico do estudante através de perguntas do tipo:

- Você concordam plenamente com a demonstração de Euler?
- Como pode o resultado ser um valor irracional, já que a soma é de números racionais?

Assim faz-se necessário uma demonstração mais formal do problema, como a que foi realizada no Cápítulo 3 deste trabalho, afim de tornar mais "maduro" o resultado do problema da Basileia.

Referências Bibliográficas

[1] HUGGETT, N. *Zeno's Paradoxes*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2004 Edition), Ed. Edward N. Zalta. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/paradox-zeno/>. Acesso em: 12 de Dezembro de 2012.

[2] MENGOLI, P. *Novae quadraturae arithmeticae seu de Additione fractionum, Petri Mengoli,...*. Ed. ex typ. J. Montii. 1650.

[3] ÁVILA, G. *Revista Matemática Universitária*. Rio de Janeiro-RJ: SBM, nº42, p. 9-12, 2007.

[4] BOYER, C.B. *História da Matemática; revista por C.Merzbach, tradução Elza F. Gomide*. 2ª ed. São Paulo - SP: Ed. Edgard Blucher LTDA, 2006.

[5] EVES, H. *Introdução à história da Matemática; tradução Hygino H. Domingues*. 5ª ed. Campinas - SP: Ed. Unicamp, 2005.

[6] RIEMANN, B. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie. November 1859.

[7] KALMAN, D. *Six Ways to Sum a Series*, The College Mathematics Journal, Vol.24, nº5 Novembro, p. 402-421, 1993.

[8] LIMA, E; CARVALHO, P; WAGNER. E; MORGADO. A. *A Matemática do Ensino Médio*. 5ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2008, v.3. (Coleção do Professor de Matemática)

[9] LIMA, E. *Curso de Análise*. 11ª ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2004, v.1. (Projeto Euclides)

[10] LIMA, E. *Curso de Análise*. 11^{a} ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2012, v.2. (Projeto Euclides)

[11] GUIDORIZZI, H. *Curso de Cálculo*. 5^{a} ed. Rio de Janeiro-RJ: Ed LTC, 2004, v.4.

[12] GUIDORIZZI, H. *Curso de Cálculo*. 5^{a} ed. Rio de Janeiro-RJ: Ed LTC, 2006, v.3.

[13] IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 5^{a} ed. São Paulo: Ed Atual, 2003, v.6.

[14] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 5^{a} ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)