Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Limites, Continuidade, Derivabilidade e Aplicações [†]

por

Rildo Cariri Gonçalo

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

e coorientação do

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro/2013
João Pessoa - PB

[†] Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Limites, Continuidade, Derivabilidade e Aplicações

por

Rildo Cariri Gonçalo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Cálculo.

Aprovada por:

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB

Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos - UNIPÊ

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia -UFPB (Suplente)

Dezembro/2013

Agradecimentos

Agradeço àquele que permitiu tudo isso, não somente na vida acadêmica, mas em todos os mementos da minha vida, àquele que é o maior entre todos os mestres, ao meu senhor Deus, meu muito obrigado. Ao meu orientador professor Dr. Carlos Bocker e ao professor coorientador Me. Gilmar Correia, pela preciosa colaboração na realização deste trabalho e pelo privilégio de ter recebido orientações e sugestões. Aos meus colegas de estudo (Ednaldo Sena, João Evangelista, Rosângela, Rênad, Aderbal e Leônidas), que sempre estiveram presentes e atuantes no decorrer de nossas aulas.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais Nelson Cariri de Oliveira (in memoriam) e Terezinha Gonçalo Ribeiro, Meu filho Marcos Vinícius e minha esposa Renata, pela fé e confiança demonstrada e que nos momentos de minha ausência dedicada à conclusão deste curso sempre fizeram entender que o futuro, é feito a partir da constante dedicação do presente. Aos meus colegas e professores da turma Profmat 2011, pelo incentivo e apoio sempre constante durante os encontros semanais. Aos professores e alunos amantes da Matemática em especial ao professor Raimundo Cariri, que buscam a todo momento construir uma sociedade melhor e mais justa, sempre acreditando que a educação é o único caminho para o desenvovimento de uma nação.

Resumo

Este trabalho é um texto sobre Limites, Continuidade, Derivabilidade e Aplicações, direcionado a estudantes do curso de licenciatura em Matemática e professores da educação básica, principalmente os atuantes no ensino médio, como forma de auxílio em seus estudos em disciplinas que abordem o cálculo diferencial. Sempre que possível, aproximamos os temas apresentados com conteúdos da educação básica buscando uma ligação entre alguns conteúdos. Os exemplos são os mais claros possíveis, pois o objetivo aqui não é apresentar desafios e sim mostrar as aplicações diretas das principais definições.

Palavras-Chave: Cálculo Diferencial, Aplicações de Limites e Derivadas.

Abstract

The text on Limits, Continuity, Derivability and Applications is aimed at students of undergraduate courses in mathematics and basic education teachers, especially those active in high school as a way to aid in their studies in subjects that address the differential calculus. Whenever possible, approach the issues presented with content of basic education seeking a link between some content. The examples are as clear as possible, because the goal here is not to present challenges but show direct applications of key settings.

Keywords: Differential Calculus, Limits and Applications of Derivatives.

Sumário

Introdução

As funções representam um dos grandes temas de estudo da matemática, e por muito tempo a geometria analítica com as idéias de ponto, reta e plano foram temas bastantes discutidos principalmente desde os tempos dos gregos antigos. O cálculo, que tem as funções como objeto de estudo, surgiu para alavancar o desenvolvimento da matemática contemporânea, se tornado assim uma ferramenta com muitas aplicações tanto na própria matemática como em outras áreas do conhecimento.

Em alguns livros as definições de alguns temas da matemática, não são abordadas de uma maneira que o alunado absorva com mais clareza as suas principais definições e algumas de suas aplicações. Podemos citar, por exemplo, a definição formal de limite de uma função, uma dúvida que muitos alunos da graduação adquirem durante um curso de cálculo. Na educação básica isso ocorre em diversas situações. Ao estudar o conteúdo de funções, os alunos, por muitas vezes, entendem que a relação entre as grandezas x e y é meramente de substituição. O aluno dessa forma não constrói um conceito claro e isso acarreta um prejuízo enorme quando tal aluno ingressa em cursos na área de exatas. Uma prova disso são as grandes evasões e reprovações nos primeiros períodos dos cursos de Engenharia, Matemática, Física e de outras áreas afins.

É com esse entendimento, que neste trabalho tentamos o máximo simplificar as definições e sempre reforçá-las com exempificações onde podemos aplicar diretamente as definições e propriedades. Desejamos ajudar de alguma forma um público que necessite compreender as noções de limite, derivada e algumas de suas aplicações de forma mais simples e acessível para que essas idéias possam ser difundidas com o intuito de melhorar a aprendizagem em matemática.

"A compreensão de uma ciência não deve ser vista como o estado final e perfeito, mas sim, como estados de conhecimentos que vão sendo atingidos por quem aprende ao pensar a matemática. Para que o aluno a compreenda é preciso que esteja com a consciência dirigida para o assunto matemático estudado. Assim, a pessoa só se apropria dele se também for apropriada por ele, se desejar compreendê-lo. Esta é a condição para a compreensão e ela é atingida quando a pessoa dos significados que atribui aos assuntos matemáticos e os supera pelos novos significados da matemática, que não eram ainda seus, que já existiam impressos nos livros, nas aulas e não eram por ela percebido"$(Bicudo, 1999, p. 35)$.

Este trabalho é dividido em quatro partes: a primeira parte, é dedicado à Sequências Numéricas, mostrando resultados importantes como a convergência e a divergência de uma sequência e citando sequências importantes na educação básica, tais como as progessões Aritméticas e Geométricas. A segunda parte do trabalho é dedicada aos tópicos de limite e continuidade. Apresentamos a definição de limite de duas formas equivalentes, uma com a idéia de limite de sequências e a outra com a definição tradicional utilizando "épsilon e o delta". A continuidade de uma função é abordada juntamente com alguns teoremas importantes como o Teorema do Valor Intermediário. Apresentamos na terceira parte a definição de derivada de uma função, sua interpretação geométrica e as derivadas das funções elementares, sempre apresentando exemplos que abordem os conceitos mais importantes. Na quarta e última parte apresentamos algumas aplicações de sequência, limites e derivadas, tais como a construção de gráficos, alguns problemas de minimização e maximização de funções, aproximações de funções via diferencial e os métodos para determinar raizes aproximadas de uma função em um intervalo I (Método da Bisseção e o Método de Newton).

Capítulo 1

Sequências Numéricas

1.1 Definições Básicas e Exemplos

Sequência ou sucessão numérica é qualquer conjunto de números dispostos ordenadamente, de forma que seja possível indicar o primeiro elemento, o segundo, o terceiro,... e, assim , sucessivamente. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 1 *Uma sequência de números reais é uma função* $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. *O valor* $a(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *será representado por* a_n *e chamado o* ***termo geral de ordem*** n, *ou* n***-ésimo termo*** *da sequência.*

Escrevemos $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, *ou* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *ou simplesmente* (a_n), *para indicar a sequência* a.

É muito comum, quando se estuda sequência, a necessidade de obtermos um termo qualquer da sequência, para isso se faz necessário obter uma relação matemática que envolva o termo da sequência com a ordem dele, ou seja, precisamos determinar o termo geral da sequência. Assim, por exemplo, temos:

- A sequência dos números pares positivos é $(2, 4, 6, 8, ...)$, onde o termo geral é dado pela relação $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$.
- A sucessão numérica $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...)$, tem como termo geral $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$.
- Uma sequência muito conhecida é a sequência de **Fibonacci** $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$ que é dada pela fórmula

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se} \quad n > 2 \end{cases}$$

Definição 2 *Seja (a_n) uma sequência de números reais. Dizemos que (a_n) é* ***não-decrescente*** *se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo natural n, ou seja, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$.*

Analogamente, definem-se sequência crescente, não-crescente e decrescente trocando-se $\leq$ por $<$, $\geq$ e $>$, respectivamente, na Definição 2. Tais sequências são ditas **monótonas**.

Definição 3 *Uma sequência (a_n) diz-se:*

1. *limitada inferiomente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
2. *limitada superiomente quando existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Quando (a_n) for limitada inferiormente e superiomente dizemos simplesmente que ela é limitada.

Se (a_n) é uma sequência limitada superiormente (respect. inferiormente), dizemos que $M \in \mathbb{R}$ é uma *cota superior* (respect. *cota inferior*) para a sequência (a_n) se $a_n \leq M$ (respect. $a_n \geq M$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Um número S é chamado de *supremo* da sequência limitada superiormente (a_n) se nenhum número menor que S é cota superior de (a_n). Notação: $S = \sup a_n$.

Analogamente, um número s é chamado de *ínfimo* da sequência limitada inferiormente (a_n) se nenhum número maior que s é cota inferior de (a_n). Notação: $s = \inf a_n$.

Exemplo 1 *A sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente por zero, mas não é limitada superiormente.*

Exemplo 2 *A sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ é limitada, pois seus termos estão no intervalo $(0, 1)$.*

Exemplo 3 *A sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada, pois $-1 \leq a_n \leq 1$.*

.

1.2 Limite de uma Sequência

Definição 4 *Uma sequência $(a_n)_{n \in N}$ tem limite L quando para todo $\epsilon > 0$ existir n_0 tal que $|a_n - L| < \epsilon$ desde que $n > n_0$. Notação: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$.*

Dizemos que L é o limite da sequência, ou que, a sequência converge para L.

Proposição 1 *Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e L_1,L_2 números reais. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

Demonstração: Suponha por contradição que $L_1 \neq L_2$. Então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_1$, se para todo $\epsilon > 0$ existe n_1 tal que $|a_n - L_1| < \epsilon$ desde que $n > n_1$. Do mesmo modo se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_2$, se para todo $\epsilon > 0$ existe n_2 tal que $|a_n - L_2| < \epsilon$ desde que $n > n_2$. Considere $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$ e tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $n > n_0$, então teremos que $|a_n - L_1| < \epsilon$ e $|a_n - L_2| < \epsilon$. Observe que sendo $2\epsilon = |L_1 - L_2|$ então aplicando a desigualdade triangular, teremos $2\epsilon = |L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\epsilon$, deste modo, essa última desigualdade é uma contradição, portanto teremos que $L_1 = L_2$. ■

Exemplo 4 *Considere a sequência $(a_n) = (\frac{1}{n})$, com n natural e $n \neq 0$.*

Os termos da sequência são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{100000}, \ldots$. Podemos ver que à medida que n cresce os termos da sequência aproximam-se cada vez mais de zero, ou seja, converge para zero. Dizemos nesse caso que o limite da sequência é zero. De fato, usando a Definição 4, dado $\epsilon > 0$, tomando-se $n_0 > \epsilon^{-1}$, tem-se

$$n > n_0 \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Exemplo 5 *Considere a sequência $(a_n) = (\frac{n+1}{n})$, com n natural e $n \neq 0$. Listando os termos dessa sequência , teremos $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ..., \frac{101}{100}, ..., \frac{1001}{1000}, ..., \frac{10001}{10000}, ...$.*

Escrevendo esses termos na forma decimal, temos :

$2; 1,5; 1,3; 1,25; ...; 1,01; ...; 1,001; ...; 1,0001; ...$, *então na medida que n tende a infinito , os termos da sequência aproximam-se cada vez mais de 1. Dizemos, neste caso, que o limite da sequência a_n é 1 e escrevemos:*

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. *Formalmente , dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Assim, se $n > n_0$ então $|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \epsilon$.*

Uma sequência que não converge é dita **divergente**. Por exemplo, a sequência $(a_n) = (-1)^n$ é divergente, pois seus termos oscilam entre (-1) e 1 e a sequência (a_n) não se aproxima de nenhum valor. Então, o limite da sequência não existe, ou seja, a sequência $(a_n) = (-1)^n$ é divergente.

Proposição 2 *Se a sequência* $(a_n)_{n\in N}$ *é convergente, então é limitada.*

Demonstração:

Seja (a_n) uma sequência convergente para um número L, então dado $\epsilon = 1$ existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $L-1 < a_n < L+1$. Sejam $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L-1\}$ e $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L+1\}$. Dessa forma $m < a_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que prova que (a_n) é limitada. ■

Essa proposição é um critério bastante útil para se determinar a convergência de uma sequência, pois uma sequência que não é limitada, não pode convergir. Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é divergente, visto que tal sequência não é limitada. No entanto, a sequência $(a_n) = (-1)^n$ é limitada, mas é divergente, o que mostra que a recíproca da Proposição 2 não é válida.

Teorema 1 *Se* (a_n) *e* (b_n) *são duas sequências convergentes, e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, então :*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *desde que* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Demonstração:

Demonstraremos apenas a primeira propriedade. Seja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$. Assim dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1$ e $n > n_2$ de modo que $0 < |a_n - L_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $0 < |b_n - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, $n > n_0$ implica que $|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| = |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Isto prova que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ■

Teorema 2 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração:

Considere (a_n) uma sequência monótona e limitada. Sem perda de generalidade, podemos supor que (a_n) é não-decrescente. Seja $L = \sup a_n$, em particular,

$$a_n \leq L, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. De fato, dado $\epsilon > 0$, pela definição de supremo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N > L - \epsilon$. Como (a_n) é não-decrescente, temos que

$$a_n > L - \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq N \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) temos que $L - \epsilon < a_n \leq L < L + \epsilon$ para todo $n > N$, o que mostra que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ∎

Em algumas situações, determinar o limite de uma sequência não é tarefa fácil. Ainda mais quando nem sabemos se a sequência converge ou diverge. O Teorema 2 nos dá uma condição suficiente para que uma dada sequência convirja e, como veremos no próximo exemplo a informação de que a dada sequência tem limite ajuda-nos a encontrar tal limite.

Exemplo 6 *Mostre que a sequência $(\sqrt{l}, \sqrt{l\sqrt{l}}, \sqrt{l\sqrt{l\sqrt{l}}}, \dots)$, onde $l > 1$, converge e calcule seu limite.*

Demonstração:

Afirmamos que a sequência é monótona crescente e limitada. De fato, é limitada superiormente por l pois $a_1 = \sqrt{l} < l$, porque $l > 1$. Agora supondo, por hipótese de indução, que $a_n < l$, temos que $a_{n+1} = \sqrt{l}\sqrt{a_n} < \sqrt{l}\sqrt{l} = l$. A sequência é crescente, pois $a_{n+1} = \sqrt{l}\sqrt{a_n} > \sqrt{a_n}\sqrt{a_n} = a_n$.

Pelo Teorema 2, a sequência converge para algum $s \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $a_{n+1} = \sqrt{la_n}$, temos que $s = \sqrt{ls}$, o que implica que $s = l$. Portanto o limite da sequência é igual a l. ∎

1.3 Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

Embora, nossa definição de sequência seja uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, podemos pensar em sequência como uma função definida em um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ da forma $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p-1, p\}$ para algum $p \in \mathbb{N}$ fixado. Nesta seção, utilizaremos este significado para sequências, uma vez que, as sequências numéricas mais estudadas no ensino médio, são as progressões aritméticas e geométricas.

Definição 5 *Dizemos que a sequência $(a_n)_{n\in L}$, onde $L = \mathbb{N}_p$ ou $L = \mathbb{N}$, é uma* progressão aritmética ***(PA)*** *se existe uma constante $r \in \mathbb{R}$ tal que $a_n = a_{n-1} + r$ para todo $n \in L\setminus\{1\}$. Tal constante r é chamada de razão da progressão aritmética.*

Em palavras, para se definir uma PA, basta conhecer apenas dois números, o primeiro termo e sua razão, pois todos os demais termos são obtidos como função do primeito termo e da razão. A saber, prova-se, facilmente, por indução que o termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Definição 6 *Dizemos que a sequência* $(a_n)_{n\in L}$*, onde* $L = \mathbb{N}_p$ *ou* $L = \mathbb{N}$*, é uma* progressão geométrica ***(PG)*** *se existe uma constante* $q \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n = qa_{n-1}$ *para todo* $n \in L \setminus \{1\}$*. Tal constante* q *é chamada de razão da progressão.*

Da mesma forma que para determinar uma PA basta conhecer apenas dois números, para se determinar uma PG, basta conhecer o primeiro termo e sua razão. Mais precisamente, o termo geral da PG é dado por $a_n = a_1q^{n-1}$.

Exemplo 7 *A progressão* $(1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}, ...)$ *é uma PA em que* $a_1 = 1$ *e a razão* $\sqrt{3}$*.*

Exemplo 8 *A progressão* $(100, 80, 60, 40, 20, 0)$ *é uma PA de* 6 *termos onde* $a_1 = 1$ *e a razão* $r = -20$*.*

Exemplo 9 *A progressão* $(5, -10, 20, -40, 80)$ *é uma PG finita de cinco termos onde* $a_1 = 5$ *e* $q = -2$*.*

Exemplo 10 *A progressão* $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}...)$ *é uma PG infinita onde* $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $q = \sqrt{3}$*.*

Exemplo 11 *A progressão cujo primeiro termo é* $a_1 = 1$ *e* $a_n = 2a_{n-1} + 1$ *não é nem PA nem PG.*

.

Proposição 3 *Se* (a_n) *é uma progressão com mais de dois termos que é ao mesmo tempo uma PA e uma PG então* (a_n) *é constante.*

Demonstração:

Se $a_1 = 0$ então $a_n = 0$ para todo n pois (a_n) é uma PG. Se $a_1 \neq 0$ então, por ser (a_n) uma PA e uma PG ao mesmo tempo, existem $r \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 + (n-1)r = a_n = a_1q^{n-1} \tag{1.3}$$

Assim, obtemos que $a_1(q^n - 1) = nr$ para todo n. Em particular, comparando as equações com $n = 1$ e $n = 2$, temos que $a_1(q-1) = \frac{a_1(q^2-1)}{2}$. Como $a_1 \neq 0$, temos

$$2(q-1) = q^2 - 1 \tag{1.4}$$

Resolvendo a equação (1.4), obtemos que $q = 1$ e, portanto, (a_n) é constante. ∎

1.3.1 Soma dos n primeiros termos de uma PA e de uma PG

Seja (a_n) uma PA, queremos obter a soma $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, dos n primeiros termos de uma PA. Provemos por indução que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{1.5}$$

Ou equivalentemente, uma vez que que $a_n = a_1 + (n-1)r$,

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2}. \tag{1.6}$$

De fato, para $n = 1$ o resultado é imediato. Suponha por hipótese de indução que o resultado seja válido para $k \geq 1$, provemos que vale para $k+1$. Note que $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ e que $a_n = a_m + (n-m)r$, para todo n, m no domínio da sequência. Assim,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{(a_1 + a_k)k}{2} + a_{k+1} = \frac{(a_1 + a_{k+1} - r)k}{2} + a_{k+1} \\ &= \frac{a_{k+1}(k+1)}{2} + a_1 k + \frac{a_{k+1} - rk}{2} = \frac{(a_1 + a_{k+1})(k+1)}{2} \end{aligned}$$

Agora, seja (b_n) uma PG, e seja

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \tag{1.7}$$

então multiplicando, membro a membro, a equação (1.7) pela razão q da PG obtemos

$$qS_n = b_2 + b_3 + \cdots + b_{n+1} \tag{1.8}$$

Agora, fazendo a diferença entre as equações (1.7) e (1.8) obtemos

$$(1-q)S_n = b_1 - b_{n+1} \tag{1.9}$$

Agora, supondo $q \neq 1$, segue de $b_{n+1} = b_1 q^n$ e da equação (1.9), a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG:

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1.10}$$

Observação 1 *Quando $q = 1$, a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PG é muito simples, pois, neste caso, a sequência é constante e $S_n = nb_1$.*

1.3.2 Limite da soma de uma PG infinita com $0 \leq |q| < 1$

Dada uma sequência infinita $(a_n)_n$ podemos definir a sequência de somas parciais $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ e nos perguntar sobre a existência ou não dos limites de $(a_n)_n$ e de $(S_n)_n$.

Se $(a_n)_n$ é uma PA é fácil ver que $\lim a_n$ existe se e somente se sua razão r for zero e que $\lim S_n$ existe somente quando a sequência $(a_n)_n$ for constante igual a zero.

Se $(a_n)_n$ é uma PG com $a_1 \neq 0$ e $|q| \geq 1$ então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ e pela equação (1.10) $\lim_{n\to+\infty} |S_n| = +\infty$. Isso mostra que não é muito interessante calcular limite de somas de PAs, nem de PGs cuja razão q seja, em módulo, maior ou igual a 1.

Por isso, vamos tratar apenas o caso realmente interessante, o caso em que $(a_n)_n$ é uma PG com razão q com $0 \leq |q| < 1$. Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, tem-se, imediatamente que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e, por (1.10), temos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{1.11}$$

1.3.3 Problemas envolvendo PA e PG

Teorema 3 *No regime de juros compostos de taxa i, um principal P transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante M dado por:*

$$M = P(1+i)^n \tag{1.12}$$

Demonstração:

Basta observarmos que os valores do principal P crescem a uma taxa constante i, e portanto, formam uma progressão geométrica de razão $1+i$.

■

Problema 1 *Se a população de uma região cresce 2% ao ano, quanto crescerá em 20 anos?*

Solução:

Seja P_0 a população inicial e P_n a população em n anos. Como a população cresce a taxa de $2\% = 0,02$ ao ano, temos que $P_1 = P_0(1+0,02)$, $P_2 = P_0(1+0,02)^2$ e, mais geralmente, $P_n = P_0(1+0,02)^n$.

A sequência $P_0, P_0(1+0,02), P_0(1+0,02)^2, \ldots, P_0(1+0,02)^n, \ldots$ é uma PG de razão $q = 1,02$.

Assim, a taxa de crescimento da população relativa a 20 anos é

$$I = \frac{P_{20} - P_0}{P_0} = (1+0,02)^{20} - 1 = 0,4859 = 48,59\%$$

Portanto a população crescerá aproximadamente $48,59\%$ em 20 anos. ■

Problema 2 *Na compra de um vestuário, Antônio tem três opções de pagamento.*

1. *à vista com* 25% *de desconto.*

2. *em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.*

3. *em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.*

Qual é a melhor opções para Antônio, se o dinheiro vale, para ele, 20% *ao mês?*

Solução:
Podemos ver a fórmula 1.12 como sendo o valor futuro do valor atual P , depois de n períodos de tempo, assim para obter o valor futuro, basta multipicar o atual por $(1+i)^n$, e para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$.

Seja P o preço do vestuário sem desconto. Então, comparando todas as opções na data zero, temos:

$$a = 0,75P$$

$$b = \frac{P/2}{1+0,2} + \frac{P/2}{(1+0,2)^2} = \frac{P}{2}(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{(1,2)^2}) \simeq 0,76P$$

$$c = P/3 + \frac{P/3}{1+0,2} + \frac{P/3}{(1+0,2)^2} = \frac{P}{3}(\frac{1-(1,2)^{-3}}{1-(1,2)^{-1}}) \simeq 0,84P$$

Logo, a melhor alternativa é a de comprar à vista e a pior é a de comprar em três prestações. ■

Problema 3 *Um carro novo custa R\$* 18000,00 *e, com* 4 *anos de uso, vale R\$* 12000,00*. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante , determine o valor do carro com* 1 *ano de uso.*

Solução:
Os valores formam uma progressão geométrica, assim temos $a_4 = a_0q^4$, substituindo os dados do problema , teremos $12000 = 18000q^4$ e que $q = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, portanto o preço do carro com 1 ano de uso será $a_1 = a_0 \cdot q = 18000\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, ou seja, R\$ $16\,264,84$.
■

Problema 4 *Os números inteiros de* 1 *a* 1000 *são escritos ordendamente em torno de um círculo. Partindo de* 1, *riscamos os números de* 15 *em* 15, *isto é, riscamos 1,16,31,... o processo continua até se atingir um número já previamente riscado. Quantos números sobram sem riscos?*

Solução:

Veja que na primeira volta são riscados os números: $1, 16, 31, ..., 991$ num total de 67 números. Na segunda volta são riscados os números $6, 21, 36, ..., 996$ num total de 67 números. Na terceira volta são riscados os números $11, 26, 41, ...986$ num total de 66 números. Na quarta rodada é riscado um número previamente riscado (o número 1), assim são riscados $67 + 67 + 66 = 200$ números. Portanto sobram 800 números não riscados. ■

Capítulo 2

Limite e Continuidade

2.1 Limite de uma Função

O conceito de limite é um dos mais importantes na matemática, pois para definir continuidade, derivadas, convergência, divergência e integral é necessário utilizar as idéias de limite. As primeiras ideias de limite surgiram por volta de 450 a.C nos paradoxos de Zenão. Um desses paradoxos discutia-se o movimento de um objeto distante de dois pontos A e B de distância finita. Considerando uma sequência de intervalos T_i com $i \in (0, 1, 2, 3, ..., n, ...)$, sendo cada um deles o tempo gasto para percorrer a metade da distância percorrida no movimento anterior. Desta maneira Zenão concluiu que o objeto nunca chegaria em B. Outros grandes matemáticos como Fermat, Arquimedes, Descartes, Isaac Newton, D'lambert, Gauss, Cauchy, todos em suas obras reconheciam a importância e a necessidade da utilização dos conceitos de limites. Determinar a equação da reta tangente a uma curva num ponto dado e determinar áreas em regiões delimitadas por curvas, são alguns dos problemas fundamentais do cálculo, todos, porém necessitam da rigorosidade da definição de limite.

Dado um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* de I, se existe pelo menos uma sequência $(a_n)_n$ convergindo para x_0 tal que $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \subset I \setminus \{x_0\}$. A definição de limite de uma função, a seguir, faz uso do conceito de limite de uma sequência.

Definição 7 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, L um número real e x_0 um ponto de acumulação de I. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual a L, se para toda sequência $(x_n)_n$ convergindo para x_0 tal que $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset I \setminus \{x_0\}$ tem-se que a sequência $(f(x_n))$ converge para L.*

Notação: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Observação 2 *1. Quando o limite de uma função existe, ele é único.*

2. *Se existem duas sequências* $(x_n)_n$ *e* $(y_n)_n$ *convergindo para* x_0*, como na Definição 7, então se* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n)$ *e* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(y_n)$ *forem diferentes, ou algum desses limites não existir, então o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* x_0 *não existe.*

Exemplo 12 *Considere as funções* $f(x) = 2x + 3$ *e* $g(x) = sen(\frac{1}{x})$*. A primeira função tem limite igual a* 3 *quando* x *tende a zero, pois se* (x_n) *é uma sequência de termos não-nulos convergindo para zero, então* $f(x_n) = 2x_n + 3$*, cujo limite pode ser facilmente calculado usando as propriedades de sequências.*

Temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 3$ *pois* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2x_n + 3 = 2\cdot 0 + 3 = 3$ *e portanto,* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

Já o $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *não existe, pois considerando-se as sequências* $(x_n = \dfrac{1}{2\pi n})_n$ *e* $(y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n})_n$*, ambas convergem para zero, mas* $g(x_n) = 0$ *e* $g(y_n) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é* $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n)$.

Uma definição equivalente de limite de uma função é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 4 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* I*. Então* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *se, e somente se, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta$ *então* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demonstração:

Ver Elon Lages Lima (vide[6] pg.155) ∎

É importante entender o comportamento de uma função para que intuitivamente possamos determinar seu limite em um ponto. Para ilustrar essa situação, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 13 *Considere a função* $h(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ *com* $x \neq -1$*, vejamos o comportamento de* $h(x)$ *quando* x *estiver bem próximo de* -1.

Como $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$*, temos que*

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x\to-1}(x + 2) = -1 + 2 = 1.$$

Encontramos um limite para h(x) apesar da função não estar definida em $x = -1$ *(ver figura 2.1).*

Exemplo 14 *Usando o Teorema 4, provar que:* $\lim\limits_{x\to 2}(5x + 1) = 11$

De acordo com o teorema 4, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |(5x + 1) - 11| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$. Note que

$|5x - 10| < \epsilon \Leftrightarrow 5|(x - 2)| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \dfrac{\epsilon}{5}$, assim basta tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$, pois se $0 < |x - 2| < \delta$ então $|5x - 10| < \epsilon$ e portanto $\lim\limits_{x\to 2}(5x + 1) = 11$

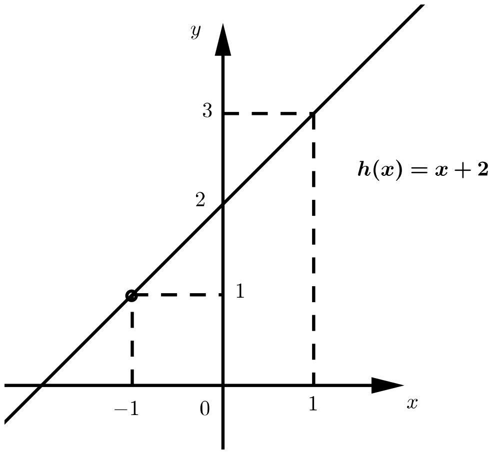

Figura 2.1:

2.1.1 Propriedades dos Limites

A seguir mostraremos algumas propriedades sobre limites, que são ferramentas úteis nos cálculos de limite de uma função.

Proposição 4 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ *então:*

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M.$

2. $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M.$

3. *Se* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ *então* $\lim\limits_{x\to a}(f/g)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Demonstração:
Segue imediatamente das propriedades dos limites para sequências. Vejamos algumas aplicações. ■

Exemplo 15 1. *Determinar o limite da função quociente* $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x - 5}{x^2 - 3}$ *quando* x *tender para 2.*

Solução:

Como o limite do denominador é diferente de zero, podemos aplicar a regra do quociente

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 2x - 5}{x^2 - 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x^3 - 2x - 5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3)} = \frac{15}{1} = 15.$$

■

2. *Encontrar o* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

   Solução:

   Observe que não podemos aplicar a propriedade do quociente porque o limite do denominador é zero, assim fazendo manipulações com as equações, temos:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

   para todo $x \neq 1$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = (1+1) = 2.$$

   ■

3. *Determine o limite da função* $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$ *quando* x *tender a zero.*

   Solução:

   Veja que aplicando a propriedade adequada, teremos :

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 3x^2 + \lim\limits_{x\to 0} 4x - \lim\limits_{x\to 0} 8 = 3\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 4\lim\limits_{x\to 0} x - 8 = 0+0-8 = -8$
   ■

Usando o princípio de indução, temos o seguinte corolário de proprosição 4.

Corolário 4.1 *Seja* $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i$, *com* $i = 1, 2, ..., n$, *então:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) + ... + f_n(x) = L_1 + ... + L_n$

2. $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)...f_n(x) = L_1...L_n$, *em particular, se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, *então :*
   $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = L^n$

Exemplo 16 *Se* $f(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + ... + k_1 x + k_0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Note primeiramente que $\lim\limits_{x\to a} x = a$, *assim pelo Corolário 4.1,* $\lim\limits_{x\to a} k_j x^j = k_j a^j$ *para todo* $j = 1, ..., n$.

Como $f(x) = g_n(x) + ... + g_1(x) + a_0$ *com* $g_j(x) = k_j x^j$, *segue novamente do Corolário 4.1 que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g_n(a) + ... + g_1(a) + a_0 = f(a)$.

Teorema 5 (Confronto) *Sejam* f, g *e* h *funções definidas em um intervalo aberto* I *contendo* a, *exceto possivelmente em* $x = a$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in I \setminus \{a\}$ *e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, *então* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Demonstração:

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $|f(x) - L| < \epsilon$ desde que $0 < |x - a| < \delta_1$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ desde que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos que

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \tag{2.1}$$

e

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \tag{2.2}$$

Usando a hipótese $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ juntamente com as desigualdades (2.1) e (2.2), temos que, se $0 < |x - a| < \delta$ então $L - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \epsilon$, isto é, $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. ■

2.1.2 Limites Laterais

Seja I um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação *à direita* (respectivamente *à esquerda*) de I, se existe uma sequência $(x_n)_n$ em I convergindo para a tal que $x_n > a$ (respectivamente $x_n < a$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

A seguir, definimos limites laterais à direita e à esquerda.

Definição 8 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita de I e L um número real. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende para a pela direita é igual a L e, denotamos por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, se dado qualquer sequência $(x_n)_n$ em I, convergindo para a, com $x_n > a$, para todo n, tem-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.*

Analogamente, definimos limite lateral à esquerda, como segue.

Definição 9 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à esquerda de I e L um número real. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende para a pela esquerda é igual a L e, denotamos por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, se dado qualquer sequência $(x_n)_n$ em I, convergindo para a, com $x_n < a$, para todo n, tem-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.*

Teorema 6 *Seja I um intervalo aberto que contenha o ponto a e seja f uma função definida em $I - \{a\}$. Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, os limites laterais existirem e tiverem o mesmo valor L, ou seja, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.*

Exemplo 17 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & se \quad x \leq 2 \\ 3x-1, & se \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. *Existe* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$*?.*

Solução: Se $x \leq 2$ então $f(x) = x + 3$. Assim,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+3) = (2+3) = 5.$$

Por outro lado, se $x > 2$ então $f(x) = 3x - 1$, e neste caso temos

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x-1) = (6-1) = 5.$$

Como existem os limites laterais e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$, pelo Teorema 6, o limite $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe e é igual a 5. Graficamente, temos

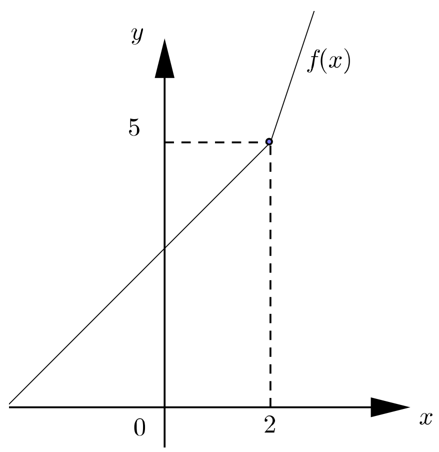

Figura 2.2:

■

Exemplo 18 *Seja a função* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, *com* $x \neq 0$. *Determine se existe o* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Solução: Por definição de módulo de um número real, temos:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\frac{x}{x}) = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1.$$

Como os limites laterais em $x = 0$ são diferentes, segue que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe, apesar dos limites laterais existirem. ∎

2.1.3 Outros tipos de Limites: Infinito e no Infinito

A seguir apresentamos outros tipos de limites que serão úteis, principalmente, para a construção de gráficos de certas funções.

Definição 10 *Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência. Dizemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, se para qualquer $A > 0$, existir $n_0 \in N$ tal que $x_n > A$ sempre que $n > n_0$.*

Definição 11 (Limite em $+\infty$) *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Dizemos que, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, se dada qualquer sequência $(x_n)_n$ com $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n) = +\infty$ tem-se que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$*

Definição 12 (Limite em $-\infty$) *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, b)$. Dizemos que, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, se dada qualquer sequência $(x_n)_n$ com $\lim\limits_{n\to-\infty} (x_n) = -\infty$ tem-se que $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x_n) = L$.*

Definição 13 (Limite Infinito) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto I contendo a, exceto, possivelmente em $x = a$. Dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) se, dada qualquer sequência $(x_n)_n$ em $I \setminus \{a\}$, com $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n) = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$).*

Exemplo 19 *Dada a função real $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \neq 0$. Vejamos no gráfico abaixo, o comportamento da função quando x se aproxima à direita e à esquerda de zero, e quando x tende para mais infinito e menos infinito. (Ver figura 2.3):*

a) À medida que x aumenta com valores maiores que zero, $y = f(x)$ tende para zero e assim o limite é

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b) À medida que x diminui com valores menores que zero, $y = f(x)$ tende para zero e assim o limite é

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

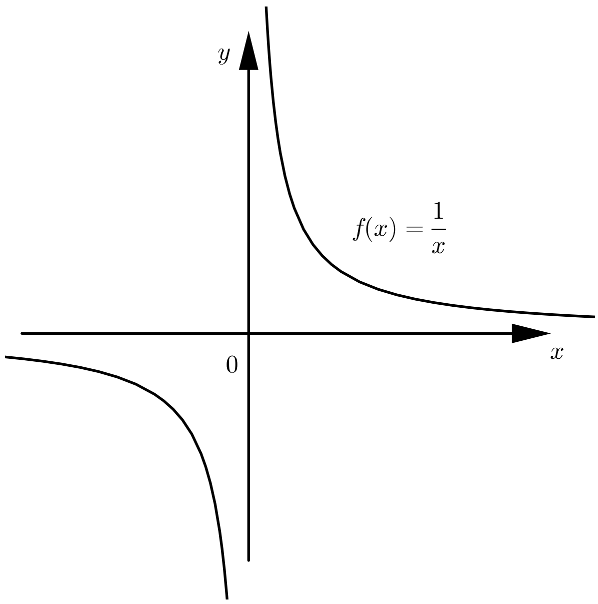

Figura 2.3:

c) À medida que x se aproxima de zero pela direita ($x \to 0^+$), $y = f(x)$ tende para o infinito, assim o limite será
$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$
d) À medida que x se aproxima de zero pela esquerda ($x \to 0^-$), $y = f(x)$ tende para menos infinito, assim o limite será $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

2.2 Limites Fundamentais

2.2.1 Limite fundamental trigonométrico

Proposição 5 $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1.$

Demonstração:

Consideremos a circunferência de raio igual a 1 (Ver figura 2.4). Tomando x como a medida em radianos do arco $\widehat{AOM}$ com x percorrendo o intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Analisando a figura e considerando a área do triângulo MOA , a área do setor $M\hat{O}A$ e a área do triângulo TOA, temos as seguintes desigualdades:

$$\text{área } \Delta \text{ MOA}<\text{área do setor } MOA < \text{ área } \Delta \text{ TOA}.$$

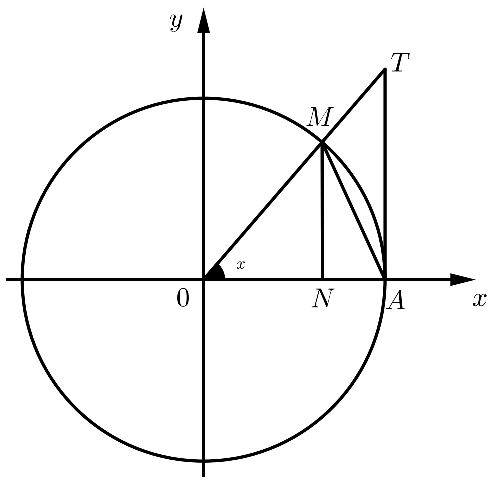

Figura 2.4:

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{MN}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \widehat{AM}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{TA}}{2}$$

$$\overline{MN} < \widehat{AM} < \overline{TA}$$

$$sen\, x < \ x \ < tg\ x$$

Se da última desigualdade dividirmos tudo por $senx$, já que $sen\, x > 0$ para $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, temos:

$$1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{1}{cos\, x}$$

e

$$1 > \frac{sen\, x}{x} > cos\, x$$

.

Essa última desigualdade é válida para todo $x \neq 0$, pois: $\dfrac{sen\, x}{x}$ e $cos\, x$ são funções pares. Assim temos que $\lim_{x \to 0} cos\, x = 1$ e $\lim_{x \to 0} 1 = 1$. Portanto na desigualdade $1 > \dfrac{sen\, x}{x} > cos\, x$, aplicamos o Teorema 5, temos então:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1 \qquad (2.3)$$

■

2.2.2 Limite fundamental Exponencial

Proposição 6 $\lim\limits_{n\to\pm\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$, *onde e é o número irracional cujo valor aproximado é* $2,718281828459\ldots$.

Por envolver conhecimentos sobre séries, a demonstração desta proposição será omitida.

Teorema 7 *Seja a função* $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ *definida em* $\{x \in \mathbb{R}/ -1 < x \neq 0\}$, *então:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Demonstração:

Chamando $u = \dfrac{1}{x}$ temos que $x = \dfrac{1}{u}$ e podemos observar que

$x \to 0^+ \to u \to +\infty$ e

$x \to 0^- \to u \to -\infty$, assim teremos $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to+\infty}(1+\dfrac{1}{u})^u = e$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to-\infty}(1+\dfrac{1}{u})^u = e$ e portanto $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ∎

Teorema 8 *Se* $a > 0$, *então temos que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

Demonstração:

Se $a = 1$, teremos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \ln 1$

Supondo $0 < a \neq 1$ e chamando $k = a^x - 1$, temos que $a^x = k+1$ aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da última igualdade, temos:

$\ln a^x = \ln(k+1) \Rightarrow x \cdot \ln a = \ln(k+1) \Rightarrow x = \dfrac{\ln(k+1)}{\ln a}$. Veja que se $x \to 0$, então $k \to 0$, então substituindo , temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{k\to 0}\frac{k}{\frac{\ln(k+1)}{\ln a}} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{k\cdot\ln a}{\ln(k+1)} = \ln a\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\ln(k+1)} \\
&= \ln a\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\ln(k+1)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\ln a}{\ln[\lim\limits_{k\to 0}(k+1)^{\frac{1}{k}}]} \\
&= \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.
\end{aligned}$$

∎

Observação 3 *Quando* $a = e$ *teremos que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \ln e = 1$

2.3 Continuidade

Definição 14 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$ um ponto de acumulação de I. Dizemos que f é contínua no ponto a se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Quando f for contínua em todo ponto de um conjunto $J \subset I$, diremos que f é contínua em J. Além disso, se J coincidir com o domínio, I, de f então diremos, simplesmente, que f é contínua.

Exemplo 20 *Toda função polinomial é contínua.*

Solução: Segue imediatamente da Definição 14 e do Exemplo 16. ■

Exemplo 21 *Consideremos a função*

$$h(x) = \begin{cases} x+2, & se \quad x \leq 2 \\ 2-x, & se \quad x > 2. \end{cases}$$

Verificar se h é contínua ou descontínua em $x = 2$.

Solução: Calculando os limites laterais em $x = 2$, temos

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = (2+2) = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2-x) = (2-2) = 0$$

Como os limites laterais em $x = 2$ são diferentes, então não existe o limite de h em $x = 2$. Portanto h não é contínua em $x = 2$, logo h é descontínua em $x = 2$.

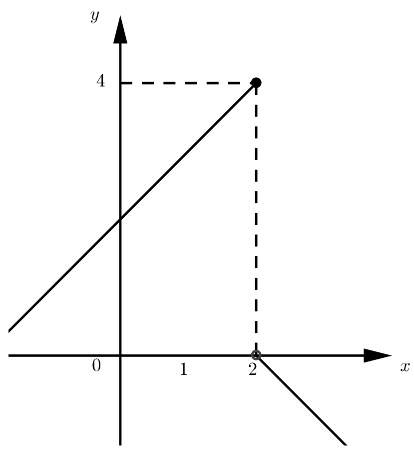

Figura 2.5: Ilustração para o exemplo 21

■

Definição 15 *Dado um ponto a do domínio de uma função f. Dizemos que f é contínua à direita de a se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *e dizemos que f é contínua à esquerda de a se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Definição 16 *Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se f for contínua no intervalo aberto (a, b) e se for contínua á direita e à esquerda de a.*

Proposição 7 *Sejam as funções f e g contínuas em um ponto a. Então:*

1. $f + g$ *é contínua em a;*
2. $f \cdot g$ *é contínua em a;*
3. $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente da Definição 7 e da aplicação da Proposição 4. ■

Definição 17 *Sejam f e g duas funções. A função composta de g com f, denotada por $g \circ f$, é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Teorema 9 *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *e g uma função contínua em b, então* $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$*, isto é,* $\lim_{x \to a} g[f(x)] = g[\lim_{x \to a} f(x)]$.

Corolário 7.1 *Se a função f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função $g \circ f$ é contínua no ponto a.*

Demonstração: Sabendo que f é contínua em a, isto é $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e g é contínua em $f(a)$.

Então fazendo uso do teorema anterior, temos $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g[\lim_{x \to a} f(x)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a)$, portanto $g \circ f$ é contínua em $x = a$. ■.

Teorema 10 (Valor Intermediário) *Dado uma função f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja L um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$,então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = L$.*

O Teorema do Valor Intermediário afirma que dada uma função contínua em $[a, b]$ então ela assume todos os valores intermediários entre $f(a)$ e $f(b)$. Uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário é a localização de raízes de uma equação, tema que será abordado no Capítulo 4 deste trabalho.

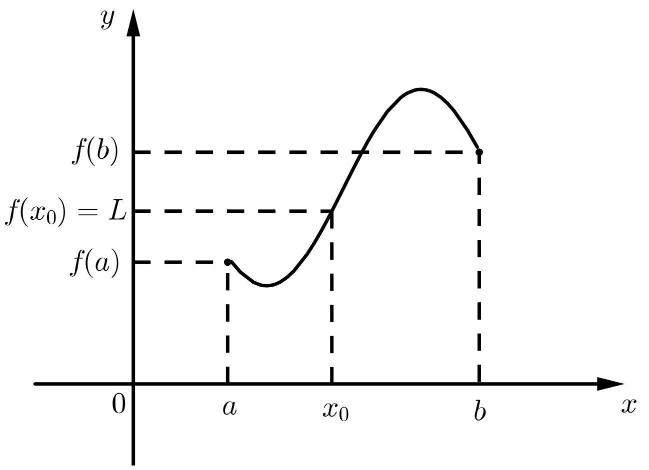

Figura 2.6: Ilustração para o Teorema 10

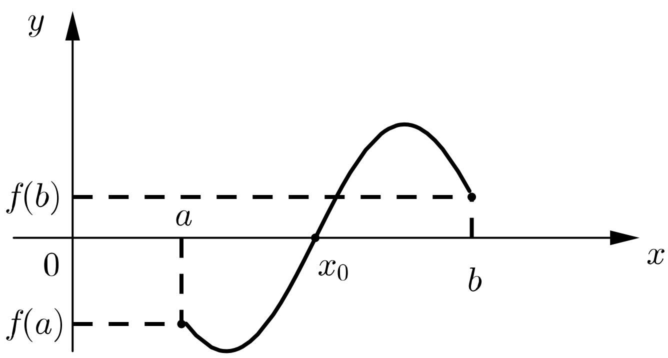

Figura 2.7: Ilustração para o Corolário 7.2

Corolário 7.2 *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais opostos, então existe pelo menos um ponto x_0 entre a e b tal que $f(x_0) = 0$.*

Exemplo 22 *Toda função polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Solução: Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial de grau n, ímpar. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_n > 0$. Assim, escrevendo-se $p(x) = x^n[a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}]$, nota-se que $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$. Em particular, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Como pelo Exemplo 20, p é contínua, segue do Corolário 7.2 que existe algum x_0 entre a e b tal que $p(x_0) = 0$. $\blacksquare$

Capítulo 3

Derivada de uma função

3.1 Derivadas

O matemático Pierri de Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e mínimos de uma função. Geometricamente encontravam-se os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação nula. Fermat escreveu a Descartes descrevendo seu método que ainda hoje é utilizado. Como seu trabalho estava intimamente relacionado com as derivadas, Lagrange afirmou que Fermat era o inventor do cálculo.

As aplicações das derivadas são inúmeras, na própria matemática, na física, química, engenharia, economia e tecnologia.

A definição de Derivadas está ligada intimamente à taxa de variação de uma função, taxa de crescimento populacional, taxa de crescimento econômico de um país, taxa de variações de volume, temperatura, velocidade de um corpo em movimento e muitas outras aplicações.

Definição 18 *Se uma função f está definida em um intervalo aberto I, que contém x_0, então a derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tomando-se $h = x - x_0$, que representa uma pequena variação em x, próximo de x_0, então $x = x_0 + h$ e a derivada de f em x_0 pode ser expressa por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Uma outra notação para a derivada de $y = f(x)$ no ponto x_0 é dada por $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$, tal notação é devida a Leibniz. Dizemos simplesmente que f é **derivável**, se ela possui derivada em todo ponto do intervalo aberto I. Uma interpretação geométrica da derivada é dada a seguir:

Considere f uma função contínua no intervalo aberto I. Seja $x_0 \in I$ tal que exista a derivada de f em x_0. Dado um ponto $x_0 \in I$ de modo que $x \neq x_0$, consideremos a reta r que passa pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$. (Ver figura 3.1)

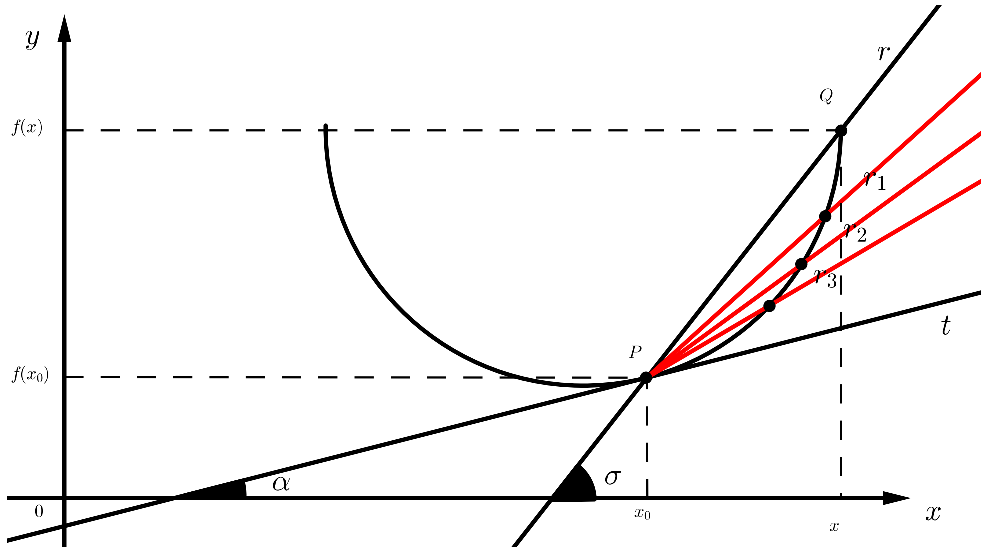

Figura 3.1:

A reta r é secante ao gráfico de f e seu coeficiente angular é;

$$tg\,\sigma = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sendo a função f contínua em I, então, quando $x \to x_0$, temos que o ponto Q desliza sobre o gráfico de função f aproximando-se do ponto P. Assim, a reta r desloca-se assumindo as posições nessa ordem, r_1,r_2,r_3... e tende a coincidir com uma reta limite t, chamada reta tangente ao gráfico de f no ponto P. Portanto, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} tg\sigma = tg(\lim_{x \to x_0} \sigma) = tg\,\alpha$$

Concluímos que a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Para obtermos a equação de uma reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e possui coeficiente angular m, utilizamos a fórmula:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Assim se queremos determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $P(x_0, y_0)$, onde f é derivável, tomemos $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$. Dessa forma teremos:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3.1}$$

Definição 19 *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável, dizemos que f possui derivada de segunda ordem em $x_0 \in (a, b)$ se a função $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ for derivável em x_0.*
Notação: $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

Quando f' for derivável em todo ponto de (a, b), diremos simplesmente que f é duas vezes derivável em (a, b).

Exemplo 23 *Calcular a derivada da função $f(x) = x^2 + 5x - 1$ no ponto $x = 2$*
Solução:
Seja $f(x) = x^2 + 5x - 1$ onde $f(2) = 13$, assim temos:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x + 7) = (2 + 7) = 9. \end{aligned}$$

Outra maneira de resolver o exercício.
Veja que $f(2 + h) = h^2 + 9h + 13$, assim teremos:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 9h + 13 - 13}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 9h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+9)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(h + 9) = 9. \end{aligned}$$

■

Exemplo 24 *Calcular a derivada de $f(x) = sen\, x$ no ponto $x = \dfrac{\pi}{6}$.*
Solução:
Lembrando que $sen\, A - sen\, B = 2sen(\frac{A-B}{2}) \cdot cos(\frac{A+B}{2})$.

$$\begin{aligned} f'(\frac{\pi}{6}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{\pi}{6} + h) - f(\frac{\pi}{6})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(\frac{\pi}{6} + h) - sen(\frac{\pi}{6})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2\frac{sen(\frac{h}{2}) \cdot cos(\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(\frac{h}{2}) \cdot cos(\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} cos(\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2}) = 1 \cdot cos(\frac{\pi}{6} + 0) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 25 *Determinar a equação da reta t tangente à curva $y = x^2 - 4x + 3$ no seu ponto de abscissa 4.*

Solução:

Sendo $x_0 = 4$ temos que $f(x_0) = f(4) = 3$, portanto o ponto de tangência é o ponto $P(x_0, y_0) = P(4, 3)$. $f'(x_0) = f'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x + 3 - 3}{x - 4} =$ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x(x-4)}{(x-4)} = \lim\limits_{x \to 4} x = 4$. Como $f'(4) = 4$ é o coeficiente angular da reta tangente, então sua equação será:

$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - 3 = 4(x - 4) \Rightarrow y - 3 = 4x - 16$, de onde teremos $4x - y - 13 = 0$ (equação da reta t). ■

Definição 20 *Seja $y = f(x)$ uma função definida em um ponto x_0, então as derivadas a esquerda e a direita de x_0 são definidas respectivamente por :*

$$f'(x_0)_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad e \quad f'(x_0)_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Proposição 8 *Uma função é derivável em um ponto $(x_0, f(x_0))$ se, e somente se, as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.*

Teorema 11 *Dada à função $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Portanto se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Demonstração:

Veja que $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$. Aplicando o limite quando $x \to x_0$ temos:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0. \text{ Daí,}$$

$$\text{portanto } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e por definição, } f \text{ é contínua em } x_0.$$

■

A recíproca do teorema acima é falso, ou seja, existem funções contínuas em x_0 mas não é derivável em x_0.

Exemplo 26 *Vamos considerar a função $f(x) = |x|$. Veja que esta função é contínua em $x_0 = 0$, visto que $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$. Mas por outro lado, esta função não é derivável no ponto x_0, pois $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = 1$. Então não existe $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - 0}{x - 0}$. Portanto f não é derivável em $x = 0$.*

3.2 Derivadas das Funções Elementares

3.2.1 Derivada da função constante

Dada a função $f(x) = k$ definida em $\mathbb{R}$, com $k \in \mathbb{R}$, temos que:

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k-k}{h} = 0$, isto é, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Derivada da função potência

Dada a função $f(x) = x^n$,com $n \in \mathbb{N}^*$ temos, por definição, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Aplicando o Binômio de Newton em $(x+h)^n$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2!} + ... + nxh^{n-1} + h^n) - x^n] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h}{2!} + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1})] \\ &= \lim_{h\to 0}[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h}{2!} + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1}] \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x) = x^n$ é $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 27 *Se $f(x) = x^4$ e $h(x) = x$ então $f'(x) = 4x^3$ e $h'(x) = 1$.*

3.2.3 Derivada da função seno

Dada a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \operatorname{sen}(\frac{h}{2}) \cos(x + \frac{h}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cos(x + \frac{h}{2}) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} cos(x + \frac{h}{2}) \\ &= 1 \cdot cos\, x = cos\, x. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $f'(x) = \cos x$. Observe que para o cálculo do limite acima, utilizamos a relação trigonométrica $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$ e o limite fundamental trigonométrico $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

3.2.4 Derivada da função cosseno

Dada à função $f(x) = \cos x$, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-2\text{sen}\,(x + \frac{h}{2}) \cdot \text{sen}\,(\frac{h}{2})}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \text{sen}\,(x + \frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\,(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = -\text{sen}\; x. \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}\; x$$

3.2.5 Derivada da função Exponencial

Dada a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \ln\, a. \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln\, a$$

Quando a função exponencial for de base e, ou seja, $f(x) = e^x$, temos que:

$$f'(x) = e^x \cdot\; ln\, e = e^x$$

Observação 4 *Para o cálculo do limite acima, utilizamos o limite fundamental* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

3.3 Regras de Derivação

3.3.1 Derivada da soma

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis no intervalo (a, b). Se $L(x) = f(x) + g(x)$ então sua derivada será:

$$L'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demonstração: .

Temos por hipótese que:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ e $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$, Temos que:

$$\begin{aligned} L'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

■.

Exemplo 28 *Sejam $f(x) = sen\, x$ e $g(x) = cos\, x$, então se $L(x) = sen\, x + cos\, x$ teremos:*

$$L'(x) = f'(x) + g'(x) = cos\, x - sen\, x$$

.

3.3.2 Derivada do produto

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis no intervalo (a, b). Se $L(x) = f(x) \cdot g(x)$, sua derivada será:

$$L'(x) = f'(x) \cdot g(x) \, + \, f(x) \cdot g'(x)$$

Demonstração: Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} &= \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)] + g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $h \to 0$ em ambos os lados, temos:

$$L'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

■

Exemplo 29 *Sejam as funções $f(x) = senx$ e $g(x) = e^x$, chamando $L(x) = senx \cdot e^x$, as derivadas de f e g são $f'(x) = cos\, x$ e $g'(x) = e^x$, assim a derivada de L será:*

$$L'(x) = cos\, x \cdot e^x + sen\, x \cdot e^x = e^x(cos\, x + sen\, x)$$

3.3.3 Derivada do Quociente

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis no intervalo (a, b) com $g(x) \neq 0$ em (a, b). Se definirmos $h(x)$ como sendo o quociente de f por g em (a, b), ou seja, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, então a derivada de $h(x)$ será:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demonstração:

Sendo $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ segue que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, assim pela regra da derivação do produto , temos que $f'(x) = g'(x) \cdot h + g(x) \cdot h'(x)$, isolando $h'(x)$ teremos que:

$$\begin{aligned} h'(x) =& \frac{f'(x) - g'(x) \cdot h(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) - (\frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)})}{g(x)} \\ h'(x) =& \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$.

Exemplo 30 *Sejam as funções* $f(x) = x^2 + 3x$ *e* $g(x) = sen\, x$*. Se* $h(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{sen\, x}$*, então* $h'(x)$ *será dada por* $h'(x) = \dfrac{(2x + 3) \cdot sen\, x - (x^2 + 3x) \cdot cos\, x}{[sen\, x]^2}$*.*

Uma consequência imediata dessa propriedade é a derivada da função tangente. Dada a função $f(x) = tg\, x$, então como sabemos que $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$, podemos aplicar a regra da derivada do quociente para obtermos:

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{cos\, x \cdot cos\, x - sen\, x \cdot sen\, x}{[cos\, x]^2} \\ =& \frac{cos^2 x + sen^2 x}{[cos\, x]^2} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x. \end{aligned}$$

Assim

$$f(x) = tg\, x \Rightarrow f'(x) = sec^2 x.$$

3.3.4 Derivada da Função Composta

Seja a função $y = f(x)$ uma função derivável em x e seja $z = g(y)$ uma função derivável em y. Existindo a função composta $z = H(x) = g(f(x))$, então z é derivável em x e sua derivada será:

$$H'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{3.2}$$

Observe que uma variação da função z é dada por $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = \dfrac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ onde $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ é uma variação da função $y = f(x)$ e $\Delta x = x - x_0 = h$ é um acréscimo da variável x. Desse modo veja que quando $\Delta x \to 0$ então $\Delta y \to 0$, já que $y = f(x)$ é derivável e , portanto contínua em x. Assim, para valores bem próximos de x a função f assume valores próximos de $y = f(x)$. Assim temos: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Sendo $z = g(y)$ e $y = f(x)$ deriváveis, então $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ são finitos , portanto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ também é finito. Assim $z = H(x)$ é drivável e sua derivada será:

$$H'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

.

Exemplo 31 *Sendo $H(x) = sen(3x^2)$, calcular a derivada de $H(x)$.*
$y = f(x) = 3x^2$ e $z = g(y) = sen\, y$, temos que: $y' = f'(x) = 6x$ e $z' = g'(y) = cos\, y$, portanto teremos $H'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = cos\, y \cdot 6x = cos(3x^2) \cdot 6x$

3.3.5 Derivada da Função Inversa

Seja a função $y = f(x)$ tal que $f(x)$ admita inversa. Sendo $g(y) = x$ a função inversa de $f(x)$ onde $f'(x) \neq 0$, então sua derivada será:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{3.3}$$

Como f possui inversa, então se $\Delta x \neq 0$ então $f(x+h) \neq f(x)$, logo
$\Delta y = f(x+h) - f(x) \neq 0$. Sendo f contínua, quando $\Delta x \to 0$ teremos que $\Delta y \to 0$. Temos que $y = f(x)$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ e $\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$,

logo

$$\begin{aligned}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y} &= \frac{(x+\Delta x)-x}{f(x+\Delta x)-f(x)}\\ &= \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}\\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}.\end{aligned}$$

Como $f'(x)$ existe e $f'(x) \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y} &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}\\ &= \frac{1}{f'(x)}.\end{aligned}$$

Portanto :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Exemplo 32 *Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $y = f(x) = x^2$, determinar a derivada da função inversa de $f(x)$.*
Solução:

Se $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$. Seja $x = g(y) = \sqrt{y}$. Sabendo que $f'(x) = 2x$, assim vamos determinar $g'(y)$, então $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. ■

Temos como consequência dessa propriedade, a derivada da função logarítmica. Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, temos $y = log_a x \to a^y = x \to x' = a^y \cdot \ln a$. Deste modo aplicando a regra acima, temos

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Logo Se $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Quando $a = e$, teremos:

$$y = \ln x \to y' = \frac{1}{x}.$$

3.3.6 Máximos e Mínimos

Para analisarmos o comportamento de uma função, utilizaremos a derivada para obter informações acerca do gráfico de $y = f(x)$. Discutiremos sobre os pontos de máximo e mínimo da função, os intervalos de crescimento e decrescimento, a concavidade e os pontos de inflexão.

Definição 21 *Seja I um intervalo aberto e considere a função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é:*

1. *Limitada inferiormente, quando existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$, para todo $x \in I$.*

2. *Limitada superiormente, quando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in I$.*

Quando f for limitada inferiormente e superiormente, dizemos simplesmente que f é limitada.

Exemplo 33 *A função $f(x) = x^2$ é limitada inferiormente por $m = 0$, já que $0 \leq f(x)$, para todo x.*

Exemplo 34 *A função $f(x) = 1 - x^2$ é limitada superiormente por $M = 1$, visto que $f(x) \leq 1$, para todo x.*

Exemplo 35 *A função $f(x) = cos(x)$ é limitada, já que $-1 \leq f(x) \leq 1$, para todo x.*

Definição 22 *Seja a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Dizemos que x_0 é um máximo absoluto de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in [a, b]$. Se x_0 é uma máximo absoluto de f, então $f(x_0)$ é chamado de o valor máximo da função f.*

Exemplo 36 *Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. Veja que completando o quadrado na função f, temos que $f(x) = 1 - (x - 3)^2$, de onde segue que f atinge o valor máximo quando $x_0 = 3$, já que $f(3) = 1 \geq f(x)$ para todo x no domínio de f. (vide Figura 3.2)*

Definição 23 *Seja a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Dizemos que x_0 é um mínimo absoluto de f, se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Se x_0 é uma mínimo absoluto de f, então $f(x_0)$ é chamado de o valor mínimo absoluto da função f.*

Exemplo 37 *Seja a função $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Veja que $f(x) = (x - 1)^2 - 3$ atinge o valor mínimo absoluto quando $x = 1$, visto que $f(1) = -3 \leq f(x)$ para todo x no domínio de f. (vide Figura 3.3)*

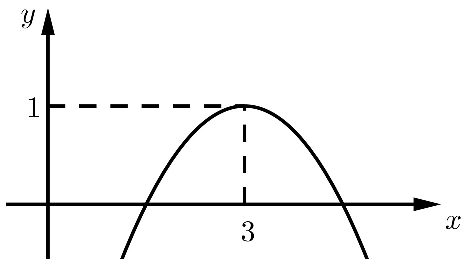

Figura 3.2: Gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

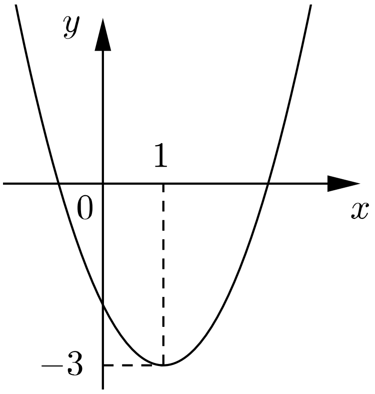

Figura 3.3: Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 2$

Proposição 9 *Se uma função possuir um máximo absoluto, então ela será limitada superiormente. Se uma função possui um mínimo absoluto, então ela será limitada inferiormente.*

Corolário 9.1 *Se uma função não for limitada superiormente, então ela não possui um ponto de máximo absoluto. Se uma função não for limitada inferiormente, então ela não possui um ponto de mínimo absoluto.*

No Exemplo 37 a função não possui um máximo absoluto, visto que f não é limitada superiormente. De mesmo modo, no Exemplo 36 a função não possui mínimo absoluto, já que f não é limitada inferiormente. O seguinte teorema trata da existência de máximo e mínimo absolutos de uma função.

Teorema 12 *Seja f uma função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então f possui pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo nesse intervalo.*

Definição 24 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f tem um máximo relativo em $x_0 \in I$, se existe um intervalo aberto J contendo x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in J \cap I$.*

Definição 25 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f tem um mínimo relativo em $x_0 \in I$, se existe um intervalo aberto J contendo x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in J \cap I$.*

Podemos perceber, na Figura 3.4, que x_1 e x_2 são respectivamente pontos de máximo e mínimo relativos da função f .

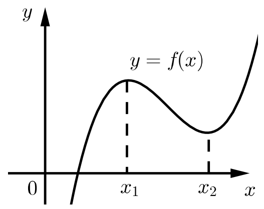

Figura 3.4: Gráfico da função f

Teorema 13 *{**Teorema de Fermat**}*
Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $x_0 \in I$. Se x_0 é um ponto de máximo ou de mínimo relativo de f, então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração:
Suponhamos que x_0 seja ponto de mínimo relativo de f. Assim existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, temos que $f(x_0) \leq f(x)$ assim $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ *para* $x < x_0$ *e* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ *para* $x > x_0$. Como f é derivável em x_0, temos por um lado, que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$$

e por outro lado,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Das desigualdades acima segue que $f'(x_0) = 0$. Supor que x_0 é ponto de máximo relativo de f se prova de forma análoga. ■.

Chamamos de *ponto crtico de f*, o ponto x_0 no domínio de f, tal que $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

Teorema 14 *{**Teste da Derivada Segunda**} Seja f uma função derivável em (a, b) e x_0 um ponto crítico de f, ou seja, $f'(x_0) = 0$ em (a, b), com $a < x_0 < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), então:*

1. *Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo relativo de f;*

2. *Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo relativo de f.*

Demonstração: Ver ([4], Teorema 5.7.3) ■

Exemplo 38 *Encontre os máximos e mínimos relativos da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.*

Solução:
Fazendo $f'(x) = 0$, temos que $6x^2 - 6x - 12 = 0$, de onde segue que $x = -1$ e $x = 2$ são os pontos críticos da função. Assim $f''(x) = 12x - 6 \rightarrow f''(-1) = -12 - 6 = -18 < 0$, então f tem um valor máximo relativo em $x = -1$. Veja $f''(2) = 24 - 6 = 18 > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em $x = 2$. Portanto os valores $f(-1) = 8$ e $f(2) = -19$ são o máximo e mínimo relativos de f respectivamente. ■

Teorema 15 *{**Teorema de Rolle**}*
Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração:
Suponha f uma função constante em $[a,b]$. Assim $f'(x) = 0$ em (a,b), ou seja, para todo $x_0 \in (a,b)$, temos que $f'(x_0) = 0$. Suponha f não constante em $[a,b]$, neste caso existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como f é contínua em $[a,b]$, f tem um mínimo e um máximo em $[a,b]$. Se existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor $f(a) = f(b)$ não é o máximo de f em $[a,b]$. Portanto, f assume valor máximo em algum ponto $x_0 \in (a,b)$ e, sendo f derivável em (a,b), temos que $f'(x_0) = 0$. O caso em que existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, se prova de maneira análoga. ■.

Teorema 16 *{**Teorema do Valor Médio**}*
Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então existe um número x_0 no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Demonstração:
Defina a função $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, é facil checar que g satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle. Logo existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Como $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, segue que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

3.3.7 Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Definição 26 *Seja $y = f(x)$ uma função definida num intervalo aberto (a, b) e x_1, x_2 em (a, b), então:*

1. *$f(x)$ é dita crescente em (a, b) sempre que $x_1 > x_2$ implicar $f(x_1) > f(x_2)$;*
2. *$f(x)$ é dita decrescente em (a, b) sempre que $x_1 > x_2$ implicar $f(x_1) < f(x_2)$;*
3. *$f(x)$ é dita não-crescente em (a, b) sempre que $x_1 > x_2$ implicar $f(x_2) \geq f(x_1)$;*
4. *$f(x)$ é dita não-decrescente em (a, b) sempre que $x_1 > x_2$ implicar $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Proposição 10 *Seja $f(x)$ uma função derivável em um intervalo aberto (a, b). Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em (a, b).*

Demonstração:

Sejam x_1, x_2 em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. f é derivável em $[x_1, x_2]$ e assim pelo teorema do valor médio, existe x_0 em (x_1, x_2) tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f'(x_0) > 0$. Como $x_1 < x_2$ temos que $x_2 - x_1 > 0$, como $f'(x_0) > 0$ segue que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, de onde teremos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, logo $f(x_2) > f(x_1)$ e portanto f é crescente em $[a, b]$ ■

Corolário 10.1 *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em (a, b).*
Demonstração:

Seja $g(x) = -f(x)$ então $g'(x) = -f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ e pela Proposição 10*, g é crescente, o que implica que f é decrescente.* ■

3.3.8 Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição 27 *Dizemos que uma função f definida no intervalo $[a, b]$, é côncava para cima, se o segmento de reta secante que passa pelos os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ sempre está acima ou coincide com o gráfico de f para qualquer x_0 e x_1 em $[a, b]$.*

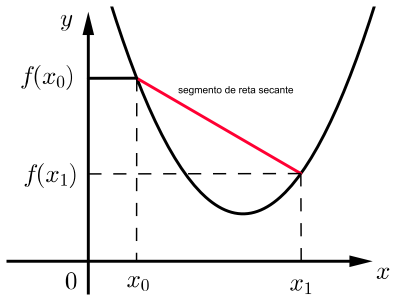

Figura 3.5: Ilustração para a Definição 27

Definição 28 *Dizemos que uma função f definida no intervalo $[a, b]$, é côncava para baixo, se o segmento de reta secante que passa pelos os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ sempre está abaixo ou coincide com o gráfico de f para qualquer x_0 e x_1 em $[a, b]$.*

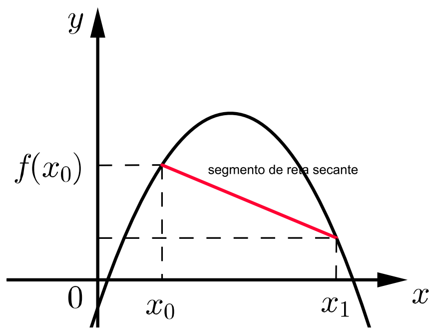

Figura 3.6: Ilustração para a Definição 28

A concavidade de uma função pode ser determinada com infromações sobre a derivada de primeira ordem.

Definição 29 *Uma função f é dita côncava para cima no intervalo aberto I, se $f'(x)$ for crescente em I.*

Definição 30 *Uma função f é dita côncava para baixo no intervalo aberto I, se $f'(x)$ for decrescente em I.*

Proposição 11 *Dada uma função f contínua no intervalo $[a, b]$, tal que f admite f'' em (a, b):*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b) , então a função f é côncava para cima em (a, b).*

2. *Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b), então a função f é côncava para baixo em (a, b).*

Demonstração:

1. *Sabemos que se $f'(x) > 0$ em (a, b), então f é crescente em (a, b). Assim temos que $f''(x) = [f'(x)]'$, assim se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b), então $f'(x)$ é crescente em (a, b), assim f é côncava para cima em (a, b).*

2. *Com o mesmo raciocínio prova-se* 2.

■

Existem pontos críticos que nem são pontos de máximo e nem pontos de mínimos relativos de uma função, tais pontos são chamados de **pontos de inflexão** de uma função, são os pontos onde o gráfico da função muda de concavidade. Mais precisamente temos o seguinte teorema:

Teorema 17 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas até terceira ordem no intervalo aberto I e seja x_0 um ponto de I. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é abscissa de um ponto de inflexão.*

Demonstração:
Ver ([2],pag 198). ■

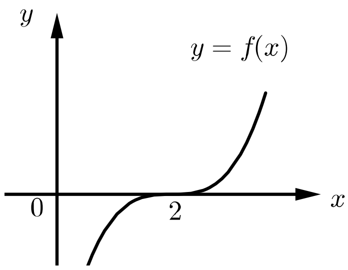

Figura 3.7: Ilustração para o exemplo 39

Exemplo 39 *Determinar os pontos de inflexão e os intervalos onde a função $f(x) = (x-2)^3$ tem concavidade voltada para cima ou para baixo.*
Solução:
Seja $f(x) = (x-2)^3$, temos que $f'(x) = 3(x-2)^2$ e $f''(x) = 6(x-2)$, fazendo $f''(x) > 0$, temos a desigualdade $6(x-2) > 0 \to x > 2$, então $f''(x) > 0$ em $(2, +\infty)$. Assim f é côncava para cima em $(2, +\infty)$, em $(-\infty, 2)$ temos que $f''(x) < 0$, então f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$. fazendo $f''(x) = 0 \to x = 2$ e teremos que $f'''(x) = 6$, como $f''(2) = 0$ e $f'''(2) \neq 0$, então pelo Teorema 17, temos que $x = 2$ é um ponto de inflexão. ■

Capítulo 4

Aplicações

Apresentaremos nesse capítulo um roteiro para esboçar gráficos de uma função. Mostraremos métodos para aproximações de raízes de equações, utilizando as idéias de limite, sequência e derivadas, aproximações de funções via diferencial e problemas de maximização e minimização de funções, temas abordados nos capítulos anteriores.

4.1 Esboço de Gráficos

Para esboçar o gráfico de uma função, são importantes as informações obtidas sobre os pontos de máximos e mínimos de uma função, assim como os intervalos de crescimento e decrescimento, as interseções com os eixos coordenados, a análise da concavidade e pontos de inflexão. Além dessas informações, é de suma importância introduzir o conceito de assíntotas, onde tais nos dão informações a respeito do comportamento do gráfico próximo a pontos onde a função muitas vezes não está definida, bem como comportamentos no infinito. Mas precisamente, temos:

Definição 31 *Seja $y = f(x)$ uma função real definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{a\}$. A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:*

1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
4. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Exemplo 40 *A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^4}$.

De fato, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^4} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, *ou também,* $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^4} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

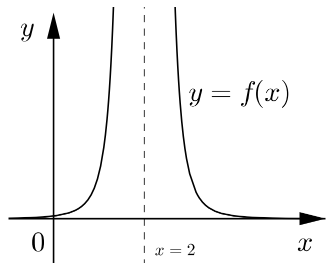

Figura 4.1: Ilustração para o exemplo 40

Definição 32 *A reta $y = b$ é uma* ***assíntota horizontal*** *do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das afirmações for verdadeira:*

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$

Exemplo 41 *Veja que a reta $y = 3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$, *porque* $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3$.

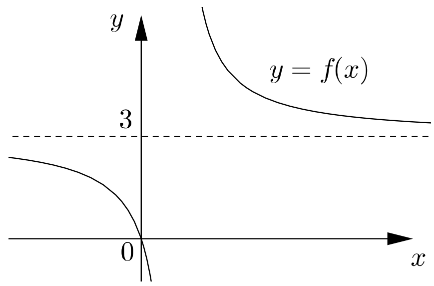

Figura 4.2: Ilustração para o exemplo 41

Definição 33 *Se* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$, *então a reta $y = mx + b$ é chamada de* ***assíntota inclinada.***

Observação 5 *Veja que* $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + b)] = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] - b]$. *Esse limite será zero se* $b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$. *Para obter* m, *podemos escrever:*

$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + b)] = \lim_{x\to\infty} x \cdot [\frac{f(x)}{x} - (m + \frac{b}{x})]$. *Para que esse limite exista e seja zero, é necessário que* $\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x} - (m + \frac{b}{x})] = 0$. *Como* $\frac{b}{x} \to 0$, *segue que* $m = \lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}]$.

Exemplo 42 *Considere a função* $f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x}$, *definida para todo* $x \neq 0$, *veja que* $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x}$, *logo* $[f(x) - (2x + 1)] = \frac{3}{x}$, *de modo que* $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (2x + 1)] = 0$, *portanto a reta* $y = 2x + 1$ *é uma assíntota inclinada do gráfico de* f.

Pela observação 5 *temos que:*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2} = 2 \text{ e } b = \lim_{x\to\infty}[\frac{2x^2 + x + 3}{x} - 2x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 3}{x} = 1.$$

Portanto a reta é $y = 2x + 1$.

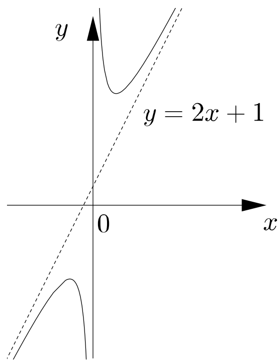

Figura 4.3: Ilustração para o exemplo 42

4.1.1 Roteiro para esboço de Gráficos

Para auxiliar no esboço do gráfico de uma função, apresentaremos um roteiro que permitirá colher informações importantes acerca do comportamento do gráfico da função, nesse roteiro temos a oportunidade de aplicar algumas definições apresentadas anteriormente. Vejamos:

1. Explicitar o domínio da função $D(f)$;

2. Calcular os pontos de intersecção com os eixos, quando para isso não exigir muitos cálculos;

3. Encontrar os pontos críticos da função, ou seja, resolver a equação $f'(x) = 0$;

4. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função, isto é, resolver as inequações $f'(x) > 0$ *e* $f'(x) < 0$;

5. Determinar os Máximos e Mínimos relativos de f, fazendo uso do teste da derivada segunda;

6. Determinar a concavidade e pontos de inflexão da função;

7. Encontrar, se existirem, as assíntotas horizontais, verticais e inclinadas;

8. Reunir todas as informações anteriores e esboçar o gráfico da função.

Exemplo 43 *Esboçar o gráfico da função* $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.
Solução:
Seguindo o roteiro apresentado , temos:

1. *Veja que* $f(x)$ *existe sempre, para qualquer* $x \in \mathbb{R}$, *deste modo* $D(f) = \mathbb{R}$

2. *Interseção com o eixo* y *é* $f(0) = 2$, *Já a interseção com o eixo* x, *ou seja, as raízes da função, exige-se muitos cálculos, porém veremos mas adiante um método para determinar uma aproximação de uma raiz de* f.

3. *Resolvendo a equação* $f'(x) = 0$, *temos que* $3x^2 + 4x - 4 = 0$, *daí temos que* $x = \dfrac{2}{3}$ *e* $x = -2$ *são os pontos críticos da função.*

4. *Fazendo* $f'(x) > 0$, *temos que* $3x^2 + 4x - 4 > 0$, *quando* $(-\infty, -2) \cup (\dfrac{2}{3}, +\infty)$.

   Portanto f *é crescente em* $(-\infty, -2) \cup (\dfrac{2}{3}, +\infty)$.

   Fazendo $f'(x) < 0$, *temos que* $3x^2 + 4x - 4 < 0$ *em* $(-2, \dfrac{2}{3})$, *assim* f *é decrescente em* $(-2, \dfrac{2}{3})$.

5. *Temos que* $f''(x) = 6x + 4$.

   Como $f''(-2) = 6(-2) + 4 = -12 + 4 = -8 < 0$, *temos que* $x = -2$ *é um ponto de máximo e* $f(-2) = 10$ *é um máximo relativo de* f.

   $f''(\dfrac{2}{3}) = 6(\dfrac{2}{3}) + 4 = 8 > 0$, *temos que* $x = \dfrac{2}{3}$ *é um ponto de mínimo.*

6. *Fazendo* $f''(x) > 0$, *então* $6x + 4 > 0$, *temos que* $x > \dfrac{-2}{3}$, *então* f *é côncava para cima em* $(\dfrac{-2}{3}, +\infty)$.

   Fazendo $f''(x) < 0$, *então* $6x + 4 < 0$, *temos que* $x < \dfrac{-2}{3}$, *então* f *é côncava para baixo em* $(-\infty, \dfrac{-2}{3})$, *veja que* $x = \dfrac{-2}{3}$ *é uma abscissa de um ponto de inflexão da função.*

7. *Não existe assíntotas*

8. *Esboço do Gráfico na figura* 4.4

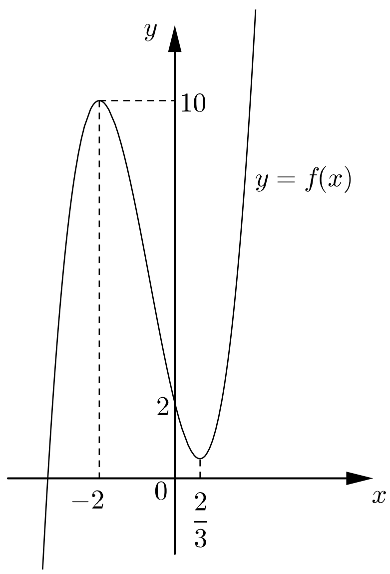

Figura 4.4: Ilustração para o exemplo 43

■

Exemplo 44 *Esboçar o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
Solução:

1. *Para que* $f(x)$ *exista sempre , devemos ter* $x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$, *assim o domínio de* $f(x)$ *será* $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

2. *Intersecção com os eixos*

   É facil ver que $(0,0)$ é o único ponto de interseção com os eixos coordenados.

3. *Os pontos críticos de $f(x)$ são as raízes da equação $f'(x)=0$, dessa forma teremos:*

   $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$, *daí os pontos críticos são $x=0$ e $x=2$.*

4. *Intervalos de crescimento e decrescimento.*

   Fazendo $f'(x)>0 \to \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0$. Como $(x-1)^2$ é sempre positiva, vamos analisar onde $x^2-2x>0$. Como $x^2-2x>0$ em $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ então $f(x)$ é crescente em $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ e $f(x)$ é decrescente em $(0,2)$.

5. *Máximos e mínimos relativos*

   $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, *temos que* $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$. *Assim* $f''(0)=\dfrac{2}{(-1)^3}=-2<0 \Rightarrow x=0$ *é ponto de máximo relativo. Temos que $f''(2)=2>0 \Rightarrow x=2$ é ponto de mínimo relativo. $f(0)=0$ é um máximo relativo de f e $f(2)=4$ é um mínimo relativo de f.*

6. *Concavidade*

   Fazendo $f''(x)>0$, temos que $\dfrac{2}{(x-1)^3}>0$ quando $x>1$. Assim $f''(x)>0$ em $(1,+\infty)$, de modo que $f(x)$ é concava para cima em $(1,+\infty)$. Fazendo $f''(x)<0$, temos que $\dfrac{2}{(x-1)^3}<0$ quando $x<1$. Assim $f''(x)<0$ em $(-\infty,1)$, então $f(x)$ é concava para baixo em $(-\infty,1)$. $x=1$ não uma abscissa de um ponto de inflexão pois f não está definida nesse ponto.

7. *Assíntotas*

   Considerando a reta $x=1$, temos:

   $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$, *assim temos que $x=1$ é uma assíntota vertical. Veja que* $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$, *então podemos ter* $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-1}$, *aplicando o limite em ambos os lados, temos:*

   $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$. *Logo a reta $y=x+1$ é uma assíntota inclinada.*

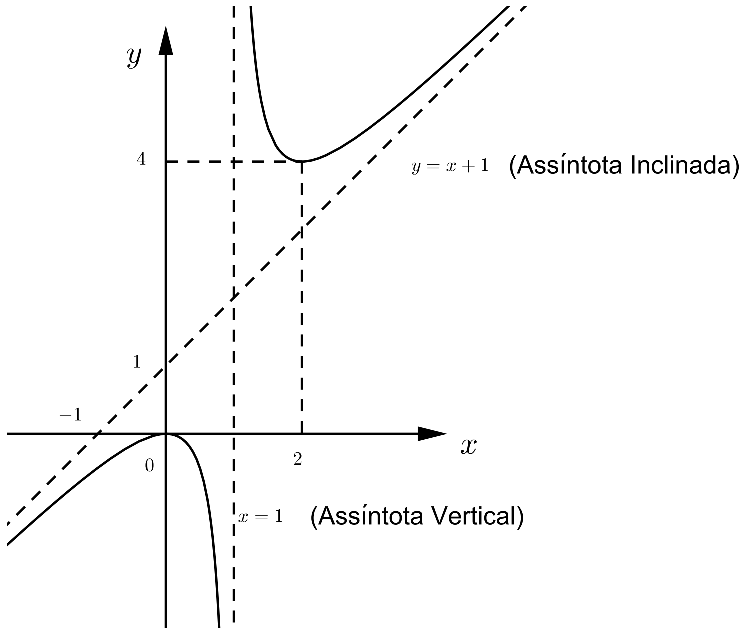

Figura 4.5: Ilustração para o exemplo 44

8. *A figura* 4.5 *representa o esboço de gráfico da função.*

■

Exemplo 45 *Esboçar o gráfico da função* $f(x) = e^{-x^2}$
Solução:

1. *Podemos observar que* $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \Rightarrow f$ *é uma função par, logo seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. A função* f *existe para todo* x*, assim* $D(f) = \mathbb{R}$*.*

2. *Intersecção com os eixos*

   $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow (0, 1)$

   $f(x) = 0 \Rightarrow e^{-x^2} = 0 \Rightarrow$ *não existe* $x \in \mathbb{R}$ *que seja solução da equação, logo* f *não toca o eixo* x*.*

3. *Pontos Críticos*

   $f'(x) = -2x.e^{-x^2}$, *fazendo* $f'(x) = 0$, *temos* $x = 0$ *(único ponto crítico).*

4. *Intervalo de crescimento e decrescimento*

   $f'(x) > 0 \Rightarrow -2x.e^{-x^2} > 0$ *quando* $x < 0 \Rightarrow f$ *é crescente em* $(-\infty, 0)$.

   $f'(x) < 0 \Rightarrow -2x.e^{-x^2} < 0$ *quando* $x > 0 \Rightarrow f$ *é decrescente em* $(0, +\infty)$.

5. *Máximos e Mínimos relativos*

   $f''(x) = -2.e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$, *fazendo* $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ *é ponto de máximo e* $f(0) = 1$ *é o máximo de* f.

6. *Concavidade e Ponto de Inflexão*

   $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. *Veja que* $f''(x) > 0$ *em* $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ *e* $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ *e* $f''(x) < 0$ *em* $\frac{-1}{\sqrt{2}} < x$ *e* $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Assim,* f *é côncava para cima em* $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ *e côncava para baixo em* $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. *Veja que* $f''(x) = 0$ *em* $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, *que são os pontos de inflexão.*

7. *Não possui assíntotas.*

8. *Esbço do gráfico da função na figura a seguir.*

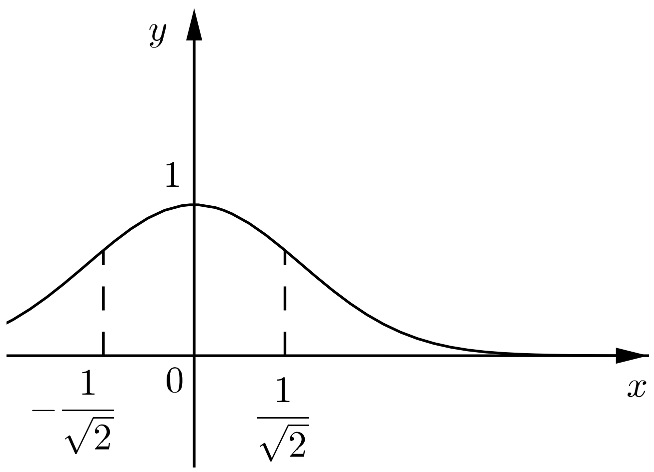

Figura 4.6: Ilustração para o exemplo 45

■

4.2 Aplicações de Máximos e Mínimos

Uma das aplicações importantes do estudo sobre derivadas são os problemas de maximização e minimização de uma certa grandeza, alguns problemas práticos exigem maximizar uma área, outros pedem para minimizar um custo de uma produção e diversas outras situações. A seguir mostraremos alguns exemplos.

Exemplo 46 1. *Um retângulo tem dimensões x e y com perímetro $2a$ (a é a constante dada). Determinar x e y para que sua área seja máxima.*

Solução:

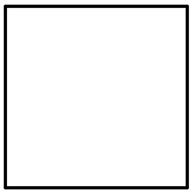

Figura 4.7: Ilustração para o exemplo 46

Do perímetro do retângulo, temos $2x + 2y = 2a \Rightarrow x + y = a \Rightarrow y = a - x$. Temos que a área do retângulo é dada por $A = x \cdot y$, que é uma função de duas variáveis, pela condição $2x + 2y = 2a$, podemos tranformar A em uma função de uma variável, basta substituir $y = a - x$ na equação da área, segue que $A = x \cdot (a - x) = -x^2 + ax$, assim a área estar em função de x. Sendo $A(x) = -x^2 + ax \Rightarrow A'(x) = -2x + a$, fazendo $A'(x) = 0$, temos $-2x + a = 0 \Rightarrow x = a/2$ (Ponto Crítico).

Veja que $A''(x) = -2 \Rightarrow A''(\frac{a}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$ é um ponto de máximo. Assim $y = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$. Portanto temos que a área do retângulo é máxima quando $x = y = \frac{a}{2} \Rightarrow A = x \cdot y = \frac{a^2}{4}$, que corresponde a área do quadrado de lado $\frac{a}{2}$. ■

2. *Um triângulo está inscrito numa semicircunferência de raio R e seus lados medem a, b e $2R$. Calcule a e b quando a área do triângulo é máxima.*

   Solução:

   O triângulo abaixo representa um entre os diferentes triângulos retângulos de medidas a,b e $2R$ (Ver figura 4.8).

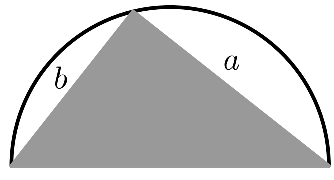

Figura 4.8:

Os catetos a e b percorrem o intervalo $(0, 2R)$, ou seja, $0 < a < 2R$ e $0 < b < 2R$. No triângulo temos as relações:

$A = \dfrac{a \cdot b}{2}$ *e* $4R^2 = a^2 + b^2$, *onde A é a área do triângulo. Para que possamos determinar o valor máximo de A, se faz necessário colocar A em função de apenas uma variável (a ou b). Isolando o valor de b na segunda igualdade, temos $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$, substituindo na equação da área, temos $A = \dfrac{1}{2} \cdot ab = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{4R^2 - a^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2a^2 - a^4} = \sqrt{R^2a^2 - \dfrac{a^4}{4}}$. Devemos verificar se A possui ponto de máximo. Como maximizar A e A^2 é equivalente, tomemos $A = R^2a^2 - \dfrac{a^4}{4}$. Derivando em função de a, temos $A'(a) = 2R^2a - a^3$, fazendo $A'(a) = 0$ temos que $a = R\sqrt{2}$ (Ponto Crítico). $A''(a) = 2R^2 - 3a^2$ de onde segue que $A''(R\sqrt{2}) = 2R^2 - 6R^2 = -4R^2 < 0$, logo $a = R\sqrt{2}$ é um ponto de máximo. Sendo $a = R\sqrt{2}$ temos que $4R^2 = 2R^2 + b^2$, logo $b = R\sqrt{2}$.*

Conclusão: O triângulo de área máxima é o triângulo isósceles onde $a = b = R\sqrt{2}$. ■

3. *Um fabricante precisa produzir caixas de papelão, com tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de papelão para produzir caixas de volume de $36m^3$.*

   Solução:

   Seja x a largura da caixa e y a altura da caixa. Temos que o volume da caixa é dado por:

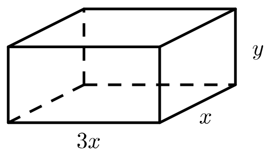

Figura 4.9:

$V = 3x^2 \cdot y = 36 \rightarrow x^2 \cdot y = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12}{x^2}$. *A área total é dada por* $A = 6x^2 + 6xy + 2xy = 6x^2 + 8xy$, *substituindo o valor de* y, *temos que* $A = 6x^2 + \dfrac{96}{x} \Rightarrow A(x) = 6x^2 + \dfrac{96}{x}$. *Derivando* A *em função de* x, *temos* $A'(x) = 12x - \dfrac{96}{x^2}$, *fazendo* $A'(x) = 0$ *,temos que* $12x - \dfrac{96}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$ (*Ponto Crtico*). *Vamos usar o teste da derivada segunda para provar que* $A(x)$ *tem um ponto de mínimo.*

$A''(x) = 12 + \dfrac{192}{x^3} \Rightarrow A''(2) > 0 \Rightarrow x = 2$ *é ponto de mínimo de* A. *Assim a área* $A(x)$ *é mínima quando* $x = 2$, *daí teremos* $y = \dfrac{12}{x^2} = \dfrac{12}{4} = 3$. *Portanto as dimensões da caixa são:*

$comprimento = 6$

$largura = 2$

$Altura = 3$. ∎

4.3 Aplicações à Economia

(a) *Na área de economia, dada uma grandeza* G, *a taxa de variação dessa grandeza é chamada de "marginal* G*". A grandeza custo de produção de* x *unidades de um certo produto num certo tempo, é designado por* $C = C(x)$. $C'(x) = m(x)$ *é chamado "custo marginal", que é o declive da reta tangente ao gráfico da função custo. Veremos uma aplicação no exemplo abaixo.*

Exemplo 47 *A função custo num processo de produção de* x *milhares de certo artigo, é dada por:*

$$C(x) = \begin{cases} 10 + 10x - x^2, & se \quad x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 42, & se \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Determine o custo marginal mínimo e o valor $x = x_0$ *que produz esse mínimo. Mostre que o custo médio* $\dfrac{C(x)}{x}$ *é igual ao custo marginal* $m(x) = C'(x)$ *quando* $x = \sqrt{42}$*, que* $\dfrac{C(x)}{x} > m(x)$ *para* $x < \sqrt{42}$ *e que* $\dfrac{C(x)}{x} < m(x)$ *para* $x > \sqrt{42}$*.*

Solução:

Tomando $C(x) = 10 + 10x - x^2$*, temos:*

$C'(x) = -2x + 10$ *para* $x \leq 4$ *e* $C''(x) = -2 < 0$ *veja que* $C(x)$ *admite valor máximo. Assim tomando* $C(x) = x^2 - 6x + 42$ *para* $x \geq 4$ *. Veja que* $C'(x) = 2x - 6 \Rightarrow C''(x) = 2 > 0 \Rightarrow C(x)$ *admite valor mínimo. Fazendo* $C'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$*. Os pontos críticos são* $x = 3$ *e* $x = 4$*. Como a função* $C(x)$ *não está definida para* $x = 3$*, temos então que* $x = 4$ *é valor mínimo procurado. O custo mínimo será:*

$m(x) = C'(x) = 2x - 6 \Rightarrow m(4) = 2$*. daí teremos* $\dfrac{C(x)}{x} = m(x) \Rightarrow \dfrac{x^2 - 6x + 42}{x} = 2x - 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 42 = 2x^2 - 6x \Rightarrow x^2 = 42 \Rightarrow x = \sqrt{42}$.

Veja que $\dfrac{C(x)}{x} > m(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 42 > 2x^2 - 6x \Rightarrow x < \sqrt{42}$.

$\dfrac{C(x)}{x} < m(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 42 < 2x^2 - 6x \Rightarrow x > \sqrt{42}$. ■

b) Uma fábrica produz x *milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por* $C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ *e o valor obtido na venda é dado por* $V(x) = 60x - 12x^2$*, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro* $L(x) = V(x) - C(x)$*.*

Solução:

Temos que $L(x) = -2x^3 - 18x^2 + 42x - 60$*, derivando* L *em relação a* x*, temos:*

$L'(x) = -6x^2 - 36x + 42$*. Fazendo* $L'(x) = 0$*, segue que* $x = 1$ *e* $x = -7$*. Observe que* $L''(x) = -12x - 36$*, assim temos que* $L''(1) = -48 < 0$*, de onde se tem que* $x = 1$ *é ponto de máximo.*

$L''(-7) = 48 > 0$*, de onde temos que* $x = -7$ *é ponto de mínimo. Dessa forma o valor procurado é* $x = 1$*, ou seja , o número ótimo mensal que maximiza o lucro é de* 1000 *unidades.* ■

4.4 Aproximação de Funções e Diferencial

4.4.1 Aproximações lineares

Seja $y = f(x)$ uma curva e seja t uma reta tangente a essa curva no ponto $P = (a, f(a))$. Para valores próximos de a, a curva assume valores bem próximo da reta tangente t, assim é com essa idéia que vamos encontrar os valores aproximados de funções. Usaremos a reta tangente em $P = (a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$, com x próximo de a.

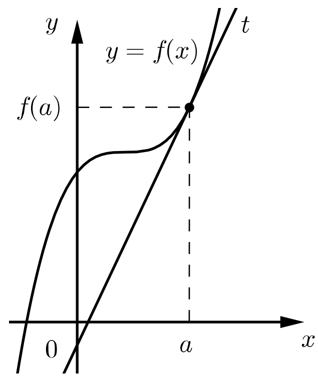

Figura 4.10:

Sabemos que a equação da reta tangente que passa pelo ponto $P = (a, f(a))$ é dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim temos que:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

que será denominada de **aproximação linear ou aproximação pela reta tangente de f em a**. A equação abaixo :

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é chamada de **linearização de f em a.**

Exemplo 48 *1. Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x+2}$ em $a = 2$.*

Solução:

Temos que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ *e que* $P = (2, f(2)) = (2, 2)$.

$f'(2) = \dfrac{1}{4}$, *assim a equação da reta tangente , será* $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow$ $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2} + 2 \Rightarrow y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$. $L(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$, *assim a aproximação linear de* f *em* $a = 2$ *será* $\sqrt{x+2} \approx \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$. *Se quisermos determinar um valor aproximado para a raiz quadrada de* 2, *basta fazer* $x = 0$. *Assim* $\sqrt{2} \approx \dfrac{3}{2} = 1,5$. *Se* $x = 2$, *temos* $\sqrt{4} \approx \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$. *Se* $x = 1$, *temos* $\sqrt{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{4} = 1,75$. ■

2. Use a reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ *no ponto* $P = (0, f(0))$ *para aproximar o valor de* $e^{0,0001}$.

Solução:

Se fizermos uma aproximação com duas casas decimais , temos que $e^{0,0001} = (2,72)^{0,0001}$, *que na verdade é calcular* $(2,72)^{0,0001} = (2,72)^{\frac{1}{10000}} = \sqrt[10000]{2,72}$. *Temos que a reta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $P = (0, f(0))$, *será* $y = f(0) + f'(0)(x-0)$, *temos que* $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$ *e* $f(0) = 1$. *Assim, temos* $y = 1 + 1(x-0) \Rightarrow y = 1 + x$, *e a aproximação para a função será:*

$f(x) \approx 1 + x$, *ou seja* $e^x \approx 1 + x$, *portanto* $e^{0,0001} \approx 1 + 0,0001 = 1,0001$. ■

4.4.2 Diferencial

Sejam $y = f(x)$ *uma função derivável e* $(x - x_0)$ *um acréscimo de* x. *Definimos* $dx = x - x_0$, *como sendo a diferencial da variável independente* x.

A diferencial da variável independente y, *onde denotamos por* dy, *será* $dy = f'(x) \cdot dx$, *de onde segue que :*

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Exemplo 49 *Seja de* 10% *o erro relativo na medida do lado* L *de um quadrado. Qual é o erro relativo no calculo de sua área?*

Solução:

Primeiro temos que $\frac{dL}{L}$ *é o erro relativo na medida do lado* L. *Assim precisamos determinar* $\frac{dA}{A}$. *Temos que* $A = L^2 \Rightarrow dA = 2LdL$, *dividindo tudo por* A, *temos* $\frac{dA}{A} = \frac{2LdL}{A} = \frac{2LdL}{L^2} = \frac{2dL}{L}$, *Portanto, temos que* $\frac{dA}{A} = 2 \cdot \frac{10}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$, *que é o erro relativo no cálculo da área.* ■

Exemplo 50 *Obtenha um valor aproximado para o volume de uma fina coroa cilíndrica de altura* $10cm$, *com raio interior de* $5cm$ *e espessura de* $0,02cm$. *Qual seria o erro no cálculo do volume se usarmos diferenciais?*

Solução:

O volume exato será dado por $\triangle V = V_c - V_i$, *onde* V_c *é o volume do cilíndro maior e* V_i *é o volume do cilíndro interno. Assim temos:*

$\triangle V = [(5,02)^2 10 - 5^2 10]\pi cm^3 = \triangle V = 2,004\pi cm^3$.

Por outro lado, usando diferenciais, temos:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow dV = 2\pi r h dr \Rightarrow dV = 2\pi 5 \cdot 10 \cdot 0,002 = 2\pi cm^3$. *Portanto o erro cometido é de* $\triangle V - dV = (2,004 - 2)\pi cm^3 = 0,004\pi cm^3$. ■

Um dos grandes problemas da matemática por algum tempo, era determinar os zeros, ou as raízes, de uma equação polinomial através dos coeficientes da equação. Bháskara desenvolveu um método para a resolução de equações quadráticas, mas a partir das equações cúbicas fica mais complicado determinar suas raízes exatas. O cálculo de raízes de uma equação é de muita importância na matemática, visto que muitos problemas do dia-a-dia depedem desse fato. No exemplo 43, pode-se observar que não determinamos a interseção da função f com o eixo x, visto que derterminar suas raízes requer um pouco mais de trabalho. Apresentaremos dois métodos numéricos, apoiados no teorema do valor intermediário, que facilitam o cálculo aproximado da raiz de uma equação em um intervalo dado.

4.5 Método da Bisseção

Teorema 18 *Se* $f(x)$ *for contínua em um intervalo* $[a, b]$ *de tal forma que* $f(a)f(b) < 0$ *, então a equação* $f(x) = 0$ *possui pelo menos uma raiz em* (a, b).

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$ e seja $\epsilon > 0$ um número real. O método da bisseção para a determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$, consiste em ir dividindo o intervalo ao meio até que ele fique suficientemente pequeno, daí, escolhemos o ponto médio do intervalo como sendo uma raiz aproximada. Tome $x_0 = \frac{a+b}{2}$, então Se:

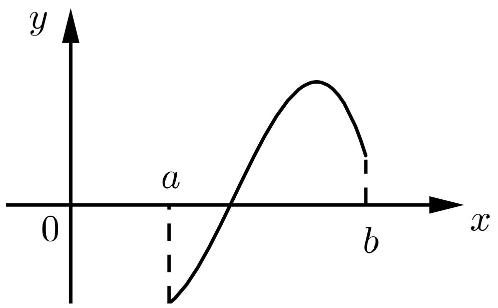

Figura 4.11: Ilustração para o teorema 18

1. $f(x_0) = 0$, então a raiz procurada é x_0 , caso contrário , ou $f(x_0)$ e $f(a)$ tem sinais opostos, e assim a raiz está entre x_0 e a, ou $f(x_0)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, e assim a raiz está entre x_0 e b, de modo que o processo se repete.

2. Seja ϵ, o erro aproximado para a raiz. Se $\Delta = |b - a| < \epsilon$, então dizemos que x_0 uma raiz aproximada da equação e encerramos. Observe que x_0 é o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o método da bisseção gera uma sequência que converge para uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Exemplo 51 *Determinar um valor aproximado para* $\sqrt{7}$ *com erro inferior a* $\epsilon = 0,04$.

Solução:

Seja $x = \sqrt{7} \leftrightarrow x^2 = 7 \leftrightarrow x^2 - 7 = 0$. *Tome a função* f *como sendo* $f(x) = x^2 - 7$ *e vamos determinar uma aproximação para a raiz da equação* $f(x) = 0$.

Inicialmente observe que $f(2) = 4 - 7 = -3 < 0$ *e* $f(3) = 9 - 7 = 2 > 0$. *Como* $f(2)$ *e* $f(3)$ *tem sinais opostos, então de acordo com o método da bisseção, existe pelo menos uma raiz no intervalo* $(2, 3)$. *Tome* $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$, *onde* $f(x_0) = 6,25 - 7 = -0,75 < 0$ *e* $|3 - 2| = 1$, *prosseguimos. Como* $f(x_0)$ *e* $f(3)$ *tem sinais opostos, então existe pelo menos uma raiz em* $(x_0, 3)$.

Tome $x_1 = \dfrac{x_0 + 3}{2} = \dfrac{2,5 + 3}{2} = 2,75 \Rightarrow f(x_1) = 7,5625 - 7 = 0,5625 > 0$ *e* $|3 - x_0| = 0,5$. *Como* $f(x_0)$ *e* $f(x_1)$ *tem sinais opostos, então existe pelo menos uma raiz em* (x_0, x_1). *Tome* $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2} = \dfrac{2,5 + 2,75}{2} = 2,625 \Rightarrow f(x_2) = 6,890625 - 7 = -0,109375 < 0$ *e* $|x_1 - x_0| = |2,75 - 2,5| = 0,25$, *continuamos. Como* $f(x_2)$ *e* $f(x_1)$ *possuem sinais opostos, então existe pelo menos uma raiz em* (x_1, x_2). *Tome* $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2,75 + 2,625}{2} = 2,6875$.

Veja que $f(x_3) = 7,22265625 - 7 = 0,22265625 > 0$ *e* $|x_1 - x_2| = |2,75 - 2,625| = 0,125$, *continuamos. Como* $f(x_2)$ *e* $f(x_3)$ *tem sinais opostos, prosseguimos tomando*

$x_4 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} = \dfrac{2,625 + 2,6875}{2} = 2,655625 \Rightarrow f(x_4) = 7,052344140625 - 7 = 0,052344140625 > 0$ *e* $|x_3 - x_2| = |2,6875 - 2,625| = 0,0625$ *que ainda não é menor que* ϵ*, Continuamos. Como* $f(x_2)$ *e* $f(x_4)$ *tem sinais opostos, prosseguimos tomando* $x_5 = \dfrac{x_2 + x_4}{2} = \dfrac{2,625 + 2,655625}{2} = 2,6403125$ *e* $|x_4 - x_2| = |2,6556 - 2,625| = 0,0306 < \epsilon = 0,04$. *Potanto temos que* $x_5 = 2,6403125$ *é uma boa aproximação para* $\sqrt{7}$ *. Portanto a sequência de números* $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$ *converge para a raiz da equação* $f(x) = 0$*. Organizando esses valores na tabela a seguir, podemos observar a convergência pelo método da bisseção.*

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	*Sinal de* $f(x)$	$\triangle = \vert b - a \vert$
2	*3*	*2,5*	-	*1*
2,5	*3*	*2,75*	+	*0,5*
2,5	*2,75*	*2,625*	-	*0,25*
2,625	*2,75*	*2,6875*	+	*0,125*
2,625	*2,6875*	*2,655625*	+	*0,0625*
2,625	*2,6556*	***2,6403125***	+	*0,0306<0,04*

■

4.6 O Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um algoritmo grandemente eficiente para obter uma aproximação da raiz de uma função. De acordo com esse método, se $f(x)$ for uma função derivável em um intervalo $[a, b]$ que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$ e x_0 é um valor inicial próximo da raiz, então calcula-se a equação da reta tangente a curva nesse ponto $P = (x_0, f(x_0))$, calcula-se a interseção dessa reta com o eixo das abscissas com o intuito de encontrar um novo ponto x_1 no domínio da função, e repetindo o processo teremos a sequência de números reais $(x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ que são obtidos pela fórmula iterativa :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4.1}$$

Essa sequência tem como limite a raiz de f. Para obter a fórmula iterativa usa-se o seguinte raciocínio. Veja que a equação da reta tangente num ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

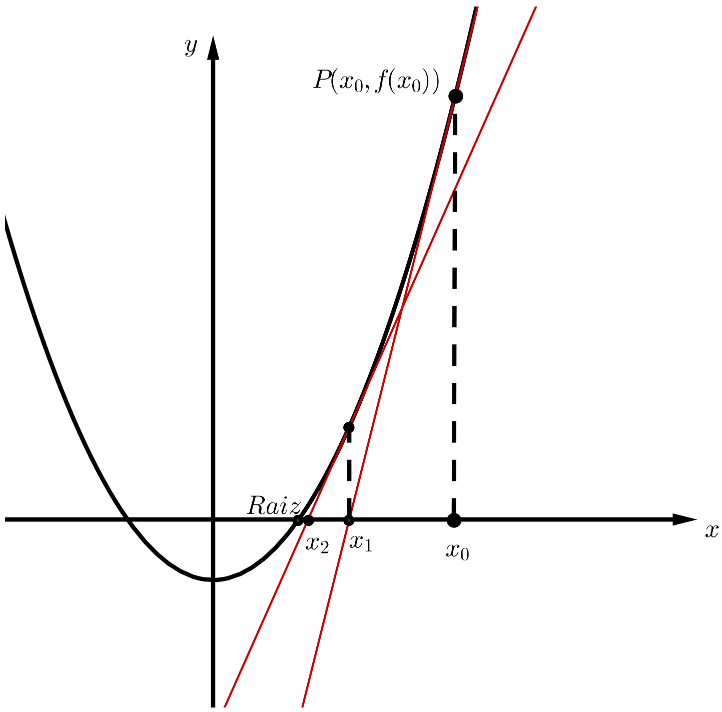

Figura 4.12: Ilustração para o Método de Newton-Raphson

Como queremos encontrar a intersecção dessa reta com o eixo x , fazemos $y = 0$ e $x = x_1$, substituindo na equação da reta, temos:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$f'(x_0)x_1 = f'(x_0)x_0 - f(x_0)$$

Dividindo tudo por $f'(x_0)$, teremos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Repetindo o processo para obtermos x_2 a partir de x_1 , teremos $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, de modo análogo $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, de modo geral, teremos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

.

Exemplo 52 *Usando o método de Newton, determinar uma raiz da equação* $2x^3 + \ln(x) = 5$ *com um erro inferior a* $\epsilon = 10^{-5}$.
Solução:
Seja $f(x) = 2x^3 + \ln(x) - 5$. *Derivando a função* f, *teremos* $f'(x) = 6x^2 + 1/x$. *Por tentativa temos que* $f(1) = 2 + 0 - 5 = -3 < 0$ *e* $f(2) = 16 + \ln(2) - 5 = 11 + \ln(2) > 0$. *Observe que* $f(1) \cdot f(2) < 0$, *então existe uma raiz de* f *no intervalo* $(1, 2)$. *Podemos então tomar* $x_0 = 1,1$ *como sendo a aproximação inicial da raiz da equação. Vamos construir uma tabela , usando a fórmula* $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, *para* $n = 0, 1, 2, 3, ...$ *até que tenhamos* $\triangle = |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\triangle = \|x_{n+1} - x_n\|$
0	1,1000000	-2,2426899	8,1690909	-
1	1,3745335	0,512043	12,0635733	0,2745335
2	1,3320881	0,0142193	11,3974544	0,0424453
3	1,3308406	0,000013	11,3782261	0,0012475
4	**1,3308395**	-0,0000007	11,3782076	0,0000011$<\epsilon$

Portanto a raiz aproximada é $x = 1,3308395$.
Veja que da equação $2x^3 + \ln(x) - 5 = 0$, *podemos ter* $2x^3 = 5 - \ln(x)$. *Deste modo construindo o gráfico das duas funções* $y = 2x^3$ *e* $y = 5 - \ln(x)$, *podemos ver onde ocorre a interseção das duas funções (ver figura* 4.12*).* ■

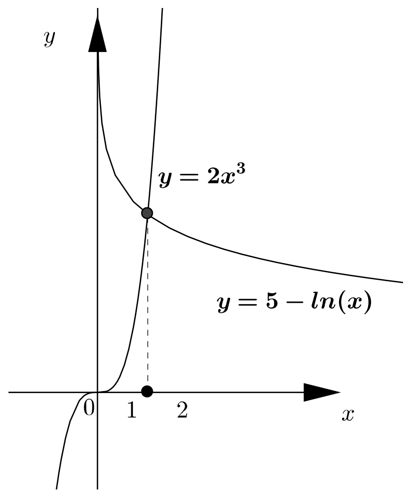

Figura 4.13: Ilustração para o exemplo 52

Exemplo 53 *Vamos aplicar o método de Newton na determinação de* $\sqrt{2}$ *com um erro inferior a* $\epsilon = 10^{-5}$.
Solução:

Seja $f(x) = x^2 - 2$, *de onde segue que* $f'(x) = 2x$. *Veja que* $f(1) = -1 < 0$ *e* $f(2) = 2 > 0$, *como* $f(1)$ *e* $f(2)$ *tem sinais opostos, então existe uma raiz no intervalo* $(1, 2)$. *Tomando* $x_0 = 1$, *com* $f'(1) = 2$, *construiremos a tabela a seguir:*

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\triangle = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1,0000000	-1,0000000	2,0000000	-
1	1,5000000	0,2500000	3,0000000	0,5000000
2	1,4166667	0,0069445	2,8333334	0,0833333
3	1,4142158	0,0000063	2,8284316	0,0024509
4	**1,4142135**	-	-	0,0000023$<\epsilon$

.

Portanto a raiz aproximada é $x = 1,4142135$. ■

Exemplo 54 *Aplique o método de Newton à equação* $\dfrac{1}{x} - a = 0$, *para deduzir o seguinte algorítmo* $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$.
Solução:

Tome $f(x) = \dfrac{1}{x} - a$, *temos que* $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, *podemos ver que* $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n} - a$ *e teremos* $f'(x_n) = -\dfrac{1}{x_n^2}$, *assim temos* $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{\dfrac{1}{x_n} - a}{\dfrac{-1}{x_n^2}} =$ $x_n + \dfrac{1 - ax_n}{x_n} \cdot x_n^2 = x_n - ax_n^2 + x_n = 2x_n - ax_n^2$. ■

Exemplo 55 *Retomando a função* $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$, *do exemplo 43, determinar uma raiz aproximada da função* f, *com um erro inferior a* $\epsilon = 0,0001$.
Solução:

Podemos perceber que $f(-2) \cdot f(-4) < 0$, *dessa forma tomemos* $x_0 = -3$ *e considere a tabela abaixo.*

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\triangle = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	-3,000000	5,000000	11,000000	-
1	-3,4545454	-1,540193	17,983468	0,4545454
2	-3,3689005	-0,06072	16,572868	0,0856449
3	-3,3652367	-0,000111	16,513508	0,0036638
4	**-3,36523**	0,000002	16,513398	0,0000067$<\epsilon$

.

Portanto a raiz aproximada é $x = -3,36523$. ■

O método de Newton não se aplica em todos os casos, deste modo, para assegurar a sua convergência, apresentamos o seguinte teorema que nos dá condições suficientes para que o método funcione.

Teorema 19 *Seja f uma função de classe C^2 em $[a,b]$ que verifique:*

1. $f(a)f(b) < 0$;
2. $f'(x) \neq 0$ *para qualquer* x *em* $[a,b]$;
3. $f''(x) > 0$ *ou* $f''(x) < 0$ *para qualquer* x *em* $[a,b]$.

Exemplo 56 *Seja* $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 10$. *Verificando as condições do teorema 19 no intervalo* $[2,3]$, *temos:*

1. *É fácil ver que* $f(2)f(3) < 0$;
2. *Derivando* f, *temos* $f'(x) = x^2 - 5x$, *veja que* $f'(x) = 0$ *em* $x = 0$ *ou* $x = 5$, *logo* $f'(x) \neq 0$ *em* $[2,3]$;
3. *Temos que* $f''(x) = 2x - 5 \Rightarrow f''(2) = -1 < 0$, *por outro lado,* $f''(3) = 1 > 0$, *portanto* $f''(x)$ *não tem sinal constante em* $[2,3]$, *sendo assim a condição* (3) *não é satisfeita, consequentemente o método de Newton não funciona para essa equação.*

Exemplo 57 *Considerando a função* $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x^2}$. *Vamos verificar as condições acima no intervalo* $[\frac{1}{2}, 2]$.

1. *Veja que* $f(\frac{1}{2}) < 0$ *e* $f(2) > 0$, *de modo que existe uma raiz em* $(\frac{1}{2}, 2)$, *podemos ver facilmente que essa raiz é* $x = 1$.
2. *Porém* $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$, *de modo que* $f'(\frac{1}{2}) > 0$ *e* $f'(2) < 0$, *de onde segue que* f' *se anula em algum ponto do intervalo* $(\frac{1}{2}, 2)$, *o que mostra que* f *não satisfaz a hipótese* (2) *do Teorema 19. Veja que, se aplicarmos o método de Newton partindo da aproximação* $x_0 = 1,7$ *obtido de forma aleatória, teríamos:* $x_1 = 1,7 - \dfrac{0,183608}{(-0,012468)} = 1,7 + 14,72 = 16,42$ *que é um valor distante da raiz, ou seja , tomamos* x_0 *próximo da raiz e obtemos um* x_1 *muito distante da raiz. De fato, a sequência* $(x_n)_n$, *assim obtida, diverge para* $+\infty$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\triangle = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1,700000	0,183608	-0,012468	-
1	16,420000	0,0103795	-0,0010383	14,72
2	26,41	0,0046936	-0,00030116	9,99
3	41,99			

.

Podemos observar que a sequência x_n fica cada vez mais distante da raiz $x = 1$. No entanto, se olharmos para um intervalo suficientemente pequeno em torno da raiz $x = 1$, veríamos que as condições do Teorema 19 seriam satisfeitas e, consequentemente, o método de Newton converge para a raiz, desde que escolhêssemos a aproximação inicial nesse intervalo. Vejamos:

Considere o intervalo $(\frac{1}{2}; b) = (0,5; 1,25)$, onde $b = \dfrac{1/2 + 2}{2} = 1,25$. Vamos verificar as condições do teorema 19 nesse intervalo.

1. Temos que $f(0,5) < 0$ e $f(1,25) > 0$, portanto existe uma raiz em $[0,5; 1,25]$;

2. Derivando f, temos $f'(x) = \dfrac{1 - 2ln(x)}{x^3}$, de modo que $f'(x) = 0$ em $x = 1,65$ logo $f'(x) \neq 0$, em $[0,5; 1,25]$;

3. Veja que $f''(x) = \dfrac{6ln(x) - 5}{x^4}$, de modo que $f''(x) \geq 0$ em $x \geq 2,3$ e $f''(x) \leq 0$ em $x \leq 2,3$ de onde segue que f'' tem sinal constante em $[0,5; 1,25]$. Portanto as condições do teorema 19 foram satisfeita e consequentemente o método de Newton converge para a raiz $x = 1$.

Tomando $x_0 = 0,8000$ como uma aproximação inicial para a raiz e coniderando $\epsilon = 0,1$ podemos observar na tabela a convergência da sequência x_n para a raiz $x = 1$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\triangle = \|x_{n+1} - x_n\|$
0	0,8000	-0,3500	2,8200	-
1	0,9224	-0,0900	1,4800	0,1224
2	0,98321	-0,02	1,0900	0,06081
3	**1,0015**	-	-	0,01$<\epsilon$

.

4.6.1 Comparação entre o método de Newton e o método da Bisseção

Comparando os dois métodos apresentados, o método da Bisseção e o método de Newton, temos que satisfeita as condições de convergência de ambos os métodos, os dois são bastantes eficientes na resolução de raízes aproximadas de uma equação, sendo que o método de Newton possui uma convergência mais rápida. Embora o método da Bisseção convirja sempre, teremos portanto que efetuar um número maior de iterações para a convergência da raiz.

Exemplo 58 *Determinar uma raiz da equação* $x^3 - sen(x) + 2$ *no intervalo* $[-2, 1]$ *com um erro inferior a* $\epsilon = 0,01$

Solução:

Inicialmente utilizaremos o método da bisseção e observemos a quantidade de iterações realizadas, assim temos:

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	*Sinal de* $f(x)$	$\triangle = \lvert b - a \rvert$
-2,0000	-1,0000	-1,5000	-	1,0000
-1,5000	-1,0000	-1,2500	+	0,5000
-1,5000	-1,2500	-1,3750	+	0,2500
-1,5000	-1,3750	-1,4375	+	0,1250
-1,5000	-1,4375	-1,4687	-	0,0625
-1,4687	-1,4375	-1,4531	-	0,0312
-1,4531	-1,4375	-1,4453	-	0,0156
-1,4453	-1,4375	**-1,4414**	-	0,0078$<\epsilon$

.

Na tabela a seguir, utilizaremos o método de Newton para compararmos a quantidade de iterações realizadas nesse processo, logo:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\triangle = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	-2,0000	-5,0907	12,4161	-
1	-1,5900	-1,0198	7,6035	0,4100
2	-1,4559	-0,0925	6,4735	0,1341
3	-1,4417	-0,0049	6,3641	0,0142
4	**-1,441**	-	-	0,0007$<\epsilon$

.

Podemos observar através deste exemplo que a convergência pelo método de Newton ocorre com um número menor de iterações, portanto o método de Newton é mais eficiente na determinação de raiz de uma função num intervalo dado. ■

4.6.2 Considerações Finais

Ensinar Matemática hoje nas escolas públicas de ensino médio não é uma tarefa fácil para o professor, aulas expositivas com aplicações de fórmulas e realizações de cálculos não vem atraindo a atenção e o interesse do alunado e consequentemente a aprendizagem em matemática diminui gradativamente.

Um dos fatores que contribui de forma significativa para as grandes evasões nos cursos superiores onde se estudam disciplinas como o cálculo, é a deficiência na aprendizagem em Matemática. Alguns alunos concluem o ensino médio e não absorvem de uma maneira suficiente os conteúdos importantes da Matemática, ferramenta indispensável para quem deseja atuar em alguma área da Engenharia, Informática ou as licenciaturas em Física, Química e principalmente em Matemática. Não podemos deixar de citar que em muitos casos essa deficiência na aprendizagem é causado em parte pela desmotivação e desinteresse do aluno pela disciplina e em parte pela má formação do alunado em Matemática durante a educação básica.

Nesse entendimento esse trabalho foi escrito para que tanto professores da educação básica como alunos a nível de graduação, possam utilizá-lo como um material auxiliar que permita de alguma forma compreender alguns conceitos matemáticos e suas aplicações.

Existe muita matemática por trás dos grandes avanços da ciência e da tecnologia nos dias atuais, sem a matemática não seria possível por exemplo, fotografar a superfície de Marte, não seria possível a comunicação entre pessoas através de uma tela do computador estando elas a quilômetros de distância, não seria possível entender fenômenos da natureza, o homem com certeza não teria ido à lua, enfim não seria possível muita coisa sem a contribuição significativa da Matemática.

Deste modo devemos ainda mais valorizar o ensino da Matemática nas nossas escolas e universidades, não podemos deixar que nossos alunos percam o encanto por essa ciência que é um dos pilares do desenvolvimento científico e tecnológico. Portanto a missão dos professores de Matemática é levar esse conhecimento a quem ainda não o tem afim de que nossos alunos percebam a necessidade de aprender matemática e que esse conhecimento é necessário para que o cidadão se torne mais crítico, criativo e atuante nas transformações da nossa sociedade.

Referências Bibliográficas

[1] Stewart, James., *Cálculo, Volume I/ James Stewart* Tradução Antônio Carlos Gilli Martins-5 ed.São-Paulo Cengage Leasning, 2009

[2] Iezzi, Gelson., *Fundamentos da Matemática Elementar,8.* Limite, derivadas, noções de integral São-Paulo, Atual 2005

[3] Ávila, Geraldo., *Cálculo das funções de uma variável, volume 1*, Geraldo Ávila-7ª ed (2008).

[4] Flemming, Diva Marília., *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração* . Diva Marília Flemming 5ª ed. São-Paulo: Makron, 1992.

[5] Lima, Elon Lages., *A matemática do ensino médio - volumes 1,2 e 3.* Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado-Rio de Janeiro: SBM,2010.

[6] Lima, Elon Lages., *Curso de Análise vol. 1, 10 ed.*- Rio de Janeiro. Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[7] Stewart, James., *Cálculo, Volume 2/ James Stewart* Tradução Antônio Carlos Gilli Martins-6ª ed.São-Paulo Cengage Leasning, 2012