Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Análise Combinatória: Uma Questão de Lógica e Linguagens

por

Karina Guerra Cardoso Alvim

Goiânia

2013

sibi sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Karina Guerra Cardoso Alvim				
E-mail:	karinagca@hotm ail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Professora do Ensino Básico				
Agência de fomento:	Colégio Militar de Brasília			Sigla:	CMB
País: Brasil	UF:DF		CNPJ:	00.394.452/0498-89	
Título:	Análise Combinatória: Uma Questão de Lógica e Linguagens				
Palavras-chave:	Combinatória, Lógica, Contagem, Análise, Linguagem, Conjectura				
Título em outra língua:	Combinatorial Analysis: a Matter of Logic and Languages.				
Palavras-chave em outra língua:	Combinatorial, Logic, Count, Analysis, Language, Conjecture				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	01/03/2013				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática				
Orientador (a):	Prof. Dr. Mário José de Souza				
E-mail:	mariojsouza@gmail.com				
Co-orientador(a):*	------------				
E-mail:	----------				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Karina Guerra Cardoso Alvim

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 02/04/13

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Karina Guerra Cardoso Alvim

Análise Combinatória: Uma Questão de Lógica e Linguagens

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Alvim, Karina Guerra Cardoso.
A475a Análise combinatória [manuscrito]: uma questão de lógica e linguagens / Karina Guerra Cardoso Alvim. – 2013.
54 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Análise combinatória. 2. Lógica e Linguagem. 3. Contagem. I. Título.

CDU: 519.1

karina Guerra Cardoso Alvim

Análise Combinatória: Uma Questão de Lógica e Linguagens

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 01 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB

Profa. Dra. Elisabeth Cristina Faria Vieira
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Karina Guerra Cardoso Alvim graduou-se em Matemática pela Universidade Federal Fluminense e atualmente é Professora do Ensino Básico no Colégio Militar de Brasília.

Ao meu marido Marcos que, com apoio e incentivo irrestritos, me ajudou a chegar até aqui.

Agradecimentos

A Deus, por mais esta oportunidade especial de crescimento.

Aos meus filhos Pedro, Larissa e Rebeca, pelo estímulo e pela compreensão amorosa de algumas ausências.

Aos meus pais Alberto e Sonia, por terem me ensinado com amor e exemplo o caminho do esforço. À minha sogra Dedé, pelo incentivo desde o primeiro momento.

Ao Prof Mario, meu orientador, que me relembrou como é bom ser aluna de um professor de verdade. Aos idealizadores, realizadores e professores do Profmat.

Aos amigos Vanessa e Hugo Leonardo, que tornaram tudo mais fácil.

Aos companheiros de curso, pelos momentos de convívio alegre e amigo.

Aos colégios onde já trabalhei, em especial o Colégio Militar de Brasília, por me ajudarem a manter a chama acesa.

A todos os alunos que já tive (e ainda terei), razão da minha felicidade profissional e principais inspiradores deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é abordar a Análise Combinatória como um tema que pode ser tratado, em sala de aula, sem a utilização de fórmulas matemáticas na resolução de problemas.

Será apresentado um método de raciocínio que, baseando-se em Lógica e Linguagens, destaca a importância de:

- Ler, interpretar e analisar textos que se apresentam em língua materna;
- Formular conjecturas, fazer escolhas e buscar estratégias de contagem; e
- Fazer a tradução correta entre as linguagens materna e matemática.

Espera-se mostrar, a partir desta abordagem, que a Análise Combinatória, além da sua importância em vários campos do conhecimento, também pode ser encarada, por estudantes e professores, como um conteúdo desafiador e estimulante.

PALAVRAS-CHAVE: Combinatória, Lógica, Contagem, Análise, Linguagem, Conjectura.

Abstract

The objective of this work is to address the Combinatorial Analysis as a theme that can be treated in the classroom, without the utilization of mathematical formulas in problem solving.

For this it will presented a method of reasoning that, basing on logic and languages, underscores the importance of:

- To read, interpret and analyze texts that are presented in the mother tongue;
- Formulate conjectures, make choices and seek strategies of count; and
- Make the correct translation between languages maternal and mathematics.

Expected to show from this approach that the Combinatorial Analysis, besides its importance in various fields of knowledge, may also be seen by students and teachers as a challenging and stimulating content.

KEYWORDS: Combinatorial, logic, Count, Analysis, Language, Conjecture.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Matemática! Sentimentos diversos são provocados quando o tema é seu estudo. Estudantes, pais, professores e educadores em geral se preocupam com o ensino/aprendizado da Matemática, e todo o seu poder de fracasso e frustração **escolares** (estudantes), **familiares** (pais/estudantes), **profissionais** (professores) e **educacionais**.

Poderíamos encher folhas e folhas com pensamentos, perguntas, respostas, dúvidas, certezas, teorias, sugestões práticas, etc, sobre o ensino/aprendizado da Matemática, seu currículo (adequado ou não), seus métodos de ensino (adequados ou não), sua necessidade, sua validade, mas deixemos isso para outra vez. Vamos tentar restringir nossa discussão.

"Como os alunos aprenderão Matemática se não conseguem interpretar o que está escrito"?. "Os alunos entenderam o conteúdo de matemática da aula, mas na hora de resolver exercícios que exigiram leitura e interpretação de texto... o problema foi no Português"!. Numa tentativa de descrever situações difíceis de uma sala de aula, professores mostram o quanto o sucesso na Matemática depende do Português, nossa língua materna, e de sua boa utilização.

Vamos, então, escolher um conteúdo da disciplina de Matemática onde essa leitura e interpretação sejam as maiores dificuldades da resolução de problemas. Reforçamos: a disciplina é Matemática, estaremos no Ensino Médio, mas a dificuldade não se encontra nos cálculos que serão utilizados! A dificuldade será ler, analisar, interpretar, reescrever e, finalmente, utilizar alguma(s) dentre as quatro operações fundamentais (somar, subtrair, multiplicar ou dividir para obter solução de situação-problema). Para completar o quadro, os números envolvidos nesses cálculos simples serão apenas os números Naturais. Sim... os números naturais (sem sinal negativo, sem vírgula, sem traço de fração, sem dízimas... simples números naturais). Escolhemos a **Análise Combinatória**.

A Análise Combinatória, conteúdo geralmente abordado no 2° ano do Ensino Médio, desafia professores a cada novo exercício que surge ("será que vou acertar?"); faz professores sérios sentirem-se frustrados ao observarem a dificuldade de seus alunos em compreenderem a aula; provoca, na maioria dos alunos, o desejo "de que acabe logo e passe a prova". Quando, então, deparam-se com a Probabilidade, e percebem que a Análise Combinatória passa a ser instrumento.

Segundo René Decartes em [17], "Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis". É com essa ideia que espera-se, ao longo deste trabalho, apresentar um método para resolução de problemas de Análise Combinatória, sem a utilização de fórmulas, enfatizando-se leitura, interpretação, análise e linguagens.

De que forma? Primeiramente, devemos entender que os problemas abordados pela Análise Combinatória são **problemas de Contagem**. Portanto, um problema estará resolvido quando conseguirmos determinar o valor correto (de uma contagem), após um atento processo de **escolhas**.

Importante também é destacarmos os objetos que serão contados. Na Análise Combinatória, os objetos de estudo são **agrupamentos**. Esses agrupamentos, formados por elementos de qualquer espécie, são divididos em dois tipos distintos: **ordenados** e **não ordenados**. Portanto, fazer essa distinção, após a leitura e interpretação de um problema, torna-se de fundamental importância para o sucesso da resolução.

Nesse ponto, a **Álgebra dos Conjuntos** deve ser revisada, bem como os conceitos de **Lógica Matemática (Cálculo Proposicional)**, importantes instrumentos para o **raciocínio combinatório** e **esquematização da resolução**. Mas até aqui ainda estaremos navegando no campo das **ideias e conjecturas**.

Quando partirmos para a resolução **aritmética** do problema, necessitaremos traduzir nossos pensamentos, de forma simples e objetiva, para a **Linguagem Matemática**. É nessa etapa do nosso processo de resolução do problema que devem estar bem definidos os **significados** dos símbolos matemáticos que serão utilizados na tradução de nosso raciocínio, já feito em palavras em nosso pensamento.

Ao final do trabalho, serão solucionados problemas de Análise Combinatória utilizando leitura, interpretação, lógica e linguagem, sem a utilização de fórmulas preestabelecidas, numa tentativa de desmitificar este conteúdo importante por sua aplicação em outras ciências e por sua grande incidência em provas e concursos (objetivo imediato dos estudantes do Ensino Médio).

1 Conceitos Básicos

Neste capítulo, será feita uma breve exposição sobre tópicos fundamentais de Lógica Matemática, Teoria de Conjuntos e Linguagens, com o objetivo de justificar sua importância para a construção de um método de resolução de problemas que dispensa a utilização de fórmulas matemáticas.

1.1 Lógica Matemática

Quando buscamos resolver um problema de qualquer natureza, tanto mais sucesso temos, quanto conseguimos, com serenidade, organizar nossas ideias. Nestes momentos, buscamos priorizar a nossa **razão**. Para isso, tentamos organizar nossos pensamentos, valendo-nos de uma **lógica**. Se o problema é de Matemática, por que não lançarmos mão da **Lógica Matemática**?

1.1.1 Um Breve Histórico

De acordo com [4], a história da Lógica começa com os trabalhos do filósofo grego Aristóteles ($384 - 322$ $a.C.$). Não se conhece precursores de sua obra no mundo antigo. Com o objetivo de mostrar que os sofistas (mestres da retórica e da oratória) podiam enganar os cidadãos, utilizando argumentos incorretos, Aristóteles estudou a estrutura lógica da argumentação. Segundo ele, a lógica é um instrumento para atingir o conhecimento científico.

Durante o período compreendido pela Idade Média, séculos XVII, XVIII e XIX houve pouca contribuição para esse ramo do conhecimento. As ideias originais e inovadoras de Leibniz ($1646-1716$), conhecido como o precursor da Lógica moderna, só foram apreciadas e conhecidas no século XIX, antecipando resultados obtidos 200 anos mais tarde. Tanto que o uso de diagramas atribuídos a Euler já tinha sido empregado por Leibniz. Venn ($1834 - 1923$) aperfeiçoou os diagramas no estudo da Lógica.

A Lógica moderna teve George Boole ($1815 - 1864$) e Augustus De Morgan ($1806 - 1871$) desenvolvendo, paralelamente, a Álgebra da Lógica. Mas, segundo Alonzo Church ($1903-1995$), Gottlob Frege ($1848-1925$) foi "o maior lógico dos tempos modernos", tendo desenvolvido axiomaticamente o Cálculo Sentencial (ou Cálculo Proposicional), usando negação e implicação como conceitos primitivos, seis axiomas e regras *modus ponens* e de substituição.

Merecem ainda destaque Bertrand Russell e A. N. Whitehead $(1861-1947)$ com sua obra *Principia Mathematica*; David Hilbert $(1862-1943)$; Kurt Godel $(1906-1978)$ a quem se deve a primeira demonstração da completividade da Lógica elementar; e Alfred Tarski $(1902-1983)$, cuja definição de *semântica da verdade*, aplica-se em numerosos campos da Matemática, com repercussões na Filosofia.

1.1.2 Noções de Lógica - Cálculo Proposicional

a) Proposição simples ou sentença é toda oração simples (portanto possui sujeito e predicado), declarativa (não pode ser exclamativa nem interrogativa) que pode ser classificada em verdadeira ou falsa (valores lógicos).

p
V
F

Tabela 1: Tabela verdade de p

Exemplos:

1) "Nove é diferente de cinco" é uma proposição simples de valor lógico **V**.

2) "O cachorro é um animal invertebrado" é uma proposição simples de valor lógico **F**.

3) "Três vezes quatro mais dois" não é uma proposição, pois não possui verbo.

4) "Você vai estudar hoje?" não é uma proposição, pois é uma oração interrogativa.

5) "O quádruplo de um número menos três é igual a treze" não é uma proposição, pois não possui valor lógico.

6) "Se estou vivo, então meu coração está batendo" não é uma proposição simples, pois é formada por duas orações.

b) Negação de uma proposição p: ($\neg$**p**) é uma proposição obtida, a partir da proposição **p**, colocando-se "não" antes do verbo de **p**. Dessa forma, o valor lógico de $\neg$**p** é sempre oposto ao de **p**.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela 2: Tabela verdade de ($\neg$**p**)

Exemplo 7: Se **p** é a proposição "Nove é maior que dez", de valor lógico **F**, então $\neg$**p** é a proposição "Nove não é maior que dez", cujo valor lógico é **V**.

c) Conectivo $\wedge$ (e):

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições simples **p** e **q**, obtemos a proposição composta $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$, denominada conjunção das sentenças **p** e **q**.

O critério para estabelecer o valor lógico de uma conjunção $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ a partir dos valores lógicos das proposições **p** e **q** é: "a conjunção $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ é falsa".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 3: Tabela verdade de $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$

Exemplo 8: Sejam **p** e **q** as proposições simples "A Terra é uma estrela" e "Plutão não é um planeta", respectivamente. Podemos atribuir os valores lógicos **F** e **V** às proposições **p** e **q**, respectivamente. Logo, a proposição composta $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ terá **F** como valor lógico.

d) Conectivo $\vee$ (ou):

Colocando o conectivo $\vee$ entre duas proposições simples **p** e **q**, obtemos a proposição composta $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, denominada **disjunção** das sentenças **p** e **q**.

O critério para estabelecer o valor lógico de uma disjunção $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ a partir dos valores lógicos das proposições **p** e **q** é: "a disjunção $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ é falsa se **p** e **q** são ambas falsas; se ao menos uma delas for verdadeira, então $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ é verdadeira."

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 4: Tabela verdade de $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$

Exemplo 9: Utilizando as mesmas proposições simples do exemplo 8, a proposição composta $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ terá valor lógico **V**.

e) Condicional $\rightarrow$:

Colocando o condicional $\rightarrow$ entre duas proposições simples **p** e **q**, obtemos a proposição composta $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$, que se lê: "se **p**, então **q**", "**p** é condição necessária para **q**", "**q** é condição suficiente para **p**. Na condicional $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$, a proposição **p** é chamada **antecedente** e **q** é chamada **consequente**.

O critério para estabelecer o valor lógico do condicional $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ a partir dos valores lógicos das proposições **p** e **q** é: "o condicional $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ é falso somente quando p é verdadeira e q é falsa; caso contrário, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ é verdadeiro".

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 5: Tabela verdade de $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$

Exemplo 10: Sejam **p** e **q** as proposições simples "A maçã é uma fruta" e "Quatro é o dobro de três", respectivamente. Podemos atribuir os valores lógicos **V** e **F** às proposições **p** e **q**, respectivamente. Logo, a proposição composta $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ terá **F** como valor lógico. Já a proposição composta $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ terá valor lógico **V**.

f) Condicional $\leftrightarrow$:

Colocando o condicional $\leftrightarrow$ entre duas proposições simples **p** e **q**, obtemos a proposição composta $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$, que se lê: "**p** se e somente se, **q**", "**p** é condição necessária e suficiente para **q**, "**q** é condição necessária e suficiente para **p**, "se **p**, então **q** e reciprocamente".

O critério para estabelecer o valor lógico do condicional $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ a partir dos valores lógicos das proposições **p** e **q** é: "o condicional $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer, o condicional $\leftrightarrow$ é falso".

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 6: Tabela verdade de $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$

Exemplo 11: Utilizando as mesmas proposições simples do exemplo 10, as proposições compostas $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ e $\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p}$ terão o mesmo valor lógico **V**.

g) Tautologias:

Seja **r** uma proposição formada a partir de proposições simples, mediante o emprego de conectivos ($\wedge$ ou $\vee$) ou de modificador ($\neg$) ou de condicionais ($\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$). Dizemos que **r** é uma **tautologia** ou **proposição logicamente verdadeira** quando **r** tem o valor lógico **V** (verdadeira) independentemente dos valores lógicos das proposições simples que a constituem. Assim, a tabela verdade de uma tautologia **r** apresenta apenas o valor lógico **V** na sua última coluna.

Exemplo 12: Sejam as proposições simples **p** e **q**; e **r** a proposição composta:

$$(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$$

p	q	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$q \vee p$	$(p \wedge \neg p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Tabela 7: Tabela verdade de **r**

Podemos observar que, independente dos valores lógicos de **p** e **q**, o valor lógico de **r** é sempre verdadeiro. Logo, **r** é uma **tautologia**.

h) Proposições logicamente falsas:

Seja **f** uma proposição formada a partir de proposições simples, mediante o emprego de conectivos ($\wedge$ ou $\vee$) ou de modificador ($\neg$) ou de condicionais ($\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$). Dizemos que **f** é uma proposição logicamente falsa quando **f** tem o valor lógico **F** (falsa) independentemente dos valores lógicos das proposições simples que a constituem. Assim, a tabela verdade de uma proposição logicamente falsa **f** apresenta apenas o valor lógico **F** na sua última coluna.

Exemplo 13: Sejam as proposições simples **p** e **q**; e **f** a proposição composta

$$(\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}) \leftrightarrow (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

Tabela 8: Tabela verdade de $(\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}) \leftrightarrow (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$

Observamos que, independente dos valores lógicos de **p** e **q**, o valor lógico de **f** é sempre falso. Logo, **f** é uma **proposição logicamente falsa**.

A Lógica Matemática é um campo vasto e belo de estudo. Apresentamos aqui apenas a primeira e indispensável parte da Lógica Matemática, o Cálculo Proposicional, que será utilizado na formação dos agrupamentos ordenados ou não, objetos de estudo do nosso tema principal que é a Análise Combinatória.

1.2 Teoria dos Conjuntos

Como os objetos a serem contados na Análise Combinatória são agrupamentos, parece natural que façamos uma rápida revisão da Teoria de Conjuntos, em pontos que serão úteis para um adequado manuseio da linguagem que será utilizada.

1.2.1 Breve Histórico

"Ninguém nos poderá expulsar do Paraíso que Cantor criou". Com esta frase, David Hilbert $(1862-1943)$ expressou seu encantamento pela moderna Teoria de Cojuntos, cujo desenvolvimento é atribuído a Georg Cantor $(1845-1918)$. De acordo com [17], Cantor foi influenciado pelas ideias de infinito de Richard Dedekind $(1831-1916)$ e de Bernhard Bolzano $(1781-1848)$ para a construção de sua teoria. Os conceitos matemáticos inovadores propostos por ele enfrentaram muita resistência por parte da comunidade matemática da época. A descoberta dos paradoxos da teoria cantoriana de conjuntos propiciou os trabalhos de Bertrand Russell $(1872-1970)$, Ernst Zermelo $(1871-1953)$, Abraham Fraenkel $(1891-1965)$ dentre outros matemáticos, no começo do século XX. Considera-se que o conjunto de axiomas da teoria de Zermelo-Fraenkel é suficiente para desenvolver toda a matemática.

Os matemáticos modernos aceitam plenamente o trabalho desenvolvido por Cantor na sua teoria de conjuntos, reconhecendo-o como uma mudança de paradigma da maior importância.

Os conjuntos e suas operações mais elementares fornecem um padrão de linguagem para a formulação de qualquer teoria matemática, apoiando-se, em grande parte, na Lógica Matemática. Essas operações permitem manipular os conjuntos e seus elementos de forma similar às operações aritméticas, constituindo a **Álgebra dos Conjuntos**.

1.2.2 Álgebra dos Conjuntos

Em Álgebra dos Conjuntos, os objetos de interesse são os conjuntos e não os elementos que pertencem a eles. Assim, as operações devem ser definidas sobre ou entre conjuntos, mas nunca sobre elementos isolados.

As operações básicas da álgebra de conjuntos são União, Intersecção, Diferença, Complemento e Produto Cartesiano. Vamos considerar conhecidas essas operações. Algumas delas possuem propriedades similares às operações com números. Por exemplo, a união e a intersecção são comutativas e associativas; o conjunto vazio é o elemento neutro da união e o elemento absorvente da intersecção e do produto cartesiano; o conjunto universo é o elemento neutro da intersecção e o elemento absorvente da união. Além disso, as operações de união, intersecção, diferença e complemento são muito similares às operações em uma Álgebra de Boole bem como os conectivos lógicos da Lógica Proposicional.

Por esse motivo, pode-se dizer que o Cálculo Proposicinal e a Álgebra dos Conjuntos possuem estruturas semelhantes, tendo toda fórmula do primeiro uma operação correspondente entre conjuntos, a saber:

- a negação ($\neg$) corresponde à complementação (‘);
- a conjunção ($\wedge$) corresponde à intersecção ($\cap$) e
- a disjunção ($\vee$) corresponde à união ($\cup$).

Além disso, as variáveis proposicionais ($\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$...) que representam as proposições simples, podem servir como variáveis que simbolizam conjuntos.

Exemplo: A proposição $((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \neg\mathbf{p})$ corresponde à operação entre conjuntos $((\mathbf{p} \cup \mathbf{q}) \cap \mathbf{p}`)$.

É importante lembrar que um conjunto é um agrupamento não ordenado. Isto é, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 1, 2\}$, podemos afirmar que $A = B$, apesar dos elementos de

A e B não estarem posicionados na mesma ordem. Não existe ordem, nem posição na formação de um conjunto. Se desejarmos um agrupamento ordenado, lançamos mão das **sequências**. Por exemplo, a sequência $(1, 2, 3)$ não é igual à sequência $(3, 1, 2)$. Apesar dos elementos utilizados na formação de ambas serem os mesmos, encontram-se ordenados em posições distintas.

Além disso, $\{1, 2, 3\}$ não é igual a $(1, 2, 3)$, pois são objetos matemáticos distintos. O primeiro é um conjunto *(agrupamento não ordenado)* enquanto o segundo é uma sequência *(agrupamento ordenado)*. Observemos que o símbolo "{ }" subentende **ausência de ordenação entre os elementos** enquanto o símbolo "( )" subentende **presença de ordenação entre os elementos.**

Neste ponto, devemos interromper nossa brevíssima revisão sobre conjuntos, apesar de este ramo do conhecimento ser um dos mais interessantes da Matemática, com seus significados, símbolos e possibilidades de discussões filosóficas e teológicas (como por exemplo, quando se fala em infinito).

1.3 Linguagem Matemática

Observemos as duas situações abaixo descritas.

Situação 1: – **What is your name?**

– **(Silêncio!)**

É claro que quase a totalidade das pessoas sabe qual é o seu nome. Mas muitas poderiam não responder a essa pergunta, simplesmente porque desconhece a língua inglesa.

Situação 2:

"**Quando saí de casa, não olhei quanto eu tinha na carteira. Passei na padaria e gastei 10 reais. Depois, tomei um sorvete que custou 2 reais. Dei para meu filho a metade do que me sobrou e agora vejo que ainda tenho 18 reais na carteira. Deixa eu pensar ...Ah! eu saí com 48 reais na carteira.**"

Se essa situação fosse transformada numa questão de matemática, a ser resolvida por uma equação de 1º grau, grande parte das pessoas não conseguiria montar a equação $x - \dfrac{x-12}{2} = 18$, embora muitas delas pudessem dar a resposta correta. Novamente por uma questão de linguagem, uma pergunta não seria respondida. Mas, neste caso, a "língua" desconhecida seria a utilizada na Matemática. Observe, o problema é uma questão cotidiana, a pessoa sabe resolvê-lo, tiraria 10 no teste prático, mas, no teste de matemática, tiraria zero!

Tem alguma coisa errada! Nas duas situações, faz-se necessário que o sujeito esteja alfabetizado em duas linguagens específicas.

Conforme [5], "Estar matematicamente alfabetizado significa que o sujeito entende o que lê e o que escreve bem como percebe o significado do ato de ler e escrever no contexto da Matemática."

Ainda em [5], Devlin (2004) observa que a Matemática e a língua materna têm as mesmas características no cérebro humano. Então por que as pessoas têm facilidade em entender o que as outras estão falando, mas têm dificuldades de entender a Matemática?

Ainda em [5], "Ler matemática não é simplesmente saber o significado de cada símbolo, já que a notação matemática não é Matemática, assim como a notação musical não é música". Devlin (2004, p. 27) expõe isto de uma forma bastante clara:

"*Uma página de partitura musical representa uma peça de música, mas a notação e a música não são a mesma coisa; a música propriamente dita acontece quando as notas da página são cantadas ou tocadas por um instrumento musical. É no seu desempenho que a música vem à vida; ela existe não na página, mas nas nossas mentes. O mesmo é verdade para a matemática. Quando lidos por um executante competente (isto é, alguém versado em matemática), os símbolos da página impressa vêm à vida a matemática vive e respira como uma sinfonia abstrata na mente do leitor.*"

Como salienta [5], as simbologias tanto musical quanto matemática são apenas uma forma de escrita, que só terá sentido se as combinações desses símbolos tiverem algum significado para quem os estiver lendo. E ainda assinala a existência de três dimensões para o conceito de significado. As palavras e os símbolos não são sempre empregados da mesma maneira, tendo, dessa forma, significados variáveis, dependendo do contexto onde se inserem que são:

- **Sintática**, que varia conforme palavras e símbolos são utilizados.

  Exemplos:

  1) Nas sentenças matemáticas "$\mathbf{y^3 + 10 = 37}$" e "$\mathbf{3y + 10 = 37}$", o "$\mathbf{3}$" possui significados diferentes.

  2) Nas sentenças "O pássaro solto voa livremente" e "Eu solto pássaros sempre que os vejo numa gaiola", a palavra "solto" também possui significados distintos.

- **Pragmática**, que se refere aos significados de palavras e símbolos em relação às experiências de cada sujeito.

- **Semântica**, que se refere às transformações do significado.

"Uma palavra sem significado é um som vazio". Esta frase reflete a realidade de muitas aulas de Matemática, onde conceitos são trabalhados de forma mecânica e sem significado, sobrando, então, o vazio.

Conforme [5], ao resolver o problema, o aluno passa por um processo que envolve a língua materna, que é uma significação externa, num primeiro momento, para depois chegar à solução do problema obtendo a significação interna. Ele entende o problema (movimento externo) para então elaborar a solução (movimento interno). Esse elo externo-interno precisa ser completo para que ocorra a aprendizagem matemática. Ao transformar o significado externo em interno, o aluno está lidando com seu poder de síntese.

Ainda em [5], o professor apresenta a questão, o aluno lê, decodifica, passa para a linguagem matemática, internaliza e associa outros conhecimentos e então retorna um resultado. A comunicação só será perfeita se todas essas etapas fizerem sentido para o aluno. Esse sentido estará ligado à forma como o professor, neste caso, trabalha o conteúdo. É um assunto que agora é comum ao professor e ao aluno. De acordo com [14], podemos entender a palavra "comunicar" em dois sentidos: no sentido etimológico, será "tornar comum" e no outro, numa acepção mais corrente, significa "transmitir" ou "transferir para o outro". "Nos dois sentidos, é possível perceber como a relação entre professor-aluno pode facilitar ou não essa comunicação, já que o meio é um elemento importante para que ela ocorra com clareza".

Neste momento, acreditamos haver reunido as principais ferramentas para o desenvolvimento do tema do trabalho. Lógica Proposicional, Álgebra dos Conjuntos e Linguagem Matemática serão fundamentais para o bom entendimento da Análise Combinatória.

2 Análise Combinatória

2.1 O que é Análise Combinatória?

A definição de Análise Combinatória foi pesquisada em dez livros didáticos adotados no 2º ano do Ensino Médio. Cinco autores optaram por apresentar o objetivo da Análise Combinatória, mas não a sua definição: "**O objetivo principal da Análise Combinatória é a determinação do número de possibilidades de um dado evento ocorrer**" em [1] ou ainda "**Obter tais métodos**" (de contagem) "**é o objetivo principal da Análise Combinatória**" em [13].

Quatro autores definiram Análise Combinatória: "**A Análise Combinatória é a parte da Matemática onde estudamos as técnicas de contagem de agrupamentos que podem ser feitos com elementos de um dado conjunto**" em [11] ou ainda "**...é a área da Matemática que trata dos problemas de contagem**" em [8], sendo esta última a mais comum.

Um dos autores [7], não fez referência nem ao objetivo nem à dfinição de Análise Combinatória, partindo direto para as definições e aplicações de fatorial, arranjo, permutação e combinação.

Podemos destacar ainda duas definições de importantes matemáticos:

- Leibniz, em 1666, descreveu a combinatória como "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos".
- Nicholson, em 1818, definiu-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si".

2.2 Breve Histórico

"Quem pensou uma coisa tola ou sensata, que já não tenha pensado o mundo antigo?" (Johann Goethe) [17]. Com base nessa afirmação, descreveremos, desde a Antiguidade, episódios famosos que servem de justificativa para a criação da Análise Combinatória, importante instrumento para diversas ciências, em especial a Teoria das Probabilidades.

Conforme pesquisado em [12], [15] e [16], o Papiro de Ahmes (escriba que o escreveu por volta de 1650 a.C.) ou Papiro de Rhind (antiquário escocês que o comprou em 1858) contém, em seu problema 79, um texto que sugere um embrião da Análise Combinatória. "Temos sete casas que contêm sete gatos cada uma. Cada gato mata sete ratos que haviam comido sete espigas de trigo cada um. Cada espiga havia produzido sete heckats de grão. Quantas unidades temos de cada coisa?"

Em seu livro Liber Abaci, Fibonacci (também conhecido como Leonardo de Pisa), no século XIII, escreveu: "Sete velhas vão à Roma; cada velha tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; para cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Quantas coisas viajavam para Roma?"

Há ainda uma breve poesia infantil do século XVIII: "Quando ia para Saint Ives, encontrei um homem com sete esposas; cada esposa levava sete sacos; cada saco tinha sete gatos;

cada gato tinha sete gatinhos. Gatinhos, gatos, sacos e esposas, quantos íam para Saint Ives?"

O interessante desses exemplos é que Fibonacci escreveu seu Liber Abaci antes do Papiro de Ahmes ser popularizado por Rhind.

Coincidências à parte, prossigamos. Ainda na Antiguidade, um problema geométrico proposto por Arquimedes de Siracusa (287 $a.C.$ – 212 $a.C.$), Stomachion (palavra derivada do grego stomachos, em português, estômago), consistia em determinar de quantas maneiras poderiam ser reunidas 14 peças planas, com tamanhos e formas distintos, a fim de formar um quadrado. Por mais de 2000 anos esse problema foi esquecido. Recentemente provou-se que há 17152 possibilidades de solução.

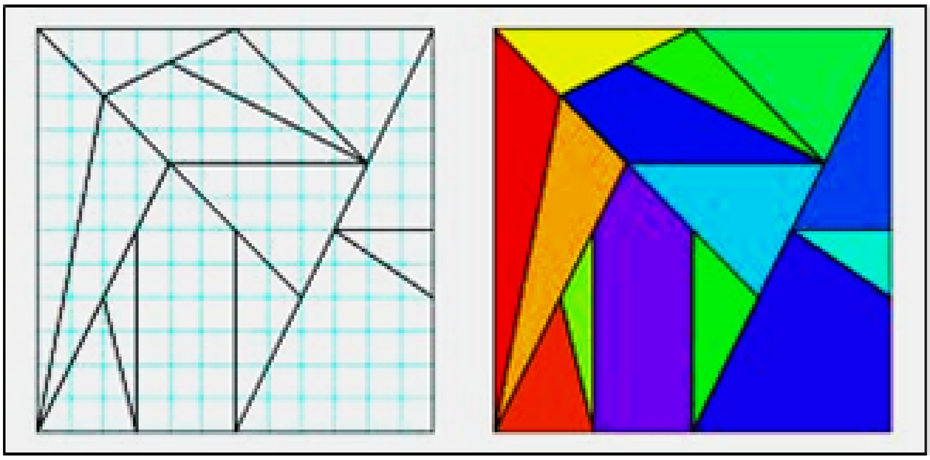

Figura 1: Quadrado formado por 14 peças planas com tamanhos e formas distintos

Conforme [2], o I Ching é considerado um dos trabalhos chineses mais antigos. Possui duas datas de criação: a mítica (durante a dinastia Shang 1766 – 1122 $a.C.$) e a histórica (a partir de 1000 $a.C.$, até um pouco depois da dinastia Chou ser fundada). Segundo Biggs (1979), a primeira ocorrência da Análise Combinatória pode estar nos 64 hexagramas do I Ching. Hexagrama é o nome dado, no ocidente, a cada um dos 64 símbolos que constituem o livro I Ching. É um símbolo abstrato, mas que com o tempo se torna compreensível aos que se interessam pelo Livro.

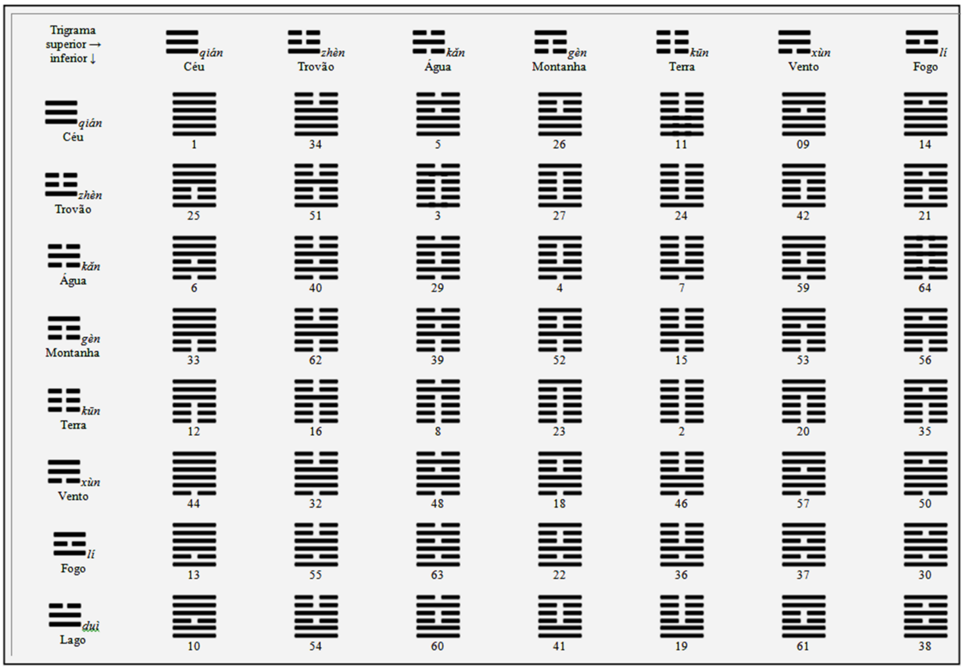

Figura 2: Tabela dos 64 hexagramas (obtidos pela combinação de dois símbolos: Yang (−) e o Yin (−−)

Há ainda outros exemplos muito antigos que, de alguma forma, sugerem ideias de Análise Combinatória tais como:

- Na literatura grega, Plutarco (46 − 120) citou o número de proposições compostas feitas a partir de dez proposições simples;

- Na literatura indiana, o *tratado médico de Susruta* (século VI a. C. aproximadamente) onde aparecem discussões sobre as combinações possíveis entre *doce, ácido, salino, pungente, adstringente e amargo*, para confeccionar medicamentos;

- Ainda contribuição dos hindus, aparece no livro Brihatsamhita, do matemático e astrônomo *Varahamhira* (505−587), a quantidade de perfumes que podem ser feitos, misturando-se 4 ou 5 dados ingredientes, misturando-os em diversas proporções;

- O livro do matemático indiano Sri Bhaskara (1114 − 1185), *Siddhanta Siromani*, onde em uma de suas partes mais conhecidas, *Lilavati*, aparece, por exemplo, um problema onde eram contadas as chances de abertura das portas de um palácio;

- Os quadrados mágicos originários provavelmente na China (o diagrama Lo Shu, presente no I Ching), transmitidos aos árabes, que criaram quadrados maiores e regras para construí-los, atingindo seu apogeu no Islã e chegando tardiamente à Europa no século XIV, em textos traduzidos do árabe.

Mas foi apenas no século XVII que a teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática. Nessa época, o triângulo de Pascal (conhecido por Chu Shih-Chieh, na China por volta de 1300) foi objeto de estudo, no Ocidente, de muitos matemáticos tais como Blaise Pascal ($1623 - 1662$), Jaime Bernoulli ($1654 - 1705$) e Isaac Newton ($1646 - 1727$).

Várias obras de Euler ($1707-1783$), muitas delas sobre probabilidades, contêm resultados importantes de Análise Combinatória. Um exemplo clássico é o *Problema das Sete Pontes de Königsberg*, um teorema da *Teoria dos Grafos*, parte muito importante da Análise Combinatória atualmente.

Segundo [12], "...A Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas...devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos...(em) problemas de pesquisa operacional, de armazenamentos de informações em bancos de dados nos computadores...". E ainda "...Em verdade, o desenvolvimento da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades...". Como uma ciência empírica, a teoria das Probabilidades tem sua origem associada aos jogos de azar, presentes em quase todas as civilizações, como mostram documentos arqueológicos ou históricos. Quando essa ciência foi associada à Matemática é difícil determinar, mas a opinião geral é de que Pascal e Fermat foram os criadores das probabilidades.

Observamos que a história da Análise Combinatória é rica em exemplos curiosos; adquire, algumas vezes, cunho filosófico e místico; pode ser encarada de forma lúdica, quando associada aos jogos de azar, e de forma moderna, quando associada aos programas computacionais, por exemplo.

Resta-nos a pergunta: "Onde inserir de forma atraente e simples, ciência tão diversificada, no cotidiano de uma sala de aula?". Devemos, antes de mais nada, oferecer este conteúdo aos alunos, como algo que pode ser lúdico (herança dos estudiosos antigos) e importante no mundo moderno (como demonstram os estudiosos modernos). Além disso, deve-se destacar a importância de fazer escolhas (tanto mais acertadas quanto identificarmos e prevenirmos riscos para o sucesso dessas escolhas), processo presente em todos os momentos corriqueiros ou não de nossas vidas. Prossigamos nesse objetivo.

2.3 A importância da Análise Combinatória no Ensino Básico

Por que estudar Análise Combinatória? Uma boa resposta pode ser encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como veremos a seguir.

2.3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

De acordo com [3], "Os Parâmetros Curriculares Nacionais são referências para os Ensinos Fundamental e Médio de todo o país. O objetivo dos PCN é garantir a todas as crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania. Não possuem caráter de obrigatoriedade e, portanto, pressupõe-se que serão adaptados às peculiaridades locais".

É dividido em três blocos que se referem aos Ensino Fundamental I, Ensino fundamental II e Ensino Médio.

Ainda em [3], "Os PCN para o Ensino Médio têm por objetivo auxiliar os educadores na reflexão sobre a prática diária em sala de aula e servir de apoio ao planejamento de aulas e ao desenvolvimento do currículo da escola. Os documentos estão assim apresentados: **Bases Legais; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias** (Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Educação Física, Arte e Informática); **Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias** (Biologia, Física, Química, Matemática); **Ciências Humanas e suas Tecnologias** (História, Geografia, Sociologia, Antropologia, Filosofia e Política)".

Em nosso país, os PCN destacam, dentre outras coisas, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que os professores devem ter ao procurar desenvolvê-lo. De acordo ainda com [3], "As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio..."

Em consonância com uma tendência mundial, na reforma brasileira do ensino, os conceitos centrais e peculiares (assim como as relações conceituais específicas e complexas) que definem o perfil de cada disciplina se mobilizam a partir da necessidade de fazer convergir a aprendizagem para a aquisição e o desenvolvimento de competências e habilidades por parte do aluno, descentrando o processo do conteúdo meramente acadêmico. Os PC-NEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) incorporam o conceito de competência formulado por [10]: "Competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações etc.) para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações".

Nas competências das áreas 1 e 7, da disciplina de Matemática, ficam explicitadas as habilidades que envolvem raciocínios combinatórios, como descrito a seguir:

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

$\mathbf{H_1}$ – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

$\mathbf{H_2}$ – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

$\mathbf{H_3}$ – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

$\mathbf{H_4}$ – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

$\mathbf{H_5}$ – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos..

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

$\mathbf{H_{27}}$ – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

$\mathbf{H_{28}}$ – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

$\mathbf{H_{29}}$ – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

$\mathbf{H_{30}}$ – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Como pode-se notar, o estudo da Análise Combinatória, ocupa importante papel na preparação do estudante brasileiro, segundo o PCN.

2.4 Uma forma de ensinar Análise Combinatória

A partir de agora, com base em leitura, interpretação e análise de textos, enfatizando a tradução entre as linguagens materna e matemática, será apresentada uma maneira de se tratar Análise Combinatória, sem a utilização de fórmulas matemáticas.

2.4.1 Ordenados ou Não Ordenados?

É fundamental, para o bom entendimento da Análise Combinatória, a compreensão da diferença entre grupos ordenados e grupos não ordenados. Comecemos com um exemplo simples.

Exemplo 1: Ana (A), Bia (B) e Caio (C) são colegas de classe.

Situação A: Tendo participado de um concurso de redação, conquistaram os três primeiros lugares. Sabe-se que o 1º classificado viajará para Paris, o 2º, para Buenos Aires e o 3º, para o Rio de Janeiro e que não houve empates. Descrevendo os resultados sempre na ordem 1º, 2º e 3º classificados, tem-se as sequências **(Ana, Bia, Caio), (Ana, Caio, Bia), (Bia, Ana, Caio), (Bia, Caio, Ana), (Caio, Ana, Bia), (Caio, Bia, Ana)** viajando para Paris, Buenos Aires e Rio de Janeiro, respectivamente.

Nota-se que, nessa situação, cada forma de premiação é diferente da outra, pois implica na mudança do prêmio recebido. Observa-se que a diferença entre cada uma dessas formas é, somente, quanto a posição ocupada por cada aluno.

Percebe-se ainda que, apesar de trabalhar-se apenas com três pessoas, pode-se ter seis maneiras diferentes de fazer a distribuição dos três prêmios.

Situação B: Com o intuito de incentivar a prática da escrita, a escola de Ana, Bia e Caio convidou-os a formar uma comissão para divulgação das aulas de Redação. De quantas formas os três alunos puderam formar essa comissão?

Enquanto na **situação A** seis respostas foram encontradas, na **situação B** temos apenas uma resposta, pois com três pessoas forma-se apenas uma comissão de três membros. Observa-se que, ao contrário do que ocorreu na situação A, na situação B, trocando-se a ordem dos membros da comissão, não se cria uma comissão diferente.

Exemplo 2: Ana (A), Bia (B), Caio (C) e Dudu (D) são colegas de classe.

Situação A: Numa Olimpíada de Matemática, o 1º e o 2º classificados ganhariam, respectivamente, um tablet e um celular. Nesse caso, teríamos como possíveis resultados de premiação: **(Ana, Bia), (Ana, Caio), (Ana, Dudu), (Bia, Ana), (Bia, Caio),**

(Bia, Dudu), (Caio, Ana), (Caio, Bia), (Caio, Dudu), (Dudu, Ana), (Dudu, Bia), (Dudu, Caio), num total de 12 resultados possíveis.

Novamente, as duplas **(Ana, Bia)** e **(Bia, Ana)**, por exemplo, são diferentes, pois, no primeiro caso, Ana ganharia um tablet, enquanto, no 2º caso, Ana ganharia um celular. Ao formarmos essas duplas, levamos em consideração a ordem de cada elemento da dupla.

Situação B: Uma dupla de alunos foi escolhida para representar a escola num curso de robótica. Nesse caso, teríamos como possíveis duplas: **{Ana, Bia}, {Ana, Caio}, {Ana, Dudu}, {Bia, Caio}, {Bia, Dudu}, {Caio, Dudu}**, num total de 6 duplas de representantes.

Nessa situação, as duplas **{Ana, Bia} e {Bia, Ana}** representam a mesma equipe, isto é, a formação das duplas independe da ordem entre os estudantes.

O que devemos destacar nos exemplos e situações observados?

– **No exemplo 1**, 3 alunos foram oferecidos e os 3 foram utilizados na formação dos grupos.

– **No exemplo 2**, 4 alunos foram oferecidos e apenas 2 foram utilizados na formação dos grupos.

– **Nas situações A**, os agrupamentos formados eram ordenados.

– **Nas situações B**, os agrupamentos formados não eram ordenados.

2.4.2 Fatorial e seu significado de Ordenação

Imaginemos uma sala com n cadeiras numeradas onde serão distribuídas n pessoas, de forma que nunca sobre nem falte cadeira. Isto é, em n cadeiras sentar-se-ão n pessoas $(P_1, P_2, ..., P_n)$. Nosso objetivo é calcular de quantas formas podemos organizar essa sala, à medida que n for variando dentro do conjunto dos números naturais (1 cadeira/1 pessoa, 2 cadeiras/2 pessoas,..., n cadeiras/n pessoas).

i) Quando $\mathbf{n = 1}$, há apenas **1** forma de dispor uma pessoa em uma cadeira.

ii) Quando $\mathbf{n = 2}$, há apenas **2** formas distintas de dispor duas pessoas em duas cadeiras.

Observe: Para ocupar a 1ª cadeira, posso fazer duas escolhas (P1 ou P2). Para ocupar a 2ª cadeira, resta-me uma escolha (Se P1 estiver na 1ª cadeira, resta-me P2 para a segunda; se P2 estiver na 1ª cadeira, resta-me P1 para a segunda).

Cadeira 1	**Cadeira 2**
P1	P2
P2	P1

Tabela 9: Exemplo sobre Fatorial

Este raciocínio também pode ser esquematizado, de forma mais simples, da seguinte maneira (onde cada "tracinho", da esquerda para a direita, corresponde a 1ª e 2ª cadeiras, respectivamente): nº de escolhas $\underline{\mathbf{2}}$ **x** $\underline{\mathbf{1}}$ = **2**

iii) Quando **n** = **3**, temos que há apenas 6 formas distintas de dispor três pessoas em três cadeiras. Observe: Para ocupar a 1ª cadeira, posso fazer três escolhas (P1, P2 ou P3). Para ocupar a 2ª cadeira, restam-me duas escolhas (se P1 já estiver sentado, sobram P2 ou P3; se P2 estiver sentado, sobram P1 ou P3; se P3 já estiver sentado, sobram P1 ou P2) . Para a 3ª cadeira, após as escolhas feitas para as outras duas, resta apenas uma escolha (quem tiver sobrado − P1, P2 ou P3 − após a ocupação das duas cadeiras anteriores).

Cadeira 1	**Cadeira 2**	**Cadeira 3**
P1	P2	P3
P1	P3	P2
P2	P1	P3
P2	P3	P1
P3	P1	P2
P3	P2	P1

Tabela 10: Exemplo 2 sobre Fatorial

Utilizando "tracinhos": nº de escolhas $\underline{\mathbf{3}}$ **x** $\underline{\mathbf{2}}$ **x** $\underline{\mathbf{1}}$ = **6.**

iv) Quando **n** = **4**, temos apenas 24 formas distintas de dispor 4 pessoas em 4 cadeiras.

Observe: Para preencher a 1ª cadeira, posso fazer 4 escolhas. Para preencher a 2ª cadeira, sobram-me 3 escolhas. Cada uma das 4 escolhas feitas, combina-se com cada uma das outras três escolhas e, assim, obtemos 12 pares ordenados. Para preencher a 3ª cadera, restam duas pessoas para serem escolhidas. Cada um dos 12 pares ordenados obtidos no preenchimento das cadeiras 1 e 2, será combinado com cada uma das duas pessoas que podem preencher a cadeira 3, formando, assim, 24 ternos ordenados. Para preencher a 4ª cadeira, sobra apenas uma pessoa, que será combinada com cada um dos 24 ternos ordenados já obtidos. Dessa forma, verificamos que há apenas 24 maneiras distintas de 4 pessoas sentarem-se em 4 cadeiras.

Cadeira 1	**Cadeira 2**	**Cadeira 3**	**(Cadeira 4)**
P1	P2	P3	P4
P1	P2	P4	P3
P1	P3	P2	P4
P1	P3	P4	P2
P1	P4	P2	P3
P1	P4	P3	P2
P2	P2	P3	P4
P2	P2	P3	P3
P2	P3	P4	P4
P2	P3	P1	P1
P2	P4	P1	P3
P2	P4	P3	P1
P3	P1	P2	P4
P3	P1	P4	P2
P3	P2	P1	P4
P3	P2	P4	P1
P3	P4	P1	P2
P3	P4	P2	P1
P4	P1	P2	P3
P4	P1	P3	P2
P4	P2	P1	P3
P4	P2	P3	P1
P4	P3	P1	P2
P4	P3	P2	P1

Tabela 11: Exemplo 3 sobre Fatorial

Usando "tracinhos": nº de escolhas **$\underline{4}$ x $\underline{3}$ x $\underline{2}$ x $\underline{1}$ = 24.**

A essa altura, nota-se que a formação de grupos ordenados com **n** elementos pode ser feita de forma sistemática e segura, desde que tenhamos método e atenção. Nota-se também que, à medida que o valor de **n** vai aumentando, o tempo gasto no cálculo da quantidade desses grupos, por meio da formação de todos eles, torna-se muito grande.

Ao mesmo tempo, observa-se que, se nossa intenção for apenas calcular a quantidade desses grupos, há como fazer esse cálculo de forma mais rápida.

Voltando aos exemplos, considerando os "tracinhos" como as cadeiras e ainda:

v) **n = 5** (5 cadeiras e 5 pessoas), temos: número de escolhas **$\underline{5}$ x $\underline{4}$ x $\underline{3}$ x $\underline{2}$ x $\underline{1}$ = 120.**

vi) **n = 6** (6 cadeiras e 6 pessoas), temos: número de escolhas **$\underline{6}$ x $\underline{5}$ x $\underline{4}$ x $\underline{3}$ x $\underline{2}$ x $\underline{1}$ = 720.**

vii) $\mathbf{n = 7}$ (7 cadeiras e 7 pessoas), temos: número de escolhas $\underline{\mathbf{7}}$ x $\underline{\mathbf{6}}$ x $\underline{\mathbf{5}}$ x $\underline{\mathbf{4}}$ x $\underline{\mathbf{3}}$ x $\underline{\mathbf{2}}$ x $\underline{\mathbf{1}}$ $= \mathbf{5040}$**.**

.

.

.

Quando $\mathbf{n = 50}$ (50 cadeiras e 50 pessoas), temos: $\underline{\mathbf{50}}$ x $\underline{\mathbf{49}}$ x $\underline{\mathbf{48}}$ x ... x $\underline{\mathbf{4}}$ x $\underline{\mathbf{3}}$ x $\underline{\mathbf{2}}$ x $\underline{\mathbf{1}}$ = **?**

(valor grande demais para ser calculado).

A essa altura, a título de simplificarmos nossos cálculos, vamos definir uma simbologia para multiplicações do tipo das que têm aparecido em nossos exemplos, o **FATORIAL (!).**

$$n! = n.(n-1).(n-2).....4.3.2.1$$

Para um valor natural qualquer de **n**, organizar, de forma ordenada, **n** pessoas em **n** cadeiras, nos dá, como resultado da quantidade de grupos ordenados que podem ser formados, **n!**. (Compreender este conceito, de forma empírica, é muito mais natural para o aluno do que a demonstração por indução finita.)

Ao fim desta seção, **define-se** que quando estamos organizando **n** elementos em **n** posições, fazemos **permutações de n elementos** ($\mathbf{P_n}$).

Gostaríamos também de destacar que a igualdade "$\mathbf{P_n = n!}$" não precisa ser usada na solução de problemas. Devemos ter em mente, para tornar consistente o desenvolvimento do nosso conteúdo, que "**n! simboliza a quantidade de todas as ordenações possíveis de n elementos em n posições"**. Essa frase será repetida algumas vezes ao longo do nosso desenvolvimento.

E ainda enquanto *"fazemos escolhas para formarmos um agrupamento"*, utilizamos a operação de *multiplicação* entre as quantidades de opções de escolhas diponíveis. Essa frase também será repetida algumas vezes ao longo do nosso desenvolvimento.

2.4.3 Escolhendo elementos para grupos ordenados (Sequências)

E se desejarmos verificar de quantas formas distintas 4 pessoas [P1, P2, P3 e P4] podem sentar-se em duas cadeiras numeradas?

Retomemos a tabela utilizada na seção anterior, onde distribuímos 4 pessoas em 4 cadeiras numeradas.

Cadeira 1	**Cadeira 2**	**Cadeira 3**	**Cadeira 4**
P1	P2	P3	P4
P1	P2	P4	P3
P1	P3	P2	P4
P1	P3	P4	P2
P1	P4	P2	P3
P1	P4	P3	P2
P2	P1	P3	P4
P2	P1	P4	P3
P2	P3	P4	P1
P2	P3	P1	P4
P2	P4	P1	P3
P2	P4	P3	P1
P3	P1	P2	P4
P3	P1	P4	P2
P3	P2	P1	P4
P3	P2	P4	P1
P3	P4	P1	P2
P3	P4	P2	P1
P4	P1	P2	P3
P4	P1	P3	P2
P4	P2	P1	P3
P4	P2	P3	P1
P4	P3	P1	P2
P4	P3	P2	P1

Tabela 12: Escolhendo elementos para grupos ordenados

Se excluirmos as duas últimas colunas, relativas às cadeiras 3 e 4, obtemos:

Cadeira 1	**Cadeira 2**
P1	P2
P1	P2
P1	P3
P1	P3
P1	P4
P1	P4
P2	P1
P2	P1
P2	P3
P2	P3
P2	P4
P2	P4
P3	P1
P3	P1
P3	P2
P3	P2
P3	P4
P3	P4
P4	P1
P4	P1
P4	P2
P4	P2
P4	P3
P4	P3

Tabela 13: Escolhendo elementos para grupos ordenados 2

Observa-se que cada um dos pares ordenados aparece duas vezes. Excluindo a desnecessária duplicidade, obtém-se:

Cadeira 1	Cadeira 2
P1	P2
P1	P3
P1	P4
P2	P1
P2	P3
P2	P4
P3	P1
P3	P2
P3	P4
P4	P1
P4	P2
P4	P3

Tabela 14: Escolhendo elementos para grupos ordenados 3

Dessa forma, temos 12 maneiras distintas de organizar 4 pessoas em duas cadeiras numeradas.

Lembramos que o exemplo (4 pessoas/4 cadeiras) também pode ser resolvido utilizando $\mathbf{4! = 4.3.2.1 = 24}$ (há 24 maneiras diferentes de organizar 4 pessoas em 4 cadeiras, isto é, formamos 24 quaternos ordenados). Se desejarmos calcular, nesse esquema, quantos pares ordenados há, considerando as duas primeiras cadeiras, basta fazermos $\mathbf{4.3 = 12}$ (4 escolhas para a 1ª cadeira, 3 escolhas para a 2ª cadeira, sendo que cada uma das 4 pessoas da 1ª, é combinada com cada uma das 3 pessoas da 2ª). Observa-se ainda que:

$$\mathbf{12 = 4.3 = \frac{4.3.2.1}{2.1} = \frac{4!}{2!}}$$

Se fossem 5 pessoas em 2 cadeiras, teríamos 5 escolhas para a 1ª cadeira, 4 escolhas para a 2ª, num total de $5.4 = 20$ formas diferentes de fazer essa arrumação. Ou ainda:

$$\mathbf{20 = 5.4 = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{5!}{3!}}$$

Se fossem 6 pessoas em 4 cadeiras, teríamos 6 escolhas para a 1ª cadeira, 5 escolhas para a 2ª cadeira, 4 escolhas para a 3ª e 3 escolhas para a 2ª cadeira, num total de $\mathbf{6.5.4.3 = 360}$ formas diferentes de fazer essa arrumação. Ou ainda:

$$\mathbf{360 = 6.5.4.3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{2.1} = \frac{6!}{2!}}$$

Se fossem 10 pessoas em 6 cadeiras, teríamos um total de:

$$\mathbf{10.9.8.7.6.5} = \frac{\mathbf{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}}{\mathbf{4.3.2.1}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{4!}} \quad \mathbf{(I)}$$

Após esses exemplos um pouco repetitivos, pode-se tirar algumas conclusões. Fixemo-nos no último exemplo (10 pessoas/6 cadeiras). Entender a expressão **10.9.8.7.6.5** como aquela que vai nos dar a resposta correta para o problema é natural, pois temos "10 escolhas para a 1ª cadeira, 9 escolhas para a 2ª cadeira, 8 escolhas para a 3ª cadeira, 7 escolhas para a 4ª cadeira, 6 escolhas para a 5ª cadeira e 5 escolhas para a 4ª cadeira, com cada escolha para cada cadeira, sendo combinada com cada escolha para a próxima cadeira e assim sucessivamente até a última cadeira (e é por esse motivo que a operação utilizada é a de multiplicação)".

Precisamos agora entender a expressão $\frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{4!}}$. É claro que, se desenvolvermos e simplificarmos a expressão, chegamos ao resultado, como feito em (I). Mas nosso objetivo é entender o "português" escondido por detrás dessa expressão.

Se estivéssemos ordenando 10 pessoas em 10 cadeiras, teríamos um total de:

10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 $=$ **10!** formas diferentes de grupos ordenados.

Porém, desejamos ocupar apenas 6 cadeiras, ficando 4 cadeiras desocupadas. Isto nos obriga a "excluir", da organização feita nas 10 cadeiras, as escolhas feitas para as 4 cadeiras que ficarão vazias: **10.9.8.7.6.5**(**.4.3.2.1**).

Considerando que: ordenar 4 pessoas em 4 cadeiras pode ser representado como 4! e que quando estamos no processo de organização, fazendo nossas escolhas, utilizamos a operação de **multiplicação** (já que cada escolha feita numa etapa do processo será combinada com todas as escolhas que serão feitas posteriormente), pode-se entender que, após ordenarmos 10 pessoas em 10 cadeiras, se quisermos excluir 4 cadeiras, precisaremos desconsiderar as ordenações feitas nessas 4 cadeiras. Como no processo de ordenação, utilizamos a operação de **multiplicação**, no proceso de exclusão dessa ordenação, deveremos utilizar a operação inversa, **divisão**. Isto é, para ordenarmos 10 pessoas em 10 cadeiras, utilizamos **10!**. Para ordenarmos 10 pessoas em 6 cadeiras, **excluímos** (por meio de uma operação de divisão), a ordenação feita nas 4 cadeiras que ficarão vazias **4!**, obtendo, então, como solução do problema $\frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{4!}}$.

Generalizando, se desejarmos ordenar **n** pessoas em **m** cadeiras, com $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ (número de cadeiras, menor que o número de pessoas), podemos raciocinar com: **n!** (ordenação de **n** pessoas em **n** cadeiras), fazendo a exclusão da ordenação feita nas cadeiras que permanecerão vazias, isto é, dividindo por $(\mathbf{n} - \mathbf{m})!$.

Dessa forma, obtemos como solução para o problema:

$$\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-m)!}}$$

Ao terminarmos essa seção, vamos definir que, quando estamos ordenando **n** elementos em **m** posições (**m** < **n**) estamos fazendo arranjos de **n** elementos em **m** posições, ou ainda, estamos fazendo arranjos de **n** elementos tomados **m** a **m** ($\mathbf{A_{n,m}}$ ou $\mathbf{A_n^m}$). Daí vem que:

$$\mathbf{A_{n,m}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-m)!}}$$

Simplificando ainda mais o raciocínio, utilizam-se os m tracinhos e analisa-se a quantidade de escolhas que podem ser feitas em cada um:

$$\underline{\mathbf{n}}.(\underline{\mathbf{n-1}}).(\underline{\mathbf{n-2}}).....(\underline{\mathbf{n-m+1}})$$

m tracinhos, n elementos, m < n

2.4.4 Escolhendo elementos para grupos não ordenados (Conjuntos)

Nas seções 3.4.2 e 3.4.3, trabalhamos com agrupamentos ordenados. Na 1ª, oferecemos **n** elementos e utilizamos **n** elementos na formação do agrupamento, obtendo **n!** sequências. Na 2ª, oferecemos **n** elementos e utilizamos **m** elementos (**m** < **n**) na formação do agrupamento, obtendo $\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-m)!}}$ sequências.

Nesta seção, formaremos agrupamentos não ordenados. Como vimos no **exemplo 1 – situação 2**, se oferecemos **n** elementos e queremos formar conjuntos de **n** elementos, obtemos apenas um agrupamento não ordenado (conjunto) nessas condições.

Quantos agrupamentos não ordenados de **m** elementos obteríamos, caso fossem oferecidos **n** elementos, com **m** < **n**?

Por exemplo, dispondo de 6 pessoas [P1, P2, P3, P4, P5, P6], quantas comissões distintas de 4 pessoas podem ser formadas?

Descrevendo todas as comissões, temos: {P1, P2, P3, P4}, {P1, P2, P3, P5}, {P1, P2, P3, P6}, {P1, P2, P4, P5}, {P1, P2, P4, P6}, {P1, P2, P5, P6}, {P1, P3, P4, P5}, {P1, P3, P4, P6}, {P1, P3, P5, P6}, {P1, P4, P5, P6}, {P2, P3, P4, P5}, {P2, P3, P4, P6}, {P2, P3, P5, P6}, {P2, P4, P5, P6}, {P3, P4, P5, P6}, num total de 15 comissões.

Vamos tentar, a partir das "traduções" entre as linguagens materna e matemática já feitas, chegar ao valor "15".

Se tivéssemos que ordenar 6 pessoas em 6 posições, obteríamos **6!** $=$ **720 sequências**.

Caso o objetivo fosse ordenar 6 pessoas em 4 posições, obteríamos $\mathbf{\frac{6!}{2!}} =$ **360 sequências.**

Importante! Oferecidas 6 pessoas, formam-se **360 sequências** de quatro pessoas e **15 conjuntos** também de quatro pessoas. As 6 pessoas oferecidas em ambos os casos são as mesmas e a quantidade de pessoas nos dois agrupamentos também é a mesma. Por que, então, uma diferença tão grande entre as quantidades dos dois agrupamentos? Tomemos, como exemplo, o conjunto $\{P1,P2, P3, P4\}$. Com seus elementos poderiam ser formadas **4!** $=$ **24 sequências distintas.** Mas, para cada um dos 15 conjuntos obtidos, vale este raciocínio. Ou seja, é possível obter, a partir dos 15 conjuntos, **15.24** $=$ **360 sequências**. Daí, destacamos uma das formas de escrever o número **15**:

$$15 = \frac{360}{24} = \frac{6!}{2!.4!}$$

Onde a tradução de "divisão por 4!" é "exclusão da ordenação entre 4 termos da sequência".

Esclarecendo mais com outro exemplo, quantas comissões de 5 pessoas posso formar com 11 pessoas? Ordenando as 11 pessoas, formamos **11!** sequências; considerando apenas as sequências de 5 pessoas, obtemos $\mathbf{11.10.9.8.7} = \mathbf{\frac{11!}{6!}}$ sequências possíveis; destas, tomando as comissões de 5 pessoas, isto é, desconsiderando a ordenação entre os termos de cada uma das $\frac{11!}{6!}$ sequências obtidas, teremos $\mathbf{\frac{11!}{6!.5!}}$.

Generalizando, se desejamos calcular a quantidade de agrupamentos não ordenados de **m elementos** que podem ser obtidos a partir de **um universo de n elementos dados** $(\mathbf{m} < \mathbf{n})$, podemos trabalhar com a expressão $\mathbf{\frac{n!}{(n-m)!m!}}$. Estes agrupamentos não ordenados são chamados **Combinações de n elementos tomados <u>m</u> a <u>m</u>**. Podemos representar a fórmula matemática de combinação como:

$$\mathbf{C_{n,m} = C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}}$$

E com "tracinhos"? Pode-se formar <u>11</u> x <u>10</u> x <u>9</u> x <u>8</u> x <u>7</u> sequências de 5 termos. Para desconsiderarmos a ordem entre os 5 elementos e, consequentemente, obtermos conjuntos de 5 elementos, fazemos a divisão por 5!, obtendo $\mathbf{\frac{11.10.9.8.7}{5!}}$.

Mais uma vez, destacamos que usar a fórmula de combinação, ao longo da resolução de problemas não é a nossa intenção. A utilização dos "tracinhos" e seus significados é o nosso objetivo.

2.5 Problemas que servem de base para o ensino-aprendizado de análise combinatória e um método de resolução sem fórmulas.

Até aqui destacou-se a relevância do estudo da Análise Combinatória no ensino básico e a importância na "tradução" entre as linguagens materna e matemática. Vejamos agora um método de resolução de problemas, baseado na leitura, interpretação, análise, identificação de "riscos", escolha de uma estratégia, tradução da língua materna para a linguagem matemática e resolução matemática do problema, sem a utilização de fórmulas.

<u>Exercício 1</u>: **Quantos números naturais de três algarismos existem?**

i) Interpretação e análise do problema: Teremos que escolher três algarismos (não necessariamente distintos), dentre os algarismos **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** (num total de **10 opções**) para formarmos um número. Os números **123** e **312** são duas das respostas a serem contadas no nosso problema. Apesar de formados pelos mesmos algarismos, os números **123** e **312** são agrupamentos (formados por algarismos em sequência) diferentes. Não podemos esquecer também que o número **098** é considerado um número de dois algarismos. Logo, para o meu algarismo das centenas, não posso incluir o **zero** como opção de escolha.

ii) Estratégia de resolução: Cada escolha feita para o algarismo das centenas será relacionada com cada escolha feita para o algarismo das dezenas. Cada par ordenado obtido, será relacionado com cada escolha feita para o algarismo das unidades. Essas escolhas são ordenadas: na primeira, não posso escolher o zero, mas para as outras escolhas, não há restrições.

	Algarismo das centenas	Algarismo das dezenas	Algarismo das unidades
Número de opções	9	10	10

iii) Tradução e resolução: 9.10.10 = 900

<u>Resposta</u>: Existem 900 números de três algarismos.

<u>Exercício 2</u>: **Quantos números naturais ímpares, de 4 algarismos distintos podem ser formados?**

i) Interpretação e análise do problema: Já vimos que números são agrupamentos ordenados e que cada escolha feita relaciona-se com a escolha subsequente. Neste exercício, deveremos fazer 4 escolhas:

– Como os números a serem contados são ímpares, no algarismo das unidades só poderão ser utilizados os algarismos 1, 3, 5, 7, 9, num total de **5 opções**;

– O algarismo das unidades de milhar não pode ser zero, como visto no exercício anterior. Não devemos esquecer que os algarismos devem ser **distintos**. Por isso, além do zero, devemos excluir das nossas opções, o algarismo ímpar utilizado nas "unidades". Dessa forma, restam, das 10 opções de algarismos que temos, apenas 8 para serem usados nas unidades de milhar. (Nesse momento, o aluno sente muita dúvida. É importante lembrar sempre que analisamos a quantidade de escolhas, mas fazemos as escolhas individualmente. Conseguimos o total, ao multiplicarmos todas as quantidades de opções, pois, novamente, "cada escolha feita, relaciona-se com a escolha posterior e assim sucessivamente".)

– Para o algarismo das centenas não há restrição, desde que ele seja diferente dos algarismos escolhidos nas unidades de milhar e unidades simples. Dessa forma, restam-me, das 10 opções disponíveis de escolha, apenas 8;

– Para o algarismo das dezenas também não há restrição. Ele só precisa ser diferente dos outros três algarismos escolhidos anteriormente. Dessa forma, restam-me 7 opções de escolha.

ii) Estratégia de resolução:

	Alg. (unidades de milhar)	Alg. (centenas)	Alg. (dezenas)	Alg. (unidades)
Nº de opções	8	8	7	5

iii) Tradução e resolução: $8.8.7.5 = 2240$

Resposta: Podem ser formados 2240 números ímpares de 4 algarismos ditintos.

Exercício 3: **Quantos números pares, de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5?**

i) Interpretação e análise do problema: novamente vamos contar números, que são agrupamentos feitos após escolhas ordenadas; os algarismos a serem utilizados são apenas 5; faremos 3 escolhas e os números formados devem ser números pares de algarismos distintos.

– O algarismo das unidades deve ser par. Logo, temos duas opções de escolha **2** ou **4**;

– O algarismo das centenas não possui restrição (pois o **zero** não pertence ao nosso universo de escolhas) desde que ele seja distinto do algarismo já escolhido nas unidades. Logo, temos 4 opções para fazer essa escolha;

– O algarismo das dezenas não possui restrição, desde que ele seja diferente dos dois algarismos já escolhidos anteriormente para as unidades e centenas. Logo temos 3 maneiras de fazer essa escolha.

ii) Estratégia de resolução:

	Algarismo das centenas	Algarismo das dezenas	Algarismo das unidades
Número de opções	4	3	2

iii) Tradução e resolução: $4.3.2 = 24$

Resposta: Podem ser formados 24 números pares, de três algarismos distintos, utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Exercício 4: **Quantos números pares, de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5?**

i) Interpretação e análise do problema: a interpretação e análise deste exercício é similar à do exercício anterior. Mas surge um algarismo novo, o **zero**, que, ao mesmo tempo que pode ser utilizado nas unidades, não pode ser usado nas centenas. Pode parecer exagero fazer esse destaque, já que no exercício 3, ao formarmos números ímpares, também não podíamos usar o **zero** como o 1º algarismo. A diferença é que ele também não podia ser usado na última posição (unidades) e, portanto, ele estava excluído das duas possibilidades de escolhas. Afinal, qual é o problema? Observe:

– O algarismo das unidades deve ser par. Portanto, temos três opções de escolha **0, 2, ou 4**;

– O algarismo das centenas não pode ser o **zero** e deve ser distinto do algarismo já utilizado nas unidades. Se nas unidades foi utilizado o **zero**, sobram **5** opções de escolha (1, 2, 3, 4 ou 5). Porém, se nas unidades foi utilizado **2** ou **4**, sobram **4** opções de escolha (1, 3, 5, 2) ou (1, 3, 5, 4). Com isso, na hora de montarmos a nossa estratégia de resolução (quadro) não haverá valores únicos nas opções das centenas, caso não separarmos o nosso estudo em dois casos: 1º) **zero** nas unidades e 2º) **2** ou **4** nas unidades.

1º caso: zero nas unidades.

– opções para as unidades: **1** (o zero);

– opções para as dezenas: **5** (1, 2, 3, 4 ou 5);

– opções para as centenas: **4** (qualquer dos algarismos, com exceção do zero, já usado nas unidades, e do algarismo usado nas centenas).

2º caso: 2 ou **4** nas unidades.

– opções para as unidades: **duas (2** ou **4**);

– opções para as centenas: **quatro (1, 3, 5,** 2 ou 4)

– opções para as dezenas: **quatro** (dos seis algarismos oferecidos no exercício, qualquer um, com exceção dos dois utilizados nas unidades e centenas.

ii) Estratégia de resolução: montaremos dois quadros representativos de cada caso.

1º caso: zero nas unidades

	Alg. das centenas	Alg. das dezenas	Alg. das unidades ("zero")
Número de opções	5	4	1

2º caso: 2 ou **4** nas unidades

	Alg. das centenas	Alg. das dezenas	Alg. das unidades ("2 ou 4")
Número de opções	4	4	2

iii) Tradução e resolução: $(\mathbf{5.4.1}) + (\mathbf{4.4.2}) = \mathbf{20} + \mathbf{32} = \mathbf{52}$

Resposta: Podem ser formados 52 números pares de três algarismos distintos, utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Observações:

Neste ponto do aprendizado, muitas dúvidas surgem entre os alunos. O surgimento da **adição**, inacreditavelmente, os deixa muito confusos. E não adianta tentarmos minimizar este problema como se ele fosse algo óbvio. Temos que explicar, incansavelmente, até que ele compreenda, sob pena de, no próximo exercício que envolva o mesmo conceito, a dúvida ressurgir.

É importante que o aluno compreenda que a operação de multiplicação está vinculada, na Análise Combinatória, ao processo de escolha, durante a formação do(s) agrupamento(s) que nos interessa(m). Até o **exercício 3**, só trabalhamos com um tipo de agrupamento, ou seja, todas as sequências que buscamos tinham o mesmo padrão de comportamento. Por este motivo, conseguimos esquematizar a resolução do exercício em apenas uma tabela. Já **no exercício 4**, há dois padrões de grupo que nos satisfazem. Enquanto estamos fazendo as escolhas de cada grupo, estamos multiplicando. Assim que terminamos de formá-los, adicionamos os resultados possíveis. Costumo, após inúmeras explicações, enunciar, para os alunos, o que chamo de "teste da soma" (uma verificação prática de qual operação utilizar quando surge esta dúvida). Vamos usar o mesmo exercício 5, já na fase iv. Suponhamos que o exercício já está compreendido até esta fase e que o conceito de multiplicação já foi repetidamente vinculado à etapa de: **"escolhas, enquanto estamos formando a sequência"**. Se surgir a pergunta **"por que somo e não multiplico?"**, podemos levar o estudante ao raciocínio **"se multiplicássemos, ainda estaríamos fazendo escolhas, ainda estaríamos formando nosso agrupamento ordenado e, portanto, com 6 fatores na nossa multiplicação, estaríamos formando um agrupamento de 6 termos, obtidos após 6 escolhas."**

(**5.4.1**)(**4.4.2**)

É muito importante que o estudante entenda que essa percepção de "ameaças em potencial" para o sucesso de uma resolução de problemas de Análise Combinatória só vem sendo apurada e refinada com a prática. Essa prática não pode ser inibida com os erros. Erros devem ser considerados momentos importantes do aprendizado, onde com liberdade o estudante deve conjecturar, testar, errar, refazer as conjecturas, tornando todo este processo algo de fundamental importância para o real aprendizado. Inclusive, é válida a comparação desse processo com os jogos de vídeo game, tão populares entre os jovens. Da mesma forma que eles se sentem desafiados a vencer uma fase difícil de seus jogos preferidos, cada exercício novo de Análise Combinatória deve ser encarado como uma nova fase desafiadora de um jogo que, uma vez vencida, mais bônus trará na pontuação do jogador.

Abordaremos, a partir de agora, exercícios sobre **anagramas**, explorando vários conceitos importantes sobre ordenação e suas resoluções que, uma vez bem entendidos, fornecem uma liberdade grande ao estudante para a montagem de estratégias diversas a serem aplicadas em problemas de complexidades variadas.

<u>Exercício 5</u>: **Com as letras da palavra ROMANCE, quantos anagramas podemos formar, respeitando às condições descritas em cada item abaixo?**

i) Interpretação e análise do problema:

Neste exercício, em qualquer dos itens, temos uma palavra de 7 letras distintas e desejamos contar quantos anagramas (sequências de 7 letras) podem ser formados. O que diferencia cada item do outro são as restrições impostas na formação do anagrama. Portanto, faremos, para tornar prática a nossa resolução, as etapas ii) e iii) juntas, em cada item da questão.

a) Quantos anagramas podemos formar?

	1ª Letra	2ª Let.	3ª Let.	4ª Let.	5ª Let.	6ª Let.	7ª Let.
Número de opções	7	6	5	4	3	2	1

Resposta: A palavra ROMANCE possui **7.6.5.4.3.2.1** = **5040** anagramas distintos. (lembrando que, a partir da 1ª escolha, onde temos 7 opções de letras, a cada escolha subsequente, temos que excluir do nosso universo de opções, as letras escolhidas anteriormente. É sempre bom lembrar outra vez que a operação de multiplicação ocorre, pois cada letra escolhida será relacionada com a letra posterior).

b) Quantos anagramas começam por vogal?

	1ª Let.[vog.(a,e,o)]	2ª Let.	3ª Let.	4ª Let.	5ª Let.	6ª Let.	7ª Let.
Número de opções	3	6	5	4	3	2	1

Resposta: A palavra ROMANCE possui **3.6.5.4.3.2.1** = **2160** anagramas distintos, que começam por vogal.

c) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

	1ª L. (vogal)	2ª L.	3ª L.	4ª L.	5ª L.	6ª L.	7ª L. [cons.(r,m,n,c)]
Número de opções	3	5	4	3	2	1	4

Neste caso, temos que satisfazer a duas condições: a 1ª letra deve ser vogal (3 opções) e a 7ª letra deve ser consoante (4 opções). A 2ª letra pode ser qualquer uma das 7, desde que diferente das duas já utilizadas nas 1ª e 7ª posições (5 opções) e para as escolhas restantes (3ª, 4ª, 5ª e 6ª), usamos raciocínio análogo ao usado para a 2ª letra.

Resposta: A palavra ROMANCE possui **3.5.4.3.2.1.4** = **1440** anagramas distintos, que começam por vogal e terminam por consoante.

d) Quantos anagramas apresentam a sílaba MAN?

Neste caso, teremos que organizar os seguintes elementos: R, O, MAN, C, E, num total de 5 elementos. É como se as letras M, A, N fossem "amarradas", nessa ordem, num único bloco, tornando-se um elemento único. Dessa forma, o esquema de resolução é:

	1ª Letra	2ª Letra	3ª Letra	4ª Letra	5ª Letra
Número de opções	5	4	3	2	1

Resposta: Podemos formar **5.4.3.2.1** = **120** anagramas que apresentam a sílaba MAN.

e) Quantos anagramas apresentam as vogais juntas e em ordem alfabética?

Agora, à semelhança do item anterior, desejamos que apareçam, nos anagramas que serão contados, as letras A, E, O juntas e nessa ordem, como se fossem uma sílaba. Logo, temos que ordenar os elementos R, M, N, C, AEO, num total de 5 elementos. Já sabemos que a resposta a essa pergunta é 120 anagramas com as vogais juntas e em ordem alfabética.

f) Quantos anagramas apresentam as vogais juntas?

O que muda neste item, em relação ao item anterior é que as vogais devem aparecer juntas, mas em qualquer ordem. De novo, temos que ordenar 5 elementos e já sabemos que essa ordenação totaliza 120 anagramas. Porém devemos relacionar cada um desses 120 anagramas, com a ordenação das vogais A, E, O, entre si. Essa ordenação é num total de $\mathbf{3.2.1 = 6}$ sequências. Relacionando cada um dos 120 anagramas, com cada uma das 6 ordenações das vogais, obtemos $\mathbf{120.6 = 720}$ anagramas com as vogais juntas (em qualquer ordem).

A partir de agora, vamos acrescentar mais uma conclusão importante aos nossos conhecimentos: **"quando precisarmos acrescentar às nossas escolhas, uma nova ordenação, fazemos a multiplicação das quantidades de ordenações envolvidas no problema"** (neste exemplo, organizamos os 5 elementos − R, M, N, C, AEO − e acrescentamos a ordenação das três vogais entre si − A, E, O, obtendo $\mathbf{5!.3!}$)

g) Quantos anagramas apresentam as vogais juntas e em ordem alfabética e as consoantes juntas?

Os anagramas deste item devem apresentar A, E, O juntas e R, M, N, C também juntas. Teremos, então, que organizar apenas dois elementos: os "blocos" AEO e RMNC, sendo que no primeiro bloco a ordem alfabética foi fixada e no segundo bloco a ordem não foi fixada. Assim teremos que "acrescentar" a ordenação das 4 consoantes ($\mathbf{4!}$). Logo, a solução desse problema será $\mathbf{2!.4! = 2.24 = 48}$ anagramas.

h) Quantos anagramas apresentam as vogais em ordem alfabética?

Atenção para este enunciado! Queremos as vogais em ordem alfabética, mas elas não estarão "amarradas" formando um único bloco. Neste caso, precisamos traduzir "ordenação de 7 elementos, excluindo os casos de troca de ordem entre 4 deles", numa expressão matemática correta.

Observe: RAMNECO é um anagrama que apresenta as vogais em ordem alfabética. Mantendo as consoantes na mesma posição, mas trocando as vogais de lugar entre si, obtemos mais 5 anagramas: RAMNOCE, REMNACO, REMNOCA, ROMNACE e ROMNECA. Ou seja, dos 6 anagramas onde as consoantes mantém-se em posições inalteradas, apenas 1 deles nos interessa (onde as vogais se apresentam em ordem alfabética). Os outros 5, obtidos a partir das trocas de posição apenas entre as vogais, devem ser descartados. Isto é, de um total de $\mathbf{7! = 5040}$ anagramas, a cada 6, contamos apenas 1. Mas podemos dividir os 5040 anagramas da palavra ROMANCE em quantos grupos de 6 anagramas? Exatamente em $\mathbf{\frac{5040}{6} = 840}$ grupos de 6 anagramas. Como, de cada grupo vamos contar apenas 1 anagrama, temos que há 840 anagramas que respondem à nossa questão. Mas $\mathbf{5040 = 7!}$ e $\mathbf{6 = 3!}$. Neste problema, 7! corresponde à ordenação das 7 letras; 3! corresponde à ordenação das 3 vogais. Ao escrevermos $\mathbf{\frac{7!}{3!}}$, estamos retirando, do total de ordenações possíveis entre as 7 letras, exatamente as trocas de posição entre as 3 vogais. Reafirmando ideia vista anteriormente de que, se desejamos excluir, num problema resolvido ordenadamente, uma determinada ordenação de m elementos, basta que dividamos o resultado por m!.

É como se as vogais A, E, O fossem todas iguais e, portanto, trocá-las de lugar entre si, não alteraria a palavra formada. Esta "tradução" é de suma importância: excluir, da ordenação de **n** elementos, uma ordenação de **m** elementos $(\mathbf{m} < \mathbf{n})$, traduz-se em $\mathbf{\frac{n!}{m!}}$.

<u>Exercício 6</u>: **Quantos números de 7 algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3.**

Após a revisão de conceitos feita para a resolução do item anterior, este exercício torna-se simples. Temos que ordenar 7 algarismos, sendo que o algarismo 1 repete-se quatro vezes e o algarismo 3 repete-se duas vezes. Assim a quantidade de números contados nessas condições será $\mathbf{\frac{7!}{4!.2!} = 105}$ números.

<u>Exercício 7</u>: **Dez estudantes combinaram que os três primeiros que terminassem a tarefa iriam juntos para a fila do cinema para comprar ingressos para o filme das 18h. De quantas maneiras esse trio pode ser formado?**

A essa altura, depois de tantos exercícios que ofereceram nível de complexidade crescente, algum estudante distraído poderia responder rapidamente: $\mathbf{10.9.8 = 720}$ trios. Provavelmete usaria o raciocínio: "10 opções de escolha para o 1º a terminar a tarefa; 9 opções para o 2º e 8, para o 3º".

Apesar de $\mathbf{10.9.8}$ realmente expressar a quantidade de escolhas ordenadas para os três lugares do trio, esses lugares não são fixados por uma ordem. Portanto, após a escolha ordenada $\mathbf{10.9.8 = 720}$, faz-se necessário excluir a ordenação considerada entre os três lugares. Portanto, novamente usando a tradução "quero excluir a ordenação de 3 elementos" por "preciso dividir por 3!", obtemos a resposta $\mathbf{720 : 3! = 120}$ maneiras de três estudantes irem ao cinema.

<u>Exercício 8</u>: **Ana, Bia, Caio, Dudu, Ema e Felipe são os personagens deste exercício.** (vamos resolvê-lo, supondo que o método de resolução dos exercícios já está assimilado pelos estudantes).

a) Quantas filas podem ser formadas, começando por uma menina e terminando por um menino?

Resolução: Sem nenhum raciocínio diferente dos que já foram utilizados até aqui, resolveremos este problema.

	1^a Lugar (menina)	2^a L.	3^a L.	4^a L.	5^a L.	6^a L. (menino)
Número de escolhas	3	4	3	2	1	3

Primeiramente, escolhemos uma, dentre as 3 meninas, para ocupar a 1^a posição na fila; depois, escolhemos um, dentre os 3 meninos, para ocupar a última posição. Dessa forma, sobram 4 estudantes para serem ordenados nos 4 lugares restantes. Com isso, nosso processo de escolhas constitui-se de 3 etapas, gerando $\mathbf{3.3.4! = 9.24 = 216}$ filas possíveis.

O objetivo desse item, na verdade, é servir como base de comparação para o próximo, onde a única diferença de enunciado é a mudança de conectivos (e/ou).

b) Quantas filas podem ser formadas, começando por uma menina ou terminando por um menino?

Resolução: Provavelmente, a sutileza desse exercício será percebida por poucos alunos, sem que haja uma provocação por parte do professor. Na verdade, para explicá-la de forma convincente, faz-se necessário recorrer ao Cálculo Proposicional (sem medo de perder tempo. Esse raciocínio, uma vez compreendido, será útil inúmeras vezes para o aluno, em conteúdos e disciplinas diversas).

Considerando $\mathbf{p}$ a proposição simples "fila que começa por menina" e $\mathbf{q}$ a proposição simples "fila que começa por menino", podemos formar duas proposiçoes compostas $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ e $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$.

Já sabemos que a condição $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ será satisfeita apenas quando ambas as proposições simples p e q forem satisfeitas. E isso ocorre de 216 maneiras distintas, como verificamos no item anterior.

Já a proposição $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ somente não será satisfeita quando ambas as proposições $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ forem falsas. Daí, temos algumas situações que respondem ao nosso problema: filas que começam por meninas; filas que começam por meninos; e filas que começam por meninas e terminam por meninos.

i) Temos $\mathbf{3.5.4.3.2.1 = 360}$ filas que começam por meninas.

ii) O mesmo número de filas $\mathbf{5.4.3.2.1.3 = 360}$ terminam por meninos.

iii) Tanto num caso como no outro, estão incluídas as filas que começam por menina e terminam por menino, num total de 216 filas (item anterior). Isto é, essas 216 filas estão sendo contadas duas vezes. Logo, devemos excluir essa contagem uma vez, obtendo, como resposta do exercício, $\mathbf{360 + 360 - 216 = 504}$ filas.

Essa explicação pode ser dada ao estudante sob outro ponto de vista também útil, usando a Álgebra de Conjuntos. Sejam **A é o conjunto das filas que começam por meninas** (nunca é demais lembrar que, em Análise Combinatória, os objetos a serem contados são agrupamentos. Neste caso, os agrupamentos são filas que começam por meninas) e **B é o conjunto das filas que terminam por meninos**. Estamos buscando filas que satisfaçam a qualquer dos conjuntos (é importante relembrar que o **ou** está vinculado à **união** de conjuntos). Além disso, esses dois conjuntos, possuem elementos em comum, que são as filas que começam por menina **e** terminam por menino, ao mesmo tempo. Utilizando a mesma estratégia de contagem de i), ii) e iii), podemos dizer que:

$$\mathbf{n(A) = 360;\ n(B) = 360;\ e\ n(A \cap B) = 216}$$

$$\mathbf{como\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),\ temos\ que\ n(A \cup B) =}$$

$$\mathbf{= 360 + 360 - 216 = 504\ filas}$$

c) De quantas maneiras podemos fazer uma fila com as meninas em ordem crescente de altura, supondo que todas as meninas possuem alturas distintas?

Resolução: Neste item, as meninas não se encontram necessariamente "amarradas". Portanto, devemos ordenar 6 estudantes em 6 posições, o que nos leva em 6!. Mas, além disso, não desejamos que elas troquem de lugar entre si, toda vez que a ordem crescente de altura for contrariada. Logo, excluindo, das 6! filas, essa troca de lugar indesejada, temos $\mathbf{\frac{6!}{3!} = 6.5.4 = 120}$ maneiras.

d) Quantas comissões de 4 pessoas podem ser fomadas com exatamente duas meninas?

Resolução: Já sabemos que comissões são agrupamentos não ordenados. Devemos escolher duas meninas e dois meninos para formar essa comissão. Quando escolhemos duas das três meninas de forma não ordenada, podemos fazer $\mathbf{\frac{3.2}{2!} = 3}$ formas de escolha. O mesmo para a escolha de dois meninos dentre três. Como estamos formando um grupo de 4 estudantes, fazemos isso de $\mathbf{3.3 = 9}$ maneiras diferentes. Simples assim! Mas, ainda a essa altura, surgem dúvidas de linguagem, que precisamos estar preparados para responder.

1) Por que a solução $\mathbf{\frac{(3.2).(3.2)}{4!}} =$ não é correta, já que pode ser interpretada da seguinte forma: "tenho **3.2** opções de escolhas ordenadas para meninas e **3.2** opções de escolhas para meninos. Depois de feitas, excluo a ordenação das 4 escolhas"? Percebe-se que essa

interpretação possui lógica, mesmo para quem já compreendeu a tradução em linguagem matemática. A sutileza a ser destacada aqui é que, ao fazermos escolhas apenas de meninas, estamos restringindo nosso universo de escolhas (de 6 para 3 elementos disponíveis). O mesmo acontecendo para a escolha de meninos.

2) Outro erro frequente é confundir a formação dos agrupamentos com o cálculo de quantidades desses agrupamentos. Quando estamos formando o agrupamento, estamos "escolhendo as duas meninas, os dois meninos e juntando os quatro num mesmo grupo". "Juntar" é, ao longo de nossa vida, associado a "somar". "Fazer a contagem dos agrupamentos possíveis" é um processo que associamos às escolhas e suas possibilidades. Processo que estamos associando à multiplicação, pois, relembrando, "cada escolha feita combina-se com todas as outras escolhas do processo".

e) Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas com pelo menos duas meninas?

Resolução: A expressão "pelo menos" deve ser bem discutida com os alunos. "Pelo menos" quer dizer "no mínimo", portanto, é diferente de "exatamente". Uma comissão com, no mínimo duas meninas, é uma comissão que pode ter duas ou três meninas. Nota-se que são dois tipos de comissão que atenderão ao problema. Portanto, calcularemos a quantidade de comissões de cada tipo e, depois, adicionamos para obtermos o total. Sabemos que há 9 comissões com duas meninas (item anterior).

O número de comissões com 3 meninas pode ser calculado da seguinte forma: $\mathbf{\dfrac{(3.2.1).3}{3!.1!} = 3}$ comissões (escolhem-se as 3 meninas de forma ordenada $-$ $\mathbf{3.2.1}$ $-$ e exclui-se a ordenação dessa escolha $-$ $\mathbf{\dfrac{(3.2.1)}{3!}}$. Escolhe-se o menino $-$ 3 possibilidades $-$ e exclui-se a ordenação, $\mathbf{\dfrac{3}{1!}}$. Passo que sabemos desnecessário, mas que, uma vez mencionado, não induz o aluno a pensar que está ocorrendo uma exceção). Logo, no total, temos $\mathbf{9+3=12}$ comissões com, pelo menos duas meninas.

f) Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas com pelo menos uma menina?

Resolução: Neste item, pode-se raciocinar da mesma forma como foi feito no item anterior. Se desejamos, no mínimo uma menina, podemos ter comissões com uma, duas ou três meninas.

Há ainda a forma de raciocinar com o complementar, muito útil em diversas situações. Se desejo, no mínimo, uma menina, os únicos casos que não me satisfazem são comissões sem meninas, isto é, formadas exclusivamente por meninos. Logo, do total de comissões possíveis, se as comissões formadas exclusivamente por meninos forem retiradas, obtemos comissões com, pelo menos uma menina. (Pode-se, a essa altura, rever Cálculo Proposicional e Álgebra dos Conjuntos).

Total de comissões possíveis: $\mathbf{\dfrac{6.5.4}{3!}} = \mathbf{20}$ comissões (escolhem-se 3 dentre 6, de forma ordenada e, depois, exclui-se a ordenação dos 3).

Total de comissões formadas apenas por meninos: $\mathbf{\dfrac{(3.2.1)}{3!}} = \mathbf{1}$ comissão (escolhem-se 3 dentre 3, de forma ordenada e, depois, exclui-se a ordenação dos 3).

Total de comissões com, pelo menos, uma menina: $\mathbf{20 - 1 = 19}$ comissões.

g) Sabe-se que Ana e Caio não se dão bem. De quantas formas podemos formar uma comissão de 4 pessoas, onde todas se dão bem?

Resolução: Verifica-se que as comissões que nos satisfazem podem ser: Ana e mais 3 estudantes diferentes de Caio; Caio e mais 3 estudantes diferentes de Ana; ou 4 estudantes diferentes de Caio e Ana.

Ana e mais 3 estudantes diferentes de Caio: $\mathbf{\dfrac{1.(4.3.2)}{1!.3!}} = \mathbf{4}$ comissões (um lugar da comissão só pode ser ocupado por Ana. Os outros 3 espaços devem ser ocupados por 3 das 4 opções restantes, sem Caio, excluindo a ordenação da escolha).

O mesmo raciocínio deve ser feito para "Caio e mais 3 estudantes diferentes de Ana", num total de 4 comissões.

Comissões sem Caio e Ana: $\mathbf{\dfrac{4.3.2.1)}{4!}} = \mathbf{1}$ comissão.

Dessa forma, temos $\mathbf{4 + 4 + 1 = 9}$ comissões onde todos os integrantes se dão bem.

Ainda pode-se raciocinar, neste item com o complementar. De todas as comissões possíveis, só não nos convém aquelas onde Ana e Caio aparecem juntos.

Total de comissões possíveis: $\mathbf{\dfrac{6.5.4.3)}{4!}} = \mathbf{15}$ comissões.

Total de comissões que contém Caio e Ana: $\mathbf{\dfrac{1.1.4.3}{1!.1!.2!}} = \mathbf{6}$ comissões.

Total de comissões onde todos se dão bem: $\mathbf{15 - 6 = 9}$.

Considerações Finais

Procurou-se, neste trabalho, mostrar que é possível resolver problemas de Análise Combinatória sem a utilização de fórmulas. Para isso, o pensamento utilizado baseou-se num método que priorizou **leitura, interpretação, análise e linguagens**.

Sendo assim, destacou-se a importância:

- de uma **abordagem histórica**, que oferece a estudantes e professores uma dimensão do longo caminho percorrido até o conhecimento que está sendo compartilhado;
- do aprendizado da **Análise Combinatória** no ensino básico;
- do **Cálculo Proposicional** e da **Álgebra de Conjuntos** como instrumentos esclarecedores em diversas áreas do conhecimento;
- das **linguagens materna e matemática**, bem como suas **traduções recíprocas**, não só no aspecto do aprendizado da Análise Combinatória, bem como na clara comunicação entre professor/aluno numa sala de aula;
- do **erro**, como instrumento de aprendizado.

Ao longo da pesquisa realizada para a elaboração deste trabalho, ficou claro que **originalidade** é algo impossível de se alcançar. Foram pesquisados inúmeros estudiosos que abordaram a Análise Combinatória de forma bastante parecida com a que foi exposta. Há, ainda, muitos outros que abordam o tema, utilizando fórmulas e métodos convencionais na resolução de exercícios, que se adequam a muitos estudantes e suas respectivas necessidades e características.

Ainda assim, espera-se que tudo o que foi apresentado possa contribuir para a discussão e aperfeiçoamento do ensino/aprendizado da Análise Combinatória e todo o raciocínio envolvido neste importante processo.

Referências

[1] BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval. Matemática: volume 2. São Paulo: Moderna, 1995.

[2] BRANCO, Eustáquio Lagoeiro Castelo. I Ching. Disponível em: http://www.eduquenet.net/iching.htm. Último acesso em: 8 jan. 2013.

[3] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio - Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/linguagens02.pdf. Último acesso em 11 jan.2013.

[4] CASTRUCCI, Benedito. Introdução à Lógica Matemática. São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1982.

[5] CUNHA, Lori Viali. A linguagem matemática como dificuldade para alunos. Disponível em: www.sbem.com.br/files/.../CC45872422091T.doc . Último acesso em: 13 jan.2013.

[6] DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações: volume 2. São Paulo: Ática, 2010.

[7] GENTIL, Nelson e MARCONDES, Carlos Alberto e GRECO, Antonio Carlos e BELLOTO, Antonio Filho e SéRGIO, Emílio Greco. Matemática para o 2° grau: volume 2. São Paulo: Ática, 1996.

[8] GIOVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa: volume 2. São Paulo: FTD, 2005.

[9] IEZZI, Gelson e DOLCE, Osvaldo e DEGENSZAJN, David e PÉRIGO, Roberto e ALMEIDA, Nilze. Matemática, ciências e aplicações. São Paulo: Atual, 2006.

[10] LEGISLAÇÃO EDUCACIONAL. Disponível em: http://www.educacional.com.br/legislacao/legvi.asp. Último acesso em: 10 jan.2013.

[11] MACHADO, Antonio dos Santos. Matemática, temas e metas: volume 3. São Paulo: Atual, 1986.

[12] MORGADO, Agusto César de Oliveira e CARVALHO, João Bosco Pitombeira de e CARVALHO, Paulo Cezar Pinto e FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[13] PAIVA, Manoel. Matemática: volume 2. São Paulo: Moderna, 2009.

[14] SALES, Elielson Ribeiro e SILVEIRA, Maria Rosâni Abreu. Por entre letras, números e símbolos: linguagem natural em matemática: uma experiência em um curso em licenciatura plena em matemática. Disponível em: http://ersalles.files.wordpress.com/2009/05/leitura-escrita-matematica.pdf. Último acesso em: 9 jan.2013.

[15] TAVARES, Cláudia S. e BRITO, Frederico Reis Marques. Contando a história da contagem. Disponível em: http://www.rpm.org.br/conheca/57/contagem.pdf. Último acesso em: 9 jan.2013.

[16] VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque. O ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista. Disponível em: http://www.nipem.epbsantos.com/sites/default/files/Disserta%C3%A7%C3%A3o Cristiane%20Vasquez.pdf. Último acesso em: 8 jan.2013.

[17] WIKIPEDIA

http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebradeconjuntos

http://pt.wikipedia.org/wiki/GeorgCantor

http://pt.wikipedia.org/wiki/BernardBolzano

http://pt.wikipedia.org/wiki/BertrandRussell

http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebrabooleana

http://pt.wikipedia.org/wiki/LeonardoFibonacci