Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Soluções Geométrica e Algébrica do Problema de Apolônio †

por

Alysson Espedito de Melo

sob orientação do

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2014
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Soluções Geométrica e Algébrica do Problema de Apolônio

por

Alysson Espedito de Melo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Plana.

Aprovada por:

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Pedro Antônio Honojosa Vera - UFPB (Co-Orientador)

Prof. Dr. Jorge Antônio Honojosa Vera - UFRPE

Março/2014

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente na minha vida!

A Antônio David de Melo, meu pai, que mesmo não estando mais entre nós, seu exemplo de perseverança me deu muita força, e a minha mãe, Josefa Maria de Melo, que sempre me incentivou ao estudo.

As minhas queridas filhas, Alyne Maria da Silva Melo e Ana Beatriz da Silva Melo que são o motivo da minha existência e dedicação no trabalho.

A minha esposa, Lívia da Silva Melo, pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos professores da Universidade Federal da Paraíba do departamento de Matemática que lecionaram no PROFMAT, pois foram eles quem incentivarão á busca aos cabedais do conhecimento.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar este Trabalho de conclusão de Curso, em especial ao professor Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza que corrigiu e orientou, como muita dedicação e paciência todo o meu trabalho.

Aos meus amigos, Aldeck Menezes, Francisco Lima, Marcelo Dantas, Diêgo Ayllo, Ronaldo, Williano Costa e Alessandro Melo(irmão) pelas verdadeiras amizades cultivadas graças ao advento da matemática em nossas vidas.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela criação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) dando oportunidade para que professores da educação básica possam melhorar os seus conhecimentos matemáticos e a Universidade Federal da Paraíba (UFPB), por abraçar esta ideia.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

Dedicatória

A Deus e ao maior presente que Ele me deu, minha família: Lívia Melo (esposa), Alyne Maria (filha), Ana Beatriz (filha), Josefa Maria (mãe) e Antônio David (pai, in memoriam)...

Resumo

Neste trabalho, o nosso objetivo principal é apresentar uma solução geométrica e algébrica para o problema de Apolõnio. Os problemas de Apolõnio encontram-se como citações nos trabalhos de Pappus da seguinte forma: Dados três elementos, cada um dos quais pode ser pontos, retas ou circunferência, construir uma circunferência que passa pelo(s) ponto(s) e seja tangente a cada uma das linhas dadas, mas nosso trabalho vai mostrar especificamente as soluções para o caso em que os três objetos são três circunferências não secantes, não tangentes e com raios distintos. Este Trabalho combina elementos históricos do problema de Apolônio e o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos importantes para a compreensão deste.

Palavras chave: Construções Geométricas, Problema de Apolônio, Homotetia

Abstract

This work, our main objective is to present a geometric and algebraic solution to the problem of Apollonius. The problems are as Apollonius citations in Pappus works as follows: Given three elements, each of which may be points, lines or circumference, construct a circumference passing through the point (s) and is tangent to each of the lines given, but our work will specifically show the solutions for the case where the three objects are three tangent circumference non-drying, and with different radii. We will also present historical elements of the problem of Apollonius, we have developed several important mathematical concepts for understanding the constructions.

Key words: Geometric Constructions, problem of Apollonius and Dilate.

Sumário

Introdução

As construções geométricas já aparecem na Grécia antiga e os filósofos gregos já tinham fascínio por resolver problemas de geometria por meio de construções geométricas. Desde a escola pitagórica encontram-se problemas que envolvem régua e compasso, como por exemplo, a construção do pentagrama ou pentágono estrelado e dos polígonos regulares, ver [1]. Na época de Euclides, as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de retas, nasce então à álgebra geométrica onde a palavra resolver era sinônimo de construir, ver [2]. Para os gregos as construções são realizadas com régua e compasso para construir uma circunferência com centro e raio dados.

O Problema de Apolônio é um dos grandes problemas da História da Geometria. Esteve presente ao longo da evolução da geometria e viu nascer o que se chama de geometria moderna por oposição a geometria grega. Apolônio propõe um problema que viria a ser conhecido por seu nome: Encontrar um círculo tangente a três outros círculos, podendo estes ser degenerados em retas (círculo de raio infinito) ou pontos (círculo de raio zero). Desde então, diversos matemáticos têm se empenhado na busca de soluções para o atraente problema.

O nosso presente trabalho vai se concentrar em mostrar uma solução geométrica e algébrica para o problema de Apolônio quando os três elementos em questão são três circunferências não tangentes, não secantes e os centros não alinhados. A solução Geométrica será por meio de inversão.

Nosso trabalho foi divido em quatro capítulos:

No capítulo 1 apresentaremos um pouco da história de Apolônio e de suas contribuições para a geometria, falaremos da relação de Apolônio com as cônicas e também apresentaremos os dez casos do problema de Apolônio desde o caso mais simples que é o caso de três ponto não alinhados até o caso das três circunferência e algumas de suas soluções.

Como as construções exigem um conhecimento matemático prévio para o pleno entendimento de todos os passos, o capitulo 2 é destinado as apresentações de conceitos básico tais como definições, proposições e lemas.

No Capítulo 3 mostraremos passo a passo a construção geométrica de duas das oito soluções do caso em que os três objetos são três circunferência não tangentes, não secantes e centros não alinhados e as outras seis soluções saem analogamente a essas duas soluções apresentadas.

No capítulo 4 mostraremos como encontrar algebricamente o centro e o raio das circunferências tangentes a duas circunferências dadas e estendemos o método para encontrar o centro e o raio das oito soluções do problemas de Apolônio no caso de termos três circunferências.

Esperamos que este trabalho sirva de apoio para outras dissertações, de ferramentas de trabalho para elaboração de aulas de construções geométricas.

Capítulo 1

Apolônio de Perga - Aspectos Históricos

1.1 Introdução

Um grande desenvolvimento da geometria aconteceu na chamada Idade Áurea da matemática grega, ou período helenístico, ou ainda período Alexandrino e se estendeu de aproximadamente 324 a.C a 600 d.C. Foi neste período que Apolônio propôs um problema, que veio a receber o seu nome, consistindo em: Encontrar uma circunferência tangente a três outras circunferências, podendo estas serem degeneradas em retas (circunferência de raio infinito) ou pontos (circunferência de raio zero). Este problema despertou o interesse de vários matemáticos ao longo dos séculos, cada qual buscando soluções segundo as mais diversas abordagens que refletiam o instrumental matemático disponível em cada época. A observação destes esforços permite, pois, perceber a interessante trajetória do desenvolvimento da geometria, construída por matemáticos reconhecidos e referenciados na atualidade.

1.2 Apolônio de Perga

Tratados sobre as seções cônicas são conhecidos antes da época de Euclides (325 a 265 a.C.). E, associado à história dessas curvas, temos Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfília (atualmente Turquia) por volta de 262 a.C. e viveu, aproximadamente, até 190 a.C. Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formam a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antiguidade. Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria e foi astrônomo notável, talvez ele, e não Euclides, mereceu dos antigos o adjetivo de "o grande Geômetra ". A maior parte das obras de Apolônio desapareceu. O que sabemos dessas obras perdidas devemos a Pappus de Alexandria (séc IV a.C.) ver [4]. Sua obra prima é Seções Cônicas composta por 8 volumes (aproximadamente 400 proposições!). Da obra original sobreviveram 7 volumes, sendo 4 escritos em grego e 3 traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra (826 a 901) no séc. IX.. Os três primeiros volumes são baseados em trabalhos de Euclides e o oitavo volume foi, infelizmente, perdido. Em 1.710, Edmund Halley traduziu os sete volumes sobreviventes de Secções Cônicas para o latim e todas as demais traduções para as línguas modernas foram feitas a partir da tradução de Halley. Afirma-se que, com o trabalho "As Cônicas", Apolônio tenha completado e ampliado a obra de mesmo nome escrita por Euclides, sendo esta composta por quatro livros que, com outros trabalhos, é conhecida apenas por referências posteriores

1.3 Apolônio e as cônicas

O grego Menaecmus foi o primeiro a estudar as cônicas, identificando-as como seções de diferentes tipos de cones circulares. Também se tem notícia das investigações de Conon de Samos (c. 245 a.C.) acerca destas curvas. Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C. produziu um extenso estudo em seu livro As cônicas, mostrando que as curvas que dão nome à obra podiam ser obtidas como diferentes seções de qualquer superfície cônica circular. Foi Apolônio talvez seguindo sugestão de Arquimedes, quem nomeou as secções cônicas com os termos **elipse, hipérbole e parábola**. Admitindo que a superfície cônica tem duas folhas, Apolônio mostrou que a hipérbole tem dois ramos. Embora à primeira vista as três cônicas possam parecer essencialmente distintas, quer em sua forma, quer pelas propriedades que satisfazem, é o fato de terem sido obtidas como cortes em cones duplos que as reúne em uma mesma família. De acordo com [1], Apolônio analisou as propriedades fundamentais das cônicas, mais completamente e com mais generalidade que nos escritos de outros autores. De fato, já no primeiro livro, Apolônio desenvolve a chamada teoria dos diâmetros conjugados, usando um par destes equivalentemente aos eixos coordenados oblíquos. Ainda segundo [1], os métodos de Apolônio, em As cônicas, em muitos pontos, são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma espécie de geometria analítica, antecipando o trabalho de Descartes em 1800 anos. Vale destacar, porém, que o sistema de coordenadas utilizado por Apolônio e seus antecessores era sempre considerado a posteriori sobre uma curva dada a fim de se estudar suas propriedades. Não parece haver exemplo, na geometria antiga, de um estabelecimento a priori do sistema de coordenadas para fins de representação gráfica de uma equação. Podemos assim dizer que na geometria grega as equações eram determinadas pelas curvas, e não o contrário. Os trabalhos de Euclides e Arquimedes, assim como as Seções cônicas de Apolônio mantiveram sua utilidade como apoio 'a pesquisa até o século XVII, quando Johannes Kepler

(1571-1630) se dedicou a um estudo profundo dos movimentos dos planetas e suas órbitas

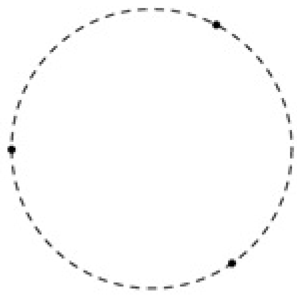
1.4 O problema de Apolônio

Dados três objetos, cada um podendo ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que é tangente a todos esses três objetos, neste caso dizemos que uma circunferência é tangente a um ponto se ela passa por esse ponto. Podemos dividir esse problema em dez casos, desde o mais simples, o caso de três pontos, até o mais complicado, o caso de três circunferências,caso este que será objeto do nosso trabalho nos capítulos 3 e 4. Este último foi considerado um desafio para os matemáticos dos séculos XVI e XVII, tendo sido resolvido por Adriaan van Roomen no meio do século XVI, usando intersecção de cônicas. Pouco tempo depois, o matemático François Viète resolveu este problema utilizando apenas régua e compasso.

Mostraremos abaixo os Dez casos do problema de Apolônio, alguns dependendo das posições dos objetos, sem visualização de soluções.

1.4.1 Três pontos distintos

Neste caso podemos visualizar apenas uma única solução.

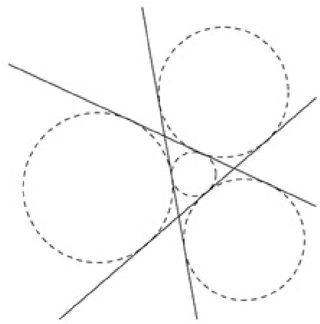


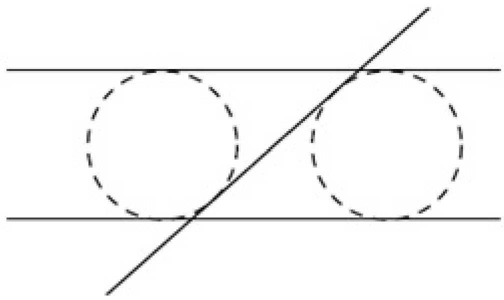
1.4.2 Três retas distintas

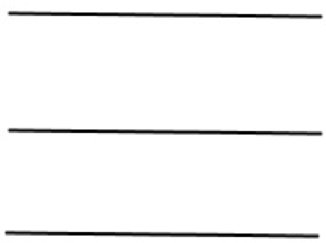
Três retas são duas a duas concorrentes, mas não concorrem em um único ponto, nesse caso conseguimos visualizar quatro soluções:

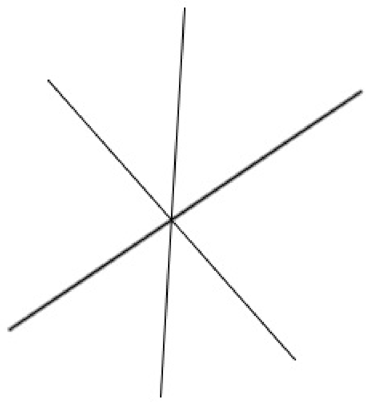
Duas destas retas são paralelas entre si, mas não são paralelas à terceira reta, nesse caso conseguimos visualizar duas soluções:

Temos Também dois casos em que não encontramos nenhuma solução:





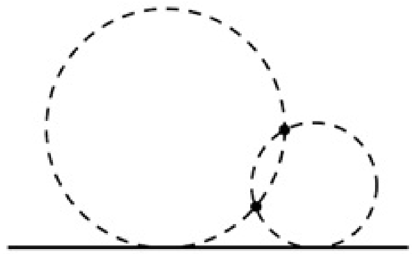


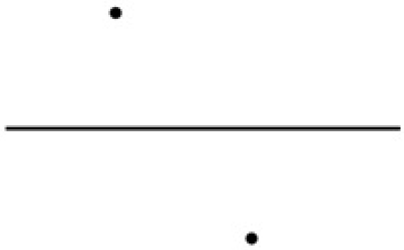


1.4.3 Uma reta e dois pontos não pertencentes a essa reta

Os dois pontos pertencem ao mesmo dos dois semiplano determinados pela reta, podemos visualizar duas soluções nesse caso:

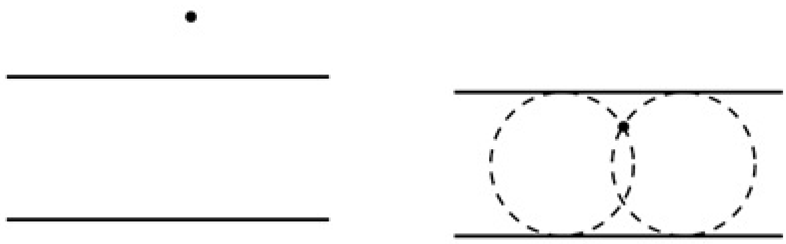
Mas se os dois pontos pertencerem a semiplanos diferentes então não conseguimos encontrar nenhuma solução:



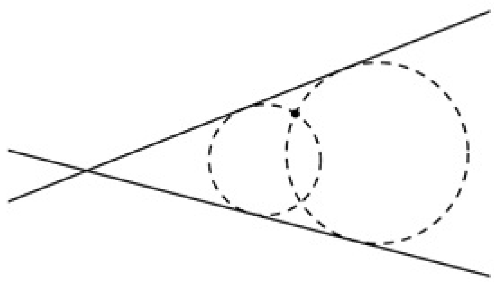


1.4.4 Duas retas e um ponto não pertencente a nenhuma dessas retas

As retas são paralelas e neste caso podemos visualizar uma ou nenhuma solução, isso depende da posição do ponto em relação as retas:

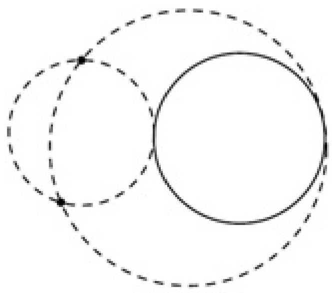


Se as retas forem concorrentes podemos encontrar duas soluções:

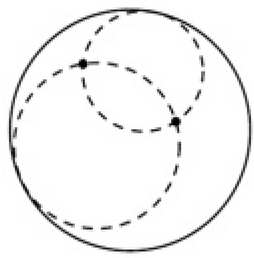


1.4.5 Uma circunferência e dois pontos não pertencentes a essa circunferência

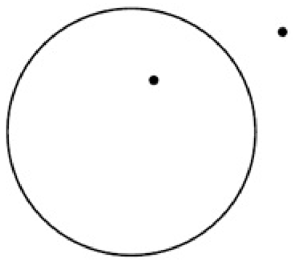
Se os dois pontos são externos à circunferência, podemos visualizar duas soluções:



Se os dois pontos são internos à circunferência, podemos visualizar duas soluções:

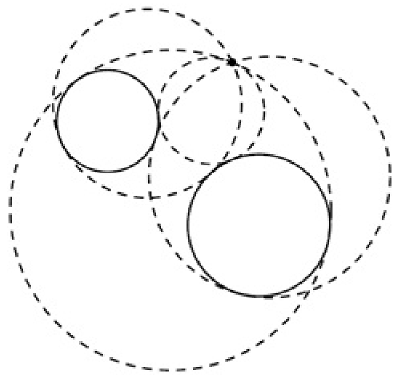


Se os dois pontos são um interno e o outro externo à circunferência, não visualizamos nenhuma solução:



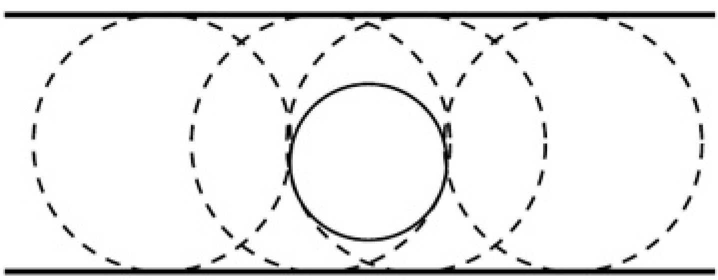
1.4.6 Duas circunferências e um ponto

Neste caso o ponto tem varias opções de colocação, apresentamos aqui o caso em que as duas circunferências não são secantes e nem tangente e o ponto é externo as duas circunferências e conseguimos visualizar quatro soluções:



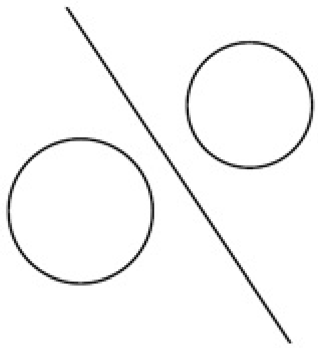
1.4.7 Duas retas e uma circunferência

Neste caso temos várias possibilidades, uma delas é a ilustrada abaixo, na qual conseguimos visualizar quatro soluções:

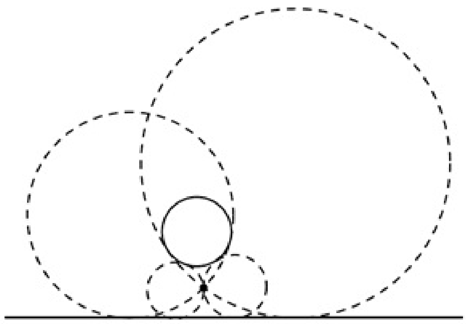


1.4.8 Duas circunferências e uma reta

Neste caso também temos várias possibilidades, uma delas sem solução é a ilustrada abaixo:



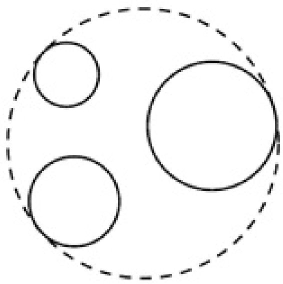
1.4.9 Um ponto, uma reta e uma circunferência



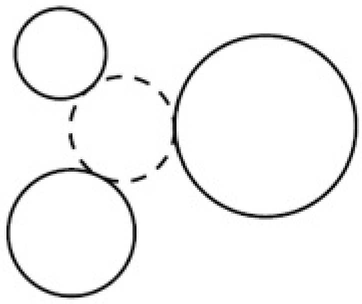
1.4.10 Três circunferências

Neste caso, também podemos visualizar varias situações, todas dependendo das posições das três circunferências. Um dos casos, que como falamos acima será objeto do nosso trabalho, é quando as três circunferências são distintas não secantes, não tangentes e que tem seus centros não alinhados, veja figuras:

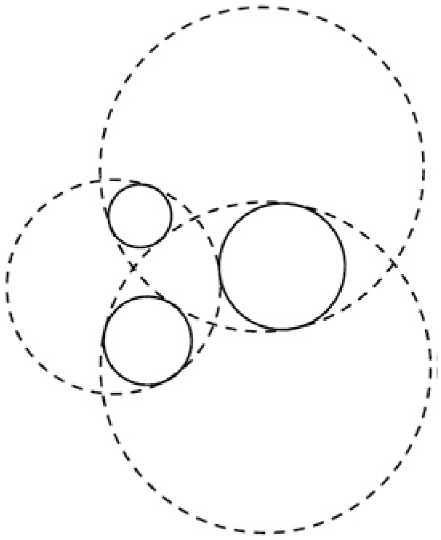
Uma solução é uma circunferência tangente interiormente as três circunferências:



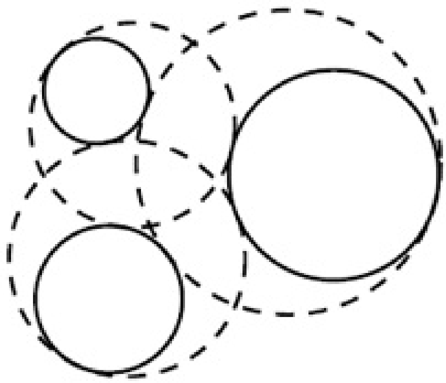
Ou uma circunferência tangente exteriormente as três circunferências:



Outro caso seria três circunferências tangentes interiormente a duas e exteriormente as três circunferências:



Mais um caso seria três circunferências tangentes interiormente a uma e exteriormente a duas das circunferências:



Capítulo 2

Conceitos Básicos

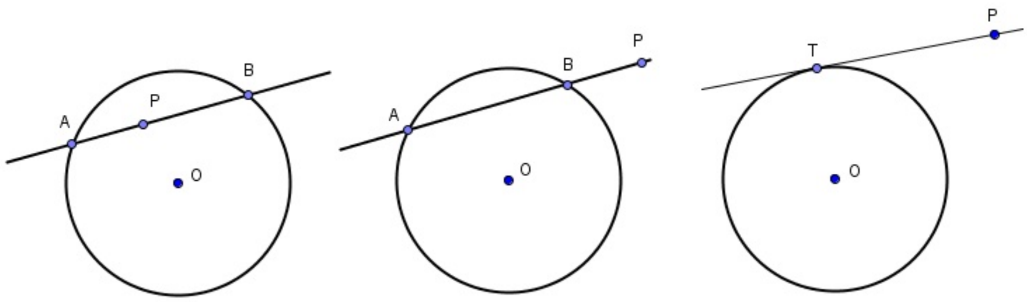
Neste capitulo introduziremos alguns conceitos que nos ajudaram a compreender a construção do problema de Apolônio onde os três objetos são circunferências externas entre si e sem pontos de intersecção. O leitor mais interessado pode ver em [3], [6], [5] mais sobre o tema.

2.1 Elementos básicos

Definição 1 *Um conjuntos de pontos constitui um lugar geométrico quando satisfaz uma determinada propriedade P com as seguintes condições:*
a) Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P;
b) Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

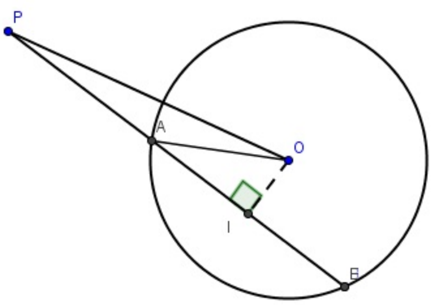
Definição 2 *Considere uma circunferência $C(O, R)$ e um ponto P qualquer. A potência de p em relação a C é dada por $Pot_C(P) = PA.PB$. onde A e B são os pontos de intersecção de uma reta secante a C que passa por P. No caso em que a reta que passa por P é tangente à circunferência C no ponto T temos então que $Pot_C(P) = PT^2$. Se o ponto P é interno à circunferência C então $Pot_C(p) < 0$. Se o ponto P é externo à circunferência C tomamos $Pot_C(p) > 0$. Se o ponto P pertence à circunferência C, então $Pot_C(p) = 0$.*

Para ilustrar melhor o que definimos observe as figuras abaixo:



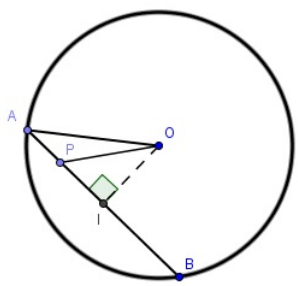
Proposição 1 : *A potência de um ponto em relação a uma circunferência dada está bem definida, ou seja, $Pot_C(P)$ não depende do ponto P e pode ser calculada por $Pot_C(p) = d^2 - r^2$ onde d é a distância de P ao centro da circunferência e r é o raio do circulo.*

Demonstração: 1º Caso: O ponto P é exterior.
Observando a figura temos:



$$
\begin{aligned}
Pot_c(P) &= PA \cdot PB \\
&= (PI - IA)(PI + IA) \\
&= PI^2 - IA^2 \\
&= (PO^2 - OI^2) - (OA^2 - OI^2) \\
&= PO^2 - OA^2 \\
&= d^2 - r^2
\end{aligned}
$$

2º Caso: O ponto P é interior.



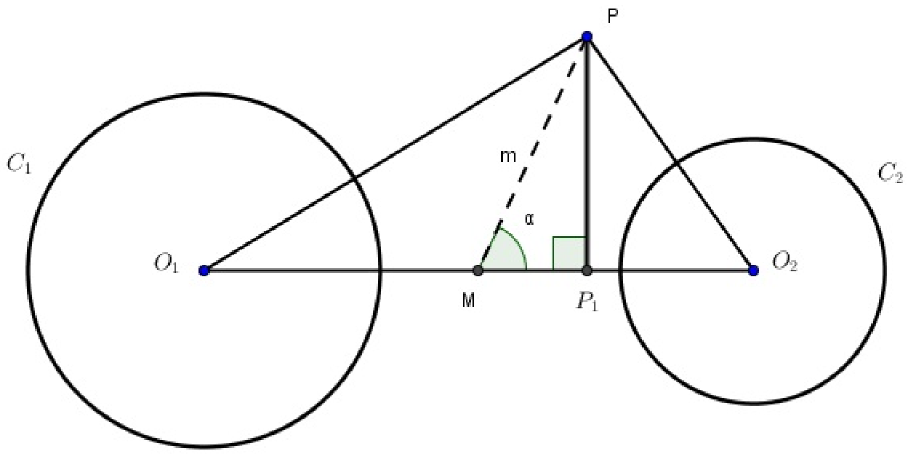
$$
\begin{aligned}
Pot_C(P) &= PA \cdot PB \cdot \cos \pi \\
Pot_C(P) &= -PA \cdot PB \\
&= -(IA - PI)(PI + IA) \\
&= (PI - IA)(PI + IA) \\
&= PI^2 - IA^2 \\
&= (PO^2 - OI^2) - (OA^2 - OI^2) \\
&= PO^2 - OA^2 \\
&= d^2 - r^2
\end{aligned}
$$

■

Definição 3 : *Dada duas circunferências C_1 e C_2 não concêntricas, chamamos de eixo radical ao lugar geométrico dos pontos que tem igual potência em relação a C_1 e C_2.*

Proposição 2 : *O eixo radical de duas circunferências C_1 e C_2 é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros dessas circunferências.*

Demonstração: Consideremos duas circunferências C_1 e C_2 de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 respectivamente. Consideremos também M como sendo o ponto médio do segmento O_1O_2, um ponto P dessa reta e sua projeção P_1 sobre o segmento O_1O_2. Observe a figura abaixo:



$$PotC_1(P) = PotC_2(P)$$

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$$

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Considerando os triângulos PMO_1 e PMO_2 e aplicando a lei dos cossenos temos:

Do triângulo PMC_1: $PC_1^2 = \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2 + m^2 + 2 \cdot \dfrac{O_1O_2}{2} \cdot m \cdot \cos\alpha.$

Do triângulo PMC_2: $PC_2^2 = \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2 + m^2 - 2 \cdot \dfrac{O_1O_2}{2} \cdot m \cdot \cos\alpha.$

Fazendo a subtração das duas equações:

$$PO_1^2 - PO_2^2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot m \cdot \cos\alpha.$$

Mas,

$$\cos\alpha = \frac{MP_1}{m} \quad \text{e} \quad PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Então,

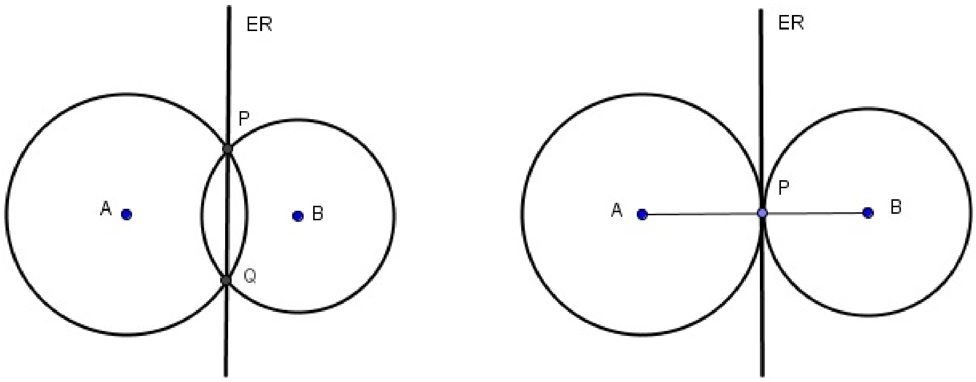
$$r_1^2 - r_2^2 = 2 \cdot O_1 \cdot O_2 \cdot MP_1.$$

Observe que, $r_1^2 - r_2^2$ é constante, portanto $2 \cdot O_1O_2 \cdot MP_11$ também será. Desta última, concluímos que MP_1 é constante, não dependendo das posições de P. logo o eixo radical de C_1 e C_2 é a reta perpendicular a O_1O_2 passando por P cuja posição pode ser calculada por:

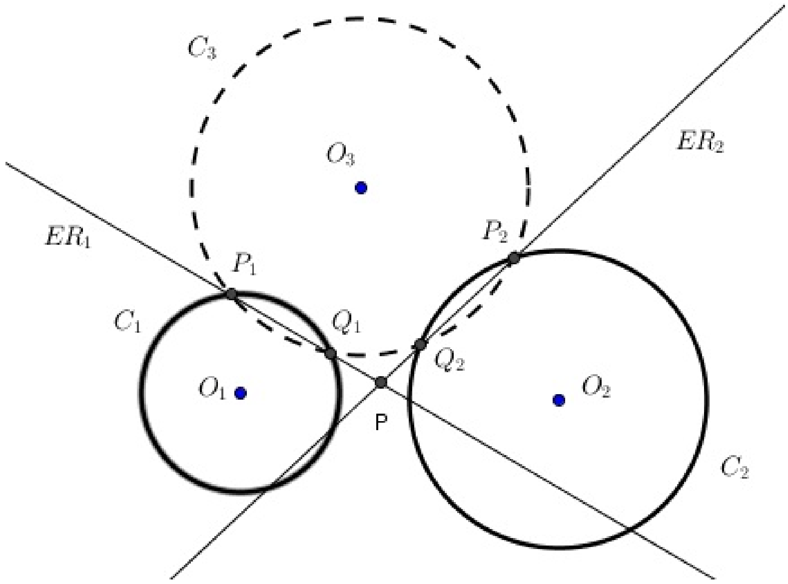
$$MP_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

■

Note que quando as circunferências são tangentes ou secantes fica fácil determinar o eixo radical, veja:

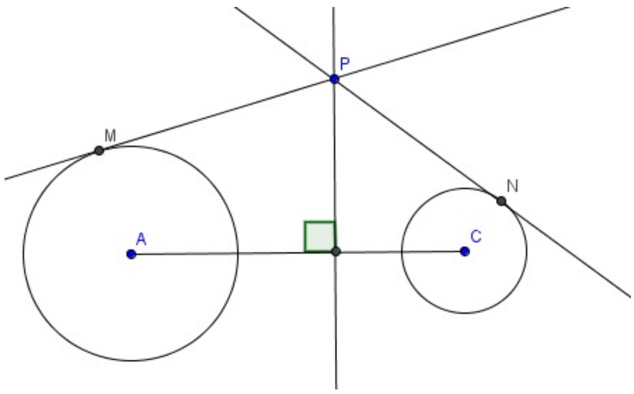


Note que para demonstrar a proposição anterior precisamos de um ponto P que pertence a esse eixo. Para encontrar esse ponto P pertencente ao eixo radical, considera-se uma circunferência C_3 qualquer e secante a C_1 e C_2. Suponha que $P_1, Q_1 \in C_3 \cap C_1$ e $P_2, Q_2 \in C_3 \cap C_2$, observe que o eixo radical, ER_1 de C_1 e C_3 é a reta que passa por P_1 e Q_1 e que o eixo radical, ER_2de C_2 e C_3 é a reta que passa por P_2 e Q_2. Logo, o ponto $P \in ER_1 \cap ER_2$ pertence ao eixo radical de C_1 e C_2.



Proposição 3 *Se de um ponto P qualquer do eixo radical de duas circunferência for traçadas tangentes a essas circunferências, então os segmentos tangentes possuem as mesmas medidas.*

Demonstração: Sejam as circunferências C_1 e C_2 e o ponto P do eixo radical Veja figura abaixo:
Considere o segmento PM tangente a C_1 e o segmento PN tangente a C_2.



logo

$$Pot_{C_1}(M) = Pot_{C_2}(N)$$
$$(PM)^2 = (PN)^2$$
$$PM = PN$$

■

Definição 4 : *Dados um número k e dois pontos distintos O e P, chamaremos o ponto P', tal que $OP' = k.OP$, homotético do ponto P. Fixados um escalar k e um ponto O a transformação geométrica que leva um ponto P no ponto P' é chamada homotetia direta se $k > 0$ e de homotetia inversa se $k < 0$, e o ponto O fixado é chamado centro de homotetia.*

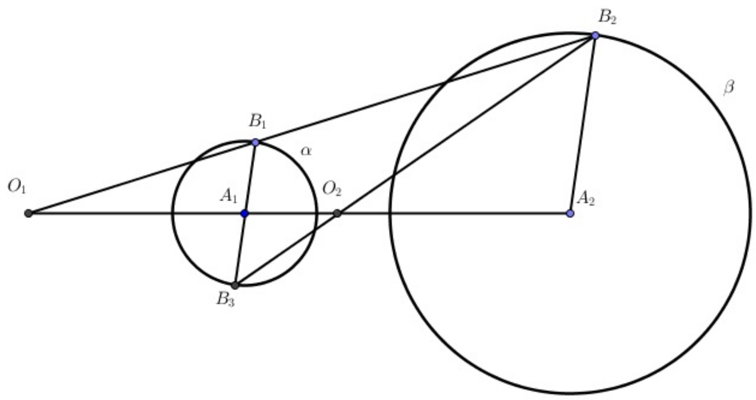
Definição 5 : *Uma reta que passa por dois centros de homotetia é chamada de eixo de homotetias, se esses dois centros são de homotetia direta chamamos de eixo de homotetias diretas, se são dois centros de homotetia inversa chamamos de eixo de homotetias inversas.*

Definição 6 *Dizemos que um ponto P é o centro de homotetia de duas circunferências se uma delas é levada na outra por uma homotetia de centro P*

Proposição 4 : *Uma homotetia transforma uma circunferência em uma circunferência.*

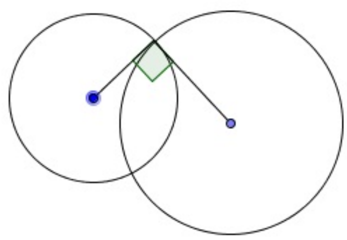
Demonstração: Seja P um ponto de uma circunferência C com centro em um ponto A. Sejam P' e A' os homotéticos dos pontos P e A por uma homotetia de centro O e razão k. Como a medida do segmento PA é constante, se o ponto P girar em torno de A descreve a circunferência C, o ponto P' descreverá um circunferência C'de centro A' e raio $A'P'$. ∎

Proposição 5 : *Duas circunferências α e β com centros e raios distintos como mostra a figura abaixo possuem dois centros de homotetia.*

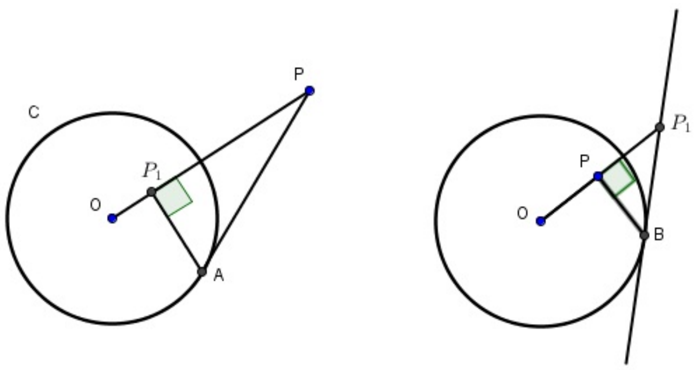


Demonstração: *Sejam os pontos A_1 e A_2 os centros das circunferências α e β, respectivamente. Seja o segmento A_1B_1 um raio da circunferência α paralelo a um raio A_2B_2 da circunferência β. Como A_1B_1 e A_2B_2 são segmento dispostos* *paralelamente, eles são homotéticos. Seja* $k = \dfrac{A_2B_2}{A_1B_1}$ *sua razão e* O_1 *seu centro. Se os segmentos* A_1B_3 *e* A_2B_2 *são dispostos paralelamente, mas possuem sentidos contrários eles são homotéticas por uma razão* $-k = \dfrac{A_2B_2}{A_1B_3}$ *cujo centro é o ponto* O_2. ■

Definição 7 : *Dizemos que duas circunferências são ortogonais se seus raios são perpendiculares no ponto de intersecção.*



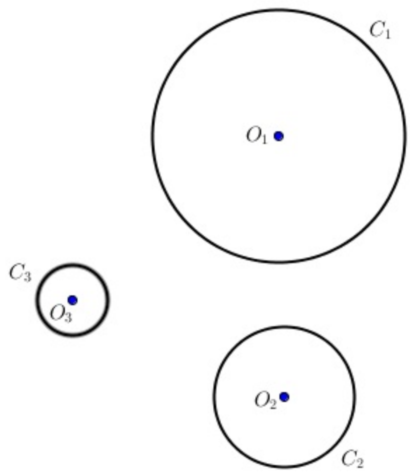
Definição 8 : *Sejam* C *uma circunferência de centro* O *e* P *um ponto externo a* C. *Seja* AP *um segmento de reta passando por* P *e tangente a* C *no ponto* A. *O ponto obtido pela intersecção da reta perpendicular ao segmento* OP *que passa por* A *é chamado inverso do ponto* P, *denotaremos esse ponto por* P_1 *veja a figura abaixo. Se o ponto* P *for interno a* C, *com* $P \neq O$, *então pegamos um segmento de reta perpendicular a* OP *passando por* P *que intercepta* C *num ponto* B. *Neste caso* P_1 *é o ponto de intersecção da reta tangente a* C *no ponto* B *com o segmento* OP, *observe a figura abaixo. Fixada uma circunferência a transformação geométrica que leva um ponto* P *no ponto* P_1 *é chamada inversão, e a circunferência fixada é dita circunferência de inversão. Se* $P \in C$ *tomamos* $P = P_1$.



Capítulo 3

Uma construção Geométrica do Problema de Apolônio

Com os elementos apresentados no capitulo 2, teremos condições de construir neste capitulo as soluções do problema de Apolônio em que os três elementos são circunferências externas em si, sem pontos de intersecção e com os centros não alinhados, nos serviu como base para essa construção os textos ver em [5], [6] e [7] ver figura abaixo:



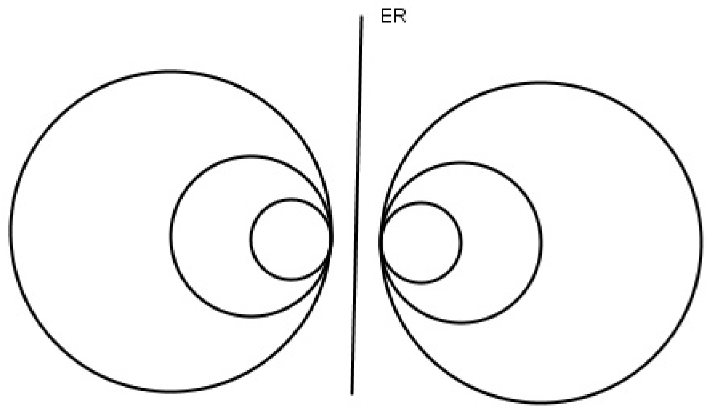
Observe que a potência do centro radial P, das três circunferências C_1 ,C_2 e C_3, é positiva, logo ele é centro de uma circunferência C de centro O e raio r, ortogonal às circunferências C_1 ,C_2 e C_3. Se tomarmos C como circunferência de inversão, definição 7 do cap. 2, então $C' = C, C_1' = C_1$, $C_2' = C_2$ e $C_3' = C_3$.

Suponha que S seja uma das soluções do Problema de Apolônio envolvendo as circunferências C_1, C_2 e C_3 e considere C como a circunferência de inversão, como foi observado acima, a inversão mantém C_1 ,C_2 e C_3, logo quatro soluções desse problema são levadas pela inversão nas outras quatro, ou seja, as oito soluções são duas a duas inversas. Como temos três circunferências de centros e raios distintos, então existem seis centros de homotetia, os quais determinam quatro eixos de homotetia. Um deles é um eixo de homotetia direta e os outros três são eixos de homotetias inversas.

Definição 9 *Fixadas uma reta r e uma circunferência C, chamamos de feixe de circunferências rC ao conjunto de circunferências que admitem, com C, a reta r como eixo radical.*

Lema 9.1 *Duas circunferências não concêntricas C_1 e C_2 determinam juntamente com seu eixo radical um feixe de circunferências, o qual denotaremos por C_1C_2.*

Demonstração: Duas circunferências não concêntricas C_1 e C_2 determinam um eixo radical ER, portanto, determinam um feixe de circunferências C_1C_2.



■

Lema 9.2 *Se uma circunferência C intercepta uma circunferência α e sua inversa α' sob um mesmo ângulo, então C é ortogonal a circunferência de inversão.*

Demonstração: Seja σ a circunferência de inversão. Se a circunferência C não intercepta a circunferência α e α' sob um mesmo ângulo, então $C \neq C'$. Logo, C não é ortogonal a σ , pois se fosse $C = C'$.

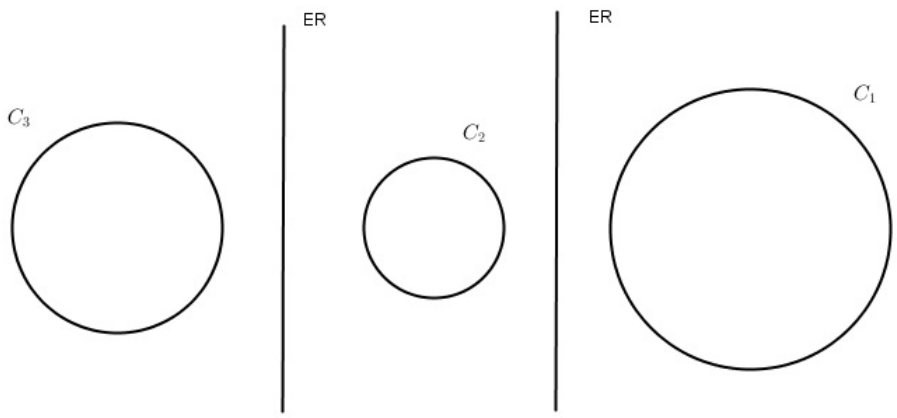
■

Proposição 6 *Considere três circunferências C_1,C_2 e C. Se C inverte C_1 em C_2, então C pertence ao feixe de circunferências C_1C_2.*

Demonstração: Seja C a circunferência que inverte C_1 em C_2. Seja ER_1 o eixo radical entre C_1 e C_2. Seja O_1 e O_2, os centros das circunferências C_1 e C_2 respectivamente. Seja α uma circunferência ortogonal as circunferências C_1 e C_2. O eixo radical ER1 passa pelo centro de α e é perpendicular a reta O_1O_2. Como intercepta C_1 e C_2 sob o mesmo ângulo, pelo lema 3.2, α é ortogonal à C. Seja ER_2 o eixo radical entre C e C_1. Como o eixo radical ER_2 passa pelo centro de α e é perpendicular à reta O_1O_2, $ER_1 = ER_2$. ∎

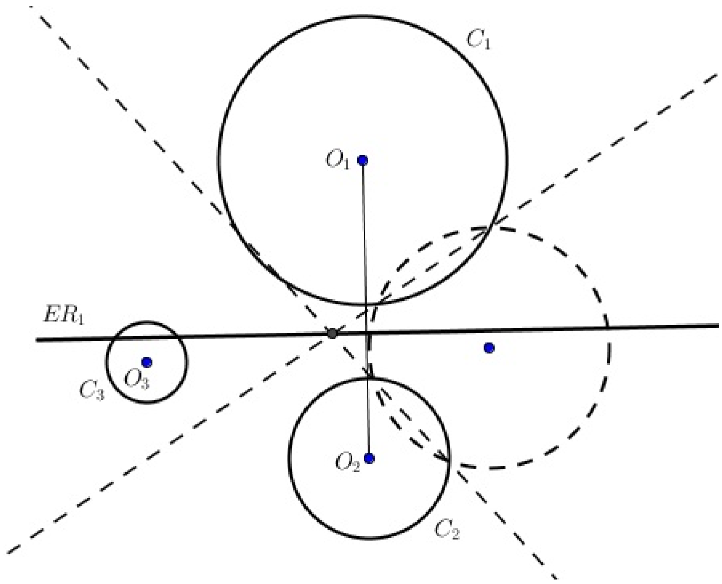
Lema 9.3 *Sejam C_1, C_2 e C_3 três circunferências não concêntricas. Então os eixos radicais dessas circunferências tomados dois a dois são paralelos ou concorrentes. Quando são concorrentes, a interseção desses eixos é um único ponto P do plano tal que $PotC_1(P) = PotC_2(P) = PotC_3(P)$. Chamamos este ponto P de centro radical das circunferências C_1,C_2 e C_3.*

Demonstração: Se tomarmos os três centros de C_1, C_2 e C_3 alinhados, então os eixos radicais são paralelos, veja figura:

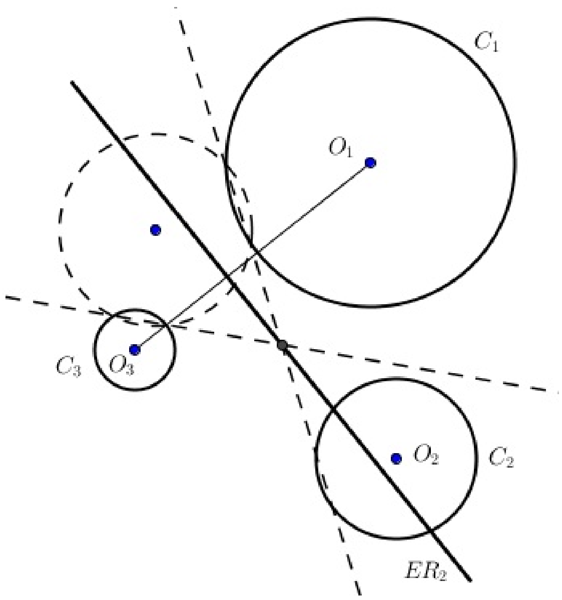


Se tomarmos os três centros de C_1, C_2 e C_3 não alinhados, teremos:

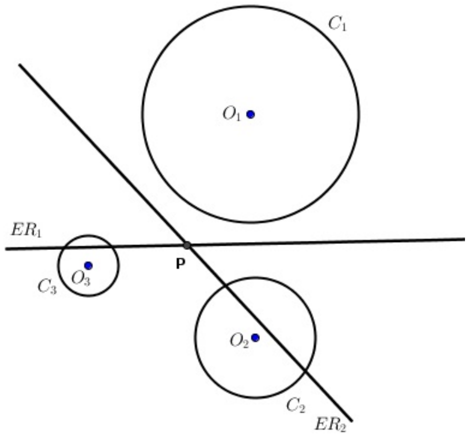
Eixo radical ER_1 das circunferências C_1 e C_2:



Eixo radical ER_2 das circunferências C_1 e C_3:



Fazendo a interseção entre os eixos radicais ER_1 e ER_2, encontramos o ponto P, veja figura:

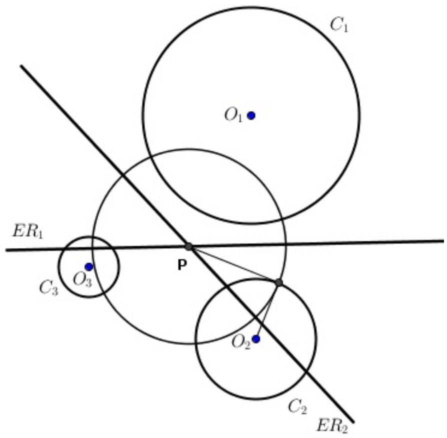


Note que se os centros das três circunferências não estão alinhados então esse ponto P é um ponto bem definido.

■

Com mais esses lemas, proposições e definições, vamos começar as construções com régua e compasso das soluções do problema de Apolônio em que os três objetos são três circunferências não tangentes, não secantes e com centros não alinhados.

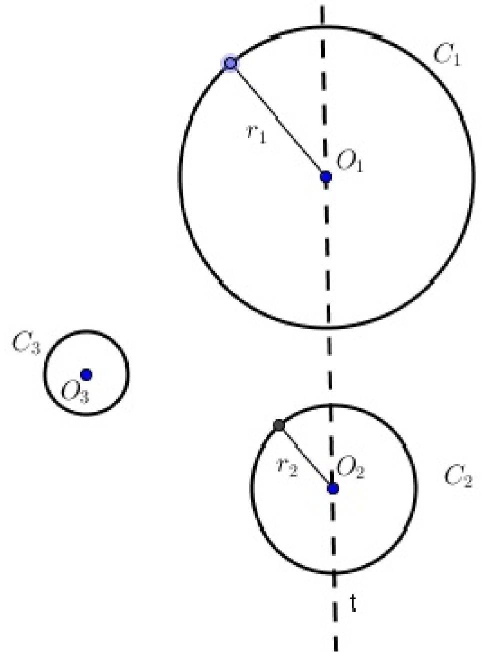
1º Passo: Encontramos o centro radical das circunferências C_1, C_2 e C_3 que chamaremos de P. Como mostrado em lema 9.3, esse ponto pode ser o ponto de interseção entre os eixos radicais ER_1 de C_1 e C_2 e ER_2 de C_1 e C_3 e depois construir a circunferência centrada em P e ortogonal a C_1, C_2 e C_3, como mostra a figura abaixo:



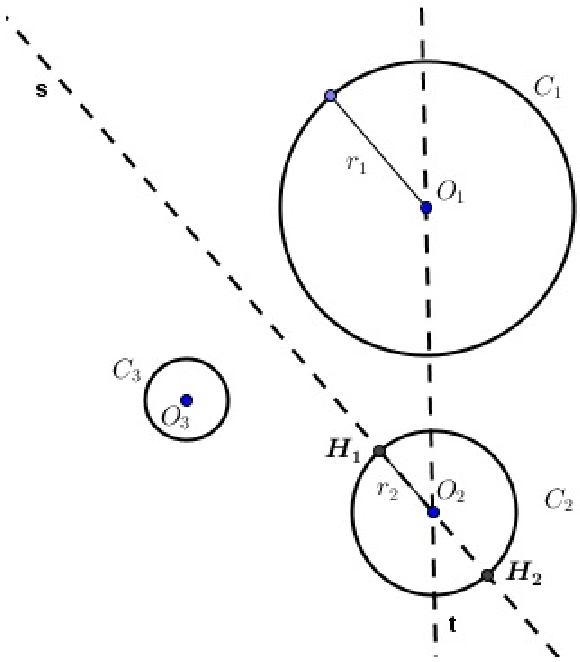
2º Passo: Construiremos agora os centros de homotetia das circunferências C_1, C_2 e C_3, que de acordo com a prop.5 do cap 2, encontraremos seis centros de homotetia.

Primeiramente, começamos construindo os centros de homotetia de C_1 e C_2.

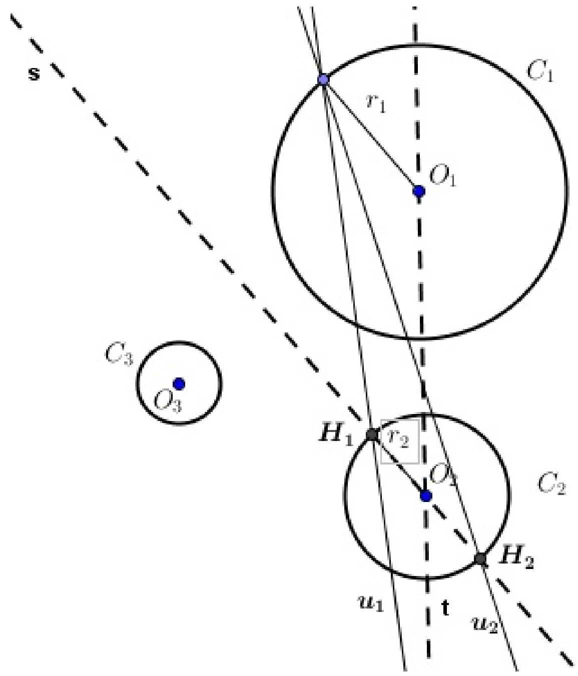
Para isso construímos a reta t, que passa por O_1 e O_2, um raio r_1 de C_1, um raio r_2 de C_2 com esses raios paralelos entre si.



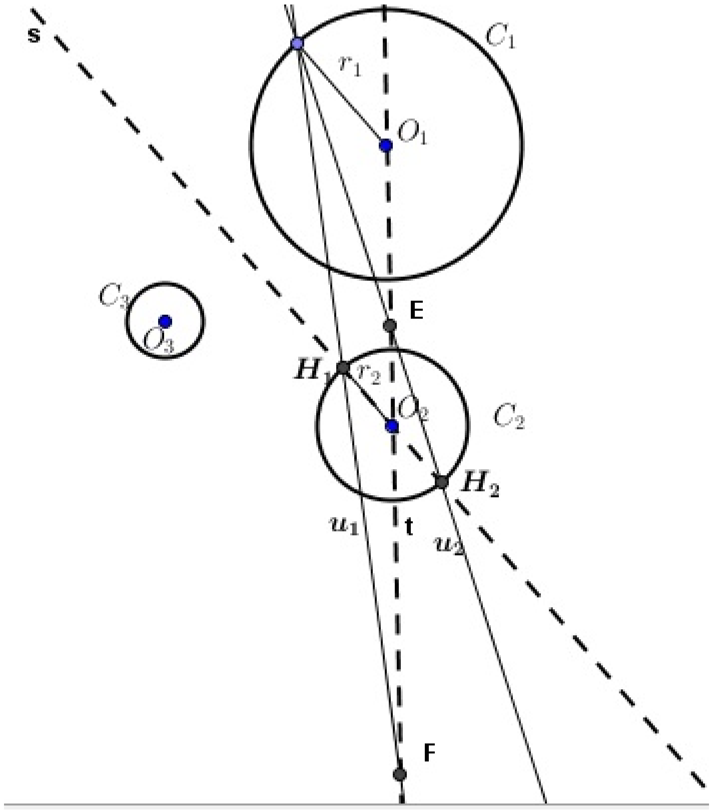
Construímos agora uma reta s passando por O_2 e pelo ponto de interseção entre r_1 e C_2 que chamamos de H_1, essa reta vai intersectar também C_2 em um outro ponto que denominamos de H_2.



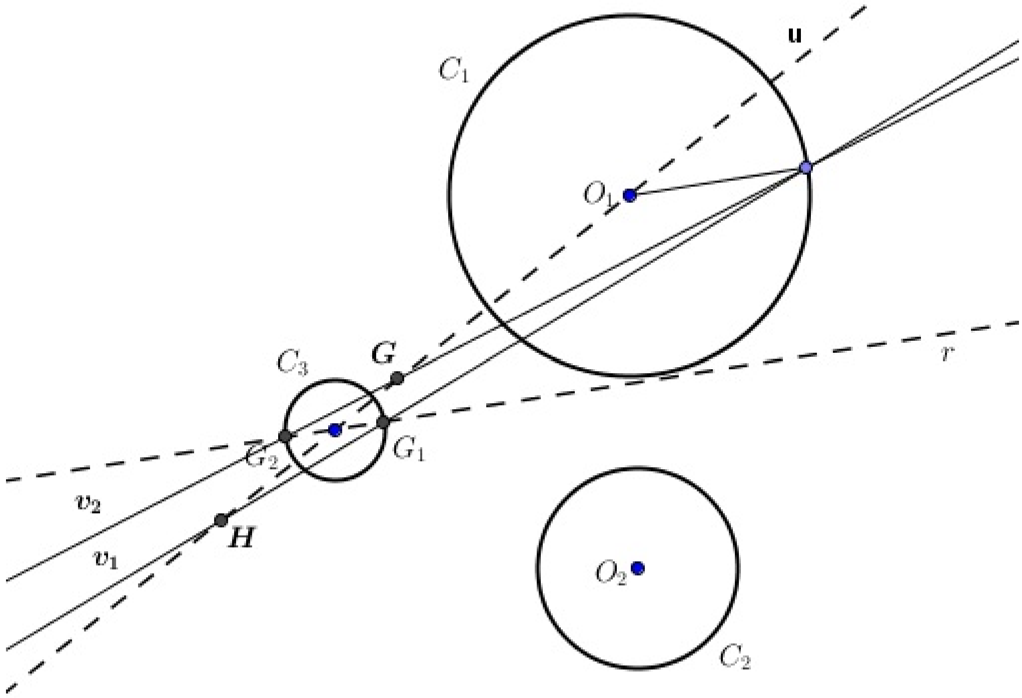
Finalmente construímos as retas u_1, passando pelo ponto H_1 e pelo ponto de interseção entre C_1 e r_1 e u_2 passando pelo ponto H_2 e pelo ponto de interseção entre C_1 e r_1.



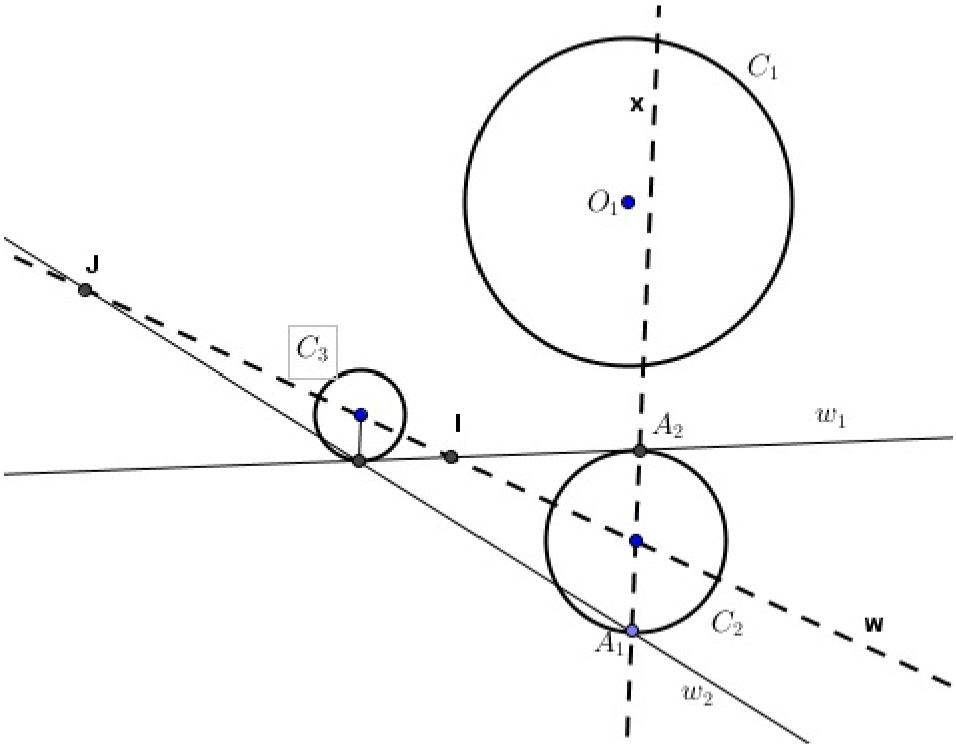
Daí, o centro de homotetia da circunferência C_1 será o ponto de interseção entre a reta t e a reta u_2 que denominaremos por E e o centro de homotetia da circunferência C_2 será o ponto de interseção entre as retas t e u_1 de denominaremos por F, mostrado na figura abaixo:



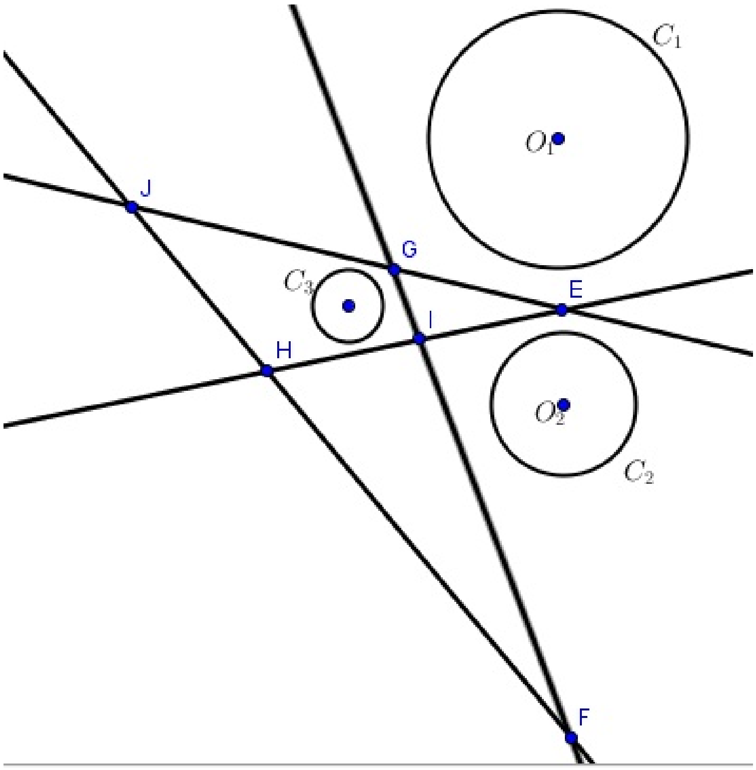
Analogamente, podemos construir os centros de homotetia de C_1 e C_3, que denominaremos de pontos G e H.



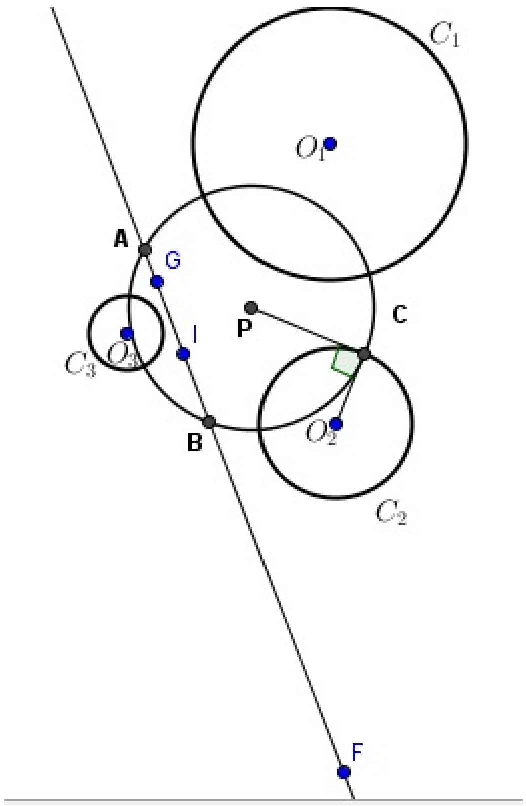
Da mesma forma os centros de homotetia de C_2 e C_3 que denominaremos de pontos I e J.



Encontramos então, todos os centros de homotetia procurados.

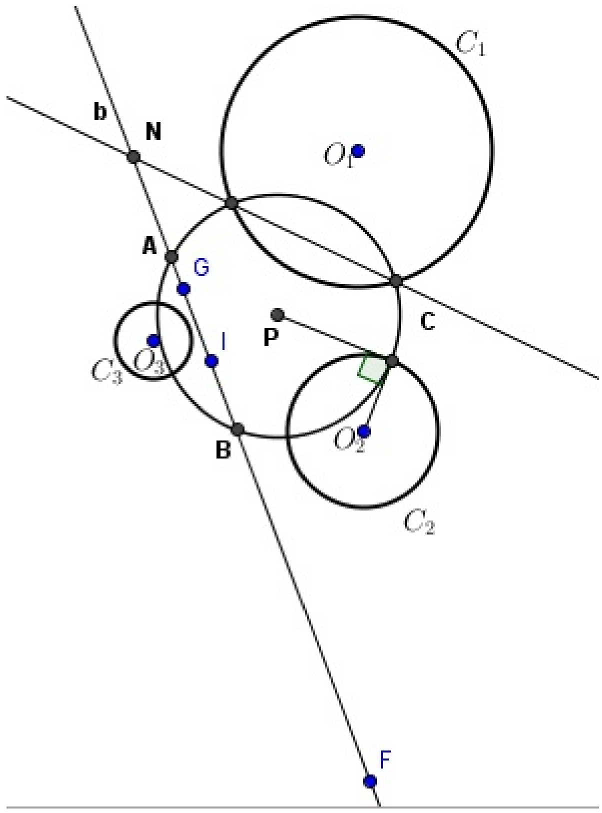


O próximo passo agora será construir duas soluções e para isso vamos escolher o eixo radical FG que denominaremos de reta b, para construir as outras soluções basta fazer os mesmos passos utilizando outro eixo. Temos que todas as circunferências do feixe bC passam pelos pontos da interseção entre a reta b e a circunferência C, vamos chamar esses pontos de A e B.

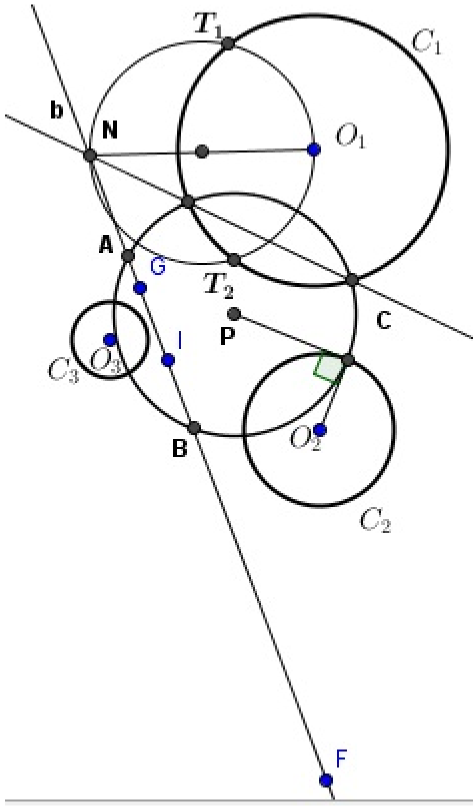


Observe agora que a solução do nosso problema se resume a encontrar uma circunferência que passa por A e B e é tangente a uma das três circunferências.

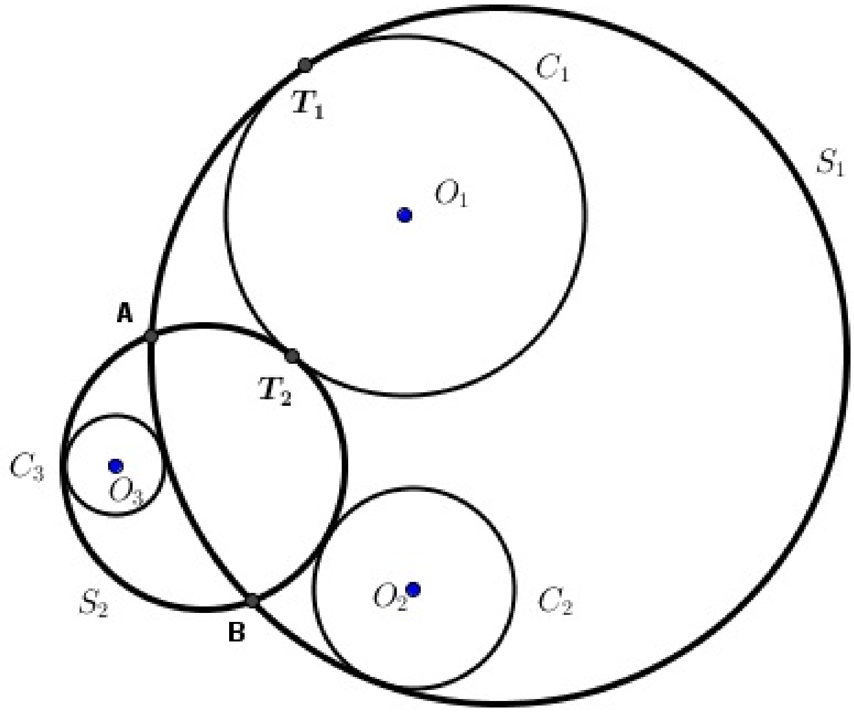
Para construir essas duas soluções precisamos encontrar pontos que estejam sobre o eixo radical FG e que tenham a mesma potência para C_1, C_2, C_3 e para as circunferências do feixe. Escolha então a corda formada pelos pontos de intersecção de C_1 com C e depois, prolonga-la para obter um ponto N do eixo radical FG como ilustra a figura:



Usamos agora uma circunferência auxiliar C_4 com raio igual a metade do segmento O_1N onde encontramos os pontos T_1 e T_2. Esses pontos T_1 e T_2 são pontos de tangência, pois os triângulos O_1T_1N e O_1T_2N são inscritos em uma semi circunferência.



Encontramos então os pontos de tangência na circunferência C_1, que contém a corda escolhida, e assim podemos construir as duas soluções S_1 que é a circunferência que passa pelos pontos A, B e T_1 e S_2 a circunferência que passa pelos pontos A, B e T_2.



Capítulo 4

Uma solução algébrica do Problema de Apolônio

A construção que acabamos de mostrar no capítulo anterior tem muita utilidade, mas se tivermos interessados no centro e no raio das soluções ela se mostra muito vaga. Para encontrar esse centro e esse raio temos que olhar para o problema de forma mais algébrica. Observe analiticamente que podemos descrever cada circunferência pela associação:

$$\Omega : \mathbb{C}^3 \to C = \{C \subset \mathbb{C}^2 / \text{C é uma circunferência}\}$$

$$c_1 = (x_1, y_1, R_1) \to C_1 : (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R1^2$$

Temos que, Ω pode ser definida também quando $R_1 = 0$, neste caso estaremos considerando uma circunferência degenerada, ou seja um ponto.

Observe as condições para duas circunferências serem tangentes

Sejam dadas duas circunferências C_1 e C_2 com centros $O_1 = (x_1, y_1)$ e $O_2 = (x_2, y_2)$ e raios R_1 e R_2 respectivamente, essas circunferências são:

I - Tangentes externamente se, e somente se a distância entre os centros for igual a soma de seus raios, ou seja:

$$d(O_1, O_2) = R_1 + R_2$$

II - Tangentes internamente se, e somente se, a distância entre os centros for igual a diferença entre seus raios, ou seja:

$$d(O_1, O_2) = R_1 - R_2 \quad \text{ou} \quad d(O_1, O_2) = R_2 - R_1$$

Observe também que dadas duas circunferências de equações:

$$C_1 : (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2 \text{ e } C_2 : (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = R_2^2.$$

Os pontos de interseção entre C_1 e C_2 são dados pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} (X - x_1)^2 & + & (Y - y_1)^2 & = & R_1^2 & (I) \\ (X - x_2)^2 & + & (Y - y_2)^2 & = & R_2^2 & (II) \end{cases}$$

Desenvolvendo as potências das duas equações, temos:

$$(I) \quad X^2 + Y^2 - 2x_1X - 2y_1Y + (x_1^2 + y_1^2 - R_1^2) = 0$$
$$(II) \quad X^2 + Y^2 - 2x_2X - 2y_2Y + (x_2^2 + y_2^2 - R_2^2) = 0$$

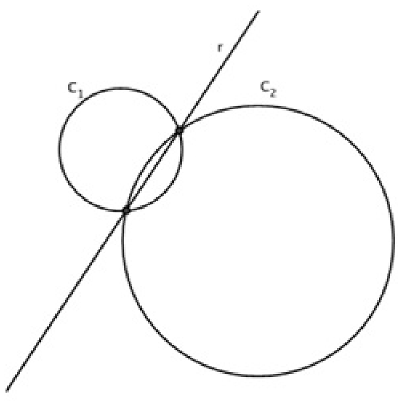
Subtraindo a equação (I) da equação (II), Obtemos a equação da reta r:

$$r : 2(x_1 - x_2)X + 2(y_1 - y_2)Y + (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + R_1^2 - R_2^2) = 0.$$

Então podemos também encontrar os pontos de interseção entre C_1 e C_2 pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} (X - x_1)^2 & + & (Y - y_1)^2 & = & R_1^2 \\ r & : & 2(x_1 - x_2)X & + & 2(y_1 - y_2)Y & + & (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + R_1^2 - R_2^2) & = & 0 \end{cases}$$

Observe geometricamente:



Substituindo a equação de r na equação de C_1, obtemos uma equação quadrática em uma única variável, cujas soluções produzem os dois pontos de interseção, geralmente distintos, $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap r = C_2 \cap r$, os quais coincidem se, e somente se o discriminante da equação quadrática for igual a zero.

Temos então que C_1 e C_2 vão ser tangentes se, e somente se, esses pontos coincidirem, ou seja, duas circunferências C_1 e C_2 são tangentes se, e somente se:

$$d(O_1, O_2)^2 = (R_1 + R_2)^2 \text{ ou } d(O_1, O_2)^2 = (R_1 - R_2)^2$$

Ou equivalentemente:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (R_1 + R_2)^2 \text{ ou } (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (R_1 - R_2)^2.$$

Para compreendermos melhor, vamos resolver o seguinte exemplo:

1. Calcular as circunferências que são tangentes a C_1 e a C_2 ao mesmo tempo, onde $C_1 : (X + 2)^2 + Y^2 = 1$ e $C_2 : (X - 2)^2 + Y^2 = 1$.

RESOLUÇÃO:
Sendo C a circunferência tangente a C_1 e C_2 onde centro de C é (x, y) e seu raio é R, temos quatro casos a observar:

1º Caso: A circunferência C é tangente externamente as circunferências C_1 e C_2.

Sendo C e C_1 tangentes externamente, então:

$$(x + 2)^2 + (y - 0)^2 = (R + 1)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = R^2 + 2R + 1$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1.$$

Sendo C e C_2 tangentes externamente, então:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (R + 1)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = R^2 + 2R + 1$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 + 2R + 1.$$

Resolvendo agora o sistema formado por essas duas equações, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 & (I) \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 & (II) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I), obtemos:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+4 &= R^2+2R+1 \\ 8x &= 0 \end{cases}$$

Substituindo agora $x=0$, na equação (I) temos:

$$y^2+4 = R^2+2R+1$$

$$R^2+2R-3-y^2 = 0.$$

Resolvendo essa equação com $R>0$, então:

$$R = \sqrt{y^2+4}-1.$$

2º Caso: C_1 e C_2 são internos a C.

Sendo C e C_1 tangentes internamente, então:

$$(x+2)^2+(y-0)^2 = (R-1)^2$$

$$x^2+4x+4+y^2 = R^2-2R+1$$

$$x^2+y^2+4x+4 = R^2-2R+1.$$

Sendo C e C_2 tangentes internamente, então:

$$(x-2)^2+(y-0)^2 = (R-1)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2 = R^2-2R+1$$

$$x^2+y^2-4x+4 = R^2-2R+1.$$

Resolvendo agora o sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+4 &= R^2-2R+1 \\ x^2+y^2-4x+4 &= R^2-2R+1 \end{cases}$$

Analogamente ao 1º Caso, obtemos a equação:

$$R^2-2R-3-y^2 = 0.$$

Resolvendo essa equação com $R > 0$, temos:

$$R = \sqrt{y^2 + 4} + 1.$$

3º Caso: C_1 é externo e C_2 é interno a C.

Sendo C e C_1 tangentes externamente, então:

$$x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1.$$

Sendo C e C_2 tangentes internamente, então:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 - 2R + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 &= R^2 + 2R + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 &= R^2 - 2R + 1 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira equação, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 &= R^2 + 2R + 1 \\ 8x &= 4R \end{cases}$$

Substituindo agora $x = \dfrac{R}{2}$, temos:

$$\frac{R^2}{4} + y^2 + 2R + 4 = R^2 + 2R + 1$$

$$\frac{3R^2}{4} - 3 - y^2 = 0.$$

Como $R > 0$, temos:

$$R = \sqrt{\frac{4y^2 + 12}{3}} + 1.$$

4º Caso: C_1 é interno e C_2 é externo a C.

Sendo C e C_1 tangentes internamente, então:

$$x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 - 2R + 1.$$

Sendo C e C_2 tangentes externamente, então:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 + 2R + 1.$$

Agora temos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 &= R^2 - 2R + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 &= R^2 + 2R + 1. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira equação, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 &= R^2 - 2R + 1 \\ 2x &= -R. \end{cases}$$

Substituindo agora $x = -\dfrac{R}{2}$, temos:

$$\frac{R^2}{4} + y^2 - 2R + 4 = R^2 - 2R + 1.$$

$$\frac{3R^2}{4} - 3 - y^2 = 0.$$

Como $R > 0$, temos:

$$R = \sqrt{\frac{4y^2 + 12}{3}} + 1.$$

vamos agora ao nosso problema, que é encontrar as circunferências tangentes a outras três circunferências.

Considere três circunferências:

$$\begin{aligned} C_1 &: (X-x_1)^2 + (Y-y_1)^2 = R_1^2 \\ C_2 &: (X-x_2)^2 + (Y-y_2)^2 = R_2^2 \\ C_3 &: (X-x_3)^2 + (Y-y_3)^2 = R_3^2. \end{aligned}$$

Então dizemos que uma circunferência C com centro (x, y) e raio R é tangente a essas três circunferências se, e somente se, é solução de um dos quatro sistemas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (x-x_1)^2 & + & (y-y_1)^2 & = & (R+R_1)^2 \\ (x-x_2)^2 & + & (y-y_2)^2 & = & (R+R_2)^2 \\ (x-x_3)^2 & + & (y-y_3)^2 & = & (R+R_3)^2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (x-x_1)^2 & + & (y-y_1)^2 & = & (R-R_1)^2 \\ (x-x_2)^2 & + & (y-y_2)^2 & = & (R+R_2)^2 \\ (x-x_3)^2 & + & (y-y_3)^2 & = & (R+R_3)^2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (x-x_1)^2 & + & (y-y_1)^2 & = & (R+R_1)^2 \\ (x-x_2)^2 & + & (y-y_2)^2 & = & (R-R_2)^2 \\ (x-x_3)^2 & + & (y-y_3)^2 & = & (R+R_3)^2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (x-x_1)^2 & + & (y-y_1)^2 & = & (R+R_1)^2 \\ (x-x_2)^2 & + & (y-y_2)^2 & = & (R+R_2)^2 \\ (x-x_3)^2 & + & (y-y_3)^2 & = & (R-R_3)^2. \end{array} \right.$$

Onde, o sinal do raio solução, R, identifica se as circunferências envolvidas são tangentes interiormente ou exteriormente.

Se estivermos no caso geral, onde nenhumas das três circunferências são degeneradas e estas estão em posição geral, cada sistema terá duas soluções, pois eles representam a interseção de uma reta com um cone, veja o seguinte exemplo:

Considere o sistema: $\left\{ \begin{array}{ccccc} (x-x_1)^2 & + & (y-y_1)^2 & = & (R+R_1)^2 \\ (x-x_2)^2 & + & (y-y_2)^2 & = & (R+R_2)^2 \\ (x-x_3)^2 & + & (y-y_3)^2 & = & (R+R_3)^2. \end{array} \right.$

Desenvolvendo as potências em cada equação, temos:

$$\begin{cases} x^2+y^2-R^2-2x_1x-2y_1y-2R_1R+(x_1^2+y_1^2-R_1^2) &= 0 \quad (I) \\ x^2+y^2-R^2-2x_2x-2y_2y-2R_2R+(x_2^2+y_2^2-R_2^2) &= 0 \quad (II) \\ x^2+y^2-R^2-2x_3x-2y_3y-2R_3R+(x_3^2+y_3^2-R_3^2) &= 0 \quad (III) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (I) das equações (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+2(R_1-R_2)R+(x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2-R_2^2+R_1^2) &= 0 \\ 2(x_1-x_3)x+2(y_1-y_3)y+2(R_1-R_3)R+(x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2-R_3^2+R_1^2) &= 0 \end{cases}$$

Daí, temos o sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-R^2-2x_1x-2y_1y-2R_1R+(x_1^2+y_1^2-R_1^2)=0(I) \\ 2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+2(R_1-R_2)R+(x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2-R_2^2+R_1^2) = 0 \quad (II) \\ 2(x_1-x_3)x+2(y_1-y_3)y+2(R_1-R_3)R+(x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2-R_3^2+R_1^2) = 0 \quad (III) \end{cases}$$

Observe que na fatoração da primeira equação desse sistema encontramos um cone e as demais representam dois planos, e como estão em posição geral a interseção resulta numa reta. Daí, fazendo a interseção dessa reta com a primeira equação teremos duas soluções para esse sistema e como temos quatro sistemas teremos então as oito soluções para o problema de Apolônio.

Para tentar compreendermos melhor, vamos resolver o exemplo:

Dadas três circunferências $C_1 : (X-1)^2+(Y-1)^2 = 1$, $C_2 : (X-3)^2+(Y-6)^2 = 4$ e $C_3 : (X-7)^2+Y^2 = 9$, vamos determinar as circunferências tangentes a C_1, C_2 e C_3.

RESOLUÇÃO:

Seja C um circunferência de centro (x,y) e raio R, tangente as três circunferências C_1, C_2 e C_3. De acordo com o que definimos acima essa circunferência C = (x,y,R) será tangente a C_1, C_2 e C_3 se, e somente se, for solução dos sistemas:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (R+1)^2 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = (R+2)^2 \\ (x-7)^2 + (y-0)^2 = (R+3)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 & + & (y-1)^2 & = & (R-1)^2 \\ (x-3)^2 & + & (y-6)^2 & = & (R+2)^2 \\ (x-7)^2 & + & (y-0)^2 & = & (R+3)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 & + & (y-1)^2 & = & (R+1)^2 \\ (x-3)^2 & + & (y-6)^2 & = & (R-2)^2 \\ (x-7)^2 & + & (y-0)^2 & = & (R+3)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 & + & (y-1)^2 & = & (R+1)^2 \\ (x-3)^2 & + & (y-6)^2 & = & (R+2)^2 \\ (x-7)^2 & + & (y-0)^2 & = & (R-3)^2. \end{cases}$$

Onde o sinal de R, identifica as circunferências tangentes interiormente ou exteriormente.

Resolvemos o primeiro sistema e analogamente apresentaremos as soluções dos outros sistemas:

$$\begin{cases} (x-1)^2 & + & (y-1)^2 & = & (R+1)^2 \\ (x-3)^2 & + & (y-6)^2 & = & (R+2)^2 \\ (x-7)^2 & + & (y-0)^2 & = & (R+3)^2. \end{cases}$$

Desenvolvendo as potências de cada equação, temos:

$$\begin{cases} x^2+y^2-R^2-2x-2y-2R+1 & = & 0 & (I) \\ x^2+y^2-R^2-6x-12y-4R+41 & = & 0 & (II) \\ x^2+y^2-R^2-14x-6R+40 & = & 0 & (III) \end{cases}$$

Subtraindo das equações (II) e (III) a equação (I), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-R^2-2x-2y-2R+1 & = & 0 & \\ -4x-10y-2R+40 & = & 0 & (IV) \\ -12x+2y-4R+39 & = & 0 & (V) \end{cases}$$

Fazendo agora a interseção entre as equações IV e V, obtemos:

Primeiro, multiplicando a equação (IV) por (- 3) e somando o resultado com a equação (V), temos:

$$y = \frac{81 - 2R}{32}$$

Multiplicando agora a equação (V) por 5 e somando o resultado com a equação (IV), obtemos:

$$x = \frac{235 - 22R}{64}$$

Como vimos acima, ao substituirmos essas retas na equação (I), obtemos uma equação quadrática em uma única variável que produzem dois pontos de interseção, veja:

$$(\frac{235 - 22R}{64})^2 + (\frac{81 - 2R}{32})^2 - R^2 - 2(\frac{235 - 22R}{64}) - 2(\frac{81 - 2R}{32}) - 2R + 1 = 0$$

$$\frac{55225 - 10340R + 484R^2}{4096} + \frac{6561 - 324R + 4R^2}{1024} - R^2 - \frac{235 - 22R}{32} - \frac{81 - 2R}{16} - 2R + 1 = 0$$

$$-3592R^2 - 16500R + 34749 = 0$$

logo,

$$R = -6,2$$

ou

$$R = 1,6$$

mas como R não pode ser negativo, temos:

$$R = 1,6$$

Daí, temos a circunferência de centro C = (3,1;2,4) e raio $R = 1,6$.

Se resolvermos o sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 & + & (y-1)^2 & = & (R-1)^2 \\ (x-3)^2 & + & (y-6)^2 & = & (R-2)^2 \\ (x-7)^2 & + & (y-0)^2 & = & (R-3)^2. \end{cases}$$

Encontraremos a circunferência com raio $R = 6,2$

Analogamente, na resolução dos outros três sistemas encontramos mais seis soluções. encontramos então as oito circunferências tangentes as três circunferências dadas.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, C. B., Historia da Matemática, trad. Gomide, E.F, São Paulo, Edgard Blucher, 1974

[2] Wagner, E. Construções Geométricas, Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[3] Morgado, A.C. ; Wagner E. Geometria II: métrica Plana. Rio de Janeiro: livraria Francisco Alves editora s.a., 1974.

[4] Pappus D. La collection Mathematique 2 vol, trad. Eecke, P.V. Paris, Falbert Blanchard, 1982.

[5] Mafalda, R. Resolução de problemas de tangência por inversão e aplicações a engenharia. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: São paulo, 2007

[6] Rovilson Mafalda, Alexandre Kawano, Uma Solução para o problema de Apolônio e suas construções com régua e compasso, Ghaphica 2007

[7] Silva, Itacira Ataide. Problema de Apolônio alguns números característicos das cônicas planas. dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernanbuco, Departamento de Matemática 2012 .