UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PEDRO KIOCHI KONDO

# CÁLCULO FINITO: DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

DISSERTAÇÃO

**PONTA GROSSA**

**2014**

PEDRO KIOCHI KONDO

# CÁLCULO FINITO: DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Marcos Calçada, Dr.

**PONTA GROSSA**

**2014**

**Ficha Catalográfica**
**Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG**

Kondo, Pedro Kiochi
K82 Cálculo finito: demonstrações e aplicações/ Pedro Kiochi Kondo. Ponta Grossa, 2014.
56f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Marcos Calçada.

1.Cálculo finito ou discreto. 2.Números de Stirling. 3.Somação. 4.Números de Bernoulli. 5.Polinômios de Bernoulli. I.Calçada, Marcos. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 515

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

PROFMAT

## TERMO DE APROVAÇÃO

# PEDRO KIOCHI KONDO

## "Cálculo Finito: Demonstrações e Aplicações"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Marcos Calçada

Orientador: Prof. Dr. Marcos Calçada
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Prof. Dr. Airton Kist
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Cleber de Medeira

Prof. Dr. Cleber de Medeira
Departamento de Matemática, UFPR/PR

**Ponta Grossa, 30 de Setembro de 2014.**

**Av. Carlos Cavalcanti, 4748, Campus Uvaranas – 84030-900, Ponta Grossa – Paraná**
**Fone: (42) 3220-3050 – E-mail: profmat_uepg@uepg.br**

*Dedico este trabalho à minha esposa, à minha filha, à minha irmã Sílvia (in memorian), aos amigos e, sobretudo, a Deus que suplantou o querer fazer. O que era um sonho, hoje é realidade. Nada se materializa sem investimento e sem luta. Exige determinação, paciência, perseverança e paixão...*

## AGRADECIMENTOS


- À todos os professores do PROFMAT - UEPG
- Ao professor Dr. Marcos Calçada pela sua orientação, dedicação, esforço e contribuição neste trabalho.
- Aos colegas que sacrificaram os finais de semana para juntos partilharmos de novos conhecimentos e novos desafios.
- A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- E a Deus, acima de tudo!
- À todos o meu MUITO OBRIGADO!

“A matemática tem sido frequentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo as suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam em busca de fundamentos sólido”.

(CARL BOYER).

## RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos alguns tópicos do Cálculo Discreto ou Finito. Em particular, estudamos operadores de diferenças, potências fatoriais, números de Stirling do primeiro e do segundo tipo, a fórmula de diferenças de Newton, o teorema fundamental do Cálculo Finito, o processo de somação e os números e polinômios de Bernoulli. Mostramos então a eficácia da teoria no cálculo de fórmulas fechadas para o valor de diversas somas finitas. Também estudamos o problema clássico de obter os polinômios que expressam o valor de somas de potências de números naturais.



**Palavras-chave:** Cálculo Finito ou Discreto, Números de Stirling, Somação, Números de Bernoulli, Polinômios de Bernoulli.

**ABSTRACT**

In this work some topics of the Discrete or Finite Calculus are developed. In particular, we study difference operators, factorial powers, Stirling numbers of the first and second type, the Newton's formula of differences, the fundamental theorem of the Finite Calculus, the summation process, and the Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials. Then we show the effectiveness of the theory for the calculation of closed formulas for the value of many finite sums. We also study the classical problem of obtaining the polynomials which express the value of the sums of powers of natural numbers.

**Keywords:** Finite or Discrete Calculus, Stirling Numbers, Summation, Bernoulli Numbers, Bernoulli Polynomials.

**LISTA DE TABELAS**

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho tratamos do Cálculo Finito e de algumas de suas aplicações. O Cálculo Finito ou Discreto tem uma longa história que antecede e relaciona-se com a do Cálculo Diferencial e Integral. Apesar disso, muitas vezes o Cálculo Finito é visto como o “primo pobre” do Cálculo Diferencial e Integral, ou pior ainda, como um detalhe dentro de algum método numérico de resolução de equações diferenciais. Todavia, veremos que o Cálculo Finito tem vida própria e possui muita beleza matemática.

O Cálculo Finito possui, efetivamente, várias aplicações em análise numérica tais como nos problemas de interpolação, diferenciação numérica, integração numérica e resolução numérica de equações diferenciais. Sendo assim, sua importância prática é inegável. Todavia, aqui nosso interesse é outro. Neste trabalho procuramos apresentar alguns elementos do Cálculo Finito com o intuito de aplicá-los em problemas de cálculo de fórmulas fechadas para diversas somas interessantes, sendo que algumas delas com grande importância na história da Matemática e, em particular, na da Teoria dos Números.

Muitas vezes, em Matemática, encontramos fórmulas envolvendo somas finitas, tais como a soma de termos de uma Progressão Geométrica ou Aritmética, a soma dos $n$ primeiros números naturais e etc, que precisam ser verificadas utilizando-se o princípio de indução matemática. É verdade que esse princípio nos permite dar uma prova rigorosa de tais asserções, todavia ele não nos dá nenhuma indicação de como eles podem ser obtidos ou descobertos. De fato, ao longo da história da Matemática diversas fórmulas foram descobertas para somas finitas interessantes através de técnicas engenhosas ou por pura experimentação numérica e posterior generalização. Veremos que o Cálculo Finito nos dá um método para calcular o valor de tais somas, que é totalmente análogo ao processo de integração do Cálculo Diferencial e Integral. Ou seja, nós poderemos *calcular* o valor de diversas somas finitas através do processo de *somação*.

O estudo do Cálculo Finito oferece também uma ponte entre o Ensino Médio e o Ensino Superior. Com efeito, como o Cálculo Finito é independente, pelo menos inicialmente, do Cálculo Diferencial e Integral, só que muito mais simples, já que não envolve o conceito de limite, ele pode ser estudado por um bom aluno do Ensino Médio. Por exemplo, na primeira parte deste trabalho faremos uso de conceitos e tópicos típicos do Ensino Médio tais como sequências, somas de termos de uma sequência, funções, polinômios, triângulo de Pascal, o princípio de indução matemática entre outros. Só na segunda parte nos permitiremos ver um pouco além fazendo uso do Cálculo Diferencial e Integral para explorar um pouco das relações entre o mundo da Matemática Discreta e o da Matemática do Contínuo.

Para realizar o presente trabalho utilizamos como referenciais teóricos e de apoio, os seguintes autores: Cuoco (2005), Gleich (2005), Graham; Knuth; Patashnik (1994), Spiegel (1971), Stopple (2003) e Young (1992). Passamos agora a descrever a organização e a disposição do trabalho. Inicialmente, discutiremos alguns conceitos e teoremas do Cálculo Finito, sendo que trataremos de apenas alguns tópicos bem específicos que nos permitirão fazer as aplicações do capítulo seguinte. Como nossas aplicações são na maioria relacionadas ao processo de somação para obter fórmulas fechadas de somas finitas, na primeira parte do trabalho nosso objetivo central é obter o Teorema Fundamental do Cálculo Finito, que é o análogo do Teorema Fundamental do Cálculo Diferencial e Integral. Nessa parte evitamos o uso de qualquer conceito do Cálculo Diferencial e Integral para tornar a exposição mais elementar e também para mostrar a independência dos dois Cálculos, o finito ou discreto e o contínuo. Todavia, é evidente para qualquer leitor com o mínimo de conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral a semelhança entre os Cálculos. Depois desses dois capítulos, procuramos explorar algumas das relações entre os dois Cálculos através do problema de encontrar uma fórmula fechada para a soma de potências dos $n$ primeiros números naturais. Para isso introduziremos os polinômios e os números de Bernoulli, que fazem uma ponte entre a Matemática Discreta ou Finita e a Matemática do Contínuo. Todavia, veremos apenas a ponta de um *iceberg*, pois as relações descobertas desde então são inúmeras. Para ler essa última parte é necessário, portanto, o conhecimento dos rudimentos do Cálculo Diferencial e Integral. No capítulo final, tecemos algumas considerações sobre o trabalho. E por fim, no apêndice apresentamos algumas atividades relacionadas ao Cálculo Finito que podem ser, talvez com algumas adaptações, trabalhadas pelo professor no Ensino Médio.

# 2 FUNDAMENTOS DO CÁLCULO FINITO

Para iniciarmos o estudo do Cálculo Finito é necessário definirmos alguns conceitos e fixarmos algumas notações.

Convencionamos neste trabalho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não inclui o número zero, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Uma **sequência** é então uma função de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R} \cup \{0\}$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Vamos denotar uma sequência por $(a_n)$, ou também, $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$, sendo que $a_1$ é o valor da sequência em 1 e é chamado de *primeiro termo* da sequência, $a_2$ é o valor da sequência em 2 e é chamado de *segundo termo* da sequência, e etc. Genericamente, $a_n$ é chamado de *n-ésimo termo* da sequência.

**Exemplo 1.** Como exemplos de sequências conhecidas e relevantes, podemos citar:

**(a)** $(a_n) = (1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n, \ldots)$ sequência dos números naturais;

**(b)** $(b_n) = (2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n, \ldots)$ sequência dos números naturais pares;

**(c)** $(c_n) = (1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1, \ldots)$ sequência dos números naturais ímpares;

**(d)** $(d_n) = (1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2, \ldots)$ sequência dos quadrados perfeitos;

**(e)** $(e_n) = (1,\ 8,\ 27,\ \ldots,\ n^3, \ldots)$ sequência dos cubos perfeitos;

**(f)** $(f_n) = (2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2^n, \ldots)$ sequência de potências de 2;

**(g)** $(p_n) = (2,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p_n, \ldots)$ sequência dos números primos;

Dadas duas sequências $(a_n)$ e $(b_n)$ definimos sua **soma** como sendo a sequência $(a_n + b_n)$, sua **diferença** como sendo a sequência $(a_n - b_n)$, seu **produto** como sendo a sequência

$(a_n b_n)$ e seu **quociente**, desde que $b_n$ seja não-nulo para todo $n$, como sendo a sequência $(a_n/b_n)$.

Dada uma sequência $(a_n) = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$ de números reais, definimos uma nova sequência $(\Delta\, a_n) = (\Delta\, a_1,\ \Delta\, a_2,\ \Delta\, a_3,\ \ldots)$ através de

$$\Delta\, a_n = a_{n+1} - a_n, \tag{2.1}$$

onde n $\in \mathbb{N}$. Assim,

$$(\Delta\, a_n) = (a_2 - a_1\ ,\ a_3 - a_2\ ,\ a_4 - a_3\ ,\ \ldots).$$

Por exemplo, se $(a_n) = (2\,n + 1)$ então

$$\Delta\, a_n = a_{n+1} - a_n = [2\,(n+1)+1] - [2\,n+1] = 2,$$

ou seja, $(\Delta\, a_n) = (2,\ 2,\ 2,\ \ldots)$ é uma sequência constante.

A função ou transformação que associa a sequência $(a_n)$ a outra sequência $(\Delta\, a_n)$ é chamada de **operador diferença** $(\Delta)$.

O **operador diferença de segunda ordem** $(\Delta^2)$ é a função que leva a sequência $(a_n)$ na sequência $(\Delta\,(\Delta\, a_n))$, ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta^2\, a_n &= \Delta\,(\Delta\, a_n) = \Delta\,(a_{n+1} - a_n) \\ &= (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+2} - 2\,a_{n+1} + a_n.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Por exemplo, se $(a_n) = (3n^2 + 1)$ então

$$\begin{aligned}\Delta^2\, a_n &= [3(n+2)^2+1] - 2\,[3(n+1)^2+1] + [3n^2+1] \\ &= (3n^2 + 12\,n + 13) - 2\,(3n^2 + 6\,n + 4) + (3n^2+1) \\ &= 6.\end{aligned}$$

Também podemos calcular primeiro $(\Delta\, a_n)$:

$$\Delta\, a_n = a_{n+1} - a_n = [(n+1)^2+1] - (n^2+1) = 2\,n+1,$$

e daí $(\Delta^2\, a_n) = (\Delta\,(\Delta\, a_n))$:

$$\Delta^2\, a_n = \Delta\, a_{n+1} - \Delta\, a_n = (2\,(n+1)+1) - (2\,n+1) = 2.$$

Um outro operador interessante é o **operador de deslocamento** $(E)$. Ele transforma a sequência $(a_n)$ na sequência $(E\ a_n) = (a_{n+1})$.

Por exemplo, se $(a_n) = (5\ n^3 + 2)$ então

$$E\ a_n = a_{n+1} = 5\ (n+1)^3 + 2.$$

Assim como antes, podemos definir o **operador de deslocamento de segunda ordem** $(E^2)$ através de:

$$E^2\ a_n = E\ (E\ a_n).$$

Portanto,

$$E^2\ a_n = E\ (a_{n+1}) = a_{n+2}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais geralmente, definimos de maneira indutiva os operadores **diferença de ordem** $k$ e de **deslocamento de ordem** $k$ através de:

$$\Delta^k\ a_n = \Delta\ (\Delta^{k-1}\ a_n)\ , \tag{2.3}$$

$$E^k\ a_n = E\ (E^{k-1}\ a_n)\ , \tag{2.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e para todo $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$, respectivamente.

É fácil verificar que

$$E^k\ a_n = a_{n+k}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

e mais adiante na demonstração do Teorema 2.8, vamos encontrar uma fórmula para $\Delta^k$ que generaliza (2.2).

As definições (2.3) e (2.4) estendem-se para $k = 1$ se definirmos

$$\Delta^0\ a_n = a_n\ ,$$

$$E^0\ a_n = a_n\ , \tag{2.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Também vamos escrever

$$\Delta^0 = E^0 = I, \tag{2.7}$$

onde $I$ é o **operador identidade**.

De maneira natural, se $A$ e $B$ são operadores quaisquer que atuam sobre sequências, definimos novos operadores, $A+B$ e $A-B$ através de

$$(A+B)\ a_n = A\ a_n + B\ a_n, \tag{2.8}$$

$$(A-B)\ a_n = A\ a_n - B\ a_n, \tag{2.9}$$

sendo $(a_n)$ uma sequência arbitrária.

Agora,

$$\Delta\, a_n = a_{n+1} - a_n = E\ a_n - I\ a_n = (E-I)\ a_n\ ,$$

e assim temos

$$\Delta = E - I \quad \text{e} \quad E = \Delta + I. \tag{2.10}$$

**Teorema 2.1.** *Se $(a_n)$ e $(b_n)$ são sequências quaisquer e $\alpha$ é um número real arbitrário, temos*

**i)** $\Delta\,(a_n + b_n) = \Delta\, a_n + \Delta\, b_n$ *; (Regra da soma)*

**ii)** $\Delta\,(\alpha\, a_n) = \alpha\, \Delta\, a_n$ *; (Produto de uma sequência por escalar)*

**iii)** $\Delta\,(a_n\, b_n) = a_n\, \Delta\, b_n + b_{n+1}\, \Delta\, a_n$ *(Regra do Produto)*
$= b_n\, \Delta\, a_n + a_{n+1}\, \Delta\, b_n$
$= a_n\, \Delta\, b_n + b_n\, \Delta\, a_n + \Delta\, a_n\, \Delta\, b_n$ *;*

**iv)** $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{b_n\, \Delta\, a_n - a_n\, \Delta\, b_n}{b_n\, b_{n+1}}\ , \quad se \quad b_n \neq 0\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ *(Regra do quociente).*

Demonstração:

**i)** $\Delta\,(a_n + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n)$
$= (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$
$= \Delta\, a_n + \Delta\, b_n.$

**ii)** $\Delta\,(\alpha\, a_n) = \alpha\, a_{n+1} - \alpha\, a_n$
$= \alpha\, (a_{n+1} - a_n)$
$= \alpha\, \Delta\, a_n.$

**iii)** $\Delta\,(a_n\, b_n) = a_{n+1}\, b_{n+1} - a_n\, b_n$

$= a_{n+1}\, b_{n+1} - a_n\, b_{n+1} + a_n\, b_{n+1} - a_n\, b_n$

$= (a_{n+1} - a_n)\, b_{n+1} + a_n\, (b_{n+1} - b_n)$

$= b_{n+1}\,\Delta\, a_n + a_n\,\Delta\, b_n.$

A outra fórmula,

$$\Delta\,(a_n\, b_n) = b_n\,\Delta\, a_n + a_{n+1}\,\Delta\, b_n,$$

é obtida de forma semelhante (ou permutando-se $a_n$ e $b_n$).

Por fim,

$$\begin{aligned} b_{n+1}\,\Delta\, a_n + a_n\,\Delta\, b_n &= b_{n+1}\,\Delta\, a_n - b_n\,\Delta\, a_n + b_n\,\Delta\, a_n + a_n\,\Delta\, b_n \\ &= a_n\,\Delta\, b_n + b_n\,\Delta\, a_n + (b_{n+1} - b_n)\Delta\, a_n \\ &= a_n\,\Delta\, b_n + b_n\,\Delta\, a_n + \Delta\, a_n\,\Delta\, b_n. \end{aligned}$$

**iv)** $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \dfrac{a_n}{b_n}$

$= \dfrac{a_{n+1}\, b_n - a_n\, b_{n+1}}{b_n\, b_{n+1}}$

$= \dfrac{a_{n+1}\, b_n - a_n\, b_n + a_n\, b_n - a_n\, b_{n+1}}{b_n\, b_{n+1}}$

$= \dfrac{(a_{n+1} - a_n)\, b_n - (b_{n+1} - b_n)a_n}{b_n\, b_{n+1}}$

$= \dfrac{b_n\,\Delta\, a_n - a_n\,\Delta\, b_n}{b_n\, b_{n+1}}.$

■

Para melhor ilustrar a aplicação das propriedades operatórias e do operador diferença $\Delta$ em sequências, vamos exemplificar.

**Exemplo 2.** Se $a_n = n^2 + 5\, n$ e $b_n = n^3$ então

$$\begin{aligned} \Delta\, a_n &= [(n+1)^2 + 5\,(n+1)] - (n^2 + 5\, n) = 2\, n + 6, \\ \Delta\, b_n &= (n+1)^3 - n^3 = 3\, n^2 + 3\, n + 1, \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} \Delta\,(a_n + b_n) &= \Delta\, a_n + \Delta\, b_n \\ \Delta\,(n^2 + 5\, n + n^3) &= (2\, n + 6) + (3\, n^2 + 3\, n + 1) \\ &= 3\, n^2 + 5\, n + 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\,(10\,b_n) &= 10\,\Delta\,b_n\\
\Delta(10\,n^3) &= 10\,(3\,n^2+3\,n+1)\\
&= 30\,n^2+30\,n+10.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\,(a_n\,b_n) &= \Delta\,a_n\,b_n+a_{n+1}\,\Delta\,b_n\\
\Delta(n^5+5\,n^4) &= (2\,n+6)\,n^3+[2\,(n+1)+6]\,(3\,n^2+3\,n+1)\\
&= 8\,n^4+6\,n^3+30\,n^2+26\,n+8.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{b_n}{a_n}\right) &= \frac{a_n\,\Delta\,b_n-b_n\,\Delta\,a_n}{a_{n+1}\,a_n}\\
\Delta\left(\frac{n^3}{n^2+5\,n}\right) &= \frac{(n^2+5\,n)\,(3\,n^2+3\,n+1)-n^3\,(2\,n+6)}{[(n+1)^2+5\,(n+1)]\,[n^2+5\,n]}\\
&= \frac{n^4+12\,n^3+16\,n^2+5\,n}{(n^2+7\,n+6)\,(n^2+5\,n)}.
\end{aligned}$$

Seja $m\in\mathbb{N}$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ definimos a sua ***m*****-ésima potência fatorial**, denotada por $n^{\underline{m}}$, através de

$$n^{\underline{m}}=n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-m+1). \tag{2.11}$$

Assim, por exemplo, temos

$$\begin{aligned}
n^{\underline{1}} &= n\,,\\
n^{\underline{2}} &= n\,(n-1)\,,\\
n^{\underline{3}} &= n\,(n-1)\,(n-2)\,.
\end{aligned}$$

Por conveniência define-se $n^{\underline{0}}=1$.

Agora, se $m$ é um número inteiro negativo, definimos:

$$n^{\underline{m}}=\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,\cdots\,(n-m)}. \tag{2.12}$$

Logo, por exemplo,

$$\begin{aligned} n^{\underline{-1}} &= \frac{1}{n+1}\,, \\ n^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\,, \\ n^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}\,. \end{aligned}$$

**Teorema 2.2.** *Para todo número inteiro m, temos*

$$\Delta n^{\underline{m}} = m\, n^{\underline{m-1}}.$$

Demonstração:
Se $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \Delta\, n^{\underline{m}} &= (n+1)^{\underline{m}} - n^{\underline{m}} \\ &= (n+1)\,(n+1-1)\,\cdots\,(n+1-m+1) - (n)\,(n-1)\,\cdots\,(n-m+1) \\ &= (n+1)\,(n)\cdots(n-m+2) - n\,(n-1)\cdots(n-m+2)\,(n-m+1) \\ &= n\,(n-1)\,\cdots\,(n-m+2)\,[(n+1)-(n-m+1)] \\ &= m\, n^{\underline{m-1}}. \end{aligned}$$

Se $m = 0$ então,

$$\Delta\, n^{\underline{m}} = \Delta\, n^{\underline{0}} = \Delta\, 1 = 1 - 1 = 0 = 0\, n^{\underline{-1}}.$$

Por fim, se $m$ é um número inteiro negativo, temos

$$\begin{aligned} \Delta\, n^{\underline{m}} &= (n+1)^{\underline{m}} - n^{\underline{m}} \\ &= \frac{1}{(n+2)\,(n+3)\,\cdots\,(n+1-m)} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,\cdots\,(n-m)} \\ &= \left(\frac{1}{n+1-m} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{(n+2)\,(n+3)\,\cdots\,(n-m)}\right) \\ &= \frac{m}{(n-m+1)\,(n+1)}\,\frac{1}{(n+2)\,(n+3)\,\cdots\,(n-m)} \\ &= m\,\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,\cdots\,(n-m+1)} \\ &= m\, n^{\underline{m-1}}. \end{aligned}$$

■

Observe que pela própria definição $n^{\underline{m}}$ é um polinômio de grau $m$ em $n$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} n^{\underline{1}} &= n\,, \\ n^{\underline{2}} &= n^2 - n\,, \\ n^{\underline{3}} &= n^3 - 3\,n^2 + 2\,n\,, \\ n^{\underline{4}} &= 6\,n^3 + 11\,n^2 - 6\,n\,. \end{aligned}$$

Também é possível expressar potências comuns $n^m$ em termos de potências fatoriais. De fato, não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} n^1 &= n^{\underline{1}}, \\ n^2 &= n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}, \\ n^3 &= n^{\underline{3}} + 3\,n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}, \\ n^4 &= n^{\underline{4}} + 6\,n^{\underline{3}} + 7\,n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}. \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é provar que sempre é possível escrever $n^{\underline{m}}$ como uma combinação linear de $n, n^2, \ldots, n^m$ com coeficientes inteiros e $n^m$ como combinação linear de $n^{\underline{1}}, n^{\underline{2}}, \ldots, n^{\underline{m}}$ com coeficientes inteiros. Além disso, vamos discutir como calcular tais coeficientes de maneira recursiva.

Para isso, introduzimos os **números de Stirling do primeiro tipo**, denotados por $\left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right]$, da seguinte forma:

$$\left[\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix}\right] = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad m = 0, \\ 0, & \text{se} \quad m > 0. \end{cases}$$

e

$$\left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right] = 0, \quad \text{se} \quad k > m \quad \text{ou} \quad k < 0.$$

Por fim, definimos de maneira recursiva

$$\left[\begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} m \\ k-1 \end{matrix}\right] + m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right]. \tag{2.13}$$

Usando essa definição podemos construir a Tabela 1 para $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$.

Vamos determinar o número de *Stirling* do primeiro tipo para $m = 5$ e $k = 3$, cujo valor na Tabela 1 corresponde a 35.

| $m$ | $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m \\ 5 \end{bmatrix}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 6 | 11 | 6 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 |

**Tabela 1: Alguns Números de Stirling do primeiro tipo.**

Usando a fórmula recursiva, temos

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 11 + 4 \cdot 6 = 35$$

**Teorema 2.3.** *Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$n^{\underline{m}} = \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} (-1)^{m-k}\, n^k, \forall n. \tag{2.14}$$

Demonstração:

Vamos fazer a demonstração usando o Princípio de Indução Matemática.

Se $m = 1$, então $n^{\underline{m}} = n$ e

$$\sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} (-1)^{m-k}\, n^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-1)^{1-1} n^1 = n.$$

Assim, é verdadeira a fórmula $(2.14)$ se $m = 1$.

Suponhamos agora que seja válida a fórmula $(2.14)$ para a $m$-ésima potência fatorial.

Vamos verificar a validade da fórmula $(2.14)$ para a $(m+1)$-ésima potência fatorial, ou seja,

$$n^{\underline{m+1}} = \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^{m+1-k}\, n^k.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^{m+1-k}\, n^k = \\
= \; & \sum_{k=1}^{m+1} \left( \begin{bmatrix} m \\ k-1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \right) (-1)^{m+1-k}\, n^k \\
= \; & \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m \\ k-1 \end{bmatrix} (-1)^{m+1-k}\, n^k + m \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} (-1)^{m+1-k}\, n^k \\
= \; & n \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m \\ k-1 \end{bmatrix} (-1)^{m-(k-1)}\, n^{k-1} - m \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} (-1)^{m-k}\, n^k \\
= \; & n \sum_{j=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} (-1)^{m-j}\, n^j - m\, n^{\underline{m}} \\
= \; & n \sum_{j=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} (-1)^{m-j}\, n^j - m\, n^{\underline{m}} \\
= \; & n\, n^{\underline{m}} - m\, n^{\underline{m}} \\
= \; & (n-m)\, n^{\underline{m}} \\
= \; & n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\,(n-m) \\
= \; & n^{\underline{m+1}}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula $(2.14)$ é válida para todo $m \in \mathbb{N}$.

■

Os **números de Stirling do segundo tipo**, denotados por $\left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\}$, são definidos da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad m = 0 \\ 0, & \text{se} \quad m > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad \text{se} \quad k > m \quad \text{ou} \quad k < 0.$$

e de maneira recursiva

$$\left\{\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array}\right\} = k\left\{\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array}\right\}. \tag{2.15}$$

Usando essa definição, obtemos a Tabela 2 para $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$.

| $m$ | $\left\{\begin{array}{c} m \\ 0 \end{array}\right\}$ | $\left\{\begin{array}{c} m \\ 1 \end{array}\right\}$ | $\left\{\begin{array}{c} m \\ 2 \end{array}\right\}$ | $\left\{\begin{array}{c} m \\ 3 \end{array}\right\}$ | $\left\{\begin{array}{c} m \\ 4 \end{array}\right\}$ | $\left\{\begin{array}{c} m \\ 5 \end{array}\right\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

**Tabela 2: Alguns Números de Stirling do segundo tipo.**

Vamos determinar o número de *Stirling* do segundo tipo para $m = 5$ e $k = 3$, cujo valor na Tabela 2 corresponde a 25.

Usando a fórmula recursiva, temos

$$\left\{\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right\} = 3\left\{\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right\} = 3 \cdot 6 + 7 = 25$$

**Teorema 2.4.** *Para todo $m,\ n,\ k \in \mathbb{N}$, temos*

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \left\{\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right\} n^{\underline{k}},\ \forall n\ \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Demonstração:

Vamos usar o Princípio de Indução Matemática.

Se $m=1$ , então $n^m = n^1 = n$ e

$$\sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k}} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} n^{\underline{1}} = n.$$

Assim, a fórmula é válida no caso $m=1$.

Suponhamos agora que seja válida a fórmula (2.16) para o expoente $m$. Vamos mostrar que vale então a fórmula para o expoente $m+1$, ou seja,

$$n^{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k}}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k}} = \\
= \;& \sum_{k=1}^{m+1} \left( k \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right\} \right) n^{\underline{k}} \\
= \;& \sum_{k=1}^{m+1} k \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right\} n^{\underline{k}} \\
= \;& \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} \left( n\, n^{\underline{k}} - n^{\underline{k+1}} \right) + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right\} n^{\underline{k}} \\
= \;& n \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k}} - \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right\} n^{\underline{k}} \\
= \;& n \sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k}} - \sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k+1}} + \sum_{j=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right\} n^{\underline{j+1}} \\
= \;& n\, n^m - \sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} n^{\underline{k+1}} + \sum_{j=1}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right\} n^{\underline{j+1}} \\
= \;& n^{m+1}.
\end{aligned}$$

Na terceira igualdade usamos a identidade $k\, n^{\underline{k}} = n\, n^{\underline{k}} - n^{\underline{k+1}}$ que pode facilmente ser verificada. Pelo Princípio de Indução Matemática a fórmula (2.16) é válida para todo $m \in \mathbb{N}$.

■

O **operador diferença** $\Delta$ não possui um inverso pois não é injetor. De fato, se duas sequências $(a_n)$ e $(b_n)$ diferem por uma constante $c$, ou seja,

$$b_n = a_n + c,$$

então

$$\Delta\, b_n = \Delta\,(a_n + c) = \Delta\, a_n + \Delta\, c = \Delta\, a_n + 0 = \Delta\, a_n.$$

Na verdade, se duas sequências $(a_n)$ e $(b_n)$ têm a mesma imagem pelo **operador** $\Delta$, ou seja, se

$$\Delta\, a_n = \Delta\, b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então existe uma constante $c$, tal que,

$$b_n = a_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, basta tomar $c = b_n - a_n$. Então, $b_n = a_n + c$ por definição. Supondo que $b_n = a_n + c$ (hipótese de indução) e usando a hipótese de que $\Delta\, a_n = \Delta\, b_n$, ou seja, $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n$, obtemos

$$b_{n+1} = (b_n - a_n) + a_{n+1} = c + a_{n+1}.$$

Assim pelo Princípio de Indução Matemática, $b_n = a_n + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência $(c_n)$ tal que

$$\Delta\, c_n = a_n\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,$$

é chamada **antidiferença** de $(a_n)$. Pelo que vimos anteriormente, quaisquer duas antidiferenças de uma determinada sequência diferem por uma (sequência) constante.

Vamos chamar de $\left(\sum a_n\right)$ a família de antidiferenças de $(a_n)$.

Por exemplo, como

$$\Delta\left(\frac{n^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\Delta\, n^3 = \frac{1}{3} 3\, n^2 = n^2\ ,$$

a sequência $\left(\frac{n^3}{3}\right)$ é uma antidiferença da sequência $(n^2)$. Além disso, podemos escrever

$$\sum n^2 = \frac{n^3}{3} + c\ ,$$

para indicar que todas as antidiferenças de $(n^2)$ têm essa forma. De modo geral, podemos escrever

$$\sum n^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} + c\,, \quad \text{para} \quad m \neq -1 \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

**Teorema 2.5** (Teorema Fundamental do Cálculo Finito)**.** *Se* $\sum a_n = b_n$ *, então*

$$\sum_{k=\ell}^{m-1} a_k = b_m - b_\ell\,,$$

*onde* $\ell$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $\ell < m$.

Demonstração:

Como $\sum a_n = b_n$ , temos $\Delta\, b_n = a_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\ell}^{m-1} a_k &= \sum_{k=\ell}^{m-1} \Delta\, b_k = \sum_{k=\ell}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) \\
&= (b_{\ell+1} - b_\ell) + (b_{\ell+2} - b_{\ell+1}) + (b_{\ell+3} - b_{\ell+2}) + \cdots + (b_m - b_{m-1}) \\
&= b_m - b_\ell.
\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.6** (Fórmula de Somação por Partes)**.** *Temos*

$$\sum a_n\, \Delta\, b_n = a_n\, b_n - \sum \Delta\, a_n\, b_{n+1}.$$

Demonstração:

De fato, usando o Teorema 2.1 - iii) obtemos

$$\begin{aligned}
& \Delta\, \left(a_n\, b_n - \sum \Delta\, a_n\, b_{n+1}\right) \\
=\ & \Delta\, (a_n\, b_n) - \Delta\, a_n\, b_{n+1} \\
=\ & b_{n+1}\, \Delta\, a_n + a_n\, \Delta\, b_n - b_{n+1}\, \Delta\, a_n \\
=\ & a_n\, \Delta\, b_n.
\end{aligned}$$

■

Usando os Teoremas 2.5 e 2.6 podemos escrever

$$\sum_{k=\ell}^{m-1} a_k\, \Delta\, b_k = a_n\, b_n \Big|_{\ell}^{m} - \sum_{k=\ell}^{m-1} \Delta\, a_k\, b_{k+1}\,, \tag{2.18}$$

onde introduzimos a notação $a_n\, b_n \Big|_{\ell}^{m} = a_m\, b_m - a_\ell\, b_\ell$.

O **coeficiente binomial** $n$ sobre $k$, denotado por $\binom{n}{k}$, é definido para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos os $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $0 \leq k \leq n$ da seguinte forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{2.19}$$

Para os coeficientes binomiais valem as seguintes propriedades:

**a)** $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$.

**b)** $\displaystyle \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

**c)** $\displaystyle \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ se $k \geq 1$. (Relação de Stifel) (2.20)

Demonstração:

**a)** $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)\cdot(n-k)\,\cdots\,2\,\cdot\,1}{k!\,(n-k)!} =$
$\displaystyle \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$.

**b)** Observe que se $0 \leq k \leq n$, também é válido $0 \leq n-k \leq n$. E pela definição, temos

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

**c)** Se $k \geq 1$ calculamos

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,[n-(k-1)]!} =$$
$$\frac{n!\,(n-k+1) + n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,[(n+1)-k]!} = \binom{n+1}{k}.$$

■

Alguns valores específicos de coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

**Teorema 2.7** (Teorema Binomial)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a,b \in \mathbb{R}$ temos*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k. \tag{2.21}$$

Demonstração:
A demonstração será feita usando Indução Matemática sobre $n$.

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\, b^k \\ &= \binom{1}{0} a^{1-0}\, b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1}\, b^1 \\ &= (a+b). \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula $(2.21)$ é verdadeira se $n = 1$.

Suponha que a fórmula $(2.21)$ é válida para $n$. Vamos então mostrar a validade da fórmula para $(n+1)$,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k.$$

De fato, para isto basta multiplicar ambos os lados de $(2.21)$ por $(a+b)$ e usando $(2.20)$ obtemos:

$$\begin{aligned} (a+b)^n\,(a+b) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\right)(a+b) \\ (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}\, b^k \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}\, b^k \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática a fórmula $(2.21)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Podemos escrever os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ de modo ordenado no conhecido **Triângulo de Pascal**. Observe a Tabela 3, que é obtida recursivamente utilizando a relação de Stifel (2.20),

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

| $n$ | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{4}$ | $\binom{n}{5}$ | $\cdots$ | $\binom{n}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | |
| $n$ | 1 | $n$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | 1 |

**Tabela 3: Triângulo de Pascal.**

Usualmente escrevemos os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ e acrescentamos ainda $\binom{0}{0} = 1$ (Tabela 3), cuja $n$-ésima linha fornece os coeficientes no desenvolvimento de (2.21) para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ .

Vamos determinar o coeficiente binomial, cujo valor na Tabela 3 corresponde a 6.

Usando a relação de Stifel, temos

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3+3 = 6.$$

**Teorema 2.8.** *Para todo* $m \in \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *temos*

$$\Delta^n\, a_m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k\, a_m. \tag{2.22}$$

Demonstração:
A demonstração será feita usando Indução Matemática sobre $n$.

Para $n = 0$, o lado esquerdo de (2.22) é

$$\Delta^0 \, a_m = I \, a_m = a_m,$$

e o lado direito é

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} E^k \, a_m = (-1)^{0-0} \binom{0}{0} E^0 \, a_m = a_m.$$

Portanto, a fórmula (2.22) é verdadeira se $n = 0$.

Suponha que a fórmula (2.22) é válida para $n$. Vamos então mostrar a validade da fórmula para $(n+1)$,

$$\Delta^{n+1} \, a_m = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \binom{n+1}{k} E^k \, a_m.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} \, a_m &= \Delta \left( \Delta^n \, a_m \right) \\
&= \Delta \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, a_m \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, \Delta \, a_m \,,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema 2.1 e o fato, que pode ser verificado facilmente,

$$\Delta \, E^k = E^k \, \Delta,$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (Dizemos que os *operadores* $\Delta$ e $E^k$ comutam). Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} \, a_m &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, a_{m+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, a_m \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^{k+1} \, a_m - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, a_m \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{n-\ell+1} \binom{n}{\ell-1} E^\ell \, a_m - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, a_m \\
&= (-1)^0 \binom{n}{n} E^{n+1} \, a_m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k-1} E^k \, a_m \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \, a_m - (-1)^{n-0} \binom{n}{0} E^0 \, a_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E^{n+1}\, a_m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\} E^k\, a_m - (-1)^n\, E^0\, a_m \\
&= E^{n+1}\, a_m + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k+1} \binom{n+1}{k} E^k\, a_m + (-1)^{n+1}\, E^0\, a_m \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} E^k\, a_m.
\end{aligned}$$

Segue-se então do Princípio de Indução Matemática que a fórmula (2.22) vale para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

■

A fórmula (2.22) pode ser obtida formalmente utilizando a identidade $\Delta = E - I$ e o Teorema Binomial (2.21). De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta^n &= (E-I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E^k (-I)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, E^k.
\end{aligned}$$

**Teorema 2.9.** *Seja $p\,(n)$ um polinômio de grau $m$. Então vale a* ***fórmula de diferenças de Newton****:*

$$p\,(n) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k p\,(0) \binom{n}{k}.$$

Demonstração:
Primeiro note que qualquer polinômio $p\,(n)$ de grau $m$ pode ser escrito como

$$p\,(n) = a_m\, n^{\underline{m}} + a_{m-1}\, n^{\underline{m-1}} + \cdots + a_1\, n^{\underline{1}} + a_0\,,$$

para certos coeficientes reais $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$, com $a_m \neq 0$. De fato, basta utilizar o Teorema 2.4.

Agora, pelo Teorema 2.2 temos que

$$\Delta^r n^{\underline{k}} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad r > k, \\ k^{\underline{r}} n^{\underline{k-r}}, & \text{se} \quad 0 \leq r \leq k. \end{cases}$$

Logo,

$$\Delta^r n^{\underline{k}}\Big|_{n=0} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad r \neq k\,, \\ k!, & \text{se} \quad r = k\,, \end{cases}$$

e daí,

$$\Delta^r\, p\,(0) = a_r\, r!\,,$$

para $0 \leq r \leq n$. Sendo assim, podemos escrever

$$p\,(n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k\, p\,(0)}{k!}\, n^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k\, p\,(0) \binom{n}{k}\,,$$

pois

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)\,!\,k!} = \binom{n}{k}\,,$$

se $0 \leq k \leq n$.

$\blacksquare$

# 3 ALGUMAS APLICAÇÕES DO CÁLCULO FINITO

Neste capítulo vamos fazer várias aplicações da teoria que desenvolvemos no capítulo anterior.

**Aplicação I.** Vamos obter uma fórmula para a soma

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m},$$

quando $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ e $5$.

Para $m = 1$ temos $k^{\underline{1}} = k^{1}$ , e assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k^{\underline{1}} = \left.\frac{k^{\underline{2}}}{2}\right|_{1}^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} - \frac{1^{\underline{2}}}{2} \\ &= \frac{(n+1)\,n}{2} - \frac{1\cdot 0}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}\ . \end{aligned}$$

Agora, para $m = 2$ temos $k^{2} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} k^{\underline{1}} + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right\} k^{\underline{2}} = k^{\underline{1}} + k^{\underline{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^{2} &= \sum_{k=1}^{n} (k^{\underline{1}} + k^{\underline{2}}) \\ &= \left.\frac{k^{\underline{2}}}{2} + \frac{k^{\underline{3}}}{3}\right|_{1}^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} + \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} - \frac{1^{\underline{2}}}{2} - \frac{1^{\underline{3}}}{3} \\ &= \frac{(n+1)\ (n)}{2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} - 0 \\ &= \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Para $m = 3$ temos

$$k^{3} = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\} k^{\underline{1}} + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\} k^{\underline{2}} + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} k^{\underline{3}} = k^{\underline{1}} + 3\,k^{\underline{2}} + k^{\underline{3}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} (k^{\underline{1}} + 3\,k^{\underline{2}} + k^{\underline{3}}) \\
&= \left.\frac{k^{\underline{2}}}{2} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{4}}}{4}\right|_1^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} + (n+1)^{\underline{3}} + \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{4} - \frac{1^{\underline{2}}}{2} - 1^{\underline{3}} - \frac{1^{\underline{4}}}{4} \\
&= \frac{(n+1)\,n}{2} + (n+1)\,n\,(n-1) + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4} - 0 \\
&= \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 .
\end{aligned}$$

Para $m = 4$ temos

$$\begin{aligned}
k^4 &= \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} k^{\underline{1}} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} k^{\underline{2}} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} k^{\underline{3}} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} k^{\underline{4}} \\
&= k^{\underline{1}} + 7\,k^{\underline{2}} + 6\,k^{\underline{3}} + k^{\underline{4}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{k=1}^{n} (k^{\underline{1}} + 7\,k^{\underline{2}} + 6\,k^{\underline{3}} + k^{\underline{4}}) \\
&= \left.\frac{k^{\underline{2}}}{2} + \frac{7\,k^{\underline{3}}}{3} + \frac{3\,k^{\underline{4}}}{2} + \frac{k^{\underline{5}}}{5}\right|_1^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} + \frac{7\,(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{3\,(n+1)^{\underline{4}}}{2} + \frac{(n+1)^{\underline{5}}}{5} - 0 \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,(3\,n^2 + 3\,n - 1)}{30}.
\end{aligned}$$

Para $m = 5$ temos

$$\begin{aligned}
k^5 &= \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right\} k^{\underline{1}} + \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\} k^{\underline{2}} + \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} k^{\underline{3}} + \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\} k^{\underline{4}} + \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \right\} k^{\underline{5}} \\
&= k^{\underline{1}} + 15\,k^{\underline{2}} + 25\,k^{\underline{3}} + 10\,k^{\underline{4}} + k^{\underline{5}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \sum_{k=1}^{n} (k^{\underline{1}} + 15\,k^{\underline{2}} + 25\,k^{\underline{3}} + 10\,k^{\underline{4}} + k^{\underline{5}}) \\
&= \left.\frac{k^{\underline{2}}}{2} + 5\,k^{\underline{3}} + \frac{25\,k^{\underline{4}}}{4} + 2\,k^{\underline{5}} + \frac{k^{\underline{6}}}{6}\right|_1^{n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} + 5\,(n+1)^{\underline{3}} + \frac{25\,(n+1)^{\underline{4}}}{4} + 2\,(n+1)^{\underline{5}} + \frac{(n+1)^{\underline{6}}}{6} - 0 \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(6\,n^3+9\,n^2+n-1)}{30}.
\end{aligned}
$$

**Aplicação II**. Os números *figurados j-gonais* são atribuídos aos membros mais antigos da escola pitagórica. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. A figura 1 justifica a nomenclatura de números triangulares, números quadrados, números pentagonais e assim por diante.

Vamos usar o Cálculo Finito para determinar uma fórmula fechada para o $n$-ésimo número $j$-gonal.

O número triangular $T_n$ (Figura 1) é definido como a soma dos $n$ primeiros termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \ldots$

O número quadrangular $Q_n$ (Figura 1) é definido como a soma dos $n$ primeiros termos da progressão aritmética $1, 3, 5, 7, \ldots$

Em termos do Cálculo Finito podemos definir os números triangulares $T_n$ através de

$$\Delta^2\, T_n = 1\,, \quad \text{com} \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 3,$$

e os números quadragulares $Q_n$ através de

$$\Delta^2\, Q_n = 2\,, \quad \text{com} \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 4.$$

De maneira mais geral, os **números j-gonais** $a_n^{(j)}$ são definidos por meio de

$$\Delta^2\, a_n^{(j)} = j-2\,, \ \text{com} \ a_1^{(j)} = 1, \ a_2^{(j)} = j.$$

Vamos agora determinar o número $j-gonal$ de ordem $n$, $a_n^{(j)}$.

Como

$$\Delta\,[(j-2)\,n] = (j-2)\,\Delta\,n = (j-2),$$

temos

$$\Delta\,\left(\Delta\,a_n^{(j)}\right) = \Delta\,[(j-2)\,n].$$

Logo, existe uma constante $c$ tal que

$$\Delta\,a_n^{(j)} = (j-2)\,n + c$$

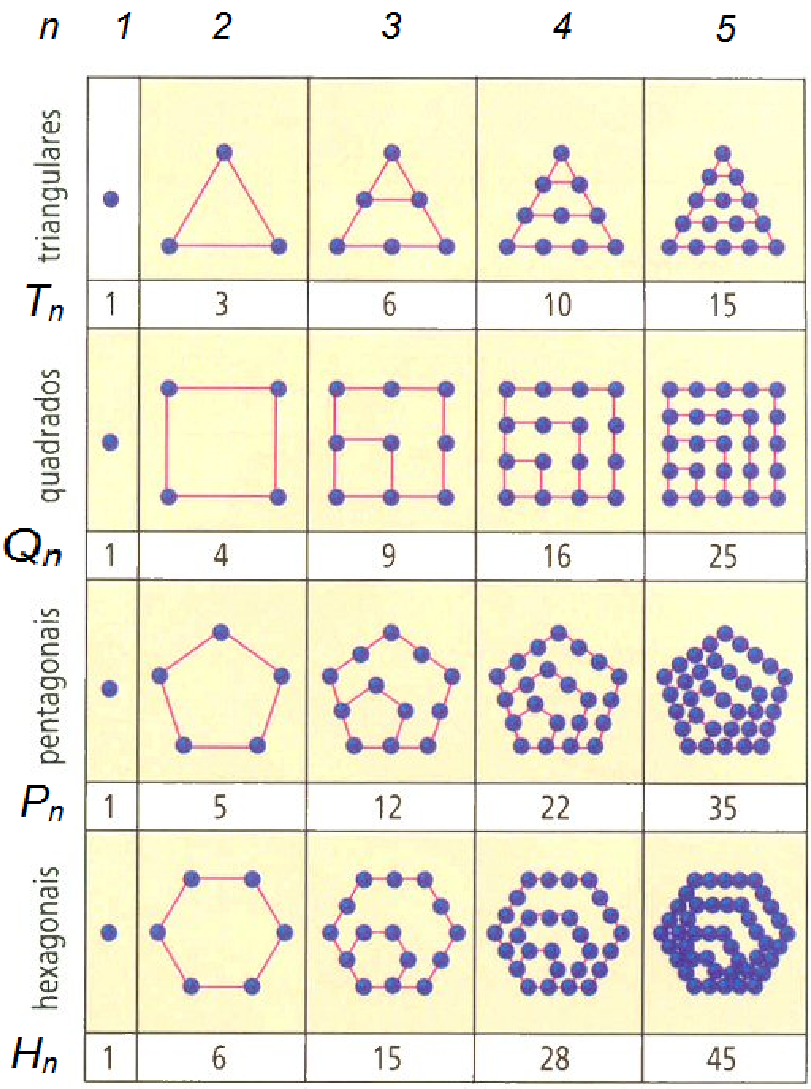



**Figura 1: Números *J-gonais***

Agora, já que

$$\begin{aligned} \Delta\left[(j-2)\frac{n^2}{2}+c\,n\right] &= (j-2)\,\Delta\,\frac{n^2}{2}+c\,\Delta\,n \\ &= (j-2)\,n+c\,, \end{aligned}$$

existe uma constante $d$ tal que

$$a_n^{(j)}=(j-2)\frac{n^2}{2}+c\,n+d.$$

Usando as condições iniciais $a_1^{(j)} = 1$ e $a_2^{(j)} = j$ obtemos

$$\begin{aligned} c + d &= 1, \\ 2\,c + d &= 2. \end{aligned}$$

Daí, $c = 1$ e $d = 0$. Portanto,

$$a_n^{(j)} = \frac{(j-2)\,n\,(n-1)}{2} + n\,.$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} T_n = a_n^{(3)} &= \frac{n\,(n-1)}{2} + n = \frac{n^2+n}{2} \\ Q_n = a_n^{(4)} &= \frac{2\,n\,(n-1)}{2} + n = n^2. \end{aligned}$$

**Aplicação III**. Progressões Geométricas (P.G.) são sequências numéricas, cujos termos são definidos (exceto o primeiro) utilizando uma constante $q$, denominada de *razão*. Qualquer termo de uma P.G., exceto o primeiro, é por definição igual ao termo anterior multiplicado pela razão $q$.

Consideremos então a progressão geométrica $(a_n)$ de razão $q$:

$$(a_n) = (a_1,\, a_1\,q,\, a_1\,q^2,\, \ldots).$$

Queremos encontrar uma fórmula para a soma $S_n$ dos $n$ primeiros termos dessa progressão, ou seja,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 q^k.$$

Para isso, basta notar que

$$\Delta\left(\frac{q^k}{q-1}\right) = \frac{1}{q-1}\,(q^{k+1} - q^k) = q^k,$$

se $q \neq 1$. Logo, pelo Teorema 2.5,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1\,q^k &= a_1 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_1 \frac{q^k}{q-1}\bigg|_0^n \\ &= a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}\,, \end{aligned}$$

quando $q \neq 1$. Se $q = 1$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 = a_1 \sum_{k=0}^{n-1} 1 = a_1\, n.$$

**Aplicação IV**. Vamos obter a soma dos $n$ primeiros recíprocos dos números triangulares, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k}.$$

Como vimos anteriormente,

$$T_k = \frac{k\,(k+1)}{2},$$

e assim.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\,(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^{\underline{-2}} \\
&= 2\left[-(k-1)^{\underline{-1}}\right]\Big|_{1}^{n+1} = 2\left[-(n)^{\underline{-1}} + 1\right] \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Note que tomando o limite $n \to \infty$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T_k} = 2.$$

**Aplicação V**. Vamos agora encontrar fórmulas fechadas para algumas somas interessantes.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,k!$

Nesta soma note que

$$\begin{aligned}
\Delta\,(k!) &= (k+1)! - k! = (k+1)\,k! - k! \\
&= k\,k!
\end{aligned}$$

Logo, usando o Teorema 2.5, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} k\, k! = k! \Big|_{1}^{n+1} = (n+1)! - 1.$$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\, 3^k$

Para este caso vamos utilizar o Teorema 2.6 e

$$\Delta\left(\frac{3^k}{2}\right) = 3^k, \;\; k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$$

Daí, usando o processo da somação por partes $(2.18)$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2\, 3^k &= \sum_{k=1}^{n} k^2\, \Delta\left(\frac{3^k}{2}\right) \\
&= \frac{k^2\, 3^k}{2}\Bigg|_{1}^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \Delta\,(k^2)\frac{3^{k+1}}{2} \\
&= \frac{k^2}{2}\, 3^k\Bigg|_{1}^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (2\, k^{\underline{1}} + 1)\, \frac{3^{k+1}}{2} \\
&= \frac{k^2\, 3\, k}{2}\Bigg|_{1}^{n+1} - \left(\frac{2\, k^{\underline{1}} + 1}{2}\right)\frac{3^{k+1}}{2}\Bigg|_{1}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} 1\, \frac{3^{k+2}}{2} \\
&= \frac{k^2\, 3\, k}{2}\Bigg|_{1}^{n+1} - \left(\frac{2\, k + 1}{4}\right) 3^{k+1}\Bigg|_{1}^{n+1} + \frac{1}{2}\,\frac{3^{k+2}}{2}\Bigg|_{1}^{n+1} \\
&= \frac{k^2 - 3\, k + 3}{2}\, 3^k\Bigg|_{1}^{n+1} \\
&= \frac{3}{2}(3^n\, n^2 - 3^n\, n + 3^n - 1).
\end{aligned}$$

**Aplicação VI**. Agora, queremos calcular a soma

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m}.$$

Note primeiro que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} \;\; + &\;\; \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} \\
= &\;\; \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k}.
\end{aligned}$$

Agora, para $n$ fixo, temos

$$\begin{aligned}\Delta\binom{n+k}{k-1} &= \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1} \\ &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} - \binom{n+k}{k-1} \\ &= \binom{n+k}{k},\end{aligned}$$

utilizando a propriedade recursiva fundamental dos coeficientes binomiais (2.20).

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k} &= \binom{n+k}{k-1}\Bigg|_{k=0}^{k=m+1} = \binom{n+m+1}{m} - \binom{n+0}{0-1} \\ &= \binom{n+m+1}{m}.\end{aligned}$$

A identidade obtida

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}$$

é chamada de **identidade das diagonais** do triângulo de Pascal.

**Aplicação VII**. Queremos agora verificar a **identidade de Euler**:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{n+m}{k},$$

onde $n,m,k \in \mathbb{N}$. Para $n$ e $k$ fixos e $m$ variável, temos

$$\begin{aligned}\Delta\binom{n+m}{k} &= \binom{n+m+1}{k} - \binom{n+m}{k} \\ &= \binom{n+m}{k} + \binom{n+m}{k-1} - \binom{n+m}{k} \\ &= \binom{n+m}{k-1}.\end{aligned}$$

E mais geralmente,

$$\Delta^i\binom{n+m}{k} = \binom{n+m}{k-i}.$$

Mas $p\,(m) = \binom{n+m}{k}$ é um polinômio de grau $k$ em $m$, e assim, pelo Teorema 2.9, temos

$$\begin{aligned}\binom{n+m}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \Delta^i p\,(0) \binom{m}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n+0}{k-i} \binom{m}{i},\end{aligned}$$

o que prova a identidade de Euler.

Note que, em particular, para $m = n = k$ obtemos

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2\,n}{n}.$$

Essa identidade é chamada de **identidade de Lagrange**.

**Aplicação VIII.** Vamos agora verificar a **identidade das colunas** do triângulo de Pascal:

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \cdots + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Note primeiro que a soma do lado esquerdo pode ser escrita como

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i}.$$

Por outro lado, para $i$ fixo temos

$$\Delta \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1} - \binom{k}{i+1} = \binom{k}{i}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} &= \left.\binom{k}{i+1}\right|_{k=i}^{k=n+1} = \binom{n+1}{i+1} - \binom{i}{i+1} \\ &= \binom{n+1}{i+1}.\end{aligned}$$

# 4 SOMA DE POTÊNCIAS DE NÚMEROS INTEIROS

Vimos anteriormente que

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\,n^2+\frac{1}{2}\,n,$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} = \frac{1}{3}\,n^3+\frac{1}{2}\,n^2+\frac{1}{6}\,n,$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\,n^4+\frac{1}{2}\,n^3+\frac{1}{4}\,n^2,$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,(3\,n^2+3\,n-1)}{30} = \frac{1}{5}\,n^5+\frac{1}{2}\,n^4+\frac{1}{3}\,n^3-\frac{1}{13}\,n,$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5 = \frac{n^2\,(n+1)^2\,(2\,n^2+2\,n-1)}{12} = \frac{1}{6}\,n^6+\frac{1}{2}\,n^5+\frac{5}{12}\,n^4-\frac{1}{12}\,n^2.$$

Olhando para esses casos, é razoável conjecturar que a soma de potências de ordem $m$ dos primeiros $n$ inteiros, que denotaremos por

$$S_m\,(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m\ , \tag{4.1}$$

é um polinômio em $n$ de ordem $m+1$. De fato, isso é verdade, e existe uma maneira recursiva de calcular esses polinômios sem a necessidade de utilizar os números de *Stirling* e todo o processo de somação. Essa foi uma descoberta de *James Bernoulli* $(1654-1705)$ que, todavia, não apresentou nenhuma demonstração da validade de suas observações empíricas.

Vamos a partir de agora, desenvolver essas ideias.

Os polinômios

$$1,\ x,\ \frac{x^2}{2!},\ \frac{x^3}{3!},\ \frac{x^4}{4!},\ \cdots \tag{4.2}$$

são importantes no Cálculo Diferencial porque aparecem nas séries de Taylor. Eles tem a propriedade interessante de que cada polinômio (exceto o primeiro) é uma antiderivada do anterior, ou seja,

$$
\begin{aligned}
&D(x) = 1\,, \\
&D\left(\frac{x^2}{2!}\right) = x\,, \\
&D\left(\frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^2}{2!}\,, \\
&D\left(\frac{x^4}{4!}\right) = \frac{x^3}{3!}\,,
\end{aligned}
$$

assim por diante, onde $D$ é o operador de diferenciação, ou seja, $D(f(x)) = f'(x)$ é a derivada da função $f$. Em geral, se $P_n$ é o $n$-ésimo polinômio na sequência, então

$$P_0\,(x) = 1 \quad \text{e} \quad P_n'\,(x) = P_{n-1}\,(x). \tag{4.3}$$

Esta fórmula recursiva não determina $P_n$ de forma única. Uma vez conhecidos $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, o polinômio $P_n$ fica determinado a menos de uma constante arbitrária. Por exemplo,

$$D\left(\frac{x^3}{3!} + c\right) = \frac{x^2}{2!}\,,$$

qualquer que seja a constante $c$.

Se escolhermos todas as constantes iguais a zero, obtemos a sequência de polinômios (4.2). Agora, se a uma sequência de polinômios $P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots$ que satisfaz (4.3), impusermos as condições

$$\int_0^1 P_n\,(x)\,dx = 0\,, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{4.4}$$

então obteremos os chamados *polinômios de Bernoulli*.

Antes de calcularmos explicitamente alguns polinômios de Bernoulli, notemos que

$$\int_0^1 P_n\,(x)\,dx = \int_0^1 P_{n+1}'\,(x)\,dx = P_{n+1}\,(1) - P_{n+1}\,(0),$$

ou seja, as condições (4.4) são equivalentes a

$$P_{n+1}\,(1) = P_{n+1}\,(0)\,, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4.5}$$

Vamos denotar os polinômios de Bernoulli por $B_n(x)$. Então,

$$B_0\,(x) = 1\,,$$

e daí, por (4.3),

$$B_1'(x) = 1.$$

Assim,

$$B_1(x) = x + c\ ,$$

para alguma constante $c$. Usando (4.4) obtemos

$$0 = \int_0^1 B_1(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + c\, x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + c.$$

Logo, $c = -\frac{1}{2}$ e

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Similarmente, $B_2'(x) = x - \frac{1}{2}$, e daí,

$$B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c\ .$$

Usando (4.4) determinamos $c$:

$$0 = \int_0^1 B_2(x)\, dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + c\, x\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + c\ ,$$

e assim, $c = \frac{1}{12}$. Logo,

$$B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

Os primeiros polinômios de Bernoulli são os seguintes:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= \frac{1}{2}\, x^2 - \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{12}, \\
B_3(x) &= \frac{1}{6}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^2 + \frac{1}{12}\, x, \\
B_4(x) &= \frac{1}{24}\, x^4 - \frac{1}{12}\, x^3 + \frac{1}{24}\, x^2 - \frac{1}{720}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Para reescrever os polinômios de Bernoulli de maneira mais elegante, vamos introduzir os *números de Bernoulli* $B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots$ . Eles são definidos por

$$B_n = n!\, B_n(0)\ ,\ \ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ . \tag{4.7}$$

Assim, é fácil verificar que

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}. \tag{4.8}$$

Também não é difícil mostrar que

$$\begin{aligned} B_0(x) &= B_0, \\ B_1(x) &= \frac{x}{1!} + \frac{B_1}{1!}, \\ B_2(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x}{1!} + \frac{B_2}{2!}, \\ B_3(x) &= \frac{x^3}{3!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x}{1!} + \frac{B_3}{3!}, \\ B_4(x) &= \frac{x^4}{4!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^3}{3!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_3}{3!}\frac{x}{1!} + \frac{B_4}{4!}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Mais geralmente, temos o

**Teorema 4.1.** *Para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *temos*

$$B_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\, x^{n-k}. \tag{4.10}$$

Demonstração:
A demonstração será feita usando Indução Matemática.

Para $n = 0$, temos

$$\frac{1}{0!}\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{0}B_k\, x^{0-k} = \frac{1}{0!}\binom{0}{0}B_0\, x^{0-0} = B_0 = B_0(x),$$

e portanto, $(4.10)$ vale para $n = 0$.

Suponhamos agora que a fórmula $(4.10)$ é válida para $n$ e provemos então que também é válida para $(n+1)$, ou seja, que

$$B_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_k\, x^{n+1-k}.$$

De fato, usando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned}
\int B_n(x)\,dx &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\int x^{n-k}\,dx\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\,\frac{x^{n+1-k}}{n+1-k}+c\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,\frac{B_k}{n+1-k}\,x^{n+1-k}+c\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n+1-k)!}\,B_k\,x^{n+1-k}+c\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}\,B_k\,x^{n+1-k}+c\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k\,x^{n+1-k}+c.
\end{aligned}$$

Logo,

$$B_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k\,x^{n+1-k}+c,$$

para alguma constante $c$, a qual será determinada utilizando a definição $(4.7)$. Temos

$$\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}=B_{n+1}(0)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k\,0^{n+1-k}+c=c$$

e assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k\,x^{n+1-k}+\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_k\,x^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, a igualdade $(4.10)$ é válida para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\blacksquare$

Agora estamos em condições de obter os números de Bernoulli de maneira recursiva. Para isso, usaremos $(4.5)$, $(4.7)$ e $(4.10)$ para escrever, para $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= (n+1)!\,B_{n+1}(0)\\
&= (n+1)!\,B_{n+1}(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k + B_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \,, \tag{4.11}$$

uma fórmula que nos permite calcular $B_1$, $B_2$, $B_3$, ... a partir de $B_0 = 1$. Por exemplo, tomando $n = 1$ em (4.11) obtemos

$$0 = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 1 \cdot 1 + 2\, B_1 \,,$$

de modo que $B_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Tomando agora $n = 2$ em (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 \\ &= 1 \cdot 1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\, B_2 \,, \end{aligned}$$

e daí, $B_2 = \dfrac{1}{6}$. Procedendo de modo similar, podemos calcular os primeiros números de Bernoulli rapidamente se fizermos uso do triângulo de Pascal (Tabela 3), veja Tabela 4:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{42}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 |

**Tabela 4: Números de Bernoulli**

Note que na Tabela 4 $B_n = 0$ se $n$ é ímpar e maior que 1. Em geral, temos que

$$B_{2n+1} = 0 \,,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Para provar esse resultado vamos mostrar antes que

$$B_n\,(1-x) = (-1)^n\, B_n\,(x)\,,\ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.13}$$

$(4.13)$ implica $(4.12)$ pois, se $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} B_{2n+1} &= (2n+1)!\, B_{2n+1}(0) \\ &= (2n+1)!\, B_{2n+1}(1-1) \\ &= (2n+1)!\, (-1)^{2n+1} B_{2n+1}(1) \\ &= -(2n+1)!\, B_{2n+1}(0) \\ &= -B_{2n+1}\,, \end{aligned}$$

e assim, $B_{2n+1} = 0$.

Agora para verificar $(4.13)$ definimos

$$P_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)\,,\; n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= (-1)^n B_n'(1-x)(-1) \\ &= (-1)^{n+1} B_{n-1}(1-x) \\ &= (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-x) \\ &= P_{n-1}(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x)\,,\;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Também temos

$$P_0(x) = (-1)^0 B_0(1-x) = 1,$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n(x)\,dx &= \int_0^1 (-1)^n B_n(1-x)\,dx \\ &= (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $P_n(x)$ satisfaz às condições $(4.3)$ e $(4.4)$ e, portanto,

$$P_n(x) = B_n(x)\,,\;\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

ou seja, provamos $(4.13)$.

Estamos agora em condições de deduzir a fórmula de Bernoulli para a soma $S_m(n)$.

**Teorema 4.2.** *Para todo número real $x$, temos*

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!}, \tag{4.14}$$

*onde* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração:

A demonstração será feita usando Indução Matemática.

Se $n = 0$ o lado direito de $(4.14)$ é

$$B_1(x+1) - B_1(x) = \left[(x+1) - \frac{1}{2}\right] - \left[x - \frac{1}{2}\right] = 1,$$

e o lado esquerdo é $\dfrac{x^0}{0!} = 1$. Portanto, $(4.14)$ é válida para $n = 0$.

Suponhamos agora a validade da fórmula

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!},$$

e provemos que

$$B_{n+2}(x+1) - B_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Com efeito, usando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} D[B_{n+2}(x+1) - B_{n+2}(x)] &= B'_{n+2}(x+1) - B'_{n+2}(x) \\ &= B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) \\ &= \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Como

$$D\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] = \frac{x^n}{n!},$$

existe uma constante $c$ tal que

$$B_{n+2}(x+1) - B_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + c.$$

Calculando em $x = 0$ obtemos que

$$0 = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = \frac{0^{n+1}}{(n+1)!} + c.$$

Assim, $c = 0$ e

$$B_{n+2}(x+1) - B_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, o teorema está provado.

■

**Corolário 4.3.** *Valem as identidades*

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = m!\ [B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)] = m! \int_0^{n+1} B_m(x)\, dx\ . \tag{4.15}$$

Demonstração:
De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^m &= m! \sum_{k=1}^{n} [B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)] \\
&= m!\ [(B_{m+1}(2) - B_{m+1}(1)) + (B_{m+1}(3) - B_{m+1}(2)) + \cdots \\
&\quad +(B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(n))] \\
&= m!\ [B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(1)] \\
&= m!\ [B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)] \\
&= m! \int_0^{n+1} B'_{m+1}(x)\, dx \\
&= m! \int_0^{n+1} B_m(x)\, dx.
\end{aligned}$$

■

Por exemplo, usando (4.6) e (4.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= 3!\ [B_4(n+1) - B_4(0)] \\
&= 6\left[\frac{(n+1)^4}{24} - \frac{(n+1)^3}{12} + \frac{(n+1)^2}{24} - \frac{1}{720} - \left(-\frac{1}{720}\right)\right] \\
&= \frac{(n+1)^4 - 2\,(n+1)^3 + (n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\,[(n+1)^2 - 2\,(n+1) + 1]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\,[(n+1) - 1]^2}{4} \\
&= \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

A fórmula de Bernoulli pode ser escrita simbolicamente como

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\left[(n+1+B)^{m+1} - B^{m+1}\right]. \tag{4.16}$$

A interpretação dada a essa fórmula é que o termo $(n+1+B)^{m+1}$ é expandido formalmente por meio do Teorema Binomial (2.21), e cada uma das potências $B^i$ é trocada no final pelo número de Bernoulli correspondente $B_i$.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \frac{1}{4}\left[(n+1+B)^4-B^4\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4+4\,(n+1)^3\,B^1+6\,(n+1)^2\,B^2+4\,(n+1)\,B^3\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4+4\,(n+1)^3\,B_1+6\,(n+1)^2\,B_2+4\,(n+1)\,B_3\right] \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\,n^2\,.
\end{aligned}$$

Note também que tomando $n=0$ em (4.16) obtemos

$$0=\frac{1}{m+1}\left[(B+1)^{m+1}-B^{m+1}\right]\,,$$

ou ainda,

$$(B+1)^{m+1}=B^{m+1}\,,\ \text{para } m\in\mathbb{N}\,. \tag{4.17}$$

Esta fórmula recursiva é equivalente a (4.11).

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho discutimos a aplicação do Cálculo Finito, especificamente do Teorema Fundamental do Cálculo Finito, no cálculo de fórmulas fechadas para diversas somas. Vimos que o processo é algorítmico e nos possibilita encontrar o valor de diversas somas até com certa facilidade.

Também estudamos o problema de encontrar uma fórmula fechada para a soma de potências de números naturais. Esse problema nos conduziu ao estudo dos números e polinômios de Bernoulli. Na verdade, vimos apenas o começo das relações entre a Matemática Discreta ou Finita e a Matemática do Contínuo. Há muito mais, como por exemplo, a Fórmula de Euler-Maclaurin, a Função Zeta de Riemann e etc.

Por fim, acreditamos que o presente trabalho pode ser útil como um material auxiliar para as disciplinas de Matemática Discreta, Aritmética e Fundamentos de Cálculo do PROFMAT. Também achamos que é possível utilizá-lo, talvez parcialmente e com adaptações, no Ensino Médio.

# REFERÊNCIAS

CUOCO, A. **Mathematical Connections - A Companion for Teachers and Others**. Newton, Massachusetts: The Mathematical Association of America, 2005.

GLEICH, D. **Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums**. 2005. Disponível em: <https://www.cs.purdue.edu/homes/dgleich/publications/finite-calculus.pdf>.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. **Concrete mathematics: a foundation for computer science**. 2. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

SPIEGEL, M. R. - PhD. **Schaum's outline series - Theory and problems of calculus of finite differences and difference equations**. United States of America: McGraw Hill, 1971.

STOPPLE, J. **A primer of analytic number theory from Pythagoras to Riemann**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.

YOUNG, R. M. **Excursions in Calculus: An Interplay of the Continuous and the Discrete.** [S.1.]: The American Mathematical Association of America, 1992.

# ANEXO A – ATIVIDADES

*[...] a Matemática age sobre o raciocínio*
*e a maneira de pensar,*
*num processo permanente em evolução,*
*desmistificando-a como algo pronto e*
*acabado que apenas deve ser ensinado,*
*mas, permeando uma dinâmica,*
*construção e a apropriação do conhecimento.*
*Permite também confrontar o contexto histórico e*
*sociocultural no período de seu desenvolvimento.*
*(LUIZ ROBERTO DANTE)*

Com o propósito de melhor exemplificar o uso do Cálculo Finito no Ensino Médio, queremos ampliar e aprofundar tais aplicações, relacionando-o com outros temas, desenvolvendo ainda mais a capacidade de raciocinar, resolver problemas, generalizar, abstrair e analisar e interpretar a realidade que nos cerca. Dessa forma, apresentamos algumas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

1. Dada uma sequência, como por exemplo $(1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ \ldots)$, gostaríamos de encontrar uma fórmula fechada que defina essa sequência. Poderíamos tentar um jogo da adivinhação, no entanto, ela não nos parece familiar; então vamos tentar outro método chamado de recorrência. Muitas vezes podemos compreender a recorrência por “desdobramento” ou “desmembramento” o caminho para a solução, como se segue:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3}(n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \end{aligned}$$

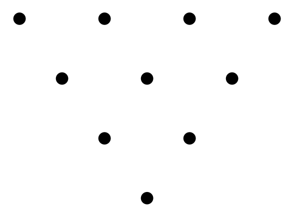
$$\begin{aligned} &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + S_n, \qquad onde \qquad S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n. \end{aligned}$$

Em outras palavras, $L_n$ é mais do que a simples soma $S_n$ dos $n$ primeiros inteiros positivos. O valor de $S_n$ aparece de vez em quando, por isso vale a pena construir a Tabela 5 de alguns valores de números inteiros não-negativos. Então podemos reconhecer esses números mais facilmente quando vê-los na próxima vez:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 |

**Tabela 5: Alguns Números Triangulares.**

Esses valores também são chamados de números triangulares, porque $S_n$ é o número de pinos do jogo de boliche em uma matriz triangular de $n$-linhas. Por exemplo, a habitual disposição de quatro linhas têm



$S_4 = 10$ pinos.

Para avaliar $S_n$ podemos usar um truque que supostamente um menino prodígio, Gauss utilizou em 1786, quando este tinha apenas nove anos de idade:

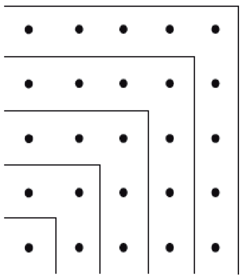
$$\begin{array}{cccccccccccccc} & S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ + & S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2\,S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Basta adicionar a $S_n$ a sua ordem inversa, de modo que cada uma das somas resultantes das $n$ colunas à direita sejam $n+1$. Simplificando temos,

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}, \qquad \text{para} \quad n \geq 0$$

2. Usando a soma de números triangulares definida por, $T_{n-1} + T_n = S_n$ e fazendo a soma dos termos dessa sequência numérica temos, $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = S_n$, certamente é verdade que $1 + 3 + ... + (2n-1) = T_{n-1} + T_n$. Dessa forma, dê uma prova geométrica dessa identidade, isto é, encontrar uma maneira de organizar os números triangulares $T_{n-1}$ e $T_n$ dispostos de modo que as configurações dos pontos representem um número ímpar de pontos.

Resolução:



É fácil observar pela figura acima, a disposição dos pontos onde eles representam os números ímpares consecutivos.

3. Encontrar uma fórmula que generalize as somas de números cúbicos, isto é possível? De fato, existe, graças a um matemático da antiguidade, Nicômaco de Gerasa. Nicômaco observou um padrão interessante em somas de números ímpares, observe a seguir:

$$\begin{aligned}
1 &= 1^3 \quad , \\
3+5 &= 2^3 \quad , \\
7+9+11 &= 3^3 \quad , \\
13+15+17+19 &= 4^3 \quad , \\
21+23+25+27+29 &= 5^3 \quad , \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Isto parece familiar e indica que a soma de números cúbicos consecutivos será o mesmo que somar números ímpares consecutivos, observe:

$$\begin{aligned}
1+3+5 &= 1^3+2^3, \\
1+3+5+7+9+11 &= 1^3+2^3+3^3, \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

A princípio parece estranho, mas que números precisamos tomar para encontrar o padrão da sequência? Note que 5 é o terceiro número ímpar, e $T_2 = 3$. Da mesma forma, 11 é o sexto número ímpar, e $T_3 = 6$. Assim, supomos que o padrão é a soma dos primeiros $n$ números cúbicos e $T_n$ é a soma dos primeiros números ímpares. Agora, pela equação

$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$ e aplicando-se esta soma resulta em $(T_n)^2$. Então, a partir da equação de $\left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$. Assim, concluímos que

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}.$$

O argumento anterior foi testado pela adivinhação, por isso uma prova minuciosa por indução é uma boa ideia. O caso tem como base $n=1$ e é fácil perceber que $1^3=\dfrac{1^2\cdot 2^2}{4}$. Agora, vamos supor para o caso de $n-1$, logo

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2\,n^2}{4}.$$

é verdadeito e vamos usar para provar o próximo caso. Mas,

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 &= \\
&= \underbrace{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3}_{H.I}+n^3 \\
&= \frac{(n-1)^2\,n^2}{4}+n^3
\end{aligned}$$

resultado pela hipótese de indução. Agora, resolvendo a equação e fazendo as devidas simplificações, temos que

$$\frac{(n-1)^2\,n^2}{4}+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

■