PROFMAT

Departamento de Matemática

Universidade Federal do Paraná

81531-980, Curitiba, PR

Brasil

Representação Decimal de Números Reais

por

Aurélio Antonio Leal

Mestrado Profissional em Matemática - Curitiba - PR

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Ribeiro de Santana

Representação Decimal de Números Reais

Aurélio Antonio Leal

Departamento de Matemática – UFPR

019081-980, Curitiba, PR

Brasil

aurelioxy@gmail.com

30 de março de 2015

Resumo

Este artigo apresenta um estudo sobre a representação decimal dos números reais, onde buscamos ampliar o conhecimento dos leitores em relação ao referido assunto, demonstrando “como se obtém” as casas decimais de um número real.

Palavras-Chave: Números reais; Decimais; Representação decimal.

1. Introdução

Este trabalho busca ampliar o conhecimento dos professores em relação aos números reais e sua representação decimal, proporcionando uma nova perspectiva sobre sua construção conceitual, pois a falta de esclarecimento destes conteúdos provoca no aluno respostas equivocadas e incompreensão do referido assunto.

Procuramos demonstrar resultados importantes a partir de alguns resultados que, acredita-se, já seja de domínio do leitor, como a convergência de sequências não decrescentes limitadas superiormente, uma vez que o sólido embasamento teórico e o rigor nas demonstrações nos leva à clareza do entendimento da expansão decimal dos números reais.

Vemos neste artigo que a representação decimal não estabelece uma correspondência biunívoca com os reais, pois demonstramos que por vezes duas frações decimais distintas correspondem a um mesmo número real.

2. Representação Decimal de Números Reais

Nosso objetivo aqui é mostrar como os números reais podem ser dados, ou representados, por frações decimais infinitas, e mostrar como tal representação pode ser deduzida a partir dos axiomas listados na seção anterior.

Usaremos a representação habitual em que a parte inteira pode ser ou positiva ou negativa, enquanto a parte fracionária (algumas vezes chamada *mantissa*) é sempre não negativa.

Sejam A um número inteiro arbitrário, positivo ou negativo, e $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ uma sequência infinita de números onde cada número pode assumir um dos 10 valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Tudo isso em conjunto será denotado por $A{,}a_1a_2a_3...$ e chamado de fração decimal infinita. Por enquanto isso é apenas uma sequência infinita escrita de uma maneira diferente. Agora vamos mostrar como um número real pode corresponder a uma sequência assim. Definimos, para cada índice n, um número

$$\alpha_n = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Obviamente, a sequência $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ não é decrescente. Vamos provar que ela é limitada.

De fato, uma vez que $a_i \leq 9$, para $i \in \{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$, temos:

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right).$$

Aplicando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, temos:

$$1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)<\frac{10}{9},$$

e como resultado obtém-se que

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}<1. \qquad (1)$$

Assim, verifica-se que

$$\alpha_n < A+1.$$

Como toda sequência não decrescente limitada superiormente é convergente, podemos concluir que $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_n,\, \cdots$ tem limite α. Esse limite (o número real α) será chamado de *número correspondente à fração decimal infinita* e denotado por

$$\alpha = A, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots.$$

Algumas vezes diz-se que α é igual à fração decimal $A, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$. Isso simplesmente significa que α é igual à soma da série infinita

$$A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots.$$

Nosso próximo objetivo é explorar essa correspondência entre frações decimais e números reais. Ela é bijetora? Por outras palavras: um número real pode corresponder à duas frações decimais distintas? E cada número real corresponde a alguma fração decimal?

Considere a primeira questão. Primeiramente, observe que algumas vezes a resposta é positiva. Tome, por exemplo, a fração decimal infinita $0,999\cdots$, na qual cada decimal após a vírgula é igual a 9. Qual número real essa fração representa? De acordo com a definição geral, temos que considerar a sequência

$$\alpha_n=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}.$$

Essa soma é fácil de calcular, pois trata-se da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Temos então que

$$\alpha_n = \frac{9}{10}\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10}\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right) = 1-\frac{1}{10^n}\ .$$

Obviamente, o limite da sequência $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ é igual a 1. Assim, $1 = 0,999\cdots$. Mas, por outro lado, é certo que $1 = 1,000\cdots$, onde em frente à vírgula há apenas o 1, e depois todos os dígitos são iguais a zero. Dessa forma, temos que o número real 1 corresponde à duas frações decimais infinitas distintas.

É claro que podemos construir muitos exemplos do mesmo tipo. Em geral, tais exemplos têm a seguinte forma: tome uma fração decimal infinita que tenha a forma

$$A, a_1a_2\cdots a_k 999\cdots,$$

isto é, suponha que a partir de um ponto (no nosso caso a partir da posição $k+1$) todos os decimais são iguais a 9. Podemos assumir que $a_k \neq 9$, ou seja, k é a primeira posição em que após ela todos são 9. Em seguida, repetindo o raciocínio anterior, podemos concluir que essa fração corresponde ao mesmo número ao qual corresponde a fração $A, a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k+1)000\cdots$, em que todos os decimais após a *k*-ésima posição são iguais a zero.

Dizemos que uma fração em que todos os decimais são iguais a 9, a partir de uma certa posição, tem período 9. Nós vimos que não há uma correspondência biunívoca entre essas frações (as de período 9) e os números reais. É uma grande surpresa que apenas nesses casos a correspondência biunívoca entre frações e números reais é violada.

Teorema *Duas frações decimais infinitas distintas, nenhuma das quais tendo 9 como período, correspondem a números reais distintos.*

Demonstração

A prova pode ser facilmente obtida se fizermos conexão entre a construção dos números reais, definidos por uma fração decimal, com a habitual medição de números com precisão de $\frac{1}{10^m}$, por falta ou excesso. Temos que dividir a reta real em segmentos de comprimento $\dfrac{1}{10^m}$, cujas extremidades são números racionais com denominador 10^m. Então, cada ponto da reta, isto é, cada número real cai em um dos segmentos. As extremidades dos segmentos dão a medida do número, com falta ou excesso, e precisão de $\dfrac{1}{10^m}$. No entanto, a violação da correspondê*n*cia biunívoca aparece por conta das próprias extremidades dos segmentos. Pois ao qual dos segmentos pertencem cada um desses pontos extremos? Este é o mesmo problema que aparece em conexão com o número 9 como período. Vamos mostrar que nossa escolha (sem o 9 como período) corresponde ao caso em que as extremidades finais dos segmentos estão sempre ligados com segmentos do lado direito. Em outras palavras, os números α_m construídos e o número α estão conectados pela relação

$$(2) \qquad \alpha_m \le \alpha < \alpha_m + \frac{1}{10^m}.$$

Lembre-se que o número α foi definido como o limite da sequência $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$. Todos os números α_n, com $n \ge m$, obviamente satisfazem a condição $\alpha_n \ge \alpha_m$. Assim, tal desigualdade é válida para o nosso limite α. Realmente, partindo do pressuposto $\alpha < \alpha_m$, podemos deduzir que $\alpha_n - \alpha = (\alpha_n - \alpha_m) + (\alpha_m - \alpha) \ge \alpha_m - \alpha$ para todo $n \ge m$. Mas, pela definição de limite, o valor absoluto de um número $\alpha_n - \alpha$ é menor que um número positivo arbitrário dado para n suficientemente grande. Isto contradiz o fato de que ele não é menor do que o número positivo $\alpha_m - \alpha$. Desta forma, o lado esquerdo da desigualdade (2) está provado. O lado direito dessa desigualdade pode ser provado de forma similar, se o sinal $<$ for substituído por $\le$. A saber, para cada $n > m$ temos

$$\alpha_n = \alpha_m + \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le \alpha_m + \frac{1}{10^m} \cdot \left(\frac{a_{m+1}}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^{n-m}} \right),$$

e aplicando a desigualdade (1) concluímos que $\alpha_n < \alpha_m + \dfrac{1}{10^m}$. Repetindo o raciocínio anterior, obtemos $\alpha \le \alpha_m + \dfrac{1}{10^m}$.

Mas, se quisermos obter o lado direito da desigualdade (2) com o sinal <, temos que usar o fato de que a fração $A, a_1 a_2 \cdots$ não tem 9 como período. A prova é bem mais complicada. Vamos provar o lado direito da desigualdade (2) para um índice fixo m. Devemos usar o fato de que fração decimal não tem 9 como periodo. Isso significa que, em algum lugar após a_m deverá aparecer um dígito a_k diferente de 9. Para um n arbitrário, $n > k$, podemos escrever:

$$\alpha_n = \alpha_m + \left(\frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} \right) + \left(\frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \right).$$

Como antes, vemos que

$$\frac{a_{k+1}}{10^{k+1}}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\leq\frac{1}{10^k},$$

e também,

$$\alpha_n\leq\alpha_m+\left(\frac{a_{m+1}}{10^{m+1}}+\cdots+\frac{(a_k+1)}{10^k}\right).$$

Como $a_k\neq 9$, o dígito a_{k+1} é um dos dígitos $1, 2, \cdots, 9$. Coloquemos $c=\frac{a_{m+1}}{10}+\cdots+\frac{(a_k+1)}{10^{k-m}}$. Podemos repetir o raciocínio mais uma vez e obter $c<1$. O número *c* depende apenas da escolha de *m* e *k*, e não de *n*. Assim, substituindo α_n por seu limite α obtém-se, como antes, $\alpha\leq\alpha_m+\frac{c}{10^m}<\alpha_m+\frac{1}{10^m}$.

Isso prova a desigualdade (2).

Segue-se imediatamente da desigualdade (2) que se duas frações decimais são distintas e não têm o 9 como período, então elas correspondem a números reais distintos. Vamos supor, ao contrário do que acabamos de ver, que o mesmo número α correspondendo às frações $A, a_1a_2\cdots$ e $A', a'_1a'_2\cdots$. Então, juntamente com a desigualdade (2), temos que

$$\alpha'_m\leq\alpha<\alpha'_m+\frac{1}{10^m},$$

onde $\alpha'_m=A'+\frac{a'_1}{10}+\cdots+\frac{a'_m}{10^m}$. Tome $\alpha'_m\neq\alpha_m$ e $\alpha'_m>\alpha_m$. Destas relações segue que $\alpha'_m>\alpha_m+\frac{1}{10^m}$, isto é, $\alpha'_m-\alpha_m>\frac{1}{10^m}$. Mas isso contradiz o fato de α'_m e α_m serem números racionais distintos com o mesmo denominador 10^m. Portanto, $\alpha'_m=\alpha_m$ para todo *m*. Mas os números a_m são determinados exclusivamente pelos números α_m, desde que $\alpha_m-\alpha_{m-1}=\frac{a_m}{10^m}$. Então, eles também coincidem em ambas as frações.

Passemos agora à seguinte pergunta: todo número real corresponde a alguma fração decimal infinita? Bem como a resposta, nós conhecemos também o método da prova. Queremos apenas nos convencer de que o raciocínio pode ser baseado em alguns axiomas.

Primeiramente, vamos observar que cada número real α está compreendido entre dois inteiros consecutivos, isto é, existe um inteiro A tal que $A\leq\alpha<A+1$. Inicialmente, considere α positivo. Pelo axioma de Arquimedes, concluímos que há um inteiro n tal que $\alpha<n$. Obviamente, $n>0$, e como existe um número finito de naturais que não excedem n, existe também o último (o menor) com essa propriedade. Denote este número por *m*. Segue que α < *m*, mas $m-1$ não possui essa propriedade. Isto significa que $m-1\leq\alpha<m$ e $A=m-1$ tem a propriedade desejada. Se α for negativo, colocamos $\alpha'=-\alpha$. Então, $\alpha'>0$ e podemos aplicar o nosso procedimento:

existe n tal que $n \le \alpha' < n+1$, que implica em $-(n+1) < \alpha \le -n$, pois $\alpha' = -\alpha$. Se $\alpha' \ne n$ podemos fazer $A = -(n+1)$ e $A < \alpha < A+1$. Se $\alpha' = n$, temos que fazer $A = -n$. E então, para cada número real α existe um número inteiro A tal que $A \le \alpha < A+1$. Portanto, α pode ser representado como $\alpha = A + \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1$.

Agora observe que se algum dos três números a_1, a_2, a_3 satisfazem $a_1 < a_2$ e $a_2 < a_3$, então para cada α satisfazendo a condição $a_1 \le \alpha < a_3$, uma das seguintes condições deve ser satisfeita: ou $a_1 \le \alpha < a_2$ ou $a_2 \le \alpha < a_3$, onde o intervalo $[a_1, a_3)$ é a união dos intervalos $[a_1, a_2)$ e $[a_2, a_3)$. Formalmente, isso é uma consequência do fato de que, para cada α , vale uma, e apenas uma, das relações $\alpha < a_2$, $a_2 < \alpha$ e $\alpha = a_2$.

Consideremos um caso mais geral, supondo que as seguintes condições sejam satisfeitas para n números $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} < \alpha_n .$$

Então, para cada número α, satisfazendo $\alpha_1 \le \alpha < \alpha_n$, é válida uma das condições $\alpha_{i-1} \le \alpha < \alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Para provar isso é necessário aplicar a afirmação anterior para o caso de três números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$. Então, ou $\alpha_1 \le \alpha < \alpha_2$ (e nossa afirmação é válida para $i = 2$) ou $\alpha_2 \le \alpha < \alpha_n$. No último caso, considere os números $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_n$, etc. Para algum i nós chegamos à condição desejada $\alpha_{i-1} \le \alpha < \alpha_i$.

Podemos retornar agora à nossa questão original. Nós já provamos que cada número real α pode ser representado na forma $A + \varepsilon$, onde A é um inteiro e $0 \le \varepsilon < 1$. Consideremos os números $\frac{k}{10}$, $k = 1, 2, \cdots, 10$. De acordo com o resultado anterior podemos concluir que $\frac{k}{10} \le \varepsilon < \frac{k+1}{10}$ para algum k, $1 \le k < 10$. Denotando este número por a_1, podemos escrever $\varepsilon = \frac{a_1}{10} + \varepsilon_1$, onde $0 \le \varepsilon_1 < \frac{1}{10}$. Segue que $\alpha = A + \frac{a_1}{10} + \varepsilon_1$. Da mesma forma, $\frac{k}{100} \le \varepsilon_1 < \frac{k+1}{100}$ para algum k inteiro, $1 \le k < 10$. Sendo a_2 esse número, segue que $\varepsilon_1 = \frac{a_2}{100} + \varepsilon_2$ e que $\alpha = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \varepsilon_2$. Repetindo esse processo, obtemos os números $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, onde teremos sempre $0 \le a_i \le 9$, e a sequência $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, onde $\alpha_n = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ tem limite α, ou seja, o número α corresponde à fração decimal infinita $A, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$.

Resumindo, pode-se dizer que a formação de frações decimais infinitas para números reais não estabelece uma correspondência biunívoca (de um para um) entre frações decimais infinitas e números reais, mas estabelecerá uma correspondência biunívoca se excluirmos as frações decimais que tem o 9 como período.

3. Considerações Finais

Com o presente trabalho podemos observar as demonstrações que nos levam à representação decimal de um número real. As demonstrações matemáticas são de suma importância, tanto para o professor para que ele sinta-se seguro nos seus argumentos, tanto para o aluno para que ele possa ampliar as estratégias para a resolução de um problema. Entender o comportamento dos números reais é a base para um entendimento sólido da matemática. Vimos que sequências convergentes nos levam a entender o comportamento das expansões decimais.

Na construção do conhecimento (ou, do conceito), por vezes a intuição pode ser bastante útil, mas isso não nos encorajou a fazer com que a formalização conceitual com o rigor matemático necessário deixasse de ser apresentada. Demonstramos alguns resultados importantes das representações decimais que nos permitiram entender como estão associadas às diferentes representações de um número. Dessa forma, esse trabalho visa ser um auxiliador para o professor que deseja entender melhor as diferentes representações decimais, contribuindo com o seu conhecimento e consequentemente melhorando as orientações dadas aos alunos.

Referências

.

[1] ÁVILA, G. *Análise Matemática Para Licenciatura. 3 ed.* São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

[2] FIGUEIREDO, D. G. *Análise 1*. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[3] SHAFAREVICH, I.R. *Selected Chapters From Álgebra*. The Teaching of Mathematics 2001, Vol IV, 1, pp 1-34

[4] WHITE, A. J. *Análise Real: Uma Introdução.* São Paulo: Edgard Blucher, 1993.