UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Os Interessantes Problemas de Apolônio

Resolução por Construções e por Inversão

por

Alan George Ferreira da Cruz

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Os Interessantes Problemas de Apolônio

Resolução por Construções e por Inversão [†]

por

Alan George Ferreira da Cruz

sob orientação da

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2014

João Pessoa - PB

[†] Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Os Interessantes Problemas de Apolônio

Resolução por Construções e por Inversão

por

Alan George Ferreira da Cruz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes-UFPB

(Orientadora)

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Chalapa - UFPB

Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB

Setembro/2014

Agradecimentos

A Deus primeiramente e depois a minha professora orientadora Elisandra, de quem fui aluno em minha pós-graduação, e que, com sua competência pedagógica e muito carisma inspirou-me a escolher este tema, no qual tive grande satisfação em aprofundar meus estudos. A orientadora sempre disponível em resolver minhas dúvidas que foram muitas, ampliando minha capacidade e permitindo que eu conduzisse este, segundo minhas próprias diretrizes, estimulando, assim, o desenvolvimento de meu espírito pesquisador. A minha esposa, Francileide, e as minhas filhas, Hanna Sophia e Hianna Saphira, que tanto sofreram com minha ausência quando da elaboração deste TCC e dos diversos finais de semana durante as aulas do curso. Um agradecimento muito especial aos colegas Cristiano Benevides, Bruno Trajano e Genaldo de Oliveira, amigos desta longa jornada que contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha esposa, Francileide, as minhas filhas Hanna Sophia e Hianna Saphira, aos meus pais Adonias e Francisca (Chaguinha)

Resumo

Este TCC apresenta um roteiro de estudo, direcionado a cursos superiores de Licenciatura em Matemática, visando melhorar a qualidade da formação dos futuros professores em Geometria. O resultado final deste trabalho é a solução dos Problemas de Apolônio por dois métodos de resolução. Através da geometria tradicional e pela Geometria Inversiva priorizando uma sequência didática que leva o leitor a participar do seu processo de construção. O texto orienta ainda algumas construções em um ambiente computacional e, num estudo guiado, faz uso da Geometria Dinâmica (em nosso caso o Geo-Gebra) para promover a experimentação e a descoberta de relações geométricas.

Palvras-chave: Os Problema de Apolônio; Geometria Inversiva; Geo-Gebra.

Sumário

Introdução

Um trabalho de Geometria deve desenvolver habilidades de visualização, construção de desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções de problemas; competências importantes na compreensão e ampliação da percepção do espaço e construção de modelos para interpretar questões da matemática e de outras áreas do conhecimento. Mas, como bem sabemos, o ensino de Geometria nas escolas públicas está longe de atingir estes objetivos. Sobre as causas que levam a esta deficiência, várias pesquisas apontam tratar-se de um círculo vicioso: Alunos despreparados em Geometria iniciam cursos de Licenciatura. Se este curso não os prepara adequadamente, estará qualificando profissionais incapazes de contribuir para melhoria desta situação. É na formação do professor que este círculo pode ser rompido. Há necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar as demonstrações em geometria, a fim de que os alunos possam se apropriar dos conceitos e habilidades geométricas, necessários para trabalhar no ensino fundamental e médio. O presente trabalho busca desenvolver um roteiro de estudo direcionado ao curso de Licenciatura e cursos de atualização de professores para o desenvolvimento de habilidades em Geometria, partindo de conceitos já conhecidos até a resolução dos problemas de Apolônio por meio da Geometria tradicional aliada a Geometria Inversiva. A idéia é explorar e demonstrar algumas propriedades da Geometria Euclidiana e da geometria Inversiva e utilizá-los para resolver problemas clássicos de tangência entre outros. E como bem sabemos, a resolução de problemas é parte importante de um currículo de Matemática, pois é essencial para propiciar o desenvolvimento do raciocínio lógico. Sugeridos ao leitor, a utilização de régua e compasso aliada a um ambiente computacional, estimulando novas descobertas e outras possíveis relações existentes. Os trabalhos com a utilização da Geometria Dinâmica vêm revelando uma tendência didático-pedagógica convergente com os trabalhos da Geometria Experimental: A confrontação de resultados na construção de determinados conceitos incluindo processos de validação e argumentação geométrica. Acredita-se que a resolução destes problemas será um preparo para a resolução dos famosos Problemas de Apolônio, que consistem em problemas de tangência envolvendo três objetos, sendo estes pontos, retas ou circunferências para um apanhado histórico da vida e obra de Apolônio sugerimos a referência [11]. O texto prioriza uma sequência didática que apresenta não somente o resultado do trabalho desenvolvido, mas instiga o leitor a participar de um processo de desenvolvimento de suas próprias competências por meio de desafios propostos. Como pré-requisito, espera-se do leitor uma familiaridade com os conceitos básicos de um curso de Desenho Geométrico e noções de Geometria Dinâmica. Atualmente existem muitos matemáticos conscientes da importância da geometria, desde o âmbito acadêmico até dentro da sala de aula, desejando uma melhor aprendizagem para nossos alunos. Entretanto, em vários momentos do passado o estudo da geometria era renegado ou mesmo deixado apenas para o final do ano letivo principalmente no ensino básico. O ensino chamado de tradicional da geometria deixa uma lacuna, pois esse ensino é dado basicamente em aulas expositivas resolvendo fórmulas. O nosso maior objetivo é colocar o ensino de geometria e a apresentação de idéias matemáticas importantes e interessantes de modo que seja compreensível para um grande público de ensino médio, estudantes e professores.

Capítulo 1

Construções geométricas

Por construções geométricas entendemos aquelas feitas com régua e compasso como os gregos faziam, o que pode envolver um grande número de etapas. A imprecisão é inerente em construções feitas à mão, tornando-as inexatas, por isto você poderá usar um software de geometria dinâmica como o geogebra. Nosso objetivo aqui é mostrar que a construção pode ser feita, e indicaremos todas as etapas necessárias para a sua execução. O nosso leitor não terá problemas em fazer todas as construções que trabalharemos nestas notas, é preciso que o mesmo compreenda o uso do software geogebra ou outro de capacidade similar para efetivar suas construções.

Vamos fazer como Euclides, onde as grandezas são medidas com números reais. A distância entre dois pontos está relacionada com a medida do comprimento do segmento delimitado pelos pontos extremos e o ângulo é a medida associada a uma abertura entre duas semirretas de mesma origem. Em nosso estudo usaremos algumas das proposições, definições e teoremas básicos sem demonstrá-los para que as construções tornem-se mais fáceis, a leitura deste trabalho menos cansativa, porém as mesmas podem ser consultadas em livros de geometria onde estão demonstradas com todos os detalhes e rigor necessários.

O leitor perceberá que com régua e compasso é possível a construção. As retas podem ser construídas a partir de dois pontos e uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e outro ponto por onde ela passa.

Sabemos que para os antigos gregos a régua não tinha propriedades métricas e o compasso era de pontas caídas isto é, não fixa o raio quando a ponta que está sobre o centro se move. Um compasso assim não pode ser utilizado para transpor comprimentos. Nas construções apresentadas consideraremos um compasso de pontas fixas (o compasso mantêm o raio se deslocarmos a ponta de um centro para outro) criando por isso a possibilidade de transportar comprimentos. As figuras que aparecem neste trabalho foram feitas utilizando um programa de Geometria Dinâmica chamado de geogebra, que as torna mais claras e precisas. Há um conjunto de construções básicas (como por exemplo, encontrar o ponto médio de um segmento ou traçar a perpendicular a uma reta que passa por um ponto) que estão predefinidas nos programas de geometria dinâmica, porém nós indicaremos as construções básicas que serão feitas aqui. Ao usar o software, indicamos os passos indicados na construção de cada figura, facilitando a sua aplicação e construção.

1.1 Pontos, retas e circunferências

Para deixar o trabalho mais completo apresentamos aqui alguns resultados básicos da geometria Euclidiana.

Definição 1 *A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento que contém o seu ponto médio.*

Definição 2 *Um lugar geométrico é um conjunto formado por todos os pontos que tem uma propriedade comum. Essa propriedade é a característica do lugar geométrico.*

Proposição 1 *A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos deste segmento.*

Prova. Suponha que P é um ponto equidistante dos extremos A e B e que M é o ponto médio do segmento $[AB]$. Veja Figura 1.1. Então pelo caso (LLL) vemos que os triângulos ΔAMP e ΔBMP são congruentes, então os ângulos $\angle AMP$ e $\angle BMP$ têm a mesma amplitude. Como são suplementares e adjacentes cada um deles é um ângulo reto. Deste modo PM é perpendicular a $[AB]$ e como M é o ponto médio do segmento temos que $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de $[AB]$. Reciprocamente se P é um ponto da mediatriz do segmento $[AB]$ então $\angle AMP$ e $\angle BMP$ são retos. Por outro critério de congruência de triângulos (LAL) os triângulos ΔAMP e ΔBMP são congruentes. Logo $dist(A;P) = dist(P;B)$. ■

A construção deste lugar geométrico atende ao fato de que qualquer ponto que esteja a uma mesma distância k de A e de B é um ponto da interseção de duas circunferências com o mesmo raio k e centros, uma em A e outra em B.

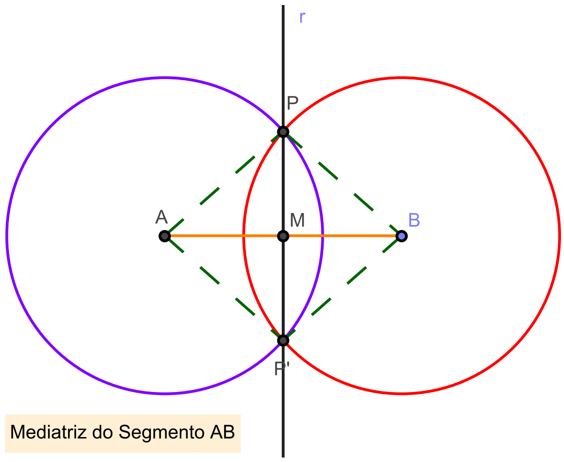

Figura 1.1: Mediatriz como lugar geométrico

Exemplo 1 *Construção da mediatriz de um segmento.*

Solução: Dado um segmento, de extremos P e Q, tracemos a mediatriz deste segmento. Acompanhe a construção na Figura 1.2

1. Vamos construir uma circunferência de centro P e raio x cuja medida é maior que $[PQ]/2$;

2. Depois construímos outra circunferência de centro Q e raio x ;

3. Estas circunferências se intersectam nos pontos C e D;

4. Agora trace a reta b que passa pelos pontos C e D. Esta intersecta o segmento $\overline{PQ}$ num ponto M;

5. Já que os pontos C e D são equidistantes de P e Q segue da Proposição 1 que a reta b é a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$. ■

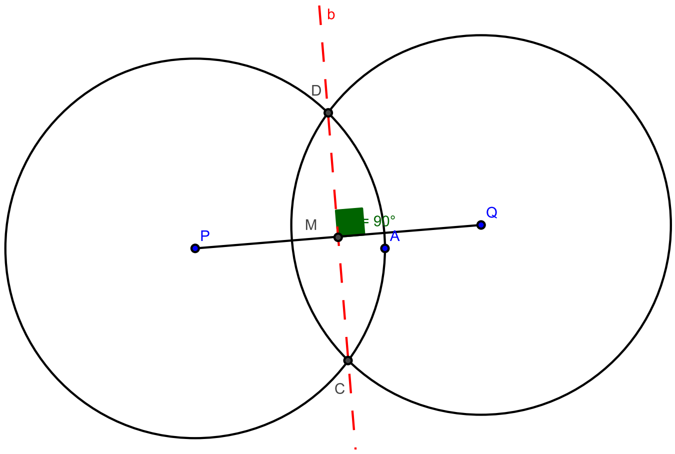

Figura 1.2: Construção da mediatriz

Definição 3 *A circunferência circunscrita em um triângulo é a circunferência que contêm os três vértices deste triângulo.*

Exemplo 2 *Construção da circunferência circunscrita em um triângulo.*

Solução: Seja ΔABC um triângulo.

1. Trace as mediatrizes de dois lados do triângulo, por exemplo, $[AB]$ e $[BC]$.

2. Marque o ponto O, ponto de interseção das duas mediatrizes.

3. Trace a circunferência de centro O e que passe por A. Veja Figura 1.3.

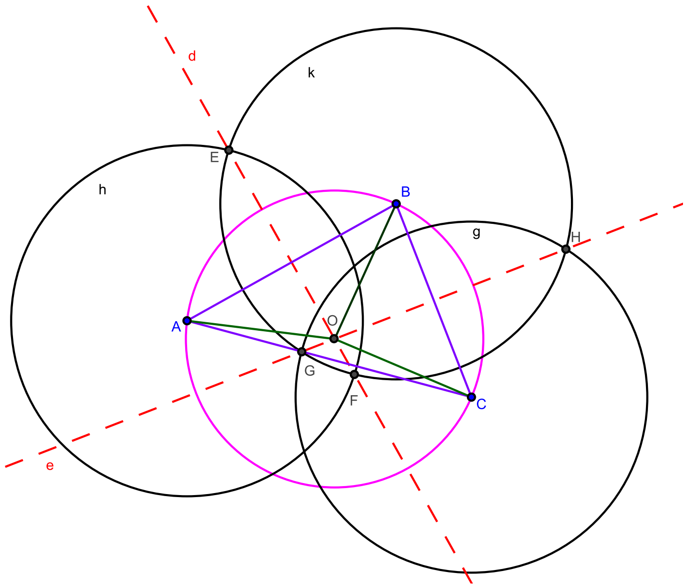

Figura 1.3: Circunferência circunscrita em um triângulo

A circunferência construída contém os três vértices do triângulo, pois sendo O um ponto da mediatriz de $[AB]$ tem-se que $OA = OB$, logo B pertence a circunferência de centro O e raio OA. Da mesma forma $OB = OC$ logo C pertence à circunferência de centro O e raio OA. Assim, como $OA = OC$, o ponto O pertence a mediatriz de $[AC]$. Portanto as mediatrizes do triângulo concorrem no ponto O. ∎

Definição 4 *O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado o circuncentro deste triângulo.*

Definição 5 *A bissetriz do ângulo $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OP}$, que divide o ângulo em dois ângulos adjacentes e com a mesma amplitude $\angle AOP = \angle POB$.*

Proposição 2 *A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados do ângulo.*

Prova. Seja $\angle POQ$ um ângulo. Suponha que K é um ponto da bissetriz do $\angle POQ$ e sejam r e s retas que passem por K, perpendiculares a $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ respectivamente.

Veja Figura 1.4 Se A é o ponto de interseção de r e $\overline{OP}$ e B é o ponto de interseção de s e $\overline{OQ}$, pelo caso (LAA) segue que ΔAOK e ΔBOK são congruentes. Daí $AK = KB$ de modo que K está no lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de $\angle POQ$. Reciprocamente, se $dist(K, \overline{OP}) = dist(K, \overline{OQ})$ tomando $A \in \overline{OP}$ e $B \in \overline{OQ}$ tais que $dist(K, \overline{OP}) = KA$ e $dist(K, \overline{OQ}) = KB$ temos que ΔAOK e ΔBOK são triângulos retângulos com hipotenusa e um cateto iguais, logo são congruentes. Logo

$$\angle POK = \angle AOK = \angle BOK = \angle QOK$$

o que garante que K pertence a bissetriz de $\angle POQ$. ■

Exemplo 3 *Construção da bissetriz de um ângulo.*

Solução: Seja $\angle POQ$ um ângulo de vértice O e de lados $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$. Acompanhe a construção na Figura 1.4.

1. Marque um ponto A na semirreta $\overrightarrow{OP}$ e o ponto B na semirreta $\overrightarrow{OQ}$ de forma a que $OA = OB$;
2. Trace a perpendicular r ao lado $\overrightarrow{OP}$ que passe por A;
3. Trace a perpendicular s ao lado $\overrightarrow{OQ}$ que passe por B;
4. Marque o ponto K, ponto de interseção das perpendiculares;
5. A semirreta $\overrightarrow{OK}$ é a bissetriz de $\angle POQ$.

A justificativa desta afirmação é dada através da congruência dos triângulos retângulos ΔKAO e ΔKBO de hipotenusa OK e catetos $OA = OB$. ■

Definição 6 *O Incentro de um triângulo ΔABC é o ponto comum das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.*

A prova da existência do Incentro de um triângulo é feita na construção seguinte. Uma circunferência inscrita num triângulo é a circunferência cujo centro P é o

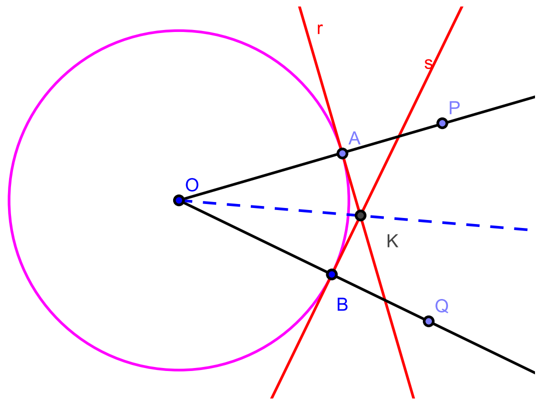

Figura 1.4: Bissetriz de um ângulo

incentro deste triângulo e o raio r é a distância comum do incentro aos lados deste triângulo.

Exemplo 4 *Construção da circunferência inscrita num triângulo.*

Solução: Considere um triângulo ΔABC. Veja Figura 1.5.

1. Trace as bissetrizes de dois dos ângulos internos do triângulo, por exemplo, $\angle BCA$ e $\angle BAC$.
2. Marque o ponto I, ponto comum destas bissetrizes.
3. Trace uma perpendicular por I a um dos lados do triângulo, por exemplo, $[AC]$.
4. Marque o ponto P, ponto de interseção da perpendicular com $[AC]$.
5. Trace a circunferência de centro I e que contem P.

Vejamos que esta é a circunferência inscrita em ΔABC. Já que o ponto I pertence as bissetrizes dos ângulos $\angle ACB$ e $\angle BAC$ tem-se que:

$$dist(I; AB) = dist(I; BC) = dist(I; AC) = IP,$$

Ou seja, I está a mesma distância dos lados do triângulo. Além disso, como $dist(I; BC) = dist(I; AB)$, o ponto I também pertence a bissetriz do ângulo $\angle ABC$, o que garante a existência do incentro. ∎

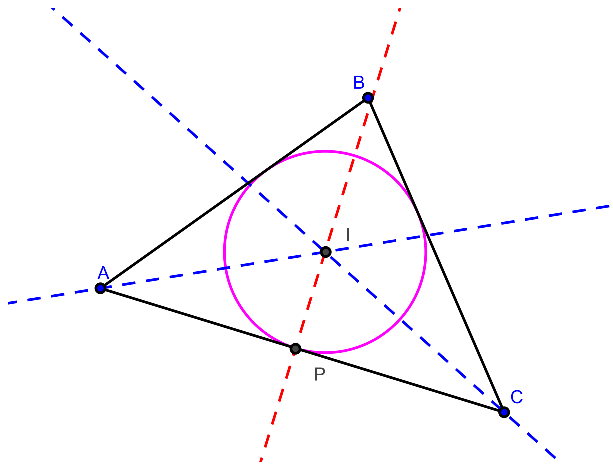

Figura 1.5: Incentro de um triângulo

1.1.1 Circunferência e retas tangentes

Definição 7 *Dizemos que uma reta r é tangente a uma circunferência Γ em P quando P é o único ponto na interseção de r e Γ. Quando há dois pontos na interseção de Γ e r dizemos que a reta é secante à circunferência. Se não há pontos em comum, dizemos que a reta é exterior à circunferência.*

Definição 8 *Um ângulo diz-se inscrito numa circunferência se o vértice é um ponto da circunferência e cada um dos seus lados intersecta a circunferência num segundo ponto diferente do vértice.*

Uma demonstração para os resultados a seguir pode ser encontrada em [12].

Teorema 1 *A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da amplitude do arco por ele subtendido.*

A Figura 1.1.1 ilustra este resultado.

Proposição 3 *Uma reta t é tangente a uma circunferência $C(O;r)$ num ponto P, com $P \in C$, se e somente se, as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\vec{t}$ são perpendiculares e $\overleftrightarrow{OP} \cap t = P$.*

Exemplo 5 *Construção da reta tangente a uma circunferência num ponto dado.*

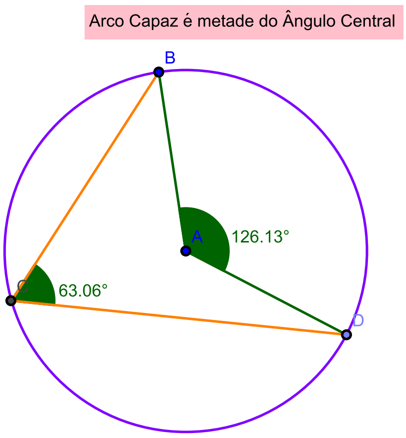

Figura 1.6: Arco capaz

Solução: Considere uma circunferência $C(O;r)$ de centro O e raio r e um ponto P de C.

1. Trace um raio $[OP]$.

2. Trace uma perpendicular a $[OP]$ que passe por P, como mostra a Figura 1.7.

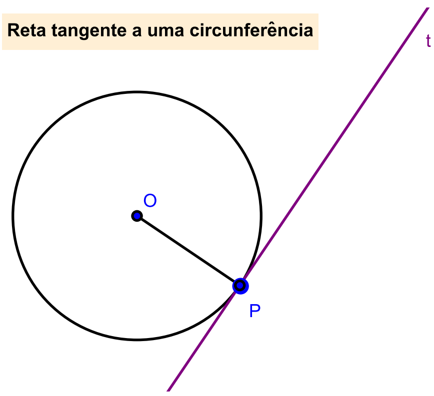

Figura 1.7: Reta tangente a uma circunferência

Pela Proposição 3 temos que esta reta é tangete a $C(O;r)$ em P. ■

Exemplo 6 *Construção de retas tangentes a uma circunferência por um ponto exterior à circunferência.*

Solução: Sejam $C(O;r)$ uma circunferência e P um ponto externo a $C(O;r)$, como na Figura 1.8.

1. Trace o segmento $[OP]$.

2. Marque o ponto médio M do segmento$[OP]$.

3. Trace uma circunferência de centro M e que passa por P.

4. Marque os pontos de intersecção das duas circunferências, T_1 e T_2. Os ângulos $\angle PT_1O$ e $\angle PT_2O$ são ângulos retos pelo Teorema 1.

5. Trace as retas $\overleftrightarrow{PT_1}$ e $\overleftrightarrow{PT_2}$.

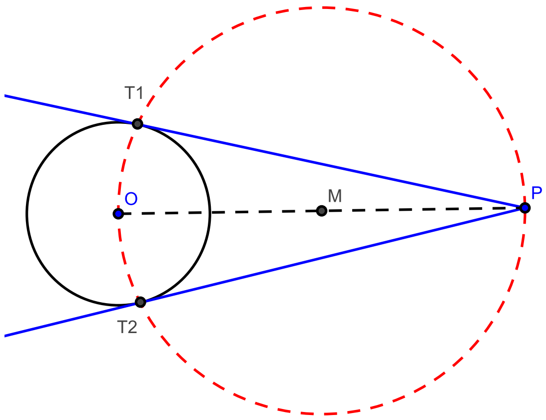

Figura 1.8: Retas tangentes por um ponto exterior à circunferência

Estas retas são tangentes à circunferência $C(O;r)$ pois são perpendiculares aos raios $[OT_1]$ e $[OT_2]$ nos pontos T_1 e T_2 respectivamente. ∎

Exemplo 7 *Construção de uma circunferência tangente a uma reta num ponto dado e que passe por um outro ponto exterior à reta.*

Solução: Sejam r uma reta e P um ponto exterior à reta. Seja ainda T um ponto de r. Queremos determinar uma circunferência C que seja tangente a r em T e que passe por P. Pela Proposição 3 sabemos que r deve ser perpendicular ao raio OT e assim o centro da circunferência procurada, O, está sobre a reta perpendicular à

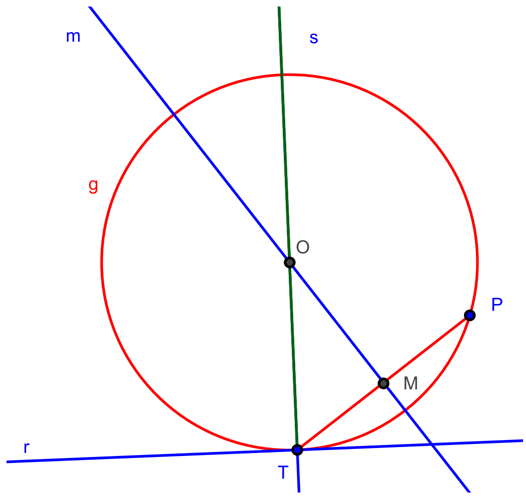

Figura 1.9: Circunferência tangente a uma reta a um ponto exterior

reta r que contêm o ponto T. Por outro lado, a distância de T e de P ao centro da circunferência tem de ser igual, ou seja,

$$dist(O;P) = dist(O,T).$$

Pela Proposição 1 sabemos que O deve pertencer a mediatriz do segmento [TP]. Então vamos à construção.

1. Trace a reta s perpendicular a reta r que passe por T.
2. Trace a mediatriz, m, do segmento $[TP]$.
3. Marque o ponto O, ponto de intersecção das retas s e m.
4. Trace a circunferência de centro O e que passe por T.

   Esta é a circunferência procurada. ■

Proposição 4 *Os centros de duas circunferências tangentes e o ponto de tangência são colineares.*

Prova. Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências tangentes no ponto T e seja t a reta tangente em T a ambas as circunferências. Então $O_1T \perp t$ e $O_2T \perp t$ donde

O_1, T e O_2 são pontos da reta perpendicular a t que passa por T. Logo os pontos O_1,O_2 e T são colineares. ■

Exemplo 8 *Construção de uma circunferência tangente em um ponto dado de uma circunferência e que passe por um determinado ponto exterior a circunferência.*

Solução: Sejam $C(O;r)$ uma circunferência e T um ponto de C. Seja ainda P um ponto exterior a C. Pela proposição anterior os pontos O, T e o centro da circunferência a construir são colineares. Por outro lado, o centro da circunferência solução está a mesma distância de T e de P então pertence a mediatriz do segmento $[TP]$. Assim vemos que só existe solução quando as retas m e $\overleftrightarrow{OT}$ são concorrentes. neste caso, vamos a construçãoque pode ser vista na figura 1.9.

1. Trace a reta que contêm os pontos O e T.
2. Trace a mediatriz do segmento $[TP]$.
3. Marque o ponto A de interseção da reta $\overleftrightarrow{OT}$ e da mediatriz. (Se forem paralelas não há solução).
4. Trace a circunferência S de centro em A e que passa por P.

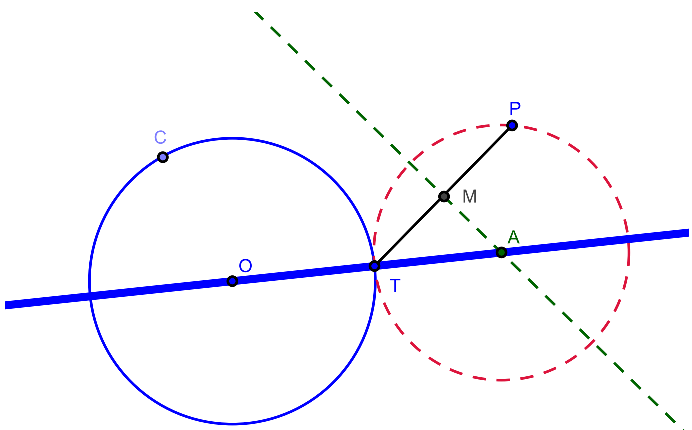

Figura 1.10: Circunferência tangente a uma circunferência e a um ponto exterior

O ponto A por pertencer a mediatriz de [PT], ou seja, está a mesma distância de T e de P portanto T pertence a S. Mas como O, T e A são colineraes e $[OT] + [TA] = [OA]$ as circunferências são tangentes em T. ■

Exemplo 9 *Construção de tangentes comuns a duas circunferências.*

Solução: Sejam $C(O; r)$ e $C'(O'; r')$ duas circunferências dadas, com $r \neq r'$, como na Figura 1.11.

1. Trace a reta a que contêm os centros das circunferências;

2. Trace uma reta b que passe pelo centro de c está intersecta a cincunferência c em dois pontos A e B;

3. Trace uma reta c paralela a reta b que passe por O', está reta intersecta a circunferência c' em dois pontos C e D;

4. Trace uma reta d que passe por [CD] ou [AB] e está intersecta a reta a no ponto H_1;

5. Por H_1 determine os pontos médios de OH_1 e $O'H_1$, N e M respectivamente;

6. Agora construa a circunferência com centro em M e que passe por H_1, esta intersecta a circunferência c' nos ponto T_1 e T_2;

7. Agora construa a circunferência com centro em N e que passe por H_1, esta intersecta a circunferência c nos ponto T_3 e T_4;

8. Assim por T_1 e T_4 passa uma reta tangente as circunferências c e c' analogamente por T_2 e T_3 passa a outra reta tangente.

9. De forma analoga encontramos H_2 com sendo a interseção [AD] com a reta a ou [BC] com a reta a;

10. Agora calculamos o ponto médio de H_2 e O como também H_2 e O' encontramos os pontos E e F, traçamos circunferências com centro nestes pontos E e F que passem por H_2. Estas circunferências intersectam c e c' em quatro pontos S_1, S_2, S_3 e S_4;

11. Assim, por S_1 e S_4 passa uma reta tangente às circunferências c e c'. Analogamente por S_2 e S_3 passa a outra reta tangente. Estas retas são

obrigatoriamente tangentes a outra circunferência já que os raios definidos pelos pontos de tangência são transformados em raios paralelos na outra circunferência. Então os raios transformados também são perpendiculares as retas, sendo estas, por isso também tangentes a outra circunferência. ■

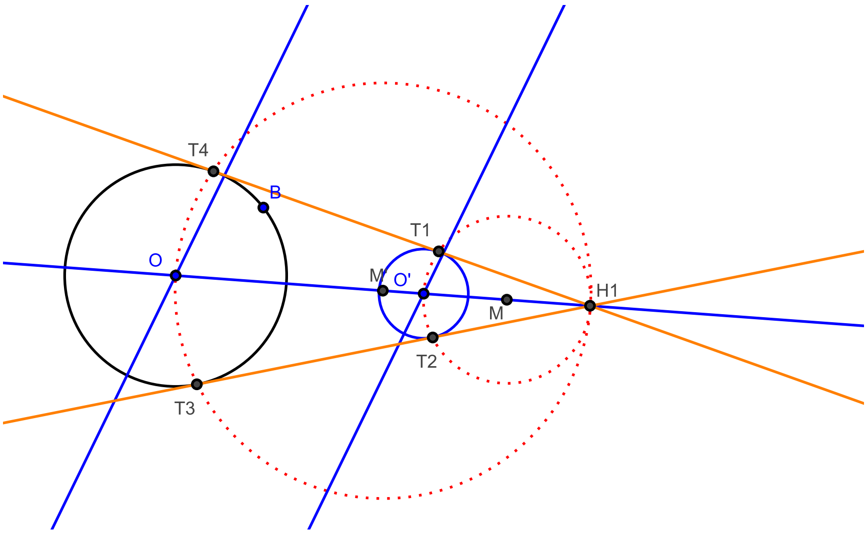

Figura 1.11: Retas tangentes a duas circunferências

1.1.2 Média geométrica ou proporcional

Definição 9 *A média geométrica de dois segmentos de comprimentos p e q dados é um segmento de comprimento x tal que* $x^2 = p.q$.

Exemplo 10 *Construção da média proporcional.*

Solução: 1. Construa o segmento $\overline{BC}$ de tamanho q;

2. Construa o segmento $\overline{DC}$ de tamanho p com D $\in \overline{BC}$;

3. Determine o ponto médio k de $\overline{BC}$;

4. Determine uma circunferência de centro K e raio $\overline{KB}$;

5. Construa uma reta r perpendicular a $\overline{BC}$ passando por D;

6. Agora construa o segmento $\overline{GC}$ onde G é o ponto de interseção de r com a

circunferência.

Uma vez que $\overline{GD}$ é uma altura do ΔBCG temos que:

$$\overline{CG}^2 = \overline{DC}.\overline{BC} = p.q$$

e temos $\overline{CG}$ a média geométrica de $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$. ■

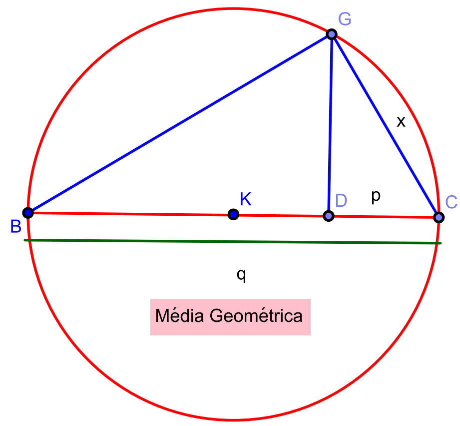

Figura 1.12: Média Geométrica

1.2 Geometria inversiva

A Geometria Inversiva teve seu desenvolvimento num período bastante recente em relação a todo o desenvolvimento da Matemática, que é milenar. Data-se do século XIX, e tem como responsável Jacob Steiner (1796-1863). O seu trabalho serviu para solucionar problemas que até então eram impossíveis ser resolvidos pela Geometria Euclidiana, dentre estes está o famoso problema de Apolônio que consiste em traçar circunferências tangentes a outras três circunferências dadas. Outros problemas de geometria euclidiana puderam ser demonstrados de forma mais simplificada, como é caso do teorema de Ptolomeu (O teorema de Ptolomeu afirma que o produto das diagonais de um quadrilátero convexo inscrito numa circunferência é igual à soma dos produtos dos lados opostos).

Para dar início ao estudo da geometria inversiva, vamos primeiramente definir o inverso de um ponto em relação a uma circunferência de centro O e raio r arbitrário.

Definição 10 *Seja $C(O;r)$ um círculo de raio r e centro O. $A \neq O$ um ponto no plano. Um ponto $A' \in \overleftrightarrow{OA}$ diz-se o inverso de A relativamente a C quando*

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = r^2.$$

Observação: A é o inverso de A' relativamente a C se, e somente se, A' é inverso de A relativamente a C.

Seja $C(O;r)$ um círculo de raio r e centro O. A aplicação que aplica cada ponto P do plano no seu inverso em relação a C é dita inversão com respeito a C. **O ponto O é o polo ou centro de Inversão**, o círculo C o círculo de inversão e r a potência de Inversão.

Atendendo a definição e a observação feita acima, a inversão é então uma bijeção de pontos (diferentes de O) do plano euclidiano nele próprio. Também é claro da definição que a distância do polo de inversão, que é O, a um ponto é inversamente proporcional a distância do seu inverso a O. É usual definir uma extensão desta aplicação a todos os pontos incluindo O mantendo a propriedade de que quanto mais próximo um ponto de encontra de O mais afastado está do seu inverso. Assim acrescenta-se ao plano um ponto, ∞, e convenciona-se que o inverso do polo O é ∞, $(O' = \infty)$ e $\infty' = O$. As propriedades da inversão vão ser utilizadas nas justificativas de todas as construções apresentadas aqui e vão facilitar a solução de alguns problemas geométricos.

Proposição 5 *Sejam $C(O;r)$ um círculo e W_1, W_2 dois círculos ortogonais a C e tais que $W_1 \bigcap W_2 = \{P, P'\}$. Então P e P' são inversos em relação a C. (P e P'* *não são pontos de C.)*

Prova. Suponha que o ponto P' é um ponto da semirreta $\overrightarrow{OP}$. Como W_1, W_2 são ortogonais a C então temos:

$$Pot(O;W_1) = Pot(O;W_2) = r^2$$

ou seja

$$\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2,$$

e assim para mostrar que P e P' são inversos em relação a C resta provar que O, P e P' são alinhados. Suponha que não, ou seja que $\overline{OP} \bigcap W_1 = \{P, Q'\}$ e que $\overline{OP} \bigcap W_2 = \{P, Q''\}$ com $Q' \neq Q''$, então $\overline{OP}.\overline{OQ'} = r^2$ e $\overline{OP}.\overline{OQ''} = r^2$, $\overline{OP}.\overline{OQ'} = \overline{OP}.\overline{OQ''}$, $Q' = Q''$ o que é absurdo, uma vez que $W_1 \bigcap W_2 = \{P, P'\}$, logo $Q' = Q'' = P'$. ■

Exemplo 11 *Construção do inverso de um ponto P em relação a um círculo.*

Solução: Para construir o inverso de um ponto P em relação a um círculo $C(O;r)$ basta traçar dois círculos ortogonais a C que passem por P e marcar o outro ponto de interseção,

$$Pot(P;Z_1) = \overline{AP}^2 - r^2$$

e como $\overline{AP} = \overline{OP}$ então

$$Pot(P;Z_1) = \overline{OP}^2 - r^2.$$

Por outro lado, $Pot(P;Z_1) = \overline{OP}.\overline{P'P}$. Logo, $\overline{OP}^2 - r^2 = \overline{OP}.\overline{PP'}$, $\overline{OP}^2 - \overline{OP}.\overline{PP'} = r^2$, $\overline{OP} : (\overline{OP} = \overline{PP'}) = r^2$, $\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$. Então P' é o inverso de P. ■

Proposição 6 *Sejam $C(O;r)$ um círculo e $[AB]$ um diâmetro perpendicular a $\overrightarrow{OP}$, sendo P um ponto do exterior de C. Seja ainda $Q = [AP] \bigcap C$ então o inverso de P com relação a C é o ponto de interseção da segmento $[BQ]$ com a semirreta $\overrightarrow{OP}$.*

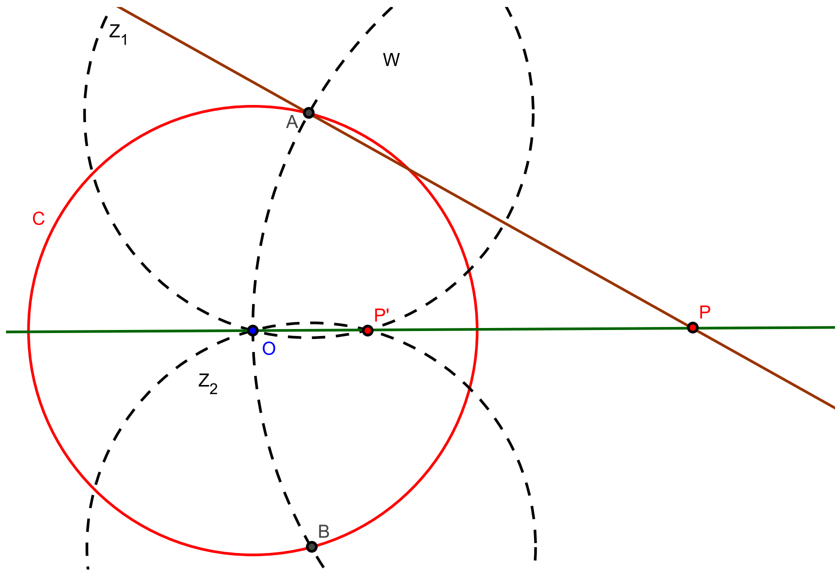

Figura 1.13: O inverso de um ponto P em relação a um círculo

Prova. Os triângulos $\Delta OBP'$ e ΔOPA são semelhantes (já que são triângulos retângulos e $\angle P \cong \angle B$). Então:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP'}} \Rightarrow \overline{OP}.\overline{OP'} = \overline{OB}.\overline{OA} = r^2$$

logo P' é o inverso de P. ∎

A proposição seguinte permite ver que a inversão tem um carater diferente das

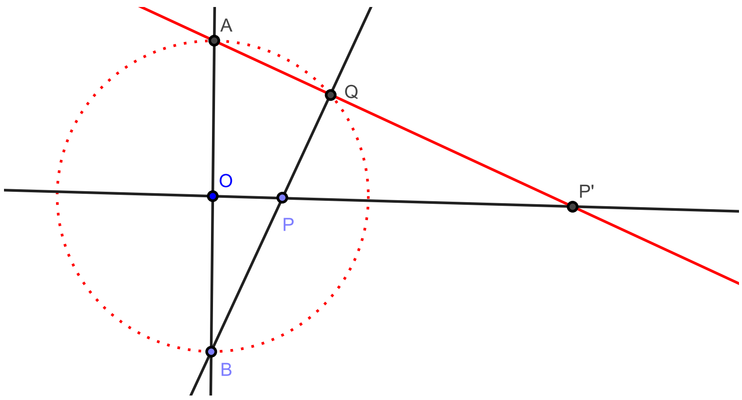

Figura 1.14: O inverso de um ponto P em relação a um círculo

tranformações usuais, nomeadamente as isometrias, pois pode alterar o aspecto das figuras, já que pode transformar retas em circunferências e vice-versa. Desta característica pode-se tirar partido para resolver problemas geométricos, tratando os inversos dos objetos e voltando a inverter.

Proposição 7 *Sejam $C(O;r)$ e $C_1(O_1;r)$ duas circunferências e s uma reta. Considere a inversão de polo O, então:*

1. a inversa de s é a prória reta se o centro $O \in s$ e é um círculo passando por O se $O \notin s$;

2. a inversa de C_1 é uma reta se $O \in C_1$ e é um círculo se $O \notin C_1$.

Prova. 1. • Se $O \in s'$:

Seja $P \neq O$ um ponto qualquer da reta s pelo que já foi dito anterimente o ponto inverso P' pertencem a reta $\overleftrightarrow{OP}$. Ou seja os inversos de todos os pontos de s são pontos da reta $\overleftrightarrow{OP}$ ou seja na reta s. Então a inversa da reta é a própria reta (com a convenção de $O' = \infty$ e $\infty' = O$)

• Se $O \notin s$:

Seja X o pé da perpendicular traçada de O a s' e seja P um ponto qualquer de s'. Sejam X' e P' os inversos de X e P respectivamente.

Os triângulos ΔOXP e $\Delta OX'P'$ são semelhantes. O ângulo $\angle OP'X'$ é um ângulo

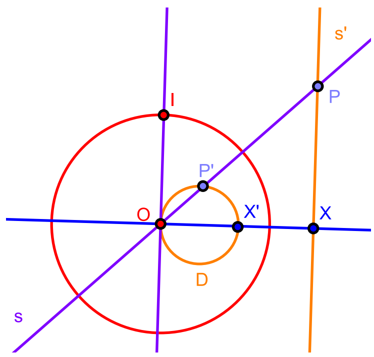

Figura 1.15: O inverso de uma reta s' em relação a um círculo

reto, e P' pertence a circunferência D de diâmetro [OX']. Assim a circunferência D

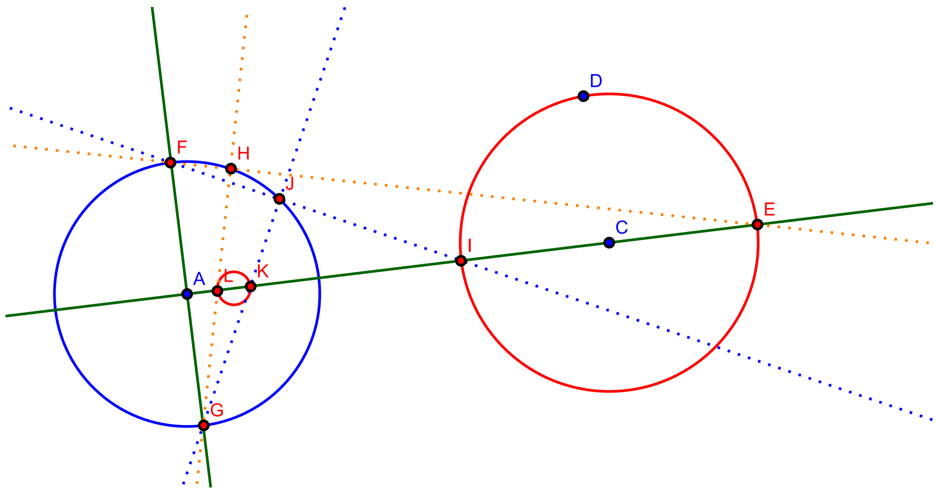

Figura 1.16: O inverso de um círculo em relação a um círculo

é a imagem inversa de s uma vez que a imagem de qualquer ponto de s pertence a D. Será fácil de ver que $s' = D$.

2. • Se $O \in C_1$ então, atendendo ao item anterior e ao fato de o inverso do inverso é o próprio ponto, tem-se que a inversa de C_1 é uma reta perpendicular ao diâmetro de C_1 que contêm o ponto O.

• Se O não pertence a C_1, sejam P um ponto de C_1 e $Q = \overrightarrow{O'P} \bigcap C_1$. Sejam ainda P' e Q' os seus inversos. Então

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OQ'} = r^2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = Pot(O; C_1) = p$$

portanto pode-se reescrever as igualdades acima:

$$\frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OQ}} = \frac{r^2}{p} = \frac{\overrightarrow{OQ'}}{\overrightarrow{OP}}$$

o que mostra que P' e a imagem de Q e Q' é a imagem de P pela homotetia de centro O e razão $\frac{r^2}{p}$. Então pelas propriedades das homotetias (círculos são transformados em círculos) a imagem de C_1 é um círculo. ■

Convém chamar a atenção que a homotetia não coincide com a transformação inversa (basta ver que a imagem de P é num caso P' e noutro Q'). Também o centro de C_1' não pode ser a imagem de O_1 pela inversão contrariamente ao que acontece na homotetia. Veja-se agora mais algumas propriedades da inversão que serão particularmente úteis na análise das soluções do Problema de Apolônio quando resolvido através desta transformação.

Proposição 8 *Seja $C(O;r)$ um círculo. Para além de C as únicas circunferências que ficam invariantes por inversão do polo O são as que cortam C ortogonalmente.*

Prova. Seja $C_1(O_1;r_1)$ uma circunferência diferente de C. Para que $C_1 = C_1'$ a homotetia referida no ponto anterior terá razão 1. Então $\frac{r^2}{p} = 1$ ou seja $r^2 = p$ e portanto $Pot(O;C_1) = r^2$ logo C e C_1 são ortogonais. ■

Proposição 9 *Sejam $C(O;r)$ uma circunferência e r e s duas retas que se interseptam em um ponto P. Então as imagens de r e de s, r' e s', interseptam-se no inverso P' de P fazendo um ângulo igual ao das retas r e s.*

Prova. Suponha que $P \neq O$ e que r e s não passam por O. Já foi visto que as inversas de r e de s, r' e s' respectivamente, são circunferências que passam por O. Veja Figura 1.17. As tangentes a r' e a s' em O, t_1 e t_2, são paralelas respectivamente a r e a s. Então o ângulo entre r' e s' é definido como o ângulo entre as retas t_1 e t_2 que é igual ao ângulo entre as retas r e s. ■

O ângulo entre duas circunferências é o menor dos ângulos entre as duas tangentes num dos pontos de interseção. Então a recíproca do teorema acima também é verdadeira. Como consequência direta desta proposição e para finalizar esta seção veja uma propriedade que mostra que a inversão mantém a tangência entre reta

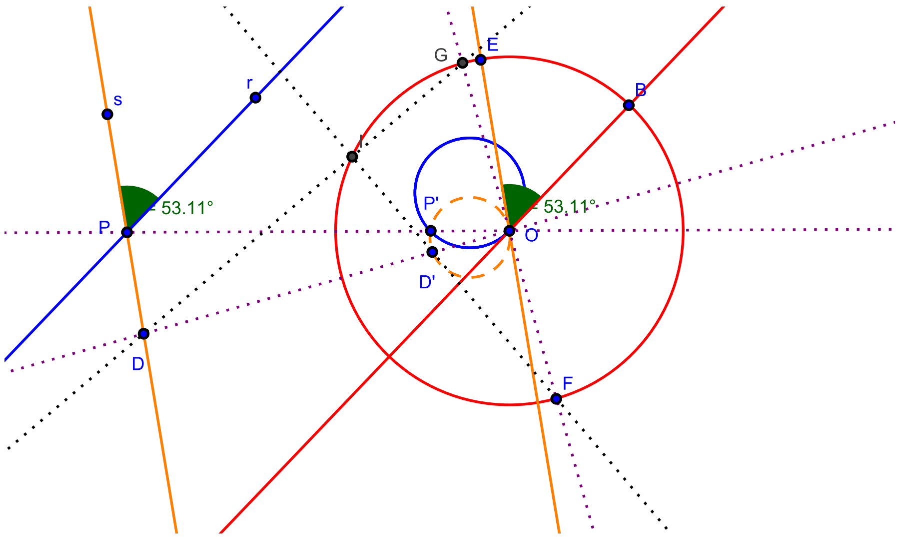

Figura 1.17: O ângulo entre duas retas permanece após inversão das mesmas

e circunferência, propriedade esta que será usada na resolução dos Problemas de Apolônio.

Proposição 10 *Sejam $C(O; r)$ e $W(A; s)$ duas circunferências e r uma reta tangente a W num ponto P, então a imagem r' de r é tangente a W', imagem de W, em P'.*

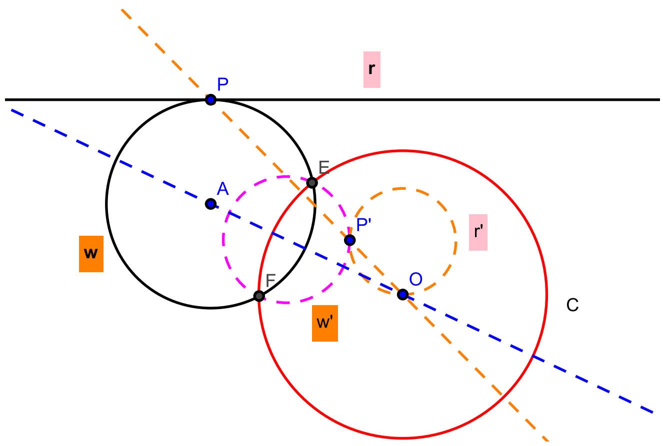

Figura 1.18: O ponto de intersecão entre uma retas e um círculo permanece após inversão dos mesmos

Capítulo 2

Os Problemas de Apolônio

O problema de tangências de Apolônio tem um enunciado simples e de fácil compreensão mas a sua solução nem sempre é evidente. Tradicionalmente o problema divide-se em dez casos, fruto das combinações da natureza dos objetos: pontos, retas ou circunferências. Atualmente quando se fala dos problemas de Apolônio estamos se referindo ao que consideramos último caso, (três circunferências), é porque este caso engloba todos os outros; considerar *(como o fez Gregonne)* os pontos, circunferências de raio nulo, e as retas, circunferências de raio infinito. Para não criar dúvidas neste trabalho as circunferências têm raio finito e diferente de zero. Como já referimos o conhecimento deste problema deve-se a Pappus que o inclui na sua obra Coleção Matemática com o seguinte enunciado: Dadas três coisas, cada uma delas pode ser um ponto (P), uma reta (R) ou uma circunferência (C), traçar uma circunferência que deverá passar pelos pontos (no caso de serem dados pontos) e ser tangente a cada uma das linhas dadas.

As dez combinações das coisas consoante a sua natureza são formalizadas a seguir.

2.1 PPP

Problema 1 *(PPP) Vamos construir uma circunferência tangente a três pontos dados.*

Observação 1 *Neste caso a solução só é possível se os três pontos não estiverem alinhados.*

Exemplo 12 *Construção: (PPP)*

Solução: Veja Figura 2.1.

1. Vamos construir três pontos quaisquer A,B e C, não alinhados;

2. Agora ligamos os três pontos fazendo um triângulo;

3. Determinamos os pontos médios dos segmentos M,N e W;

4. Traçamos as perpendicular aos segmentos passando pelos pontos médios estas retas se encontram em um ponto K este ponto é o encontro das mediatriz conhecido como circuncentro já definido anteriomente.

5. A existência deste ponto K é assegurada, pois as perpendiculares a [AB] e a [AC] não são paralelas. Se o fossem [AB] e [AC] também o seriam e portanto os três pontos seriam colineares o que contrariava a hipótese. O ponto K em relação ao triângulo ΔABC ou está no interior ou está no exterior ou sobre um dos segmentos.

6. Consideremos o ponto no interior do triângulo

7. Agora construiremos uma circunferência de centro K e que passe por A $C(K;\overline{KA})$

8. Desta forma encontramos a cirnunferência desejada que passa pelos pontos A, B e C. ∎

Exemplo 13 *Construção: (PPP) Através da geometria inversiva*

Solução: Veja Figura 2.2.

1. Vamos construir três pontos quaisquer A,B e C, não alinhados;

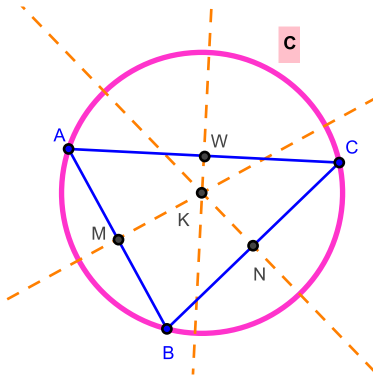

Figura 2.1: Solução (PPP) Circunferência tangente a três pontos dados

2. Vamos construir uma circunferência com centro em A que passe por B $C(A; \overline{AB})$;

3. Devemos encontrar o inverso de C em relação a circunferência construída de centro A assim encontramos C';

4. Agora traçamos uma reta que passe por B e C' uma reta a;

5. Assim quando construírmos a inversa da reta a em relação a circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$, $C(A; \overline{AB})$

6. Desta forma encontramos a circunferência desejada que passa pelos pontos A, B e C. ■

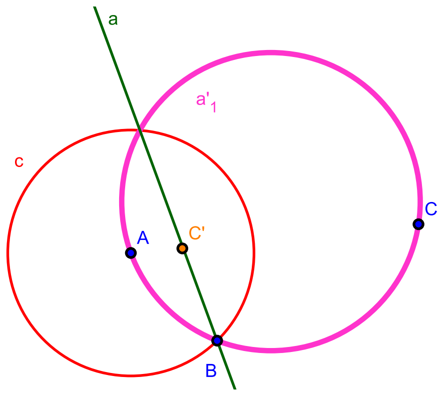

Figura 2.2: Solução (PPP) Circunferência tangente a três pontos dados

2.2 RRR

Problema 2 *(RRR) Vamos construir as circunferências tangentes a três retas dadas.*

Observação 2 *No caso das retas serem paralelas ou serem concorrentes num mesmo ponto obviamente não há solução. Se as retas forem concorrentes duas a duas uma das situações a considerar aparece como proposição nos Elementos de Euclides Dado um triângulo construir um círculo, que, na linguagem atual, se pode enunciar como dado um triângulo construir uma circunferência inscrita. Basta, neste caso, considerar então o triângulo definido pelos pontos de interseção das retas dadas e construir a circunferência circunscrita. No entanto, esta não é a única solução. As outras soluções são encontradas através das bissetrizes externas dos ângulos do triângulo, a situação que falta considerar é a de duas das retas serem paralelas e a terceira ser secante as duas. A ideia da construção das soluções é a mesma, i.e., encontrar os pontos cuja distância a cada uma das retas dadas seja a mesma começando por encontrar para cada par de retas.*

Exemplo 14 *Construção: (RRR) Três retas concorrentes duas a duas.*

Solução: Veja Figura 2.3.

1. Tomamos três retas concorrentes duas a duas cuja interseção são os pontos A, B e C formando um triângulo ΔABC;

2. Agora construimos as bissetrizes internas do ΔABC encontrando o ponto k como centro das bissetrizes, conhecido como incentro do triângulo ΔABC;

3. Depois tracemos uma perpendicular a um dos segmentos que passe por K, assim encontramos o ponto de interseção entre esta reta e o segmento neste caso o ponto D;

4. Vamos construir uma circunferência de centro K que passe por D, $W(K;\overline{KD})$;

5. De forma análoga vamos construir as bissetrizes externas encontrando um ponto

de interseção neste caso o ponto G;

6. Agora vamos traçamos uma perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ que passe por G, encontramos um ponto de interseção entre esta reta e o segmento $\overline{BC}$ o ponto H;

7. Restanos construir uma circunferência de centro G e que passe por H, $W'(G; \overline{GH})$.

De forma análoga encontramos as outras duas circunferências. ■

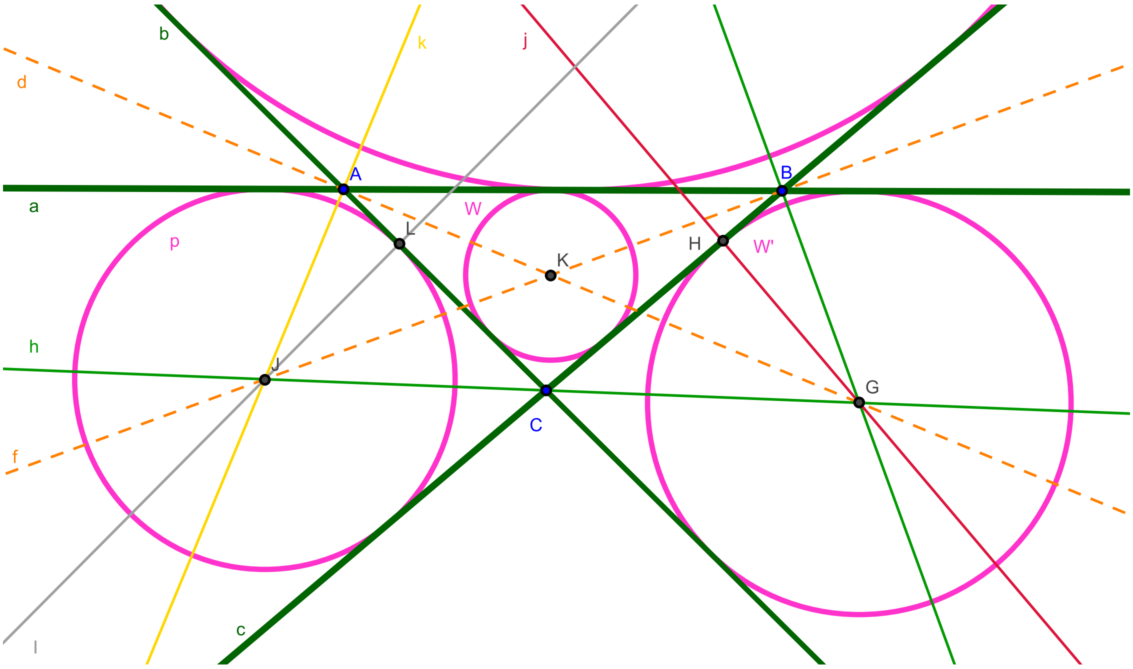

Figura 2.3: Solução (RRR) Circunferência tangente as retas concorrentes duas a duas

Exemplo 15 *Construção: (RRR) Através da geometria inversiva*

Solução: Veja Figura 2.4.

1. Tomamos três retas concorrentes duas a duas cuja interseção são os pontos A, B e C formando um triângulo ΔABC

2. Agora construimos as bissetrizes internas do ΔABC encontrando o ponto K como encontro das bissetrizes, conhecido como incentro do triângulo ΔABC.

3. Depois tracemos uma perpendiculares a reta c que passe por K, assim encontramos

o ponto E de interseção entre estas retas

4. Agora vamos construir uma circunferência com centro no pontos E de raios qualquer; agora construimos as inversas das retas a e b que não contém o centro das circunferências de centro E $G(E;\overline{EG})$ assim encontramos as inversas a' e b' em relação a circunferência $G(E;\overline{EG})$;

5. Vamos traçar as tangentes em relação as circunferências a' e b' construindo as retas **I** e j

6. Agora vamos tracar a inversa da reta **I** em relação a circunferência $G(E;\overline{EG})$

7. Assim obtemos a circunferência **l'** circunferência inscrita no triângulo ΔABC.

8. Agora traçamos as bissetrizes externas, onde M é o ponto de encontro destas

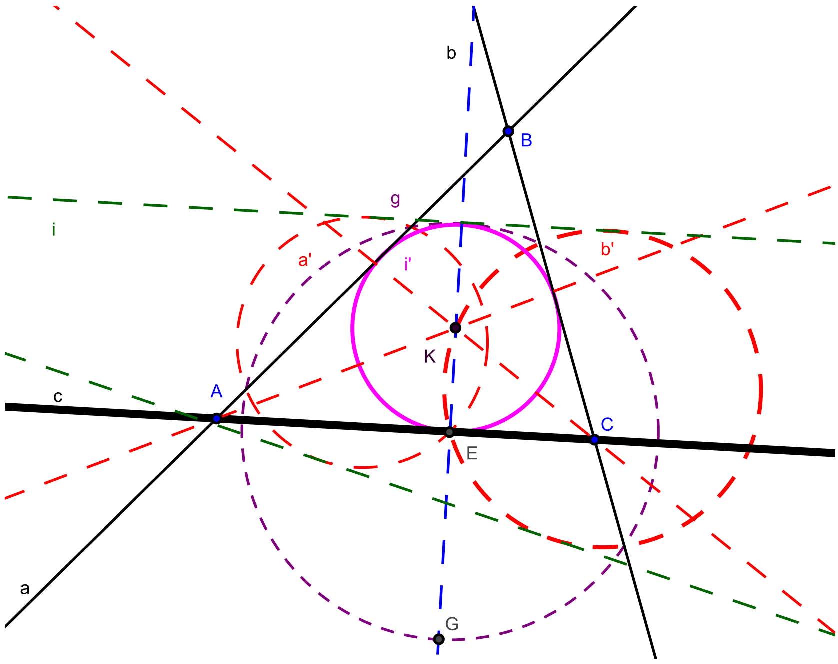

Figura 2.4: Circunferência tangente as retas concorrentes

bissetrizes, assim traçamos uma perpendicular a reta c passando por M, maramos o ponto N de interseção entre as retas c e a perpendicular p;

9. Traçamos uma circunferência de centro N e raio qualquer, depos calculamos as inversas das retas a e b encontrando as circunferências a' e b' agora traçamos as

retas tangentes a estas duas circunferências encontrando as retas **r** e s resta agora inverter a reta **r** em relação a circunferência $Q(N; \overline{NQ})$

10. Assim construimos a inversa desta reta r encotrando a circunferência desejado tangente as retas a, b, e c.

De forma análoga encontramos as outras duas circunferências, como se vê na Figura 2.5. ∎

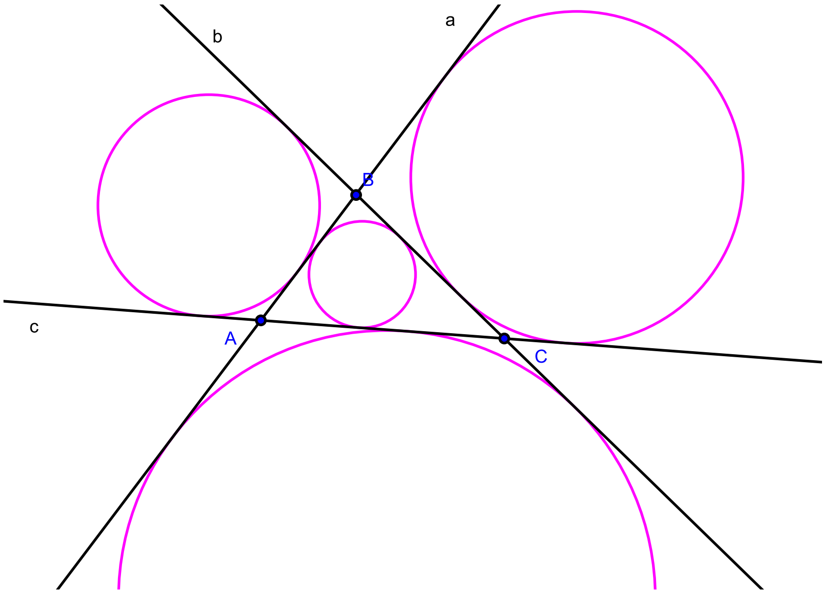

Figura 2.5: Solução (RRR) Circunferência tangente a retas concorrentes duas a duas

Exemplo 16 *Construção: (RRR) Duas retas paralelas e uma reta secante.*

Solução: Veja Figura 2.6.

1. Sejam a e b duas retas paralelas e c uma reta secante;

2. Trace as bissetrizes $\angle ABC$ e $\angle BCD$, o encontro destas bissetrizes e ponto G, agora trace uma perpendicular a reta a passando por G, obtendo o ponto I como a interseção da perpendicular com a reta a;

3. Agora vamos construir uma circunferência de centro G que passe por I $K(G, \overline{GI})$;

4. Portanto a circunferência construída será tangente as três retas dadas.

5. Agora de forma análoga construimos a circunferência W de centro G, $W(H, \overline{HJ})$.

■

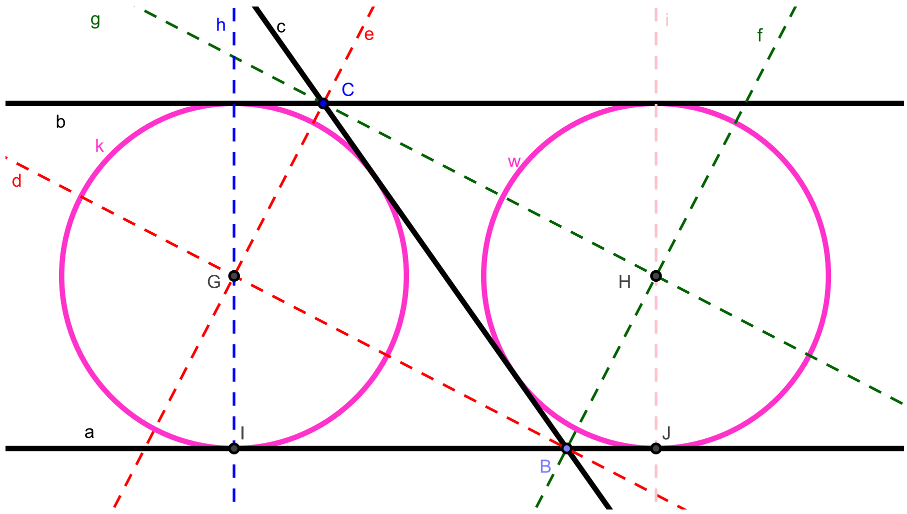

Figura 2.6: Solução (RRR) Circunferência tangente a duas retas paralelas e uma transversal

Exemplo 17 *Construção: (RRR) Através da geometria inversiva*

Solução: Veja Figura 2.7.

1. Sejam a e b duas retas paralelas e c uma reta secante;

2. Trace as bissetrizes $\angle ADC$ e $\angle ECD$, o encontro destas bissetrizes e ponto G, agora trace uma perpendicular a reta c passando por G, obtendo o ponto F como a interseção da perpendicular com reta c;

3. Agora vamos construir uma circunferência de centro F e raio qualquer, calculamos as inversas das retas a e b encontramos as circunferências a' e b' assim quando traçamos as retas tangentes a estas circunferências encontramos três retas i, h e j. Sendo a reta j paralel as retas a e b.

4. Portanto a inversão da reta i em relação a circunferência $W(F, \overline{HF})$ é a circunferência desejada i', ou seja a circunferência tangente as três retas dadas.

5. Agora de forma análoga construimos a circunferência p de centro K e raio

qualquer $p(K, \overline{KL})$ calculamos as inversas e encontramos as retas tangetes, e depois encontramos a inversa da reta q, logo achamos a outra circunferência procurada.

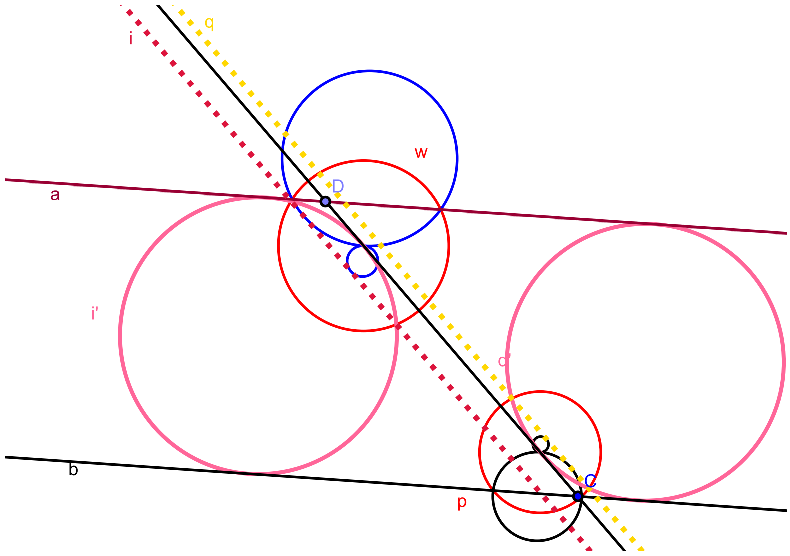

Figura 2.7: Solução (RRR) Circunferência tangente a duas retas paralelas e uma transversal

■

2.3 PPR

Problema 3 *(PPR) Construir as circunferências que passem por dois pontos dados e sejam tangentes a uma dada reta.*

Observação 3 *Neste terceiro caso também pode não haver soluções se ambos os pontos pertencem a reta ou se cada um está situado em semi-planos diferentes, ou ainda quando uma reta definidos por estes dois pontos formem uma reta perpendicular com a reta dada, não existe nenhuma circunferência que possa satisfazer os requisitos exigidos. A situação que se analisa é a que considera que* *os dois pontos são exteriores a reta e definem uma reta concorrente com a dada. Considere então uma reta e dois pontos que não pertençam a reta e tais que a reta definida pelos pontos seja secante a reta dada. A ideia base da construção assenta nas propriedades do eixo radical de duas circunferências e portanto de potência de um ponto já que se houver mais do que uma solução elas tem que obrigatoriamente interceptarem em A e em B e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o eixo radical das circunferências solução.*

Exemplo 18 *Construção: (PPR)*

Solução:

1. São dados uma reta a e dois pontos C e D que não pertencem a reta. Além disso a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e concorrente com a reta $\overleftrightarrow{CD}$ onde E é o ponto de encontro entre as retas a e b; 2. Agora trace a circunferência $W(F;\overline{EF})$, agora trace uma perpendicular a reta b passando pelo ponto C, esta intercepta a circunferência W no ponto G;
3. Vamos construir uma circunferência de centro E raio [EG] $W'(E,\overline{EG})$, esta intercepta a reta a no ponto I e J;
4. Agora tracamos a mediatriz do segmento $\overline{CD}$ e do segmento $\overline{JD}$ encontramos assim o ponto K;
5. Portanto para concluirmos, tomamos o ponto K como centro da circunferência de raio [KD], está é uma das circunferências procuradas.

Análogamente construiremos outra circunferência com os pontos I, C e D como mostra a figura.

As circunferências C_1 e C_2 são de fato as únicas soluções. Se se considerar uma outra circunferência que contenha os pontos C e D e seja tangente a uma reta a nos pontos I e J tal que $I \neq E \neq J$ chega-se a um absurdo. Uma vez que a potência de E com relação a está circunferência seria também $\overline{EC}.\overline{ED} = \overline{EG}^2$ então j pertencia a circunferência de centro E e raio $[\overline{EG}]$. ■

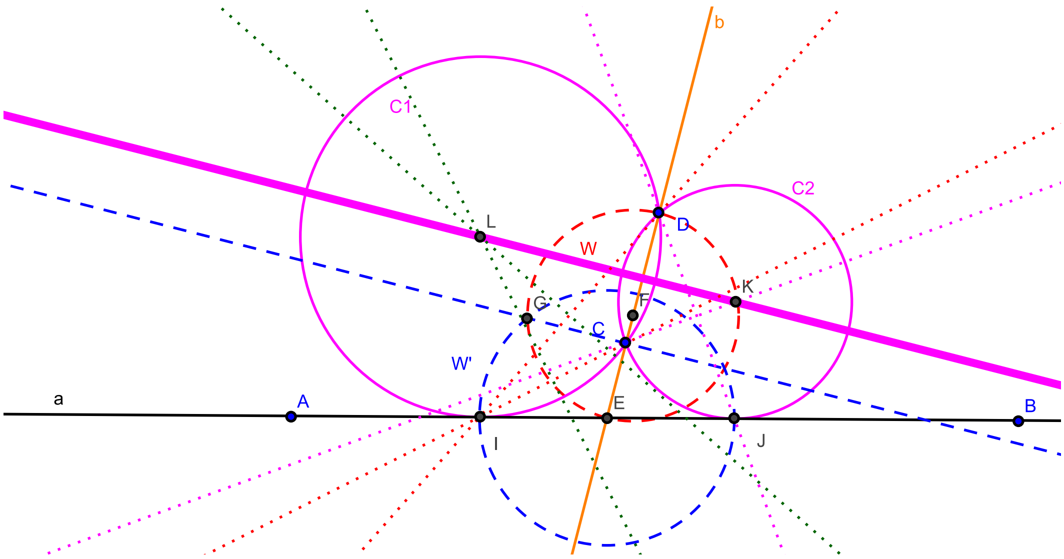

Figura 2.8: Solução (PPR) Circunferência tangente a dois pontos e uma reta

Exemplo 19 *Construção: (PPR) Através da geometria inversiva*

Solução:

1. São dados uma reta a e dois pontos C e D que não pertencem a reta, agora vamos construir uma Circunferência de centro em D que passe por C;

2. Vamos traçar a inversa da reta a em relação a circunferência $W(D, \overline{CD})$ encontrando a circunferência a', agora traçamos as tangentes de a' que passam por C encontramos as retas b e d;

3. Portanto quando calculamos as inversas da reta b e d em relação a circunferência $W(D, \overline{CD})$ encontramos as circuferências desejadas que passa pelos pontos C e D e tangente a reta a. ■

2.4 PPC

Problema 4 *(PPC) Construir as circunferências que passem por dois pontos e sejam tangentes a circunferência dada.*

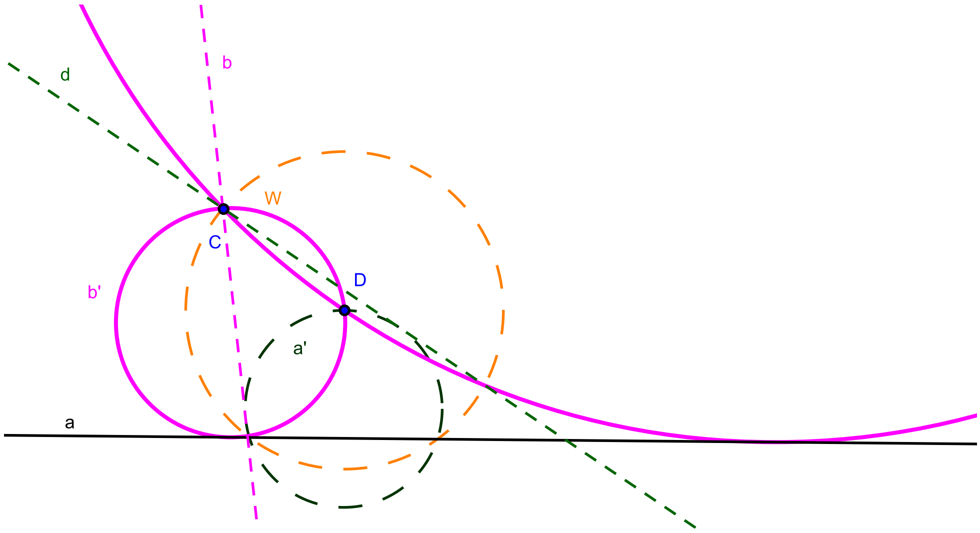

Figura 2.9: Solução (PPR) Circunferência tangente a dois pontos e uma reta

Observação 4 *Para resolvermos este problema, devemos considerar ambos os pontos dados no interior da circunferência dada ou ambos no exterior, pois se eles pertencerem a regiões distintas da circunferência não haverá solução.*

Exemplo 20 *Construção(PPC)*

Solução:

1. Dados os pontos C e E e uma circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$, $W(A, \overline{AB})$;

2. Agora trace uma reta $\overleftrightarrow{CE}$, calculando a sua mediatriz, assim construimos uma circunferência cujo centro pertenca a mediatriz e intercepte a circunferêcia W em dois pontos I e H;

3. Tracando uma reta por estes dois pontos, percebemos que esta reta intersepta a reta a que passa por $\overleftrightarrow{CE}$ no ponto j;

4. Agora tracamos uma reta que passe por $\overleftrightarrow{JA}$ centro da circunferência W, assim determinamos o ponto médio do segmento $\overline{JA}$, encontrando o ponto K;

5. A partir deste tracamos outra circunferêcia de centro K e raio $\overline{JK}$ a circunferêcia G $G(K, \overline{JK})$, esta intersepta a circunferência W nos pontos M e L, assim encotramos os pontos de tangência com a circunferência W;

6. Agora vamos traçar uma circunferêcia com os pontos C, E e M, traçamos a reta $\overleftrightarrow{ME}$ e calculamos a sua mediatriz, esta intersepta a mediatriz do segmento $\overline{CE}$ no ponto O_1, assim encontramos o centro da circunferência desejada.

7. De foma análoga tracamos a circunferêcia que passe pelos pontos C, E e L, cujo centro e O_2.

■

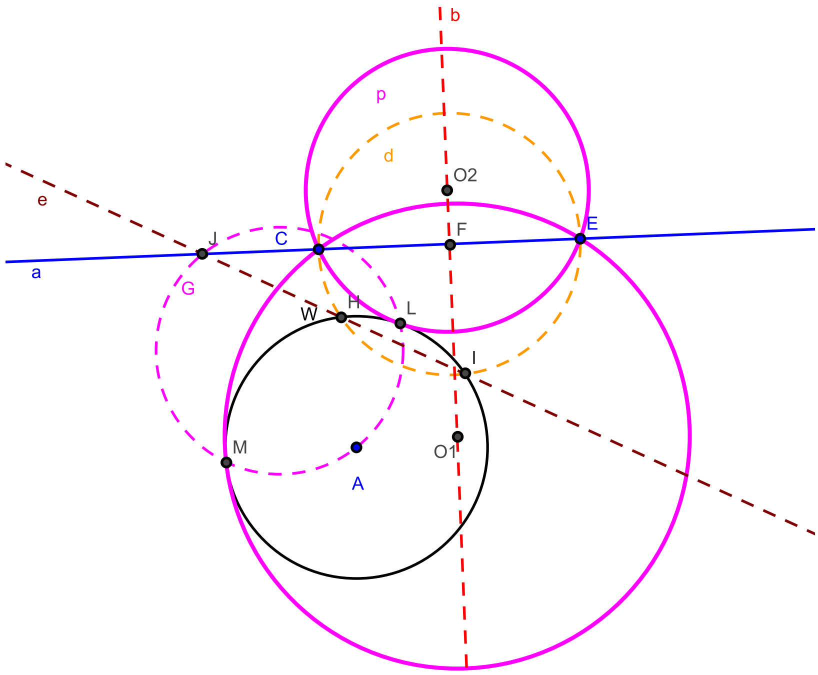

Figura 2.10: Solução (PPC) Circunferência tangente a dois pontos e uma circunferência

Exemplo 21 *Construção:(PPC) Através da geometria inversiva.*

Solução:

1. Dados os pontos C e D e uma circunferência c de centro A e raio $\overline{AB}$, basta construirmos uma circunferência de centro D e raio $\overline{CD}$;

2. Agora calculamos a inversa da circunferência c, traçamos as tangentes do ponto C a circunferência c' encontramos as retas a e b invertendo estas retas encontramos as circunferências desejadas. ■

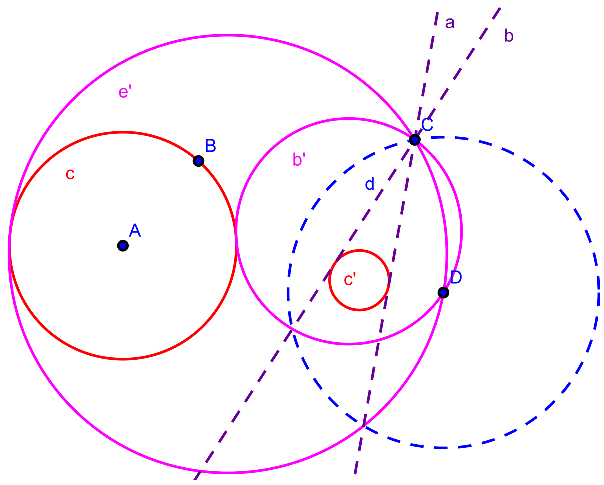

Figura 2.11: Solução (PPC) Circunferência tangente a dois pontos e uma circunferência

2.5 PRR

Problema 5 *(PRR) Construir as circunferências que passem por um ponto e sejam tangentes a duas retas dadas.*

Observação 5 *O problema será obviamente impossível quando as retas são paralelas e uma das retas separa o ponto da outra. Na situação que se vai analisar, as retas são concorrentes e o ponto é exterior as retas. Existem outras soluções, no entanto o centro de uma qualquer solução está a mesma distância das retas, então tem que ser um ponto da bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas. Claro que para que haja solução a bissetriz a considerar terá que ser a do ângulo que contêm o ponto.*

Exemplo 22 *Construção:(PRR)*

Solução:

1. São dadas duas retas r e s concorrentes e um ponto P exterior a ambas;

2. Trace a bissetriz b do ângulo formado pelas retas r e s e que contém o ponto P, O centro das circunferências tem necessariamente de pertencer a bissetriz e qualquer

circunferência nestas condições se for tangente a uma reta também o será a outra.
3. Construa o simétrico de P, P' relativamente a b. Qualquer circunferência de centro em b e que passe por P terá obrigatoriamente de passar por P' O problema ficou reduzido a construir uma circunferência que contenha os pontos P e P' e seja tangente a uma das retas que, como já foi referido, é também tangente a outra reta.
4. Vamos aplica a **construção do caso PPR** para os pontos B, B' e a reta r.
Dadas as retas r e s e ponto B qualquer tracemos a bissetriz da reta que contém o ponto B, tracemos uma perpendicular a bissetriz passando por B;
5. Marcamos a interseção deste ponto D, construa uma circunferência de centro D e raio $\overline{DB}$ obtemos o ponto B' interseção da circunferência com a reta perpendicular a bissetriz encontramos o ponto o ponto E;
6. Assim sendo a interseção das retas $\overleftrightarrow{BB'}$ com a reta s, agora traçamos o ponto médio de $\overline{BE}$ encontramos o ponto F;
7. Agora traçamos uma circunferêcia de centro F e raio $\overline{FE}$, vamos traçando uma perpendicular a $\overline{EF}$ passando por B' assim obtemos o ponto G como sendo a interseção desta reta e a circunferência de centro F e raio $\overline{FB}$;
8. Vamos agora construir outra circunferência de centro E e raio $\overline{EG}$ está circunferência intersepta a reta s nos pontos H e I desta forma encontramos os pontos de tangência procurado;
9. Assim devemos construir uma circunferência que passe pelos pontos I, B e B'. Basta calcular a mediatriz do segmento $\overline{B'H}$ este intersepta a bissetriz das retas no ponto J;
10. Para finalizar construiremos uma circunferência de centro J e raio $\overline{JB}$, concluimos assim uma das circunferência tangente as duas retas que passa pelo ponto B.
De forma análoga construimos a circunferência de centro K e raio $\overline{KB}$, a outra circunferência procurada.

■

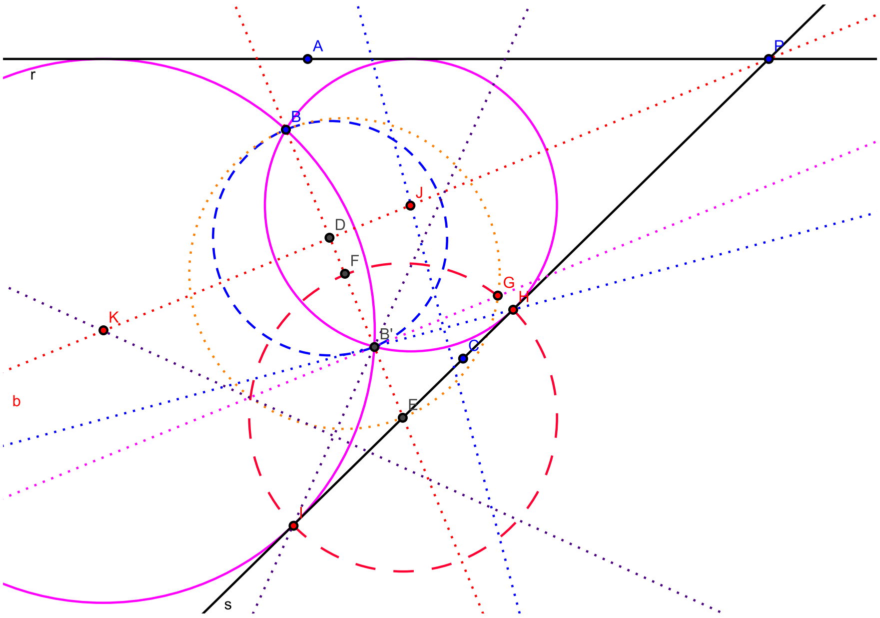

Figura 2.12: Solução (PRR) Circunferência tangente a um ponto e duas retas

Exemplo 23 *Construção:(PRR) Através da geometria inversiva.*

Solução:

1. Construir as circunferências que passem por um ponto e sejam tangentes a duas retas dadas.

2. Na situação que se vai analisar as retas a e b são retas concorrentes e o ponto D é exterior as retas;

3. Vamos traçar uma reta perpendicular a reta a que passe por D e intersepta a mesma no ponto E;

4. Assim vamos constuindo uma circunferência com centro em D e raio $\overline{DE}$ agora traçamos a inversa das retas a e b em relação a está circunferência;

5. Sendo assim encontramos as circunferências a' e b';

6. Vamos agora traçar as retas tangentes a estas circunferências a' e b' encontrando as retas f e g;

7. Para finalizar vamos inverter as retas f e g em relação a circunferência de centro D e raio $\overline{DE}$ portanto encontramos as circunferências tangentes as retas a' e b' que passa pelo ponto D estas são as circunferências f' e g' como queriamos encontrar. ■

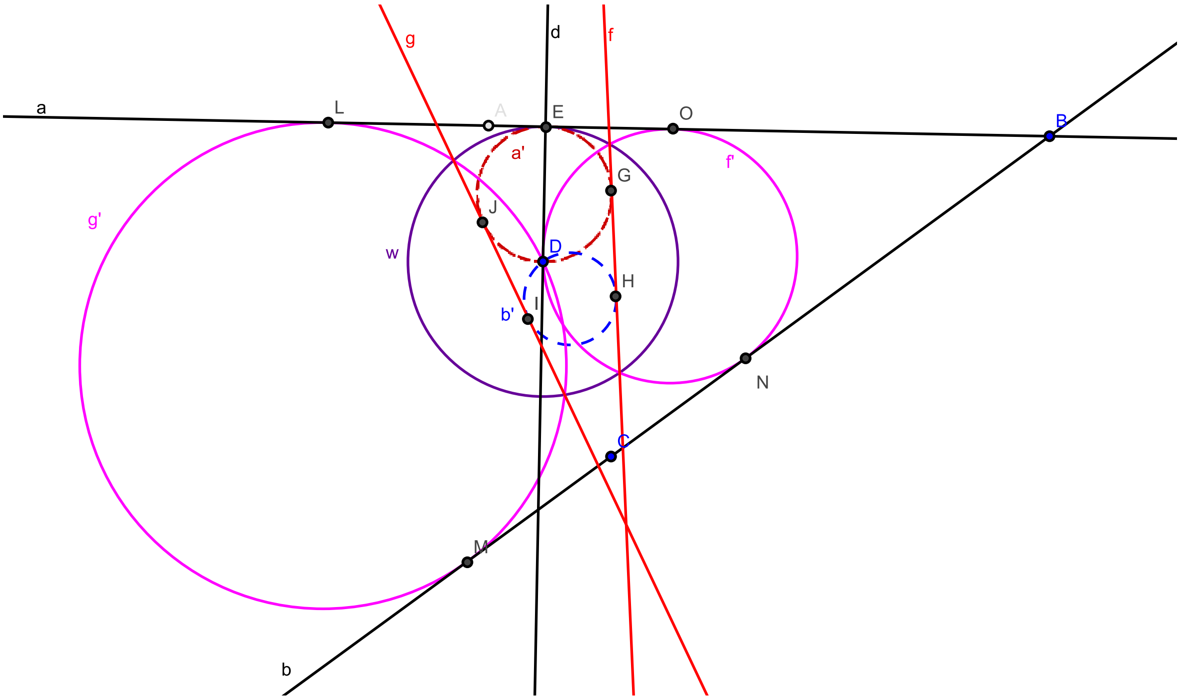

Figura 2.13: Solução (PRR) Circunferência tangente a um ponto e duas retas

2.6 PCC

Problema 6 *(PCC) Construir as circunferências que passem por um ponto e sejam tangentes a duas circunferências dadas.*

Observação 6 *Para este problema temos dois subcasos solucionáveis: as duas circunferências serem secantes e o ponto exterior a ambas (há duas circunferências como solução), e o subcaso que iremos tratar em seguida que consiste de duas circunferências disjuntas e o ponto exterior a ambas (há quatro soluções possíveis.*

Exemplo 24 *Construção: (PCC)*

Solução:

1. Vamos construindo duas circunferências w_1 e w_2 e um ponto P exterior as circunferências;

2. Começando traçando uma reta que passe pelos centros das circunferências O_1 e O_2;

3. Agora traçamos uma reta que passe por O_1 e outra paralela a esta passando por O_2 estas interseptam as circunferências nos pontos E e G em O_1 e F e H em O_2;

3. Traçamos uma reta que passa em $\overleftrightarrow{EF}$ esta intersepta a reta que passa pelos centros das circunferências no ponto d_1 traçe uma reta que passe por $\overleftrightarrow{d_1P}$;

4. Marcamos os pontos K e I na reta que passa pelos centros O_1 e O_2 respectivamente traçamos uma circunferência que contenham os pontos K, I e P esta intersepta as circunferências W_1 e W_2 nos pontos Q e R;

5. Vamos traçar as retas que passam por $\overleftrightarrow{KQ}$ esta intersepta a reta $\overleftrightarrow{d_1P}$ no ponto S;

6. Traçamos uma circunferênciade de diâmetro $\overline{SO_1}$ esta intersepta W_1 nos pontos U e V estes são os pontos de tangência de S e W_1.

7. Da mesma forma traçamos a reta $\overleftrightarrow{IR}$ esta intersepta a reta $\overleftrightarrow{d_1P}$ no ponto T, pelo diâmetro $\overline{TO_2}$ traçamos outra circunferência que corta a circunferência W_2 nos pontos Z e W, assim encontramos os pontos de tangência;

8. Agora para finalizar traçamos uma circunferência com os pontos V, Z e P está circunferência e Tangente a W_1 e W_2 como queriamos encontrar.

9. De forma análoga traçamos outra circunferência que passe pelos pontos W, U e P esta também é uma circunferência desejada como mostra a figura, existem mas duas outras circunferências calculadas pela outra homototeia inversa. ■

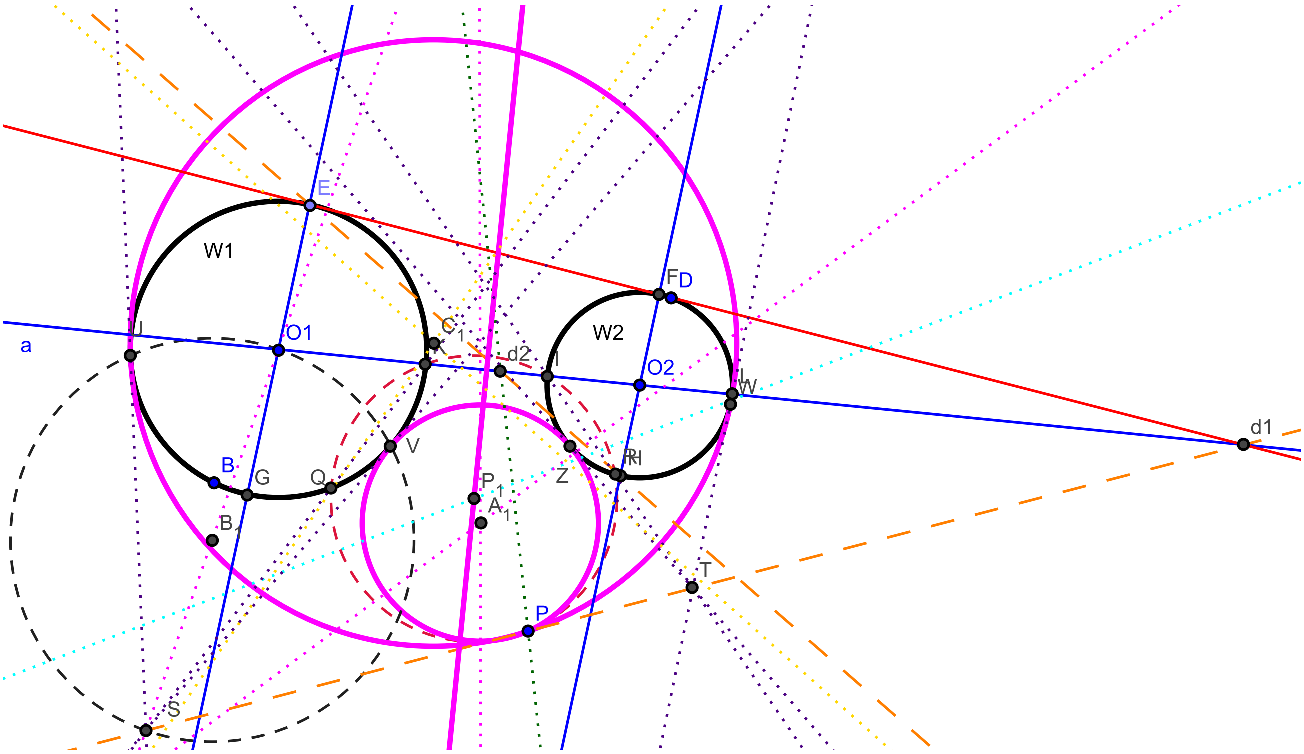

Figura 2.14: Solução (PCC) Circunferência tangente a um ponto e duas circunferências

Exemplo 25 *Construção: (PCC) Através da geometria inversiva*

Solução:

1. Vamos construir as tangentes (interiores e exteriores) as circunferências W_1 e W_2 e ponto P cujo centros são os pontos O_1 e O_2;

2. Construa uma circunferência de centro P e raio $\overline{PO_1}$ utilizando a geométria dinâmica o geo-gebra traçamos as inversas das circunferência W_1 e W_2 traçamos as tangetes destas duas circunferências encontramos as retas a, b, f e g;

3. Agora vamos traçar as inversas destas retas en relação a circunferência de diâmetro $\overline{PO_1}$, assim encontramos as circunferência desejadas por nosso problema, como mostra a figura. ■

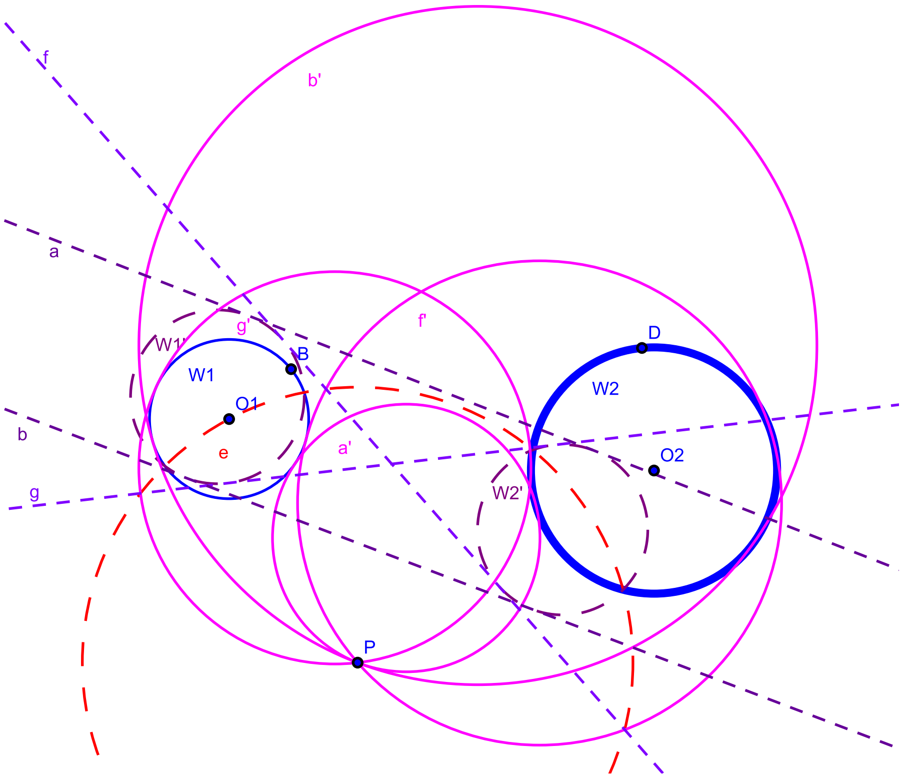

Figura 2.15: Solução (PCC) Circunferência tangente a um ponto e duas circunferências

2.7 CRR

Problema 7 *(CRR) Construir as circunferências que sejam tangentes a duas retas e uma circunferência dada.*

Observação 7 *Como os casos anteriores o número se soluções distintas vai depender da posição relativa dos três elementos. Não há solução se as retas são paralelas e exteriores a circunferência dada e uma das retas está entre a circunferência e a outra reta. O número de soluções pode ser uma, duas, três, quatro, seis ou oito. Aqui vaimos analisar uma situação com quatro soluções: a circunferência está entre as duas retas e estas são concorrentes e exteriores a circunferência.*

Exemplo 26 *Construção: (CRR)*

Solução:

1. Vamos traçar duas retas concorrentes a e b em um ponto A, e uma circunferência W de centro O;

2. Traçamos a bissetriz das retas a e b encontramos a reta h, agora traçamos uma reta l perpendicular a reta h ($l \perp h$) passando por O;

3. A interseção destas retas é o ponto J, construimos uma circunferência de centro J que passe por O, esta intersepta a reta l no ponto K;

4. Traçamos uma perpendicular a l passando por este ponto uma reta j, com o compasso traçamos uma circunferência W' no ponto A e traçamos uma reta e perpendicular a reta a onde a reta e intersepta a circunferência W' nos pontos F e G;

5. Traçamos paralelas a reta a que passem pelos pontos F e G, estas intersepta a reta l nos pontos H e V;

6. Calculamos o ponto médio de $\overline{HO}$ encontramos o ponto D, agora traçamos uma circunferência de centro H que passe por D;

7. Assim esta circunferência intersepta a reta f nos pontos R e S, traçamos as mediatizes de $\overline{SK}$ e $\overline{RK}$;

8. Logo esta intersepta a bissetriz nos pontos Z e X, traçamos retas que passam por $\overline{ZO}$ e $\overline{XO}$ estas interseptam a circunferência W nos pontos M e N;

9. Basta traçamos as circunferência de centro Z que passe por M e outra com centro em X que passe por N, encontramos duas das circunferências desejadas.

10. De forma análoga repetimos os procedimento para o ponto V encontramos outras duas circunferências. ∎

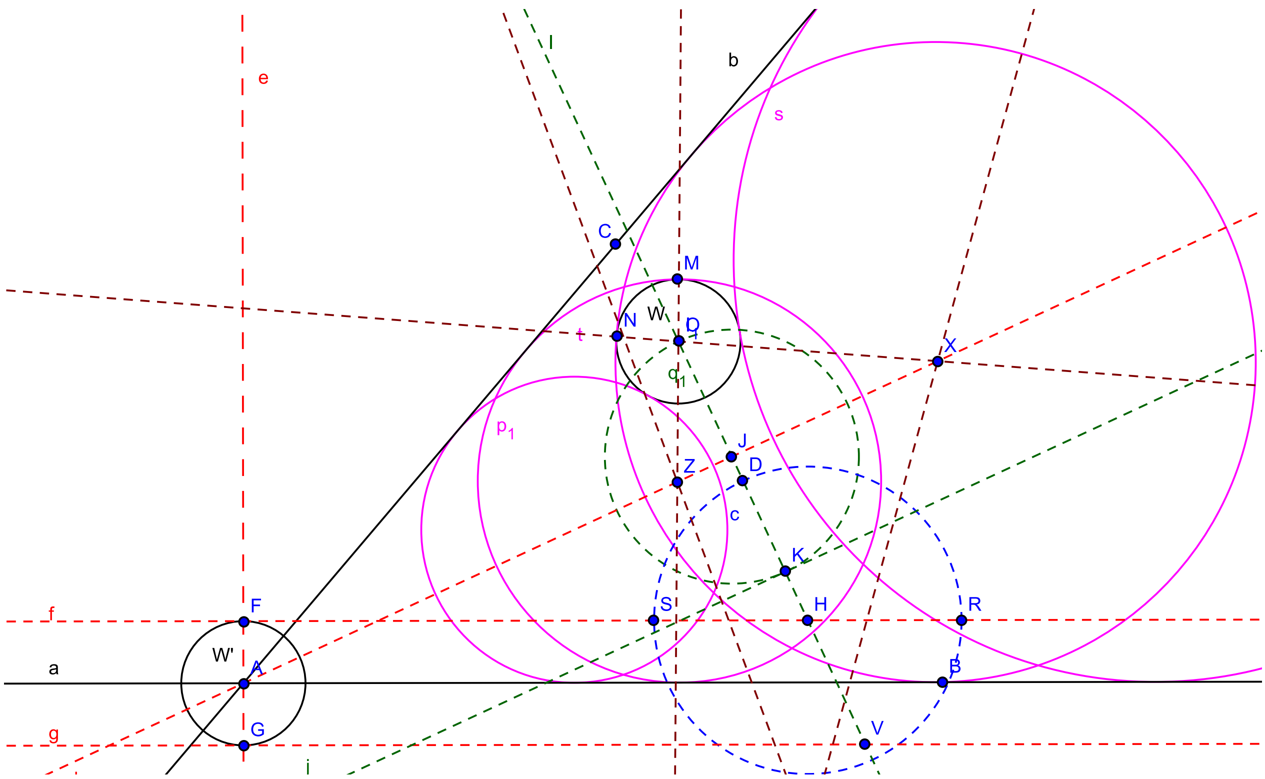

Figura 2.16: Solução (RRC) Circunferências tangente a duas retas e uma circunferência

Exemplo 27 *Construção: (RRC) Através da Geometria inversiva*

Solução:

1. Aqui vaimos analisar uma situação com quatro soluções: a circunferência está entre as duas retas e estas são concorrentes e exteriores a circunferência.

2. Vamos traçar duas retas concorrentes a e b em um ponto A, e uma circunferência W de centro O e raio qualquer entre as retas a e b;

3. Agora construiremos uma circunferência W no ponto A e tracemos as retas perpendicular as retas a e b, assim encontramos as retas e e f;

4. Depois traçamos as paralelas as retas a e b, assim encontramos as retas g, h, i, e j;

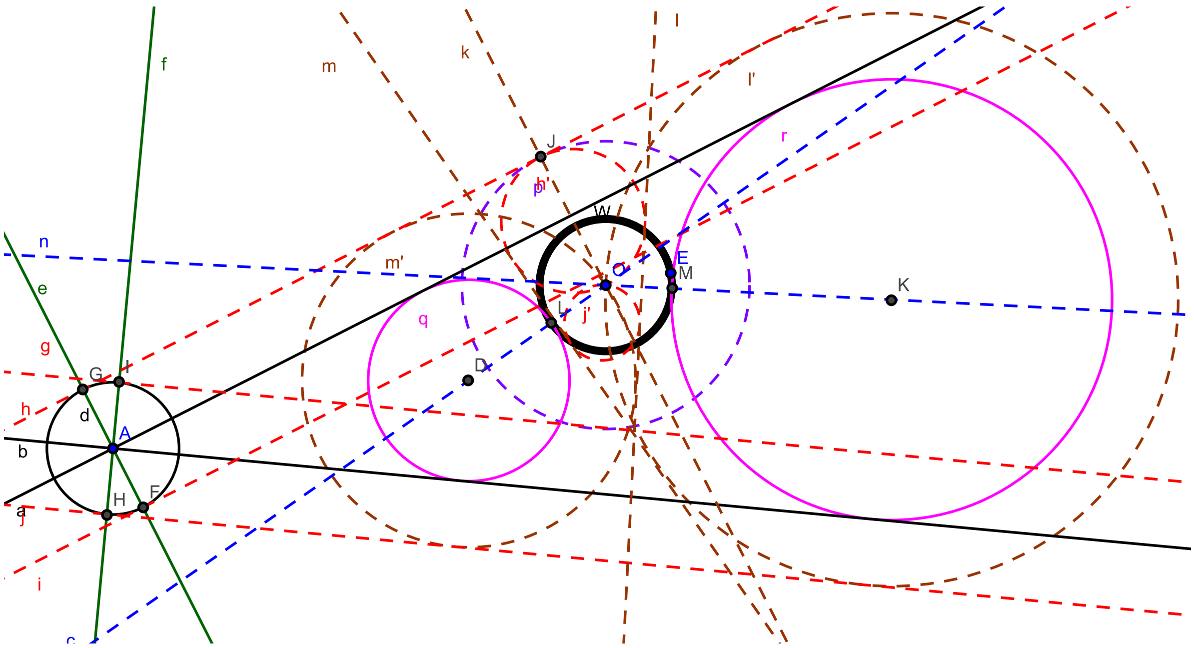

Figura 2.17: Circunferências auxiliares e retas auxiliares

5. Agora traçamos uma perpendicular a reta h passando pelo ponto O, esta intersepta a reta h no ponto J;

6. Traçemos uma circunferência p de centro O que passe por J, assim invertemos as retas a e b em relação a esta circunferência p;

7. Encontramos duas circunferências a' e b', depois traçamos retas l e m retas tangentes as circunferências a' e b';

8. Agora invertemos as retas l e m em relação a circunferência p;

9. Assim encontremos duas circunferências m' e l' tangentes as retas h e j que passando pelo ponto O;

10. Marcamos o centro destas circunferências m' e l' encontramos os pontos D e K;

11. Traçamos retas que passam por $\overline{DO}$ e $\overline{KO}$, esta intersepta a circunferência W nos pontos L e M;

12. Agora construa as circunferências de centro D e que passam por L, e a outra de centro K que passa por M, esta são duas das circunferências desejadas;

13. De forma análoga construimos as outras circunferência; ■

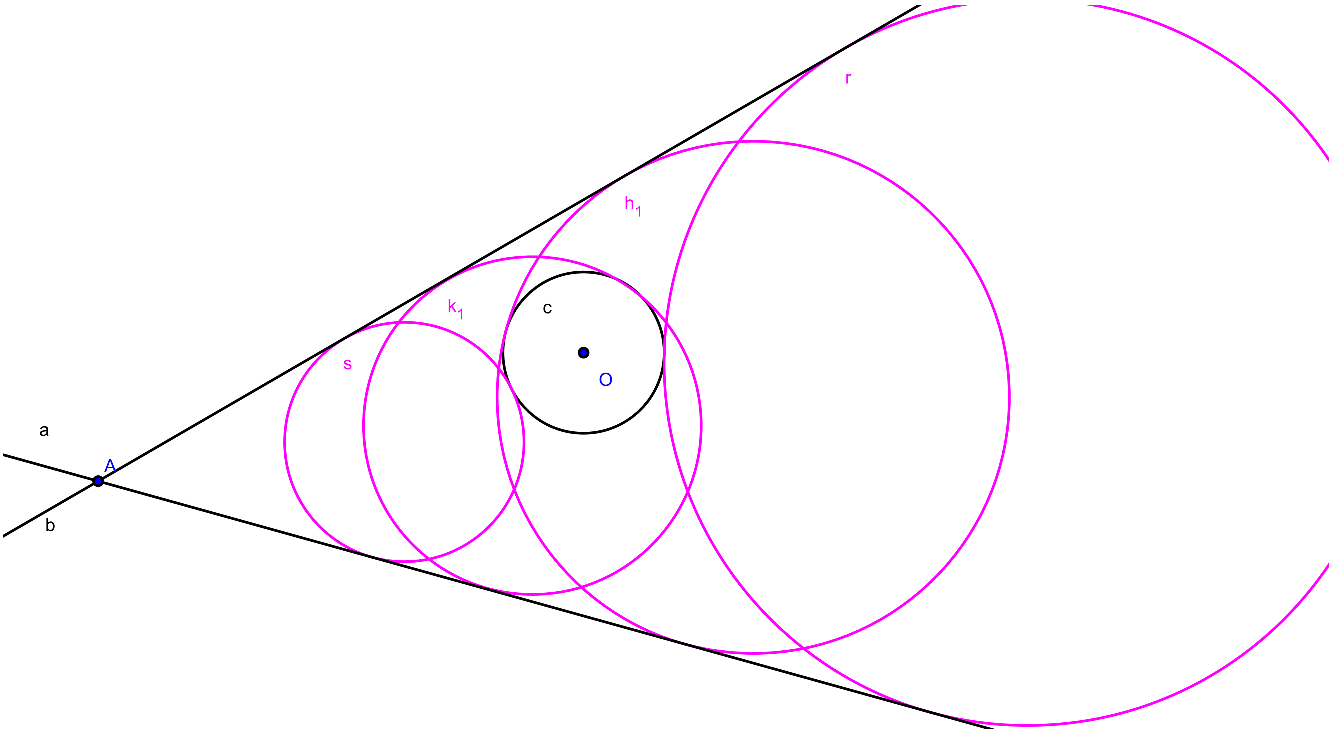

Figura 2.18: Solução (RRC) Circunferências tangente a duas retas e uma circunferência

2.8 PRC

Problema 8 *(PRC) Construir as circunferências que sejam tangentes a uma circunferência, a uma reta e que contenham um ponto dado.*

Observação 8 *O número de soluções distintas deste caso varia entre zero e quatro conforme as posições relativas dos três elementos, exceto na situação em que o ponto pertence a circunferência e a reta é tangente a circunferência, em que há infinitas soluções distintas.*

Tal como nos casos anteriores vai-se analisar apenas uma das situações que variem *no número de soluções. O quadro que se escolheu para analisar é aquele em que os três elementos não se intersectam, i.e. o ponto é exterior a reta e a circunferência e a reta é também exterior a circunferência.*

Exemplo 28 *Construção: (PRC) São dadas uma reta l exterior a uma circunferência $C(O;r)$ de centro O e raio r e um ponto P que não pertence a reta l e não pertence circunferência C.*

Solução:

1. Trace uma reta t perpendicular a reta dada que passe pelo centro da circunferência dada. Marquem os pontos A e B pontos de interseção de t com a circunferência C. Marque ainda o ponto M o ponto de interseção da reta t com a reta l;

2. Trace a circunferência auxiliar S que contenha um dos pontos A ou B, (seja B) e os pontos P e M. Marque o ponto Q, o outro ponto da interseção de S e da reta $\overleftrightarrow{AP}$. Assim a potência de A com relação a qualquer circunferência que contenha os pontos Q e P é igual a potência de A com relação a S.

3. Construam a circunferência $W_1(O_1;r_1)$, $W_2(O_2;r_2)$ tangente a reta t e que contenha os pontos P e Q **(caso PPR)**. Estas circunferências são duas das circunferências procuradas. Elas são tangentes a t e contém o ponto P, não resta dúvidas pois a construção assim o exigiu. Seja E o ponto de tangência de l com W_1 e H o outro ponto de interseção da reta com W_2.

4. De forma análoga construa uma circunferência s que passe pelos pontos P, M e B;

5. Tracemos uma reta $\overline{AP}$, esta intersepta a circunferência s no ponto U, tracemos a reta $\overleftrightarrow{UT}$, a mesma intersepta a reta l no ponto V;

6. Construa uma circunferência de diâmetro $\overline{UV}$ de forma semelhante até encontrarmos as outras circunferências desejadas.

■

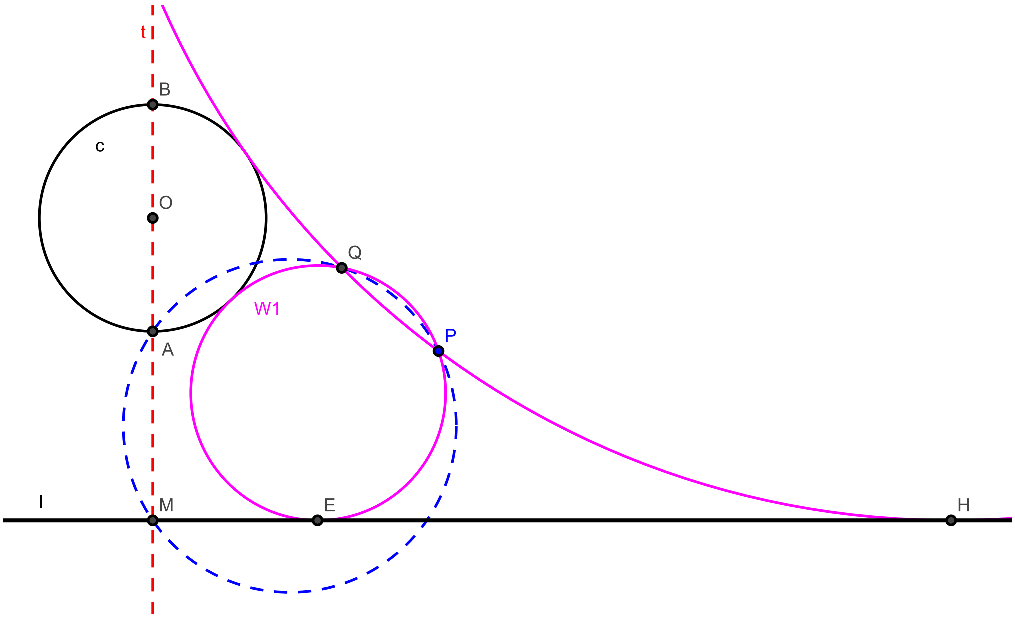

Figura 2.19: Circunferências tangente a um ponto uma reta e uma circunferência

Exemplo 29 *Construção: (PRC) Através da Geometria inversiva*

Solução:

1. Vamos construir uma reta a, um ponto P e uma circunferência W de centro O, inicialmente traçamos uma reta que passa por $\overline{PO}$ e a reta intersepta a circunferência W no ponto F;

2. Agora construimos uma circunferência de centro P e raio $\overline{PF}$, assim vamos calcular a inversa da reta a em relação a está circunferência de centro P, obtendo uma circunferência a', calculando a inversa da circunferência W, obtemos uma circunferência W';

3. Vamos traçar as retas tangentes a estas duas circunferência;

4. Agora ao traçamos as inversas destas retas obtemos as circunferências desejadas como mostra na figura.

■

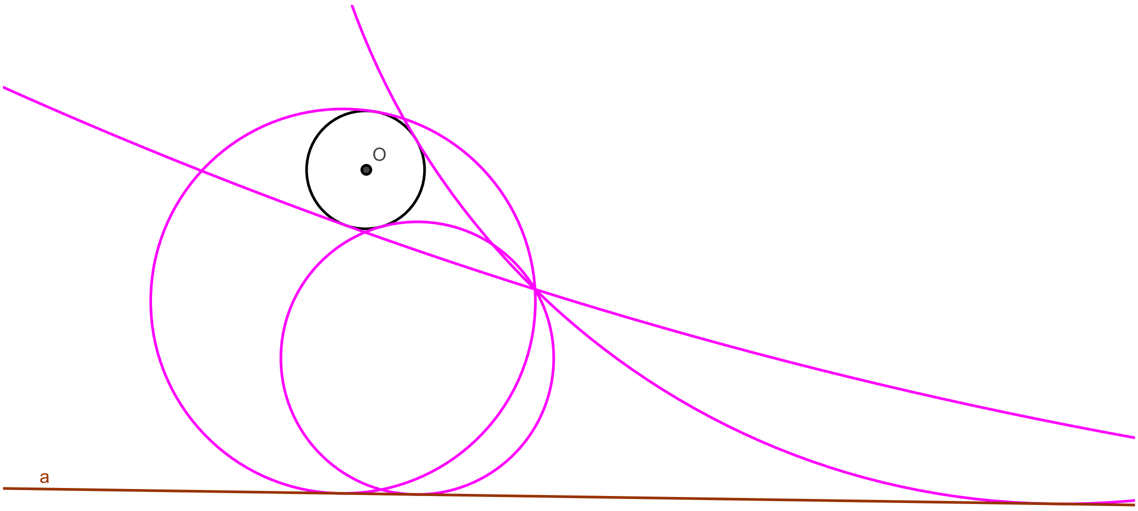

Figura 2.20: Solução (PRC) Circunferências tangente a um ponto uma reta e uma circunferência

2.9 RCC

Problema 9 *(RCC) Construir as circunferências que sejam tangentes a duas circunferências e a uma reta dadas.*

Observação 9 *O número de soluções distintas varia também com as posições relativas das retas e da circunferência. Claro que se as circunferências estão em semiplanos diferentes, definidos pela reta, não há solução. Também obviamente não há solução se uma das circunferências é interior a reta e for exterior a ambas. A construção que se vai estudar é aquela em que as circunferências são exteriores e estão no mesmo semiplano definido pela reta.*

Exemplo 30 *Construção: (RCC)*

Solução:

1. Vamos traçar uma reta a e duas circunferências $W-1$ e W_2 de centro O_1 e O_2 e

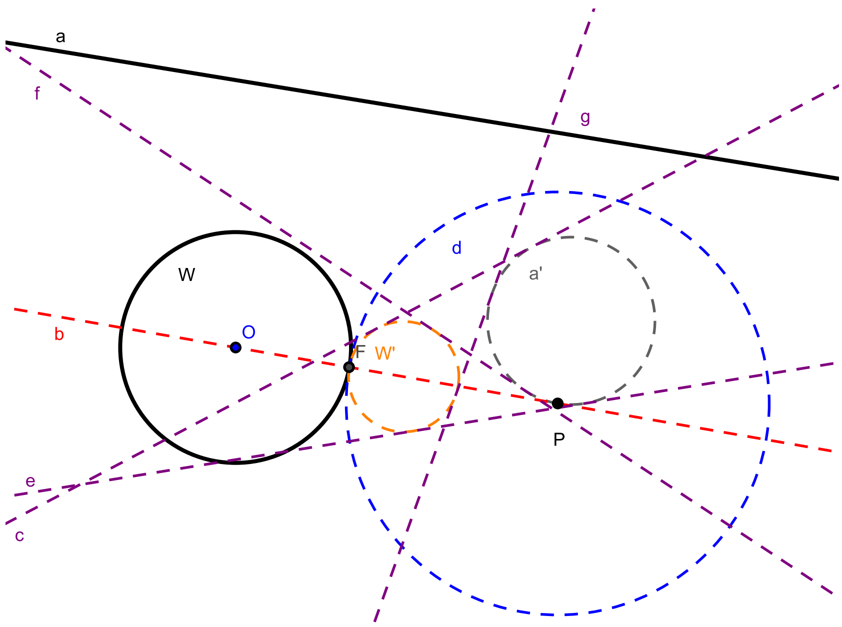

Figura 2.21: retas tangente as circunferência de inversão

raio qualquer ambas;

2. Iniciamos traçando uma reta t que passe pelos centros O_1 e O_2 esta intersepta a reta a no ponto Z;

3, Agora traçamos uma perpendicular a reta a que passe por O_2 a reta r, a mesma intersepta a reta a no ponto M;

4. Encontramos F ponto de inerseção entre a reta t e a circunferência W_2;

5. Assim traçamos uma circunferência W_1 com centro em F esta intersepta a reta t nos pontos D e E;

6. Agora com centro em O_2 tracemos duas circunferências uma que passe por D e outra que passe por E esta intersepta a reta r nos pontos G, H, I e J são circunferência auxiliares;

7. De forma semelhante traçamos uma circunferência W_1 no ponto Z;

8. Depois por este ponto traçamos a reta s que é perpendicular a reta a ($s \perp a$);

9. Assim a interseção de s com W_1 são os pontos L e Q;

10. Agora traçamos paralelas a reta a passando por L e Q, estas são retas auxiliares

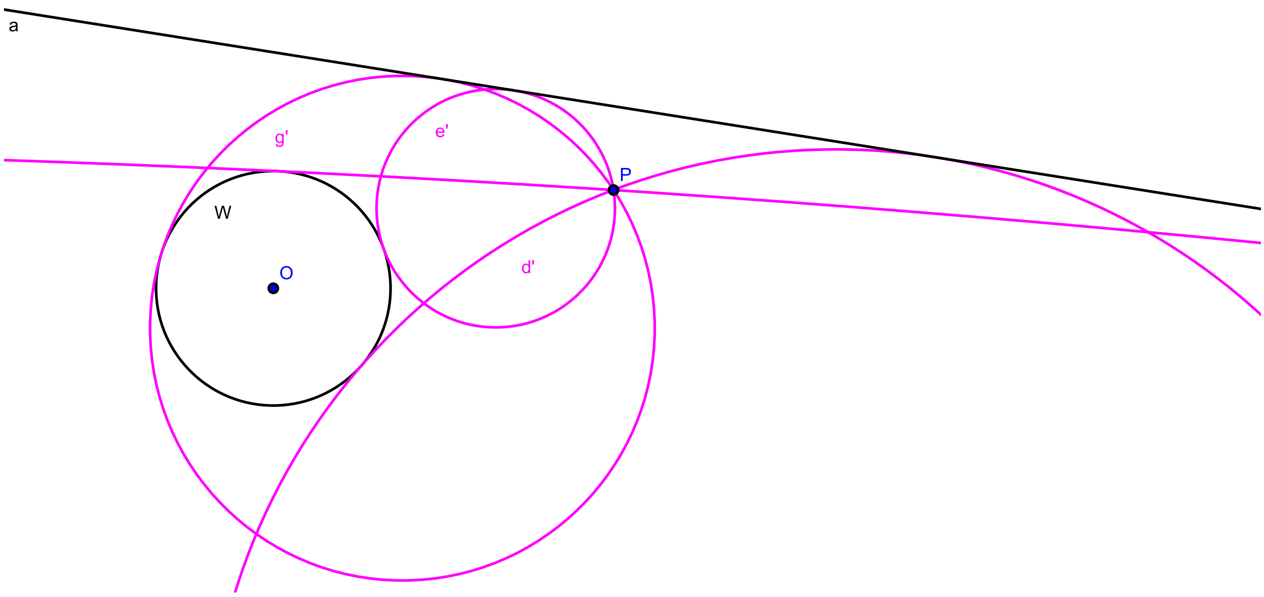

Figura 2.22: Solução (PRC) Circunferências tangente a um ponto uma reta e uma circunferência

b e c, estas interseptam a reta r nos pontos N e K.

11. Vamos traçar uma circunferência que passe pelos ponto O_1, N, e I;

12. Depois traçamos uma reta h que passe por O_1 e J, esta intersepta a circunferêcia que passou pelos pontos O_1, N, I, no ponto T e reta b no ponto U;

13. Agora construimos uma circunferência que tenha diâmetro $\overline{UT}$, traçamos uma reta i que seja perpendicular a reta h passando por O_1;

14. Assim esta intersepta a circunferêcia de diâmetro $\overline{UT}$ no ponto V e R;

15. Depois traçamos outra circunferência de centro U que passe por V, esta intersepta a reta b nos ponto Y e P;

16. Vamos agora calcular a circunferência que passe pelos pontos O_1, P e T, cujo centro e ponto X;

17. Agora traçamos uma perpendicular a reta b passando por P, esta intersepta a reta a no ponto P_2;

18. Assim finalizamos com uma circunferência de centro em X que passe por P_2;

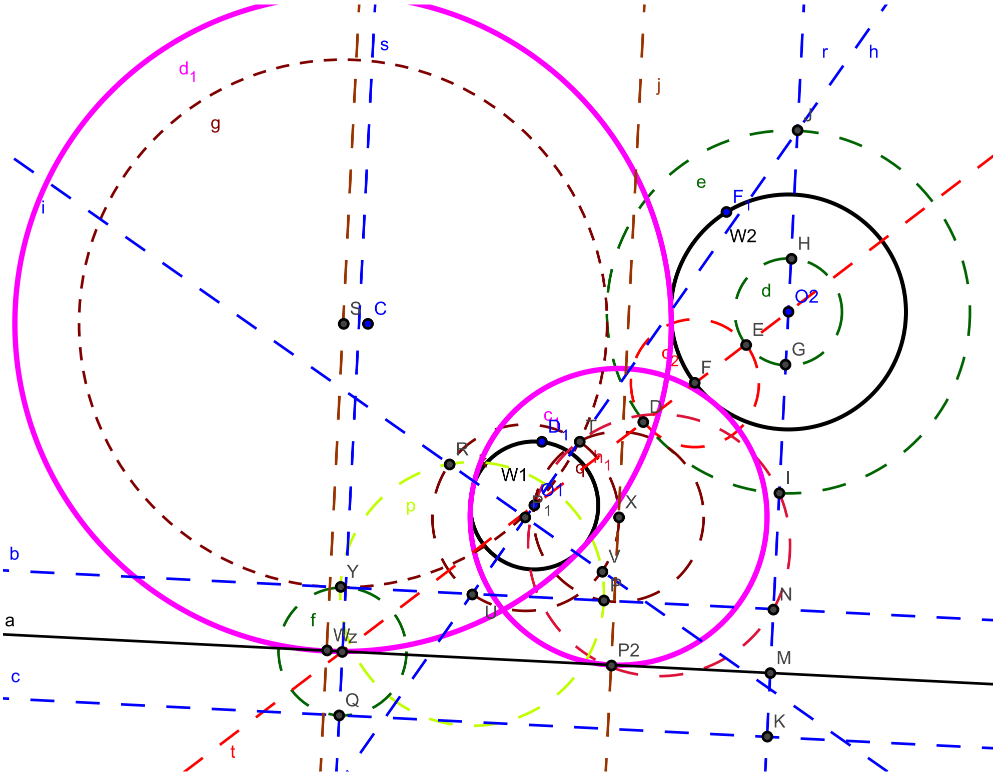

Figura 2.23: Circunferências tangente a uma reta e duas circunferências

19. Portanto encontramos uma circunferência que é tangente a reta a e também tangente as circunferências W_1 e W_2, como queriamos;

20. De forma análoga fazemos o mesmo procedimento com os pontos Y, O_1 e T;

21. Assim Encontraremos as outra circunferências desejadas como mostra a figura.

■

Exemplo 31 *Construção:(RCC) Através da Geometria inversiva*

Solução:

1. Vamos traçar uma reta a e duas circunferências W_1 e W_2 de centro O_1 e O_2 e raio qualquer ambas;

2. Iniciamos traçando uma reta b que passe pelos centros O_1 e O_2 esta intersepta a circunferência W_2 nos pontos H e B;

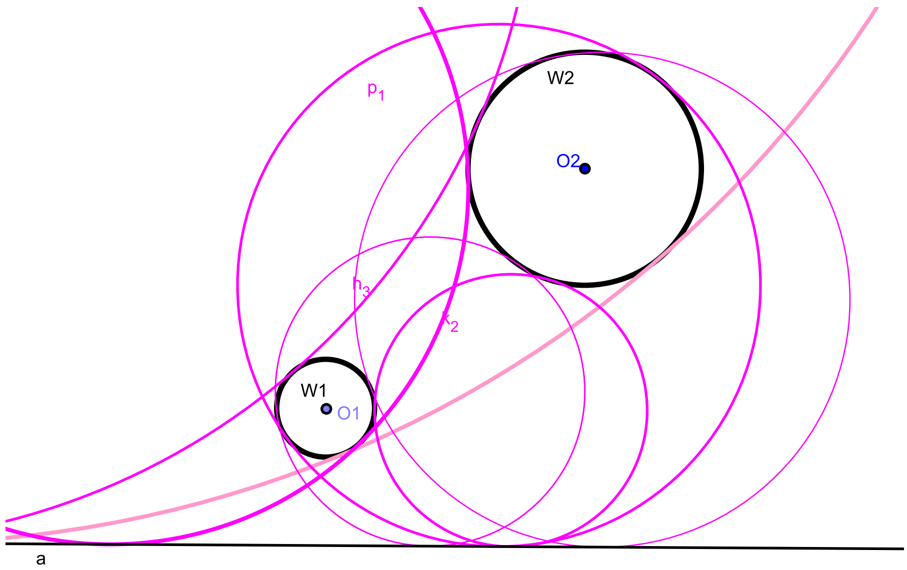

Figura 2.24: Solução (RCC) Circunferências tangente a uma reta e duas circunferências

3. Agora construa uma circunferência k de centro H e raio cuja medida esteja entre O_2 e B qualquer;

4. Calculamos as inversas de W_1 e W_2 encontrando assim w' e w" repectivamente;

5. Depois encontramos o ponto A como sendo a interseção entre w" e a reta b;

6. Agora traçamo uma reta tangente entre o ponto A e a circunferência w', tendo como interseção o ponto C;

7. Traçamos uma circunferência e com centro em A que passe por C, esta circunferência intersepta a reta b nos pontos P e Q, estes são conhecidos como pontos mágicos;

8. Agora calculamos os inversos dos pontos P e Q em relação a circunferência k, encontramos assim os pontos P' e Q' respectivamente;

9. Escolhendo um destes pontos, em nosso caso usaremos o ponto P';

10. Agora construimos uma circunferência f de centro P' e raio qualquer;

11. Calculamos as inversas das circunferências W_1 e W_2 em relação a circunferência f;

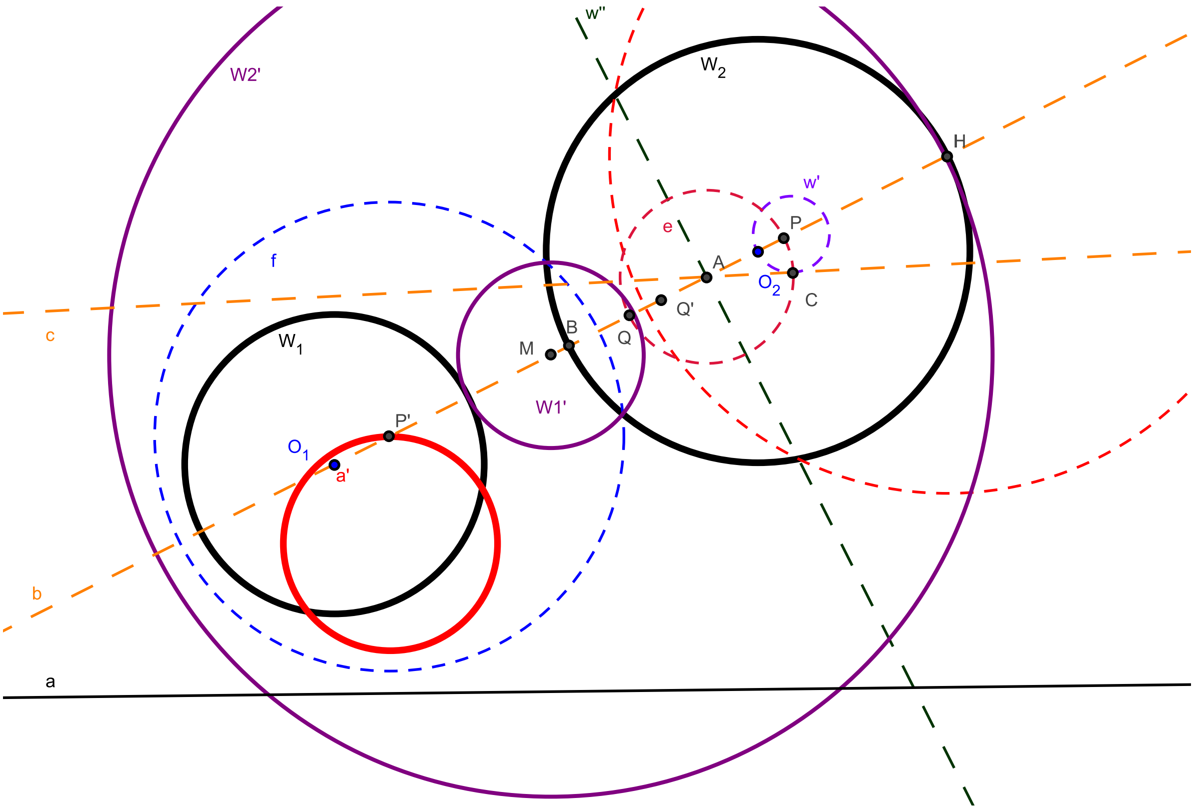

Figura 2.25: Encontrando os pontos mágicos

12. Sendo assim encontramos as circunferências W_1' e W_2' respectivamente, sendo as mesma concentricas no ponto M;

13. Agora calculamos a inversa da reta a, encontramos a circunferência a' que passa pelo ponto P', a mesma se encontra entre w_1' e w_2' como queriamos;

14. Encubrindo alguns outros detalhes teriamos;

15. A nossa meta agora e encontrar circunferências que sejam tangente a circunferência a', W_1' e W_2';

16. Vamos traçar uma reta i passando pelo ponto O, esta intersepta W_1' e W_2' nos pontos T e R;

17. Agora traçamos uma circunferência W_1' no ponto R, esta intersepta a reta i no ponto V e U;

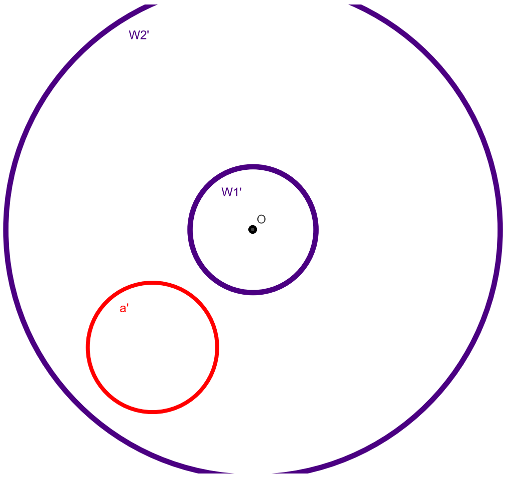

Figura 2.26: Circunferências concentricas

18. Assim calculamos W o ponto médio de O e V;

19. Depois traçamos uma circunferência s de centro O que passe por W;

20. Agora calculamos a distância do segmento $\overline{TW}$ e a medida do raio da circunferência a' de centro Z que passa por X;

21. Vamos construir uma circunferência de centro Z e raio $\overline{TW}+\overline{ZX}$, está intersepta a circunferência s nos pontos A_1 e B_1;

22. Basta construirmos uma circunferência v de centro B_1 e raio $\overline{TW}$;

23. Assim encontramos uma circunferência t tangente a circunferência a', W_1' e W_2';

24. Agora quando invertemos a circunferência t em relação a circunferência k, encontramos uma circunferência p tangente a reta a e tangente as circunferências W_1 e W_2.

25. Façamos os mesmos procedimentos para o ponto A_1;

26. Serguindo os passos encontramos outra circunferência;

27. De forma semelhante encontramos outra circunferências de centro Z e raio $\overline{TW}-\overline{ZX}$, marcamos estes pontos na circunferência s, com estes pontos encontramos mais duas circunferências;

28. Assim calculamos W o ponto médio de O e V;

29. Assim calculamos Q o ponto médio de O e ;

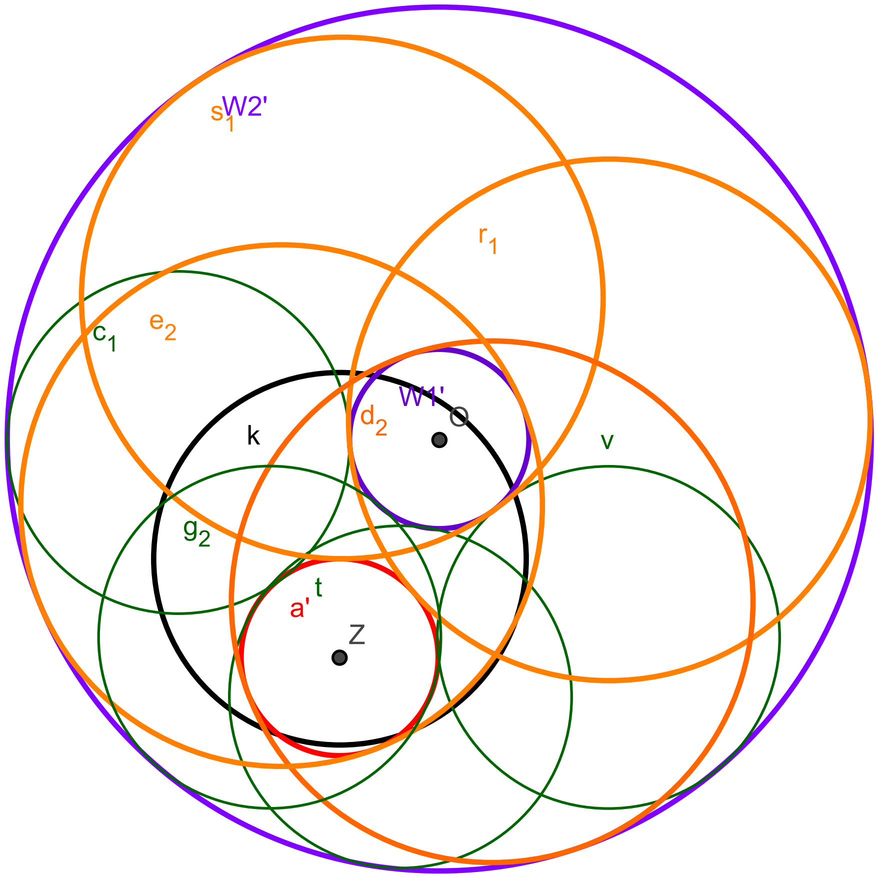

Figura 2.27: Circunferências tangente a uma circunferência e suas concentricas

30. Depois traçamos uma circunferência s' de centro O que passe por Q;

31. Agora calculamos a distância do segmento $\overline{QR}$ e a medida do raio da circunferência a' de centro $\overline{ZX}$;

32. Vamos construir uma circunferência de centro Z e raio $\overline{QR}+\overline{ZX}$, está intersepta a circunferência s' nos pontos A_2 e B_2;

33. Basta construirmos uma circunferência v' de centro B_2 e raio $\overline{QR}$;

34. Assim encontramos uma circunferência t' tangente a circunferência a', W_1' e W_2';

35. Agora quando invertemos a circunferência t' em relação a circunferência k, encontramos uma circunferência p' tangente a reta a e tangente as circunferências

W_1 e W_2.

36. Façamos os mesmos procedimentos para o ponto A_2;

37. Serguindo os passos encontramos outra circunferência;

38. De forma semelhante encontramos outra circunferências de centro Z' e raio $\overline{QR}-\overline{ZX}$, marcamos estes pontos na circunferência s', com estes pontos encontramos mais duas circunferências;

39. Quando invertemos estas oito circunferências em relação a circunferência k, encontramos as circunferências desejadas.

■

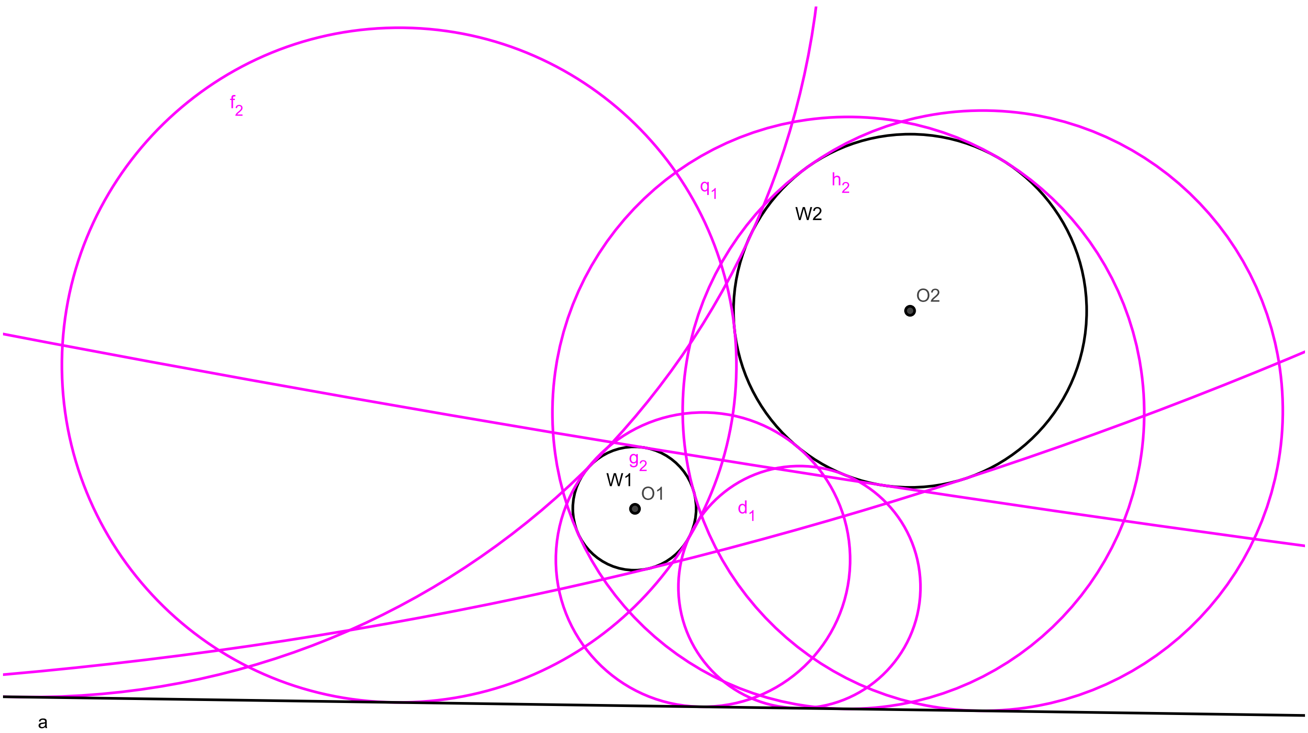

Figura 2.28: Solução (RCC) Circunferências tangente a uma reta e duas circunferências

2.10 CCC

Problema 10 *(CCC) Construir as circunferências que sejam tangentes a três circunferências dadas.*

Observação 10 *Este último caso, que como já se referiu engloba todos os outros quando se considera uma reta é uma circunferência de raio infinito e um ponto uma circunferência de raio nulo, e talvez por isso, foi o que suscitou mais interesse e curiosidade aos matemáticos ao longo da história da geometria. Como todos os outros casos o número de soluções vai depender da posição relativa das três circunferências. Exceto a situação em que as circunferências são tangentes num mesmo ponto, onde o número de soluções é infinito, este número é par e varia entre 0 e 8. A situação que se vai analisar, tem oito soluções, é aquela em que cada circunferência é exterior em relação as outras.*

Exemplo 32 *Construção: (CCC) Vamos construir duas circunferências auxiliares concêntricas com duas das dadas e cuja coroa circular tenha de raio, o raio da terceira (claro que se pressupõe circunferências com raios diferentes). Utiliza-se a construção de um caso já conhecido o (**caso PCC**). Para construir as circunferências soluções será suficiente ampliar ou reduzir as circunferência obtidas na aplicação do (**caso PCC**). São dadas três circunferências $W_1(O_1; r_1), W_2(O_2; r_2)$ e $W_3(O_3; r_3)$ exteriores e de raios diferentes. Suponha-se que r_1 é o menor dos raios.*

Solução:

1. São dadas as três circunferências W_1, W_2 e W_3 com raios r_1, r_2, e r_3, sendo r_1 o menor raio, e as circunferências exteriores de raios diferentes;

2. Vamos tracemos retas a, b e c que liguem os centros das circunferências O_1O_2, O_1O_3 e O_2O_3 respectivamente;

3. Depois marcamos os pontos de interseção da reta a com circunferência W_2 e da

reta b com a circunferência W_3 que são A, B, C e D respectivamente;
4. Agora construimos uma circunferência de raio r_1 passando por A e outra circunferência r_1 passando por C, estas intersepta as retas a e b nos pontos E, F, G e H respectivamente;
5. Assim com centro em O_2 construimos duas circunferências S_1 e S_2 que passem por E e F, com centro em O_3 construimos duas circunferências S_3 e S_4 que passem por G e H;
6. Agora encontramos I ponto de interseção da reta c com a circunferência S_3, e o ponto J ponto de interseção da reta c com a circunferência S_1;
7. Contruimos uma circunferência que passe pelos pontos O_1, I e J, esta intersepta S_3 no ponto P e S_1 no ponto Q;
8. Traçamos uma reta d tangente a W_2 e W_3 está intersepta a reta c no ponto T;
9. Agora traçamos uma reta h esta passa por $\overline{TO_1}$;

10. Traçamos uma circunferência que passe pelos pontos O_1, I e J, está intersepta S_3 no ponto P e intersepta S_1 no ponto Q;
11. Agora traçamos uma reta que passe por $\overleftrightarrow{IP}$ e outra que passe por $\overleftrightarrow{JQ}$, está intersepta a reta h nos pontos K e M;
12. Assim com centro em K, traçamos uma circunferência que passe por O_3, a mesma intersepta a circunferência S_3 nos pontos O e N;
13. Fazendo o mesmo com o ponto M, está intersepta S_1 nos pontos R e S;
14. Agora construa uma circunferência que passe pelos pontos O_1, N e S, encontre o centro desta circunferência o ponto U, tracemos uma reta que passe por $\overline{UO_1}$ está intersepta a circunferência W_1 no ponto V;
15. Basta traçarmos uma circunferência com centro em U e que passe por V, assim encontramos uma circunferência tangente as três circunferências como desejavamos;

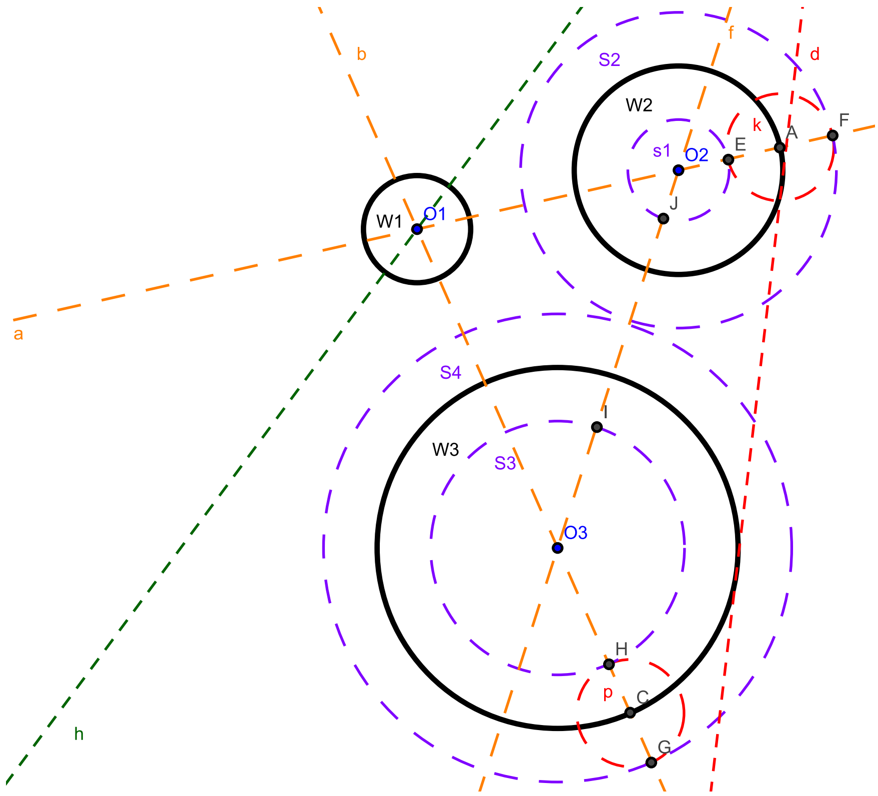

Figura 2.29: Circunferências auxiliares

16. De forma semelhante construimos uma circunferência que passe pelos pontos O_1, O e Q, encontramos W como centro, traçamos a reta que liga W a O_1, encontramos a interseção com W_1 o ponto Z, basta traçarmos a circunferência que tenha centro em W e passe por Z, assim encontramos outra circunferência desejada;
17. De foma análoga trabalhamos as circunferência S_2 e S_4, S_1 e S_4, S_2 e S_3;
18. Desenvolvendo todos os procedimentos iremos ter oito circunferências desejadas;

∎

Exemplo 33 *Construção: (CCC) Através da Geometria Inversiva*

São dadas três circunferências $W_1(O_1; r_1), W_2(O_2; r_2)$ e $W_3(O_3; r_3)$ exteriores e de raios diferentes.

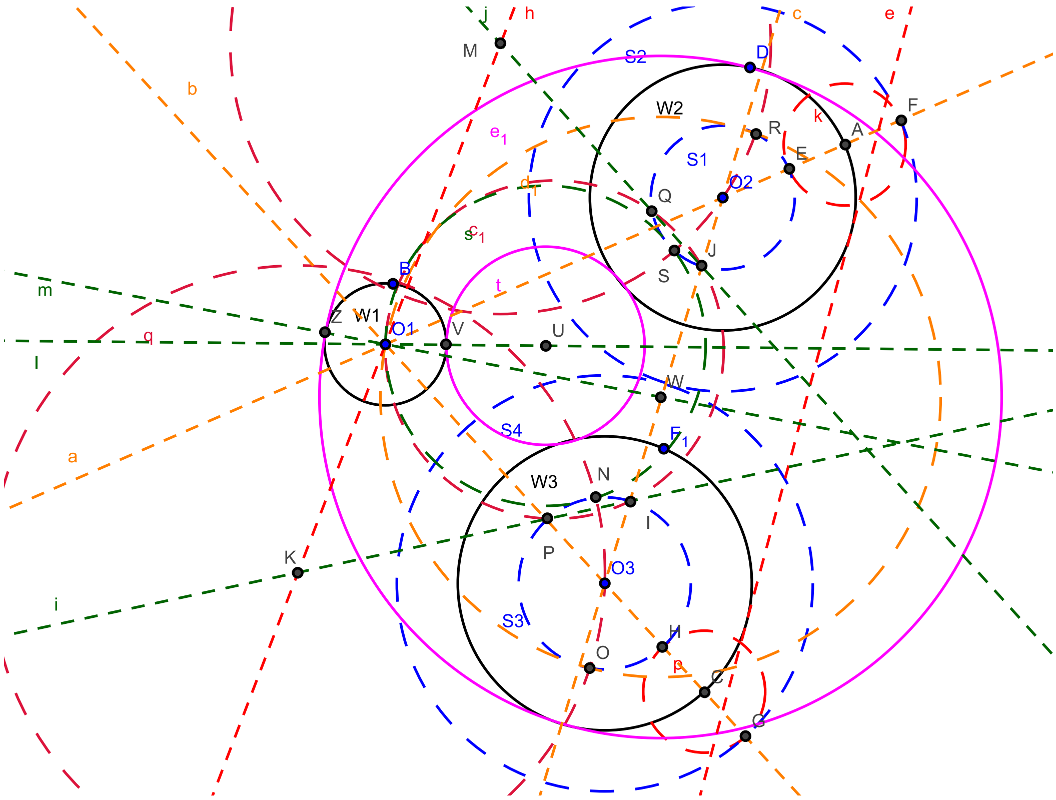

Figura 2.30: Circunferências tangente a três circunferências externas

Observação 11 *Vamos repetir os passos de 1 a 14.*

Solução: .

1. Vamos traçar uma reta a e duas circunferências W_1 e W_2 de centro O_1 e O_2 e raio qualquer ambas;

2. Iniciamos traçando uma reta b que passe pelos centros O_1 e O_2 está intersepta a circunferência W_2 nos pontos H e B;

3. Agora construa uma circunferência k de centro H e raio cuja medida esteja entre O_2 e B qualquer;

4. Calculamos as inversas de W_1 e W_2 encontrando assim w' e w" repectivamente;

5. Depois encontramos o ponto A como sendo a interseção entre w" e a reta b;

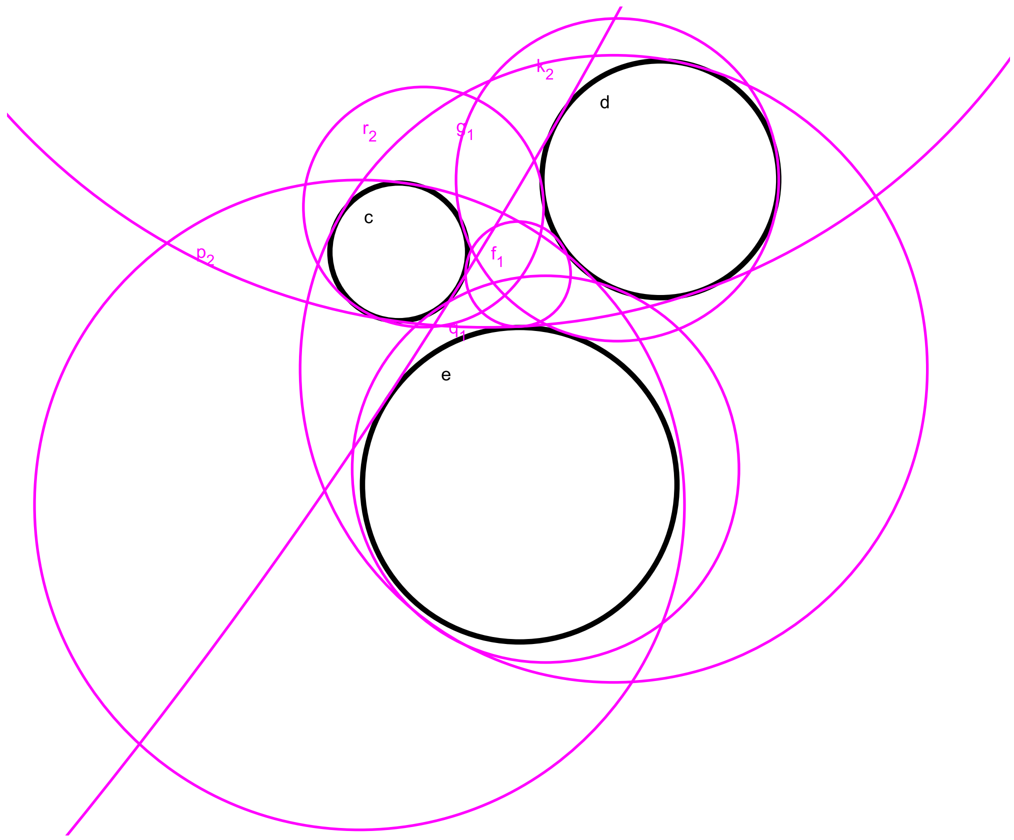

Figura 2.31: Solução (CCC) Circunferências tangente a três circunferências dadas

6. Agora traçamo uma reta tangente entre o ponto A e a circunferência w', tendo como interseção o ponto C;

7. Traçamos uma circunferência e com centro em A que passe por C, esta circunferência intersepta a reta b nos pontos P e Q, estes são conhecidos como pontos mágicos;

8. Agora calculamos os inversos dos pontos P e Q em relação a circunferência k, encontramos assim os pontos P' e Q' respectivamente;

9. Escolhendo um destes pontos, em nosso caso usaremos o ponto P';

10. Agora construimos uma circunferência f de centro P' e raio qualquer;

11. Calculamos as inversas das circunferências W_1 e W_2 em relação a circunferência f;

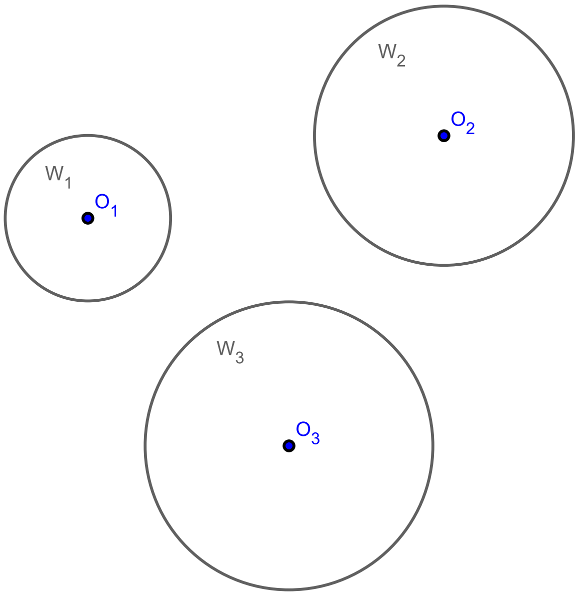

Figura 2.32: Três circunferências exteriores

12. Sendo assim encontramos as circunferências W_1' e W_2' respectivamente, sendo as mesma concentricas no ponto M;

13. Agora calculamos a inversa da outra circunferência a encontramos a circunferência W_3' que passa pelo ponto P', a mesma se encontra entre w_1' e w_2' como queriamos;

14. Encubrindo alguns outros detalhes teríamos;

15. A nossa meta agora e encontrar circunferências que sejam tangente a circunferência W_1' , W_2' e W_3';

16. Vamos traçar uma reta i passando pelo ponto O, esta intersecta W_1' e W_2' nos pontos T e R;

17. Agora traçamos uma circunferência W_1' no ponto R, esta intersepta a reta i no ponto V e U;

18. Assim calculamos W o ponto médio de O e V, como se vê na Figura 2.10;

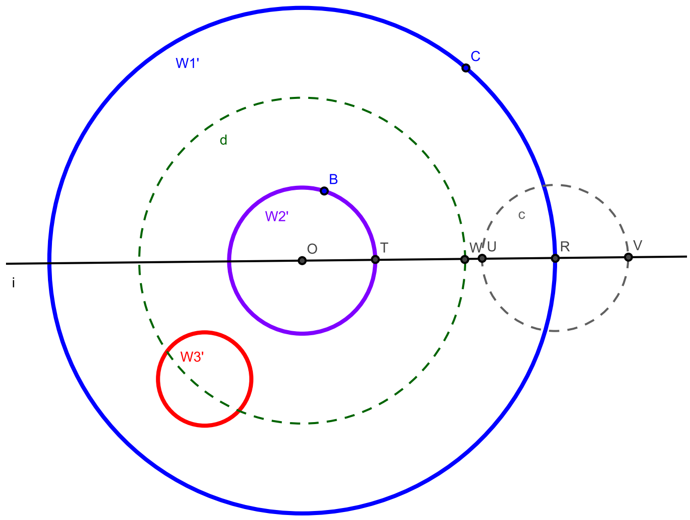

Figura 2.33: Duas Circunferências concentricas e outra circunferências interna

19. Depois traçamos uma circunferência s de centro O que passe por W;

20. Agora calculamos a distância do segmento $\overline{TW}$ e a medida do raio da circunferência a' de centro Z que passa por X;

21. Vamos construir uma circunferência de centro Z e raio $\overline{TW}+\overline{ZX}$, está intersepta a circunferência s nos pontos A_1 e B_1;

22. Basta construirmos uma circunferência v de centro B_1 e raio $\overline{TW}$;

23. Assim encontramos uma circunferência t tangente a circunferência W_1', W_2' e W_3';

24. Agora quando invertemos a circunferência t em relação a circunferência k, encontramos uma circunferência p tangente a reta a e tangente as circunferências W_1 e W_2.

25. Façamos os mesmos procedimentos para o ponto A_1;

26. Serguindo os passos encontramos outra circunferência;

27. De forma semelhante encontramos outra circunferências de centro Z e raio $\overline{TW}-\overline{ZX}$, marcamos estes pontos na circunferência s, com estes pontos encontramos mais duas circunferências;

28. Para finalizarmos a Figura 2.10 mostra as quatro circunferências desejadas.

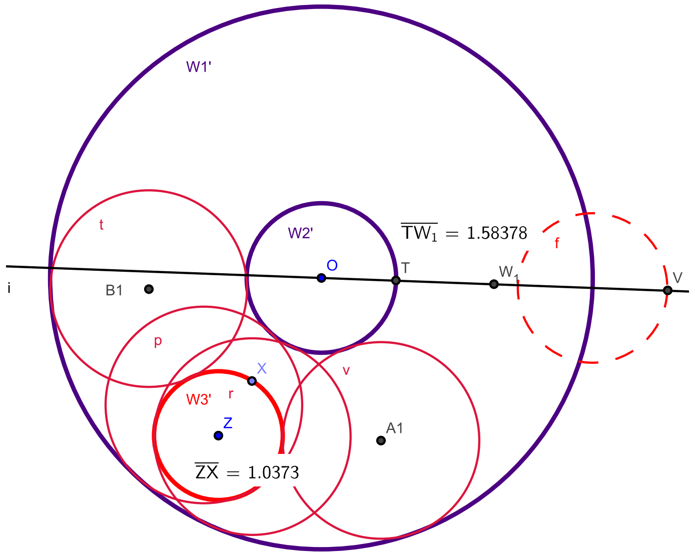

Figura 2.34: Circunferências tangente as circunferências concentricas e a interna

29. Para encontrar as outras circunferências iremos trabalhar M_1 o ponto médio de $\overline{OU}$;

30. Traçamos uma circunferência g de centro O que passe no ponto M_1;

31. Vamos construir uma c circunferência cujo centro é Z e o raio é $\overline{ZX} + \overline{M_1R}$ está intersepta a circunferência g nos pontos A e H;

32. Agora construimos circunferência com centro em A a raio $\overline{M_1R}$, esta circunferência é tangente a W_1', W_2' e W_3';

33. fazemos o mesmo com o ponto H, encontrando outra circunferência tangente a W_1', W_2' e W_3';

34. De forma análoga construimos uma circunferência com centro em Z e raio $\overline{M_1R} - \overline{ZX}$

35. Repetindo os procedimentos encontramos outras duas circunferências tangentes a W_1', W_2' e W_3';

36. Assim fazemos a solução de todos os casos quando desinvertendo estas

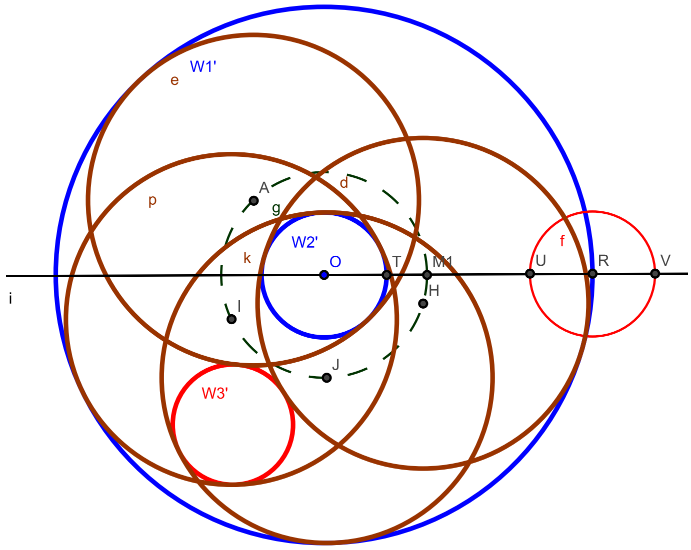

Figura 2.35: Traçando a inversa das circunferências tangentes

circunferências como mostra a figura. ■

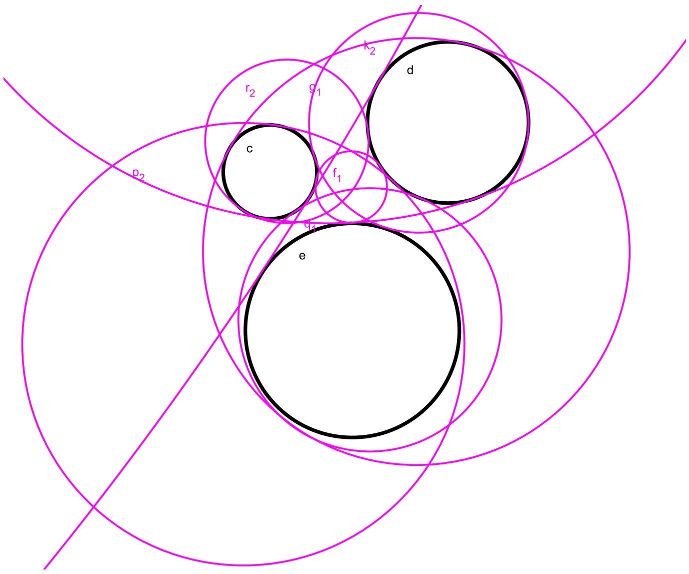

Figura 2.36: Solução (CCC) Circunferências tangentes a três circunferências dadas

Referências Bibliográficas

[1] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo - Volume 1*, LTC. 5a edição. São Paulo, 2001.

[2] Eves. H: *Introdução a História da Matemática*, Ed. UNICAMP (2004).

[3] Araújo P.V. *Curso de Geometria*, Coleção Trajectos Ciências, Ed. Gradiva (1998).

[4] Barbosa, J.L.M. *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção Professor de Matemática, ed. SBM (1994).

[5] Reventós, T.A. *Geometria Inversiva*, Departamento de Matemática, Universidade Autónoma de Barcelona.

[6] COURT, N. A. *The problem of Apollonius*, Mathematics Teacher, 54, 1961 p. 444-452.

[7] ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. *Tendências didático pedagógicas no ensino de Geometria*, um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs.

[8] PAVANELLO, R. M. *Porque ensinar/aprender Geometria?*, In: VII EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo, 2004.

[9] SANTOS, S. A.; TREVISAN, A. L. *O problema de Apolônio*, aspectos históricos e computacionais. In: Relatório de pesquisa: Fapesp n. 02/13369-8, 2002.

[10] SPIRA, M. *Como Transformar Retas em Círculos e Vice Versa*, A inversão e construções geométricas. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2004.

[11] http://www-groups.des.st-and.ac.uk/history/mathematicians/apollonius.html

[12] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar* Vol. 2.